Notas de clase de Probabilidad y Estadística

Volumen 1: Cap. 3 (Distribuciones de probabilidad discretas)

Versión 4 (Abril 26, 2020)

Dr. rer. nat. Humberto LLinás Solano
Doctor en Estadística (Mainz-Alemania)
Profesor Titular/Investigador Asociado
hllinas@uninorte.edu.co

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad del Norte
(www.uninorte.edu.co).

Índice general

Prefacio

Introducción

Estas notas de clase hacen parte de un compendio de varios volúmenes y están dirigido a todo tipo de público que requiere de algún conocimiento básico en Estadística.

El autor

Humberto Jesús LLinás Solano es Licenciado en Ciencias de la Educación, con énfasis en Matemáticas, Física y Estadística de la Universidad del Atlántico (Colombia). Magister en Matemáticas, convenio Universidad del Valle-Universidad del Norte (Colombia). Doctor en Estadística (Dr. rer. nat.) de la Universidad Johannes Gutenberg de Mainz (Alemania). Desde 1998 se desempeña como profesor de tiempo completo de la Universidad del Norte y forma parte de los grupos de investigación Matemáticas y Enfermedades tropicales de dicha institución. Autor de los productos[1]:

- *Estadística descriptiva y distribuciones de probabilidad* (2005, [6])
- *Estadística inferencial* (2006, [8])
- *Una visión histórica del concepto moderno de integral* (como editor, 2006, [4])
- *Medida e integración* (2007, [9])
- *Applets de estadística* (2007, [11])
- *Introducción a la estadística con aplicaciones en Ciencias Sociales* (2012, [12])
- *Procesos estocásticos con aplicaciones* (como coautor, 2013, [2])
- *Introducción a la estadística matemática* (2014, [13])
- *Introducción a la teoría de la probabilidad* (2014, [14])

Para más referencias, pueden consultarse:

- CVLAC
- ORCID
- Google Scholar

[1] Se cita el título del texto o applet, el año de publicación y la referencia bibliográfica respectiva. Cuando sea necesario, un comentario adicional.

3 Variables aleatorias discretas y distribuciones de probabilidad

Notas de clase basada en LLinás (2005). Ver referencia [6].

3.1 Conceptos básicos

1. **Variable aleatoria.**
   $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Se clasifica en discreta o continua.

2. **Variable aleatoria discreta.**
   Tiene una cantidad o finita o (infinita) enumerable de valores.

3. **Función de probabilidad f de X.**
   Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{si } x = x_1, x_2, \ldots; \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

4. **Propiedades de f.**

   (a) $f(x) \geq 0$ para todo valor x real.

   (b) $\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$.

   (c) La gráfica de f es un histograma de probabilidad.

5. **Función de distribución acumulada F de X.**
   Una función $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$F(t) = P(X \leq t) = \sum_{x;\, x \leq t} f(x), \quad \text{para todo } t \text{ real.}$$

6. **Propiedades de F.**
   (a) $0 \leq F(t) \leq 1$.
   (b) F es creciente.
   (c) F es escalonada.
   (d) $F\left(\lim\limits_{t\to\infty} t\right) = 1$.
   (e) $F\left(\lim\limits_{t\to-\infty} t\right) = 0$.

7. **Comentarios generales.**
   (a) $P(X = a)$ no siempre es cero.
   (b) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.
   (c) $P(a \leq X \leq b) \neq F(b) - F(a)$.
   (d) $P(a \leq X \leq b) \neq P(a < X \leq b)$.

8. **¿Cómo se calcula f a partir de F?**
   Si a^- es el valor máximo posible de X que es estrictamente menor que a, entonces,
$$f(a) = F(a) - F(a^-)$$

9. **Esperanza y varianza.**
$$\mu = E(X) = \sum_k x_k \cdot f(x_k), \qquad V(X) = \sum_k (x_k - \mu)^2 \cdot f(x_k).$$

10. **Propiedades de la esperanza y varianza.**
   (a) $E(aX + b) = aE(X) + b$.
   (b) $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
   (c) $V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$, donde $E(X^2) = \sum_k x_k^2 \cdot f(x_k)$.

11. **Recursos online para graficar f y F.**
   a) La gráfica de f se puede construir utilizando el recurso online Geogebra. En especial, el link de Probabilidad. Para ello, debe seguir los siguientes pasos:
   - Click en el *Menú* (Tres rayitas localizadas en la parte superior derecha).
   - Click en *Apariencias*.
   - Click en *Hoja de cálculo*. En este link hay más detalles sobre esta opción.
   - Construir la tabla de probabilidades.
   - Sombrear la tabla.
   - Dar click en el dibujo de Histograma localizado arriba de la tabla (parte superior izquierda).
   - Click *Anális de una variable* y listo.
   - Para guardar la gráfica, puede dar click en *Exportar*.

   b) La gráfica de F se puede construir utilizando el recurso online Geogebra. En especial, el link de Cálculadora gráfica. Para ello, puede ver los siguientes videos: Gráfica de funciones y Gráficas de funciones a trazos.

