Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Onsdagen den 13 januari 2010 klockan 08.30-12.30 i V.

Lösningsskiss: Christian Forssén.

Obligatorisk del

---

1. Rätt svar på de tre deluppgifterna

   (a) Masscentrum ligger $2h/3$ rakt under pyramidens topp.

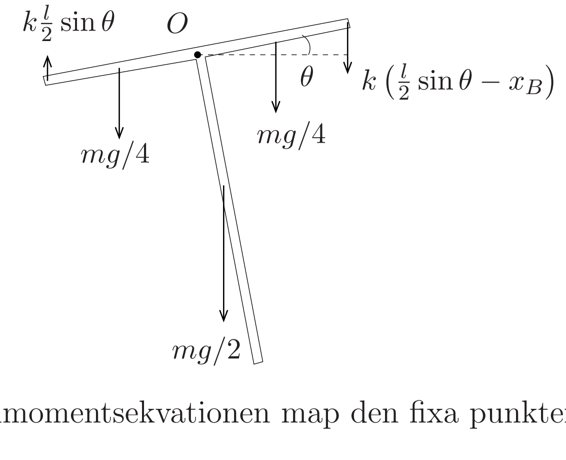
   (b) $I = \frac{MR^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{N}\right)$.

   (c) $\vec{v}_{A/P} = v_o\hat{\mathbf{i}} + v_0\hat{\mathbf{j}}$, där $\hat{\mathbf{i}}$ pekar horisontellt åt höger och $\hat{\mathbf{j}}$ vertikalt rakt upp.

2.
   - Välj en fix punkt (leden O) och beräkna tröghetsmoment och rörelsemängdsmoment runt en axel genom densamma.
     Tröghetsmomentet fås tex genom att dela in den stela kroppen i tre st stavar (två med längd $l/2$ och massa $m/4$ samt en med längd l och massa $m/2$) vars ändar möts i punkten O.

     $$I_O = \frac{1}{3}\frac{m}{2}l^2 + 2\frac{1}{3}\frac{m}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{5}{24}ml^2.$$

     Rörelsemängdsmomentet map O blir helt enkelt $L_O = I_O\ddot{\theta}$, med θ definierad enligt figur.

   - Vi kan skriva vridmomentsekvationen map den fixa punkten O

     $$\sum M_O = I_O\ddot{\theta},$$

där positiv rotationsriktning är moturs. Friläggningsdiagrammet ovan ger det resulterande vridmomentet

$$M_O = -k\frac{l}{2}\sin\theta\frac{l}{2}\cos\theta - k\left(\frac{l}{2}\sin\theta - x_B\right)\frac{l}{2}\cos\theta - \frac{mg}{2}\frac{l}{2}\sin\theta$$

- Rörelseekvationen som kommer från vridmomentsekvationen lineariseras för små svängningar $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = \theta$. Efter viss förenklingar och insättning av den drivande rörelsen $x_B = b\sin\omega t$ fås
$$\ddot{\theta} + \frac{6}{5}\left[\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}\right]\theta = \frac{12}{5}\frac{kb}{ml}\sin\omega t$$
- Detta är ett exempel på en tvingad, odämpad svängingsrörelse. Resonans fås helt enkelt då den naturliga frekvensen är lika med den drivande frekvensen
$$\omega_{\text{resonans}} = \sqrt{\frac{6}{5}\left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}\right)}.$$

3. Strategi:

(a) Utnyttja det faktum att klotets rörelsemängdsmoment map överkanten på trappsteget (vi kallar kontaktpunkten för P) är bevarat genom kollisionen. Detta gäller eftersom alla krafter som verkar vid punkten P kommer att utöva noll vridmoment map P[1].

(b) Genom att utnyttja föregående faktum kommer vi att kunna uttrycka kinetiska energin direkt efter kollisionen (notera att detta är en inelastisk kollision och att den totala mekaniska energin inte är bevarad).

(c) Villkoret för att klotet skall komma upp för trappsteget är att denna kinetiska energi är större än mgh.

