Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Måndagen den 16 augusti 2010 klockan 14.00-18.00 i V.
Lösningsskiss: Christian Forssén.

Obligatorisk del

---

1. Rätt svar på de sex deluppgifterna: SFF SFS.

2. *Givet*: Systemparametrar m, k, b, l; Små oscillationer; Stavens massa försumbar

   Lösning: Rörelsevariabel $= \theta$. Frilägg stången med massan för en liten (positiv) vinkel θ.
   Anta att fjäderkrafterna alltid är riktade horisontellt. (Notera att detta antagande introducerar ett fel $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 + \ldots \approx 1$ vilket är ok för små svängningar.)

   Vridmomentekvation kring O

   $$\overset{\frown}{O}: \quad -mgl\sin\theta - 2kb\sin\theta b\cos\theta = \underbrace{l^2m}_{I_O}\ddot{\theta}.$$

   Vilket ger rörelseekvationen

   $$\ddot{\theta} + \frac{mgl\sin\theta + 2kb^2\cos\theta}{ml^2}\theta = 0.$$

   Linearisera för små svängningar ($\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$):

   $$\ddot{\theta} + \frac{mgl + 2kb^2}{ml^2}\theta = 0.$$

   Detta är differentialekvationen för en fri ($F_0 = 0$), odämpad ($\zeta = 0$) svängningsrörelse med den naturliga vinkelfrekvensen

   $$\omega_n = \sqrt{\frac{mgl + 2kb^2}{ml^2}}.$$

   Den allmänna lösningen ges av $\theta = \theta_{\max}\sin(\omega_n t - \psi)$ med konstanter som ges av begynnelsevillkoren. Periodtiden är $\tau = 2\pi/\omega_n$.

   Dimensionskontroll: ω_n är en frekvens. ok!

   Specialfall: $k = 0$ motsvarar en vanlig pendel. Vi får $\omega_n = \sqrt{g/l}$. ok! Likadant om $mg \gg kb$ fås att masstermen dominerar och rörlsen blir en matematisk pendel. Med $k \to \infty$ fås istället ingen pendelrörelse utan $\tau \to \infty$.

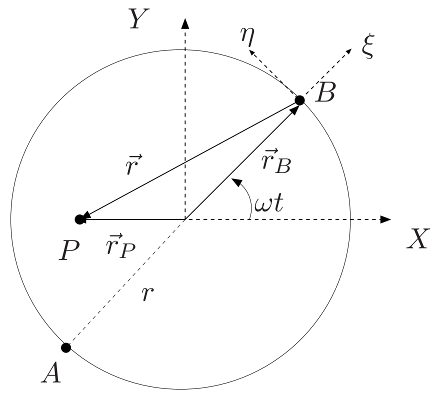

Figure 1: Koordinatsystem och lägesvektorer, uppgift 3

3. Vi inför lägesvektorer och koordinatsystem enligt figur. P är puckens läge efter tiden t. Koordinatsystemet XY är fixt medan koordinatsystemet $\xi\eta$ har origo i punkten B och roterar moturs med vinkelfrekvensen ω. Notera att vektorn $\vec{r} = \vec{r}_{P/B}$.

(a) Pucken accelerar ej i XY-planet. Begynnelseläget motsvarar start i punkten A vid tiden $t = 0$ och hastigheten u relativt karusellen $v_{\text{rel}}(0) = u\hat{\xi}(0) = u\hat{X}$. Uttrycket för relativ hastighet

