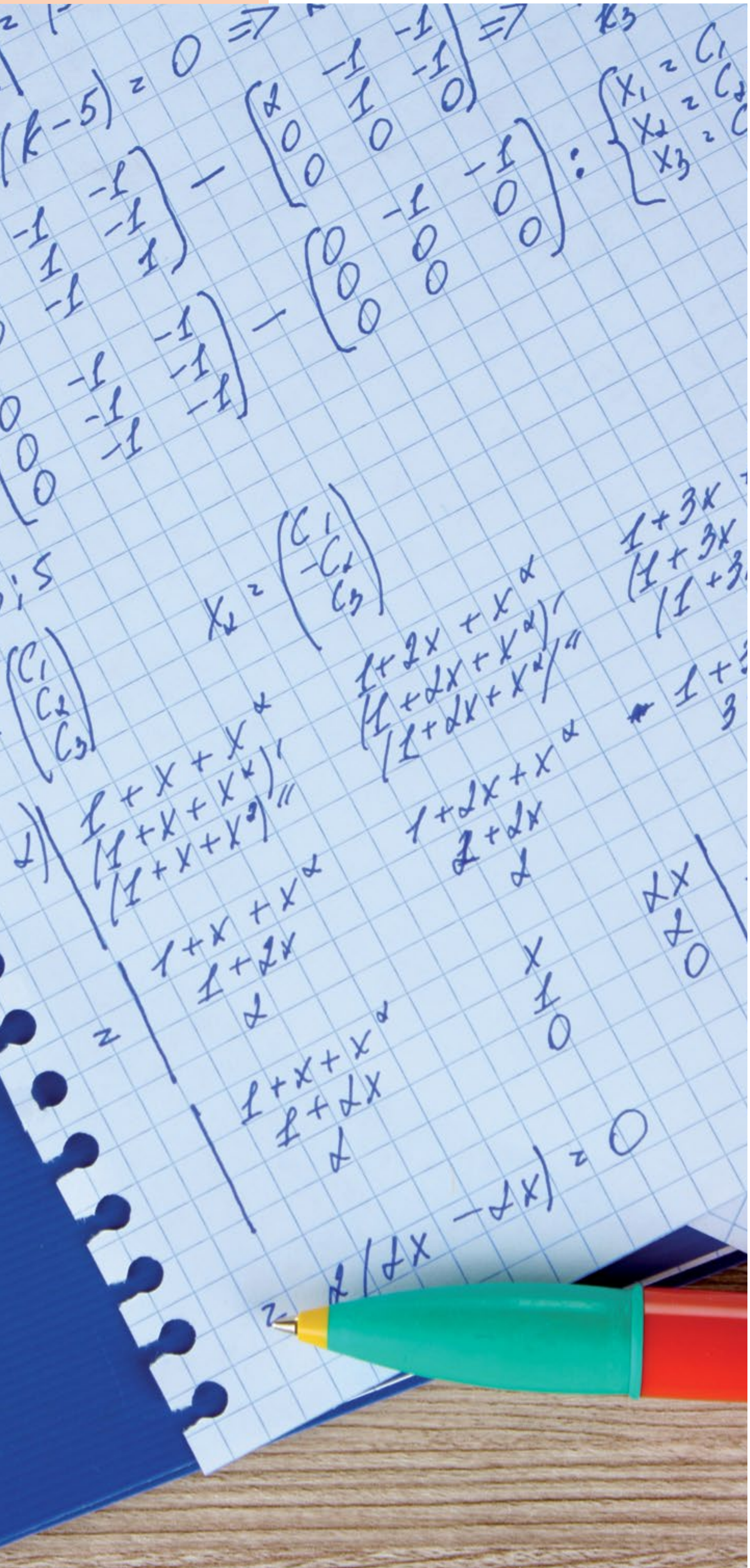
Unidad 5

Vectores y matrices



Competencia

3. Aplica conocimientos sobre funciones, matrices, geometría y vectores, en situaciones que promueven el mejoramiento y transformación del medio natural, social y cultural de su contexto.

Para responder...

¿Cuándo un sistema de ecuaciones lineales se puede representar como una matriz aumentada?

- Investiga cuál es la diferencia entre el método de Gauss y el de Gauss-Jordan.

Las matemáticas en el tiempo

300 a. C. — **China.** En el libro *El arte matemático* se resuelven algunos problemas con ecuaciones mediante matrices.

400 a. C. — **Grecia.** Thymaridas de Paros, matemático griego, creó un método geométrico para resolver un sistema de *n* ecuaciones con *n* incógnitas que se conoció como la "flor" o "floración de Thymaridas".

1704 d. C. — Nace Gabriel Cramer, matemático suizo, quien más tarde actualizaría el concepto de determinante, algoritmo que Leibniz hubiera utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

1881 d. C. — El físico y químico estadounidense Josiah Willard Gibbs publica sus estudios acerca del análisis de vectores, profundizando en la teoría del cálculo vectorial y su aplicación en Física.

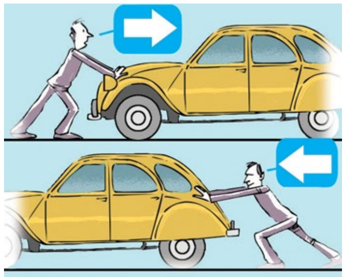
1895 d. C. — **Inglaterra.** Muere Arthur Cayley, matemático británico que fue considerado el padre del álgebra lineal al introducir el concepto de matriz y estudiar sus diversas propiedades.

Magnitudes escalares y vectoriales

Las magnitudes que quedan definidas mediante un único número se llaman magnitudes escalares.

En las magnitudes vectoriales no basta con dar un valor numérico para determinarlas, sino que necesitamos conocer su dirección y sentido.

Son magnitudes escalares: la longitud, la masa, el tiempo, la temperatura…



Y son magnitudes vectoriales: la velocidad, la fuerza…

El efecto de una fuerza depende de la dirección en que la apliquemos.

Así, no es lo mismo desplazarse a una velocidad en una dirección u otra.

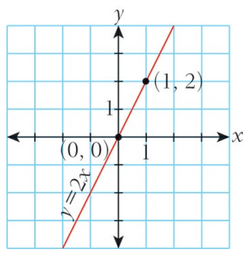
Repasa

Escribe varios ejemplos de magnitudes escalares y vectoriales.

Representación de rectas

Para representar una recta hay que calcular dos de sus puntos y unirlos mediante una línea recta.

Representamos la recta $y = 2x$.



- Para calcular dos puntos de esta recta damos valores a x:

  Para $x = 0 \rightarrow y = 2 \times 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$
  Para $x = 1 \rightarrow y = 2 \times 1 = 2 \rightarrow (1, 2)$

- Representamos los puntos (0, 0) y (1, 2) y los unimos mediante una línea recta.

Repasa

Representa estas rectas.

$y = -2x$ $\quad$ $y = -x + 1$ $\quad$ $y = 2x - 2$

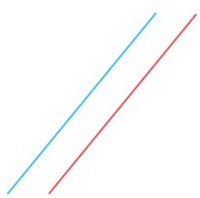
$y = \frac{x}{2}$ $\quad$ $y = \frac{-x-1}{2}$ $\quad$ $y = \frac{x}{2} - 1$

Posiciones relativas de dos rectas en el plano

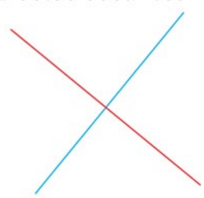
Paralelas: no tienen ningún punto en común.
Coincidentes: todos sus puntos son comunes.
Secantes: solo tienen un punto en común.

Un caso particular de las rectas secantes son las rectas perpendiculares, que son secantes y dividen el plano en cuatro partes iguales, es decir, el ángulo que forman las dos rectas al cortarse es de 90°.

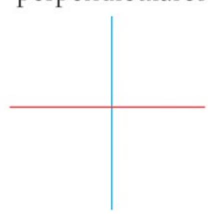
Rectas paralelas

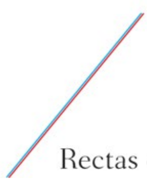


Rectas secantes



Rectas perpendiculares





Rectas coincidentes

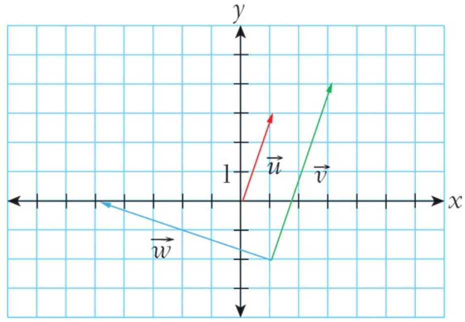
Repasa

Dibuja dos rectas paralelas, *r* y *s*. Después traza una perpendicular a la recta *r* y otra a la recta *s*. ¿Cómo son las rectas que has dibujado?

Vectores paralelos y perpendiculares

Dos vectores paralelos son de la forma $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (ku_1, ku_2)$, con $k \in \mathbb{R}$.

Dos vectores perpendiculares son de la forma $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (-ku_2, ku_1)$, con $k \in \mathbb{R}$.



Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos porque $\vec{u} = (1, 3)$ y $\vec{v} = (2 \times 1, 2 \times 3) = (2, 6)$.

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares porque $\vec{u} = (1, 3)$ y $\vec{w} = (-2 \times 3, 2 \times 1) = (-6, 2)$.

Repasa

Determina cuáles de estos vectores son paralelos y cuáles son perpendiculares a $\vec{v} = (-2, 1)$.

$\vec{v}_1 = (-6, 3)$ $\qquad$ $\vec{v}_2 = (-2, -4)$ $\qquad$ $\vec{v}_3 = (8, -4)$

Tipos de matrices cuadradas

La diagonal principal de una matriz cuadrada está formada por todos los elementos de la forma a_{ii}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

Hay una matriz identidad de cada orden.

