Notas de clase de Probabilidad y Estadística

Volumen 1: Cap. 4 (Distribuciones de probabilidad continuas)

Versión 3 (Mayo 21, 2020)

Dr. rer. nat. Humberto LLinás Solano
Doctor en Estadística (Mainz-Alemania)
Profesor Titular/Investigador Asociado
hllinas@uninorte.edu.co

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad del Norte
(www.uninorte.edu.co).

Índice general

Prefacio

Introducción

Estas notas de clase hacen parte de un compendio de varios volúmenes y están dirigido a todo tipo de público que requiere de algún conocimiento básico en Estadística.

El autor

Humberto Jesús LLinás Solano es Licenciado en Ciencias de la Educación, con énfasis en Matemáticas, Física y Estadística de la Universidad del Atlántico (Colombia). Magister en Matemáticas, convenio Universidad del Valle-Universidad del Norte (Colombia). Doctor en Estadística (Dr. rer. nat.) de la Universidad Johannes Gutenberg de Mainz (Alemania). Desde 1998 se desempeña como profesor de tiempo completo de la Universidad del Norte y forma parte de los grupos de investigación Matemáticas y Enfermedades tropicales de dicha institución. Autor de los productos[1]:

- *Estadística descriptiva y distribuciones de probabilidad* (2005, [6])
- *Estadística inferencial* (2006, [8])
- *Una visión histórica del concepto moderno de integral* (como editor, 2006, [4])
- *Medida e integración* (2007, [9])
- *Applets de estadística* (2007, [11])
- *Introducción a la estadística con aplicaciones en Ciencias Sociales* (2012, [12])
- *Procesos estocásticos con aplicaciones* (como coautor, 2013, [2])
- *Introducción a la estadística matemática* (2014, [13])
- *Introducción a la teoría de la probabilidad* (2014, [14])

Para más referencias, pueden consultarse:

- CVLAC
- ORCID
- Google Scholar

[1] Se cita el título del texto o applet, el año de publicación y la referencia bibliográfica respectiva. Cuando sea necesario, un comentario adicional.

4 Variables aleatorias continuas y funciones de distribución

4.1 Variables aleatorias continuas

1. **Variable aleatoria.**
   $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Se clasifica en discreta o continua.

2. **Variable aleatoria continua.**
   Tiene una cantidad infinita no enumerable de valores.

3. **Función de densidad f de X.**
   Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ que cumple las dos condiciones:

   (a) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$, para todo a y b reales.

   (b) El área bajo toda la gráfica de f es 1, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

   La gráfica de f es una curva.

4. **Función de distribución acumulada de X.**
   Una función $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$F(t) \ = \ P(X \leq t) \ = \ \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx, \quad \text{para todo } t \text{ real.}$$

5. **Propiedades de F.**
   (a) $0 \leq F(t) \leq 1$.
   (b) F es creciente.
   (c) F es continua.
   (d) $F\left(\lim_{t\to\infty} t\right) = 1$.
   (e) $F\left(\lim_{t\to-\infty} t\right) = 0$.

6. **Comentarios generales.**
   (a) $P(X = a)$ siempre es cero.
   (b) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.
   (c) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.
   (d) $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$.

7. **¿Cómo se calcula f a partir de F?**
   $f(x) = F'(x)$, para todo valor de x en donde exista la derivada.

8. **Esperanza y varianza.**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx, \qquad V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\, dx.$$

9. **Propiedades de la esperanza y varianza.**
   (a) $E(aX + b) = aE(X) + b$.
   (b) $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
   (c) $V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$, donde $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx$.

10. **Calculadora de integrales.**
    Se puede utilizar el siguiente recurso online para calcula integrales: Click aquí.

4.2 Distribuciones especiales continuas: Resumen

En la tabla A.8 del apéndice presentamos un resumen de las distribuciones continuas más importantes.

1. *Distribuciones especiales discretas*:

   a) Uniforme continua,

   b) Normal,

   c) Gamma,

   d) Exponencial,

   e) t de Student,

   f) Chi-cuadrada,

   g) F de Fisher,

   h) Weibull

   i) etc.

2. *Comentario*:
   Las probabilidades que no puedan ser hallados con las tablas estadísticas del apéndice pueden ser calculados con ayuda de:

   a) Excel. Para másinformaciones al respecto puede consultarse el siguiente tutorial.

   b) Geogebra. En especial, el link de Probabilidad.

   c) Calculadoras en líneas. En especial, ir a la sección *Distribución de probabilidad* y seleccionar la distribución deseada.

4.3 La distribución uniforme (continua)

1. **Función de probabilidad de la distribución uniforme continua**.
   Una variable aleatoria continua X tiene DISTRIBUCIÓN UNIFORME con los parámetros a y b con $a < b$ si posee la densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \le x \le b, \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

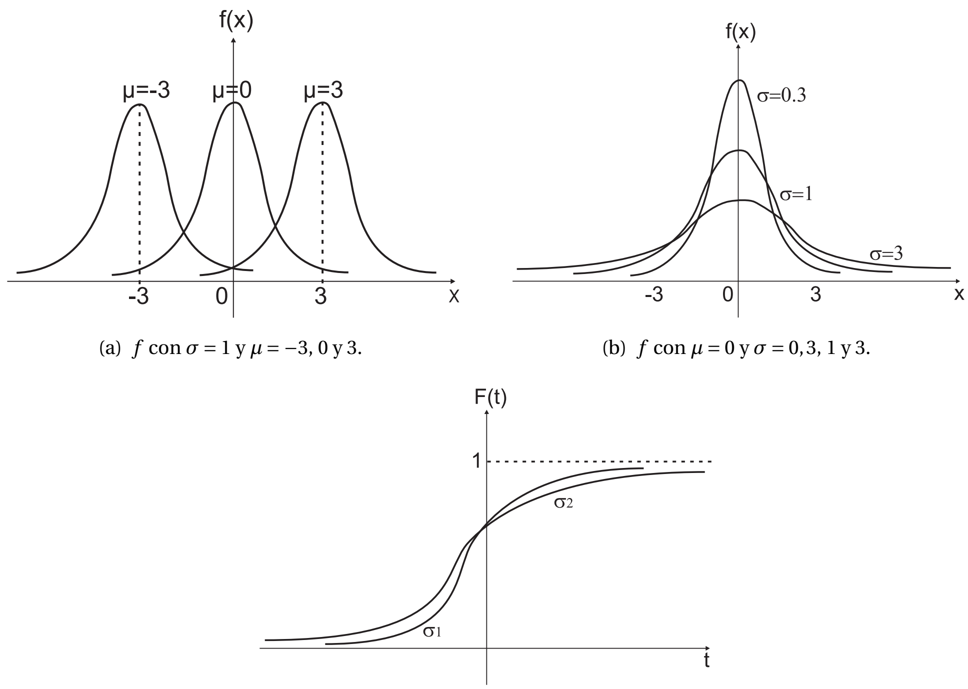
2. **Esperanza y varianza de la distribución uniforme continua**. La media y la varianza de X vienen dadas, respectivamente, por

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

4.4 La distribución normal

1. **Densidad con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$.**
   Está dada por
   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$
   La función de distribución acumulada normal la simbolizaremos por Φ.

2. **Propiedades de la distribución normal.**
   a) Si X es normal con μ y σ^2, entonces, $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$.
   b) Hay toda una familia de distribuciones normales. Cada distribución normal específica se distingue por μ y σ (compárese con la figura 4.1).



(a) f con $\sigma = 1$ y $\mu = -3, 0$ y 3.

(b) f con $\mu = 0$ y $\sigma = 0,3$, 1 y 3.

(c) F con $\sigma_1 < \sigma_2$.

Figura 4.1: Gráficas de f y F para diferentes valores de los parámetros μ y σ.

   c) En la figura 4.1 podemos observar que:
   1) La densidad normal es creciente para $x < \mu$ y decreciente para $x > \mu$. Es decir, el punto más alto de la densidad normal se obtiene cuando $x = \mu$ (véase la figura 4.1a,b).
   2) La densidad normal es simétrica con respecto a μ.
   3) Las colas, es decir, los extremos o los lados de la densidad normal se prolongan al infinito en ambas direcciones y nunca tocan el eje horizontal (véase la figura 4.1a,b).
   4) La desviación estándar σ determina el ancho de la curva.

d) La media, la mediana y la moda son todas iguales (véase la figura 4.1a).

e) En la figura 4.1c) ilustramos la gráfica de la distribución acumulada normal para $\sigma_1 < \sigma_2$.

3. **La distribución normal estándar**.
Aquella distribución normal con esperanza 0 y varianza 1.

4. **Propiedades de la distribución normal estándar**.
   - Simétrica con respecto a 0.
   - De la figura 4.2: El área de la región I es igual al área de la región II.

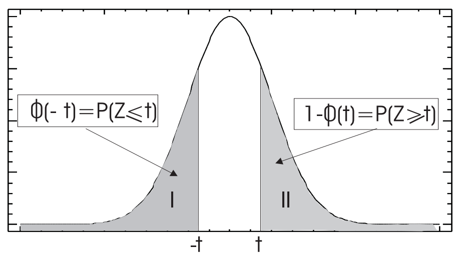


Figura 4.2: Las áreas de las regiones I y II son iguales en la distibución normal estándar

5. **Conversión a la distribución normal estándar**.
Sea X una variable aleatoria que tiene distribución normal con parámetros μ y σ^2. Entonces:

(a) La siguiente variable tiene distribución normal estándar:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

(b) Para todo número real t, se cumple que

$$P(X \leq t) = P\Big(Z \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\Big)$$

(c) Justificación de la fórmula (b):

$$P(X \leq t) = P(X \leq t) = P(X - \mu \leq t - \mu) = P\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\Big) = P\Big(Z \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\Big)$$

Ejemplo 4.1

Sin estandarizar y utilizar Geogebra. Si X es una variable normal con media $\mu = 50$ y varianza $\sigma^2 = 100$, calcule las siguientes probabilidades (completar lo que haga falta):

a) $P(X \leq 40) \;=\; 0,1587$

b) $P(X < 40) \;=\; 0,1587$

c) $P(|X| \leq 60) \;=\; P(-60 \leq X \leq 60) \;=\; 0,8413$

d) $P(|X| \geq 60) \;=\; P(X \geq 60) + P(X \leq -60) \;=\; 0,1587 + 0 \;=\; 0,1587$

e) $P(X \leq 70) \;=$

f) $P(55 \leq X \leq 80) \;=$

g) $P(55 \leq X < 80) \;=$

h) $P(60 \leq X) \;=$

i) $P(|X| < 60) \;=$

j) $P(|X - 70| \leq 60) \;=$

k) $P(|X - 70| \geq 60) \;=$

Recordar que:

(i) $|U| \leq k$ es equivalente a: $-k \leq U \leq k$.

(ii) $|V| \geq k$ es equivalente a: $V \geq k$ o $V \leq -k$.

(iii) Las propiedades anteriores también se cumple si se utilizan desigualdades estrictas (<, >). ◂

Ejemplo 4.2

Estandarizando y utilizando Geogebra. Si X es una variable normal con media $\mu = 50$ y varianza $\sigma^2 = 100$, calcule las siguientes probabilidades (comparar con el ejemplo anterior y completar lo que haga falta). Es importante resaltar que, para estandarizar, siempre se deben aplicar lan fórmulan siguientes[a]:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}, \qquad P(X \leq t) = P\Big(Z \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\Big)$$

a) Tenemos que:

$$P(X \leq 40) = P\Big(Z \leq \frac{40-50}{10}\Big) = P(Z \leq -1) = 0,1587$$

b) $P(X < 40) = P(Z < -1) = 0,1587$

c) Tenemos que

$$\begin{aligned} P(|X| \leq 60) &= P(-60 \leq X \leq 60) = P(X < 60) - P(X < -60) \\ &= P\Big(Z \leq \frac{60-50}{10}\Big) - P\Big(Z \leq \frac{-60-50}{10}\Big) \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -11) = 0{,}8413 - 0 = 0{,}8413 \end{aligned}$$

d) $P(|X| \geq 60) = P(X \geq 60) + P(X \leq -60) = P(Z \geq 1) + P(Z \leq -11) = 0,1587$

e) $P(X \leq 70) =$

f) $P(55 \leq X \leq 80) =$

g) $P(55 \leq X < 80) =$

h) $P(60 \leq X) =$

i) $P(|X| < 60) =$

j) $P(|X-70| \leq 60) =$

k) $P(|X-70| \geq 60) =$

Recordar que:

(i) $|U| \leq k$ es equivalente a: $-k \leq U \leq k$.

(ii) $|V| \geq k$ es equivalente a: $V \geq k$ o $V \leq -k$.

(iii) Las propiedades anteriores también se cumple si se utilizan desigualdades estrictas (<, >). ◄

[a] Explicadas en el punto 5 de esta misma sección.

Ejemplo 4.3

Una compañía fabrica bombillos con vida media de 500 horas y desviación estándar de 100. Si se supone que los tiempos de vida útil de los bombillos se distribuyen normalmente, esto es que los tiempos de vida forman una distribución normal, encuentre la probabilidad de que cierta cantidad de focos dure:

a) Menos de 650 horas.

b) Más de 780 horas.

c) Entre 650 y 780 horas.

SOLUCIÓN:

- Sea X = tiempo de vida útil de los focos.
- X tiene distribución normal con $\mu = 500$ y $\sigma = 100$.

Entonces:

a) Nos piden $P(X < 650)$.

- Sin estandarizar (directamente con Geogebra):

$$P(X < 650) \;=\; 0,9332$$

- Estandarizando (con Z):

$$P(X < 650) \;=\; P\Big(Z < \frac{650-500}{100}\Big) \;=\; P(Z < 1,5) \;=\; 0,9332$$

b) Nos piden $P(X > 780)$.

