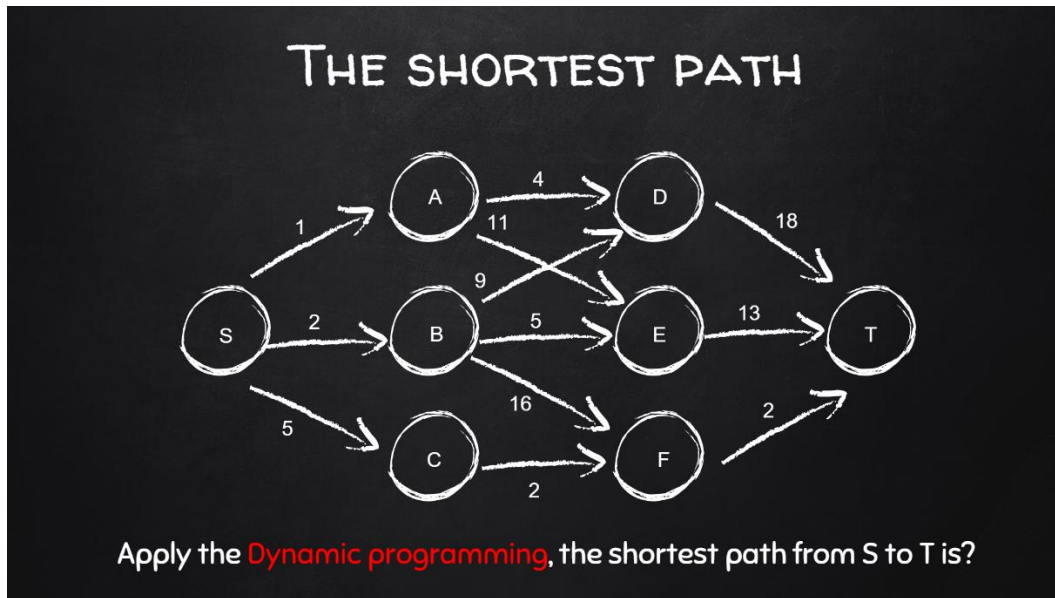


Class: CS112.L23.KHCL

Group: 10

HOMEWORK: THE SHORTEST PATH



Using Floyd Warshall's algorithm to solve the above problem

Following these steps to find the correct answer:

1. Remove all the self loops and parallel edges (keeping the lowest weight edge) from the graph
 \Rightarrow Because the graph doesn't have any self loops or parallel edges so I'm gonna move to the next step
2. Using X_0 to represent the initial distance matrix:

$$X_0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & S & T \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ S \\ T \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & 4 & 11 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 9 & 5 & 16 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 2 \\ 1 & 2 & 5 & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

3.

Creating a new matrix X_i ($i \in \{S, A, B, C, D, E, F, T\}$) by using the current matrix X_0 . If we want to find the shortest path from the vertex i to vertex j that go through vertex k , we need to replace all the elements in the matrix (except the elements in the column i and the row j) following the formula:

$$D_{k,i,j} = \min \{ D_{k-1,i,j} \text{ or } D_{k-1,i,k} + D_{k-1,k,j} \}$$

if $d(i, k) + d(k, j) < d(i, j)$

then $d(i,j) = d(i, k) + d(k,j) \rightarrow$ Update min

Note

- F: False, T: True
- All of the matrixs below can use to find all-pairs shortest path

#####

- Through vertex A:

$$BC = B \rightarrow A \rightarrow C = d(B, A) + d(A, C) = \infty + \infty < \infty : F$$

$$SD = S \rightarrow A \rightarrow D = d(S, A) + d(A, D) = 1 + 4 < \infty : T \rightarrow \text{Update } SD = 5$$

$$SE = S \rightarrow A \rightarrow E = d(S, A) + d(A, E) = 1 + 11 < \infty : T \rightarrow \text{Update } SE = 12$$

{BD, BE, BF, BS, BT, CB, CD, CE, CF, CS, CT, DB, DC, DE, DF, DS, DT, EB, EC, ED, EF, ES, ET, FB, FC, FD, FE, FT, SB, SC, SF, ST, TB, TC, TD, TE, TF, TS} : F

$X_A =$

	A	B	C	D	E	F	S	T
A	0	∞	∞	4	11	∞	∞	∞
B	∞	0	∞	9	5	16	∞	∞
C	∞	∞	0	∞	∞	2	∞	∞
D	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	18
E	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	13
F	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	2
S	1	2	5	5	12	∞	0	∞
T	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

- Through vertex B:

$SE = S \rightarrow B \rightarrow E = d(S, B) + d(B, E) = 2 + 5 < 12 : T \rightarrow \text{Update } SE=7$

$SF = S \rightarrow B \rightarrow F = d(S, B) + d(B, F) = 2 + 16 < \infty : T \rightarrow \text{Update } SF=18$

$\{AC, AD, AE, AF, AS, AT, CA, CD, CE, CF, CS, CT, DA, DC, DE, DF, DS, DT, EA, EC, ED, EF, ES, ET, FA, FC, FS, FE, FS, FT, SA, SC, SD, ST, TA, TC, TD, TE, TF, TS\} : F$

$X_B =$

	A	B	C	D	E	F	S	T
A	0	∞	∞	4	11	∞	∞	∞
B	∞	0	∞	9	5	16	∞	∞
C	∞	∞	0	∞	∞	2	∞	∞
D	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	18
E	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	13
F	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	2
S	1	2	5	5	7	18	0	∞
T	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

- Through vertex C:

$SF = S \rightarrow C \rightarrow F = d(S, C) + d(C, F) = 5 + 2 < 18 : T \rightarrow \text{Update } SF = 7$
 $\{AB, AD, AE, AF, AS, AT, BA, BD, BE, BF, BS, BT, DA, DB,$
 $DE, DF, DS, DT, EA, EB, ED, EF, ES, ET, FA, FB, FD, FE, FS, FT, SA,$
 $SB, SD, SE, ST, TA, TB, TD, TE, TF, TS\} : F$

$X_C =$

	A	B	C	D	E	F	S	T
A	0	∞	∞	4	11	∞	∞	∞
B	∞	0	∞	9	5	16	∞	∞
C	∞	∞	0	∞	∞	2	∞	∞
D	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	18
E	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	13
F	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	2
S	1	2	5	5	7	7	0	∞
T	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

- Through vertex D:

$$AT = A \rightarrow D \rightarrow T = d(A, D) + d(D, T) = 4 + 18 < \infty : T \rightarrow \text{Update } AT = 22$$

$$BT = B \rightarrow D \rightarrow T = d(B, D) + d(D, T) = 9 + 18 < \infty : T \rightarrow \text{Update } BT = 27$$

$$ST = S \rightarrow D \rightarrow T = d(S, D) + d(D, T) = 5 + 18 < \infty : T \rightarrow \text{Update } ST = 23$$

{AB, AC, AE, AF, AS, BA, BC, BE, BF, BS, CA, CB, CE, CF, CS, CT, EA, EB, EC, EF, ES, ET, FA, FB, FC, FE, FS, FT, SA, SB, SC, SE, SF, TA, TB, TC, TE, TF, TS} : F

$$X_D =$$

	A	B	C	D	E	F	S	T
A	0	∞	∞	4	11	∞	∞	22
B	∞	0	∞	9	5	16	∞	27
C	∞	∞	0	∞	∞	2	∞	∞
D	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	18
E	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	13
F	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	2
S	1	2	5	5	7	7	0	23
T	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

- Through vertex E:

$$ST = S \rightarrow E \rightarrow T = d(S, E) + d(E, T) = 7 + 13 < \infty : T \rightarrow \text{Update } AT = 20$$

$$BT = B \rightarrow E \rightarrow T = d(B, E) + d(E, T) = 5 + 13 < \infty : T \rightarrow \text{Update } BT = 18$$

{AB, AC, AD, AF, AS, AT, BA, BC, BD, BF, BS, CA, CB, CD, CF, CS, CT, DA, DV, DC, DF, DS, DT, FA, FB, FC, FD, FS, FT, SA, SB, SC, SD, SF, TA, TB, TC, TD, TF, TS} : F

$$X_E =$$

	A	B	C	D	E	F	S	T
A	0	∞	∞	4	11	∞	∞	22
B	∞	0	∞	9	5	16	∞	18
C	∞	∞	0	∞	∞	2	∞	∞
D	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	18
E	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	13
F	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	2
S	1	2	5	5	7	7	0	20
T	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

- Through vertex F:

$ST = S \rightarrow F \rightarrow T = d(S, F) + d(F, T) = 7 + 2 < 20 : T \rightarrow \text{Update } ST = 9$
 $CT = C \rightarrow F \rightarrow T = d(C, F) + d(F, T) = 2 + 2 < \infty : T \rightarrow \text{Update } CT = 4$
 $\{AB, AC, AD, AE, AS, AT, BA, BC, BD, BE, BS, BT, CA, CB, CD, CE, CS, DA, DB, DC, DE, DS, DT, EA, FB, EC, ED, ES, ET, SA, SB, SC, SD, SE, TA, TB, TC, TD, TE, TS\} : F$

$$X_F =$$

	A	B	C	D	E	F	S	T
A	0	∞	∞	4	11	∞	∞	22
B	∞	0	∞	9	5	16	∞	18
C	∞	∞	0	∞	∞	2	∞	4
D	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	18
E	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	13
F	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	2
S	1	2	5	5	7	7	0	9
T	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

- Through vertex S:

{AB, AC, AD, AE, AF, AT, BA, BC, BD, BE, BF, BT, CA, CB, CD, CE, CF, CT, DA, DB, DC, DE, DF, DT, EA, EB, EC, ED, EF, ET, FA, FB, FC, FD, FE, FT, TA, TB, TC, TD, TE, TF} : F

$$X_S =$$

	A	B	C	D	E	F	S	T
A	0	∞	∞	4	11	∞	∞	22
B	∞	0	∞	9	5	16	∞	18
C	∞	∞	0	∞	∞	2	∞	4
D	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	18
E	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	13
F	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	2
S	1	2	5	5	7	7	0	9
T	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

- Through vertex T:

{AB, AC, AD, AE, AF, AS, BA, BC, BD, BE, BF, BS, CA, CB, CD, CE, CF, CS, DA, DB, DC, DE, DF, DS, EA, EB, EC, ED, EF, ES, FA, FB, FC, FD, FE, FS, SA, SB, SC, SD, SE, SF} : F

$$X_T =$$

	A	B	C	D	E	F	S	T
A	0	∞	∞	4	11	∞	∞	22
B	∞	0	∞	9	5	16	∞	18
C	∞	∞	0	∞	∞	2	∞	4
D	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	18
E	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	13
F	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	2
S	1	2	5	5	7	7	0	9
T	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Final matrix:

	A	B	C	D	E	F	S	T
A	0	∞	∞	4	11	∞	∞	22
B	∞	0	∞	9	5	16	∞	18
C	∞	∞	0	∞	∞	2	∞	4
D	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	18
E	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	13
F	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	2
S	1	2	5	5	7	7	0	9
T	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Now, we can see that the shortest path from S to T is 9