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz identidad de orden 2

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz identidad de orden 3

Según sean los elementos que forman una matriz cuadrada, esta puede ser:

- **Matriz triangular superior**
  Todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular inferior**
  Todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal**
  Todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz identidad o matriz unidad**
  Es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son unos. Se denota por I.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Repasa

Decide de qué tipo es cada una de estas matrices cuadradas.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $D = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

Vectores

Indicadores de logro

3.5. Representa gráficamente vectores.

3.6. Utiliza métodos para resolver problemas y operaciones entre vectores y matrices.

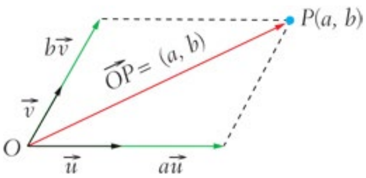
3.8. Resuelve sistemas de ecuaciones aplicando métodos matriciales.

Un vector es un segmento orientado que queda determinado por dos puntos, A y B, y el orden de estos. El primero de los puntos se denomina origen y el segundo es el extremo, y se escribe $\overrightarrow{AB}$.

Sistema de referencia

Un sistema de referencia en el plano, $R = \{O, [\vec{u}, \vec{v}]\}$, está formado por un punto fijo O y una base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Mediante un sistema de referencia, a cada punto P se le asocia un vector $\overrightarrow{OP}$. Las coordenadas del punto P son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.



Coordenadas de un vector

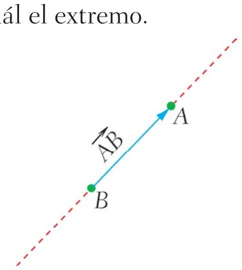
En el sistema de referencia cartesiano, las coordenadas de un vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del punto extremo menos las del punto origen:

$$\left.\begin{matrix} A(a_1, a_2) \\ B(b_1, b_2) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

Dado un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$, su módulo es: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Recuerda

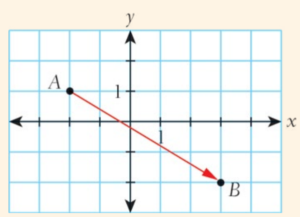
Los elementos de un vector son:
Módulo: longitud del segmento AB.
Dirección: recta sobre la cual está situado el vector.
Sentido: forma de recorrer el segmento AB, es fijar cuál punto es el origen y cuál el extremo.



Dos vectores son equivalentes cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

Ejemplo 1. Calcula las coordenadas y el módulo de este vector.

$$\left.\begin{matrix} A(-2, 1) \\ B(3, -2) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (3 - (-2), -2 - 1) = (5, -3)$$



Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son $(5, -3)$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = 5.83$$

El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es 5.83.

Vectores paralelos

Dos vectores son paralelos cuando tienen la misma dirección y no se intersectan en ningún punto por más que se prolonguen.

En coordenadas, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son paralelos si $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$.

Ejemplo 2. Comprueba que $\vec{u} = (-2, 8)$ es paralelo a $\vec{v} = (1, -4)$.

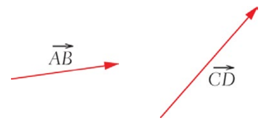
Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos, porque: $\frac{-2}{1} = \frac{8}{-4}$

Operaciones con vectores

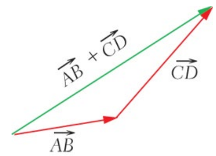
Las operaciones que se pueden efectuar entre dos o más vectores son:

Adición y sustracción de vectores de forma gráfica

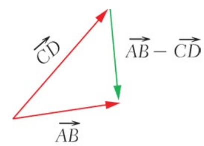
- Para sumar dos vectores, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, tomamos un vector equivalente a $\overrightarrow{CD}$ cuyo origen sea el extremo de $\overrightarrow{AB}$.



- La suma es el vector cuyo origen es el origen de $\overrightarrow{AB}$, y su extremo, el extremo de $\overrightarrow{CD}$.



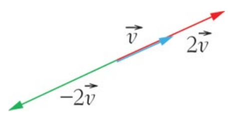
- Para restar dos vectores, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, tomamos un vector equivalente a $\overrightarrow{CD}$ cuyo origen sea el origen de $\overrightarrow{AB}$.
- La diferencia es el vector que tiene su origen en el extremo de $\overrightarrow{CD}$, y su extremo, en el extremo de $\overrightarrow{AB}$.



Multiplicación gráfica de un vector por un número real

Dado un vector $\vec{v}$, para calcular $2\vec{v}$ y $-2\vec{v}$:

- Multiplicamos el módulo del vector por k.
- Mantenemos el origen y la dirección del vector.
- El sentido será igual si $k > 0$, y contrario, si $k < 0$.



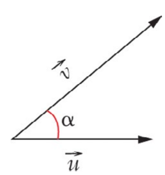
Operaciones con coordenadas

- La suma de dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es otro vector $\vec{u} + \vec{v}$ con coordenadas: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- La resta de dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es otro vector $\vec{u} - \vec{v}$ con coordenadas: $\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2) - (v_1, v_2) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$
- El producto de un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ por un número real k es otro vector $k \times \vec{v}$, con coordenadas: $k \times \vec{v} = k \times (v_1, v_2) = (k \times v_1, k \times v_2)$. El módulo del vector $k \times \vec{v}$ es k veces el módulo de $\vec{v}$: $|k \times \vec{v}| = |k| \times |\vec{v}|$

Producto escalar

Es el número que resulta al multiplicar los módulos de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por el coseno del ángulo que forman.
Se escribe:

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times \cos\alpha$$



Ejemplo 1. **Halla el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (4, 0)$ y $\vec{v} = (1, 1)$, sabiendo que el ángulo que forman es de 45°.**

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4 \\ |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times \cos 45° = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$$

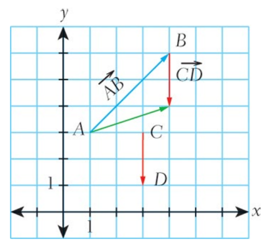
Date cuenta

Dados los puntos $A(1, 3)$, $B(4, 6)$, $C(3, 3)$ y $D(3, 1)$

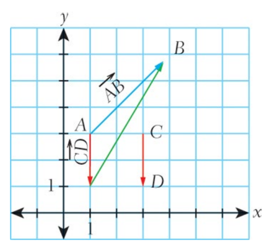
$\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 6 - 3) = (3, 3)$

$\overrightarrow{CD} = (3 - 3, 1 - 3) = (0, -2)$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (3, 3) + (0, -2) = (3, 1)$



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (3, 3) - (0, -2) = (3, 5)$

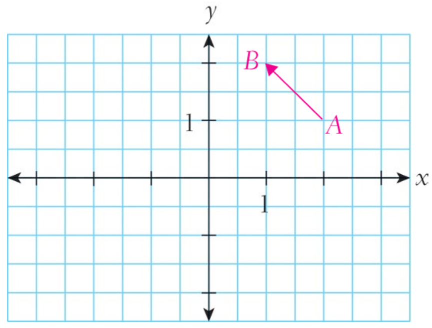


Actividades

Vectores/3.5./Aplicar

Dibuja los puntos y calcula las coordenadas y el módulo para cada uno de ellos.

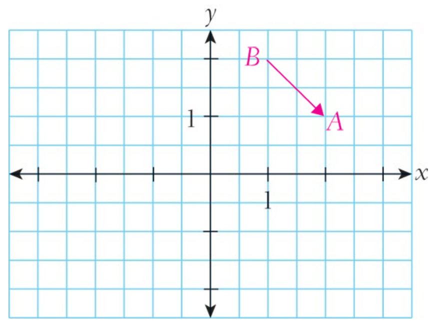
1. $A(2, 1)$ y $B(1, 2)$



Coordenadas $\overrightarrow{AB} = (-1, 1)$

Módulo $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$

2. $B(1, 2)$ y $A(2, 1)$



Coordenadas $\overrightarrow{BA} = (1, -1)$

Módulo $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{2}$

Vectores/3.5./Analizar

Encuentra cuáles de los vectores son paralelos entre sí.

3. $\vec{A} = (2, 1)$

4. $\vec{B} = (-2, -1)$

5. $\vec{C} = (-2, 1)$

6. $\vec{D} = (2, -1)$

7. $\vec{E} = (4, 2)$

8. $\vec{F} = (-6, 3)$

Los vectores *A*, *B* y *E* son paralelos. *C*, *D* y *F* son paralelos.

Vectores/3.5./Aplicar

Encuentra tres vectores paralelos a los siguientes vectores. R.L.

9. $\vec{A} = (1, 1)$

10. $\vec{B} = (3, 2)$

11. $\vec{C} = (0, 1)$

12. $\vec{D} = (1, -5)$

Vectores/3.5./Evaluar

Comprueba si los vectores son paralelos.

13. $\vec{u} = (-4, 12)$, es paralelo a $\vec{v} = (1, -3)$.

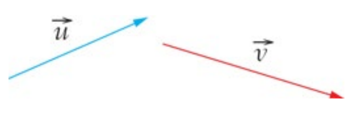
Sí es paralelo, porque: $\frac{-4}{1} = \frac{12}{-3}$

14. $\vec{x} = (-3, 6)$ es paralelo a $\vec{y} = (1, -6)$.

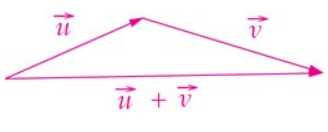
No es paralelo, porque: $\frac{-3}{1} \neq \frac{1}{-6}$

Operaciones con vectores/3.6./Aplicar

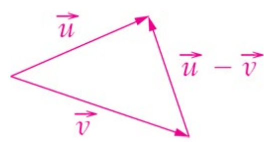
Copia estos vectores y calcula gráficamente cada operación.



15. $\vec{u} + \vec{v}$



16. $\vec{u} - \vec{v}$



Operaciones con vectores/3.6./Aplicar

Dados los puntos $A(0, 3)$, $B(2, 1)$, $C(-2, 2)$ y $D(-3, 4)$, halla los vectores.

17. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ (3, −4)

19. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA}$ (−7, 2)

18. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ (−1, −3)

20. $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD}$ (7, −2)

Operaciones con vectores/3.6./Aplicar

Dados $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 3)$, realiza las operaciones de vectores.