- Sin estandarizar (directamente con Geogebra):

$$P(X > 650) \;=\; 0,0026$$

- Estandarizando (con Z):

$$P(X > 650) \;=\; P\Big(Z > \frac{780-500}{100}\Big) \;=\; P(Z > 2,8) \;=\; 0,0026$$

c) Nos piden $P(650 \leq X \leq 780)$.

- Sin estandarizar (directamente con Geogebra):

$$P(650 \leq X \leq 780) \;=\; P(X < 780) \;-\; P(X < 680) \;=\; 0,0026$$

- Estandarizando (con Z):

$$\begin{aligned} P(650 \leq X \leq 780) \;&=\; P(X < 780) - P(X < 680) \\ &=\; P(Z < 2,80) - P(Z < 1,5) \;=\; 0,9974 - 0,9332 \;=\; 0,0642 \end{aligned}$$

O sea, la probabilidad de que cierta cantidad de bombillos duren entre 650 y 780 horas es aproximadamente 0,0642. ◄

6. **Teorema de aproximación de la binomial a la normal**.

   a) Consideremos un experimento binomial con parámetros n y p. Supongamos que se cumple una de las dos condiciones siguientes:

      (i) $n \geq 30$

      (ii) $np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$

      Entonces, la distribución binomial se puede aproximar a la distribución normal con los siguientes parámetros:

$$\mu = np, \qquad \sigma^2 = np(1-p)$$

   b) Si X es una variable aleatoria que tiene distribución binomial con parámetros n y p, entonces,

$$P(X \leq k) \approx P\left(Z \leq \frac{k+0{,}5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Ejemplo 4.4

Un fabricante sabe por experiencia que de 17.000 productos, el 4 % es rechazado por defectos. Si un nuevo lote de 800 unidades va a ser inspeccionado, calule la probabilidad aproximada de que:

a) Menos de 35 unidades sean rechazadas.

b) Más de 40 no sean rechazadas.

c) Entre 38 y 46 (ambos inclusive) no sean rechazadas.

d) Menos de 56 o más de 60 sean rechazadas

SOLUCIÓN:

(i) Sea X la variable aleatoria que representa el número de productos rechazados.

(ii) Sea Sea Y la variable aleatoria que representa el número de productos no rechazados.

(iii) El experimento es hipergeométrico con $N = 17.000$, $n = 800$ y $M =$ número de éxitos en la población.

(iv) Como $\frac{n}{N} = 0{,}047 \leq 0{,}05$, entonces:

- X es una variable binomial con parámetros $n = 800$ y $p = 0{,}04$.
- Y es una variable binomial con parámetros $n = 800$ y $q = 0{,}96$.

(v) Como $n \geq 30$, entonces:[a]

- X es aproximadamente normal con parámetros $\mu = np = 32$ y $\sigma^2 = npq = 30{,}72$.
- Y es aproximadamente normal con parámetros $\mu = nq = 768$ y $\sigma^2 = npq = 30{,}72$.

Ahora, resolveremos los incisos:

a) La probabilidad aproximada de que menos de 35 unidades sean rechazadas es:

$$P(X < 35) = P(X \leq 34) \approx P\left(Z \leq \frac{34+0{,}5-32}{\sqrt{30{,}72}}\right) = P(Z \leq 0{,}45) = 0{,}6736$$

b) Se deja como ejercicio al lector (utilizar Y).

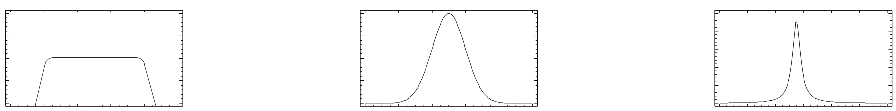
c) Se deja como ejercicio al lector (utilizar Y).

d) Se deja como ejercicio al lector (utilizar X). ◄

.

[a]Observemos que también podemos aplicar la segunda condición del teorema de aproximación, puesto que se cumple $np = 32 \geq 5$ y $nq = 768 \geq 5$.

7. **Las medidas de curtosis y la distribución normal**.
Con la curtosis se estudia la deformación, en sentido vertical, respecto a la normal, de una distribución (véase la figura 4.3).



(a) Platicúrtica. (b) Mesocúrtica. (c) Liptocúrtica.

Figura 4.3: Diversos tipos de curvas clasificadas de acuerdo a su apuntamiento.

8. **Medidas de curtosis**.
Sea X una variable aleatoria continua o discreta. Entonces, el COEFICIENTE DE CURTOSIS de X se define como la diferencia de la división de la cuarta potencia de la esperanza de la variable $X - E(X)$ y el cuadrado de la varianza de X y 3, es decir,

$$\kappa = \frac{E\big([X - E(X)]^4\big)}{[V(X)]^2} - 3.$$

De igual manera, el COEFICIENTE DE CURTOSIS de un conjunto de datos $x_1, \ldots, x_n$ con frecuencias $f_1, \ldots, f_n$ se define como la diferencia de la división entre la media aritmética de los datos $(x_1 - \overline{x})^4, \ldots, (x_n - \overline{x})^4$ y el cuadrado de la varianza de los datos originales. Es decir,

$$\kappa = \frac{\big[f_1(x_1 - \overline{x})^4 + \cdots + f_n(x_n - \overline{x})^4\big]/N}{(\text{Varianza de los datos } x_1, \ldots, x_n)^2} - 3,$$

siendo $N := f_1 + \cdots + f_n$. EL COEFICIENTE DE CURTOSIS ESTANDARIZADO, simbolizado por κ_s se define como el cociente entre el coeficiente de curtosis κ y la raiz cuadrada de 6/N. Es decir,

$$\kappa_s = \frac{\kappa}{\sqrt{6/N}}.$$

Una distribución es mesocúrtica (apuntamiento igual al de la normal) cuando $\kappa = 0$; es leptocúrtica (apuntamiento mayor que el de la normal) si $\kappa > 0$ y es platicúrtica (apuntamiento menor que el de la normal) si $\kappa < 0$.

4.5 Las distribuciones gamma y exponencial

1. **La función gamma y sus propiedades**.
La FUNCIÓN GAMMA $\Gamma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como
$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt, \quad \text{para todo } \alpha > 0.$$

2. **Propiedades de la función gamma**.
   (a) Para cualquier $\alpha > 0$, se cumple que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
   (b) Para cualquier número natural n, tenemos que $\Gamma(n) = (n-1)!$.
   (c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3. **La distribución gamma**.
Una variable aleatoria X tiene DISTRIBUCIÓN GAMMA con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ si su función de densidad está dada por
$$f(x;\alpha;\beta) =: \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta} & \text{para } x > 0 \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$
Cuando $\beta = 1$, la distribución se conoce con el nombre de DISTRIBUCIÓN GAMMA ESTÁNDAR. Además, $E(X) = \alpha\beta$ y $V(X) = \alpha\beta^2$.

4. **La distribución gamma incompleta**.
Sea X una variable aleatoria que tiene distribución gamma estándar con parámetro α. La siguiente función F recibe el nombre de FUNCIÓN GAMMA INCOMPLETA
$$F(t;\alpha) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx, \qquad x > 0,$$
Hay tablas muy completas para la función gamma incompleta. En el apéndice presentamos una pequeña tabulación de esta función para $\alpha = 1, 2, \ldots, 10$ y $x = 1, 2, \ldots, 15$ (véase la tabla **??** del apéndice).

5. **Cálculo de probabilidades a partir de la gamma**.

Ejemplo 4.5

Suponga que el tiempo de reacción X a cierto estímulo en un individuo seleccionado al azar tiene distribución gamma estándar con parámetro $\alpha = 2$. Sea F la función gamma incompleta de X. Teniendo en cuenta la tabla **??** del apéndice, entonces, la probabilidad de el tiempo de reacción se encuentre entre 3 y 5 (ambos inclusive) es $P(3 \leq X \leq 5) = F(5;2) - F(3;2) = 0,159$. ◄

La función gamma incompleta también la podemos utilizar para calcular probabilidades en las que aparezcan distribuciones gamma que no sean estándar.

(a) $\alpha = 1, 2, 3$ y $\beta = 1$.

(b) $\alpha = 2$ y $\beta = 2, 1, \frac{1}{2}$.

Figura 4.4: Densidad f de la distribución gamma para diferentes valores de α y β.

Teorema 4.1

Sea X una variable aleatoria que tiene distribución gamma con parámetros α y β. Si F es la función gamma incompleta de una variable aleatoria gamma estándar con parámetro α, entonces, para todo $t > 0$, se cumple que

$$P(X \leq t) = F\left(\frac{t}{\beta}; \alpha\right).$$

Ejemplo 4.6

Suponga que el tiempo X de supervivencia en semanas de un ratón macho seleccionado al azar y expuesto a 240 rads de radiación gamma tiene una distribución gamma con $\alpha = 8$ y $\beta = 15$. Determine la probabilidad de que un ratón sobreviva (a) entre 60 y 120 semanas y (b) por lo menos 30 semanas.

SOLUCIÓN:

Sea F la función gamma incompleta de una variable aleatoria gamma estándar con parámetro $\alpha = 8$. Entonces, la probabilidad de que un ratón sobreviva entre 60 y 120 semanas es

$$P(60 \le X \le 120) \;=\; F\left(\frac{120}{15};8\right) - F\left(\frac{60}{15};8\right) \;=\; 0,496. \qquad ◀$$

6. **La densidad exponencial con parámetro $\lambda > 0$.**
   Está dada por

$$f(x;\lambda) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{para } x \ge 0. \end{cases}$$

La distribución exponencial es un caso especial de la distribución gamma en la que $\alpha = 1$ y β se ha reemplazado por $1/\lambda$. En este caso, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ y $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Figura 4.5: Distribución exponencial para $\beta = 2, 1, \frac{1}{2}$, siendo $\beta = 1/\lambda$.

Ejemplo 4.7

El tiempo de atención al cliente en un servicio de información de una biblioteca sigue una distribución exponencial, con un tiempo de servicio medio de 5 minutos. Entonces, la probabilidad de que una consulta de un cliente dure más de 10 minutos es 0,135335. ◀

4.6 Ejercicios

1. ¿Son las siguientes afirmaciones verdaderas o falsas? Justifique cada respuesta.

   (a) Toda variable aleatoria es un número.

   (b) Si f es la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X y 0 es un posible valor de X, entonces, $f(0) = 0$.

   (c) Para cualquier variable aleatoria discreta X se cumple que $P(X = 1) = 1$, en donde 1 es un posible valor de X.

   (d) Si F es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria X discreta, entonces, F es una función escalonada.

(e) Si X es una variable aleatoria discreta con función de distribución acumulada F, entonces, se cumple que $P(3 \leq X < 5) = F(5) - F(3)$.

(f) Si f es la función de densidad de una variable aleatoria continua X, entonces, $f(x) = P(X = x)$, para todo número real x.

(g) Para cualquier variable aleatoria continua X se cumple que $P(X = 1) = 1$.

(h) Si F es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria X continua, entonces, F es una función escalonada

(i) Si X es una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada F, entonces, se cumple que $P(4 \leq X < 8) = F(8) - F(4)$.

(j) Si X es cualquier variable aleatoria y si la variable aleatoria $X + 4$ tiene esperanza 1, entonces, la esperanza de X es 5.

2. Una pizzería, que atiende pedidos por correo, tiene cinco líneas telefónicas. Sea X la variable aleatoria que representa al número de líneas en uso en un momento específico. Supongamos que la función de probabilidad f de X está dada en la siguiente tabla:

Valor x de X	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,20	0,25	0,10	0,15	0,09	0,21

Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

(a) A = “a lo sumo 2 líneas están en uso“.

(b) B = “menos de 4 líneas están en uso”.

(c) C = “por lo menos 3 líneas están en uso“.

(d) D = “entre 2 y 4 (ambos inclusive) líneas están en uso”.

(e) E = “entre 2 y 5 (ambos inclusive) líneas no están en uso“.

(f) F = “por lo menos 3 líneas no están en uso”.

3. La función de probabilidad de la variable aleatoria X que representa al número de imperfecciones por 4 metros de un papel especial en rollos continuos de ancho uniforme, está dada por

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,21	0,28	0,10	0,25	0,16

Determine la función de distribución acumulada de X y represéntela gráficamente.

4. Una fabricante de lapiceros tiene un programa de control de calidad que incluye la inspección de lapiceros recibidos para revisar que no tengan defectos. Supongamos que, en cierto día, él recibe lapiceros en lotes de cinco y se seleccionan dos lapiceros de un lote para inspeccionarlos. Podemos representar los posibles resultados del proceso de selección por pares. Por ejemplo, el par $(3,4)$ representa la selección de los lapiceros 3 y 4 para inspeccionarlos.

(a) Haga una lista de los resultados diferentes.

(b) Supongamos que los lapiceros 3 y 4 son los únicos defectuosos de un lote de cinco y se van a escoger dos lapiceros al azar. Defina la variable aleatoria X como el número de de lapiceros defectuosos observado entre los inspeccionados. Encuentre la función de probabilidad de X.

(c) Encuentre la función de distribución acumulada F de X y represéntela gráficamente.

5. Al invertir en unas acciones particulares, una persona puede tener una ganancia en un año de \$8.000.000 con probabilidad de 0,4 o tener una pérdida de \$2.000 con probabilidad de 0,6. ¿Cuál es la ganancia esperada de esta persona? Interprete su respuesta.

6. El número total de horas, medidas en unidades de 10 horas, que una familia utiliza una lavadora en un período de 6 meses es una variable continua X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 2 - x & \text{si } 1 \le x < 2, \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

   (a) Haga un bosquejo de la gráfica de f.

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un período de 6 meses, una familia utilice su lavadora menos de 15 horas? ¿Entre 5 y 12 horas?

7. Suponga que la temperatura de reacción (en grados centígrados) de cierto proceso químico es una variable aleatoria continua X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } -k \le x \le k, \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

   (a) Halle el valor de k para que f sea en realidad una densidad y, luego, trace la gráfica de f.

   (b) Calcule la probabilidad de que la temperatura de reacción sea estrictamente positiva.

