Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Måndagen den 21 maj 2012 klockan 14.00-18.00 i M.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

---

1. **Lösningsstrategi:**

   - Använd arbete-energi principen
   - Teckna uttryck för kinetisk och potentiell energi
   - Inget tillfört arbete eftersom hjulet rullar utan glidning. Hastighet erhålls omgående ut ovanstående framtagna uttryck.

   Hjulens masscentrum färdas en sträcka x nerför planet med lutning θ. Detta innebär en minskning av deras potentiella energi

   $$\Delta V = -mgx \sin\theta.$$

   Hjulen startar från stillastående. Vid rullningsrörelsen består den kinetiska energin av en translations- och en rotationsdel.

   $$\Delta T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2.$$

   Då hjulet rullar utan glidning har vi sambandet

   $$\bar{v} = \omega r.$$

   För hjul A gäller dessutom att $\bar{I} = 0$ då hela massan är koncentrerad till axelns genom masscentrum ($r = 0$). För hjul B gäller $\bar{I} = mr^2$.

   Ingen icke-konservativ kraft tillför arbete eftersom hjulet rullar utan glidning. För bägge hjulen gäller därför att $\Delta V + \Delta T = 0$.

   Detta ger oss slutligen svaren

   $$\bar{v}_A = \sqrt{2gx\sin\theta},$$
   $$\bar{v}_B = \sqrt{gx\sin\theta}.$$

2. **Lösningsstrategi:**

- Teckna ett uttryck för den böjda stavens totala rörelsemängdsmoment map O.
- Tröghetsmatrisen måste beräknas. Dela in i tre delar. Rita figurer med staven projicerad i xy-, xz-, yz-planen.
- Kinetisk energi fås från skalärprodukten av rotationsvektorn $\vec{\omega}$ med $\vec{L}_O$.

Då rotationen ligger i z-riktningen ($\vec{\omega} = \omega\hat{z}$) kommer rörelsemängdsmoment map O att vara

$$\vec{L}_O = \omega\left(-I_{xz}\hat{x} - I_{xy}\hat{y} + I_{zz}\hat{z}\right).$$

Delar in staven i tre delar (raka stavar i olika riktningar med längd b och massa $m = \rho b$) med del 1 närmast O.

Del	I_{xz}	I_{yz}	I_{zz}	
1	0	0	1/3	$\times\rho b^3$
2	0	1/2	1	$\times\rho b^3$
3	1/2	1	4/3	$\times\rho b^3$

där exempelvis I_{zz} bidraget från stavdel 3 räknas ut enligt

$$I_{zz,3} = \frac{1}{12}\rho b b^2 + \rho b\left(b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = \frac{4}{3}\rho b^3.$$

De relevanta tröghetsmatriselementen blir $I_{xz} = \rho b^3/2$, $I_{yz} = 3\rho b^3/2$, $I_{zz} = 8\rho b^3/3$. Slutligen blir det sökta rörelsemängdsmomentet

$$\vec{L}_O = \rho b^3\omega\left(-\frac{1}{2}\hat{x} - \frac{3}{2}\hat{y} + \frac{8}{3}\hat{z}\right).$$

Den kinetiska energin ges helt enkelt av

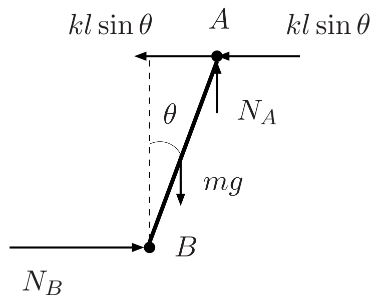
$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_O = \frac{4}{3}\rho b^3\omega^2,$$

eftersom vi har ren rotationsrörelse runt punkten O.

3. **Lösningsstrategi:**

- Vi väljer bland flera angreppsvinklar: energiprincipen (inga icke-konservatva krafter uträttar arbete), vridmomentsekvationer map olika punkter eller Lagranges ekvationer.
- Vi väljer att teckna kraft- och vridmomentsekvationerna och frilägger därför staven för en positiv utfallsvinkel θ.
- Staven rör sig i planet men vi har bara en rörelsevariabel beroende på tvångsvillkoren på ändpunkterna. Speciellt kommer punkten B att vara fix för små vinklar.
- Vi kommer därför att kunna teckna vridmomentsekvationen map B för att slippa bidraget från den okända normalkraften som verkar på den punkten.
- Lös differentialekvationen.