21. $\vec{u} - 3\vec{v}$ (2, −10)

22. $5\vec{u} + \vec{v}$ (10, −2)

23. $-\vec{u} + 2\vec{v}$ (−2, 7)

Operaciones con vectores/3.6./Aplicar

Sean los vectores $\vec{u} = (0, 2)$, $\vec{v} = (1, -1)$ y $\vec{w} = (0, -1)$, calcula.

24. $\vec{w} \times \vec{v} =$ 1

26. $\vec{u} \times \vec{w} =$ −2

28. $\vec{u} \times \vec{v} =$ −2

25. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) =$ −4

27. $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w}) =$ 2

29. $-2\vec{u} \times 3\vec{v} =$ 12

Operaciones con vectores/3.6./Analizar

Analiza y responde. R.M.

30. El producto escalar de dos vectores coincide con el producto de sus módulos. ¿Qué puedes decir de los vectores?

Para que el producto escalar de dos vectores coincida con el producto de sus módulos, tiene que verificarse que $cos\alpha = 1$. Por tanto, los vectores deben tener igual dirección y sentido.

31. Realiza el producto escalar de los siguientes vectores. ¿Qué deduces del resultado?

$\vec{u} = (3, 2)$ $\vec{v} = (4, 6)$

$\vec{u} \times \vec{v} = 0$

El producto de vectores no nulos puede ser cero.

Operaciones con vectores/3.6./Aplicar

Calcula el ángulo que forman estos vectores expresados en coordenadas. Toma en cuenta que la expresión para hallar las coordenadas está dada por:

$$cos\alpha = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u}| \times |\vec{v}|} = \frac{u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \times \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

32. $\vec{u} = (1, -3)$
$\vec{v} = (2, 3)$

127° 52‘ 29.9″

33. $\vec{u} = (-1, 2)$
$\vec{v} = (4, 3)$

79° 41‘ 42.55″

34. $\vec{u} = (2, 1)$
$\vec{v} = (-5, 1)$

142° 7‘ 30″

Operaciones con vectores/3.6./Analizar

Lee y resuelve.

35. ¿Qué condiciones tienen que cumplir los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 0$?

Que los módulos de ambos vectores sean iguales, es decir, $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

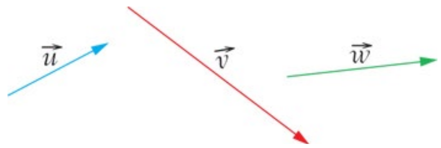
36. Con el resultado del ejercicio anterior, demuestra que si un paralelogramo tiene las diagonales perpendiculares, solo puede ser un cuadrado o un rombo.

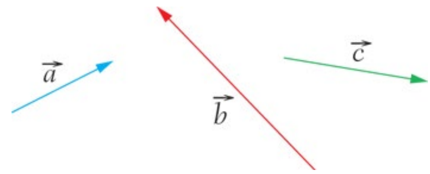
Si las diagonales son perpendiculares, los módulos miden lo mismo, por lo que solo puede ser un cuadrado o un rombo.

Más práctica

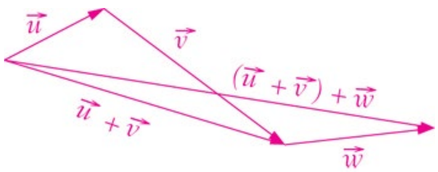
Operaciones con vectores/3.6./Recordar

Copia los vectores y realiza las operaciones.

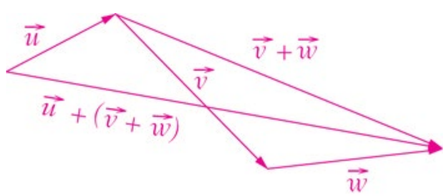




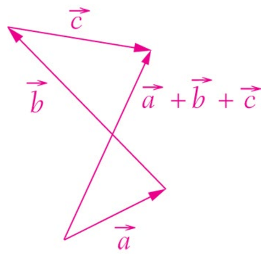
37. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$



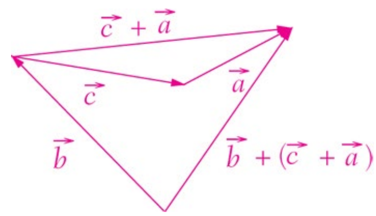
38. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$



39. $\vec{a}+\vec{c}$

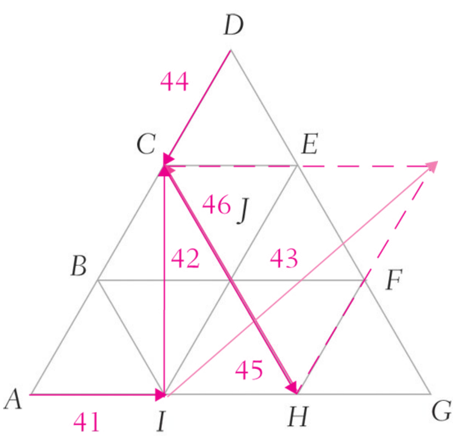


40. $\vec{b}+(\vec{c}+\vec{a})$



Operaciones con vectores/3.6./Recordar

A la vista de la siguiente figura, realiza las operaciones indicadas y encuentra, en forma gráfica, el vector resultante para cada operación.



41. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$

42. $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EF}$

43. $\overrightarrow{IH}+2\overrightarrow{BC}$

44. $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DC}$

45. $\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{IE}$

46. $2\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{CD}$

Operaciones con vectores/3.6./Comprender

Asigna una medida y dirección diferente a los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y calcula gráficamente, en tu cuaderno, las operaciones indicadas. R.L.

47. $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$

48. $\vec{a}+2(3\vec{b}-\vec{c})$

Operaciones con vectores/3.6./Evaluar

Si $\vec{u}=(a,b)$, $\vec{v}=(c,d)$ y $\vec{w}=(e,f)$, prueba que se cumplen las igualdades.

49. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

$(c,d)+(a,b)=\vec{v}+\vec{u}$

50. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

$\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}=ac+bd+ae+bf$

51. $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\times\vec{u}-\vec{v}\times\vec{v}$

$= a^2 + b^2 + 2ac + 2bd + c^2 + d^2$

52. $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\times\vec{u}+2\vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{v}$

$= a^2 + b^2 - c^2 - d^2$

Operaciones con vectores/3.6./Aplicar

Considera que A, B, C y D son los vértices de un cuadrado de lado 1 cm. Calcula los siguientes productos escalares.

53. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=$ 0

54. $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}=$ 0

55. $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{CB}=$ −1

56. $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{CB}=$ −1

Operaciones con vectores/3.6./Analizar

Lee y resuelve.

57. Calcula el perímetro de un triángulo cuyos vértices están situados en los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 2)$, y $C(-1, 3)$.

El perímetro mide 8.36.

58. ¿Podrías conseguir un vector $\vec{a}$ tal que $\vec{a}\times\vec{b}=5$, siendo $\vec{b}=(2,1)$, y que sea perpendicular a $\vec{c}=(2,6)$?

$a = 3$ y $b = -1$

59. ¿Cuál es el ángulo que deben formar dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, para que sus módulos coincidan con el módulo de su diferencia, $\vec{a}-\vec{b}:|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$?

Deben formar un ángulo de 60°.

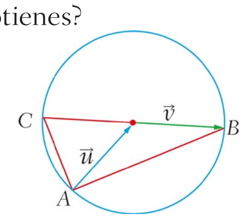
60. Calcula el valor de t para que $\vec{u}\times\vec{v}=7$, si $\vec{u}=(-1,2)$ y $\vec{v}=(3,t)$. Luego halla el módulo de los vectores.

$t=5, |\vec{u}|=\sqrt{5}, |\vec{v}|=\sqrt{34}$

61. Encuentra el valor de m para que los vectores $\vec{a}=(8,-6)$ y $\vec{b}=(m,3)$ formen entre ellos, un ángulo de 60°.

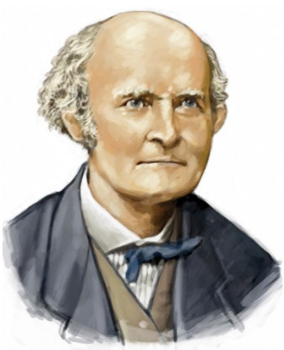
$m=\dfrac{736}{255}\pm\dfrac{\sqrt{4.411}}{255}$

62. El lado mayor de este triángulo es un diámetro de la circunferencia. Realiza el producto escalar $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ y simplifica todo lo posible. ¿Qué resultado obtienes?



Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son iguales, ya que son radios de la circunferencia.

Matrices



Arthur Cayley
1821–1895

Matemático británico. Fue uno de los matemáticos más prolíficos, publicó más de 900 artículos científicos. Fue considerado el padre del álgebra lineal al introducir el concepto de matriz y estudiar sus diversas propiedades.

Una matriz de m filas y n columnas es una tabla de $m \times n$ números reales ordenados en m filas y n columnas.

Los números a_{ij} son los elementos de la matriz, y en ellos el subíndice i indica la fila que ocupan, y el subíndice j, la columna.

La dimensión de una matriz de m filas y n columnas es $m \times n$.

Matrices iguales

Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y, además, los elementos coinciden término a término.

$$A \text{ y } B \text{ son iguales} \rightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ para cualquier valor de } i, j.$$

Clasificación de matrices

- Una matriz fila es una matriz que tiene una sola fila y n columnas. Su dimensión es $1 \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- Una matriz columna es una matriz con m filas y una sola columna. Su dimensión es $m \times 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- Una matriz nula, o matriz cero, es una matriz en la que todos sus elementos son ceros. Se representa por 0.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Una matriz cuadrada tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir, está formada por n filas y n columnas. Si su dimensión es $n \times n$, diremos que su orden es n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Una matriz rectangular tiene distinto número de filas que de columnas, es decir, no es cuadrada.

Date cuenta

Hay una matriz nula para cada dimensión.

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Matriz nula de dimensión 2×1

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ Matriz nula de dimensión 1×2

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Matriz nula de orden 2

Ejemplo 1. **Determina la dimensión de esta matriz e identifica los elementos a_{23} y a_{32}.**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La matriz A está formada por 3 filas y 4 columnas; por tanto, su dimensión es 3×4. Se observan la fila y la columna que indican los subíndices.

