Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Måndagen den 27 maj 2013 klockan 14.00-18.00 i M.

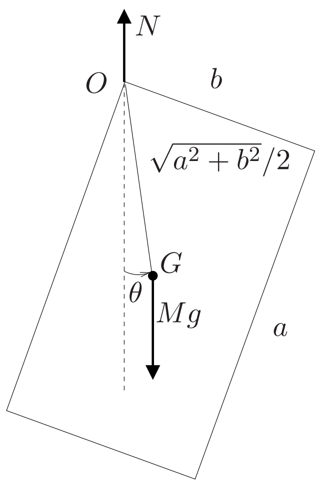
Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

---

1. **Lösningsstrategi:**

   - Använd vridmomentsekvationen. Var noga med positiv rotationsriktning.
   - Vi behöver kroppens tröghetsmoment map axel genom O.



Vi använder Steiners sats för att teckna tröghetsmomentet (vid plan rörelse) map en axel genom hörnet O

$$I_O = \bar{I} + M\frac{a^2+b^2}{4} = M\frac{a^2+b^2}{3},$$

där vi har använt tabellerat värde $M(a^2+b^2)/12$ på tröghetsmomentet för en rektangel map en axel genom masscentrum.

Vi definierar positiv rotationsriktning moturs. Vridmomentsekvationen map O blir då

$$-Mg\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\sin\theta = M\frac{a^2+b^2}{3}\ddot{\theta}.$$

Vi betraktar små vinklar och lineariserar ovanstående rörelseekvation $\sin\theta \approx \theta$. Vi finner att

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\sqrt{a^2+b^2}}\theta = 0.$$

Den sökta vinkelfrekvensen är alltså $\omega_n = \sqrt{\frac{3g}{2\sqrt{a^2+b^2}}}$, vilket har rätt dimension $[\omega_n] = \text{tid}^{-1}$ samt även reducerar till det kända resultatet $\sqrt{3g/2l}$ för en svängande stav då a eller b går mot noll.

2. Följande vektorer och samband visas enkelt med en tydlig figur:

$\vec{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$	Lägesvektor från P till ett allmänt infinitesimalt masselement.
$\vec{\rho} = \bar{x}\hat{\mathbf{i}} + \bar{y}\hat{\mathbf{j}} + \bar{z}\hat{\mathbf{k}}$	Lägesvektor från masscentrum till samma masselement.
$\vec{r}_P = x_p\hat{\mathbf{i}} + y_p\hat{\mathbf{j}} + z_p\hat{\mathbf{k}}$	Lägesvektor från masscentrum till P.

Detta betyder att $x = \bar{x} - x_P$, osv.

Matriselementen för tröghetsmatrisen med avseende på $\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{k}}$ och origo i P blir exempelvis

$$\begin{aligned} I_{xx}^P &= \int (y^2+z^2)dm = \int (\bar{y}-y_P)^2 + (\bar{z}-z_P)^2 dm \\ &= \int (\bar{y}^2+\bar{z}^2)dm + \int (y_P^2+z_P^2)dm = \bar{I}_{xx} + M(y_P^2+z_P^2), \end{aligned}$$

där vi har utnyttjat att (x_P, y_P, z_P) är konstanter, samt definitionen av masscentrum som säger att $\int \bar{y}dm = \int \bar{z}dm = 0$.

Deviationsmomenten fås på liknande sätt

$$\begin{aligned} I_{xz}^P &= \int xzdm = \int (\bar{x}-x_P)(\bar{z}-z_P)dm = \int \bar{x}\bar{z}dm + \int x_P z_P dm \\ &= \bar{I}_{xz} + Mx_P z_P. \end{aligned}$$

3. **Lösningsstrategi:**

- Kraftekvationen i normalriktningen kommer att ge oss ett uttryck för normalkraften från sfären på bollen. Detta kommer att innehålla kinematiska uttryck för bollens acceleration.
- Rullningsvillkoret ger oss ett samband mellan bollens tangentiella hastighet och dess rotation.

- Energiprincipen ger oss ett annat uttryck för bollens hastighet. Notera att bollen utför både translations- och rotationsrörelse.