Definiera positiv rotationsriktning (medurs från vertikalaxeln) och rita en friläggning för ett positivt värde på θ. Skall innehålla fjäderkrafter från de två fjädrarna (vardera med storlek $kl\sin\theta$), tyngdkraft samt okänd normalkraft genom kontaktpunkterna A och B.



Vi får kraft- och vridmomentsekvationerna

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_{\text{cm}} &= N_B - 2kl\sin\theta, \\
m\ddot{y}_{\text{cm}} &= N_A - mg, \\
\bar{I}\ddot{\theta} &= -N_A\frac{l}{2}\sin\theta - N_B\frac{l}{2}\cos\theta - 2kl\sin\theta\left(\frac{l}{2}\cos\theta\right).
\end{aligned}
$$

I detta läge kan vi dock konstatera att $y_{\text{cm}} = -l\cos\theta \approx l$ för små vinklar. Det betyder att $\ddot{y}_{\text{cm}} = 0$ och följdaktligen att $N_A = mg$.

Med $y_{\text{cm}} \approx l$ för små utfallsvinklar kan alltså punkten B betraktas som fix och vi väljer därför att teckna vridmomentsekvationen map B

$$
I_B\ddot{\theta} = mg\left(\frac{l}{2}\sin\theta\right) - N_A l\sin\theta - 2kl\sin\theta\,(l\cos\theta)\,.
$$

Tröghetsmomentet är $I_B = ml^2/3$ och $N_A = mg$ från ovan. För små vinklar finner vi alltså rörelseekvationen

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{6k}{m} + \frac{3g}{2l} \right) \theta = 0,$$

vilken uppenbarligen beskriver en harmonisk svängningsrörelse med periodtiden

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{6k}{m} + \frac{3g}{2l}}}.$$

Alternativ lösningsstrategi: Energiprincipen

- Inga icke-konservatva krafter uträttar arbete (normalkrafterna är riktade vinkelrät mot angreppspunkternas rörelse). Den totala mekaniska energin är konserverad.
- Teckna uttryck för kinetisk och potentiell energi. Sätt $E = T + V$ och finn lösningar till $dE/dt = 0$.

  $$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \dot{\theta}^2, \\ V &= -mg y_{\mathrm{cm}} + 2\frac{k}{2} (l \sin\theta)^2. \end{aligned}$$

  Med $y_{\mathrm{cm}} = \frac{l}{2}\cos\theta$ och $x_{\mathrm{cm}} = \frac{l}{2}\sin\theta$ fås $v_{\mathrm{cm}}^2 = \frac{l^2\dot{\theta}^2}{4}$ och energin blir

  $$E = T + V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) - mg\frac{l}{2}\cos\theta + kl^2 \sin^2\theta.$$

- Konserverad energi ger oss ekvationen

  $$\frac{dE}{dt} = ml^2\dot{\theta} \left[\frac{\ddot{\theta}}{3} + \frac{g}{2l}\sin\theta + \frac{2k}{m}\sin\theta\cos\theta \right] = 0.$$

  Vi finner en (uppenbar) lösning då $\dot{\theta} = 0$ samt en då uttrycket i parantesen är noll.
- För små vinklar får vi differentialekvationen

  $$\ddot{\theta} + \left[\frac{3g}{2l} + \frac{6k}{m} \right] \theta = 0,$$

  vilket ger samma lösning som ovan.

