Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

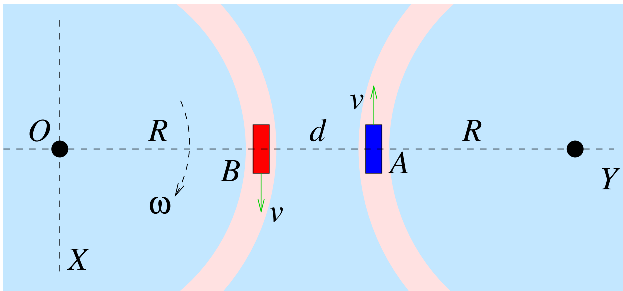
Tid och plats: Tisdagen den 26 maj 2009 klockan 08.30-12.30 i V.
Lösningsskiss: Christian Forssén och Per Salomonson.

Obligatorisk del

---

1. *(6 poäng. 1 poäng för varje rätt svar. Endast svar skall ges.)*
   (a) Svärmens rörelsemängd $0.8 \cdot 10^{-3}$ Ns åt väster,
   rörelseenergi $1.6 \cdot 10^{-4}$ J, och
   rörelsemängdsmoment $0.70 \cdot 10^{-7}$ Nms i rotationsriktningen.
   (b) Svärmens rörelsemängd $0.75 \cdot 10^{-3}$ Ns i flygriktningen,
   rörelseenergi $1.4 \cdot 10^{-4}$ J, och
   rörelsemängdsmoment 3.2 Nms vertikalt riktat (i rotationsriktningen).

2. *(2 + 4 poäng)*
   Låt (X, Y) vara ett jordfixt koordinatsystem med origo i B-bilens kurvas centrum och Y-axel riktad mot A-bilens. I detta system har A-bilen i det aktuella ögonblicket position $\vec{r}_A = (R+d)\hat{Y}$, hastighet $\vec{v}_A = -v\hat{X}$, och acceleration $\vec{a}_A = (v^2/R)\,\hat{Y}$.

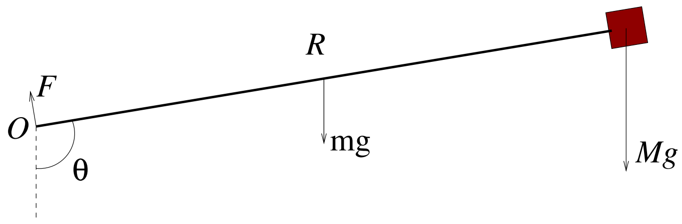


   Låt (x, y) vara ett koordinatsystem som är fixerat relativt B-bilen, och som sammanfaller med det jordfixa systemet i det aktuella ögonblicket. (Notera att detta inte är samma koordinatsystem som är indikerat i figuren i tentamenstesen. Origo ligger så att B-bilen befinner sig i vila i $R\vec{y}$.) Hastighet och acceleration uppmätt av observatör i bil B betyder hastighet och acceleration relativt det bilfixa systemet. Detta system rör sig relativt det jordfixa. Denna rörelse är ren rotation kring origo med konstant rotationsvektor $\vec{\omega} = -(v/R)\hat{Z}$. Enligt räknereglerna för hastighet och acceleration i rörliga referenssystem har vi:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A\mathrm{rel}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_A,$$
$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A\mathrm{rel}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{A\mathrm{rel}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_A).$$

   Nu återstår endast algebra för att få de sökta kvantiteterna.
   (a) $\vec{v}_{A\mathrm{rel}} = \vec{v}_A - \vec{\omega} \times \vec{r}_A = -(2v + v\frac{d}{R})\hat{x}$.
   (b) $\vec{a}_{A\mathrm{rel}} = \vec{a}_A - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{A\mathrm{rel}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_A) = -(2\frac{v^2}{R} + \frac{v^2 d}{R^2})\hat{y}$.
   Möjlig rimlighetskontroll: Enligt svaret blir både hastighet och acceleration för bil A sedd från bil B noll om $d = -2R$. Kan det verkligen stämma? Ja, för då kör bilarna runt samma cirkel åt samma håll med samma fart, så att de hela tiden befinner sig på motsatta sidor av den, dvs bil A befinner sig hela tiden på avståndet $2R$ rakt åt höger från bil B.

3. *(6 poäng)*
Man får tänka sig att gungan först ges fart under en startfas. Därefter svänger den fritt kring sin upphängningspunkt O, och det är denna svängningsrörelse vi skall studera.