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + (\vec{\omega} \times \vec{r}_P) + \vec{v}_{\text{rel}}, \tag{1}$$

med punkten O i karusellens mitt får vi $\vec{v}_O = 0$ och $\vec{r}_P(0) = -r\hat{X}$ vilket ger

$$\vec{v}_P = u\hat{X} - \omega r\hat{Y},$$

Integrera detta

$$\vec{r}_P = (ut - r)\hat{X} - \omega rt\hat{Y}, \tag{2}$$

vilket uppfyller begynnelsevillkoret $\vec{r}_P(0) = -r\hat{X}$

(b) Vi tecknar vektorsambandet $\vec{r}_P = \vec{r}_B + \vec{r}$, där vi söker $\vec{r}$. Lägesvektorn $\vec{r}_B = r\hat{\xi}$. Vi kan välja att arbeta antingen med rumsfixa XY-koordinater eller med roterande $\xi\eta$-koordinater. Vissa vektorer är enklare att uttrycka i de förstnämnda, och andra i de sistnämnda. Här väljer vi att utnyttja de rumsfixa och måste då kunna transformera

$$\hat{\xi} = \hat{X}\cos\omega t + \hat{Y}\sin\omega t,$$
$$\hat{\eta} = -\hat{X}\sin\omega t + \hat{Y}\cos\omega t.$$

Detta ger då lägesvektorn $\vec{r}_B = r\cos\omega t\hat{X} + r\sin\omega t\hat{Y}$. Med $\vec{r}_P$ från ekv. (2) får vi

$$\vec{r} = [ut - r - r\cos\omega t]\,\hat{X} - [r\omega t + r\sin\omega t]\,\hat{Y}. \tag{3}$$

Vi kontrollerar att $\vec{r}(0) = -2r\hat{X} = -2r\hat{\xi}(0)$ som förväntat.

(c) Uttrycket för relativ hastighet ger oss att

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + (\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{v}_{\text{rel}}, \tag{4}$$

där

$$\begin{aligned}
\vec{v}_P &= u\hat{X} - \omega r\hat{Y},\\
\vec{v}_B &= \omega r\hat{\eta} = -\omega r\sin\omega t\hat{X} + \omega r\cos\omega t\hat{Y},\\
\vec{\omega}\times\vec{r} &= \omega\,[ut - r - r\cos\omega t]\,\hat{Y} + \omega\,[r\omega t + r\sin\omega t]\,\hat{X}.
\end{aligned}$$

Uttrycket för relativ acceleration ger oss att

$$\vec{a}_P = \vec{a}_B + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{rel}}, \tag{5}$$

där

$$\begin{aligned}
\vec{a}_P &= 0,\\
\vec{a}_B &= -\omega^2 r\hat{\xi} = -\omega^2 r\cos\omega t\hat{X} - \omega^2 r\sin\omega t\hat{Y},\\
\vec{\alpha} &= 0,\\
\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) &= -\omega^2\,[ut - r - r\cos\omega t]\,\hat{X} + \omega^2\,[r\omega t + r\sin\omega t]\,\hat{Y}.
\end{aligned}$$

Vi uttrycker $\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{\omega}\times(\vec{v}_P - \vec{v}_B - (\vec{\omega}\times\vec{r}))$ enligt ovan. Explicit har vi

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}\times\vec{v}_P &= \omega u\hat{Y} + \omega^2 r\hat{X},\\
\vec{\omega}\times\vec{v}_B &= -\omega^2 r\sin\omega t\hat{Y} - \omega^2 r\cos\omega t\hat{X},
\end{aligned}$$

och kan, efter insättning av ovanstående uttryck, slutligen lösa ut

$$\vec{a}_{\text{rel}} = -\omega^2(ut + r)\hat{X} + \left(\omega^3 rt - 2\omega u\right)\hat{Y}. \tag{6}$$

Vi kontrollerar rimlighet $\vec{a}_{\text{rel}}(0) = -\omega^2 r\hat{X} - 2\omega u\hat{Y} = -\omega^2 r\hat{\xi}(0) - 2\omega u\hat{\eta}(0)$ och inser att riktningarna på denna relativa acceleration är rimliga.