$a_{23} = 1$
2.ª fila 3.ª columna

$a_{32} = 3$
3.ª fila 2.ª columna

Operaciones con matrices

Para resolver operaciones con matrices se cumplen ciertas condiciones.

Adición de matrices
La matriz suma de dos matrices del mismo orden se obtiene sumando los elementos de ambas matrices que están en la misma fila y en la misma columna. Se denota:

$$A + B = C, \text{ siendo } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Ejemplo 1. Suma las matrices, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

Las matrices A y B tienen la misma dimensión.

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & -2+5\\ 3+(-1) & -3+(-4)\\ 0+2 & 4+(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & -7\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Producto de una matriz por un número real
El producto de $k \times A$ es otra matriz de la misma dimensión que A cuyos elementos se obtienen al multiplicar cada uno de los elementos de A por k.

$$k \times A = C, \text{ siendo } c_{ij} = k \times a_{ij}.$$

Ejemplo 2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ calcula $3A$.

$$3\times A=3\times\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times 0 & 3\times(-1)\\ 3\times 2 & 3\times(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 6 & -9\end{pmatrix}$$

Producto de una matriz fila por una matriz columna
Es la matriz de un solo elemento. Se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ \cdots\\ b_{n1}\end{pmatrix}= a_{11}\times b_{11} + a_{12}\times b_{21} + \ldots + a_{1n}\times b_{n1}$$

Ejemplo 3. Dadas la matrices $A=\begin{pmatrix}5 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. calcula A × B.

$$\begin{pmatrix}5 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\times4+(-3)\times0+4\times1 & 5\times2+(-3)\times5+4\times3\\ 0\times4+1\times0+2\times3 & 0\times2+1\times5+2\times3\end{pmatrix}$$

$$A\times B=\begin{pmatrix}20-0+4 & 10-15+12\\ 0+0+6 & 0+5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24 & 7\\ 6 & 11\end{pmatrix}$$

Recuerda

Para que dos matrices se puedan sumar deben tener la misma dimensión.

Como la suma de matrices se realiza elemento a elemento, cumple propiedades análogas a las de la suma de números reales.

Conmutativa: $A + B = B + A$
Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
Elemento neutro: el elemento neutro de la suma es la matriz nula.
$$A + 0 = A$$
Elemento opuesto: para cada matriz A, existe su matriz opuesta, $-A$, formada por los opuestos de los elementos de A.
$A + (-A) = 0$

$$=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Date cuenta

Para multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz.

Actividades

Matrices/3.6./Recordar

Escribe en tu cuaderno dos ejemplos de distinta dimensión para cada tipo de matriz. R.L.

63. Matriz fila

64. Matriz columna

65. Matriz diagonal

66. Matriz identidad

67. Matriz triangular superior

68. Matriz triangular inferior

Matrices/3.6./Recordar

Clasifica las siguientes matrices.

69. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

A es una matriz cuadrada de orden 2.

70. $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

B es una matriz columna de dimensión 2×1.

71. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C es una matriz fila nula de dimensión 1×3.

Matrices/3.6./Comprender

La tabla muestra los partidos jugados por dos equipos de futbol durante la liga. Escribe la información en forma de matriz. Luego responde qué significa cada descripción.

	Partidos ganados	Partidos empatados	Partidos perdidos
Equipo A	16	0	8
Equipo B	14	1	10

72. Matriz

$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 8 \\ 14 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

73. Descripción de la matriz.

En una matriz 2×3. Dos filas por tres columnas.

74. $a_{11} = 16$

El equipo *A* ha ganado 16 partidos.

75. $a_{23} = 10$

El equipo *B* ha perdido 10 partidos.

76. $a_{11} + a_{12} + a_{13} = 24$

El equipo *A* ha jugado en total 24 partidos.

77. $a_{21} = 14$

El equipo *B* ha ganado 14 partidos.

78. $a_{21} + a_{22} = 15$

El equipo *B* no ha perdido en 15 partidos.

79. $a_{13} + a_{23} = 18$

Entre los dos equipos han perdido 18 partidos.

Matrices/3.6./Aplicar

Calcula el valor de x que hace verdadera cada igualdad.

80. $\begin{pmatrix} x^2+3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4-4x & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

$x = -1$

81. $\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2x & -5 \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$x = 3$

Matrices/3.6./Aplicar

Determina los valores para que se cumpla que $A = B$.

82. Valores de x y y.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x+3 \\ 3 & x & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 3 & 2y-5 & -4 \end{pmatrix}$$

$x = -1 \quad y = 2$

83. Valores de a, b, c y d.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 & 2 \\ c+2 & 3-a & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & b+1 & d-1 \\ 2c & 1 & b+2 \end{pmatrix}$$

$a = 2 \quad b = 4 \quad c = 2 \quad d = 3$

Operaciones con matrices/3.6./Aplicar

Dada las matrices, realiza las operaciones.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 12 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix}$

84. $A \times B =$ 12

85. $2A \times 3B =$ 72

86. $(-2B) \times A =$ −24

87. $F \times C =$ 395

88. $3F \times 2C =$ 2 370

89. $2F \times C =$ 790

90. $P \times Q =$ 244

91. $P \times 2Q =$ 488

92. $(-3P) \times Q =$ −732

Lee y resuelve.

Operaciones con matrices/3.6./Analizar

93. Un importador de suministros electrónicos tiene pedidos de dos tiendas de mayoreo según se muestra en las tablas. ¿Cuántas memorias de cada tipo y capacidad debe entregar?

Almacenes Sol

	Memoria USB	Memoria expandible
8 GB	2 984	6 548
16 GB	3 564	7 458

Comercial Lima

	Memoria USB	Memoria expandible
8 GB	3 254	6 984
16 GB	4 589	9 520

Memoria de 8 GB, 6 238 USB y 13 532 expandibles.

Memoria de 16 GB, 8 153 USB y 16 978 expandibles.

94. Al curar las plantas P, Q y R con pesticidas, ellas absorben parte de estas sustancias. Luego los herbívoros, al comer estas plantas, también absorben parte de estas sustancias. Indica la cantidad (mg) de pesticida absorbida por cada herbívoro, según las tablas.

Cantidad (mg) de pesticida absorbida por las plantas

	P	Q	R
Pesticida 1	2	3	4
Pesticida 2	3	2	2

Cantidad de plantas que semanalmente comen los herbívoros

	Herbívoro 1	Herbívoro 2
P	20	12
Q	28	15
R	30	12

Herbívoro 1 absorbe 244 del pesticida 1 y 176 del pesticida 2.

Herbívoro 2 absorbe 117 del pesticida 1 y 90 del pesticida 2.

Determinante

Es el valor numérico que le corresponde a toda matriz cuadrada, de orden 2; 3; 4; etc. El determinante de una matriz cuadrada M se representa como $|M|$ y su valor es un número real.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow |M| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Girolamo Cardano
1545

En su obra *Ars Magna* da una regla para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales que se llama regla de modo.

Esta regla corresponde en esencia a la conocida regla de Cramer para la resolución de un sistema 2 × 2.

Elementos de un determinante

$$|M| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \rightarrow \text{Fila}$$

Columna

Diagonal principal $\leftarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \rightarrow$ Diagonal secundaria

Determinante de matriz 2 × 2

El determinante $|M|$ de una matriz cuadrada de orden 2 × 2 es el número real que resulta de restar al producto de los elementos de la diagonal principal ($a_{11}\,a_{22}$) el producto de los elementos de la diagonal secundaria ($a_{12}\,a_{21}$).

$$|M| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad |M| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad |M| = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Ejemplo 1. Halla el determinante de la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (5)(-1) = 12 + 5 = 17$$

Ejemplo 2. Halla el determinante de las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$, luego comprueba que $|A| = |B|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (6)(3) - (-3)(2) = 18 + 6 = 24$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = (-2)(8) - (10)(-4) = -16 + 40 = 24$$

Entonces $|A| = |B|$ porque $24 = 24$.

Ejemplo 3. Determina en $\begin{vmatrix} 4 & 2x \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ el valor de x.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2x \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (4)(-2) - 2x(1) = -8 - 2x$$

Entonces, $-8 = 2x$ de donde $x = -\frac{8}{2} = -4$.

Recuerda

Solo existen determinantes de matrices cuadradas.

Si una matriz no es cuadrada, no tiene determinante.

Actividades

Determinante de matriz 2 × 2/3.6./Aplicar

Calcula el determinante de las matrices.

95. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ 2

96. $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 10

97. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 2

98. $D = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$ 225

99. $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ -3

100. $F = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ -30

Determinante de matriz 2 × 2/3.6./Evaluar

Establece si el valor de cada determinante es el correcto. En caso de no serlo, corrígelo.

101. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$ Correcto

102. $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2$ Incorrecto, es 10

103. $\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -4 \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = \frac{4}{3}$ Correcto

104. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = -33$ Correcto

105. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -12 & -4 \end{vmatrix} = 20$ Incorrecto, es 28

106. $\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = -\frac{23}{6}$ Correcto

Determinante de matriz 2 × 2/3.6./Evaluar

Encuentra el valor de w de manera que se cumpla la condición dada.

107. $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & w \end{vmatrix} = -7$ $w = 1$

108. $\begin{vmatrix} -7 & w \\ \frac{1}{3} & 2 \end{vmatrix} = \frac{11}{3}$ $w = -53$

109. $\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ w & 8 \end{vmatrix} = 60$ $w = \frac{4}{5}$

110. $\begin{vmatrix} w & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{5}{8}$ $w = \frac{37}{8}$

Determinante de matriz 2 × 2/3.6./Recordar

Utiliza el determinante dado en cada caso para indicar si el enunciado es falso o verdadero. Si es falso, justifica tu respuesta.

111. $\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

Si en un determinante la primera fila se cambia por la primera columna y la segunda fila por la segunda columna, su valor no se altera. V

112. $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$

Si todos los elementos de un determinante son iguales, el determinante no puede ser igual a cero. F

El determinante es cero porque $= (-1)(-1) - (-1)(-1) = 0$.