   (c) Calcule la probabilidad de que la temperatura de reacción se encuentre entre 0 y $1/2$ grados centígrados.

   (d) Calcule probabilidad de que la temperatura de reacción sea menor que $-1/4$ grados centígrados o mayor que $1/4$ grados centígrados.

8. Un maestro universitario nunca termina su clase antes de que suene la campana y siempre termina su clase por lo menos 2 minutos después de que suena la campana. Sea X el tiempo (en minutos) que transcurre entre la campana y el término de la clase, y suponga que la función de densidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & \text{si } 0 \le x \le 2, \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

   (a) Encuentre el valor de k y luego grafique f.

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la clase termine por lo menos 1 minuto después de que suene la campana?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que la clase continúe entre 60 y 90 segundos después de que suene la campana?

   (d) ¿Cuál es la probabilidad de que la clase continúe por lo menos 90 segundos después de que suene la campana?

9. Un vendedor recibe un salario anual de 12.000.000 de pesos, más un 5 % del valor de las ventas que realiza. Las ventas anuales pueden representarse mediante una variable aleatoria con media 20.000.000 de pesos y desviación típica de 2.000.000 de pesos. Halle la media y la desviación del ingreso anual de este vendedor.

4.7 Ejercicios

1. Con el propósito de establecer el grado de aceptación de su producto, una empresa selecciona una muestra de 1.000 consumidores de una población de 1.000.000, de forma tal que cada uno de los elementos de la población tiene la misma probabilidad de ser seleccionado. A cada consumidor seleccionado se le pregunta si prefiere el producto producido por esta empresa o no. ¿Es este un experimento binomial? Explique su respuesta.

2. Un fabricante de celulares, desea controlar la calidad de su producto y rechazar cualquier lote en el que la proporción de celulares defectuosos sea demasiado alta. Con este fin, de cada lote grande (digamos, 20.000 celulares) selecciona y prueba 25. Si por lo menos 3 de éstos están defectuosos, todo el lote será rechazado.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado si 5 % de los celulares están defectuosos?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado si 10 % de los celulares están defectuosos?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado si 30 % de los celulares están defectuosos?

3. Una empresa se dedica a la instalación de nuevos paquetes computacionales. Se ha comprobado que en el 10 % de 250 instalaciones es necesario volver para realizar algunas modificaciones. En una semana determinada se realizaron 10 instalaciones. Asumir independencia en los resultados de esas instalaciones.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario volver en cinco casos?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea necesario volver en ninguno los casos?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario volver en más de un caso?

4. En un lote de 1.000 bombillas fabricadas por una compañía, 10 son defectuosas. Utilice la aproximación de la distribución binomial por la de Poisson para calcular la probabilidad de que en una muestra de 20 bombillas, (a) 2, (b) 0, (c) por lo menos 3 sean defectuosas.

5. En cierto estudio se reporta que de cada 100 personas, una fuma. Consideremos una muestra aleatoria de 2.000 personas.

   (a) ¿Cuál es la distribución aproximada del número de quienes fuman?

   (b) Utiliza la aproximación de la parte (a) para calcular la probabilidad aproximada de que entre 8 y 20 (ambos inclusive) personas fumen.

   (c) Utiliza nuevamente la aproximación de la parte (a) para calcular la probabilidad aproximada de que estrictamente entre 12 y 30 personas fumen.

6. Suponga que los buses llegan a cierto terminal de transporte, según un proceso de Poisson, con tasa $\alpha = 8$ buses por hora, de modo que el número de llegadas por un periodo de t horas es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 8t$.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 buses pequeños lleguen durante un período de una hora? ¿Por lo menos 5? ¿A lo más 10?

   (b) ¿Cuáles son el valor esperado y la desviación estándar del número de buses que llegan durante un período de 90 minutos?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 20 buses lleguen durante un período de 2 horas y media? ¿De que a lo sumo 10 lleguen durante este período?

7. Un fabricante de computadores se preocupa por el mal funcionamiento de cierto programa estadístico en un modelo en particular. El mal funcionamiento puede producir en raras ocasiones un bloqueo en el sistema operativo. Suponga que la distribución del número de computadores por año que tienen un mal funcionamiento del paquete estadístico es la de Poisson con $\lambda = 5$.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más dos computadores por año tenga un bloqueo en el sistema operativo?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que más de un computador por año tenga un bloqueo en el sistema operativo?
8. Una empresa recibe un pedido de 1.000 artículos. Se analiza una muestra aleatoria de 15 artículos y se acepta el pedido si menos de tres resultan defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un envío que contenga un 5 % de artículos defectuosos?
9. Cada uno de los 13 computadores de cierta marca ha sido devuelto a un proveedor debido al mal funcionamiento de ciertos programas bajo un determinado sistema operativo. Supongamos que 7 de estos 13 tienen problemas con la memoria RAM y los otros 6 tienen problemas con los ejecutables EXE. Si se examinan al azar y sin reemplazo 6 de estos computadores, ¿cuál es la probabilidad de que (a) exactamente 3, (b) a lo más 2, (c) estrictamente entre 2 y 5 computadores tengan problemas con la memoria RAM?
10. Una determinada empresa está interesada en evaluar su procedimiento de inspección actual en embarques de 50 artículos idénticos. El procedimiento es tomar una muestra de cinco y pasar el embarque si no se encuentra más de dos defectuosos. ¿Qué proporción del 20 % de embarques defectuosos se aceptará?
11. El 10 % de los motores armados en una fábrica de montaje están defectuosos. Si se seleccionan en forma aleatoria uno por uno y se prueba, calcule la probabilidad de localizar el tercer motor sin defecto (a) en el quinto ensayo,(b) en el quinto ensayo o antes.
12. De acuerdo con un estudio geológico, en un pozo de exploración petrolera hay 0,2 de probabilidad de encontrar petróleo. Calcule la probabilidad de localizar petróleo por primera vez en el tercer pozo que se perfore.
13. Se sabe que en cierto proceso de fabricación, en promedio, uno de cada 100 artículos está defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el sexto artículo que se inspecciona sea el primer defectuoso que se encuentra.
14. Suponga que el tiempo de reacción X (en minutos) a cierto medicamento tiene una distribución uniforme continua en el intervalo $[-5,5]$. Calcule la probabilidad de que la temperatura de reacción
   (a) sea estrictamente menor que 0
   (b) se encuentre entre $-2,5$ y $2,5$.
   (c) se encuentre entre k y $k+4$ si k satisface $-5 < k < k+4 < 5$.
15. El tiempo X (minutos) para que un profesor prepare un cuestionario tiene una distribución uniforme continua en el intervalo $[20,40]$.
   (a) Escriba la función de densidad, la función de distribución acumulada y trace sus respectivas gráficas.
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de preparación exceda a 35 minutos?
   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de preparación se encuentre a 2 minutos del tiempo medio?
   (d) Para cualquier k tal que $25 < k < k+2 < 35$, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo de preparación esté entre k y $k+2$ minutos?
16. Se regula una máquina despachadora de café para que sirva un promedio de 200 mililitros por vaso. Si la cantidad de bebida se distribuye normalmente con una desviación estándar de 15 mililitros,

(a) ¿qué fracción de los vasos contendrán más de 191 mililitros?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un vaso contenga entre 209 y 224 mililitros?

(c) ¿Cuántos vasos probablemente se derramarán si se utilizan vasos de 230 mililitros para las siguientes 1.000 bebidas?

(d) ¿Por debajo de qué valor obtendremos un 25 % de las bebidas más pequeñas?

17. La vida promedio de cierta maquinaria eléctrica es 10 años con una desviación estándar de dos años. El fabricante reemplaza gratis todas las maquinarias que fallen dentro del tiempo de garantía. Si está dispuesto a reemplazar sólo 3 % de las maquinarias que fallan y si la duración de una maquinaria sigue una distribución normal, ¿de qué duración debe ser la garantía que ofrezca?

18. Los coeficientes de inteligencia de 600 aspirantes a cierta beca escolar en una universidad extranjera se distribuyen aproximadamente normal con media de 115 y desviación estándar de 12. Si la universidad requiere un coeficiente de inteligencia de al menos 95, ¿cuántos de estos aspirantes serán rechazados sobre esta base sin importar sus otras calificaciones?

19. Suponga que 90 % de todas los trabajadores que hay en una determinada empresa no fuman. Considere una muestra aleatoria de 200 trabajadores y represente con X a la cantidad de trabajadores que fuman. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que X (a) sea a lo sumo 30? (b) sea más de 30? (c) esté entre 15 (inclusive) y 25 (no inclusive)?

20. Suponga que sólo 80 % de todos las personas mayores de 18 años que viven en cierto pueblo cerca del mar saben nadar. Se selecciona al azar una muestra de 200 personas mayores de 18 años del pueblo. ¿Cuál es la probabilidad de que

(a) entre 50 y 100 (ambos inclusive) de las personas mayores de 18 años del pueblo no sepan nadar?

(b) menos de 140 de las personas mayores de 18 años del pueblo sepan nadar? ¿Y más de 150?

21. Suponga que el tiempo (en horas) tomado por una cocinea para preparar una deliciosa comida es una variable aleatoria X que tiene una distribución gamma con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 1/2$. ¿Cuál es la probabilidad de que tarde (a) a lo sumo 1 hora, (b) por lo menos 2 horas,(c) entre 0,5 y 1,5 horas para preparar la comida?

22. Un reconocido científico ha determinado que el tiempo de supervivencia (en semanas) de un animal cuando se le somete a cierta exposición de radiación gamma tiene una distribución gamma con $\alpha = 5$ y $\beta = 10$.

(a) ¿Cuál es el tiempo medio de supervivencia de un animal seleccionado al azar del tipo que se utilizó en el experimento?

(b) ¿Cuál es la desviación estándar del tiempo de supervivencia?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que un animal sobreviva más de 30 semanas?

23. El tiempo de respuesta de una computadora es una aplicación importante de las distribuciones gamma y exponencial. Suponga que un estudio de cierto sistema de computadoras revela que el tiempo de respuesta en segundos tiene una distribución exponencial con una media de tres segundos. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta (a) exceda 5 segundos, (b) no exceda 10 segundos?

24. Suponga que la vida de cierto tipo de batería tiene una tasa de falla constante anunciada de 0,01 por hora y que tiene distribución exponencial.

(a) ¿Cuál es el tiempo medio de falla?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que pasen 300 horas antes de que se observen dos fallas?

25. Utilizando la opción *Plot...Probability Distributions...Binomial* de Statgraphics, realizar:

   (a) Los ejemplos 3.5.4 y 3.5.6 de [6].
   (b) Los ejercicios 37, 39 (partes b y c), 43 (partes a,b,c y d) y 51 de [6].

26. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Poisson* de Statgraphics, realizar los ejemplos 3.6.2, 3.6.3, 3.6.4, 3.6.5, 3.6.9 y 3.6.10 de [6].

27. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Poisson* de Statgraphics, realizar los ejercicios 53, 55, 57, 61 (incisos a y c) y 63 de [6].

28. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Hypergeometric* de Statgraphics, realizar:
   (a) Los ejemplos 3.7.1, 3.7.3, 3.7.4 y 3.7.5 de [6].
   (b) Los ejercicios 65, 67, 69, 73 y 77 (inciso b) de [6].

29. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Negative Binomial* de Statgraphics, realizar:
   (a) El ejemplo 3.8.2 (incisos b y c) de [6].
   (b) Los ejercicios 80 y 84 de [6].

30. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Geometric* de Statgraphics, realizar:
   (a) El ejemplo 3.8.6 (incisos a,b) de [6].
   (b) Los ejercicios 81, 85, 87 y 89 de [6].

31. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Uniform* de Statgraphics, realizar:
   (a) Los ejemplos 4.3.2 y 4.3.3 de [6].
   (b) Los ejercicios 24, 25 (inciso b), 26 y 28 (incisos a y b) de [6].

32. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Normal* de Statgraphics, realizar:
   (a) Los ejemplos 4.4.2, 4.4.4, 4.4.6 y 4.4.7 de [6].
   (b) Los ejercicios 30 (incisos a, b, c y d), 32 (incisos b y c), 35, 36 y 41 (incisos a y b) de [6].

33. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Gamma* de Statgraphics, realizar:
   (a) Los ejemplos 4.5.8 y 4.5.12 de [6].
   (b) Los ejercicios 50, 51, 53 y 55 (inciso c) de [6].

34. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Exponential* de Statgraphics, realizar:
   (a) Los ejemplos 4.5.15 y 4.5.16 de [6].
   (b) Los ejercicios 57, 58, 59 (inciso b), 60, 61 y 63 (inciso b) de [6].

5 Distribuciones conjuntas

5.1 Vectores aleatorios discretos

1. **Vectores aleatorios.**
   Vectores (es decir, tuplas ordenadas), digamos, de la forma $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ cuyas componentes X_1, X_2, ..., X_n son variables aleatorias. Pueden ser discretos, continuos o mixtos.

2. **Vectores aleatorios discretos.**
   Si todas las componentes del vector son discretas.

3. **Función de probabilidad conjunta f de (X, Y).**
   Una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$ tal que

   $$f(x_i, y_k) := P(X = x_i, Y = y_k), \qquad \text{para todo } i, j = 1, 2, \ldots.$$

   Es claro que:

   (a) $f(x_i, y_k) \geq 0$ para todo valor x_i de X y para todo valor y_k de Y.
   (b) $\sum_i \sum_k f(x_i, y_k) = 1$.

4. **Función de distribución acumulada de X.**
   Una función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$ definida por

   $$F(x, y) \;=\; P(X \leq x, Y \leq y) \;=\; \sum_{\substack{x_i \text{ con} \\ x_i \leq x}} \; \sum_{\substack{y_k \text{ con} \\ y_k \leq y}} f(x_i, y_k).$$

   para todo x y y reales.

