Lösningsskiss för tentamen – Mekanik F del 2 (FFM521/520)

Tid och plats: Tisdagen den 3 juni 2014 klockan 08.30-12.30 i M-huset.

Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

---

1. Ren summering över de fyra punktmassorna ger

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) = ml^2(1+0+1+0+1+0+1+0) = 4ml^2 \\
I_{yy} &= \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) = ml^2(4+1+1+0+1+0+4+1) = 12ml^2 \\
I_{zz} &= \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \ldots = 12ml^2 \\
I_{xy} &= -\sum_i m_i x_i y_i = -ml^2(-1-1) = 2ml^2 \\
I_{xz} &= -\sum_i m_i x_i z_i = -ml^2(-2-2) = 4ml^2 \\
I_{yz} &= -\sum_i m_i y_i z_i = 0
\end{aligned}
$$

så att den sökta tröghetsmatrisen i det givna koordinatsystemet blir

$$
\mathbf{I}_O = ml^2 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}
$$

Med en rotationsvektor $\vec{\omega} = \omega\hat{\mathbf{x}}$ får vi rörelsemängdsmomentet

$$
\vec{L}_O = \mathbf{I}_O\vec{\omega} = \omega ml^2(4\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 4\hat{\mathbf{z}}).
$$

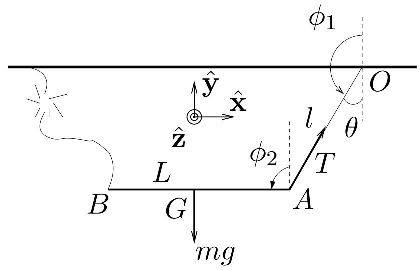
2. (a) Se kursboken, avsnitt 6/6. Storheter: m är den stela kroppens totala massa, ω är rotationshastigheten medan $\bar{v}$ är masscentrums fart och $\bar{I}$ är tröghetsmomentet med avseende på en axel genom masscentrum (vinkelrät mot planet).

(b) I härledningen för rörelse i planet kan vi anta att orts- och hastighetsvektorer ligger i planet medan rotationsvektorn är vinkelrät mot detsamma. Alla termer av typen $\vec{\rho}_i \times (\vec{\rho}_i \times \vec{\omega})$ har därmed samma riktning och denna riktning kan därmed lyftas ut ur summationen. Detta faktum gäller inte för allmän rörelse i rummet.

3. Med koordinatsystem enligt nedan, beteckna vajerns och stångens accelerationer med $\ddot{\vec{\phi}}_1 = \ddot{\phi}_1 \hat{\mathbf{z}}$ respektive $\ddot{\vec{\phi}}_2 = \ddot{\phi}_2 \hat{\mathbf{z}}$. I det givna läget är $\pi - \phi_1(0) = \theta = 30^\circ$, $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$. Detta ger lägesvektorerna $\vec{r}_{OA} = l(-\hat{\mathbf{x}}/2 - \sqrt{3}\hat{\mathbf{y}}/2)$ samt $\vec{r}_{AG} = -L\hat{\mathbf{x}}/2$. Dessutom är givetvis $\vec{a}_O = 0$. Kinematiken ger därmed att

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \ddot{\phi}_1 \hat{\mathbf{z}} \times \vec{r}_{OA} + \dot{\vec{\phi}}_1 \times (\dot{\vec{\phi}}_1 \times \vec{r}_{OA}) = l\ddot{\phi}_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{y}} \right) \tag{1}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \ddot{\phi}_2 \hat{\mathbf{z}} \times \vec{r}_{AG} + \dot{\vec{\phi}}_2 \times (\dot{\vec{\phi}}_2 \times \vec{r}_{AG} = \ldots = l\ddot{\phi}_1 \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}(l\ddot{\phi}_1 + L\ddot{\phi}_2)\hat{\mathbf{y}}. \tag{2}$$