3.2 Ejemplos

Ejemplo 3.1

Supóngase que una moneda se lanza 5 veces y sea X la variable aleatoria que representa el "número de caras que resultan".

(a) ¿Cuáles son los posibles valores k de X?

(b) Halle la probabilidad de que X tome cada uno de esos valores k de la parte (a).

(c) Construya la función de probabilidad f de X.

(d) Haga un bosquejo de la representación gráfica de f.

(e) Construya la función de distribución acumulada F de X.

(f) Haga un bosquejo de su representación gráfica de F.

(g) Halle la probabilidad de que el número de caras sea menor o igual que 3.

(h) Halle la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 3.

(i) Halle la probabilidad de que X se encuentre entre 1 y 4 (ambos inclusive).

(j) Halle la probabilidad de X se encuentre entre 1 y 4 (ambos no inclusive).

(k) Halle la esperanza de X.

(l) Halle la esperanza de X^2.

(m) Encuentre la varianza de X.

SOLUCIÓN:

(a) Los elementos del espacio muestral Ω y los posibles valores de X se encuentran en la tabla de abajo:

X (Número de caras)	Elementos de Ω	Total de elementos
0	SSSSS	1
1	SSSSC, SSSCS, SSCSS, SCSSS, CSSSS	5
2	SSSCC, SSCSC, $\cdots$,SCSCS, CCSSS	10
3	SSCCC, SCCSC, $\cdots$,SCCCS, CCCSS	10
4	CCCCS, CCCSC, CCSCC, CSCCC, SCCCC	5
5	CCCCC	1

Cuadro 3.1: Posibles valores del número de caras al lanzar 5 veces una moneda

En conclusión, los posibles valores de X son: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

(b) El número de elementos que tiene el espacio muestral Ω es:

$$\#\Omega = 1+5+10+10+10+5+1 = 32, \quad \text{o, que es lo mismo,} \quad \#\Omega = 2^5 = 32$$

Las probabilidades solicitadas se describen a continuación:

- Probabilidad de que salga 0 cara:

$$P(X=0) = P(SSSSS) = \frac{1}{32} = 0{,}03125$$

- Probabilidad de que salga 1 cara:

$$P(X=1) = P(SSSSC, SSSCS, SSCSS, SCSSS, CSSSS) = \frac{5}{32} = 0{,}15625$$

- Probabilidad de que salgan 2 caras:

$$P(X=2) = P(SSSCC, SSCSC, \cdots, SCSCS, CCSSS) = \frac{10}{32} = 0{,}3125$$

- Probabilidad de que salgan 3 caras:

$$P(X=3) = P(SSCCC, SCCSC, \cdots, SCCCS, CCCSS) = \frac{10}{32} = 0{,}3125$$

- Probabilidad de que salgan 4 caras:

$$P(X=4) = P(CCCCS, CCCSC, CCSCC, CSCCC, SCCCC) = \frac{5}{32} = 0{,}15625$$

- Probabilidad de que salgan 5 caras:

$$P(X=5) = P(CCCCC) = \frac{1}{32} = 0{,}03125$$

Estas probabilidades se pueden resumir en la tabla que se indica abajo:

Valor k de X	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Cuadro 3.2: Probabilidades

(c) Debido a que $f(k) = P(X=k)$, la función de probabilidad f coincide con las probabilidades halladas en el inciso anterior, como se muestra en la tabla de abajo.

Valor k de X	0	1	2	3	4	5
$f(k) = P(X=k)$	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Cuadro 3.3: Función de probabilidad f

(d) El bosquejo de la representación gráfica de f se deja como ejercicio al lector.

(e) Recordemos que la función de distribución acumulada F se define como:

$$F(t) = P(X \leq t) = \sum_{x;\, x \leq t} f(x), \quad \text{para todo } t \text{ real.}$$

Hallaremos F en tres pasos:

- *Primer Paso:* Consideremos solo los valores de X: 0, 1, 2, 3, 4, 5.
  - $F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = f(0) = 0,03125.$
  - $F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = f(0) + f(1) = 0,03125 + 0,15625 = 0,1875$
  - $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 2) = f(0) + \cdots + f(2) = 0,03125 + \cdots + 0,3125 = 0,5$
  - $F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 3) = f(0) + \cdots + f(3) = 0,03125 + \cdots + 0,3125 = 0,8125$
  - $F(4) = P(X \leq 4) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 4) = f(0) + \cdots + f(4) = 0,03125 + \cdots + 0,15625 = 0,96875$
  - $F(5) = P(X \leq 5) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 5) = f(0) + \cdots + f(5) = 0,03125 + \cdots + 0,03125 = 1.$
- *Segundo Paso:* Consideremos números reales t diferente de los valores de X (0, 1, 2, 3, 4, 5) y utilizaremos siempre valores de prueba (el que usted quiera seleccionar).
  - *Región 1: Supongamos que* $t < 0$.
    Tomamos un valor de prueba que esté en este intervalo. Por ejemplo, puede ser -2:

