

Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Tisdagen den 25 maj 2010 klockan 08.30-12.30 i V.

Lösningsskiss: Per Salomonsson och Christian Forssén.

Obligatorisk del

1. Rätt svar på de fyra deluppgifterna
 - (i) (a) (b) (c)
 - (ii) Rotationsenergierna är $26 \cdot 10^{28} \text{ J}$ och $27 \cdot 10^{32} \text{ J}$, respektive.
 - (iii) (a)
 - (iv) (c) (d)
2. Rullen friläggs, och krafter utritas, se figur 1. Rörelseekvationen i horisontalled (x åt höger), och rörelseekvationen för rotation medurs (vinkeln θ relativt vertikalaxeln) med avseende på masscentrum, är respektive

$$m\ddot{x} = F \cos \alpha - F_f,$$
$$\bar{I}\ddot{\theta} = RF_f - rF.$$

Eftersom rullen rullar utan att glida är $\dot{x} = R\dot{\theta}$ och $\ddot{x} = R\ddot{\theta}$. Dessa ekvationer ger, genom eliminering av vinkelaccelerationen och den okända friktionskraften,

$$(m + \bar{I}/R^2)\ddot{x} = F(\cos \alpha - r/R).$$

Svar: Rullen rullar åt höger om $\cos \alpha > r/R$, åt vänster om $\cos \alpha < r/R$ och inte alls om $\cos \alpha = r/R$.

Anm. Alternativt kan man använda rörelsemomentekvationen med avseende på kontaktpunkten i stället för de bägge rörelseekvationerna ovan. Det ger en något enklare lösning. Kraften F är då den enda som ger kraftmoment, och tecknet på dess momentarm avgör rullningsriktningen.

3. Kolven kan friläggas, se figur 1. Rörelseekvationen för kolvens vertikala rörelse är

$$m\ddot{z} = -c\dot{z} - k(z - z_0) - mg - A_0 p_0 \sin \omega t,$$

där A_0 är kolvens topparea. Man känner igen den som den lineära svängningsekvationen med dämpning och en yttre harmonisk kraft och en konstant kraft.

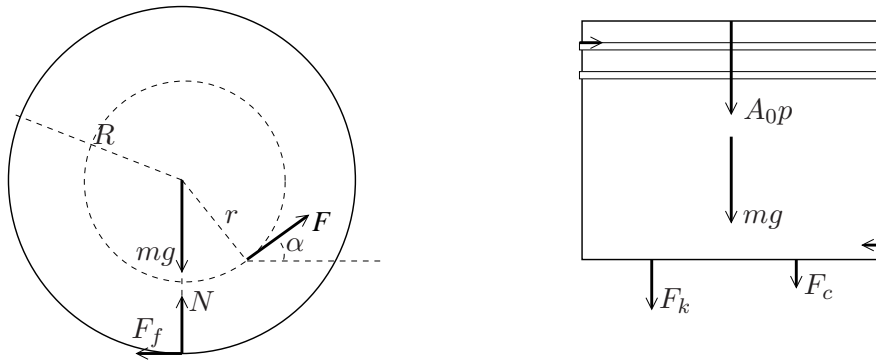


Figure 1: Friläggning av trådrulle (vänster). Friläggning av kolv med tryckkraft och dämpning (höger).

Lösning av rörelseekvationen: Lösningen till ovan differentialekvation kan tas från formelsamling. Men vi väljer här att illustrera en möjlig Lösingsstrategi med användning av komplexa tal:

Observera att $\sin \omega t = \text{Re}(ie^{-i\omega t})$. För att hitta en partikulärlösning görs ansatsen $z(t) = \text{Re}(B + Ae^{-i\omega t})$. När detta sätts in i rörelseekvationen blir den realdelen av följande ekvation

$$(-m\omega^2 - i c \omega + k) A e^{-i\omega t} + k(B - z_0) + mg = -i A_0 p_0 e^{-i\omega t}.$$

Denna ekvation löses genom att välja B så att de tidsberoende termerna kancellerar, och A så att exponentialfunktionstermerna kancellerar. (Observera att eftersom rörelseekvationen skall uppfyllas för alla tider, så blir A fullständigt bestämd trots att det egentligen bara realdelen av ekvationen som skall satisfieras.)

