Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Lördagen den 7 januari 2012 klockan 08.30-12.30 i V.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

---

1. (a) $\zeta = \frac{\ln 2}{\sqrt{(\ln 2)^2 + 4\pi^2}} = 0.11$
   $\tau_1 = 1.006$ s

   (b) $\theta = 0.13^o$ åt vänster i färdriktningen.

   (c) $I = \frac{mL^2}{2}$ (enklast är att summera över smala ytelement med baslängd xa/L där $x \in [0, L]$.)

2. (enbart svar och ledtråd)

   (a) $M_P = 0$ samt $L_P = I\omega + mRv$ (notera att vi ej har rotation kring en fix axel)
   Rörelseekvationen ger sambandet $a = -\beta R\alpha$.

   (b) $v_f = \frac{v_0}{1+\beta}$ (finner man genom att integrera (a) från $t = 0$ till $t = T$ då bollen slutat glida).

3. (enbart svar och ledtråd)

   - Teckna accelerationen för mittpunkten O. Använd förslagsvis n, t-koordinater:
   $$(\vec{a}_O)_t = r\alpha; \qquad (\vec{a}_O)_n = \frac{r^2\omega^2}{R - r}$$
   - Använd sedan uttrycken för relativ rörelse: $\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{a}_{C/O}$ samt motsvarande för $\vec{a}_A$.
   - Den relativa rörelsen är en ren rotation.
   - Alla normal- och tangentialriktningar kan sedan relateras momentant till det givna koordinatsystemet x, y.

$$\vec{a}_C = \frac{r\omega^2}{1 - r/R}\hat{y},$$
$$\vec{a}_A = 2r\alpha\hat{x} + r\omega^2 \frac{2r/R - 1}{1 - r/R}\hat{y}.$$

Överbetygsuppgifter

---

4. (kortfattat)

   - I ett kroppsfixt koordinatsystem ($\xi\eta\zeta$, med ζ i huvudsymmetriaxlens riktning) blir tröghetsmatrisen diagonal, Med totala massan $M = 4m$ fås
   $$I_0 \equiv I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = \frac{m}{3}\left(2b^2 + L^2\right); \qquad I_\zeta \equiv I_{\zeta\zeta} = \frac{4}{3}mb^2.$$
   - Fri precession ger
   $$\Omega = \frac{I_\zeta p}{(I_0 - I_\zeta)\cos\theta},$$
   där p är spinnet, Ω presecessionshastigheten och θ är den fixa vinkeln mellan dessa vektorer.
   - Retrograd precession fås därför då $I_\zeta > I_0$.

   Svar: $(L/b) < \sqrt{2}$.

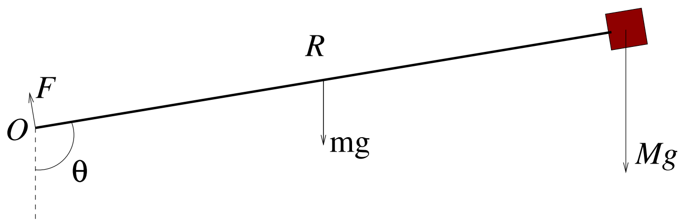
5. (kortfattat)

   $V = MgR(\cos\varphi + \cos\psi)$
   $T = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}(\dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2)+\frac{1}{2}MR^2\left[\frac{3}{4}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}\dot{psi}\cos 9\varphi + \psi)\right]-MgR(\cos\varphi + \cos\psi - 2)$, där den sista termen kommer från masscentrums translationsrörelse för den nedre pendeln.

   Lagrangianen $L = T - V$ samt Lagranges ekvationer förenklade till små vinklar ger
   $$\frac{3}{2}\ddot{\varphi} + \ddot{\psi} + \frac{g}{a}\varphi = 0,$$
   $$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\ddot{\psi} + \frac{g}{a}\psi = 0.$$
   Vilket ger två lösningar $\omega_1/\omega_2 = \sqrt{5}$.

Extrauppgift (del A)

6. Man får tänka sig att gungan först ges fart under en startfas. Därefter svänger den fritt kring sin upphängningspunkt O, och det är denna svängningsrörelse vi skall studera.



I O kan den då påverkas av lagerkraft F, men inte av något kraftmoment. Därför ställer vi upp rörelsemängdsmomentekvationen för gungan med avseende på upphängningspunkten O. Tröghetsmomentet x vinkelaccelerationen = summan av kraftmomenten:

$$(mR^2/3 + MR^2)\ddot{\theta} = -(mgR/2 + MgR)\sin\theta.$$

För att uttrycka passagerarnas (dvs M's) acceleration behöver vi också vinkelhastigheten. Den kan vi få tex genom att multiplicera ekvationen ovan med $\dot{\theta}$ och integrera med avseende på tiden från tidpunkten för maximalt utslag:

$$\ddot{\theta} = -\frac{m/2 + M}{m/3 + M}\frac{g}{R}\sin\theta, \qquad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{m/2 + M}{m/3 + M}\frac{g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Passagerarnas accelerationen i negativ z-led kan beräknas tex genom att teckna ett uttryck för M's z-koordinat och derivera det två gånger.

$$\begin{aligned}
-z &= R\cos\theta \\
-\dot{z} &= -R\sin\theta\,\dot{\theta} \\
-\ddot{z} &= -R(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2) = -\frac{m/2 + M}{m/3 + M}g(-\sin^2\theta + 2(\cos\theta - \cos\theta_0)\cos\theta).
\end{aligned}$$

Detta är det efterfrågade uttrycket. Att accelerationen nedåt stundtals är större än g kan man tex se genom att räkna ut den för utslagsvinkeln $90°$. Då är den

$$-\ddot{z}(\pi/2) = \frac{m/2 + M}{m/3 + M}g > g.$$