    $$F(-2) = P(X \leq -2) = 0$$

    ya que no hay valores de X que sean negativos.
  - *Región 2: Supongamos que* $0 < t < 1$.
    Tomamos un valor de prueba que esté en este intervalo. Por ejemplo, puede ser 0,6:

    $$F(0,6) = P(X \leq 0,6) = P(X = 0) = 0,03125$$

    ya que el único valor de X menor o igual que 0,6 es 0.
  - *Región 3: Supongamos que* $1 < t < 2$.
    Tomamos un valor de prueba que esté en este intervalo. Por ejemplo, puede ser 1,2:

    $$F(1,2) = P(X \leq 1,2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,1875$$

    ya que los únicos valores de X menores o iguales que 1,2 son 0 y 1.
  - *Región 4: Supongamos que* $2 < t < 3$.
    Tomamos un valor de prueba que esté en este intervalo. Por ejemplo, puede ser 2,4:

    $$F(2,4) = P(X \leq 2,4) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 2) = 0,5$$

    ya que los únicos valores de X menores o iguales que 2,4 son 0 , 1 y 2.
  - *Región 5: Supongamos que* $3 < t < 4$.
    Tomamos un valor de prueba que esté en este intervalo. Por ejemplo, puede ser 3,5:

    $$F(3,5) = P(X \leq 3,5) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 3) = 0,8125$$

    ya que los únicos valores de X menores o iguales que 3,5 son 0, 1, 2 y 3.

- *Región 6: Supongamos que* $4 < t < 5$.
  Tomamos un valor de prueba que esté en este intervalo. Por ejemplo, puede ser 4,1:

$$F(4,1) = P(X \leq 4,1) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 4) = 0,96875$$

  ya que los únicos valores de X menores o iguales que 4,1 son 0, 1, 2, 3 y 4.
- *Región 7: Supongamos que* $5 < t$.
  Tomamos un valor de prueba que esté en este intervalo. Por ejemplo, puede ser 7:

$$F(7) = P(X \leq 7) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 5) = 1$$

  ya que todos los valores de X son menores o iguales que 7.

- *Tercer Paso:* Reunimos los pasos 1 y 2:

$$F(t) = \begin{cases} 0; & \text{si } t < 0; \\ 0,03125; & \text{si } 0 \leq t < 1; \\ 0,1875; & \text{si } 1 \leq t < 2; \\ 0,5; & \text{si } 2 \leq t < 3; \\ 0,8125; & \text{si } 3 \leq t < 4; \\ 0,96875; & \text{si } 4 \leq t < 5. \\ 1; & \text{si } 5 \leq t. \end{cases}$$

(f) El bosquejo de la representación gráfica de F se deja como ejercicio al lector.

(g) La probabilidad de que el número de caras sea menor o igual que 3 es:

$$P(X \leq 3) = F(3) = 0,8125$$

(h) La probabilidad de que el número de caras sea mayor que 3 es:

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0,5 = 0,5$$

(i) La probabilidad de que X se encuentre entre 1 y 4 (ambos inclusive) se puede hallar de dos maneras:

- *Primera forma: Utilizando f.*

$$P(1 \le X \le 4) \;=\; P(X = 1,2,3,4) \;=\; f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \;= 0,9375$$

- *Segunda forma: Utilizando F.*

$$\begin{aligned} P(1 \le X \le 4) \;&=\; P(X = 1,2,3,4) \;=\; P(X = 0,1,2,3,4) - P(X = 0) \\ &=\; P(X \le 4) - P(X \le 0) \;=\; F(4) - F(0) \;=\; 0,96875 - 0,03125 \;=\; 0,9375 \end{aligned}$$

(j) La probabilidad de X se encuentre entre 1 y 4 (ambos no inclusive) se puede hallar de dos maneras:

- *Primera forma: Utilizando f.*

$$P(1 < X < 4) \;=\; P(X = 2,3) \;=\; f(2) + f(3) \;= 0,625$$

- *Segunda forma: Utilizando F.*

$$\begin{aligned} P(1 < X < 4) \;&=\; P(X = 2,3) \;=\; P(X = 0,1,2,3) - P(X = 0,1) \\ &=\; P(X \le 3) - P(X \le 1) \;=\; F(3) - F(1) \;=\; 0,8125 - 0,1875 \;=\; 0,625 \end{aligned}$$

(k) Recuerde que la esperanza de X está definida por

$$E(X) \;=\; \sum_k k \cdot f(k)$$

En este ejemplo,

$$E(X) \;=\; (0)f(0) + (1)f(1) + \cdots + (5)f(5) \;=\; 2,5$$

(l) La esperanza de X^2 se calcula por

$$E(X^2) \;=\; \sum_k k^2 \cdot f(k)$$

En este ejemplo,

$$E(X) \;=\; (0^2)f(0) + (1^2)f(1) + \cdots + (5^2)f(5) \;=\; 7,5$$

(m) Recuerde que la varianza de X se puede calcular así (de dos maneras equivalentes):

$$V(X) \;=\; \sum_k (k - E(X))^2 \cdot f(k) \;=\; E(X^2) \;-\; \left[E(X)\right]^2$$

En este ejemplo,

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 \;=\; 7,5 - (2,5)^2 \;=\; 1,25$$

Observe que aquí se ha aplicado la propiedad. ◄

3.3 Distribuciones especiales discretas: Resumen

En la tabla A.7 del apéndice presentamos un resumen de las distribuciones discretas más importantes.

