Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Onsdagen den 12 januari 2011 klockan 08.30-12.30 i V.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

---

1. Besvara följande korta frågor. Presentera dina lösningar/motiveringar. *(6 poäng, 2 för varje korrekt lösning.)*

   (a) Rörelseekvationen $I\ddot{\theta} = -\tau$, med tröghetsmomentet $I = MR^2/2$, ger lösningen för vinkelhastigheten

   $$\dot{\theta}(t) = \omega_0 - \frac{\tau}{I}t.$$

   Den sökta tiden tills $\dot{\theta}(T) = 0$ blir $T = \frac{MR^2\omega_0}{2\tau}$. Detta svar bör dimensionskontrolleras och gränser för stora/små värden på de ingående storeheterna kommenteras.

   (b) Huvudtröghetsmoment $I_{ii} = \int(x_j^2 + x_k^2)dm$ och deviationsmoment $I_{ij} = \int x_i x_j dm$ blir diskreta summor över de fyra massorna. Notera att samtliga har z-koordinat lika med noll. Tröghetsmatrisen blir

   $$ma^2 \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

   .

   (c) Se kursboken (Meriam & Kraige, avsnitt 6/6).

2. Vi söker en rörelseekvation som beskriver ett svagt dämpat system. Finner vi denna kan vi relatera koefficienterna för de olika termerna med den generella lösningen för en svängningsrörelse med svag dämpning. Begynnelsevillkoren ger den slutliga lösningen.

   Låt oss börja med att finna rörelseekvationen. Vi kan teckna rörelseekvationer för både ekorren och för hjulet och sedan relatera dessa genom att ekorren har en konstant hastighet relativt hjulet. Figurer vore bra att använda för att demonstrera de storheter som ingår. Kraftekvationen för ekorren i tangentiell led

   $$mR\ddot{\theta} = F - mg\sin\theta, \tag{1}$$

där θ beskriver ekorrens position relativt lodlinjen från hjulets mittpunkt (moturs positivt). F är den okända tangentiella kraftkomponenten från hjulet på ekorren. Hjulets rörelseekvation kommer från vridmomentsekvationen

$$I_0 \ddot{\varphi} = -FR - k\dot{\varphi}, \tag{2}$$

där $\dot{\varphi}$ beskriver hjulets rotationshastighet (moturs positivt) och den andra termen på höger sida beskriver det dämpande vridmomentet. Slutligen har vi det geometriska villkoret från ekorrens konstanta hastighet relativt hjulet

$$v_0 = R(\dot{\theta} - \dot{\varphi}). \tag{3}$$

Ovanstående tre ekvationer, samt approximationen $\sin\theta \approx \theta$ för små vinklar ger slutligen

$$\left(I_0 + mR^2\right)\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + mgR\theta = \frac{kv_0}{R} \tag{4}$$

Partikulärlösningen till ovanstående är

$$\theta_p(t) = \frac{kv_0}{mgR^2},$$

medan homogenlösningen ges av den allmänna lösningen till svag dämpning

$$\theta_h(t) = e^{-bt}\left(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t\right),$$

med $\omega_n \equiv \sqrt{\frac{mgR}{I_0+mR^2}}$, $b \equiv \zeta\omega_n = \frac{k}{2(I_0+mR^2)}$ och $\omega_d \equiv \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{\frac{mgR}{I_0+mR^2} - \frac{k^2}{4(I_0+mR^2)}}$.