5. **Función de probabilidad marginal.**

   (a) De la variable X:
   $$f_X(x_i) \;:=\; P(X = x_i) \;=\; \sum_k f(x_i, y_k), \qquad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots.$$

   (b) De la variable Y:
   $$f_Y(y_k) \;:=\; P(Y = y_k) \;=\; \sum_i f(x_i, y_k) \qquad \text{para todo } k = 1, 2, \ldots.$$

6. **Función de dist. acumulada marginal.**

$$F_X(t) := P(X \leq t) := \sum_{x_i \leq t} f_X(x_i), \qquad F_Y(t) := P(Y \leq t) := \sum_{y_k \leq t} f_Y(y_k).$$

7. **Función de probabilidad condicional de Y, dado $X = x$.**

$$h(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \qquad \text{para todo } y \text{ real.}$$

8. **Independencia.**
X y Y independientes $\iff$ $f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$.

9. **Covarianza de X y Y.**
Si X y Y tienen varianza finita, entonces,

$$Cov(X,Y) := E\big([X - E(X)][Y - E(Y)]\big) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

10. **Coeficiente de correlación de X y Y.**
Si X y Y tienen varianza finita y positiva, entonces,

$$Corr(X,Y) := \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}.$$

11. **Propiedades.**

(a) X, Y independientes $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0$. (Recíproco no es cierto)

(b) X, Y independientes $\Rightarrow Corr(X,Y) = 0$. (Recíproco no es cierto)

(c) $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$.

(d) $Corr(X,Y) = 1$ ó $-1 \iff$ existen m, r reales con $m \neq 0$, tales que $Y = mX + r$.

12. **Esperanza y varianza condicional de Y dado que $X = x$.**

$$E(Y/X = x) = \sum_y y\, h(y/x), \qquad V(Y/X = x) = \sum_y \big(y - E(Y/X = x)\big)^2\, h(y/x).$$

13. **Propiedades de la esperanza y de la varianza condicional**.

(a) E(Y) = E(E(Y/X)).

(b) $V(Y/X) = E\big(\big[Y - E(Y/X)\big]^2\big) = E(Y^2/X) - \big[E(Y/X)\big]^2$.

(c) $E\big(V(Y/X)\big) = E(Y^2) - E\big([E(Y/X)]^2\big)$.

(d) $V\big(E(Y/X)\big) = E\big([E(Y/X)]^2\big) - [E(Y)]^2$.

(e) $V(Y) = E\big(V(Y/X)\big) - V\big(E(Y/X)\big)$.

5.2 Vectores aleatorios continuos

1. **Vector aleatorio.**
   Vectores (es decir, tuplas ordenadas), digamos, de la forma $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ cuyas componentes X_1, X_2, …, X_n son variables aleatorias. Pueden ser discretos, continuos o mixtos.

2. **Vectores aleatorios continuos.**
   Si todas las componentes del vector son continuas.

3. **Función de densidad conjunta f de (X, Y).**
   Una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, \infty)$ que cumple las dos condiciones:

   (a) $P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy$.

   (b) El volumen bajo toda la superficie de f es 1, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$.

4. **Función de distribución acumulada de X.**
   Una función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1]$ definida por

$$F(s, t) = P(X \le s, Y \le t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{s} f(x, y)\, dx\, dy,$$

   para todo s y t reales.

5. **Función de densidad marginal.**

   (a) De la variable X:

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy, \quad \text{para todo } x \text{ real.}$$

   (b) De la variable Y:

$$f_Y(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx, \quad \text{para todo } y \text{ real.}$$

6. **Función de dist. acumulada marginal.**

$$F_X(t) := P(X \le t) := \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\, dx, \qquad F_Y(t) := P(Y \le t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(y)\, dy.$$

7. **Función de probabilidad condicional de Y, dado $X = x$.**

$$h(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \qquad \text{para todo } y \text{ real.}$$

8. **Independencia.**
   Igual que en el caso discreto.

9. **Covarianza de X y Y.**
   Igual que en el caso discreto.

10. **Coeficiente de correlación de X y Y.**
    Igual que en el caso discreto.

11. **Propiedades.**
    Igual que en el caso discreto.

12. **Esperanza y varianza condicional de Y dado que $X = x$.**

$$E(Y/X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, h(y/x)\, dy, \qquad V(Y/X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - E(Y/X=x)\right)^2 h(y/x)\, dy.$$

13. **Propiedades de la esperanza y de la varianza condicional**.
    Las mismas que en el caso discreto.

5.3 Ejercicios

1. Un investigador sospecha que en cierto país, el número diario de cigarrillos que fuman los estudiantes durante la semana de exámenes finales (variable X) puede depender del número de exámenes que el estudiante debe realizar en el día (variable Y). La tabla de abajo muestra las probabilidades conjuntas estimadas en un estudio:

$f(x,y)$	$Y=0$	1	2	3
$X=0$	0,09	0,07	0,01	0,06
1	0,06	0,01	0,07	0,07
2	0,14	0,03	0,06	0,07
3	0, 04	0,04	0,04	0,14

   (a) Halle la función de probabilidad marginal de X y la de Y.

   (b) ¿Cuál es la probabilidad que un estudiante seleccionado al azar fume por lo menos 2 cigarrillos y tenga que hacer 3 exámenes en un día?

2. Un agente inmobiliario está interesado en averiguar cuál es la relación entre el número de líneas de un anuncio en prensa sobre un apartamento y el volumen de demanda de información por parte de posibles inquilinos. Representemos el volumen de demanda mediante la variable aleatoria X, que toma el valor 0 si despierta poco interés, 1 para un interés moderado, y 2 si despierta un fuerte interés. Sea Y la variable aleatoria que representa al número de líneas del anuncio. El agente estima que la función de probabilidad conjunta es la que aparece en la tabla de abajo.

$f(x,y)$	$Y=3$	4	5
$X=0$	0,08	0,07	0,04
1	0,13	0,22	0,10
2	0,10	0,15	0,11

   (a) Si F es la función acumulada conjunta de X y Y, halle $F(1,4)$ e interprete el resultado.

   (b) Halle la función de probabilidad marginal de Y y, con ello, halle la probabilidad de que $Y = 5$.

3. Una vinatería cuenta con instalaciones para atender a clientes que llegan en automóvil y a quienes llegan caminando. En un día seleccionado aleatoriamente, sean X y Y, respectivamente, los períodos de tiempo que se utilizan para cada caso. La función de densidad conjunta de X y Y es

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{3}(x+2y), & \text{si } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{de otro modo.}\end{cases}$$

   (a) Verifique si f satisface las propiedades de una función de densidad conjunta.

   (b) Halle la función de densidad marginal de X y y la de Y.

4. Un centro de servicios trabaja con dos líneas. En un día seleccionado al azar, sean X y Y las respectivas proporciones de tiempo de que la primera y segunda líneas estén en uso. Suponga que X y Y tienen función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases}\frac{3}{2}(x^2+y^2), & \text{si } 0\le x\le 1 \text{ y } 0\le y\le 1.\\ 0, & \text{de otro modo.}\end{cases}$$

   (a) Determine la probabilidad de que ninguna línea esté ocupada más de la mitad del tiempo.

   (b) Calcule la probabilidad de que la primera línea esté ocupada más del 65 % del tiempo.

5. Sean X y Y dos variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases}k(6-x-y), & \text{si } 0<x<2 \text{ y } 2<y<4,\\ 0, & \text{de otro modo.}\end{cases}$$

   Halle el valor de k y encuentre $P(1<Y<3/X=2)$.

6. La tabla siguiente muestra, para los poseedores de entre una y tres tarjetas de crédito, las probabilidades conjuntas del número de tarjetas de que dispone (variable X) y el número de compras a crédito realizadas durante una semana (variable Y).

$f(x,y)$	$Y=0$	1	2	3	4
$Y=1$	0,03	0,07	0,04	0,06	0,10
2	0,08	0,03	0,09	0,07	0,08
3	0,13	0,02	0,07	0,08	0,05

   (a) Para una persona elegida aleatoriamente de este grupo, ¿cuál es la función de probabilidad del número de compras semanales?

   (b) Para una persona de este grupo que posea tres tarjetas, ¿cuál es la función de probabilidad del número de compras semanales?

   (c) ¿Son estadísticamente independientes el número de tarjetas disponibles y el número de compras realizadas?

7. Sea X el tiempo de reacción (en segundos) de un producto a cierto estimulante y Y la temperatura, en grados celsius, a la que la reacción comienza a suceder. Estas dos variables aleatorias tienen la función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases}kxy, & \text{si } 0<x<1 \text{ y } 0<y<1.\\ 0, & \text{de otro modo,}\end{cases}$$

   (a) Halle el valor de k.

   (b) Encuentre la densidad marginal de X y la de Y.

(c) Encuentre la función de distribución acumulada de Y.

(d) Encuentre la probabilidad de que la pieza 2 tenga una duración de vida entre 0,5 y 3 años.

(e) ¿Son X y Y son independientes?

8. María y Josefa, dos distinguidas profesoras entregan sus exámenes finales a la secretaria de matemáticas para que sean pasados al computador. Sea X = número de errores en la escritura del examen de la profesora María y Y el número de errores en el de la profesora Josefa. Suponga que X y Y son independientes y que cada una tiene distribución de Poisson con parámetro 2.

   (a) ¿Cuál es la función de probabilidad conjunta de X y Y?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo se cometa en total un error en ambos exámenes?

9. Una persona tiene dos baterías para un reloj en particular. Sean X y Y las variables aleatorias que representan a las duración de la primera y segunda baterías, respectivamente (ambas en horas). Además, X y Y son independientes y cada una tiene una distribución exponencial con parámetro 1.

   (a) ¿Cuál es la función de probabilidad conjunta de X y Y?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que cada batería dure a lo sumo 20 horas?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad que la duración total de las dos baterías sea a lo sumo 30 horas?

   (d) ¿Cuál es la probabilidad que la duración total de las dos baterías esté entre 20 y 30 horas?

10. Sean X y Y variables aleatorias que denotan las longitudes de dos dimensiones de una pieza maquinada, respectivamente. Si X y Y son independientes y, además, la distribución de X es normal con media 10,5 milímetros y varianza 0,0025 milímetros cuadrados, y la distribución de Y es normal con media 3,2 milímetros y varianza 0,0036 milímetros cuadrados, determine la probabilidad de que (a) $10,4 < X < 10,6$, (b) $3,15 < Y < 3,25$.

11. Sea X el número de veces en que cierta secretaria se levanta de su puesto para ir al baño: 1, 2 ó 3 veces en una hora dada. Sea Y el número de veces en que el jefe le llama la atención a la secretaria. Supongamos que la función de probabilidad conjunta de X y Y está dada por

$f(x,y)$	$X=1$	2	3
Y=1	0,01	0,09	0,05
2	0,10	0,06	0,18
3	0,07	0,10	0,34

   (a) Encuentre la función de probabilidad marginal de X y la de Y.

   (b) ¿Son X y Y independientes?

   (c) Encuentre $P(Y = 2/X = 3)$ e interprete su valor.

   (d) Encuentre la covarianza de las variables X y Y.

12. Una profesora ha realizado un examen parcial que tiene dos partes. Para un estudiante seleccionado al azar, sea X el número de puntos ganados en la primera parte, Y el número de puntos ganados en la segunda parte y suponga que la función de probabilidad conjunta de X y Y está dada por

$f(x,y)$	$Y=0$	1,0	2,0	2,5
$X=0$	0,06	0,02	0,04	0,02
1,5	0,15	0,10	0,01	0,20
2,5	0,14	0,01	0,10	0,15

(a) Si la nota final del examen parcial es el número total de puntos ganado en las dos partes, ¿cuál es la nota final esperada por el estudiante?

(b) Si se registra el máximo de las dos calificaciones, ¿cuál es la nota final esperada por el estudiante?

(c) Calcule la covarianza y el coeficiente de correlación para X y Y.

13. De una caja que contiene 3 focos rojos y 4 focos amarillos se selecciona una muestra aleatoria de 2 focos sin reemplazo y al mismo tiempo. Si X es el número de focos rojos y Y el de focos amarillos en la muestra, encuentre:

    (a) La función de distribución conjunta de X y Y.

    (b) $P(X+Y \leq 1)$ e interprete este valor.

    (c) La función de probabilidad condicional de Y, sabiendo que $X=2$.

    (d) La probabilidad de que $Y=0$, sabiendo que $X=2$.

    (e) Encuentre la covarianza de las variables X y Y.

14. Si X y Y son variables aleatorias independientes con densidades marginales

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{3x^3}, & \text{si } 1 < x < 2. \\ 0, & \text{de otro modo,} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2y}{3}, & \text{si } 1 < y < 2. \\ 0, & \text{de otro modo,} \end{cases}$$

respectivamente, encuentre el coeficiente de correlación de X.

15. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions* de Statgraphics, realizar los ejercicios 8 (inciso b), 9 (incisos b, c y d) y 10.

16. Suponga que X_1, X_2 y X_3 son variables aleatorias representan el espesor (en milésimas de milímetro) de un sustrato, una capa activa y una capa de recubrimiento de un producto químico. Suponga que X_1, X_2 y X_3 son independientes y que tienen una distribución normal con medias $\mu_1 = 10{,}000$, $\mu_2 = 1{,}000$, $\mu_3 = 80$ y desviaciones estándar $\sigma_1 = 250$, $\sigma_2 = 20$ y $\sigma_3 = 4$, respectivamente. Las especificaciones para el espesor del sustrato, la capa activa y la capa de recubrimiento deben estar son $9{,}200 < x_1 < 10{,}800$, $950 < x_2 < 1{,}050$ y $75 < x_3 < 85$, respectivamente.

    (a) Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions* de Statgraphics, determine qué proporción de los productos químicos cumple con todas las especificaciones.

    (b) ¿Cuál de los tres espesores es el que tiene la menor probabilidad de cumplir con las especificaciones?