1. *Distribuciones especiales discretas*:

   a) Uniforme discreta,

   b) De Bernoulli,

   c) Binomial,

   d) De Poisson,

   e) Hipergeométrica,

   f) Binomial negativa,

   g) Geométrica,

   h) etc.

2. *Comentario*:
   Las probabilidades que no puedan ser hallados con las tablas estadísticas del apéndice pueden ser calculados con ayuda de:

   a) Excel. Aquí una mini-guía:

	Calcular $f(k) = P(X = k)$:	Calcular $F(t) = P(X \leq t)$:
Binomial con n, p	DISTR.BINOM(k;n;p;FALSO)	DISTR.BINOM(t;n;p;VERDADERO)
Hipergeométrica con n, M, N	DISTR.HIPERGEOM.N(k;n;M;N; FALSO)	DISTR.HIPERGEOM.N(t;n;M;N; VERDADERO)

Cuadro 3.4: Comandos para usar en excel

   Es importante señalar que con excel se pueden calcular probabilidades con otras distribuciones. Para másinformaciones al respecto puede consultarse el siguiente tutorial.

   b) Geogebra. En especial, el link de Probabilidad.

   c) Calculadoras en líneas. En especial, ir a la sección *Distribución de probabilidad* y seleccionar la distribución deseada.

3.4 La distribución uniforme (discreta)

1. **Función de probabilidad de la distribución uniforme discreta**.
Una variable aleatoria discreta X con los valores enteros sobre el intervalo $[a,b]$ tiene DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA sobre el conjunto de los números enteros que están en el intervalo $[a,b]$, cuando se tiene que $P(X=x)=\frac{1}{b-a+1}$, para todo x entero que está en el intervalo $[a,b]$.

2. **Esperanza y varianza de la distribución uniforme discreta**.

$$E(X)=\frac{a+b}{2} \qquad \text{y} \qquad V(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

3.5 La distribución binomial

1. **Experimento de Bernoulli**.
Sólo tiene dos resultados posibles: "éxito" y "fracaso". Un éxito ocurre con probabilidad p, siendo $0<p<1$.

2. **Experimento binomial**.
Es un experimento de Bernoulli que se ejecuta n veces, de tal manera que las diferentes ejecuciones se efectúen independientemente unas de las otras y con la misma probabilidad p.

3. **Función de probabilidad de la distribución binomial**.
Si se realiza n veces un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito p y si X denota al número total de éxitos obtenidos, entonces, la probabilidad de que se obtengan k éxitos es

$$P(X=k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k=0,1,2,\ldots,n.$$

La correspondiente distribución de X se conoce con el nombre de DISTRIBUCIÓN BINOMIAL con parámetros n y p.

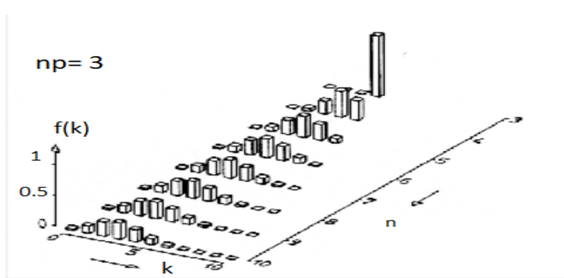


Figura 3.1: Distribución binomial para varios n pero fijo $np=3$.

4. **Esperanza y varianza de la distribución binomial**.

$$E(X)=np, \qquad V(X)=np(1-p)$$

Ejemplo 3.2

Supóngase que se lanza una moneda 5 veces y sea X la variable aleatoria que representa el "número de caras que resultan". Utilice la fórmula binomial o la tabla binomial para resolver este ejercicio. Compare sus resultados con el ejemplo 3.1.

(a) Halle la probabilidad de que el número de caras sea menor o igual que 3.

(b) Halle la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 3.

(c) Halle la probabilidad de que el número de caras se encuentre entre 1 y 4 (ambos inclusive).

(d) Halle la probabilidad de que el número de caras se encuentre entre 1 y 4 (ambos no inclusive).

(e) Halle la esperanza de X.

(f) Encuentre la varianza de X.

SOLUCIÓN:
Tener en cuenta que la variable X tiene distribución binomial con parámetros $n = 5$ y $p = 0,5$.

(a) La probabilidad de que el número de caras sea menor o igual que 3 se hallará de dos maneras.