Determinante de matriz 2 × 2/3.6./Analizar

Lee y resuelve.

113. Luis debe encontrar el orden de una matriz. Si sabe que el determinante de una matriz cuadrada A vale 3 y que el determinante de la matriz $2A$ vale 12, ¿cuál es el orden de la matriz A? R.M.

Es una matriz de orden 2 × 2.

114. Mariela debe comprobar si es verdadera esta igualdad $\begin{pmatrix} 15 & -5 \\ x & 0 \end{pmatrix} = |150|$. ¿Cuál es el valor de x que necesita Mariela para comprobar la igualdad?

El valor de x es 30.

Determinante de matriz 3 × 3

Recuerda

Una matriz que tiene el mismo número de filas y columnas se llama matriz cuadrada y es de orden $n \times n$. La línea formada por los términos, a_{11}, a_{22} … a_{nn} se denomina diagonal principal de la matriz cuadrada.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Un determinante formado por tres filas y tres columnas se llama determinante de tercer orden o de orden 3.

Dada una matriz cuadrada de orden 3, $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, su determinante es el número que resulta al realizar la operación:

$$|M| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Ejemplo 1. Halla el determinante correspondiente a la matriz M de orden 3.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

- Tomamos la primera y segunda columnas de la matriz principal y la colocamos a la derecha de la matriz expresada como el determinante.

$$|M| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{matrix}$$

- Trazamos las diagonales correspondientes entre las filas y las columnas que indican los productos que se deben operar.

$$|M| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{matrix}$$

$$Q \qquad\qquad P$$

- Multiplicamos los elementos que están en cada diagonal y sumamos los productos.

  $P = (1)(-2)(-1) + (2)((3)(3) + (-3)(2)(-3)$
  $= 2 + 18 + 18 = 38$

  $Q = (-3)\,(-2)(3) + (1)(3)(-3) + (2)(2)(-1)$
  $= 18 + (-9) + (-4) = 5$

- Al resultado de la primera suma de productos le restamos el resultado de la segunda suma de productos:

  $P - Q = 38 - 5 = 33$

  Por lo tanto, $|M| = 33$.

Date cuenta

A la suma de los productos que van de izquierda a derecha se le resta la suma de los productos que van de derecha a izquierda.

Sistema de ecuaciones lineales con tres variables

La solución de un sistema de tres ecuaciones lineales es la terna de valores x, y y z que satisface simultáneamente las tres ecuaciones.

Método de determinantes o regla de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas tiene cuatro determinantes:

- Uno, llamado determinante principal, formado por los coeficientes de las incógnitas x, y, z, tomados en ese mismo orden.

$$|M_p| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- Otros tres, los determinantes de las incógnitas, que se obtienen reemplazando la columna respectiva por las constantes del sistema, en ese mismo orden:

$$|M_x| = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad |M_y| = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad |M_z| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}$$

El valor del determinante se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = (\underline{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3}) - (\underline{c_1b_2a_3 + a_1c_2b_3 + b_1a_2c_3})$$

El valor de las incógnitas de un sistema se calcula así:

$$x = \frac{|M_x|}{|M_p|} \qquad y = \frac{|M_y|}{|M_p|} \qquad z = \frac{|M_z|}{|M_p|}$$

Ejemplo 1. Resuelve el sistema
$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 180 \\ x + y - z &= 30 \\ 2x + y - 2x &= -10 \end{aligned}\right\}$$

- Se expresa el sistema en forma matricial, con los valores de las incógnitas y los valores independientes.

$$\left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 1 & 1 & -1 & 30 \\ 2 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right|$$

- Calculamos el valor del determinante principal y el de cada incógnita.

$$|M_p| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \qquad |M_y| = \begin{vmatrix} 1 & 180 & 1 \\ 1 & 30 & -1 \\ 2 & -10 & -2 \end{vmatrix} = -140$$

$$|M_x| = \begin{vmatrix} 180 & 1 & 1 \\ 30 & 1 & -1 \\ -10 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -70 \qquad |M_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 180 \\ 1 & 1 & 30 \\ 2 & 1 & -10 \end{vmatrix} = -150$$

- Calculamos el valor de cada incógnita.

$$x = \frac{|M_x|}{|M_p|} = \frac{-70}{-2} = 35 \quad y = \frac{|M_y|}{|M_p|} = \frac{-140}{-2} = 70 \quad z = \frac{|M_z|}{|M_p|} = \frac{-150}{-2} = 75$$

El conjunto solución del sistema es (35, 70, 75).

Recuerda

Para utilizar determinantes, el sistema de ecuaciones debe cumplir lo siguiente:

- Tener igual número de ecuaciones que de incógnitas.
- El determinante principal debe ser diferente de cero.

Calculadora

La calculadora científica nos permite realizar operaciones combinadas utilizando paréntesis.

Así para comprobar una ecuación sustituyes los valores.

$$2x + y - 2z = -10$$

((2 × 35) + (1 × 70) + (−2 × 75)) = −10

Actividades

Determinante de matriz 3 × 3/3.6./Aplicar

Halla el determinante de las siguientes matrices.

115. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 4

116. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 16

117. $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -9 \end{pmatrix}$ 148

118. $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ −34

119. $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 11

120. $F = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{pmatrix}$ 0

Determinante de matriz 3 × 3/3.6./Aplicar

Encuentra los determinantes que son nulos.

121. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ No es nulo

122. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 5 & 4 & -10 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ Es nulo

123. $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ Es nulo

124. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ No es nulo

125. $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ Es nulo

126. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix}$ Es nulo

Determinante de matriz 3 × 3/3.6./Evaluar

Observa el desarrollo para encontrar el determinante e identifica los errores cometidos.

127. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (24 - 12 + 2) - (4 + 18 - 8) = 14 - 14 = 0$

Al multiplicar las diagonales no se opera el signo de −1. El determinante es 32.

Determinante de matriz 3 × 3/3.8./Recordar

Identifica los elementos de cada sistema de ecuaciones. Luego representa en forma de matriz.

128. $\left.\begin{aligned} -x + 2y + 4z &= 1 \\ 4x + 6y - 2z &= 2 \\ x - y + 6z &= 3 \end{aligned}\right\}$ $\left|\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 6 & 3 \end{array}\right.$

Coeficientes: −1, 2, 4; 4, 6, −2; 1, −1, 6

Incógnitas: x, y, z

Términos independientes: 1, 2, 3

129. $\left.\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= -9 \\ x + y + 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -9 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right.$

Coeficientes: 1, −1, −1; 2, 3, −1; 1, 1, 3

Incógnitas: x, y, z

Términos independientes: −9

130. $\left\{\begin{aligned} 2x + y - z &= -3 \\ 5x - 2y + 4z &= 12 \\ 2x + y - 2z &= -10 \end{aligned}\right.$ $\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & 4 & 12 \\ 2 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right.$

Coeficientes: 2, 1, −1; 5, −2, 4; 2, 1, −2

Incógnitas: x, y, z

Términos independientes: −3, 12, −10

131. $\left\{\begin{aligned} 8x - 5y + z &= -2 \\ 3x + 6y + 2z &= 15 \\ -2x + 3y + 4z &= 4 \end{aligned}\right.$ $\left|\begin{array}{ccc|c} 8 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 2 & 15 \\ -2 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right.$

Coeficientes: 8, −5, 1; 3, 6, 2; −2, 3, 4

Incógnitas: x, y, z

Términos independientes: −2, 15, 4

Método de determinantes o regla de Cramer/3.8./Aplicar

Resuelve cada sistema de ecuaciones aplicando la regla de Cramer.

132. $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ -x + y - z = 5 \\ x + 3y - 2z = 19 \end{array}\right\}$

$x = 2, y = 3, z = -4$

133. $\left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = -9 \\ x + y + 3z = 0 \end{array}\right\}$

$x = -1, y = -2, z = 1$

134. $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = -3 \\ 3x - y + z = 3 \\ 5x + 4z = 12 \end{array}\right\}$

$x = 0, y = 0, z = 3$

135. $\left.\begin{array}{r} 8x - 5y + z = -2 \\ 3x + 6y + 2z = 15 \\ -2x + 3y + 4z = 4 \end{array}\right\}$

$x = 1, y = 2, z = 0$

136. $\left.\begin{array}{r} x + y + z = -5 \\ x - y + 6z = -11 \\ 5x + y + z = -9 \end{array}\right\}$

$x = -1, y = -2, z = -2$

137. $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 4 \\ 2x - 3y + 5z = -5 \\ 3x + 4y + 7z = 10 \end{array}\right\}$

$x = 3, y = 2, z = -1$

Sistema de ecuaciones lineales con tres variables/3.8./Comprender

Inventa una situación cuya simbolización algebraica se represente mediante el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas. Luego resuélvelos por el método de determinantes. R.L.

138. $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 4 \\ y + 3z = 11 \\ x + 2z = 7 \end{array}\right\}$

139. $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x + 2y = 6 \\ 2x + 3y = 6 \end{array}\right\}$

140. $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 28 \\ 5x - 3z = 16 \\ y - z = 3 \end{array}\right\}$

Sistema de ecuaciones lineales con tres variables/3.8./Analizar

Lee, representa el sistema en forma matricial y resuelve.

141. Fredy es técnico especializado en ensamblaje de computadoras. Trabaja con tres tipos de máquinas: A, B y C, y requiere de los tiempos en horas que se registran en la siguiente tabla.

	A	B	C
En armarlas	4	2	6
En probarlas	2	2	3
En instalar programas	1	2	1

Si Fredy dispone de 380 horas de trabajo por mes para armar, 220 horas para probar y 120 horas para instalar programas, ¿cuántas computadoras de cada tipo puede ensamblar en un mes?

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 380 \\ 2 & 2 & 3 & 220 \\ 1 & 2 & 1 & 120 \end{array}\right.$$

20 computadoras tipo A, 30 tipo B y 40 tipo C.