I O kan den då påverkas av lagerkraft F, men inte av något kraftmoment. Därför ställer vi upp rörelsemängdsmomentekvationen för gungan med avseende på upphängningspunkten O. Tröghetsmomentet x vinkelaccelerationen = summan av kraftmomenten:

$$(mR^2/3 + MR^2)\ddot{\theta} = -(mgR/2 + MgR)\sin\theta.$$

För att uttrycka passagerarnas (dvs M's) acceleration behöver vi också vinkelhastigheten. Den kan vi få tex genom att multiplicera ekvationen ovan med $\dot{\theta}$ och integrera med avseende på tiden från tidpunkten för maximalt utslag:

$$\ddot{\theta} = -\frac{m/2 + M}{m/3 + M}\frac{g}{R}\sin\theta, \qquad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{m/2 + M}{m/3 + M}\frac{g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Passagerarnas accelerationen i negativ z-led kan beräknas tex genom att teckna ett uttryck för M's z-koordinat och derivera det två gånger.

$$\begin{aligned}
-z &= R\cos\theta \\
-\dot{z} &= -R\sin\theta\,\dot{\theta} \\
-\ddot{z} &= -R(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2) = -\frac{m/2 + M}{m/3 + M}\,g(-\sin^2\theta + 2(\cos\theta - \cos\theta_0)\cos\theta).
\end{aligned}$$

Detta är det efterfrågade uttrycket. Att accelerationen nedåt stundtals är större än g kan man tex se genom att räkna ut den för utslagsvinkeln 90°. Då är den

$$-\ddot{z}(\pi/2) = \frac{m/2 + M}{m/3 + M}\,g > g.$$

4. *(2+4 poäng)*
Eftersom begreppen naturlig vinkelfrekvens och kritisk dämpning förekommer i uppgiftstexten så får man anta att det är frågan om harmonisk svängning, resp lineärt dämpad harmonisk svängning, dvs rörelseekvationerna i de två fallen är på formerna

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0, \qquad \text{resp.} \qquad \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0.$$

Vi antar att vattnet inte påverkar fjäderkonstanten eller tröga massan, så att det är samma ω_n i bägge fallen.
(a) Vi är intresserade av den maximala fart v_m som uppstår efter att massan släpps från vila i $x = x_0$. Den bestäms av vår rörelseekvation, dvs det finns ett funktionssamband

mellan kvantiteterna ω_n, ζ, x_0 och v_m. För att sambandet skall vara dimensionellt korrekt skall det kunna uttryckas i dimensionslösa kombinationer av dem. Kvantiteterna har dimensionerna

$$[\omega_n] = 1/T, \qquad [\zeta] = 1, \qquad [x_0] = L, \qquad [v_m] = L/T.$$

Här förekommer två grunddimensioner. Vi eliminerar dem och får två oberoende dimensionslösa kombinationer av våra fyra kvantiteter, ζ och $v_m/(x_0\omega_n)$. För att funktionssambandet skall vara dimensionellt korrekt måste det vara ett samband mellan bara dessa två. Löser man det för den senare har man

$$v_m/(x_0\omega_n) = f(\zeta), \qquad \text{dvs} \qquad v_m = x_0\omega_n f(\zeta).$$

De två experimenten skiljer sig bara genom att ζ är olika, $\zeta_1 = 0$, medan $\zeta_2 = 1$ (krititisk dämpning). Således

$$v_{m2}/v_{m1} = f(1)/f(0).$$

(b) I första fallet är rörelseekvationens lösning med givna startvillkoren $x(t) = x_0\cos(\omega_n t)$, och maximala farten $v_{m1} = \omega_n x_0$.
I andra fallet är rörelseekvationens allmänna lösning på formen $x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$. Begynnelsevillkoren $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ bestämmer integrationskonstanterna så att

$$x(t) = x_0(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}.$$

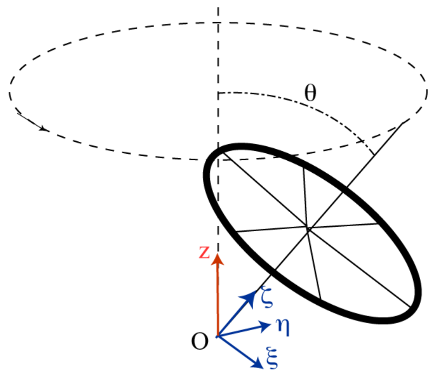
Man deriverar $x(t)$ en gång för att få hastigheten, sedan ännu en gång för att hitta tidpunkten när hastigheten är maximal:

$$\dot{x} = -x_0\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \qquad \ddot{x} = x_0\omega_n^2(\omega_n t - 1)e^{-\omega_n t}.$$

Den blir $t_m = 1/\omega_n$, och $v_{m2} = -\dot{x}(t_m) = x_0\omega_n e^{-1}$. Således är den sökta numeriska faktorn: $v_{m1}/v_{m2} = e$.