17. Cierta fábrica manufacturera tiene tres departamentos de producción independientes (y sólo tres). Las toneladas de producto obtenidas en un día determinado en el primer departamento siguen una distribución gamma de parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, las obtenidas en el segundo departamento siguen una gamma con $\alpha = 3$ y $\beta = 1$ las obtenidas en el tercer departamento siguen una gamma con $\alpha = 4$ y $\beta = 1$. Utilice la opción *Plot…Probability Distributions* de Statgraphics para calcular la probabilidad de que la fábrica produzca en un día determinado más de 4 toneladas de producto en total.

A Apéndice de tablas

1. Distribución binomial

Las tablas (a)-(e) muestran la probabilidad $P(X \leq k) = B(k; n, p)$ de que ocurran máximo k éxitos en n ensayos independientes, cada uno con probabilidad de éxito p.

Estas probabilidades se calculan para $n = 5$, 10, 15, 20 y 25, respectivamente.

(a) Tabla binomial para $n = 5$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,774	0,590	0,328	0,237	0,168	0,078	0,031	0,010	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,977	0,919	0,737	0,633	0,528	0,337	0,188	0,087	0,031	0,016	0,007	0,000	0,000
2	0,999	0,991	0,942	0,896	0,837	0,683	0,500	0,317	0,163	0,104	0,058	0,009	0,001
3	1,000	1,000	0,993	0,984	0,969	0,913	0,812	0,663	0,472	0,367	0,263	0,081	0,023
4	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,990	0,969	0,922	0,832	0,763	0,672	0,410	0,226
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

(b) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 10$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,599	0,349	0,107	0,056	0,028	0,006	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,914	0,736	0,376	0,244	0,149	0,046	0,011	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,988	0,930	0,678	0,526	0,383	0,167	0,055	0,012	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,999	0,987	0,879	0,776	0,650	0,382	0,172	0,055	0,011	0,004	0,001	0,000	0,000
4	1,000	0,998	0,967	0,922	0,850	0,633	0,377	0,166	0,047	0,020	0,006	0,000	0,000
5	1,000	1,000	0,994	0,980	0,953	0,834	0,623	0,367	0,150	0,078	0,033	0,002	0,000
6	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,945	0,828	0,618	0,350	0,224	0,121	0,013	0,001
7	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,988	0,945	0,833	0,617	0,474	0,322	0,070	0,012
8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,989	0,954	0,851	0,756	0,624	0,264	0,086
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,972	0,944	0,893	0,651	0,401

(c) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 15$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,463	0,206	0,305	0,013	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,829	0,549	0,167	0,080	0,035	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,964	0,816	0,398	0,236	0,127	0,027	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,995	0,944	0,648	0,461	0,297	0,091	0,018	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,999	0,987	0,836	0,686	0,515	0,217	0,059	0,009	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
5	1,000	0,998	0,939	0,852	0,722	0,403	0,151	0,034	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000
6	1,000	1,000	0,982	0,943	0,869	0,610	0,304	0,095	0,015	0,004	0,001	0,000	0,000
7	1,000	1,000	0,996	0,983	0,950	0,787	0,500	0,213	0,050	0,017	0,004	0,000	0,000
8	1,000	1,000	0,999	0,996	0,985	0,905	0,696	0,390	0,131	0,057	0,018	0,000	0,000
9	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,966	0,849	0,597	0,278	0,148	0,061	0,002	0,000
10	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,991	0,941	0,783	0,485	0,314	0,164	0,013	0,000
11	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,982	0,909	0,703	0,539	0,352	0,056	0,005
12	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,973	0,873	0,764	0,602	0,184	0,036
13	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,995	0,965	0,920	0,833	0,451	0,171
14	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,995	0,987	0,965	0,794	0,537

(d) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 20$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,358	0,122	0,012	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,736	0,392	0,069	0,024	0,008	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,925	0,677	0,206	0,091	0,035	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,984	0,867	0,411	0,225	0,107	0,016	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,997	0,957	0,630	0,415	0,238	0,051	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	1,000	0,989	0,804	0,617	0,416	0,126	0,021	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	1,000	0,998	0,913	0,786	0,608	0,250	0,058	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	1,000	1,000	0,968	0,898	0,772	0,416	0,132	0,021	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
8	1,000	1,000	0,990	0,959	0,887	0,596	0,252	0,057	0,005	0,001	0,000	0,000	0,000
9	1,000	1,000	0,997	0,986	0,952	0,755	0,412	0,128	0,017	0,004	0,001	0,000	0,000
10	1,000	1,000	0,999	0,996	0,983	0,872	0,588	0,245	0,048	0,014	0,003	0,000	0,000
11	1,000	1,000	1,000	0,999	0,995	0,943	0,748	0,404	0,113	0,041	0,010	0,000	0,000
12	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,979	0,868	0,584	0,228	0,102	0,032	0,000	0,000
13	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,942	0,750	0,392	0,214	0,087	0,002	0,000
14	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,979	0,874	0,584	0,383	0,196	0,011	0,000
15	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,949	0,762	0,585	0,370	0,043	0,003
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,984	0,893	0,775	0,589	0,133	0,016
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,965	0,909	0,794	0,323	0,075
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,992	0,976	0,931	0,608	0,264
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,988	0,878	0,642

(e) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 25$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,277	0,072	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,642	0,271	0,027	0,007	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,873	0,537	0,098	0,032	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,966	0,764	0,234	0,096	0,033	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,993	0,902	0,421	0,214	0,090	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,999	0,967	0,617	0,378	0,193	0,029	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	1,000	0,991	0,780	0,561	0,341	0,074	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	1,000	0,998	0,891	0,727	0,512	0,154	0,022	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	1,000	1,000	0,953	0,851	0,677	0,274	0,054	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	1,000	1,000	0,983	0,929	0,811	0,425	0,115	0,013	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	1,000	1,000	0,994	0,970	0,902	0,586	0,212	0,034	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
11	1,000	1,000	0,998	0,980	0,956	0,732	0,345	0,078	0,006	0,001	0,000	0,000	0,000
12	1,000	1,000	1,000	0,997	0,983	0,846	0,500	0,154	0,017	0,003	0,000	0,000	0,000
13	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,922	0,655	0,268	0,044	0,020	0,002	0,000	0,000
14	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,966	0,788	0,414	0,098	0,030	0,006	0,000	0,000
15	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,987	0,885	0,575	0,189	0,071	0,017	0,000	0,000
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,946	0,726	0,323	0,149	0,047	0,000	0,000
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,978	0,846	0,488	0,273	0,109	0,002	0,000
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,993	0,926	0,659	0,439	0,220	0,009	0,000
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,971	0,807	0,622	0,383	0,033	0,001
20	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,991	0,910	0,786	0,579	0,098	0,007
21	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,967	0,904	0,766	0,236	0,034
22	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,991	0,968	0,902	0,463	0,127
23	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,993	0,973	0,729	0,358
24	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,928	0,723

2. Distribución de Poisson

La tabla muestra la probabilidad $P(X \leq k; \lambda)$ para algunos valores λ.

	$\lambda = 0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$k = 0$	0,905	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407	0,368
1	0,995	0,982	0,963	0,938	0,910	0,878	0,844	0,809	0,772	0,736
2	1,000	0,999	0,996	0,992	0,986	0,977	0,966	0,953	0,937	0,920
3	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,994	0,991	0,987	0,981
4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,996
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

	$\lambda = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$k = 0$	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,406	0,199	0,092	0,040	0,017	0,007	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000
2	0,677	0,423	0,238	0,125	0,062	0,030	0,014	0,006	0,003	0,000	0,000
3	0,857	0,647	0,433	0,265	0,151	0,082	0,042	0,021	0,010	0,000	0,000
4	0,947	0,815	0,629	0,440	0,285	0,173	0,100	0,055	0,029	0,001	0,000
5	0,983	0,916	0,785	0,616	0,446	0,301	0,191	0,116	0,067	0,003	0,000
6	0,995	0,966	0,889	0,762	0,606	0,450	0,313	0,207	0,130	0,008	0,000
7	0,999	0,988	0,949	0,867	0,744	0,599	0,453	0,324	0,220	0,018	0,001
8	1,000	0,996	0,979	0,932	0,847	0,729	0,593	0,456	0,333	0,037	0,002
9	1,000	0,999	0,992	0,968	0,916	0,830	0,717	0,587	0,458	0,070	0,005
10	1,000	1,000	0,997	0,986	0,957	0,901	0,816	0,706	0,583	0,118	0,011
11	1,000	1,000	0,999	0,995	0,980	0,947	0,888	0,803	0,697	0,185	0,021
12	1,000	1,000	1,000	0,998	0,991	0,973	0,936	0,876	0,792	0,268	0,039
13	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,987	0,966	0,926	0,864	0,363	0,066
14	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,983	0,959	0,917	0,466	0,105
15	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,992	0,978	0,951	0,568	0,157
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,973	0,664	0,221
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,995	0,986	0,749	0,297
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,993	0,819	0,381
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,875	0,470
20	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,917	0,559
21	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,947	0,644
22	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,967	0,721
23	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,981	0,787
24	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,989	0,843
25	1,000	1,000	1,000	0,994	0,970	0,902	0,586	0,212	0,034	0,994	0,888
26	1,000	1,000	1,000	0,998	0,980	0,956	0,732	0,345	0,078	0,997	0,922
27	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997	0,983	0,846	0,500	0,154	0,998	0,948
28	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,922	0,655	0,268	0,999	0,966
29	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,966	0,788	0,414	1,000	0,978
30	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,987	0,885	0,575	1,000	0,987
31	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,946	0,726	1,000	0,992
32	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,978	0,846	1,000	0,995
33	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,993	0,926	1,000	0,997
34	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,971	1,000	0,999
35	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,991	1,000	0,999
36	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	1,000	1,000

3.Distribución normal estándar

La tabla muestra la probabilidad $P(Z \leq z)$.

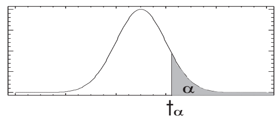
(a) Áreas para valores negativos de Z

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3.1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4009	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

(b) Áreas para valores positivos de Z

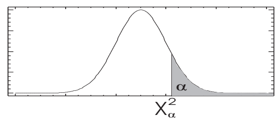
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9278	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9948	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9961	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9971	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

4. Distribución t de Student



	α						
ν	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,620
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,326	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,213	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1.833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,795
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
38	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,496
60	1,296	1.671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	1,282	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
$\infty(=z)$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

5. Distribución chi-cuadrada

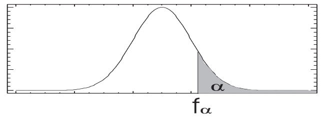


	α									
v	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,50
1	0,000	0,000	0,000	0,001	0,00393	0,0158	0,0642	0,102	0,148	0,4550
2	0,010	0,0201	0,0404	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,575	0,713	1,386
3	0,0717	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	1,213	1,424	2,366
4	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	1,923	2,195	3,357
5	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	2,675	3,000	4,351
6	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	3,455	3,828	5,348
7	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	4,255	4,671	6,346
8	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	5,071	5,527	7,344
9	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	5,899	6,393	8,343
10	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	6,737	7,267	9,342
11	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	7,584	8,148	10,341
12	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	8,438	9,034	11,340
13	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	9,299	9,926	12,340
14	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	10,165	10,821	13,339
15	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	11,036	11,721	14,339
16	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	11,912	12,624	15,338
17	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	12,792	13,531	16,338
18	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	14,562	15,352	18,338
19	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	14,562	15,352	18,338
20	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	14,578	15,452	16,266	19,337
21	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	16,344	17,182	20,337
22	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	17,240	18,101	21,337
23	9,260	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848	17,187	18,137	19,021	22,337
24	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	19,037	19,943	23,337
25	10,520	11,524	12,692	13,120	14,611	16,473	18,940	19,939	20,867	24,337
26	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	20,843	21,792	25,336
27	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	21,749	22,719	26,336
28	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	21,588	22,657	23,647	27,336
29	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	23,567	24,577	28,336
30	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	24,478	25,508	29,336
31	14,457	15,655	17,042	17,538	19,280	21,433	24,255	25,390	26,440	30,336
32	15,134	16,362	17,783	18,291	20,072	22,271	25,148	26,304	27,373	31,336
33	15,815	17,073	18,527	19,046	20,866	23,110	26,042	27,219	28,307	32,336
34	16,501	17,789	19,275	19,806	21,664	23,952	26,938	28,136	29,242	33,336
35	17,191	18,508	20,027	20,569	22,465	24,796	27,836	29,054	30,178	34,336
36	17,887	19,233	20,783	21,336	23,269	25,643	28,735	29,973	31,115	35,336
37	18,584	19,960	21,542	22,105	24,075	26,492	29,636	30,893	32,053	36,336
38	19,289	20,691	22,304	22,878	24,884	27,343	30,537	31,815	32,992	37,336
39	19,994	21,425	23,069	23,654	25695	28,196	31,441	32,737	33,932	38,335
40	20,706	22,164	23,838	24,433	26,509	29,050	32,345	33,660	34,872	39,335

Valores críticos $\chi^2_\alpha(\nu)$ (continuación)