142. En una fábrica se producen tres tipos de productos: *x*, *y* y *z*, que se procesan con tres máquinas diferentes: A, B y C. En la tabla está expresado el tiempo en horas que tarda cada máquina para obtener una unidad de cada producto.

	x	y	z
A	2	5	2
B	4	1	3
C	8	5	1

Se tienen disponibles 66 horas de la primera máquina, 54 horas de la segunda y 102 horas de la tercera, ¿cuántas unidades de cada producto deben procesarse si se quiere utilizar todo el tiempo disponible de las máquinas?

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & 66 \\ 4 & 1 & 3 & 54 \\ 8 & 5 & 1 & 102 \end{array}\right.$$

Se deben procesar 7 unidades del producto *x*, 8 de *y* y 6 de *z*.

Método de Gauss para resolver sistemas

Recuerda

Para resolver un sistema por el método de Gauss, es necesario escribirlo de la forma:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior

El método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones consiste en convertir ese sistema de ecuaciones lineales en otro escalonado equivalente, utilizando las transformaciones elementales adecuadas.

Las transformaciones elementales que se pueden realizar en el sistema son:

- Intercambiar entre sí la ecuación i y la ecuación j: $F_i \leftrightarrow F_j$.
- Sustituir la ecuación i por el resultado de multiplicar o dividir todos sus elementos por un número $a \neq 0$: $F_i = aF_i$.
- Sustituir la ecuación i o la ecuación j por la suma de ambas, multiplicadas por números a y b no nulos: $F_i = aF_i + bF_j$.

Este método busca obtener una matriz triangular superior, es decir, los coeficientes situados por debajo de la diagonal principal son nulos.

Las matrices usadas para representar sistemas de ecuaciones lineales se llaman matrices ampliadas o aumentadas.

Ejemplo 1. **Resuelve este sistema de ecuaciones lineales:** $\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ 2x + 2y + z &= 1 \\ -x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$

- Se escribe la matriz ampliada del sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ 2x + 2y + z &= 1 \\ -x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & b_i \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

- Si $a_{11} = 0$, se intercambia la primera fila con alguna fila cuyo primer elemento sea distinto de 0, después se realizan operaciones en todas las filas, menos en la primera, para que el primer elemento de cada una de ellas sea 0.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 + F_1]{F_2 = F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

- Se repite el proceso con el elemento a_{22}, después con a_{33}, y así sucesivamente hasta obtener una matriz triangular.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = 2F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

- Se transforma la matriz triangular en un sistema escalonado y se resuelve.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ 4y - 5z &= -1 \\ 7z &= 7 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{y=1,\, z=1} x - 1 + 3 \times 1 = 1 \to x = -1 \\ &\xrightarrow{z=1} 4y - 5 = -1 \to y = 1 \\ &\to z = 1 \end{aligned}$$

Discusión de un sistema con el método de Gauss

Discutir un sistema de ecuaciones es clasificarlo, atendiendo a su número de soluciones, en compatible indeterminado, compatible determinado o incompatible.

Para discutir un sistema mediante el método de Gauss, una vez terminado el proceso, nos fijamos en la última fila de la matriz en la que todos sus elementos no sean nulos.

- Si la fila es del tipo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 & b \end{array}\right)$$

Si $a_1 \neq 0$ o $a_2 \neq 0$ y tenemos más incógnitas que ecuaciones válidas.
Sistema compatible indeterminado.

- Si la fila es del tipo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{array}\right)$$

Si $a \neq 0$ y tenemos tantas ecuaciones válidas como incógnitas.
Sistema compatible determinado.

- Si la fila es del tipo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

Si $b \neq 0$, tenemos la ecuación $0 = b$ (ecuación imposible).
Sistema incompatible.

Ejemplo 1. Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ 3x + z = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ 3x + z = 1 \end{array}\right\}$$

- Se escribe la matriz ampliada del sistema y se aplica el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - 3F_1]{F_2 = F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & -3 & 4 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema se queda con dos ecuaciones y tres incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Se escribe la matriz ampliada del sistema y se aplica el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - 3F_1]{F_2 = F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & -3 & 4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se obtiene la ecuación $0 = 1$, que es una ecuación imposible. Por tanto, el sistema es incompatible.

Date cuenta

Si al finalizar el proceso, o en algún paso intermedio, encontramos una fila cuyos elementos son todos ceros, podemos suprimir esa ecuación.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right)$$

Esto en forma de ecuación significa:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = 0 \rightarrow$ Ecuación trivial

Actividades

Método de Gauss/3.8./Aplicar

Resuelve cada sistema de ecuaciones aplicando el método de Gauss.

143. $\left.\begin{array}{r} 2x-2y+z=3 \\ y-z=1 \\ 3x-2z=7 \end{array}\right\}$

$x=3, y=2, z=1$

145. $\left.\begin{array}{r} 3x-y+z=7 \\ -2x+y-z=-5 \\ 4x+7y+5z=1 \end{array}\right\}$

$x=2, y=-1, z=0$

147. $\left.\begin{array}{r} x+3y+z=7 \\ 3x+6y-z=-1 \\ 2x+4y+z=-9 \end{array}\right\}$

$x=-30, y=14, z=-5$

144. $\left.\begin{array}{r} x+z=4 \\ 2x-y=0 \\ y+z=-5 \end{array}\right\}$

$x=-9, y=-18, z=13$

146. $\left.\begin{array}{r} x+y+z=8 \\ 2x+2y+z=12 \\ 3x+2y+z=30 \end{array}\right\}$

$x=18, y=-14, z=4$

148. $\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ x-y-2z=5 \\ x-y-3z=-10 \end{array}\right\}$

$x=13, y=-22, z=15$

Método de Gauss/3.8./Analizar

Verifica cuáles de los sistemas tienen solución. Justifica tus respuestas.

149. $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

No tiene solución.

En la solución se obtiene una ecuación $0=1$ y eso no existe. El sistema es incompatible.

150. $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)$

Tiene solución.

Se obtiene una matriz triangular y los valores de las incógnitas son $x=1$, $y=2$, $z=3$.

Método de Gauss/3.8./Evaluar

Observa la solución del sistema y escribe los pasos que se realizan en todo el desarrollo.

151. $\left.\begin{array}{r} x-2y+5z=13 \\ 2x-5y+z=19 \\ x+3y-2z=-4 \end{array}\right\} \blacktriangleright \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 5 & 13 \\ 2 & -5 & 1 & 19 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{array}\right]$

Se escribe la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.

$\begin{array}{rrrrr} -2 & 4 & -10 & -26 & + \\ 2 & -5 & 1 & 19 & \\ \hline 0 & -1 & -9 & -7 & \end{array} \blacktriangleright \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 5 & 13 \\ 0 & -1 & -9 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{array}\right]$

Multiplicamos la primera fila por -2 para luego sumarla con la segunda fila. Se reemplaza el resultado en la segunda fila.

$\begin{array}{rrrrr} -1 & 2 & -5 & -13 & + \\ 1 & 3 & -2 & -4 & \\ \hline 0 & 5 & -7 & -17 & \end{array} \blacktriangleright \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 5 & 13 \\ 0 & -1 & -9 & -7 \\ 0 & 5 & -7 & -17 \end{array}\right]$

Multiplicamos la primera fila por -1 para luego sumarla con la tercera fila. Se reemplaza el resultado en la tercera fila.

$\begin{array}{rrrrr} 0 & -5 & -45 & -35 & + \\ 0 & 5 & -7 & -17 & \\ \hline 0 & 0 & -52 & -52 & \end{array} \blacktriangleright \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 5 & 13 \\ 0 & -1 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & -52 & -52 \end{array}\right]$

Multiplicamos la segunda fila por 5 para luego sumarla con la tercera fila. Se reemplaza el resultado en la tercera fila y se obtiene la matriz triangular.

Método de Gauss/3.8./Comprender

Discute y resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método de Gauss.

152. $\left.\begin{array}{r} 6x - 3y = 9 \\ -4x + 2y = -6 \end{array}\right\}$

El sistema se queda con una sola ecuación y dos incógnitas, por tanto es compatible indeterminado.

153. $\left.\begin{array}{r} -x - 3y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{array}\right\}$

El sistema es compatible, los valores de las incógnitas son $x = -\frac{1}{5}$ y $y = -\frac{3}{5}$.

154. $\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 4 \\ 2x - 2y + z = 6 \\ 5x - 5y + 4z = 16 \end{array}\right\}$

En la solución se obtiene una ecuación $0 = -2$ y eso no existe. El sistema es incompatible.

155. $\left.\begin{array}{r} -4x + 2y = -8 \\ 6x - 3y = 5 \end{array}\right\}$

En la solución se obtiene una ecuación $0 = -7$ y eso no existe. El sistema es incompatible.

156. $\left.\begin{array}{r} 3x - 3y = 3 \\ 2x = 0 \end{array}\right\}$

El sistema es compatible, los valores de las incógnitas son $x = 0$ y $y = -1$.

157. $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 5 \\ 5x + 7y + z = 1 \end{array}\right\}$

En la solución se obtiene una ecuación $0 = \frac{47}{3}$ y eso no existe. El sistema es incompatible.

Método de Gauss/3.8./Analizar

Lee y resuelve aplicando el método de Gauss.

158. Tres materiales contienen porcentajes de diferentes elementos, carbón, cromo y hierro, como se muestra en la tabla. El material A es un tipo de hierro forjado, el material B es un tipo de acero inoxidable y el material C es un tipo de hierro fundido. ¿Cuánto material de cada tipo se puede formar con 20 toneladas de carbono, 45 toneladas de cromo y 600 toneladas de hierro?

	Material A	Material B	Material C
Hierro	99%	84%	93%
Carbón	1%	1%	4%
Cromo	0%	15%	3%

$x = 9, y = 211, z = 445$

La cantidad que se produce del material A es 9 toneladas, del material B es 211 toneladas y del material C 445 toneladas.

159. En un taller se envasan bombones en cajas de 250 g, 500 g y 1 kg. Cierto día se envasaron sesenta cajas en una hora, pero habían cinco cajas más de tamaño pequeño (250 g) que de tamaño mediano (500 g). Si el precio del kilogramo de bombones es de Q4.00 y el importe total de los bombones envasados en una hora asciende a Q125.00, ¿cuántas cajas de bombones se envasaron de cada tamaño?