Överbetygsuppgifter

5. *(6 poäng)*
Strategi: Vi noterar att vi har rotation kring en fix punkt (O). Vi väljer därför att teckna rörelsemängdsmoment och vridmoment med avseende på denna fixa punkt och därefter skriva rörelseekvationen.
Inför en rumsfix axel $\hat{z}$ samt ett kroppsfixt koordinatsystem $\xi\eta\zeta$ som följer med precessionsrörelsen (se figur).



En allmän rotationsvektor i $\xi\eta\zeta$-systemet kan skrivas $\vec{\omega} = \omega_\xi\hat{\xi} + \omega_\eta\hat{\eta} + \omega_\zeta\hat{\zeta}$. Men vi vet redan att rotationsrörelsen består av en precessions- och en spinnkomponent så att rotationsvektorn kan skrivas explicit i detta fall

$$\vec{\omega} = \Omega\hat{z} + \nu\hat{\zeta}.$$

Kroppen är helt symmetrisk kring ξ och η (dvs $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = I_1$). Axeln ζ är huvudsymmetriaxeln och alla deviationsmoment är noll.

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_\zeta \end{pmatrix}$$

Med massan koncentrerad längs med periferin blir $I_\zeta = mR^2$ och $I_1 = mR^2/2 + mR^2 = 3mR^2/2$.
Kraftmomentet m.a.p. O

$$\vec{M}_O = R\hat{\zeta} \times (-mg\hat{z}) = mgR(\hat{z} \times \hat{\zeta}).$$

Rörelsemängdsmomentet m.a.p. O

$$\vec{L}_O = \mathbf{I}_O\vec{\omega} = I_1\omega_\xi\hat{\xi} + I_1\omega_\eta\hat{\eta} + I_\zeta\omega_\zeta\hat{\zeta} = I_1\vec{\omega} + (I_\zeta - I_1)\omega_\zeta\hat{\zeta} = I_1\Omega\hat{z} + [I_1\nu + (I_\zeta - I_1)\omega_\zeta]\,\hat{\zeta},$$

där vi utnyttjat både det generella och explicita uttrycket för $\vec{\omega}$. Vi kan identifiera $\omega_\zeta = \hat{\zeta} \cdot \vec{\omega} = \Omega\cos\theta + \nu$ och får därför

$$\vec{L}_O = I_1\Omega\hat{z} + [I_\zeta\nu + (I_\zeta - I_1)\Omega\cos\theta]\,\hat{\zeta}.$$

Rörelseekvationen blir (utnyttja att enbart $\hat{\zeta}$ är tidsberoende: $\dot{\hat{\zeta}} = \vec{\omega} \times \hat{\zeta} = \Omega\hat{z} \times \hat{\zeta}$

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \Rightarrow mgR(\hat{z} \times \hat{\zeta}) = [I_\zeta\nu + (I_\zeta - I_1)\Omega\cos\theta]\,\Omega(\hat{z} \times \hat{\zeta}).$$

Vi får alltså

$$I_\zeta \nu \Omega + (I_\zeta - I_1)\Omega^2 \cos\theta - mgR = 0,$$

med $\theta = 45^o$

$$-\frac{mR^2}{2}\frac{\Omega^2}{\sqrt{2}} + mR^2\nu\Omega - mgR = 0,$$

eller

$$\nu = \frac{g}{\Omega R} + \frac{\Omega}{2\sqrt{2}}.$$

[dimension 1/T ok!].
En moturs precession enligt uppgiftsillustrationen betyder att $\Omega > 0$ vilket innebär att $\nu > 0$ vilket betyder positiv rotation kring ζ-axeln.

---

6. Betrakta storheten

$$E \equiv \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L,$$

där $L = L(q, \dot{q}, t)$ är Lagrangianen för ett system med N frihetsgrader och q_i, $\dot{q}_i$ är generaliserade koordinater och hastigheter.

(a) *(2 poäng)*
Partikel i rummet med cartesiska koordinater. Potentiell energi $V(x, y, z)$. Lagrangianen blir

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - V(x, y, z).$$

Storheten E blir

$$\begin{aligned} E &= (m\dot{x}\dot{x} + m\dot{y}\dot{y} + m\dot{z}\dot{z}) - L \\ &= \left[\frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) + V(x, y, z) \right] = T + V, \end{aligned}$$

dvs E är den totala mekaniska energin.

(b) *(4 poäng)*
Med $L = L(q, \dot{q}, t)$ och flitigt användande av kedjeregeln

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{dL}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] - \left(\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Vi har fyra termer i summorna och en femte utanför. Den andra och fjärde termen tar ut varandra. Lagranges ekvationer ger att $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ och därmed kommer den första och tredje termen ta ut varandra.

Kvar återstår bara

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Med en Lagrangain utan explicit tidsberorende, dvs $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, får vi $\frac{dE}{dt} = 0$, dvs den totala energin är en konserverad storhet.