Vi följer denna strategi

(a) Vi delar upp rörelsemängdsmomentet map P i en del relativt masscentrum och en del från masscentrums rörelse. Vi utnyttjat också villkoret att klotet rullar vilket ger $\omega R = V_0$ och får därmed
$$L_P = \frac{2}{5}mR^2\omega + mV_0(R-h) = mV_0\left(\frac{7R}{5} - h\right).$$

[1] Vridmomentet från tyngdkraften kommer visserligen att ändra L_P, men först efter kollisionen.

(b) Vi inför rotationshastigheten ω' för att beskriva hur fort klotet vrider runt punkten P efter kollisionen. Parallellaxelteoremet säger att tröghetsmomentet map en axel genom P är

$$I_P = (2/5)mR^2 + mR^2,$$

och därmed $L'_P = \frac{7}{5}mR^2\omega'$. Bevarande av L_P ger då

$$mV_0\left(\frac{7R}{5} - h\right) = \frac{7}{5}mR^2\omega' \qquad \Rightarrow \qquad \omega' = \frac{V_0}{R}\left(1 - \frac{5h}{7R}\right).$$

Energin direkt efter kollisionen är alltså

$$T' = \frac{1}{2}\frac{7}{5}mR^2\omega'^2 = \frac{7}{10}mV_0^2\left(1 - \frac{5h}{7R}\right)^2.$$

(c) Klotet kommer upp då $T' \geq mgh$ vilket ger villkoret

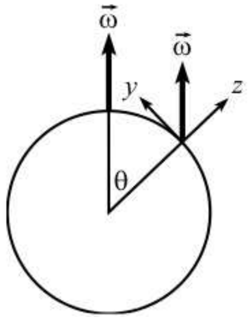
$$V_0 \geq \sqrt{\frac{10gh}{7}}\left(1 - \frac{5h}{7R}\right)^{-1}.$$

4. (a) Det tvådimensionella plan i vilken pendelrörelsen äger rum kommer sakta att precessera pga jordens rotation. Denna precessionsrörelse är enkel att föreställa sig om vi tänker oss pendeln upphängd ovanför nordpolen. En extern observatör, som befinner sig svävande ovanför jorden och ser jordens rotation från ovan, kommer att se pendelplanet vara fixt (relativt stjärnor på himlen). En observatör nere på jordytan kommer alltså att uppleva att pendelplanet sakta roterar medurs sett ovanifrån. Det tar ett dygn för rörelseplanet att svänga runt ett helt varv. Denna rotationshastighet kommer att minska om vi flyttar pendeln söderut för att byta riktning när vi kommer över på södra halvklotet.

(b) Vi betraktar nu en Foucaults pendel som befinner sig vid någon viss breddgrad som specificeras med den polära vinkeln θ. För att studera detta kvantitativt gör vi vissa förenklande antaganden. (1) Vi kan betrakta pendelns rörelse som horisontell, dvs parallell med jordytan. (2) Corioliskraften $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ kommer att peka i någon komplicerad riktning men vi bryr oss enbart om den horisontella komponenten. Den vertikala komponenten bidrar till att modifera tyngdaccelerationen, vilken i sin tur bestämmer pendelrörelsens periodtid $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$, men denna påverkan är liten i sammanhanget.

Vi kan införa ett jordfixt koordinatsystem (enligt figur nedan) och dela upp rotationsvektorn

$$\vec{\omega} = \omega\left(\cos\theta\hat{z} + \sin\theta\hat{y}\right)$$



Lösning 1 (resonerande): Den horisontella komponenten av Corioliskraften (som ansvarar för pendelplanets precession) har storleken

$$F^{\mathrm{h}}_{\mathrm{cor}}(t) = 2m\omega(\cos\theta)v(t),$$

och är vinkelrät mot $\vec{v}(t)$. Från pendelns synvinkel skulle detta motsvara en situation i vilken den befinner sig på nordpolen hos en planet som vi kan kalla Terra Costethica med rotationshastighet $\omega\cos\theta$. Som vi argumenterade ovan blir pendelplanets precessionshastighet då lika med $\omega_F = \omega\cos\theta$ riktad medurs (notera att $\cos\theta$ byter tecken för $\theta < 0$).