Se envasaron 25 cajas pequeñas, 20 cajas medianas y 15 cajas grandes.

160. Camila vende productos cosméticos de una marca reconocida. Entre lunes, martes y miércoles vendió en total 66 productos. El lunes vendió 3 productos más que el martes. El miércoles vendió 6 productos más que el lunes. ¿Cuántos productos vendió cada día Camila?

El lunes vendió 21 productos, el martes 18 y el miércoles 27.

Método de Gauss-Jordan

Recuerda

Las operaciones elementales que se pueden realizar para hallar la matriz inversa son las mismas que para el cálculo del rango de una matriz.

- Intercambiar entre sí la fila i por la fila j.
  $F_i \leftrightarrow F_j$
- Sustituir la fila i por el resultado de multiplicar o dividir todos sus elementos por un número $a \neq 0$.
  $F_i = aF_i$
- Sustituir la fila i o la fila j por la suma de ambas, multiplicadas por números a y b no nulos.
  $F_i = aF_i + bF_j$

Para expresar la matriz inicial y la matriz identidad en el método de Gauss-Jordan se escribe:

$(A \mid I_n)$

Al utilizar ese método realizamos esta transformación:

$(A \mid I_n) \rightarrow (I_n \mid A^{-1})$

El método de Gauss-Jordan para hallar la matriz inversa consiste en convertir la matriz inicial en la matriz identidad utilizando transformaciones elementales. Aplicando las mismas transformaciones a la matriz identidad obtenemos la matriz inversa.

Ejemplo 1. **Calcula, si es posible, la matriz inversa de la matriz** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

- Se escriben la matriz A y la matriz identidad del mismo orden que A separadas por una línea. Si $a_{11} = 0$, se intercambia la primera fila con alguna fila cuyo primer elemento sea distinto de cero.

  Como $a_{11} = 2 \neq 0$, no se intercambian filas.

- Se realizan operaciones en todas las filas, menos en la primera, para que el primer elemento de cada una de ellas sea cero.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 + 3F_1]{F_2 = F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Se comprueba que $a_{22} \neq 0$; si no habría que intercambiar la fila con alguna fila posterior cuyo segundo elemento sea distinto de cero. Se opera para que sea cero el segundo elemento de cada fila, excepto el de la segunda fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 + F_2]{F_1 = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Se repite el mismo proceso para el resto de filas de la matriz inicial.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - 5F_3]{F_1 = F_1 + 7F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Se divide cada fila entre el elemento que figura en su diagonal.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 = -F_2 \\ F_3 = -F_3}]{F_1 = \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

- Los elementos que figuran a la derecha de la línea forman la inversa de la matriz inicial.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & \frac{7}{2} \\ 7 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Actividades

Aplicación de algoritmos Solución de problemas

Método de Gauss-Jordan/3.8./Aplicar

Calcula, mediante el método de Gauss-Jordan, la inversa de estas matrices.

161. $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

162. $F = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

163. $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

164. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

165. $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

166. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

167. $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

168. $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Método de Gauss-Jordan/3.8./Comprender

Dadas las matrices A y B, calcula lo que se pide utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

169. A^{-1} y B^{-1}

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

170. $(A \times B)^{-1}$

$(A \times B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Método de Gauss-Jordan/3.8./Analizar

Lee y resuelve.

171. Una empresa tiene tres proveedores de alimentos y organizará un evento en el que se ofrecerán tres platos de comida: entrada, plato fuerte y postre. Se decide contratar los servicios de los tres proveedores. La tabla muestra los productos adquiridos con cada proveedor:

	Entrada	Plato fuerte	Postre
A	15	25	20
B	25	20	5
C	20	15	35

- Encuentra la matriz inversa aplicando el método de Gauss-Jordan.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{84} & \frac{23}{84} & \frac{1}{84} \\ \frac{31}{84} & -\frac{5}{84} & -\frac{17}{84} \\ \frac{1}{84} & -\frac{11}{84} & \frac{13}{84} \end{pmatrix}$$

172. Tres familias asisten a una función de teatro. La familia Romero compra 3 entradas para adultos, 2 para adolescentes, 1 para niños y en total paga Q520.00. La familia Gómez compra 2 entradas para adultos, 2 para adolescentes, 4 para niños y en total paga Q600.00. La familia Pérez compra 2 entradas para adulto, 3 para adolescentes, 3 para niños y en total paga Q620.00.

- Expresa en forma matricial los datos.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Encuentra la matriz inversa aplicando el método de Gauss-Jordan.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{7}{12} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

<Programación/>

En el análisis para resolver problemas, a veces se requiere efectuar comparaciones entre los datos proporcionados para encontrar las mejores soluciones. Los operadores relacionales y lógicos permiten comparar, en función de menor, igual, mayor valor o combinaciones de estos entre los datos o bien, el valor de verdad de los mismos eso posibilita saber si es verdad o falso lo que se compara.

Este tipo de operadores se usan en el día a día, cuando debemos escoger si compramos dos cosas o solamente una, si comemos un alimento, si decidimos decir no a alguien, etc. Los usamos con facilidad y frecuencia, sin darnos cuenta de que eso tiene una representación matemática, que fácilmente puede traducirse en lenguaje de programación para que la computadora realice las operaciones solicitadas.

Operadores relacionales y lógicos

Al igual que en matemáticas, en algoritmos y programación, existen los operadores relacionales y se utilizan con las mismas reglas que en matemáticas.

Los operadores relacionales son:

Operador	Significado
>	Mayor que
<	Menor que
>=	Mayor o igual que
<=	Menor o igual que
<>	Diferente de
==	Igual que

En algoritmos se aplica el símbolo = para asignar un valor a una variable; por ello, para una comparación se utiliza el signo igual doble.

Los operadores lógicos tienen función de indicar si algo es cierto o falso, utilizando los operadores relacionales.

- El conectivo $\wedge$ dará como resultado verdadero, solo cuando las dos proposiciones sean verdaderas, de lo contrario siempre será falso.
- El conectivo $\vee$, cuando las dos proposiciones sean falsas su resultado será falso, de lo contrario siempre será verdadero.
- El conectivo $\sim$, negará la proposición, si es verdadero devolverá falso, si es falso devolverá verdadero.

Ejemplo 1.

Realiza un algoritmo que muestre si el resultado de la expresión es verdadero o falso.

$$(4 \geq 1) \wedge (8 < 12)$$

- evaluar la expresión $(4 \geq 1) \wedge (8 < 12)$
- la expresión $4 >= 1$ es verdadera
- la expresión $8 < 12$ es verdadera
- entonces verdadero $\wedge$ verdadero es verdadero

Ejemplo 2.

Demuestra, con un algoritmo, si el resultado de la expresión es verdadero o falso.

$$\left(\frac{75}{3} > 25\right) \vee (\sqrt[3]{8} == 2)$$

- evaluar la expresión $\left(\frac{75}{3} > 25\right) \vee (\sqrt[3]{8} == 2)$
- la expresión $\left(\frac{75}{3} > 25\right)$ es falsa
- la expresión $(\sqrt[3]{8} == 2)$ es verdadera
- entonces, falso $\vee$ verdadero es verdadero

En este ejemplo, el resultado de mod (9, 2) es 1, que es el residuo de la división; y el resultado de div (9, 2) es 4, que es el cociente de la división.

Actividades

1. Realiza un algoritmo que devuelva el resultado de la expresión, si es verdadero o falso.

$$(5 \geq 0) == \sim (\text{falso})$$

- evaluar la expresión $(5 \geq 0) == \sim (\text{falso})$
- la expresión $5 >= 0$ es verdadera
- la expresión $\sim$(falso) es verdadero
- entonces verdadero $==$ verdadero es verdadero

2. Realiza un algoritmo que indique si el resultado de la expresión es verdadero o falso.

$$\sim (3 \times 5 == 15) \vee \left(\frac{45}{2} > 30\right)$$

- evaluar la expresión $\sim (3 \times 5 == 15) \vee \left(\frac{45}{2} > 30\right)$
- la expresión $3 \times 5 == 15$ es verdadera
- la expresión $\sim (3 \times 5 == 15)$ es falsa
- la expresión $\frac{45}{2} > 30$ es falsa
- entonces falso $\vee$ falso es falso

Solución de problemas

Estrategia

- Analizar si se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método de solución por determinantes.
- Comprobar que es una matriz cuadrada.
- Verificar si el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.
- El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
- Representar el sistema como una matriz aumentada y resolver.

Una fábrica produce tres tipos de vasos. La fabricación de cada 1 000 vasos consta de tres etapas. El tiempo que se dedica a cada una de ellas se indica en la tabla. Durante una semana se dispone de un máximo de 213 horas para corte, 125 para construcción y empaque y 86 para revisión. ¿Cuántos vasos de cada tipo deben producirse para que la fábrica opere a su máxima capacidad?

	Grande	Mediano	Pequeño
Corte	5 horas	4 horas	7 horas
Construcción-empaque	3 horas	2 horas	5 horas
Revisión	2 horas	2 horas	1 horas

1. Comprende

Pregunta. ¿Cuántos vasos de cada tipo deben producirse para que la fábrica opere a su máxima capacidad?

Datos.

- Tiempos designados para cada etapa: corte, 213 horas, construcción y empaque 125 horas y revisión 86 horas.
- ¿Me sirven todos los datos para resolver el problema?

2. Piensa qué hacer

- Se identifican las variables, se plantea el sistema de ecuaciones y se elige un método para calcular el determinante principal y el valor de cada incógnita.
- Todos los datos me sirven para resolver el problema.