	α									
ν	0,30	0,25	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
1	1,074	1,323	1,642	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	10,827
2	2,408	2,773	3,219	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	13,815
3	3,665	4,108	4,642	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	16,268
4	4,878	5,385	5,989	5,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860	18,465
5	6,064	6,626	7,289	9,236	11,070	12,832	13,388	15,086	16,750	20,517
6	7,231	7,841	8,558	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	22,457
7	8,383	9,037	9,803	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322
8	9,524	10,219	11,030	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	26,125
9	10,656	11,389	12,242	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	27,877
10	11,781	12,549	13,442	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	29,588
11	12,899	13,701	14,631	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	31,264
12	14,011	14,845	15,812	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	32,909
13	15,119	15,984	16,985	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	34,528
14	16,222	17,117	18,151	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	36,123
15	17,322	18,245	19,311	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	37,697
16	18,418	19,369	20,465	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267	39,252
17	19,511	20,489	21,615	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	40,790
18	20,601	21,605	22,760	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156	42,312
19	21,689	22,718	23,900	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582	43,820
20	22,775	23,828	25,038	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997	45,315
21	23,858	24,935	26,171	29,615	32,671	35,479	36343	38,932	41,401	46,797
22	24,939	26,039	27,301	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	48,268
23	26,018	27,141	28,429	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	49,728
24	27,096	28,241	29,553	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,558	51,179
25	28,172	29,339	30,675	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928	52,620
26	29,246	30,434	31,795	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	54,052
27	30,319	31,528	32,912	36,741	40,113	43,194	44,140	46,963	49,645	55,476
28	31,391	32,620	34,027	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993	56,893
29	32,461	33,711	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	58,302
30	33,530	34,800	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672	59,703
31	34,598	35,887	37,359	41,422	44,985	48,231	49,226	52,190	55,003	61,098
32	35,665	36,973	38,466	42,585	46,194	49,480	50,487	53,486	56,328	62,487
33	36,731	38,058	39,572	43,745	47,400	50,724	51,743	54,774	57,646	63,870
34	37,795	39,141	40,676	44,903	48,602	51,966	52,995	56,061	58,964	65,247
35	38,859	40,223	41,778	46,059	49,802	53,203	54,244	57,340	60,272	66,619
36	39,922	41,304	42,879	47,212	50,998	54,437	55,489	58,619	61,581	67,985
37	40,984	42,383	43,978	48,363	52,192	55,667	56,731	59,891	62,880	69,346
38	42,045	43,462	45,076	49,513	53,384	56,896	57,969	61,162	64,181	70,703
39	43,105	44,540	46,173	50,660	54,572	58,119	59,204	62,426	65,473	72,055
40	44,165	45,616	47,269	51,805	55,758	59,342	60,436	63,691	66,766	73,402

6. Distribución F de Fisher



(a) Valores críticos $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ para $\alpha = 0,05$

	ν_1								
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

(b) Valores críticos $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ para $\alpha = 0,05$

	ν_1									
ν_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	4,06	4,00	3,94	3,87	384	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

(c) Valores críticos $F_\alpha(v_1, v_2)$ para $\alpha = 0,01$

	v_1								
v_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41

(d) Valores críticos $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ para $\alpha = 0,01$

	ν_1									
ν_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

7. Algunas distribuciones discretas

NOMBRE	FUNCIÓN	PARÁMETROS	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme	$f(x_k)=\frac{1}{n}$, $k=1,2,\dots,n$	$x_i<x_{i+1}$ $n\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-$ $-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2$
De dos puntos	$f(x_1)=p$, $f(x_2)=1-p$	$x_1<x_2$ $0<p<1$	x_1p+ $+x_2(1-p)$	$(x_1-x_2)^2a$, a=p(1-p)
Bernoulli	$f(0)=p$, $f(1)=1-p$	p	p	$p(1-p)$
Binomial	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\dots,n$	$0<p<1$ $n\in\mathbb{N}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$f(k)=\frac{1}{k!}e^{-\lambda}\lambda^k$ $k=0,1,2,3,\dots$	$\lambda>0$	λ	λ
Hiper-geomé-trica	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $k\in\mathbb{N}_0$, $k\le n$, $k\le M$	$M\in\mathbb{N}_0$, $n,N\in\mathbb{N}$ $n\le M\le N$	$n\cdot\frac{M}{N}$	$na\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ $p=\frac{M}{N}$ $a=p(1-p)$
Binomial negativa	$\binom{k+r-1}{r-1}p^r(1-p)^k$ $k=0,1,2,\dots$	$r>0$, $0<p<1$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Geomé-trica	$f(k)=p(1-p)^k$ $k=0,1,2,\dots$	$0<p<1$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

8. Algunas distribuciones continuas

NOMBRE	FUNCIÓN	PARÁMETROS	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme	$f(x)=\frac{1}{b-a}$, $a<x<b$	$a<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
Normal	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}},e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x\in\mathbb{R}$	$\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2>0$	μ	σ^2
Normal estándar	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$		0	1
Gamma	$f(x)=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}$, $x>0$	$\alpha>0$, $\beta>0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
Exponencial	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$	$\lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
t de Student	$f(x)=a_n\left(1+nx^2\right)^{-(n+1)/2}$, $a_n:=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}}$, $x\in\mathbb{R}$	$n\in\mathbb{N}$	0, $n\ge2$	$\frac{n}{n-2}$, $n\ge3$
Chi-cuadrada	$\frac{1}{a_n}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-x/2}$, $a_n:=2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, $x>0$	$n>0$	n	$2n$
F de Fisher	$f(x)=\frac{a_n x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{(m+n)/2}}$ $a_n:=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)m^{m/2}n^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, $x>0$	$m,n\in\mathbb{N}$	$\frac{n}{n-2}$, $n\ge3$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$, $n\ge5$
Erlang	$\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda e^{-\lambda x}$	$k\in\mathbb{N}$, $\lambda>0$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$, $x>0$

9. Resumen de distribuciones muestrales e intervalos de confianza

Cuadro A.1: Distribución de la media muestral

	¿FORMA DE LA POBLACIÓN?	¿ES σ^2 CONOCIDA?	¿TAMAÑO DE LA MUESTRA?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿Z Ó t?
1.	Normal	Sí	No importa	Normal	$Z = \frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
2.		No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$Z = \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
3.			Pequeño ($n < 30$)	t de Student, $\nu = n-1$ grados de libertad	$t = \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
4.	No normal o desconocida	Sí	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$Z = \frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
5.			Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	
6.		No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$Z = \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
7.			Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	

Cuadro A.2: Distribución relacionadas con proporciones

	¿ESTADÍSTICO?	¿SUPUESTO?	¿DIST. MUESTRAL	¿Z?
1.	Proporción muestral	$n \geq 30$	Normal	$Z = \frac{\overline{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$
2.		$np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$	Normal	
3.	Diferencia de proporciones muestrales	$n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	Normal	$Z = \frac{(\overline{p}_1-\overline{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$
4.		$n_1 p_1 \geq 5$, $n_1(1-p_1) \geq 5$, $n_2 p_2 \geq 5$, $n_2(1-p_2) \geq 5$	Normal	

Cuadro A.3: Distribución de la diferencias de medias muestrales

X representa la población y para las dos últimas posibilidades de la tabla:

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}, \quad \nu' = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

	¿X?	¿σ_1^2 y σ_2^2 SE CONOCEN?	¿$\sigma_1^2=\sigma_2^2$?	¿n_1 y n_2?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿Z Ó t? $d := \overline{x}_1-\overline{x}_2$, $\mu := \mu_1-\mu_2$
1.	No normal	Sí	No importa	Grandes $n_1\geq 30$, $n_2\geq 30$	Normal	$Z=\frac{d-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
2.		No	No importa	Grandes $n_1\geq 30$, $n_2\geq 30$	Normal	$Z=\frac{d-\mu}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$
3.	Normal	Sí		No importa	Normal	$Z=\frac{d-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
4.		No	Sí	Pequeño $n_1<30$, $n_2<30$	t de Student con $\nu=n_1+n_2-2$ grados de libertad	$t=\frac{d-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1}+\frac{s^2}{n_2}}}$
5.			No	Pequeño $n_1<30$, $n_2<30$	t de Student con ν' grados de libertad (redondear al entero más cercano)	$t=\frac{d-\mu}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$

Cuadro A.4: Distribución de la varianza muestral y de la razón de varianzas muestrales

	ESTADISTÍCO	¿POBLACIÓN?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿χ^2 Ó F?
1.	s^2	Normal	Chi-cuadrada con $\nu=n-1$ grados de libertad	$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$
2.	s_1^2/s_2^2	Ambas normales	F de Fisher con $\nu_1=n_1-1$, $\nu_2=n_2-1$ grados de libertad	$F=\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$ Regla: $F_{1-\alpha}(a,b)=\frac{1}{F_\alpha(b,a)}$

Cuadro A.5: Intervalos de confianza para la media poblacional

	¿POBLACIÓN?	¿σ^2 CONOCIDA?	¿TAMAÑO MUESTRAL?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿INTERVALO? $\overline{x}-b<\mu<\overline{x}+b$, con:
1.	Normal	Sí	No importa	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
2.		No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}$
3.			Pequeño ($n < 30$)	t de Student, $\nu = n-1$ grados de libertad	$b := t_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}$
4.	No normal o desconocida	Sí	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
5.			Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	
6.		No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}$
7.			Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	

Cuadro A.6: Intervalos para la proporción y para la diferencia de proporciones

	¿ESTADÍSTICO?	¿SUPUESTOS?	¿DISTR. MUESTRAL?	¿INTERVALO DE CONFIANZA? $\overline{p}-b<p<\overline{p}+b$, con:
1.	Proporción muestral	$n \geq 30$	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$
2.		$np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$	Normal	
3.	Diferencia de proporciones muestrales	$n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	Normal	$\overline{p} := \overline{p}_1 - \overline{p}_2$ $b := Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}_1(1-\overline{p}_1)}{n_1}+\frac{\overline{p}_2(1-\overline{p}_2)}{n_2}}$
4.		$n_1 p_1 \geq 5$, $n_1(1-p_1) \geq 5$, $n_2 p_2 \geq 5$, $n_2(1-p_2) \geq 5$	Normal	

Cuadro A.7: Intervalos para la varianza y para la razón de varianzas

		¿POBLACIÓN?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿INTERVALO DE CONFIANZA?
1.	s^2	Normal	Chi-cuadrada con $\nu = n-1$ grados de libertad	$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$
2.	s_1^2/s_2^2	Ambas normales	F de Fisher con $\nu_1 = n_1-1$, $\nu_2 = n_2-1$ grados de libertad	$\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_2,\nu_1)$ Regla: $F_{1-\alpha}(a,b) = \frac{1}{F_\alpha(b,a)}$

Cuadro A.8: Intervalos de confianza para la diferencias de medias poblacionales

X representa la población y para las dos últimas posibilidades de la tabla:

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}, \quad v' = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

	¿X?	¿σ_1^2 y σ_2^2 SE CONOCEN?	¿$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$?	¿n_1 y n_2?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿INTERVALO? $d-b<\theta<d+b$, donde $d := \overline{x}_1 - \overline{x}_2$ $\theta := \mu_1 - \mu_2$ y:
1.	No normal	Sí	No importa	Grandes ($n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$)	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
2.		No	No importa	Grandes ($n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$)	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
3.	Normal	Sí	No importa	No importa	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
4.		No	Sí	Pequeño ($n_1 < 30$, $n_2 < 30$)	t de Student con $v = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad	$b := t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}$
5.			No	Pequeño ($n_1 < 30$, $n_2 < 30$)	t de Student con v' grados de libertad (redondear al en- (tero más cercano)	$b := t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

B Guía rápida para trabajar con Statgraphics

B.1 Análisis de un solo conjunto de datos

1. Abrir el archivo de datos **calles.sf3**.
2. Seleccionamos *Describe* … *Numeric Data* … *One-Variable Analysis*.
3. Elegimos *Data* = *Longitud* y pulsamos la opción *OK*.
4. Sale la llamada *ventana del análisis*. Los íconos principales de esta ventana son:
   - *Input dialog* (*ícono de diálogos*): para seleccionar o cambiar variables dentro del archivo y análisis seleccionado.
   - *Tabular options* (*ícono de opciones tabulares*): medidas estadísticas, percentiles, tablas de frecuencia, inferencias, etc.
   - *Graphical options* (*ícono de opciones gráficas*): diagramas de dispersión, histogramas, etc.
   - *Save results* (*ícono de salvar resultados*): permite salvar los resultados del análisis.
5. Transformación de una variable:[1] *One Variable Analysis*, activar el botón *Transform* y, en *Operators*, elegir *logaritmo*.

B.2 Análisis simultáneo de dos o más conjuntos de datos

1. *Compare* … *Two Samples* … *Two Sample Comparison* …
2. Para obtener diagramas de cajas múltiples: *Compare* … *Multiple Samples* … *Multiple-Sample Comparison* … *Multiple Data Columns* … *Ok* … *Samples*= (en esta última opción mencionar los datos que queremos comparar)
3. Para obtener diagramas de cajas múltiples: *Plot* … *Exploratory Plots* … *Multiple Box-and-Whishker Plot* … *Data=distancia* … *Level codes=year* …

[1] Por ejemplo, si quisiéramos trabajar con el logaritmo de la variable escribimos LOG(**longitud**) en vez de **longitud**.

B.3 Gráficos de dispersión

Con la opción *Plot…Scatterplots* se pueden realizar:

1. Gráficos univariantes (*Univariate Plot*). Por ejemplo, abrir archivo de datos **autos.sf3** y utilizar la variable *mpg*.
2. Gráficos bidimensionales X-Y simples (X-Y *plot*) y múltiples (*Multiple* X-Y *Plot*). Por ejemplo, abrir archivo de datos **autos.sf3** y hacer *Y=mpg* y *X=potencia*. Sobre la gráfica, pulsar botón derecho del ratón y elegir *Pane options*. Aparece una pantalla con varios campos. Elegir *Point Codes=model*.
3. Gráficos tridimensionales X-Y-Z simples (X-Y-Z *plot*) y múltiples (*Multiple* X-Y-Z *Plot*). Por ejemplo, abrir archivo de datos **autos.sf3** y hacer *X=accel*, *Y=cilindro*, *Z=price*. Sobre la zona gráfica: botón derecho, *Pane options*, *Point Codes=origin*.
4. Gráficos de matriz (*Matriz Plot*).
5. Gráficos en coordenadas polares (*Polar Coordinates Plot*).