Lösning 2 (i pendelplanet): Vi tänker oss att vi befinner oss i pendelns rörelseplan, och alltså roterar med i detta plans precession. Vi vill finna hur detta plan roterar relativt det jordfixa koordinatsystemet $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ som vi införde ovan.

I detta plan påverkas pendeln enbart av krafter (verkliga och fiktiva) som ligger i planet, ty annars hade den rört sig ut ur planet. Detta skulle strida mot vår definition av detta plan som ju följer med i rörelsen.

Vårt jordfixa koordinatsystem roterar med $\vec{\omega} = \omega\left(\cos\theta\hat{z} + \sin\theta\hat{y}\right)$ relativt ett inertialsystem. Vårt pendelplan roterar med $\vec{\omega}_F = \omega_F\hat{z}$ relativt det jordfixa systemet. Detta betyder att rotationen relativt inertialsystemet beskrivs av rotationsvektorn

$$\vec{\omega} + \vec{\omega}_F = \left(\omega\cos\theta + \omega_F\right)\hat{z} + \omega\sin\theta\hat{y}.$$

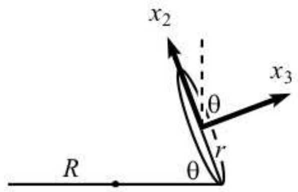
För att hitta den horisontella komponenten av Corioliskraften bryr vi oss enbart om $\hat{z}$-delen av denna rotationsvektor. Vi finner alltså att $F^{\mathrm{h}}_{\mathrm{cor}}(t) = 2m\left(\omega\cos\theta + \omega_F\right)v(t)$. För att denna verkligen skall vara noll måste vi ha $\omega_F = -\omega\cos\theta$ och därmed

$$\vec{\omega}_F = -\omega\cos\theta\hat{z}.$$

Notera hur denna vektor byter riktning vid $\theta = \pi/2$.

Överbetygsuppgifter

5. Vi inför ett kroppsfixt koordinatsystem med origo i myntets masscentrum (se figur). Riktningen $\hat{x}_1$ pekar in i pappret.



Vi kan betrakta rörelsen i ett koordinatsystem med origo i masscentrum och som roterar kring en fix, vertikal $\hat{Z}$-axel med den eftersökta frekvensen Ω. I detta koordinatsystem är myntets masscentrum fixt medan myntet spinner kring sin (negativa) $\hat{x}_3$ axel med frekvensen ω'. Eftersom myntet rullar gäller att $\omega' r = \Omega R$. Myntets rotationsvektor kan alltså skrivas

$$\vec{\omega} = \Omega \hat{Z} - \omega' \hat{x}_3 = \Omega \sin\theta \hat{x}_2 - \Omega \left(\frac{R}{r} - \cos\theta \right) \hat{x}_3.$$

Huvudtröghetsmomenten är $I_3 = mr^2/2$ och $I_2 = mr^2/4$ och rörelsemängdsmomentet map cirkelns mittpunkt blir $\vec{L} = I_2 \omega_2 \hat{x}_2 + I_3 \omega_3 \hat{x}_3$. Enbart den horisontella komponenten av denna kommer att ha ett tidsberoende: $\vec{L}_\perp = (I_2 \omega_2 \cos\theta - I_3 \omega_3 \sin\theta)\, \hat{e}_\perp$, där vektorn $\hat{e}_\perp$ pekar horisontellt in mot cirkelrörelsens mittaxel.
Vi får nu rörelseekvationen från

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = -\Omega L_\perp \hat{x}_1 = \ldots = -\frac{1}{4} mr\Omega^2 \sin\theta \,(2R - r\cos\theta)\, \hat{x}_1.$$

