Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Måndagen den 23 maj 2011 klockan 14.00-18.00 i V.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

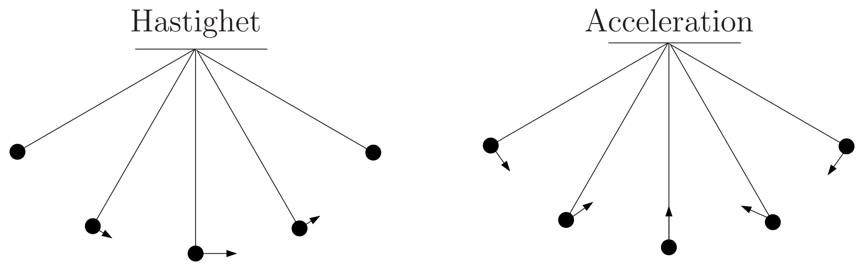
---

1. (a) (1) och (2) är identiska vid ekvatorn. Centripetalaccelerationen påverkar iof lodet, men vid ekvatorn är denna riktad vinkelrät mot jordytan. Det fallande objektet påverkas däremot av Coriolisaccelerationen.

   (b) Normalkrafterna kommer att öka på de två vänstra hjulen och minska på de två högra. Med ett roterande svänghjul betyder detta att bussen tenderar att välta åt vänster i färdriktningen.

   (c)
   $$\mathbf{I}_A = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

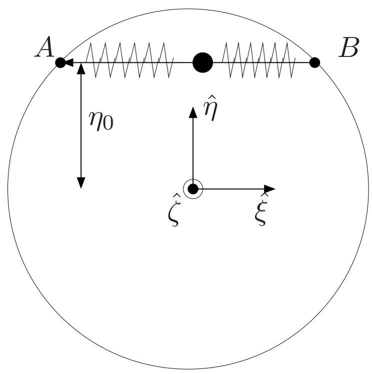
   (d)



2. **Lösning:** Vi tecknar NII, $M\vec{a} = \vec{F}$, och inför ett kroppsfixt, roterande koordinatsystem $\xi\eta\zeta$ enligt figur. Rörelseekvationen blir

$$M\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F} - M\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2M(\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}), \tag{1}$$

där $\vec{a}_{\text{rel}}$ beskriver den sökta rörelsen i det roterande koordinatsystemet.



En friläggning av massan vid en positiv förflyttning ξ från jämviktsläget ger summan av externa krafter $\vec{F} = -2k\xi\hat{\xi} + N_\zeta\hat{\zeta} + N_\eta\hat{\eta} - Mg\hat{\zeta}$, där de två komponenterna av normalkrafter ser till att begränsa massans rörelse till ξ-led. Vi är följdaktligen enbart intresserade av ξ-komponenten av rörelseekvationen.

Med $\vec{\omega} = \Omega\hat{\zeta}$, $\vec{r} = \xi\hat{\xi} + \eta_0\hat{\eta}$, $\vec{v}_{\rm rel} = \dot{\xi}\hat{\xi}$ inses att Coriolistermen är riktad i η-led och Centripetaltermen har en term i ξ-led

$$-M\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = M\Omega^2[\xi\hat{\xi} + \eta_0\hat{\eta}].$$

Vi får

$$M\ddot{\xi} = -2k\xi + M\Omega^2\xi. \tag{2}$$

Om villkoret $\Omega^2 < 2k/M$ är uppfyllt känner vi igen detta som ekvationen för en fri, harmonisk svängningsrörelse

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{2k}{M} - \Omega^2\right)\xi = 0. \tag{3}$$

Villkoret är rimligt ty vi kan förvänta oss att för stora värden på Ω kommer massan att trycks ut mot punkten B.

Vi inför beteckningen $\omega_0 \equiv \sqrt{2k/M}$ för systemets naturliga vinkelfrekvens då skivan står still. Periodtiden är omvänt proportionell mot vinkelfrekvensen och vi finner att

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega^2/\omega_0^2}}. \tag{4}$$

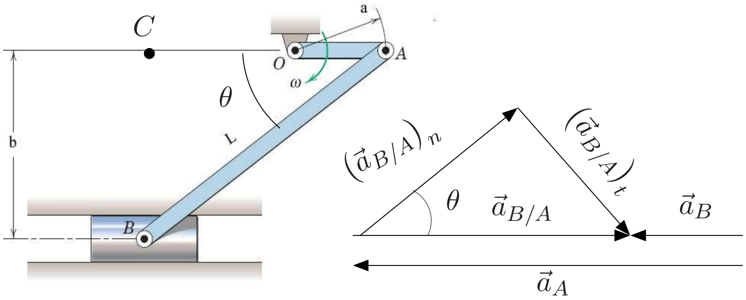
(Notera att periodtiden ökar för stora rotationshastigheter, vilket är rimligt.)

