Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM521 och 520)

Tid och plats: Fredagen den 17 januari 2014 klockan 08.30-12.30.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

---

1. Endast kortfattade lösningar redovisas. Se avsnitt 8/4, respektive 5/3 i kursboken.

   (a) För att kunna ställa upp vridmomentsekvationen behövs avståndet till halvskivans masscentrum (som blir $\bar{r} = 4r/3\pi$) samt dess tröghetsmoment runt O ($I_O = mr^2/2$). Den eftersökta naturliga vinkelfrekvensen fås genom att teckna rörelseekvationen för små vinklar. Svaret blir: $\omega_n = \sqrt{8g/3\pi r}$, som har rätt dimension.

   (b) Utnyttja det geometriska sambandet $x = 2b\cos\theta$, där θ är vinkeln mellan AC och BC. Derivera m.a.p. tid

   $$\dot{x} = -2b\dot{\theta}\sin\theta.$$

   Notera att den sökta vinkelhastigheten är $\omega = \dot{\theta}$, medan hastigheten $v = \dot{x}$. Vi får $\omega = -v/(2b\sin\theta)$. Här är det lämpligt att rita en figur för att visa på positiv riktning.

   Utnyttja sedan att a är konstant och det resulterande sambandet $\dot{x}^2 = 2ax$.

   I slututtrycket vill vi inte använda variabeln θ utan enbart x som givet i uppgiftsformuleringen. Vi utnyttjar därför att $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-x^2/4b^2}$. Svaret blir

   $$\omega = \sqrt{\frac{2ax}{4b^2 - x^2}},$$

   med rätt dimension.

2. Vi väljer att teckna tröghetsmatrisen i ett kartesiskt koordinatsystem med origo i mitten av basen, och z-axeln längs symmetriaxeln (dvs $0 \le z \le h$). Eftersom konen är homogen blir densiteten

   $$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h/3}.$$

Vi kan skriva masselementet $dm = \rho(x,y,z)dxdydz$ och får tröghetsmatrisen ur följande volymsintegral(er)

$$I = \int_V \rho(x,y,z) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} dxdydz$$

$$= \rho \int_{z=0}^{h} \int_{y=-R(h-z)/h}^{R(h-z)/h} \int_{x=-\sqrt{(R(h-z)/h)^2-y^2}}^{\sqrt{(R(h-z)/h)^2-y^2}} \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} dxdydz$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{mh^2}{10}+\frac{3mR^2}{20} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mh^2}{10}+\frac{3mR^2}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3mR^2}{10} \end{pmatrix}$$

Vi kan notera att tröghetsmatrisen är diagonal och att dessa koordinataxlar alltså är huvudtröghetsaxlar. Deviationsmomentet kan visas vara lika med noll genom symmetriargument. Notera symmetrin i både x och y koordinaterna. Det är också uppenbart att tröghetsmomenten måste vara lika runt x- och y-axlarna. Detta lämnar enbart två matriselement att räkna ut explicit: $I_{xx} = I_{yy}$ och I_{zz}. Se integral och svar ovan.

3. Lösningsstrategi:

   (a) Börja med kinematiken och teckna ett uttryck för stångens masscentrums acceleration uttryckt i vinkeln θ, vinkelhastigheten $\omega = \dot{\theta}$ samt vinkelacceleration $\ddot{\theta}$.

   (b) Teckna sedan vridmomentekvationen. Väljer man att göra detta m.a.p. masscentrum måste man även teckna kraftekvationer för att få de okända normalkrafterna i A och B. Enklare blir det om man väljer någon av punkterna som genomkorsas av dessa krafters verkningslinjer.

   (c) Vinkelaccelerationen blir $\ddot{\theta} = \frac{3F}{ml}\cos\theta - \frac{3g}{2l}\sin\theta$.

   (d) Vinkelhastigheten fås genom att integrera detta uttryck. Använd sambandet $\ddot{\theta} = \omega d\omega/d\theta$, samt ett begynnelsevillkor. Detta ger $\dot{\theta}^2 = \frac{6F}{ml}\sin\theta + \frac{3g}{l}(\cos\theta - 1)$.

4. Lösningsstrategi:

   (a) Teckna rörelseekvationer för det två cylindrarna. Vi kommer att ha två rörelsevariabler (två rotationsvinklar) samt en okänd friktionskraft. Följdaktligen behövs tre ekvationer.

(b) Den mindre cylinderns position relativt vertikalaxeln kan beskrivas med en tredje vinkel θ. Då vi har rullning utan glidning borde denna vinkel bero på cylindrarnas rotationsvinklar.

(c) Utnyttja $\sin\theta \approx \theta$ för små vinklar för att lösa röresleekvationen för θ.