Kritisk frekvens Allmänna lösningen till rörelseekvationen kan uttryckas som summan av partikulärlösningen (från ovan eller från formelsamling) och en allmän lösning till motsvarande homogena differentialekvation. Vi noterar att de specifika parametrarna antar numeriska värden enligt följande

$$\begin{aligned}\omega_n &= \sqrt{k/m} \approx 27.9 \text{ s}^{-1} \\ \zeta &= c/(2m\omega_n) \approx 0.50\end{aligned}$$

Detta är alltså ett exempel på en svagt dämpad svängningsrörelse. På grund av dämpningen kommer lösningarna till homogena ekvationen att avta exponentiellt med tiden. De beskriver rörelsens insvängning.

Rörelsen efter insvängning beskrivs fullständigt av partikulärlösningen, det är den som innehåller den efterfrågade amplituden.

Svängningsamplituden ges av beloppet av A . Lättast att finna maximum är att finna frekvensen då $|A|^{-2}$ har minimum. Minimum bestäms genom att derivera.

$$\begin{aligned} |A|^{-2} &= |-m\omega^2 - i c \omega + k|^2 / (A_0 p_0)^2 = ((m\omega^2 - k)^2 + c^2 \omega^2) / (A_0 p_0)^2 \\ &= \frac{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 1\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{(A_0 p_0 / k)^2} \\ \frac{d|A|^{-2}}{d\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} &= \frac{1}{(A_0 p_0 / k)^2} \left[2 \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 1\right) 2 \frac{\omega}{\omega_n} + 4\zeta^2 2 \frac{\omega}{\omega_n} \right]. \end{aligned}$$

$|A|^{-2}$ har sitt minimum när derivatan är noll (såvida inte dämpningen är överkritisk). Vi finner

$$0 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 1 + 2\zeta^2.$$

Med lösningen

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \approx 0.71\omega_n.$$

Med de givna parametervärdena får vi den sökta vinkelfrekvensen $\omega_c = 19.8 \text{ rad/s}$.

4. Vi har alltså ett cartesiskt koordinatsystem (x, y, z) som roterar kring en vertikal axel genom sitt origo med konstant vinkelhastighet $\vec{\Omega} = \Omega \hat{y}$. Enligt schemat för att uttrycka hastighet och acceleration i rörliga koordinater som summa av relativ och medföringstermer har vi $\vec{r} = \vec{r}_{\text{rel}} + 2\vec{\Omega} \times \vec{r}_{\text{rel}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$. Termerna är relativacceleration, coriolisacceleration och centripetalacceleration. Rörelsen är begränsad till att ske i vertikalplanet $z = 0$. Detta innebär att det förekommer en tvångskraft riktad vinkelrätt mot planet och precis så stor att partikeln inte lämnar planet. Vi kan ställa upp de vanliga rörelseekvationerna i x och y -led, för i dem bidrar inte normalkraften. De blir:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} - \Omega^2 x) &= 0, \\ m\ddot{y} &= -mg. \end{aligned}$$

Vi har en ekvation utan y i och en utan x i. Det innebär att rörelserna i x och y -led är oberoende och kan bestämmas och diskuteras var för

sig. Rörelseekvationernas allmänna lösning är

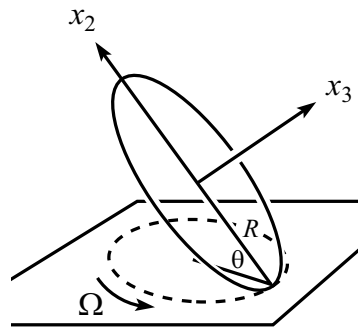
$$\begin{aligned}x(t) &= Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}, \\y(t) &= y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}$$

Vilka kvalitativt olika rörelsetyper finns? Detta är nog inte en alldeles precis fråga, man kan svara olika beroende på vilka egenskaper man anser är värda att se på, och hur detaljerat man klassificerar. I en möjlig klassificeringsmetod integrerar man först rörelseekvationerna både framåt och bakåt i tiden. Det ger en mängd möjliga banor som man klassificerar utan att bry sig om var på en bana systemet startat. För rörelsen i horisontalled har man då åtminstone följande kvalitativt olika möjligheter.