Vi definierar vinkeln θ för bollens läge relativt vertikalaxeln mätt från sfärens mittpunkt. Bollens masscentrum utför en cirkelrörelse med radie $R + r \approx R$. Ett friläggningsdiagram ritas och gör, tillsammans med uttrycket för normalkomponenten av bollens acceleration, att vi kan teckna NII i normalriktningen

$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2(\theta)}{R},$$

där N är normalkraften från sfären. Villkoret att $N = 0$ ger alltså

$$\frac{v^2(\theta)}{R} = g\cos\theta$$

Nu utnyttjar vi arbete-energi-principen för att finna ytterligare ett uttryck för hastigheten. Notera att normalkraften inte utför något arbete då den verkar på den momentant stillastående kontaktpunkten.

$$mgR(1 - \cos\theta) = \frac{mv^2}{2} + \frac{\beta m r^2\omega^2}{2}.$$

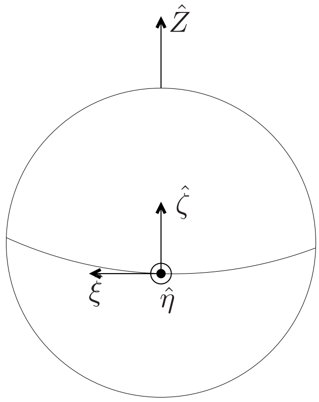
Rullningsvillkoret ger dessutom att $v = r\omega$ så att

$$\frac{1}{2}(1+\beta)mv^2 = mgR(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad v^2(\theta) = \frac{2gR(1-\cos\theta)}{1+\beta}.$$

Insättning i kraftekvationen ger att bollen lämnar sfären då

$$\cos\theta = \frac{2}{3+\beta}.$$

4. Vi inför ett koordinatsystem $\xi\eta\zeta$, med riktningar enligt figur, som är fixerat på jordytan och alltså roterar med vinkelhastigheten $\vec{\Omega} = \Omega\hat{Z} = \Omega\hat{\zeta}$.



Projektilens hastighet relativt detta roterande koordinatsystem för de tre specificerade lägena:

(i) En hastighetskomponent i jordplanet, NV riktning, samt en vertikal komponent: $\vec{v}_{\mathrm{rel}} = v_0 \left[\sin\theta(\hat{\xi}/\sqrt{2} + \hat{\zeta}/\sqrt{2}) + \cos\theta\hat{\eta}\right]$.

(ii) Den vertikala hastighetskomponenten är noll, medan den i jordplanet är konserverad då vi inte har några krafter i detta plan: $\vec{v}_{\mathrm{rel}} = v_0 \left[\sin\theta(\hat{\xi}/\sqrt{2} + \hat{\zeta}/\sqrt{2})\right]$.

(iii) Samma som (i), men med negativ vertikal komponent: $\vec{v}_{\mathrm{rel}} = v_0 \left[\sin\theta(\hat{\xi}/\sqrt{2} + \hat{\zeta}/\sqrt{2}) - \cos\theta\hat{\eta}\right]$.

Vi betraktar fallet då $\theta = 30^\circ$, vilket betyder att $\sin\theta = 1/2$ och $\cos\theta = \sqrt{3}/2$. I ovanstående uttryck har vi försummat den lilla förändring som kommer av den nollskilda Coriolisaccelerationen. Denna accelerationsterm ges av $2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\mathrm{rel}}$. Den sökta, fiktiva *Corioliskraften* är $-2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\mathrm{rel}}$. Vi noterar att $\vec{\Omega}$ är riktad i ζ-led och får följande uttryck efter att ha utfört kryssprodukterna

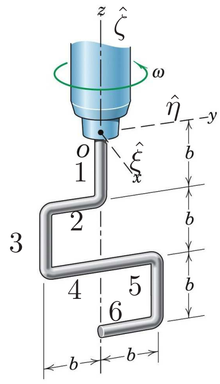
(i) $\vec{F}_{\mathrm{cor}} = m\Omega v_0 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\eta} + \sqrt{3}\hat{\xi}\right]$,

(ii) $\vec{F}_{\mathrm{cor}} = -m\Omega v_0 \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\eta}$

(iii) $\vec{F}_{\mathrm{cor}} = m\Omega v_0 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\eta} - \sqrt{3}\hat{\xi}\right]$.