Tröghetsmomenten för de två cylindrarna är $I_i = M_i R_i^2, \quad i = 1,2.$Vi inför den okända friktionskraften F som verkar i kontaktpunkten mellan de två cylindrarna. Vinklarna θ_1 och θ_2 beskriver de två cylindrarnas rotation (moturs positivt) med $\theta_1 = \theta_2 = 0$ då den mindre cylindern befinner sig längst ner i den större cylindern. Vridmomentsekvationerna blir

$$FR_1 = M_1 R_1^2 \ddot{\theta}_1, \tag{1}$$

$$-FR_2 = M_2 R_2^2 \ddot{\theta}_2. \tag{2}$$

Vi introducerar också vinkeln θ som beskriver den mindre cylinderns position relativt vertikalaxeln (en figur vore bra). Vi kan då teckna kraftekvationen för den mindre cylindern

$$F - M_1 g \sin\theta = M_1 R_2 \ddot{\theta} \tag{3}$$

Utan glidning, och med $R_1 \ll R_2$, fås villkoret

$$R_2\theta \approx R_2\theta_2 - R_1\theta_1. \tag{4}$$

Med våra tre rörelseekvationer och ett geometrisk samband kan vi teckna en rörelseekvation för θ med enbart kända storheter. Vi utnyttjar också att $\sin\theta \approx \theta$

$$\left(M_1 + \frac{1}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}} \right) \ddot{\theta} + \frac{M_1 g}{R_2}\theta = 0.$$

Den sökta frekvensen blir därför

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_2}} \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{M_1 + 2M_2}}.$$

Notera t.ex. specialfallet då $M_2 \ll M_1$: Friktionskraften blir försumbar och vi har bara en normalkraft. Den mindre cylindern beter sig som en pendel med längden R_2 och frekvensen blir mycket riktigt $\sqrt{g/R_2}$.

Extrauppgift

5. Lösningsstrategi:

   (a) Vi inser att rörelsemängdsmomentet L_O runt punkten O kommer att konserveras genom stöten. Sedan kommer denna att minska pga vridmomentet från tyngdkraften. Då kan vi använda arbete-energi-principen för att finna den eftersökta minsta farten.

   (b) Före stöten ges L_O av masscentrums hastighet v_1 samt momentarmen $b/2$: $L_O = mv_1 b/2$.

   (c) Efter stöten har blocket rotationshastigheten $\bar{v}/\bar{r}$, där $\bar{v}$ är masscentrums hastighet direkt efter stöten (tangentiellt mot rotationen) och $\bar{r} = (b^2/4 + c^2/4)$. Notera att vi kan försumma studsen. Detta ger $L_O = \frac{m}{3}\left(b^2 + c^2\right)\omega$, där vi använt Steiners sats för att räkna ut tröghetsmomentet I_O.

   (d) Rotationshastigheten $\omega = \frac{3v_1 b}{2(b^2+c^2)}$ räcker för att lyfta blocket om rotationsenergin precis matchar ökningen i potentiell energi. Ställer vi upp uttrycken för dessa två energier får vi slutligen villkoret

$$v_1 = 2\sqrt{\frac{g}{3}\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)\left(\sqrt{b^2 + c^2} - b\right)}$$

Överbetygsuppgifter

6. Enbart svar:

   (a) $\vec{L}_O = \frac{mr^2}{4}\omega\left[-\sin\alpha\cos\alpha\hat{x} + (\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha)\hat{z}\right]$

   (b) $\beta = \arccos\left(\vec{L}_O \cdot \hat{z}/L_O\right)$ vilket ger $\beta = \arccos(3/\sqrt{10}) \approx 18^\circ$ för $\alpha = 45^\circ$.

7. Med en kraft som alltid är riktad längs med separationsvektorn mellan de två partiklarna kommer dessa att röra sig ett plan. Med polära koordinater i detta plan gäller följande för masscentrumssystemet

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0,$$

dvs $m_1\vec{r}_1 = -m_2\vec{r}_2$ eller $m_1 r_1 = m_2 r_2$ för storlekarna. Den kinetiska energin blir

$$T = \frac{m_1}{2}|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\dot{\vec{r}}_2|^2 = \ldots = \frac{m_2^2}{2\mu}|\dot{\vec{r}}_2|^2 = \frac{m_2^2}{2\mu}\left(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}^2\right),$$

där $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ är den reducerade massan. Den potentiella energin beror på avståndet $r = r_1 + r_2 = m_2 r_2/\mu$. Med θ och r_2 som generella koordinater får vi Lagrangianen

$$L = T - V = \frac{m_2^2}{2\mu}\left(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}^2\right) - V\left(m_2 r_2/\mu\right). \tag{5}$$

Konserverade storheter ges av rörelsekonstanter. Då Lagrangianen saknar $\dot{\theta}$-beroende ger den ena av Lagranges ekvationer direkt att

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_2^2 r_2^2 \dot{\theta}}{\mu} = \text{konstant} \equiv J.$$

Nu gäller det bara att identifiera J. Systemets totala rörelsemängdsmoment runt masscentrum är $m_2 r_2^2\dot{\theta} + m_1 r_1^2\dot{\theta} = m_2^2 r_2^2\dot{\theta}/\mu = J$. Alltså är rörelsemängdsmomentet konserverat.

För att finna en annan rörelsekonstant tecknar vi

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) = \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j\right] = \frac{d}{dt}\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j,$$

där vi har utnyttjat Lagranges ekvationer samt att L ej beror på t explicit. Rörelsekonstanten blir därmed

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = \text{konstant}$$

I vårt fall finner vi att summan i vänsterledet blir

$$\frac{m_2^2\dot{r}_2^2}{\mu} + \frac{m_2^2 r_2^2\dot{\theta}_2^2}{\mu} = 2T,$$

dvs med $L = T - V$ ser vi att vår rörelsekonstant är $T + V = E =$ konstant.