Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Lördagen den 1 september 2012 klockan 08.30-12.30 i M.

Lösningsskiss: Christian Forssén

Denna lösningsskiss innehåller inga kompletta lösningar utan enbart svar, ledtrådar, och möjliga lösningsstrategier.

Obligatorisk del

---

1. (a) $I_O = 2\pi R^2 \frac{\rho_0}{1+a/R}\left[\frac{1}{4}\frac{a}{R}+\frac{1}{5}\right]R^2$.
   Notera att gränsvärdet då $R \ll a$ går mot det kända tröghetsmomentet för en homogen skiva: $I_O = (2\pi R^2 \rho_0)\frac{R^2}{4}$.

   (b) Välj förslagsvis ett kartesiskt koordinatsystem i vilket koordinataxlarna passerar vinkelrätt genom kubens sidor. Använd symmetriargument för att visa att tröghetsmatrisen blir diagonal med identiska huvudtröghetsmoment. Med hjälp av Steiners sats räknar man ut att

$$\mathbf{I}_O = Ma^2\frac{5}{18}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. Den sökta relativa hastigheten och accelerationen blir

$$\vec{v}_{\text{rel}} = v_A\hat{\xi} - v_B\left(1-\frac{L}{R}\right)\hat{\eta}$$
$$\vec{a}_{\text{rel}} = -\frac{v_B^2}{R}\left[\left(1-\frac{L}{R}\right)\hat{\xi} + \frac{2v_A}{v_B}\hat{\eta}\right]$$

3. (a) Rörelseekvationen blir

$$M\ddot{x} = \frac{\mu M g}{a}(a-2x).$$

   Med omdefinitionen $\xi = 2x - a$ blir detta $\ddot{\xi} + \frac{2\mu g}{a}\xi = 0$.

   Lösningen för givna begynnelsevillkor blir

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\cos(\omega t) + \frac{a}{2}, \quad \text{med } \omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{a}}.$$

(b) Med omvända rotationsriktningar kommer de två termerna i rörelse-ekvationen ovan att få motsatt tecken. Detta betyder att rörelsen inte längre kommer att vara oscillerande

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\cosh(\omega t) + \frac{a}{2}.$$

4. **Lösningsstrategi**

   (a) Teckna rörelseekvationen i normalled.

   (b) Bollens fart och rotationshastighet är relaterade eftersom bollen rullar mot ytan. Använd därför energikonservering för att finna ett uttryck för bollens fart.

   (c) Sök läget då normalkraften blir noll.

   Svar: $\cos\theta = \frac{2}{3+\beta}$.

Överbetygsuppgifter

---

5. **Lösningsstrategi**

   (a) Teckna skivans rotationsvektor samt tröghetsmatris i ett kropps-fixt koordinatsystem

   (b) Teckna ett samband mellan dessa kroppsfixa axlar och det rums-fixa koordinatsystemet xyz.

   (c) Den sökta vinkeln fås genom skalärprodukten $\cos\beta = \frac{\vec{L}_O}{L_O}\cdot\hat{z}$.

   (a) Rörelsemängdsmomenten uttryckt i det kroppsfixa koordinatsystemet

   $$\vec{L}_O = \frac{1}{4}mr^2\omega\left[(-\sin\alpha\cos\alpha)\hat{x} + (\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha)\hat{z}\right]$$

   (b) Vinkeln $\beta = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 18^o$.

6. Se tentamen 2009-05-26