3. **Lösning:** Vi utnyttjar att vi vet hastighets och accelerationsriktningar på punkterna A och B. Punkten A rör sig momentant rakt neråt och B rör sig rakt åt vänster. Därmed kan vi identifiera punkten C (se figur) som en momentan nollhastighetspunkt för den rörelse som staven AB utför.

   Hastigheten för punkten A är $v_A = a\omega$ och med avståndet $L_{AC}^2 = L^2 - b^2$ fås därmed stavens vinkelhastighet (medurs)

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{L_{AC}} = \frac{a\omega}{\sqrt{L^2 - b^2}}. \tag{5}$$

   Vidare vet vi att accelerationerna för punkterna A och B på staven momentant är riktade horisontellt åt vänster (se figur). Dessa kan relateras till varandra via $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$, vilket därmed säger att även $\vec{a}_{B/A}$ måste vara riktad horisontellt.



   Den relativa accelerationen $\vec{a}_{B/A}$ beskriver en rotationsrörelse och vi delar upp den i normal- och tangentkomposanter enligt figur. Då gäller att

$$\left(\vec{a}_{B/A}\right)_n = L\omega_{AB}^2. \tag{6}$$

   För att $\vec{a}_{B/A}$ verkligen skall vara riktad horisontellt måste

$$\frac{\left(\vec{a}_{B/A}\right)_t}{\left(\vec{a}_{B/A}\right)_n} = \tan\theta = \frac{b}{L_{AC}} = \frac{1}{\sqrt{L^2/b^2 - 1}}. \tag{7}$$

   Med uttrycket för $\left(\vec{a}_{B/A}\right)_n$ (och ω_{AB}) från ovan fås slutligen

$$\alpha_{BA} = \frac{\left(\vec{a}_{B/A}\right)_t}{L} = \ldots = \omega^2 \frac{a^2/b^2}{(L^2/b^2 - 1)^{3/2}}, \tag{8}$$

   riktad moturs.

Överbetygsuppgifter

4. **Lösning:** Rymdstationen roterar till att börja med kring sin symmetriaxel med spinn ν så att $g = R\nu^2$, där R är radien. Vi antar att impulsöverföringen vid rymdfarkostutskjutningen sker snabbt i jämförelse med ν, så att den kan betraktas som en stöt. Vi inför ett kroppsfixt koordinatsystem xyz så att origo ligger i torusens centrum, z-axeln pekar i spinnriktningen, och stöten träffar i $(R, 0, 0)$. Impulsen $-I\hat{\mathbf{z}}$ överförs vid stöten vilket innebär ett överfört impulsmoment $RI\hat{\mathbf{y}}$. Rymdstationens tröghetsmoment med avseende på z-axeln är $I_z = mR^2$, och med avseende på däremot vinkelräta riktningar genom origo $I_\perp = I_z/2$.

   Alldeles efter stöten är stationens rörelsemängdsmoment med avseende på sitt masscentrum

$$\vec{L}_G = I_z\nu\hat{\mathbf{z}} + RI\hat{\mathbf{y}} = I_z\nu\hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{2}I_z\omega_y\hat{\mathbf{y}} \equiv L\hat{Z}. \tag{9}$$

   Efter stöten är $\vec{L}_G$ konserverad, så att $\hat{Z}$ är en fix riktning i rummet, kring vilken rymdskeppets rotationsvektor $\vec{\omega}$ och symmetriaxel $\hat{\mathbf{z}}$ precesserar. För att få precessionshastigheten uttrycker man $\vec{\omega}$ i basvektorerna $\hat{\mathbf{z}}$ och $\hat{Z}$ vilket ger

$$\begin{aligned}\vec{\omega} = \nu\hat{\mathbf{z}} + \omega_y\hat{\mathbf{y}} &= \nu\hat{\mathbf{z}} + \frac{RI}{I_z/2}\frac{L\hat{Z} - I_z\nu\hat{\mathbf{z}}}{RI} \\ &= -\nu\hat{\mathbf{z}} + 2\frac{L}{I_z}\hat{Z} \equiv -\nu\hat{\mathbf{z}} + \Omega\hat{Z}.\end{aligned} \tag{10}$$