B.4 Diagramas de presentación

Con la opción *Plot…Business Charts* se pueden realizar (abrir siempre el archivo **autos.sf3**):

1. Gráficos de barras simples (*Barchart*). Por ejemplo, realizar un gráfico de barras para la variable *origin* del archivo **autos.sf3**, que contiene el país de origen de los autos. Los valores de la variable *origin* son 1 para los autos norteamericanos, 2 para autos europeos y 3 para autos japoneses. En esta opción sale, entre otros, el campo *Counts* (Frecuencias) que permite introducir la variable que contiene las frecuencias absolutas de los valores de la variable a graficar. Como las frecuencias absolutas de de los valores de la variable *origin* son: 85 para autos norteamericanos, 26 para autos europeos y 44 para autos japoneses, entonces, por esta razón, debemos escribir en este campo *join3(85;26;44)*. Además, el campo *Labels* (Etiquetas) permite introducir el nombre de la variable que contiene las etiquetas a utilizar para cada barra del gráfico. Como las etiquetas de los valores de la variable *origin* están contenidas *carmakers*, que son *America*, *Europe* y *Japan*, hacemos *Labels=carmakers*.
2. Gráficos de barras múltiples (*Multiple Barchart*). Por ejemplo, realizaremos un gráfico de barras dobles para las variables *origin* y *year* del archivo **autos.sf3**, que contienen el país de origen de los autos y el año de construcción, respectivamente. Los valores de la variable *year* son los intervalos 1978, [1979,1980] y [1981,1982]. Aparecen, entre otros, los siguientes campos:
   - *Columns* (Columnas): En este campo se introducen las variables que contienen las frecuencias absolutas de los valores de las variables a graficar, o una expresión de Statgtraphics que contiene operadores y que genera sus valores. Como las frecuencias absolutas de de los valores de la variable *origin* son: 85 para autos norteamericanos, 26 para autos europeos y 44 para autos japoneses, y como las frecuencias absolutas de los valores de la variable *year* son: 36 para 1978, 58 para [1979,1980] y 61 para [1981,1982], entonces, por esta razón, debemos escribir en este campo *join3(85;26;44)* y *join3(36;58;61)*.
   - *Labels* (Etiquetas): Hacemos *Labels=carmakers*.
3. Gráficos de sectores (*Piechart*). Por ejemplo, realizaremos un gráfico de sectores para la variable *origin* del archivo **autos.sf3**, que contienen el país de origen de los autos y el año de construcción, respectivamente. Los valores de la

variable *origin* son 1 para los autos norteamericanos, 2 para autos europeos y 3 para autos japoneses. Aparecen, entre otros, los siguientes campos:

- *Counts* (Frecuencias): En este campo se introducen las variables que contienen las frecuencias absolutas de los valores de las variables a graficar, o una expresión de Statgtraphics que contiene operadores y que genera sus valores. Como las frecuencias absolutas de de los valores de la variable *origin* son: 85 para autos norteamericanos, 26 para autos europeos y 44 para autos japoneses, entonces, por esta razón, debemos escribir en este campo *join3(85;26;44)*.
- *Labels* (Etiquetas): En este campo se debe introducir el nombre de la variable que contiene las etiquetas a utilizar para cada grupo de barras del gráfico. Como las etiquetas de los valores de la variable *origin* están contenidas *carmakers*, que son *America*, *Europe* y *Japan*, hacemos *Labels=carmakers*.

4. Gráficos de componentes de líneas (*Component Line Chart*)

5. Gráficos de escogencias alta y baja (*High-Low-Chose Chart*).

B.5 Variables numéricas multidimensionales

Seleccione la siguiente secuencia de opciones: *Describe...Numeric Data...Multiple-Variable Analysis* y aparecen todas las variables del archivo. Aparece una ventana de diálogo en cuyo campo *Data* introducimos la variables *origin*, *price* y *year*. Luego, pulsamos el botón OK.

B.6 Distribuciones de probabilidad

Plot ... *Probability Distributions*. Escogemos la distribución deseada. Los valores de los parámetros que definen la distribución (están fijados por defecto por el programa) los podemos modificar si pulsamos el botón derecho del ratón y escogemos la opción *Analysis Options*.

B.7 Inferencias basadas en una sola muestra

1. Se escoge *Describe* ... *Numeric Data* ... *One Variable Analysis*. Elegimos la variable que va a ser objeto del análisis y pulsar *OK*. Al pulsar el ícono *Tabular options* aparecen, entre otros:

   - *Confidence Intervals*.
     Calcula intervalos para la media (*Confidence Interval for Mean*) y la desviación típica (*Confidence Interval for Standard Deviation*) de la distribución. Pulsando el botón derecho del ratón y escogiendo *Pane Options* se puede modificar el nivel de confianza (*Confidence Level*) y el tipo de intervalo (*Interval Type*).
   - *Hypothesis Testing*
     Se realizan los contrastes de la media y de la desviación típica. Pulsando el botón derecho del ratón y escogiendo *Pane options* se pueden modificar el valor del parámetro para la hipótesis nula (por ejemplo *Mean* = μ_0), del nivel de significancia α (*Alpha*) y de la hipótesis alternativa:

2. *Cálculo de la curva de potencia.*
Describe … *Hypothesis Test* … *Normal Mean* y en *Null Hypothesis* se elige el valor de la media bajo la hipótesis nula. En la casilla *Sample Sigma* se escoge el valor de la desviación típica de la población. El tamaño de muestra se fija a través de *Sample Size*. Seleccionando el ícono de gráficos se selecciona la única gráfica posible (curva de potencia - *Power Curve*) y se pulsa *OK*.

B.8 Inferencias basadas en dos muestras

1. Elegir *Compare* … *Two Samples*, en donde aparecen cuatro (4) opciones: *Two Sample Comparison*, *Paired-Sample Comparison*, *Hypotesis Tests*, *Sample-Size Determination*.
2. Cuando seleccionamos *Two Sample Comparison*[2] el programa pide al usuario que especifique las dos columnas de datos a comparar (*Sample 1* y *Sample 2*). Seleccionando *Tabular options* aparece, entre otros:
   - *Comparison of Means*: Intervalo de confianza para la diferencia de medias y contraste de igualdad de medias.
   - *Comparison of Standard Deviations*: Intervalo de confianza para el cociente de varianzas y contraste de igualdad de varianzas.
   - *Kolmogorov-Smirnov Test*: Prueba de hipótesis para saber si las distribuciones de ambas muestras son idénticas.

B.9 Bondad de ajuste

1. Se selecciona *Describe*… *Distribution Fitting*…*Uncensured Data*. Al pulsar *OK* se obtiene, entre otras, la salida de las contrastes de bondad de ajuste.
2. Si, estando situados sobre esta salida, pulsamos el botón derecho del ratón y elegimos la opción *Analysis Options* del menú emergente resultante, obtenemos la caja de diálogo *Probability Distributios Options*, que presenta todas las posibles distribuciones a considerar para el ajuste (observamos que por defecto el ajuste se realiza a una distribución normal).
3. También aparecen los siguientes campos:
   - *Number of Trials* (número de ensayos).
     Se rellena con el número de tiradas cuando la distribución elegida para el ajuste es binomial;
   - *Number of Successes* (número de eventos).
     Se rellena con el número de éxitos cuando la distribución elegida es una binomial negativa.
   - *Population Size* (tamaño de la población).
     Se rellena con el tamaño de la población cuando la distribución elegida es una hipergeométrica.
4. La opción tabular *Tests for Normality*: realiza los contrastes de normalidad.
5. Opción tabular *Goodness-of-Fit Tests*: realiza los contrastes de la bondad de ajuste de los datos a una distribución dada.

[2] El procedimiento es idéntico cuando seleccionamos la opción *Paired-Sample Comparison*

C Guía rápida para trabajar con SPSS

C.1 Definición de las variables

Para definir cada variable hay dos procedimientos:

- Hacer doble clic sobre el encabezamiento de la variable o
- Seleccionar, en la parte inferior, la pestaña *vista de variables*.

Cuando se hace esto, observamos que hay una fila para cada variable del conjunto de datos y que existen 10 columnas: *Nombre*, *Tipo*, *Anchura*, *Decimales*, *Etiqueta*, *Valores*, *Perdidos*, *Columnas*, *Alineación* y *Medida*. La definición de una variable se basa en las opciones que se ofrecen en esa ventana:

1. *Asignar un nombre a cada variable*, cumpliendo las siguientes reglas:
    - Nombres con no más de 8 caracteres (el primero debe ser una letra o @).
    - No utilizar símbolos como &, /, $, etc.
    - No utilizar nunca espacios en blanco.
    - No utilizar expresiones como ALL, AND, BY, EQ, GE, GT, LE, NE, NOT, OR, TO, o WITH.
2. *Asignar un tipo a cada variable*, indicando el máximo número de dígitos que deseamos para anotar las observaciones de la variable y el tipo de la variable con la que vamos a trabajar (*alfanumérica*, *fecha*, *moneda* o *numérica*) indicando en este caso el número de cifras decimales con que queremos que aparezca en el editor. SPSS permite trabajar con los siguientes tipos de variables:
    - *Numéricas*: formato numérico estándar.
    - *Coma*: comas de separación cada tres posiciones. Un punto para la parte decimal.
    - *Punto*: al contrario que el anterior.
    - *Notación Científica*: uso de la E para exponente.
    - *Cadena*: variable alfanumérica (de más de 8 caracteres se considera larga).
    - Además están los formatos de *fecha*, *dólar* y *moneda personalizada*.

Si no escogemos el tipo, el sistema lo asigna automáticamente, siendo el formato por defecto: *Numérica 8.2* que significa: Anchura: 8 y Decimales: 2; es decir, una amplitud de columna de 8 espacios, siendo los 2 últimos para los decimales.

3. *Asignar una Etiqueta a cada variable* de no más de 120 caracteres (entre 30 y 40 es el valor recomendado) que nos permita tener más información sobre esa variable.

4. *Asignar Valores*: se trata de asignar etiquetas a los valores de cada variable. No es obligatorio, pero sí muy útil en algunos casos.

5. *Definir Perdidos*: permite definir los valores de los datos especificados como perdidos por el usuario. Sitúese en el campo correspondiente a *Perdidos* de cualquier variable y pulse sobre el recuadro coloreado, aparece: Los códigos asignados a los valores ausentes deben de ser coherentes con el tipo de variables declarado: numéricos para las numéricas y alfanuméricos para las alfanuméricas (máximo 9 caracteres). Se pueden introducir hasta 3 valores perdidos (individuales) de tipo discreto, un rango de valores perdidos o un rango más un valor de tipo discreto. Sólo pueden especificarse rangos para las variables numéricas. Estos valores ausentes son denominados por SPSS "valores ausentes definidos por el usuario" (*user-defined missing values*), a diferencia de los definidos por el sistema (*system-missing values* o *sysmis*). Estos últimos corresponden a los que establece el sistema para los espacios en blanco y caracteres ilegales que puedan haber en el archivo de datos. Aparecen en los listados representados por comas.

6. *Definir Columnas*: consiste en especificar la amplitud de la columna. Podemos hacerlo también desde el propio archivo de datos.

7. *Definir Alineación*: seleccionar la justificación de las entradas de la columna: *Izquierda*, *Derecha* y *Centrado*.

8. *Especificar medida*. Se puede seleccionar uno de los tres niveles de medida:

   - *Escala*: los valores de datos son numéricos en una escala de intervalo. Las variables de escala deben ser numéricas.
   - *Ordinal*: los valores de datos representan categorías con un cierto orden intrínseco (bajo, medio, alto; totalmente de acuerdo, de acuerdo, en desacuerdo). Las variables ordinales pueden ser de cadena o valores numéricos. Notar que para variables de cadena ordinales, se asume que el orden alfabético de los valores de cadena indica el orden correcto de las categorías; en el caso de bajo, medio y alto el orden sería alto, bajo y medio (orden que no es correcto), por lo que es más fiable utilizar códigos numéricos para representar datos ordinales que usar etiquetas de estos códigos.
   - *Nominal*: los valores de datos representan categorías sin un cierto orden intrínseco. Las variables nominales pueden ser de cadena o valores numéricos que representan categorías diferentes, por ejemplo *1 = Hombre* y *2 = Mujer*.

C.1.1. Transformación de una variable

Elegimos *Transformar* … *Calcular*, y realizamos los siguientes pasos:

a) Asignar un nombre y un tipo (por defecto será numérica) a la nueva variable en el cuadro de texto de la *Variable de destino*.

b) Definir la expresión numérica que va a permitir calcular los valores de la misma. Para ello utilizaremos los nombres de las variables del archivo (podemos escribirlos o seleccionarlos del listado que aparece), constantes, operadores y funciones.

c) Pulsar *Aceptar*.

Para construir estas expresiones pueden usarse operadores aritméticos como +, −, *, /, ** y funciones como SQRT, EXP, LG10, LN, ARTAN, COS, SIN, ABS, MOD10, TRUNC, RND, entre otras:

- MOD10 (Resto resultante de dividir entre 10).
- TRUNC (Parte entera de un número).
- RND (Redondeo al entero más cercano).

Pulsando el botón derecho sobre le nombre de la función, aparece su descripción. El argumento de las funciones debe ir entre paréntesis. Existen funciones particulares como UNIFORM y NORMAL, que se utilizan para la generación de variables aleatorias. Son de bastante utilidad en estudios de simulación.

Es importante tener cuidado con el orden de utilización de los operadores y no olvidar que los valores antiguos pierden su vigencia al recodificar una variable sobre el mismo nombre.

El botón *SI*… permite realizar modificaciones similares, pero sujetas a que se verifique una condición lógica. Se incluirán aquellos casos que verifiquen la condición. Los que no la cumplan pasarán a ser valores ausentes definidos por el sistema.

Una expresión lógica es una expresión que puede ser evaluada como verdadera o falsa en función de los valores de las variables en ella relacionadas. El nexo de las variables son los operadores de relación: = , >= , <= , < , > , ~= . Es posible formar expresiones complejas, utilizando los operadores lógicos: AND (&), OR (|), NOT (~).