4. **Lösningsstrategi:**

   - Använd stelkroppskinematik för att finna uttryck för accelerationen hos punkterna A och B. Notera att punkten A rör sig med konstant hastighet.
   - Relativ acceleration ger ett uttryck för masscentrums acceleration som kan användas för att teckna kraft- och vridmomentsekvationerna.
   - Vi borde i slutändan ha två rörelseekvationer (med krafterna N_A och N_B) och ett villkor ($N_B = 0$) från vilket den sökta hastigheten kan lösas ut

   Kinematiken ger ett uttryck för accelerationen hos punkterna A och B

$$\vec{a}_B = \frac{v^2}{R}\hat{y}$$
$$\vec{a}_A = 0.$$

   Använder vi uttrycket för relativ acceleration kan vi skriva

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}) = \frac{v^2}{R}\hat{y} + \alpha\hat{z} \times (-L\hat{x})$$

   eftersom $\omega = 0$ i detta ögonblick. Då $\vec{a}_A = 0$ får vi sambandet

$$\alpha = \frac{v^2}{LR}.$$

   På liknande sätt fås masscentrums acceleration

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{BG} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BG}) = \frac{v^2}{2R}\hat{y}.$$

   Ett friläggningsdiagram skall innehålla tyngdkraften samt de två normalkrafterna på hjulen A och B. Kraftekvationen i y-led samt medurs vridmomentsekvation map masscentrum ger

$$m\frac{v^2}{2R} = mg - N_A - N_B \quad \Rightarrow \quad N_A = mg - m\frac{v^2}{2R} - N_B$$
$$I_G\alpha = (N_A - N_B)\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad N_B = m\left(\frac{g}{2} - \frac{v^2}{3R}\right).$$

   Den givna situationen att $N_B = 0$ ger den sökta hastigheten och normalkraften

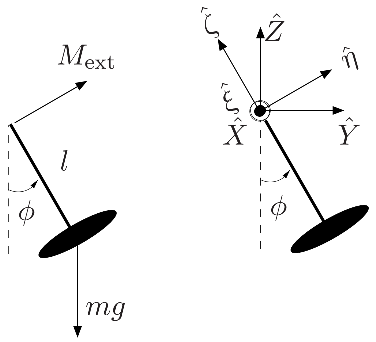
$$v = \sqrt{\frac{3gR}{2}}, \quad N_A = \frac{mg}{4}.$$

Överbetygsuppgifter

5. **Lösningsstrategi:**

   - Rita en tydlig figur med ett rumsfixt och ett kroppsfixt koordinatsystem. Teckna vrid- och rörelsemängdsmomentet relativt det kroppsfixa koordinatsystemet.
   - Teckna vridmomentsekvationerna i det kroppsfixa koordinatsystemet.
   - Försök identifiera rörelseekvationen som ger pendelrörelsen och se ifall spinnet är en faktor i denna.

   Se figur med friläggningsdiagram och definition av koordinataxlar. Notera att $\hat{X} = \hat{\xi}$. Det kroppsfixa systemet $\xi\eta\zeta$ följer med i pendelrörelsen men ej spinnet ($\vec{\nu} = -\nu\hat{\zeta}$); dvs det roterar med $\vec{\Omega} = \dot{\phi}\hat{\xi}$.



   Pendeln roterar fritt i ξ- och ζ-led i avsaknad av friktion. Detta innebär att vridmomentet från infästningen är riktad i η-led och det totala vridmomentet map denna punkt blir[1]

$$\vec{M}_O = -mgl\sin\phi\hat{\xi} + M_{\text{ext}}\hat{\eta}.$$

   Den totala rotationsvektorn består av spinnrörelsen runt huvudsymmetriaxeln plus pendelrörelsen

$$\vec{\omega} = \vec{\nu} + \vec{\Omega} = -\nu\hat{\zeta} + \dot{\phi}\hat{\xi}.$$

[1] Vi antar för enkelhets skull att all massa är koncentrerad till skivan. Detta antagande påverkar enbart längden på hävarmen för vridmomentet från tyngdkraften.