- *Primera forma: Utilizando f binomial.*

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \\ &= \tbinom{5}{0}(0,5)^0 (1-0,5)^{5-0} + \tbinom{5}{1}(0,5)^1 (1-0,5)^{5-1} + \tbinom{5}{2}(0,5)^2 (1-0,5)^{5-2} + \tbinom{5}{3}(0,5)^3 (1-0,5)^{5-3} \\ &= 0,8125 \end{aligned}$$

- *Segunda forma: Utilizando F (la tabla binomial).*

$$P(X \leq 3) = F(3) = 0,812$$

(b) Halle la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 3 se hallará de dos maneras.

- *Primera forma: Utilizando f binomial.*
  Se deja como ejercicio al lector.
- *Segunda forma: Utilizando F (la tabla binomial).*

$$P(X > 3) = 1 - F(3) = 1 - 0,8125 = 0,1875$$

(c) La probabilidad de que X se encuentre entre 1 y 4 (ambos inclusive) se puede hallar de dos maneras:

- *Primera forma: Utilizando f binomial.*
  Se deja como ejercicio al lector.
- *Segunda forma: Utilizando F (la tabla binomial).*

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 4) &= P(X = 1,2,3,4) = P(X = 0,1,2,3,4) - P(X = 0) \\ &= P(X \leq 4) - P(X \leq 0) = F(4) - F(0) = 0,96875 - 0,03125 = 0,9375 \end{aligned}$$

(d) La probabilidad de X se encuentre entre 1 y 4 (ambos no inclusive) se puede hallar de dos maneras:

- *Primera forma: Utilizando f binomial.*
  Se deja como ejercicio al lector.
- *Segunda forma: Utilizando F (la tabla binomial).*

$$\begin{aligned} P(1 < X < 4) &= P(X = 2,3) = P(X = 0,1,2,3) - P(X = 0,1) \\ &= P(X \le 3) - P(X \le 1) = F(3) - F(1) = 0,8125 - 0,1875 = 0,625 \end{aligned}$$

(e) La esperanza de X es: $E(X) = np = (5)(0,5) = 2,5$.

(f) La varianza de X es: $V(X) = np(1-p) = (5)(0,5)(1-0,5) = 1,25$. ◄

Ejemplo 3.3

El 50 % de los clientes de una entidad bancaria son morosos. Supongamos que seleccionan aleatoriamente 10 clientes. Si X es el número de clientes morosos en la muestra, entonces es claro que X tiene distribución binomial con parámetros $n = 10$ y $p = 0,5$. Por consiguiente,

(a) La probabilidad de seleccionar exactamente 7 clientes morosos es 0,1172.

(b) La probabilidad de tener a lo más 7 clientes morosos es 0,945.

(c) La probabilidad de tener por lo menos 3 clientes morosos es 0,945

(d) La probabilidad de que ningún cliente sea moroso es $9,766 \times 10^{-4}$.

3.6 La distribución de Poisson

1. **Experimento y proceso de Poisson**.

   Consideremos las siguientes variables aleatorias:

   a) El número de partículas emitidas por cierta sustancia radioactiva en un determinado lapso de tiempo.
   b) El número de llamadas que llegan a una central telefónica en cierto intervalo de tiempo.
   c) El número de órdenes de devolución de piezas que recibe una empresa en una semana.
   d) El número de veces que falla una pieza de un equipo durante un período de tres meses.
   e) El número de huelgas anuales en un empresa.

   Cada una de estas variables aleatorias está asociada a unos procesos llamados *procesos de Poisson*.

2. **Función de probabilidad de la distribución de Poisson**.
   Consideremos un proceso de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ (es decir, λ es el número promedio de ocurrencias por unidad de tiempo) y sea X el "número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo $[0, t]$". Entonces, la probabilidad de que ocurran k eventos en el intervalo $[0, t]$ está dada por

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \lambda^k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

   siendo e la base del logaritmo natural. La correspondiente distribución de X se conoce con el nombre de DISTRIBUCIÓN DE POISSON con parámetro λ.

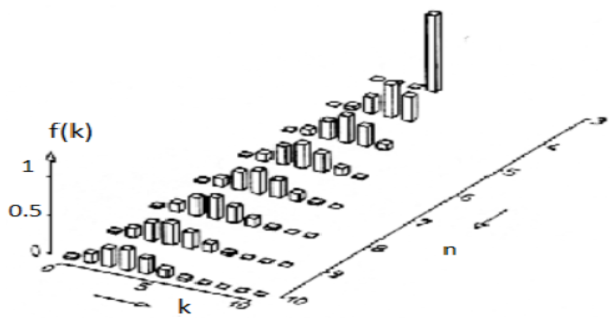


Figura 3.2: Distribuciones de Poisson para varios valores del parámetro λ.

3. **Esperanza y varianza de la distribución de Poisson**.

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

4. **Teorema de aproximación de la binomial a la Poisson**.
   Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros n y p. Si n es grande ($n \geq 100$), p pequeña ($p \leq 0,01$) y np tiene un tamaño moderado ($np \leq 20$), entonces, la distribución binomial con parámetros n y p puede aproximarse bien por la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = np$.