Den allmänna lösningen är $\theta(t) = \theta_p(t) + \theta_h(t)$. Begynnelsevillkoren är $\theta(0) = \varphi(0) = 0$ samt $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = v_0/R$, vilket slutligen ger svaret

$$\theta(t) = \frac{kv_0}{mgR^2} - \frac{kv_0}{mgR^2}\left[\cos\omega_d t + \left(\frac{b}{\omega_d} - \frac{mgR}{k\omega_d}\right)\sin\omega_d t\right]e^{-bt}.$$

3. Se lösningsskiss i kursboken Meriam & Kraige, SP5/19a (men notera att riktningen för $\vec{a}_{\text{rel}}$ är fel i kursboken). Svaret blir:

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \left(v_A - v_B - \frac{v_B h}{\rho}\right)\hat{\imath}, \qquad \vec{a}_{\text{rel}} = \frac{v_B^2}{\rho}\left(1 - 2\frac{v_A}{v_B} + \frac{h}{\rho}\right)\hat{\jmath}$$

där x-axeln pekar i flygplanens rörelseriktning, y-axeln rakt upp och z-axeln åt höger relativt färdriktningen.

4. Lösningsstrategi:

   (a) Teckna rörelseekvationer för det två cylindrarna. Vi kommer att ha två rörelsevariabler (två rotationsvinklar) samt en okänd friktionskraft. Följdaktligen behövs tre ekvationer.

   (b) Den mindre cylinderns position relativt vertikalaxeln kan beskrivas med en tredje vinkel θ. Då vi har rullning utan glidning borde denna vinkel bero på cylindrarnas rotationsvinklar.

   (c) Utnyttja $\sin\theta \approx \theta$ för små vinklar för att lösa röresleekvationen för θ.

Tröghetsmomenten för de två cylindrarna är $I_i = M_i R_i^2, \quad i = 1, 2.$Vi inför den okända friktionskraften F som verkar i kontaktpunkten mellan de två cylindrarna. Vinklarna θ_1 och θ_2 beskriver de två cylindrarnas rotation (moturs positivt) med $\theta_1 = \theta_2 = 0$ då den mindre cylindern befinner sig längst ner i den större cylindern. Vridmomentsekvationerna blir

$$FR_1 = M_1 R_1^2 \ddot{\theta}_1, \tag{5}$$

$$-FR_2 = M_2 R_2^2 \ddot{\theta}_2. \tag{6}$$

Vi introducerar också vinkeln θ som beskriver den mindre cylinderns position relativt vertikalaxeln (en figur vore bra). Vi kan då teckna kraftekvationen för den mindre cylindern

$$F - M_1 g \sin\theta = M_1 R_2 \ddot{\theta} \tag{7}$$

Utan glidning, och med $R_1 \ll R_2$, fås villkoret

$$R_2\theta \approx R_2\theta_2 - R_1\theta_1. \tag{8}$$

Med våra tre rörelseekvationer och ett geometrisk samband kan vi teckna en rörelseekvation för θ med enbart kända storheter. Vi utnyttjar också att $\sin\theta \approx \theta$

$$\left(M_1 + \frac{1}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}} \right) \ddot{\theta} + \frac{M_1 g}{R_2}\theta = 0.$$

Den sökta frekvensen blir därför

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_2}} \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{M_1 + 2M_2}}.$$

Notera t.ex. specialfallet då $M_2 \ll M_1$: Friktionskraften blir försumbar och vi har bara en normalkraft. Den mindre cylindern beter sig som en pendel med längden R_2 och frekvensen blir mycket riktigt $\sqrt{g/R_2}$.

Överbetygsuppgifter

5. (a) Vi utnyttjar det roterande koordinatsystemet $x'y'z'$ som roterar med vinkelhastigheten $\vec{\Omega} = \Omega\hat{k} = \Omega\,(-\sin\theta, 0, \cos\theta)$, där vi har valt att lägga y'-axeln i horisontalplanet genom snurrans masscentrum. Snurrans precessionsrörelse ges av det vridande moment som tyngdkraften ger upphov till. Följande rörelseekvation gäller

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{xyz} = \vec{r}_c \times M\vec{g}.$$

Vi har följande samband mellan tidsberoende vektorer i ett inertial och ett roterande koordinatsystem.