Tröghetsmatrisen är diagonal och rörelsmängdsmomentet blir

$$\vec{L}_O = I_{\xi\xi}\dot{\phi}\hat{\xi} - I_{\zeta\zeta}\nu\hat{\zeta}.$$

Vridmomentsekvationen blir

$$\vec{M}_O = \dot{\vec{L}}_O = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\xi\eta\zeta} + \vec{\Omega}\times\vec{L}_O = I_{\xi\xi}\ddot{\phi}\hat{\xi} - I_{\zeta\zeta}\dot{\nu}\hat{\zeta} + I_{\zeta\zeta}\nu\dot{\phi}\hat{\eta}.$$

Eftersom $\vec{M}_O$ inte har någon komponent i ζ-led framgår direkt att $\dot{\nu} = 0$ och att ν är en rörelsekonstant.

Explicit blir rörelseekvationerna i ξ- och η-led

$$\begin{aligned} -mgl\sin\phi &= I_{\xi\xi}\ddot{\phi} \\ M_{\text{ext}} &= I_{\zeta\zeta}\nu\dot{\phi}, \end{aligned}$$

där den första ekvationen motsvarar rörelseekvationen för en pendel och den andra ger storlek och riktning på vridmomentet i infästningspunkten. Notera att pendelekvationen *inte* beror på spinnhastigheten ν.

Ovanstående uttryck för storleken på vridmomentet är en funktion av $\dot{\phi}$ och inte ϕ. Detta svar accepteras. Men skall man vara noga, och verkligen finna $M_{\text{ext}}(\phi)$, så måste vi integrera rörelseekvationerna. Utnyttja att $\ddot{\phi} = \dot{\phi}d\dot{\phi}/d\phi$ och integrera den första rörelseekvationen

$$\int_0^{\dot{\phi}} \dot{\phi}' d\dot{\phi}' = -\frac{mgl}{I_{\xi\xi}} \int_{\phi_{\max}}^{\phi} \sin\phi d\phi,$$

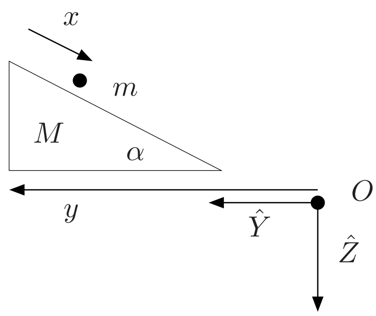
där $\phi_{\max}$ är maximal utslagsvinkel. Denna integral ger $\dot{\phi}(\phi)$ och insättning i den andra rörelsekvationen ger

$$M_{\text{ext}} = I_{\zeta\zeta}\nu\sqrt{\frac{2mgl(\cos\phi - \cos\phi_{\max})}{I_{\xi\xi}}}$$

6. **Lösningsstrategi:**

- Rita figur och välj generaliserade koordinater
- Teckna uttryck för potentiell och kinetisk energi för att få Lagrangianen.
- Teckna och lös Lagranges ekvationer.
  Kontrollera specialfall $\alpha = 0, \pi/2 \quad M \gg m$.

Välj x, y som generaliserade koordinater (se figur).



Potentiell energi:

$$V = -mgx\sin\alpha.$$

Klossens absoluta hastighet är $\vec{v}_{\text{kloss}} = (\dot{y} - \dot{x}\cos\alpha)\hat{Y} + \dot{x}\sin\alpha\hat{Z}$. Den kinetiska energin blir då

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha).$$

Från ovanstående kan vi teckna Lagrangianen

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha) + mgx\sin\alpha.$$

Lagranges ekvationer

$$\begin{aligned} y - \text{led}: &\quad -m\ddot{x}\cos\alpha + (M+m)\ddot{y} = 0 \\ x - \text{led}: &\quad m\ddot{x} - m\ddot{y}\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0 \end{aligned}$$

Vilket ger lösningarna

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{m\cos\alpha}{M+m}\ddot{x} \\ \ddot{x} &= \frac{(M+m)\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g, \end{aligned}$$

där $\ddot{x}$ är den sökta accelerationen relativt kilen.

Dimensionen för ovanstående stämmer. Vi kan också studera uppenbara specialfall:

$$\ddot{x} = g\sin\alpha \text{ (om } M \gg m), \quad \ddot{x} = g \text{ (om } \alpha = \pi/2), \quad \ddot{x} = 0 \text{ (om } \alpha = 0).$$