   Numeriskt gäller

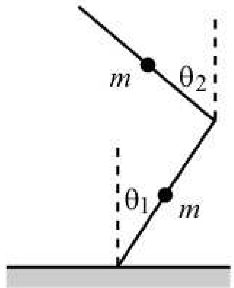
$$\nu = \sqrt{g/R} = 0.22\ \mathrm{s}^{-1}, \tag{11}$$

$$L_y/L_z = RI/(I_z\nu) = I/(mR\nu) = 3.4 \cdot 10^{-4} \equiv \alpha. \tag{12}$$

   Notera att $\alpha =$ tangens för vinkeln mellan symmetriaxeln $\hat{\mathbf{z}}$ och precessionsaxeln $\hat{Z}$. Men eftersom α är så litet är det en god approximation att försumma termer av ordning α^2. Då är α vinkeln mellan $\hat{\mathbf{z}}$ och $\hat{Z}$, och totala impulsmomentet kring masscentrum till beloppet samma som före utskjutningen, $L_G = I_z\nu$. Precessionshastigheten är $\Omega = 2\nu = 0.44\ \mathrm{s}^{-1}$.

Rymdskeppets rotationsrörelse kan alltså beskrivas så att symmetriaxeln och den momentana rotationsaxeln ligger på motsatta sidor om den rumsfixa riktningen $\hat{Z}$, bildar bägge samma vinkel α med den, och precesserar med vinkelhastigheten $\vec{\Omega} = 2\nu\hat{Z}$ kring den. Dessutom har spinnvektorn ändrat tecken jämfört med före utskjutningen.

5. **Lösning:** Systemet har två frihetsgrader. Välj vinklarna $\theta_1(t)$ och $\theta_2(t)$ som generaliserade koordinater. När vi tecknar uttrycken för potentiell och kinetisk energi utnyttjar vi att vinklarna är små: $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2, \quad \sin\theta \approx \theta$.



De kartesiska lägeskoordinaterna för den undre massan blir: $(r\sin\theta_1, r\cos\theta_1)$; och för den övre: $(2r\sin\theta_1 - r\sin\theta_2, 2r\cos\theta_1 + r\cos\theta_2)$. Vi utnyttjar att vinklarna är små. Den potentiella energin för systemet blir

$$V(\theta_1, \theta_2) \approx mgr\left(4 - 3\theta_1^2/2 - \theta_2^2/2\right). \tag{13}$$

Efter lite räkningar fås den kinetiska energin för de två massorna

$$T_1 \approx mr^2\frac{\dot{\theta}_1^2}{2}, \tag{14}$$

$$T_2 \approx \frac{mr^2}{2}\left(2\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)^2. \tag{15}$$

Lagrangianen blir slutligen

$$L \approx \frac{mr^2}{2}\left(5\dot{\theta}_1^2 - 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) - mgr\left(4 - \frac{3}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{2}\theta_2^2\right). \tag{16}$$

Rörelseekvationerna i θ_1- och θ_2-led blir

$$5\ddot{\theta}_1 - 2\ddot{\theta}_2 = \frac{3g}{r}\theta_1 \tag{17}$$

$$-2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = \frac{g}{r}\theta_2. \tag{18}$$

Vi är intresserade av vinkelaccelerationerna då $t = 0$. Med begynnelsevillkoren $\theta_1(0) = 0, \quad \theta_2(0) = \varepsilon$ fås slutligen

$$\ddot{\theta}_1(0) = \frac{2g\varepsilon}{r}, \quad \ddot{\theta}_2(0) = \frac{5g\varepsilon}{r}. \tag{19}$$

Extrauppgift (del A)

6. **Lösningsskiss:**

    - Inför ett koordinatsystem som följer med i den accelererande rörelsen.
    - Teckna rörelsemängdsmomentet för rotation kring gångjärnen.
    - Teckna på samma sätt vridmomentet och skriv ner rörelseekvationen för rotationsrörelsen.
    - Integrera rörelseekvationen (ett bra trick kan vara att multiplicera med $\dot{\theta}$ först) och utnyttja begynnelsevillkoret $\dot{\theta}(0) = 0$.

    För $\theta = 90^o$ fås $\dot{\theta} = \sqrt{3A/w}$.