Ejemplo 3.4

Los sábados por la mañana, los clientes entran en una pequeña tienda de un centro comercial suburbano a una tasa esperada de 0,50 por minuto. Halle la probabilidad de que el número de clientes que entran en un intervalo específico de 10 minutos es (a) 3, (b) a lo más 3.
SOLUCIÓN:
Las hipótesis del proceso de Poisson parecen ser razonables en este contexto. Damos por sentado que los clientes no llegan en grupos (o podemos contar al grupo entero como un solo cliente) y que la entrada de un cliente no aumenta ni disminuye la probabilidad de que llegue otro. Para obtener λ, observamos que auna tasa media de 0,50 por minuto durante un periodo de 10 minutos, podemos esperar $\lambda = (0,50)(10) = 5$ entradas. Sea X la variable aleatoria que representa al número de clientes que entran en un intervalo específico de 10 minutos. Por tanto, (a) $P(X = 3) = 0,1403$ y (b) $P(X \leq 3) = 0,2650$. ◄

Ejemplo 3.5

La distribución de Poisson ha resultado ser muy útil en problemas de líneas de espera o *colas*. Los clientes llegan a una máquina fotocopiadora a una tasa media de 2 cada 5 minutos. En la práctica, se pueden representar los procesos de llegada de esta clase mediante una distribución de Poisson. Asumiendo que éste es el caso,

(a) La probabilidad de que no haya llegadas en un período de cinco minutos es 0,135.

(b) La probabilidad de que haya 1 llegada es 0,271.

(c) La probabilidad de que haya estrictamente más de dos llegadas es 0,323. ◄

Ejemplo 3.6

Aproximación de la Poisson a la binomial. Una cierta compañía electrónica produce 15.000 unidades de un tipo especial de tubo al vacío. Se ha observado que, en promedio, 3 tubos de 300 son defectuosos. La compañía empaca los tubos en cajas de 600. ¿Cuál es la probabilidad de que en una caja de 600 tubos hayan (a) 5 tubos defectuosos, (b) por lo menos 3 defectuosos y (c) a lo más 1 defectuoso?
SOLUCIÓN:
Sea X la variable aleatoria que representa al número de tubos defectuosos. Entonces, X es una variable binomial con parámetros $n = 600$ y $p = 0,01$. Aplicando el teorema de aproximación, tenemos (a) $P(X = 5)0,161$, (b) $P(X \geq 3) = 0,938$ y (c) $P(X \leq 1) = 0,017$. ◄

3.7 La distribución hipergeométrica

1. **Experimento hipergeométrico**.

En general, un EXPERIMENTO HIPERGEOMÉTRICO con parámetros n, M y N está basado en las siguientes suposiciones (véase la figura 3.3):

(H1) La población o conjunto donde deba hacerse el muestreo es una población finita con N elementos.

(H2) Cada elemento de la población puede ser caracterizado como un éxito o un fracaso.

(H3) Hay M éxitos en la población.

(H4) Se elige una muestra sin reemplazo de n individuos, de tal forma que sea igualmente probable seleccionar cada subconjunto de tamaño n.

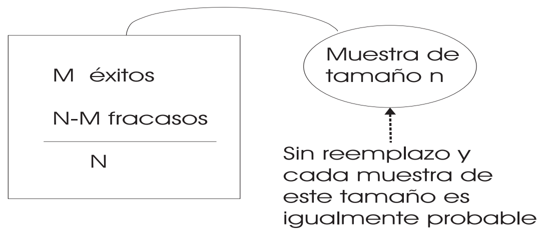


Figura 3.3: Esquema gráfico de un experimento hipergeométrico

2. **Función de probabilidad de la distribución hipergeométrica**.
   Sea X el número de éxitos obtenidos en una muestra escogida al azar al realizar un experimento hipergeométrico con parámetros n, M y N. Entonces, la probabilidad de elegir de manera exacta k éxitos en n intentos está dada por

$$P(X=k) \;=\; \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad \text{donde} \quad k=0,1,2,\ldots,n \quad \text{y} \quad n \le N. \tag{3.1}$$

   La correspondiente distribución de X se conoce con el nombre de DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA con parámetros n, M y N.

3. **Esperanza y varianza de la distribución hipergeométrica**.

$$E(X) \;=\; n\cdot\frac{M}{N} \qquad \text{y} \qquad V(X) \;=\; n\cdot\frac{M}{N}\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\left(\frac{N-n}{N-1}\right).$$

4. **Aproximación de la distribución hipergeométrica a la binomial**.
   Las distribuciones binomial e hipergeométrica coinciden cuando $\frac{n}{N} \le 0,05$. En este caso, la razón M/N es la proporción de los éxitos de la población. Si sustituimos M/N por p en las fórmulas de $E(X)=np$ y $V(X)=np(1-p)$, de la distribución binomial, obtenemos:

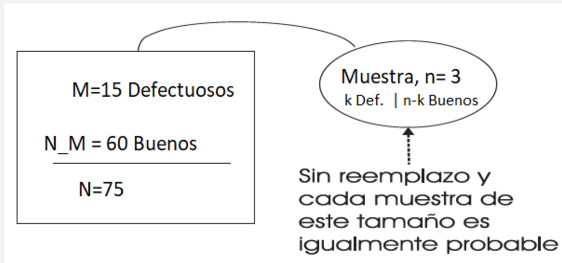
$$E(X) \;=\; np \qquad \text{y} \qquad V(X) \;=\; np(1-p)$$

Ejemplo 3.7

Una cantidad de 75 componentes eléctricas están sujetas a control de calidad. Se encontró que 15 de las componentes estaban defectuosas y las restantes no lo estaban. Se escoge una muestra aleatoria de 3 componentes de este lote y sea X el número de componentes defectuosos escogidos en la muestra.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente k de ellas estén defectuosas, siendo $k=0,1,2,3$? Resuma los resultados en una tabla de distribución.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 1 y 3 (ambos inclusive) de ellas estén defectuosas?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 1 de ellas lo esté?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 de ellas lo estén?
5. Halle la esperanza de X.
6. Halle la varianza de X.

SOLUCIÓN:
X tiene distribución hipergeométrica con parámetros $n = 3$, $M = 15$ y $N = 75$.



1. La probabilidad de que exactamente k de ellas estén defectuosas se calcula así:

$$f(k) \;=\; P(X=k) \;=\; \frac{\binom{15}{k}\binom{60}{n-k}}{\binom{75}{3}}, \qquad \text{donde} \quad k = 0,1,2,3$$

   Los resultados se pueden resumir en una tabla de distribución. En excel se aplica la función:

   DISTR.HIPERGEOM.N(k;3;15;75; FALSO)

Valor k de X	0	1	2	3
$f(k) = P(X=k)$	0,507	0,393	0,093	0,007

Cuadro 3.5: Función de probabilidad f

2. La probabilidad de que entre 1 y 3 (ambos inclusive) de ellas estén defectuosas es:

$$P(1 \le X \le 3) \;=\; P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) \;=\; 0,4932$$

   En excel se aplica la función: *DISTR.HIPERGEOM.N(2;3;15;75; FALSO)*

3. La probabilidad de que a lo sumo 1 de ellas lo esté es:

$$P(X \le 1) \;=\; P(X=0,1) \;=\; f(0)+f(1) \;=\; 0,90$$

   En excel se aplica la función: *DISTR.HIPERGEOM.N(2;3;15;75; VERDADERO)*

4. La probabilidad de que por lo menos 2 de ellas lo estén se puede resolver de dos maneras:

   - *Primera forma.*

$$P(X \ge 2) \;=\; P(X=2,3) \;=\; f(2)+f(3) \;=\; 0,10$$

   - *Segunda forma.*

$$P(X \ge 2) \;=\; 1-P(X \le 1) \;=\; P(X=0,1) \;=\; f(0)+f(1) \;=\; 0,10$$

5. La esperanza de X es

$$E(X) \;=\; n\cdot\frac{M}{N} \;=\; 3\cdot\frac{15}{75} \;=\; 0,6$$

6. La varianza de X es

$$V(X) \;=\; n\cdot\frac{M}{N}\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \;=\; 3\cdot\frac{15}{75}\cdot\left(1-\frac{15}{75}\right)\cdot\left(\frac{75-3}{75-1}\right) \;=\; 0,467$$

◄.

Ejemplo 3.8

Una compañía recibe un pedido de 20 artículos. Dado que la inspección de cada artículo es cara, se sigue la política de analizar una muestra de 6 artículos de cada envío (seleccionada sin reemplazo y sin orden), aceptando la remesa si no hay más de un artículo defectuoso en la muestra. Halle la probabilidad de que sea aceptado un pedido con cinco artículos defectuosos.
SOLUCIÓN:
Tenemos que $N = 20$, $M = 5$ y $n = 6$. Sea X la variable aleatoria que representa el número de artículos defectuosos en la muestra de 5. Entonces, la probabilidad de que sea aceptado un pedido con cinco artículos defectuosos es de

$$P(X \leq 1) \;=\; P(X=0)+P(X=1) \;=\; 0,516$$

. ◀

Ejemplo 3.9

De un grupo de 8 personas se supo que 3 eran profesionales y el resto, no lo era. Si una muestra aleatoria de 3 personas son escogidas de este grupo, ¿cuál es la probabilidad de que (a) exactamente 2 de ellas sean profesionales?, (b) a lo más 1 lo sea?
SOLUCIÓN:
Sea X la variable aleatoria que representa al número de profesionales. Aplicando la distribución hipergeométrica con parámetros $n = 3$, $N = 8$ y $M = 3$, tenemos que (a) $P(X = 2) = 0,26786$ y (b) $P(X \leq 1) = 0,714286$. ◀

Ejemplo 3.10

Aproximación de la Hipergeométrica a la binomial- Cap. 3.[a] Considere los datos del ejemplo 3.7. Verifique si se puede utilizar la aproximación de la hipergeomtŕica a la binomial para resolver los incisos de ese ejemplo. En caso afirmativo, resuélvalos con la distribución binomial y compare con los resultados de ese ejemplo.
SOLUCIÓN:
X tiene distribución hipergeométrica con parámetros $n = 3$, $M = 15$ y $N = 75$. Como $\frac{n}{N} = \frac{3}{75} = 0,04 \leq 0,05$, entonceodemos aproximar la distribución hipergeométrica a la binomial. Es decir, X tiene aproximadamente distribución binomial con parámetros $n = 3$ y $p = \frac{M}{N} = \frac{15}{75} = 0,2$.