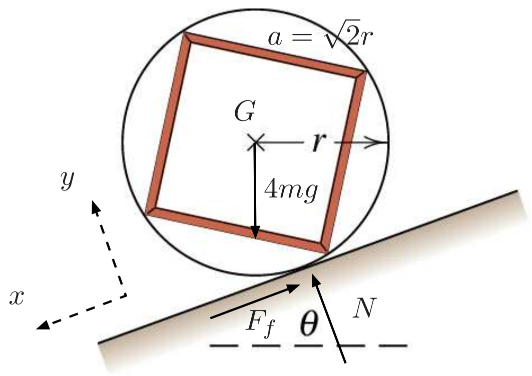

Figure 2: Friläggning och koordinatsystem, uppgift 4

4. Kvadratens sida har längden $a = \sqrt{2}r$. Avståndet från stavarnas masscentrum till hela systemets masscentrum blir $r/\sqrt{2}$. Genom att summera bidragen från de fyra stavarna samt utnyttja parallellaxelteoremet får vi kroppens totala tröghetsmoment runt en axel genom masscentrum

$$\bar{I} = 4\left[\frac{1}{12}m(2r^2) + m\frac{r^2}{2}\right] = \frac{8}{3}mr^2.$$

Vi tecknar de tre rörelseekvationerna med x-axeln riktad neråt, parallellt med det lutande planet och y axeln riktad uppåt, vinkelrät mot det lutande planet.

$$\begin{aligned}
\sum F_y : &\quad N - 4mg\cos\theta = 0 \\
\sum F_x : &\quad 4mg\sin\theta - F_f = 4ma \\
\sum M_G : &\quad F_f r = \frac{8}{3}mr^2\alpha \quad \text{(moturs positivt)},
\end{aligned}$$

där a är kroppens acceleration i x-led och α är vinkelaccelerationen. Tillsammans med villkoret för rullning

$$a = r\alpha \tag{7}$$

Får vi ett ekvationssystem med 4 ekvationer och 4 obekanta. Specifikt är vi intresserade av krafterna F_f och N som tillsammans ger den sökta friktionskoefficienten

$$\left.\begin{aligned} N &= 4mg\cos\theta \\ F_f &= \tfrac{8}{5}mg\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mu_s \geq \frac{F_f}{N} = \frac{2}{5}\tan\theta$$

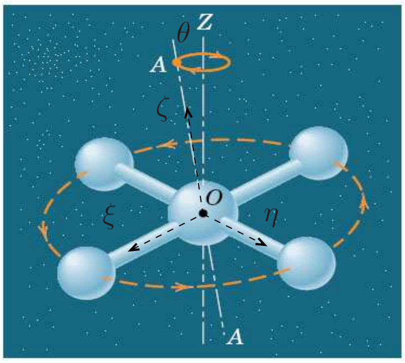

Figure 3: Koordinatsystem, uppgift 5

5. Introducera de kroppsfixa axlarna $\xi\eta\zeta$ med ζ pekandes längs spinnaxeln (A-A). Tröghetsmatrisen i $\xi\eta\zeta$-systemet

$$I_{\zeta\zeta} \equiv I_\zeta$$
$$I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} \equiv I_0 = I_\zeta/2.$$

Rotationer och rörelsemängdsmoment:

$$\vec{p} = p\hat{\zeta} \quad \text{(spinn)}, \tag{8}$$
$$\vec{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{k}} = \Omega\left(\cos\theta\hat{\zeta} - \sin\theta\hat{\xi}\right) \quad \text{(spinnvektorns precession)}, \tag{9}$$
$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{p} = -\Omega\sin\theta\hat{\xi} + (p + \Omega\cos\theta)\hat{\zeta} \quad \text{(total rotation)}, \tag{10}$$
$$\vec{L} = -I_0\Omega\sin\theta\hat{\xi} + I_\zeta(p + \Omega\cos\theta)\hat{\zeta}. \tag{11}$$

Rörelsemängdsmomentet är konstant i det kroppsfixa koordinatsystemet som i sin tur roterar med precessionsvektorn $\vec{\Omega}$. Tidsdervatan blir därför

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} = \vec{\Omega} \times \vec{L} &= \hat{\eta}\left[-I_0\Omega^2\cos\theta\sin\theta + I_\zeta\Omega\sin\theta(p + \Omega\cos\theta)\right] \\ &= \hat{\eta}\Omega\sin\theta\left(I_\zeta p + (I_\zeta - I_0)\Omega\cos\theta\right)\end{aligned} \tag{12}$$