- 1) Vid tillräckligt tidig tid rör sig partikeln mot rotationsaxeln. Den saktar in, vänder, och rör sig slutligen bort från rotationsaxel. Detta inträffar om A och B har samma tecken.
- 2) Partikeln rör sig först mot rotationsaxeln. Den saktar in, men har så stor fart att den aldrig vänder, utan passerar rotationsaxeln och rör sig sedan bort från den. Detta inträffar när A och B har olika tecken.
- 3) Om $A = 0$ men $B \neq 0$ rör sig partikeln mot axeln med så stor fart att den varken vänder eller passerar axeln utan ständigt närmar sig den med ständigt minskande fart.
- 4) Om $A \neq 0$ och $B = 0$ har man det tidsomvända fallet. Partikeln befinner sig först mycket nära rotationsaxeln och har mycket liten fart, fart och avstånd ökar ständigt exponentiellt med tiden.
- 5) Slutligen, om både A och B är noll ligger partikeln i vila på rotationsaxeln.

Rörelsen i vertikalled kan bara vara av ett slag. Även om vi antar att hastigheten vid en tillräckligt tidig tid är riktad uppåt, kommer partikeln, vid någon tidpunkt, att vända och därefter är hastigheten nedåtriktad.

5. Vi inför en rumsfix axel \hat{Z} och betraktar myntet i ett koordinatsystem $x_1x_2x_3$ som roterar med vinkelhastigheten $\Omega\hat{Z}$. I detta system är kontaktpunkten (som vi kallar för A) alltid vid $\vec{r}_A = -R\hat{x}_2$.



Alt. 1: Vi kan faktiskt inse redan från början att rotationsvektorn måste ligga längs med x_2 -axeln. Vi vet ju nämligen att både myntets mittpunkt samt kontaktpunkt är momentant stilla, och dessa måste därmed definiera riktningen på rotationsvektorn. Men låt oss visa detta explicit nedan.

Alt. 2: Myntets totala rotationsvektor består av ovanstående precessionsrörelse samt ett spinn runt symmetriaxel x_3 , dvs

$$\vec{\omega} = \Omega\hat{z} + \nu\hat{x}_3. \quad (1)$$

I det roterande koordinatsystemet syns enbart spinnrörelsen. Punkten A rör sig därmed med hastigheten $\vec{v}_{A,\text{rel}} = \nu R\hat{x}_1$ relativt myntets mittpunkt. Samtidigt gäller att denna punkts absoluta hastighet är noll då vi har rullning utan glidning. Sambandet

$$0 = \vec{v}_A = \vec{v}_{A,\text{rel}} + \Omega\hat{z} \times \vec{r}_A = \nu R\hat{x}_1 + \Omega R \cos\theta \hat{x}_1, \quad (2)$$

ger att $\nu = -\Omega \cos\theta$. Dvs spinnet är riktat längs med negativa x_3 -axeln (vilket verkar rimligt om vi tänker oss hur kontaktpunkten rör sig sedd

från myntets mittpunkt). Slutligen får vi då den totala rotationsvektorn från (1) med $\hat{z} = \cos \theta \hat{x}_3 + \sin \theta \hat{x}_2$

$$\vec{\omega} = \Omega \sin \theta \hat{x}_2. \quad (3)$$

(b) För att få periodtiden behöver vi ett värde för rotationshastigheten. Detta kan vi få mha av vridmomentekvationen. Vi väljer naturligt det stillastående masscentrum som utgångspunkt.