Med dessa uttryck kan vi nu teckna krafteekvationerna för stången

$$\hat{\mathbf{x}}: \quad ml\ddot{\phi}_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}T \tag{3}$$

$$\hat{\mathbf{y}}: \quad -m\frac{1}{2}(l\ddot{\phi}_1 + L\ddot{\phi}_2) = -mg + \frac{\sqrt{3}}{2}T \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Medan momentekvationen runt stångens masscentrum (positiv riktning moturs) blir

$$\bar{I}\ddot{\phi}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}T\frac{L}{2}, \tag{6}$$

med $\bar{I} = mL^2/12$. Från dessa tre rörelseekvationer kan vi lösa ut de okända

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_1 &= \frac{2}{13}\frac{g}{l}\\ \ddot{\phi}_2 &= \frac{18}{13}\frac{g}{L}\\ T &= \frac{2\sqrt{3}}{13}mg,\end{aligned}$$

vilket ger rätt dimensioner och rimliga svar.

För att jämföra med snörkraften vid jämvikt tecknar vi NII i y-led med bägge snörena. Vi finner att

$$\hat{\mathbf{y}}: \quad 2T_{\text{jvkt}}\frac{\sqrt{3}}{2} - mg = 0,$$

vilket ger att

$$\frac{T}{T_{\text{jvkt}}} = \frac{6}{13},$$

och det är givetvis rimligt att T är mindre än T_{jvkt} eftersom vi ser en acceleration av masscentrum neråt när snöret brister.

4. Inför ett bilfixt koordinatsystem med ξ-axeln i bilens accelerationsriktning och η-axel uppåt. Pendelns upphängningspunkt kallas B, dess längd l, och dess utslagsvinkel medurs från lodlinjen för θ.

   Ortsvektorn för pendelns masscentrum i ett inertialsystem blir

$$\vec{r}_G = \vec{r}_B + \vec{r}_{G/B}$$

   Spänningen i snöret betecknas $\vec{F}$. Pendeln betraktas som en stel kropp. Ekvationerna för dess rotation kring masscentrum, och för dess masscentrums rörelse är

$$\begin{aligned}\bar{I}\ddot{\theta}\hat{\zeta} &= -\vec{r}_{G/B} \times \vec{F},\\ m\vec{a}_G &= m(a\hat{\xi} + \ddot{\vec{r}}_{G/B}) = \vec{F} - mg\hat{\eta}.\end{aligned}$$

   Relativa ortsvektorn $\vec{r}_{G/B}$ har längd l och bestäms helt av vinkeln θ. Med polära koordinater ges ortsvektorn och accelerationen av

$$\vec{r}_{G/B} = l\hat{\mathbf{e}}_r, \quad \ddot{\vec{r}}_{G/B} = -l\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_r + l\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

   Rörelseekvationerna är tre komponentekvationer för tre obekanta, (snörkraftens två komponenter och vinkeln), så de skall räcka för att lösa uppgiften.

Kraften $\vec{F}$ kan elimineras genom att vektormultiplicera första ekvationen med $\vec{r}_{G/B}$ och sedan addera ekvationerna. Eftersom kulans tröghetsmoment är försumbart får vi

$$\vec{r}_{G/B} \times \ddot{\vec{r}}_{G/B} = \vec{r}_{G/B} \times (-a\hat{\xi} - g\hat{\eta}).$$

Detta ger den skalära ekvationen

$$l\ddot{\theta} = -a\cos\theta - g\sin\theta.$$

Denna ekvation kan alternativt och enklare härledas genom att observera att bilens acceleration ger en tröghetskraft i det bilfixa koordinatsystemet så att gravitationsaccelerationen $-g\hat{\eta}$ ersätts av $-a\hat{\xi} - g\hat{\eta}$. Eftersom $a\cos\theta + g\sin\theta = \sqrt{a^2+g^2}\sin(\theta+\theta_0)$, med $\tan\theta_0 = a/g = x$ känner vi igen rörelseekvationen. Det är en plan pendel. Jämviktsläget är $\theta = -\theta_0$, och för små utslag ger approximationen $\sin(\theta+\theta_0) \approx (\theta+\theta_0)$ harmonisk svängning med periodtiden

$$T = 2\pi\sqrt{l/\sqrt{a^2+g^2}} = 2\pi\sqrt{l/g}(1+x^2)^{-1/4}.$$

Om bilen kör med konstant hastighet gäller samma räkning fast med $a = 0$. Då blir periodtiden en faktor $(1+x^2)^{1/4}$ längre.