Vi noterar från Ekv. (12) att vi kan ha reguljär precession utan ett externt vridande moment, dvs $\dot{\vec{L}} = 0$, om

$$p = \frac{I_0 - I_\zeta}{I_\zeta}\Omega\cos\theta, \tag{13}$$

alternativt uttryckt

$$\Omega = \frac{I_\zeta p}{(I_0 - I_\zeta)\cos\theta} = \frac{p}{(\frac{I_0}{I_\zeta} - 1)\cos\theta}.$$

Det relativa tecknet på p och Ω beror uppenbarligen på den relativa storleken på I_ζ och I_0 *(samma tecken om $I_0 > I_\zeta$).*
I vårt fall har vi givet $I_0 = I_\zeta/2$ vilket ger $\Omega = -2p\cos\theta \approx -2p$ (för små vinklar). Den totala rotationsvektorn blir

$$\vec{\omega} = p\left(\hat{\zeta} - 2\hat{\mathbf{k}}\right).$$

6. Med beteckningar som i figuren i tentamenstesen:

(a) Antag att snörets längd är l. Lagrangianen blir

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + Mg(l - r).$$

Våra generaliserade koordinater är r och θ. Rörelseekvationerna från Lagranges ekvationer blir

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0, \tag{14}$$

$$(M + m)\,\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Mg = 0. \tag{15}$$

Notera att den första ekvationen säger oss att systemets totala rörelsemängdsmoment m.a.p. mittpunkten är konserverat. Den andra ekvationen säger oss att tyngdkraften Mg ger massornas acceleration längs med snöret samt centripetalaccelerationen för m.

(b) Den första rörelsekvationen ocn säger oss att $mr^2\dot{\theta} = L$, där L är en konstant som beror på begynnelsevillkoren (som vi nämnde ovan så är detta systemets totala rörelsemängdsmoment m.a.p. mittpunkten). Ur detta får vi vinkelhastigheten $\dot{\theta} = L/mr^2$ som vi kan sätta in i den andra rörelseekvationen

$$(M + m)\,\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + Mg = 0. \tag{16}$$

Vi får en cirkelrörelse då $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ vilket inträffar då radien antar det specifika värdet

$$r_0^3 = \frac{L^2}{Mmg},$$

och vinkelhastigheten $\dot{\theta}_0 = \sqrt{Mg/mr_0}$.

(c) För att hitta frekvensen för små variationer kring cirkelrörelsen inför vi en liten störning av radien r från sitt jämviktsvärde r_0. Vi skriver $r(t) \equiv r_0 + \delta(t)$, med $\delta(t) \ll r_0$, och serieutvecklar ekvation (16) till första ordningen i δ. Utnyttja speciellt att

$$\frac{1}{r^3} \equiv \frac{1}{(r_0+\delta)^3} \approx \frac{1}{r_0^3 + 3r_0^2\delta} = \frac{1}{r_0^3(1+3\delta/r_0)} \approx \frac{1}{r_0^3}\left(1 - \frac{3\delta}{r_0}\right),$$

vilket ger rörelseekvationen i variabeln δ

$$(M+m)\,\ddot{\delta} \approx \frac{L^2}{mr_0^3}\left(1 - \frac{3\delta}{r_0}\right) - Mg. \tag{17}$$

Vi noterar att definitionen av r_0 ger att de två konstanta termerna i högerledet tar ut varandra. Sätter vi dessutom in definitionen på L får vi slutligen en välbekant diff.ekvation

$$\ddot{\delta} + \left(\frac{3gM}{(M+m)r_0}\right)\delta \approx 0.$$

I sammanfattning har vi alltså funnit att radien kommer att oscillera runt jämviktsläget r_0, och att vinkelfrekvensen för denna oscialltion ges av $\omega = \sqrt{\frac{3gM}{(M+m)r_0}}$.