Extrauppgift

520. Chokladblandaren utför en rörelse i parallella plan med konstant vinkelhastighet $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$. Vi använder ett kroppsfixt koordinatsystem $\xi\eta\zeta$ som i det aktuella ögonblicket sammanfaller med xyz.



Rörelsemängdsmomentet är konstant i det kroppsfixa koordinatsystemet: $\vec{L}_O = -I_{\xi\zeta}\omega_\zeta\hat{\xi} - I_{\eta\zeta}\omega_\zeta\hat{\eta} + I_{\zeta\zeta}\omega_\zeta\hat{\zeta}$. Vridmomentsekvationerna map O ($\vec{M}_O = \dot{\vec{L}}_O = \left(\dot{\vec{L}}_O\right)_{\xi\eta\zeta} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O$) blir

$$\sum M_\xi = I_{\eta\zeta}\omega_\zeta^2,$$
$$\sum M_\eta = -I_{\xi\zeta}\omega_\zeta^2,$$
$$\sum M_\zeta = 0,$$

där vi har utnyttjat att $\dot{\vec{\omega}} = 0$, $\omega_\xi = \omega_\eta = 0$. Vi noterar att $I_{\xi\zeta} = 0$ eftersom kroppen ligger i $\eta\zeta$-planet. Därmed har vi att $M_\eta = 0$. Vi delar upp kroppen i sex delar och räknar ut deras bidrag till $I_{\eta\zeta}$

1 $I_{\eta\zeta} = 0$, ty $\eta = 0$.
2 $I_{\eta\zeta} = \int_2 \eta\zeta dm = \int_{-b}^{0} \eta(-b)\rho d\eta = \rho b^3/2$,
3 $I_{\eta\zeta} = \int_3 \eta\zeta dm = \int_{-2b}^{-b} \zeta(-b)\rho d\eta = 3\rho b^3/2$,
4 $I_{\eta\zeta} = 0$, pga symmetri
5 $I_{\eta\zeta} = \int_5 \eta\zeta dm = \int_{-3b}^{-2b} \zeta(b)\rho d\eta = -5\rho b^3/2$,
6 $I_{\eta\zeta} = \int_6 \eta\zeta dm = \int_0^b \eta(-3b)\rho d\zeta = -3\rho b^3/2$.

Det totala deviationsmomentet blir $I_{\eta\zeta} = -2\rho b^3$. Vi finner alltså att det totala vridmomentet map O blir

$$\vec{M}_O = -2\rho b^3\omega^2\hat{\xi},$$

där $\hat{\xi} = \hat{\mathbf{i}}$ i det aktuella läget.

Överbetygsuppgifter

---

5. Symmetriaxeln pekar snett uppåt (vinkeln θ mot vertikalen). Introducera axlarna $\xi\eta\zeta$ med ζ pekandes längs spinnaxeln (snett uppåt) och ξ-axeln pekandes snett neråt höger. Tröghetsmatrisen i $\xi\eta\zeta$-systemet

$$\begin{aligned} I_{\zeta\zeta} &= I_\zeta \\ I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} &= I_\perp > I_\zeta. \end{aligned}$$

Rotationer och rörelsemängdsmoment:

$$\begin{aligned}
\vec{\nu} &= \nu\hat{\zeta}, && (1)\\
\vec{\Omega} &= \Omega\hat{\mathbf{k}} = \Omega\left(\cos\theta\hat{\zeta} - \sin\theta\hat{\xi}\right), && (2)\\
\vec{\omega} &= \vec{\Omega} + \vec{\nu} = -\Omega\sin\theta\hat{\xi} + (\nu + \Omega\cos\theta)\hat{\zeta}, && (3)\\
\vec{L}_O &= -I_\perp\Omega\sin\theta\hat{\xi} + I_\zeta(\nu + \Omega\cos\theta)\hat{\zeta}, && (4)\\
\dot{\vec{L}}_O &= \vec{\Omega}\times\vec{L}_O = \hat{\eta}\left[-I_\perp\Omega^2\cos\theta\sin\theta + I_\zeta\Omega\sin\theta(\nu + \Omega\cos\theta)\right] \\
&= \hat{\eta}\Omega\sin\theta\left(I_\zeta\nu + (I_\zeta - I_\perp)\Omega\cos\theta\right) && (5)
\end{aligned}$$