C.1.2. Recodificación de una Variable

A partir de una variable podemos crear otra cuyos valores sean una recodificación de los de la primera. Esta recodificación podemos hacerla tanto en la misma variable como en variables diferentes. Para ello, seleccionaremos *Transformar* … *Recodificar* … *En distintas variables*. Se abre una ventana en la que deberemos asignar un nombre (y una etiqueta si queremos) a la nueva variable.[1]

C.1.3. Filtrado de datos

El programa SPSS permite seleccionar determinados casos para un próximo proceso, bien temporalmente o de forma permanente, sobre la base de un criterio lógico o de una decisión aleatoria. Para ello seleccionaremos el menú *Datos* … *Seleccionar casos*. La selección de individuos puede ser temporal (*filtrados*) o permanente (*eliminados*). En la selección permanente eliminamos del archivo activo los individuos deseados, mientras que en la temporal, la selección es recuperable (los casos son filtrados). En esta última situación, los individuos (casos) del archivo que no satisfacen la condición aparecerán marcados como excluidos mediante una línea que cruza en diagonal su número de fila. Aparece también una variable llamada *filter*$ que el sistema crea para controlar el filtrado de datos.

Especificaciones:

- *Todos los casos*: indica que quiere procesar todos los casos del archivo de datos de trabajo.
- *Si se satisface la condición*: indica que quiere procesar sólo los casos que satisfagan una condición lógica. Para especificar o cambiar la condición, pulse en *Si*. Esta alternativa crea la variable *filter*$, que el sistema crea para controlar el filtrado de datos.

[1] Cuidado!, si se selecciona … borrarás la variable original.

- *Muestra aleatoria de casos*: indica que queremos seleccionar los casos de forma aleatoria para su procesamiento. Si ha tecleado las especificaciones de muestreo, éstas aparecerán junto al botón de comando Muestra. Si no, o si quiere cambiarlas, pulse en *Muestra*(véase más adelante). Esta alternativa también crea la variable *filter*$.
- *Basándose en el rango del tiempo o de los casos*: permite seleccionar los casos deseados siempre que sean consecutivos.
- *Usar variable de filtro*: indica que quiere utilizar los valores de una variable numérica existente para controlar el filtrado de casos. Seleccione la variable de la lista de la izquierda. Los casos cuyo valor sea 0, o ausentes, en la variable de filtro se excluyen del análisis.

C.2 Análisis exploratorio de datos

Primero abrir el archivo de datos.

a) **Tablas de frecuencias:** *Analizar … Estadísticos descriptivos … Frecuencias*. SPSS también cuenta con el menú alternativo *Analizar … Tablas personalizadas* que posibilita alterar el formato del resultado.

b) **Estadísticos:** *Analizar … Estadísticos descriptivos … Descriptivos* donde hay que seleccionar la variable o variables de interés y después *Opciones* para escoger los estadísticos que interesan. Sin embargo con este menú no se pueden obtener los percentiles. Para obtenerlos hay que usar *Analizar … Estadísticos descriptivos … Frecuencias* y entrar en la opción *Estadísticos* en donde se seleccionan los percentiles deseados.

c) **Gráficos de sectores:** *Gráficos … Sectores* y seleccionaremos una o varias variables apareciendo un cuadro de diálogo, cuyas opciones pasamos a comentar:

1) *Resúmenes para grupos de casos*: Genera un gráfico en el que cada sector corresponde a un valor de la variable seleccionada. El tamaño del sector se determina por la opción *Los sectores representan*, esta opción aparece en el cuadro de diálogo que surge después de pulsar el botón *Definir* del cuadro anterior. También es posible que los sectores representen otra cosa, como la media de los valores de otra variable, el valor máximo, etc.; esto se consigue con la opción *Otra función resumen*. Se puede también editar el gráfico haciendo doble clic sobre él, con posibilidad de cambiar colores, tramas, desgajar sectores, etc.
2) *Resúmenes para distintas variables*. Permite que los sectores representen variables en lugar de grupos de casos. Cada sector representa una función de una determinada variable (por ejemplo, la suma de los valores de sus casos).
3) *Valores individuales de los casos*. Se resume una única variable, los casos ya son valores agrupados de la variable. Cada sector representa el valor de un caso individual. Con *Gráficos … Interactivos … Sectores* podemos obtener representaciones con efectos más llamativos.

d) **Diagramas de barras:** *Gráficos … Barras y Gráficos … Interactivos … Barras*.

e) **Histogramas:** *Gráficos … Histograma o Gráficos … Interactivos … Histograma*.

f) **Gráficos de tallo y hojas:** *Analizar … Estadísticos descriptivos … Explorar*.

g) **Diagramas de caja:** *Gráficos … Diagrama de cajas*.

h) **Diagramas de dispersión:** *Gráficos ... dispersión ... simple* o *Gráficos ... Interactivos ... Diagrama de dispersión*, en donde aparece un cuadro de diálogo en el que se puede elegir qué variable ocupará el eje X y qué otra el eje Y.

C.3 Inferencia sobre una o más poblaciones

Primero abrir el archivo de datos.

a) **Análisis de una muestra:** *Analizar ... Comparar medias ... Prueba T para una muestra*. Aparece una pantalla en cuyo campo *Contrastar Variables* introducimos las varaibles que queremos contrastar. En esta ventana, seleccione *Opciones*, para introducir el grado de confianza deseado (por defecto es del 95 %). Al final se pulsa *Aceptar*.

b) **Análisis de dos muestras emparejadas o relacionadas (Prueba T para muestras relacionadas).** Para efectuar la prueba T para muestras relacionadas se necesita una columna en los datos para cada una de las variables a comparar. Seleccionamos *Analizar ... Comparar medias ... Prueba T para muestras relacionadas*. Aparece la ventana en donde seleccionamos las variables en cuya comparación estamos interesados. Al hacer la primera selección en la columna de variables, esta aparece en el recuadro selecciones actuales como *variable 1*, y al realizar la segunda selección aparecerá como *variable 2*. En ese momento, ya seleccionadas las dos, es cuando las podemos introducir en la columna variables relacionadas. Se pulsa *Aceptar*.

c) **Análisis de dos muestras independientes (Prueba T para muestras independientes).** El programa necesita una columna en el editor de datos que contenga los valores de la variable cuyas medias en las dos poblaciones se desea comparar, y otra que indica la población o grupo a que pertenece cada individuo. A continuación, seleccionamos *Analizar ... Comparar medias ... Prueba T para muestras independientes*. Aparece una ventana en donde, en primer lugar seleccionamos una variable numérica y con el puntero la situamos en la ventana de *Contrastar variables*. A continuación, seleccionamos una única variable de agrupación y pulsamos *Definir grupos*. En esta ventana debemos especificar los dos grupos de la variable de contraste, eligiendo entre:

- *Usar valores especificados*. Escribimos un valor para el Grupo 1 y otro para el Grupo 2. Los casos con otros valores quedarán excluidos.
- *Punto de corte*. Escribimos un número que divida los valores de la variable de agrupación en dos conjuntos.

Si la variable de agrupación es de cadena corta, por ejemplo, *SI* y *NO*, podemos escribir una cadena para el Grupo 1 y otra para el Grupo 2. Los casos con otras cadenas quedarán excluidos del análisis. Una vez completada la ventana y tras pulsar *Continuar*, volvemos a la ventana de *Prueba T para muestras independientes*. Pulsando el botón *Opciones* podemos introducir un valor entre 1 y 99 para el coeficiente de confianza de un intervalo, cuyo valor por defecto es del 95 %. Tras pulsar el botón *Aceptar*.

d) **Pruebas de normalidad.** *Analizar ... Estadísticos descriptivos ... Explorar*. Aparece la ventana *Explorar*. En el caso de una muestra situamos la variable en la ventana *Dependientes*, y dejamos *Factores* en blanco. Para dos muestras independientes, situamos la variable a contrastar en la ventana *Dependientes*, y la variable que forma los grupos en la de Factores. Para dos muestras emparejadas situamos una variable con la diferencia de las dos originales en la ventana *Dependientes*, y dejamos *Factores* en blanco. A continuación, debemos pulsar el botón *Gráficos* y en la nueva ventana escoger la opción de *Histograma* y activar la opción de *Gráficos con pruebas de normalidad*.

D Uso de la calculadora en la estadística

Las explicaciones las basaremos en la utilización de las calculadoras Casio fx-82MS, fx-83MS, fx-85MS, fx-270MS, fx-300MS y fx-350MS.

Cálculos estadísticos

Para realizar cálculos estadísticos en la calculadora, tenga en cuenta los siguientes comentarios:

- Utilice MODE 2 para ingresar el modo estadístico SD.
- Utilice SHIFT CLR 1 = para borrar la memoria.
- Ingrese los datos usando la secuencia de tecla siguiente: <Dato> DT.
- Tenga en cuenta la tabla siguiente para los cálculos que se necesiten:

Para llamar este tipo de valor:	Realice esta operación:
$\sum x^2$	SHIFT S-SUM 1
$\sum x$	SHIFT S-SUM 2
n	SHIFT S-SUM 3
$\overline{x}$	SHIFT S-VAR 1
σ_n	SHIFT S-VAR 2
σ_{n-1}	SHIFT S-VAR 3

Ejemplo D.1

Calcule n, $\sum x$, $\sum x^2$, $\overline{x}$, σ_n y σ_{n-1} para los datos siguientes: 55, 54, 51, 55, 53, 53, 54 y 52.
SOLUCION:

- Primero, ingresamos al modo SD con las teclas MODE 2.
- Luego, borramos la memoria con la secuencia de teclas SHIFT CLR 1 =.
- Posteriormente, ingresamos los datos: 55 DT 54 DT 51 DT 55 DT 53 DT 53 DT 54 DT 52 DT
- Por último, calculamos las medidas estadísticas pedidas:

Suma de los cuadrados de los valores $\sum x^2 = 22{,}805$	SHIFT S-SUM 1 =
Suma de valores $\sum x = 427$	SHIFT S-SUM 2 =
Número de datos $n = 8$	SHIFT S-SUM 3 =
Media aritmética $\overline{x} = 53{,}375$	SHIFT S-VAR 1 =
Desviación estándar poblacional $\sigma_n = 1{,}316956719$	SHIFT S-VAR 2 =
Desviación estándar muestral $\sigma_{n-1} = 1{,}407885953$	SHIFT S-VAR 3 =

Precauciones con el ingreso de datos

- DT DT ingresa el mismo dato dos veces.
- También puede ingresar múltiples entradas del mismo dato usando SHIFT ;. Por ejemplo, para ingresar el dato 110 diez veces presiones 110 SHIFT ; 10 DT.
- Mientras ingresa datos o después de completar el ingreso de datos, puede usar las teclas △ y ▽ para ir visualizando a través de los datos que ha ingresado.
- Si ingresa múltiples ingresos del mismo dato usando SHIFT ; para especificar la frecuencia de datos (número de ítemes de datos) como se describe anteriormente, pasando a través de los datos muetra el ítem de dato y una pantalla separada para la frecuencia de datos (freq).
- Los datos visualizados pueden editarse, si así lo desea. Ingrese el valor nuevo y presione la tecla = para reemplazar el valor antiguo por el valor nuevo. Esto también significa que si desea realizar alguna otra operación (cálculo, llamada de resultados de cálculos estadísticos, etc.), siempre deberá presionar primero la tecla AC para salir de la presentación de datos.
- Presionando la tecla DT en lugar de = después de cambiar un valor sobre la presentación, registra el valor que ha ingresado como un elemento de dato nuevo, y deja el valor antiguo tal como está.
- Puede borrar el valor del dato visualizado usando △ y ▽, y luego presionando SHIFT CL. Borrando un valor de dato ocasiona que todos los valores siguientes se desplacen hacia arriba.
- Después de ingresar los datos en el modo SD, no podrá visualizar o editar más los datos ítemes de datos individuales, después de cambiar a otro modo.

Bibliografía

[1] AGRESTI, A., *Categorical data analysis*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1990.

[2] BARBOSA, R.; LLINÁS, H., *Procesos estocásticos con aplicaciones*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2013.

[3] HOSMER, D. and LEMESHOW S., *Applied Logistic Regression*, Segunda edición, John Wiley and Sons, 2000.

[4] KALB, K. y KONDER, P., *Una visión histórica del concepto moderno de integral*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2006 (editor: Dr. rer. nat. Humberto LLinás).

[5] KLEINBAUM, D. and KLEIN, M., *Logistic Regression: A self Learning Text*, Segunda edición, Ed. Springer, 2002.

[6] LLINÁS, H.; ROJAS, C., *Estadística descriptiva y distribuciones de probabilidad*. Barranquilla: Ediciones Uninorte, 2005.

[7] LLINÁS, H., *Precisiones en la teoría de los modelos logísticos*, Revista Colombiana de Estadística, Volumen 29, Número 2, pág. 239-265, 2006.

[8] LLINÁS, H., *Estadística inferencial*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2006.

[9] LLINÁS, H., *Medida e integración*. Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2007.

[10] LLINÁS, H., *Applet: La ley de los grandes números*. Se puede encontrar en el siguiente link: http://ylang-ylang.uninorte.edu.co/Objetos/Estadistica/LeyDeGrandesNumeros/index.html

[11] LLINÁS, H., *Applets de estadística*, 2007. Se puede encontrar en el siguiente link: *http://ylang-ylang.uninorte.edu.co:8080/drupal/?q=node/238*

[12] LLINÁS, H.; ALONSO, J. FLÓREZ, K., *Introducción a la estadística con aplicaciones en Ciencias Sociales*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2012.

[13] LLINÁS, H., *Introducción a la estadística matemática*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2014.

[14] LLINÁS, H., *Introducción a la teoría de probabilidad*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2014.

[15] NELDER, J.A. and WEDDERBURN, R.W.M., *Generalized linear models*. The Journal of the Royal Statistical Society, serie A 135, pág.370-384, 1972.

[16] PÉREZ, C., *Estadística práctica con Statgraphics*. España: Prentice Hall, 2002.

[17] Página web de datos estadísticos del Institute for Digital Research and Education (IDRE) de la Universidad de California en Los Angeles (UCLA): *https://stats.idre.ucla.edu/*. En especial, consultar: *https://stats.idre.ucla.edu/other/examples/alr2/*