Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Måndagen den 24 augusti 2009 klockan 08.30-12.30 i V.
Lösningsskiss: Christian Forssén.

Obligatorisk del

---

1. Rätt svarsalternativ på de sex frågorna är:
   bba baa

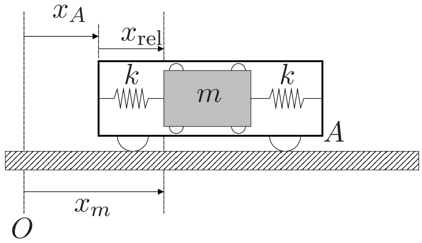
2. Vi inför ett roterande koordinatsystem xyz, med z-axeln ut ur planet och x-axeln längs spåret. Detta betyder att $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$, $\vec{\alpha} = -\alpha\hat{z}$, $\vec{r} = r\hat{x}$, $\vec{v}_{\text{rel}} = \dot{r}\hat{x}$ och $\vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{r}\hat{x}$, där de två sistnämnda storheterna är A:s hastighet respektive acceleration *relativt* skivan.

   Med origo i skivans mittpunkt (som är fix; dvs $\vec{v}_O = 0$, $\vec{a}_O = 0$) får vi följande uttryck för A:s hastighet och acceleration i ett inertialsystem.

$$\begin{aligned}
\vec{v}_A &= \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{\text{rel}} = \omega\hat{z} \times r\hat{x} + \dot{r}\hat{x} = \omega r\hat{y} + \dot{r}\hat{x} \\
\vec{a}_A &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{rel}} \\
&= \left(\ddot{r} - \omega^2 r\right)\hat{x} + (2\omega\dot{r} - \alpha r)\,\hat{y}.
\end{aligned}$$

3. Strategi: Vi behöver rörelsevariabler för att beskriva massans rörelse relativt vagnen. Men vi behöver också rörelsevariabler i ett inertialsystem för att kunna ställa upp Newton II.

   Vi inför därför tre olika koordinater enligt figur: x_m = massans läge i ett inertialsystem; x_{rel} = massans läge relativt vagnen A; $x_A(t) = a \sin \omega_A t$ (vagnens läge i inertialsystemet).



Vi skriver $x_{\rm rel} = x_0 + x$, där x_0 är en konstant som ger vagnens läge i jämvikt (dvs då fjäderkrafterna är balanserade). x blir då avvikelsen från jämviktsläget och en friläggning av vagnen för ett positivt värde på x ger följande rörelseekvation

$$-2k \underbrace{(x_m - x_A - x_0)}_{=x} = m \underbrace{\ddot{x}_m}_{\ddot{x}_A + \ddot{x}}.$$

Notera att vi använder Newton II i inertialsystemet. Detta ger oss dock en ekvation för variabeln x

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = a\omega_A^2 \sin \omega_A t,$$

där $\omega_n \equiv \sqrt{2k/m}$. Med insättning av ansatzen $x = X \sin \omega_A t$ får vi följande villkor för amplituden X

$$X = \frac{a(\omega_A/\omega_n)^2}{1 - (\omega_A/\omega_n)^2}.$$

Vi söker de frekvenser för vilka $|X| < ca$ och finner en övre och en undre gräns ($-c < X/a < c$):

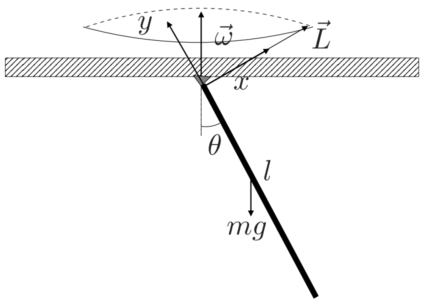
$$\frac{\omega_A}{\omega_n} < \sqrt{\frac{c}{1+c}} \quad \text{eller}$$
$$\frac{\omega_A}{\omega_n} > \sqrt{\frac{c}{c-1}}.$$

Vi noterar t.ex. att gränsen $c \to \infty$ motsvarar resonansfrekvensen $\omega_A \to \omega_n$.