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{xyz} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{x'y'z'} + \vec{\Omega} \times \vec{L}.$$

Med $\vec{L} = (0, 0, I_3\omega)$ i det roterande koordinatsystemet (tröghetsmomentet $I_3 = MR^2/2$) och vi kan anta ett försumbart tidsbeorende inom periodtiden för en precession, dvs $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{x'y'z'} \approx 0$. Rörelseekvationen ger därmed

$$I_3\omega\Omega\sin\theta = Mlg\sin\theta/2, \quad \text{dvs} \quad \vec{\Omega} = \frac{lg}{R^2\omega}\hat{k}.$$

(b) När snurran lutar vinkeln θ är det ytterkanten på snurrans stav som befinner sig i kontakt med marken. På denna verkar en friktionskraft, motriktad hastigheten varmed vilken staven glider på underlaget. Friktionskraften blir $\mu Mg\hat{j}'$ och den utövar därmed ett vridande moment $\vec{\tau} = \mu Mg\frac{l}{2}\hat{i}'$ map snurrans masscentrum. Detta vridmoment kommer att ge upphov till en ändring av rörelsemängdsmomentet i positiv x'-led, dvs vinkeln θ kommer att minska.

(c) Vi inför nu ett tidsberoende för riktningen på symmetriaxeln, dvs $\frac{d}{dt}\hat{k}' = -\dot{\theta}\hat{i}'$. Rörelseekvationen ovan innehåller därmed termer i x'-riktningen som vi tidigare har försummat. Dessa ger

$$-\dot{\theta}I_3\omega = \frac{1}{2}\mu Mgl.$$

Med $\dot{\theta} = d\theta/dt$ kan vi integrera från vinkeln θ till 0

$$t = -\int_\theta^0 \frac{R^2\omega}{\mu g l} d\theta = \frac{R^2\omega}{\mu g l}\theta.$$

6. Med en kraft som alltid är riktad längs med separationsvektorn mellan de två partiklarna kommer dessa att röra sig ett plan. Med polära koordinater i detta plan gäller följande för masscentrumssystemet

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0,$$

dvs $m_1\vec{r}_1 = -m_2\vec{r}_2$ eller $m_1 r_1 = m_2 r_2$ för storlekarna. Den kinetiska energin blir

$$T = \frac{m_1}{2}|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\dot{\vec{r}}_2|^2 = \ldots = \frac{m_2^2}{2\mu}|\dot{\vec{r}}_2|^2 = \frac{m_2^2}{2\mu}\left(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}^2\right),$$

där $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ är den reducerade massan. Den potentiella energin beror på avståndet $r = r_1 + r_2 = m_2 r_2/\mu$. Med θ och r_2 som generella koordinater får vi Lagrangianen

$$L = T - V = \frac{m_2^2}{2\mu}\left(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}^2\right) - V\left(m_2 r_2/\mu\right). \tag{9}$$

Konserverade storheter ges av rörelsekonstanter. Då Lagrangianen saknar $\dot{\theta}$-beroende ger den ena av Lagranges ekvationer direkt att

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_2^2 r_2^2\dot{\theta}}{\mu} = \text{konstant} \equiv J.$$

Nu gäller det bara att identifiera J. Systemets totala rörelsemängdsmoment runt masscentrum är $m_2 r_2^2\dot{\theta} + m_1 r_1^2\dot{\theta} = m_2^2 r_2^2\dot{\theta}/\mu = J$. Alltså är rörelsemängdsmomentet konserverat.

För att finna en annan rörelsekonstant tecknar vi

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) = \sum_j\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j\right] = \frac{d}{dt}\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j,$$

där vi har utnyttjat Lagranges ekvationer samt att L ej beror på t explicit. Rörelsekonstanten blir därmed

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = \text{konstant}$$

I vårt fall finner vi att summan i vänsterledet blir

$$\frac{m_2^2 \dot{r}_2^2}{\mu} + \frac{m_2^2 r_2^2 \dot{\theta}_2^2}{\mu} = 2T,$$

dvs med $L = T - V$ ser vi att vår rörelsekonstant är $T + V = E =$ konstant.