Tröghetsmomentet kring x_2 -axeln är $I_2 = mR^2/4$ och rörelsemängdsmomentet fås ur sambandet $\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega}$, med ekv. (3), $\vec{L} = I_2\Omega \sin \theta \hat{x}_2$. Tidsderivatan blir

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = \Omega \frac{mR^2}{4} (\Omega \sin \theta) \cos \theta (-\hat{x}_1). \quad (4)$$

Denna tidsändring måste ges av ett applicerat vridmoment. Detta vridmomentet, map masscentrum, kommer från normalkraften. Notera att denna är lika stor som tyngdkraften och att det inte kan finnas någon sidledes friktionskraft eftersom masscentrum står still! Vi får

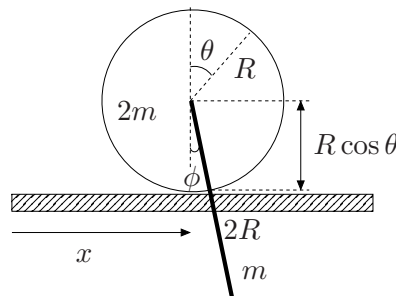
$$\vec{M} = mgR \cos \theta (-\hat{x}_1). \quad (5)$$

Med rörelseekvationen $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ fås slutligen precessionshastigheten och motsvarande periodtid

$$\Omega = 2\sqrt{\frac{g}{R \sin \theta}}, \quad T = \pi \sqrt{\frac{R \sin \theta}{g}}. \quad (6)$$

Vi noterar att periodtiden går mot noll då $\theta \rightarrow 0$, dvs myntet wobblar allt snabbare.

6. Systemet har två frihetsgrader men vi väljer ändå att skriva kinetiskt och potentiell energi med tre koordinater, x, θ, ϕ (se figur). Slutligen kan vi använda ett tvångsvillkor är att reducera antalet generaliserade koordinater till två i Lagrangianen.



(a) Potentiell energi $V = -mgR \cos \phi$.

(b) Kinetisk energi för cylindern

$$T_{\text{cyl}} = \frac{1}{2} 2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cyl}} \dot{\theta}^2, \quad \text{med } I_{\text{cyl}} = \frac{1}{2} 2mR^2.$$

(c) Notera att vi behöver den kinetiska energin för staven uttryckt i ett inertialsystem

$$\begin{aligned} T_{\text{stav}} &= \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_{\text{stav}} \dot{\phi}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left[\left(\dot{x} + R \cos \phi \dot{\phi} \right)^2 + \left(R \sin \phi \dot{\phi} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m (2R)^2 \dot{\phi}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \frac{4}{3} R^2 \dot{\phi}^2 + 2R \cos \phi \dot{\phi} \dot{x} \right). \end{aligned}$$

(d) Utnyttja tvångsvillkoret $r\dot{\theta} = \dot{x}$ för att eliminera θ . Detta ger Lagrangianen

$$L = T - V = m \left(2\dot{x}^2 + \frac{2}{3} R^2 \dot{\phi}^2 + R \cos \phi \dot{\phi} \dot{x} + gR \cos \phi \right).$$

(e) Lagranges ekvationer blir

$$\begin{aligned} x\text{-led} : \quad 4\ddot{x} + \frac{d}{dt} (R \cos \phi \dot{\phi}) &= 0, \\ \phi\text{-led} : \quad \frac{4}{3} R^2 \ddot{\phi} + \frac{d}{dt} (R \cos \phi \dot{x}) + R \sin \phi \dot{\phi} \dot{x} + gR \sin \phi &= 0. \end{aligned}$$

(f) Lös för små svängningar (x, ϕ små):

$$\begin{aligned} 4\ddot{x} + R\ddot{\phi} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{1}{4} R\ddot{\phi} \\ \frac{4}{3} R^2 \ddot{\phi} + R\ddot{x} + gR\phi &= 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} + \frac{12g}{13R} \phi = 0. \end{aligned}$$

$$\text{med lösningen } \phi(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{12g}{13R}} T \right).$$

Den sökta periodtiden är $T = 2\pi \sqrt{\frac{13R}{12g}}$.

Vi noterar också från ovanstående lösning att cylindern accelererar 180° ur fas med staven, dvs åt andra hållet.