Jämför detta med

$$\vec{M}_O = mgL\sin\theta\hat{\eta}$$

Rörelseekvationen ger villkoret

$$mgL = \Omega\left[I_\zeta\nu + (I_\zeta - I_\perp)\Omega\cos\theta\right].$$

Här kan vi lösa ut $\nu(\Omega)$ och finna dess minimum. Alternativt kan vi studera lösningarna för precessionshastigheten. Det sistnämnda ger

$$\Omega_\pm = \frac{I_\zeta\nu}{2(I_\perp - I_\zeta)\cos\theta}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgL(I_\perp - I_\zeta)\cos\theta}{I_\zeta^2\nu^2}}\right].$$

Vi ser att vi har reella lösningar enbart då

$$\frac{4mgL(I_\perp - I_\zeta)\cos\theta}{I_\zeta^2 \nu^2} \leq 1.$$

I vårt fall gäller att $I_\perp > I_\zeta$ och $0 < \cos\theta < 1$. Villkoret blir då

$$\nu \geq \frac{\sqrt{4mgL(I_\perp - I_\zeta)\cos\theta}}{I_\zeta}.$$

6. Vi använder Lagrangeformalismen och väljer ρ som vår generaliserade koordinat. Uttrycken för potentiell och kinetisk energi blir

$$V = mgz = mgk\rho^2$$
$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \omega^2\rho^2 + 4k^2\rho^2\dot{\rho}^2),$$

där vi har utnyttjat att $\dot{x} = \dot{\rho}$, $\dot{y} = \omega\rho$, $\dot{z} = (\partial z/\partial\rho)\dot{\rho}$.

Lagrangianen är $L = T - V$ och vi kan teckna Lagranges ekvation i ρ-led

$$(1 + 4k^2\rho^2)\ddot{\rho} + 4k^2\rho\dot{\rho}^2 + (2gk - \omega^2)\rho = 0.$$

Vad gäller jämviktslägen visar vi två möjliga resonemang:

Alternativ 1: Vi vill finna situationer då $\dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0$. Vi ser direkt att detta kan gälla för alla ρ då $\omega^2 = 2gk$. Just därför är detta jämviktsläge instabilt (förutom vid $\rho = 0$ där den kinetiska energin har sitt minimum).

Det andra jämviktsläget har vi då $\rho = 0$. Vi ansätter lösningar $\rho(t) = 0 + \varepsilon(t)$ och studerar rörelseekvationen för små ε (Taylorutveckling). Detta ger den välkända differentialekvationen

$$\ddot{\varepsilon} + (2gk - \omega^2)\varepsilon = 0,$$

vilket ger en (stabil) harmonisk svängningsrörelse om $\omega^2 < 2gk$ och en (instabil) växande exponentialfunktion om $\omega^2 > 2gk$.

Alternativ 2: Skriv Lagrangianen på formen $L(\rho, \dot{\rho}) = a(\rho)\dot{\rho}^2 - V(\rho)$, där $V(\rho) = \frac{m}{2}(2gk - \omega^2)\rho^2$ är en effektiv potential. Jämviktslägena finner vi då $\partial V/\partial\rho = 0$, och stabiliteten kan utrönas ur tecknet på $\partial^2 V/\partial\rho^2$. Jämviktsläget $\omega^2 = 2gk$ motsvarar en sadelpunkt. Där gäller att $V(\rho) = 0\,\forall\rho$. Ett minimum i total energi fås då kinetiska energin är minimal, dvs i punkten $\rho = 0$.