Extrauppgift (enbart FFM520)

- Uppgiften utgör en del av den grundläggande delen på tentamen för studenter på kursen FFM520.
- Studenter på FFM521 (dvs inskrivna fr.o.m ht 2012) skall **inte** göra denna uppgift.

5. Från kinematiken fås hastigheten för den rullande cylinderns masscentrum $\bar{v} = (R+r)\omega$. Eftersom cylindern inte glider fås sambandet $\dot{\phi}r = \omega(R+r)$, där $\dot{\phi}$ är dess rotationshastighet. Den kinetiska energin blir därför

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}m(r+R)^2\omega^2,$$

där vi också har använt att $\bar{I} = mr^2/2$.

Vad gäller rörelsemängdsmomentet kan vi använda sambandet

$$\begin{aligned}\vec{L}_O = \vec{L}_G + m\vec{r}_{O/G} \times \vec{\bar{v}} &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}\hat{\mathbf{z}} + m(R+r)\hat{\mathbf{e}}_r \times \bar{v}\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \frac{1}{2}mr^2\frac{R+r}{r}\omega\hat{\mathbf{z}} + m(R+r)(R+r)\omega\hat{\mathbf{z}} \\ &= m(r+R)\left(\frac{3}{2}r + R\right)\omega\hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

Överbetygsuppgifter

---

6. **Kortfattad lösningsskiss**

- I ett kroppsfixt koordinatsystem ($\xi\eta\zeta$, med ζ i huvudsymmetriaxlens riktning) blir tröghetsmatrisen diagonal, Med totala massan $M = 4m$ fås

$$I_0 \equiv I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = \frac{m}{3}\left(2b^2 + L^2\right); \qquad I_\zeta \equiv I_{\zeta\zeta} = \frac{4}{3}mb^2.$$

- Fri precession ger

$$\Omega = \frac{I_\zeta p}{(I_0 - I_\zeta)\cos\theta},$$

  där p är spinnet, Ω presecessionshastigheten och θ är den fixa vinkeln mellan dessa vektorer.
- Retrograd precession fås därför då $I_\zeta > I_0$.

Svar: $(L/b) < \sqrt{2}$.

7. **Kortfattad lösningsskiss**

- Välj kilens horisontella läge relativt en punkt i planet som en generaliserad koordinat (y), samt massans läge (x) relativt kilens sluttande plan som den andra. Notera att den sistnämnda inte är given i ett inertialsystem och att det blir viktigt att tänka på när vi tecknar den kinetiska energin.

- Potentiella energin blir $V = -mgx\sin\alpha$.
- Den kinetiska energin är

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 - 2\dot{y}\dot{x}\cos\alpha + \dot{x}^2\cos^2\alpha + \dot{x}^2\sin^2\alpha) + \frac{1}{2}M\dot{y}^2.$$

- Den eftersökta accelerationen fås från Lagranges ekvationer

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

  vilket ger

$$\begin{aligned} y: \quad \ddot{y} &= \frac{m}{M+m}\cos\alpha\ddot{x} \\ x: \quad \ddot{x} &= \frac{(M+m)}{M+m\sin^2\alpha}\sin\alpha g \end{aligned}$$

- Vi noterar att Lagrangianen är oberoende av y-koordinaten. Detta betyder att systemet uppvisar en translationssymmetri i det horisontella planet, dvs rörelsen beror inte på var systemet befinner sig i y-led. Konsekvensen blir att $\partial L/\partial y = 0$ och därmed att $\partial L/\partial \dot{y}$ är en röreslekonstant. Det sistnämnda är en generaliserad rörelsemängd och motsvarar i detta fall systemets totala rörelsemängd i horisontell riktning.