Vridmomentet, map masscentrum, uppkommer pga krafterna som verkar genom kontaktpunkten. Dessa består av en vertikal komponent, $mg\hat{Z}$, samt en horisontell friktionskraft. Den sistnämnda måste vara $\vec{F}_\perp = m\,(R - r\cos\theta)\,\Omega^2 \hat{e}_\perp$, eftersom masscentrum rör sig i en cirkelbana med radie $R - r\cos\theta$. Slutligen fås vridmomentet

$$\vec{M} = -\left[mgr\cos\theta - m(R - r\cos\theta)\Omega^2 r \sin\theta \right] \hat{x}_1.$$

Rörelseekvationen ovan ger slutligen sambandet

$$\Omega^2 = \frac{g}{\frac{3}{2}R\tan\theta - \frac{5}{4}r\sin\theta},$$

vilket ger den eftersökta frekvensen.
Vi får enbart fysikaliska lösningar då högerledet är positivt, vilket ger villkoret $R < \frac{5}{6}r\cos\theta$.
Specialfall: $\theta \to \pi/2$ ger $\Omega \to 0$, vilket är rimligt.
$\theta \to 0$ ger $\Omega \to \infty$, vilket också är rimligt.
Notera att då $R \to \frac{5}{6}r\cos\theta$ så går frekvensen $\Omega \to \infty$. Detta betyder också att friktionskraften blir stor vilket i praktiken betyder att friktionskoefficienten måste vara motsvarande hög. Så småningom börjar antagligen myntet att glida.

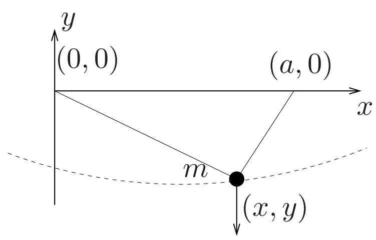
6. Strategi:

- Finn antalet frihetsgrader och välj lämplig(a) generaliserade koordinater.
- Bilda Lagrangianen och ställ upp Lagranges ekvationer.
- Finn jämviktsläge genom att hitta extrempunkter.
- Linearisera rörelseekvationerna och identifiera en svängningsrörelse.

Vid varje ögonblick ser linan ut som en triangel sammansatt av två rätvinkliga trianglar (se figur). Massans läge uppfyller villkoret

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(a-x)^2+y^2} = \sqrt{2}a.$$

Vi kan jämföra detta villkor med definitionen av en ellips och inser att massan rör sig på en sådan med centrum i $(a/2, 0)$, storaxel $\sqrt{2}a$, lillaxel $a/2$ [$= \max(|y|)$].



Detta innebär att vi enbart har en frihetsgrad. Vi kan parametrisera rörelsen längs ellipsen med en variabel τ enligt

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\tau$$
$$y = 0 - \frac{a}{2}\sin\tau.$$

Givetvis väljer vi τ som vår generaliserade koordinat och bildar Lagrangianen

$$
\begin{aligned}
V &= mgy = -mg\frac{a}{2}\sin\tau \\
T &= \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left[\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\tau\dot{\tau}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\cos\tau\dot{\tau}\right)^2\right] \\
L &= T - V = \frac{ma^2}{4}\left(\sin^2\tau\dot{\tau}^2 + \frac{1}{2}\cos^2\tau\dot{\tau}^2\right) + mg\frac{a}{2}\sin\tau.
\end{aligned}
$$

Jämvikt då $\frac{dV}{d\tau} = 0 \Rightarrow \tau = 90°, 270°$.
Stabil jämvikt då $\frac{d^2V}{d\tau^2} > 0 \Rightarrow \tau = 90°$, dvs då $(x, y) = (a/2, -a/2)$ (föga förvånande).
Vi kan teckna Lagranges ekvationer $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\tau}} - \frac{\partial L}{\partial\tau} = 0$, och sedan linearisera för små rörelser från jämviktsläget. Vi inför $\tau = 90° + \eta$ och betraktar små η,

$$\cos\tau \approx -\eta, \qquad \sin\tau \approx 1.$$

Detta ger så småningom rörelseekvationen

$$\frac{ma^2}{2}\ddot{\eta} + mg\frac{a}{2}\eta = 0,$$

från vilken vi finner svängningsfrekvensen $\omega = \sqrt{g/a}$.