3. Calcula

$$\begin{cases} 5x + 4y + 7z = 213 \\ 3x + 2y + 5z = 125 \\ 2x + 2y + z = 86 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 7 & 213 \\ 3 & 2 & 5 & 125 \\ 2 & 2 & 1 & 86 \end{array}\right)$$

$$|M_p| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad |M_y| = \begin{vmatrix} 5 & 213 & 7 \\ 3 & 125 & 5 \\ 2 & 86 & 1 \end{vmatrix} = 22$$

$$|M_x| = \begin{vmatrix} 213 & 4 & 7 \\ 125 & 2 & 5 \\ 86 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 62 \qquad |M_z| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 213 \\ 3 & 2 & 125 \\ 2 & 2 & 86 \end{vmatrix} = 4$$

$$x = \frac{|M_x|}{|M_p|} = \frac{62}{2} = 31 \qquad y = \frac{|M_y|}{|M_p|} = \frac{22}{2} = 11 \qquad z = \frac{|M_z|}{|M_p|} = \frac{4}{-2} = 2$$

4. Comprueba

Se sustituyen los valores en una de las ecuaciones y se comprueba la igualdad.

$$2(31) + 2(11) + 2 = 86 \qquad 86 = 86$$

5. Responde

Deben producirse 31 vasos grandes, 11 medianos y 2 pequeños.

1. René ha hecho el marco de un cuadro con 16 dm de listón de madera. El largo del marco mide el triple que el ancho. ¿Cuánto miden el largo y el ancho del marco?

El largo del marco mide 6 dm y su ancho 2 dm.

2. En una bodega hay 120 botellas entre gaseosas, cerveza y aceite. La décima parte del número de botellas de gaseosas, más la octava parte del número de botellas de cerveza, más la quinta parte del número de botellas de aceite equivale a 16. Si la suma de botellas de aceite y de gaseosas es 80, ¿cuántas botellas de cada tipo hay?

50 botellas de gaseosa, 40 de cerveza y 30 de aceite.

3. En una piscina se imparten clases de natación durante la semana con tres entrenadores diferentes. El número total de alumnos inscritos es 352. Los inscritos con el tercer entrenador son solo una cuarta parte de los inscritos con el primero. Además, la diferencia entre los inscritos con el primero y los inscritos con el segundo es inferior en dos unidades al doble de los inscritos con el tercero. ¿Cuántos alumnos están inscritos con cada entrenador?

Con el primer entrenador, 200 alumnos, con el segundo 102 y con el tercero 50.

4. Juan tiene en su bolsillo billetes de Q50.00 y Q20.00 que suman Q380.00. Si se cambian los billetes de Q50.00 por billetes de Q20.00 y viceversa, entonces, suman Q320.00. Determinar cuántos billetes de cada tipo tiene Juan.

Juan tiene 4 billetes de Q20.00 y 6 billetes de Q50.00.

5. Halla tres números enteros tales que el doble del primero, más el triple de la suma del segundo con el tercero da 10. Además, la diferencia del triple del primero con el doble del segundo es igual al triple del tercero, disminuido en 1; y el doble del primero, más cinco veces el segundo excede en 5 al opuesto del doble del tercero.

Los números son 2, -1 y 3.

6. Una empresa de construcción tiene tres sucursales en Bogotá, Madrid y Guatemala. El número total de ejecutivos de las tres sucursales es 31, de tal forma que el número de ejecutivos radicados en Madrid es 3 menos que el número de ejecutivos que hay en Bogotá. Además, el número de ejecutivos en Bogotá excede en 1 al de los ejecutivos ubicados en Guatemala y Madrid juntos. ¿Cuántos ejecutivos están radicados en cada ciudad?

Hay 16 ejecutivos en Bogotá, 13 ejecutivos en Madrid y 2 en Guatemala.

Evaluación 5

Nombre ______________________________ Fecha ______________

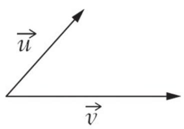
Marca la respuesta correcta en el cuadro que está al final de la evaluación.

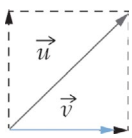
Vectores/3.5./Recordar

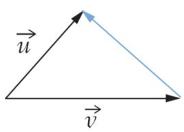
1. Es la recta donde se sitúa un vector.
   a. Módulo
   b. Sentido
   c. Dirección
   d. Magnitud

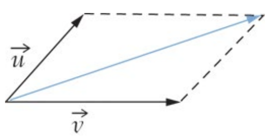
Operaciones con vectores/3.6./Analizar

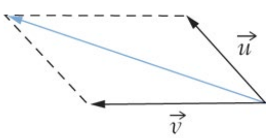
2. Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, qué gráfica corresponde a la operación $\vec{u} + \vec{v}$.



a.


b.


c.


d.


Operaciones con vectores/3.6./Aplicar

3. Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{v} = (5, 4)$, las coordenadas del vector $2\vec{u} + \vec{v}$ son:
   a. (7, 1)
   b. (9, −2)
   c. (−3, 7)
   d. (9, −10)

Vectores/3.5./Recordar

4. Dos vectores son paralelos cuando:
   a. tienen la misma dirección.
   b. se intersecan en un punto.
   c. son linealmente independientes.
   d. forman un conjunto de vectores.

Operaciones con vectores/3.6./Evaluar

5. ¿Cuál es el término que hace falta para encontrar el módulo del vector $\vec{a}$?
   $\sqrt{(-3)^2 + (\_\_\_\_)^2} = 5$
   a. 2
   b. 1
   c. 5
   d. 4

Vectores/3.5./Recordar

6. La adición de dos vectores da como resultado:
   a. un vector.
   b. un escalar.
   c. un número real.
   d. un vector unitario.

Operaciones con vectores/3.6./Comprender

7. ¿Cuál es el valor de t para que se cumpla que $2\vec{u} \times \vec{v} = 7$, si $\vec{u} = (-1, 2)$ y $\vec{v} = (3, t)$?
   a. 5
   b. $\frac{5}{4}$
   c. 2
   d. 4

Matrices/3.6./Recordar

8. Dos matrices son iguales si:
   a. sus dimensiones son contrarias.
   b. sus términos son independientes unos de otros.
   c. las filas y las columnas están en diferente orden.
   d. tienen la misma dimensión y sus elementos coinciden término a término.

Determinante/3.8./Aplicar

9. ¿Cuál es el valor del determinante $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$?
   a. 13
   b. 43
   c. −5
   d. −13

Matrices/3.6./Recordar

10. Es el valor numérico que le corresponde a toda matriz cuadrada.
    a. Diagonal superior
    b. Determinante
    c. Matriz inversa
    d. Constantes

Determinantes/3.8./Evaluar

11. ¿Cuál es el valor de x que hace verdadera la igualdad?

$$\begin{vmatrix} x & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 17$$

a. 6
b. 4
c. -6
d. $-\frac{2}{3}$

Matrices/3.6./Comprender

12. ¿Cuál de las siguientes es una matriz de orden 2×3?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Matrices/3.6./Recordar

13. Es el valor numérico que le corresponde a toda matriz cuadrada.
a. Diagonal superior
b. Determinante
c. Matriz inversa
d. Constantes

Sistema de ecuaciones lineales/3.8./Aplicar

14. Antonio compró un cuadro en forma de rectángulo. Si el perímetro del cuadro es 60 cm y la diferencia entre el triple del largo y el triple del ancho equivale a 18 cm, ¿cuáles son las dimensiones del cuadro que compró Antonio?
a. 8 cm de largo por 2 cm de ancho.
b. 12 cm de largo por 18 cm de ancho.
c. 10 cm de largo por 14 cm de ancho.
d. 18 cm de largo por 12 cm de ancho.

Sistema de ecuaciones lineales/3.8./Analizar

15. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 8y - 4z = 4 \\ 3x + 6y + 5z = -13 \\ -2x + y + 12z = -17 \end{array}\right\}$$

Aplicando la regla de Cramer, ¿cuál es la representación matricial para el determinante $|M_z|$?

a. $|M_z| = \begin{vmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 12 \end{vmatrix}$

b. $|M_z| = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & -13 \\ -2 & 1 & -17 \end{vmatrix}$

c. $|M_z| = \begin{vmatrix} 4 & 8 & -4 \\ -13 & 6 & 5 \\ -17 & 1 & 12 \end{vmatrix}$

d. $|M_z| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 3 & -13 & 5 \\ -2 & -17 & 12 \end{vmatrix}$

Clave: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9   0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. a b c d	4. a b c d	7. a b c d	10. a b c d	13. a b c d
2. a b c d	5. a b c d	8. a b c d	11. a b c d	14. a b c d
3. a b c d	6. a b c d	9. a b c d	12. a b c d	15. a b c d

Resumen

Vectores

Coordenadas:

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

Módulo: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Dos vectores son paralelos si:

$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$

Operaciones

Adición y sustracción

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2) - (v_1, v_2) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

Producto de un número por un vector

$k \times \vec{v} = k\,(v_1, v_2) = (k \times v_1, k \times v_2)$

Producto escalar $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times cos\alpha$

Matrices y determinantes

Operaciones con matrices

- Para sumar, las matrices deben ser del mismo orden.
- Se suman los elementos correspondientes de cada matriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2+6 & 9+1 \\ 3+1 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

- Para multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz.

$$[4 \quad 3] + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = [8+3 \quad 20 \ +9] = [11 \quad 29]$$

Determinantes en la solución de sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= k_2 \\ a_3x + b_2y + c_2z &= k_3 \end{aligned}\right\}$$

$$|M_p| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad |M_y| = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$|M_x| = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad |M_z| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_1 & k_3 \end{vmatrix}$$

Valor de las incógnitas en un sistema:

$$x = \frac{|M_x|}{|M_p|} \qquad y = \frac{|M_y|}{|M_p|} \qquad z = \frac{|M_z|}{|M_p|}$$

Glosario

determinante. Número asociado a un arreglo de números reales con igual cantidad de filas que de columnas. Valor numérico correspondiente a toda matriz cuadrada.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (ceg + fha + ibd)$$

método de Gauss. Este método busca obtener una matriz triangular, para ello se utilizan operaciones de adición, sustracción y multiplicación dando origen a matrices equivalentes.

regla de Cramer. Es un método que se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones únicamente de 2×2 y de 3×3, mediante el uso de determinantes.

sistema de ecuaciones. Conjunto de varias ecuaciones que deben resolverse simultáneamente y reducirlas a igualdades verdaderas.

vector. Segmento de recta dirigido que posee magnitud, dirección y sentido.

vector nulo. No tiene definida una dirección y su magnitud es cero. $\vec{0} = (0, 0)$