4. Strategi:

- För att teckna rörelsemängdsmomentet för staven behöver vi införa ett kroppsfixt (och därmed roterande) koordinatsystem. I detta koordinatsystem kan vi sedan uttrycka rotationsvektorn och tröghetsmatrisen för att slutligen få rörelsemängdsmomentet.
- Vi utnyttjar sedan rörelseekvationen som säger att tidsändringen av den sistnämnda skall vara lika med det yttre vridmomentet.
- För att slippa de okända krafterna som verkar i infästningen väljer vi att skriva våra storheter med avseende på denna punkt.

Vi inför ett koordinatsystem xyz enligt figur (z pekar ut ur planet) som roterar med staven, dvs med rotationshastighet $\vec{\omega} = \omega\left(\sin\theta \hat{x} + \cos\theta \hat{y}\right)$.



Våra koordinataxlar utgör huvudtröghetsaxlar för staven (alla deviationsmoment är noll) och vi har tröghetsmatrisen $I_{xx} = ml^2/3$, $I_{yy} = 0$, $I_{zz} = ml^2/3$.

Rörelsemängdsmomentet m.a.p. stavens upphängningspunkt: $\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega} = (ml^2/3)\omega \sin\theta \hat{x}$. Denna vektor är alltså parallell med x-axeln och roterar med denna (se figur ovan). Tidsderivatan för denna vektor

$$d\vec{L}/dt = \vec{\omega} \times \vec{L} = -(ml^2/3)\omega^2 \sin\theta \cos\theta \hat{z}$$

Denna ändring av rörelsemängdsmomentet ges av ett yttre vridmoment $\vec{M}$ (m.a.p. upphängningspunkten) vilken i sin tur kommer från tyngdkraften som verkar på staven.

$$\vec{M} = -\frac{l}{2}\hat{y} \times mg\,[-\sin\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{y}] = -\frac{mgl}{2}\sin\theta\hat{z}.$$

Med $\vec{M} = d\vec{L}/dt$ får vi slutligen $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l\cos\theta}}$.

Vi noterar att rotationshastigheten ökar med ökande vinkel θ, och speciellt att $\omega \to \infty$ då $\theta \to \pi/2$ vilket är rimligt. Att stavens massa inte är en faktor i svaret kunde vi insett redan från första början m.h.a. dimensionsanalys.

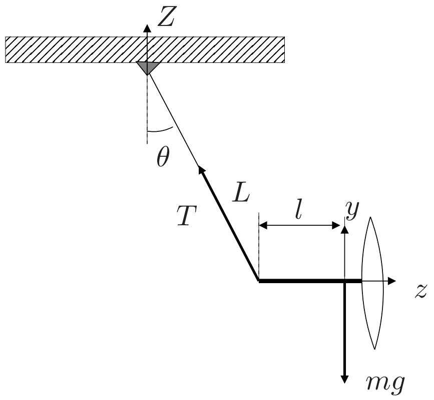
Överbetygsuppgifter

---

5. Strategi:
   - Målet är att kunna utnyttja rörelseekvationen $[\dot{\vec{L}}] = \vec{M}$ med avseende på någon lämpligt vald punkt och skriven i ett lämpligt (kroppsfixt) koordinatsystem.

- Själva precessionsrörelsen runt upphängningspunkten kan beskrivas enkelt med en fix koordinataxel fast vi noterar att precessionshastigheten inte är given i upgiften utan måste elimineras.
- Detsamma gäller kraften som verkar på snurran från snöret. Vi kan få villkor på denna kraft genom att utnyttja de rörelseekvationer som vi får från summan av yttre krafter på snurran.

Vi inför ett fixt cartesiskt koordinatsystem XYZ med origo i upphängningspunkten och Z-axeln riktad uppåt, samt ett koordinatsystem som roterar med symmetriaxlarna xyz med z-axeln = symmetriaxeln, och y-axeln riktad uppåt (se figur). Detta koordinatsystem roterar med $\vec{\Omega} = \Omega\hat{Z}$, där Ω är rörelsens precessionshastighet.



Snurrans rotationsvektor $\vec{\omega} = \nu\hat{z} + \Omega\hat{Z}$.
Rörelsemängdsmoment med avseende på masscentrum,

$$\vec{L} = I_0\nu\hat{z} + I_\perp\Omega\hat{Z}.$$

Kraftmoment med avseende på masscentrum

$$\vec{M} = -l\hat{z} \times \vec{T},$$

där $\vec{T}$ är kraften från snöret på snurran.

Kraftjämvikt i Z-led ger

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

Masscentrums rörelse i horisontell led ger rörelseekvationen

$$m(l + L\sin\theta)\Omega^2 = T\sin\theta. \tag{2}$$

Rotationsrörelseekvationen

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \Omega\hat{Z} \times \vec{L} = \Omega\nu I_0 \hat{Z} \times \hat{z}.$$

Från uttrycket för $\vec{M}$ ser vi att $\vec{T}$ måste ligga i $\hat{Z}\hat{z}$-planet för att termerna i sista ekvationen skalll peka åt samma håll. Ekvationen ger då sambandet

$$lT\cos\theta = \Omega\nu I_0. \tag{3}$$

Ekvationerna (1–3) ger, genom elimination av T och Ω, det sökta sambandet, (som lämpligen dimensionskontrolleras)

$$(l + L\sin\theta)g\left(\frac{lm}{\nu I_0}\right)^2 = \tan\theta.$$

Om vinkeln θ är nära noll så kan vi approximera tangens och sinus med vinkeln. Då får vi

$$\theta \approx \frac{l}{\left[\frac{1}{g}\left(\frac{\nu I_0}{lm}\right)^2 - L\right]}.$$

6. (a) Vi antar att snöret har längden L och tecknar Lagrangianen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + Mg(L - r).$$

Rörelseekvationerna fås från Lagranges ekvationer

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$
$$(M + m)\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - Mg,$$

där den första ekvationen säger att rörelsemängdsmomentet med avseende på punkten där snöret går genom bordet $L_0 = mr^2\dot{\theta}$ är konserverat, och den andra uttrycker det faktum att tyngdkraften är ansvarig för accelerationen av de två massorna längs snöret plus centripetalaccelerationen.

(b) Den andra rörelseekvationen med $\ddot{r} = 0$ och $r = r_0$ ger villkoret $mr_0\dot{\theta}^2 = Mg$ för cirkelrörelse. Detta villkor ger också ett samband mellan radien och vinkelhastigheten för denna rörelse.

(c) Vi uttrycker den andra rörelseekvationen i termer av r samt den konserverade storheten L_0

$$(M + m)\ddot{r} = \frac{L_0^2}{mr^3} - Mg.$$

Sedan betraktar vi små oscillationer runt den rena cirkelrörelsen, dvs $r(t) = r_0 + \delta(t)$, där $\delta \ll r_0$. Vi behåller första ordningens termer i δ

$$\frac{1}{r^3} \equiv \frac{1}{(r_0+\delta)^3} \approx \frac{1}{r_0^3 + 3r_0^2\delta} = \frac{1}{r_0^3}\frac{1}{1+3\delta/r_0} \approx \frac{1}{r_0^3}\left(1 - \frac{3\delta}{r_0}\right),$$

vilket ger

$$(M+m)\ddot{\delta} \approx \frac{L_0^2}{mr_0^3}\left(1 - \frac{3\delta}{r_0}\right) - Mg.$$

Från (b)-uppgiften ser vi att $\frac{L_0^2}{mr_0^3} - Mg = 0$[1] och därmed återstår ekvationen för en fri svängningsrörelse

$$\ddot{\delta} + \left(\frac{3L_0^2}{(M+m)mr_0^4}\right)\delta \approx 0,$$

där vi identifierar vinkelfrekvensen

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3L_0^2}{(M+m)mr_0^4}} = \sqrt{\frac{3M}{M+m}}\sqrt{\frac{g}{r_0}}.$$

Vi noterar att denna frekvens för oscillationer i radiell led inte är samma som frekvensen för massans cirkelrörelse. Den sistnämnda ges från (b)-uppgiften $\dot{\theta} = \sqrt{M/m}\sqrt{g/r_0}$.

[1] Detta samband kommer just från själva villkoret för jämviktsläget.