1. La probabilidad aproximada de que exactamente k de ellas estén defectuosas se calcula así:

$$f(k) \;=\; P(X=k) \;=\; \binom{3}{k}(0,2)^k(1-0,2)^{3-k}, \qquad \text{donde} \quad k=0,1,2,3$$

Los resultados se pueden resumir en una tabla de distribución. En excel se aplica la función:

DISTR.BINOM(k;3;0,2;FALSO)

Valor k de X	0	1	2	3
$f(k) = P(X=k)$	0,512	0,384	0,096	0,008

Cuadro 3.6: Función de probabilidad f binomial

2. La probabilidad de que entre 1 y 3 (ambos inclusive) de ellas estén defectuosas es:

$$P(1 < X < 3) = P(X = 2) = f(2) = 0,096$$

3. La probabilidad de que a lo sumo 1 de ellas lo esté es:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0,1) = f(0) + f(1) = 0,896$$

   En excel se puede aplicar la función: *DISTR.BINOM(1;3;0,2;VERDADERO)*.

4. La probabilidad de que por lo menos 2 de ellas lo estén se puede resolver de dos maneras:
   - *Primera forma:* $P(X \geq 2) = P(X = 2,3) = f(2) + f(3) = 0,104$.
   - *Segunda forma:* $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = P(X = 0,1) = f(0) + f(1) = 0,896$.

5. La esperanza de X es: $E(X) = np = (3)(0,2) = 0,6$.

6. La varianza de X es: $V(X) = np(1-p) = (3)(0,2)(0,8) = 0,48$. ◄.

[a] Debe cumplirse que $\frac{n}{N} \leq 0,05$.

3.8 La distribución binomial negativa

1. **Experimento binomial negativo**.
   Un EXPERIMENTO BINOMIAL NEGATIVO con parámetros r y p está caracterizado por las siguientes condiciones:

(BN1) El experimento consta de una serie de experimentos de Bernoulli y que son independientes entre sí.

(BN2) La probabilidad de éxito p de cada experimento de Bernoulli es siempre la misma.

(BN3) El experimento continúa hasta que un total de r éxitos se haya observado, siendo r un entero no negativo dado.

2. **Función de probabilidad de la distribución binomial negativa**.
   Sea X el número de fracasos que preceden al r-ésimo éxito en un experimento binomial negativo con parámetros r y p. Entonces, la probabilidad de que hayan k fracasos antes del r-ésimo éxito está dada por

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

   La correspondiente distribución de X se conoce con el nombre de DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA con parámetros r y p.

3. **Esperanza y varianza de la distribución binomial negativa**.

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p} \qquad \text{y} \qquad V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Ejemplo 3.11

Una pareja desea tener exactamente dos niñas en su familia. Tendrán hijos (niños y niñas) hasta que se satisfaga esta condición. Suponga que la probabilidad de que el hijo que nazca varón es igual a 0,5 y que X es la variable aleatoria que representa a número de varones que nacen antes de que nazca la segunda hembra. Entonces:

(a) La probabilidad de que la familia tenga k hijos varones es

$$P(X=k)=(k+1)\,(0,5)^{k+2} \qquad k=0,1,2,\ldots.$$

(b) La probabilidad de que la familia tenga a lo más 4 hijos es $P(X\leq 2)=0,688$.

(c) Se esperaría que esta familia tenga $E(X)=2$ varones y $E(X+2)=4$ hijos. ◄

3.9 La distribución geométrica

1. **Es un caso especial**.
   Es un caso especial de la distribución binomial negativa con parámetros $r=1$ y p.

2. **Función de probabilidad de la distribución geométrica**.
   Sea X el número de fracasos que preceden al primer éxito en un experimento binomial negativo con parámetros 1 y p. Entonces, la probabilidad de que haya k fracasos antes del primer éxito está dada por

$$P(X=k) \;=\; bn(k;1,p) \;=\; p\,(1-p)^k, \qquad k=0,1,2,\ldots.$$

   La correspondiente distribución de X se conoce con el nombre de DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA con parámetros p.

3. **Esperanza y varianza de la distribución geométrica**.

$$E(X)=\frac{1-p}{p}, \qquad V(X)=\frac{1-p}{p^2}$$

Ejemplo 3.12

Una pareja desea tener exactamente una niña en su familia. Tendrán hijos (niños y niñas) hasta que se satisfaga esta condición. Suponga que la probabilidad de que el hijo que nazca varón es igual a 0,5 y que X es la variable aleatoria que representa a número de varones que nacen antes de que nazca la segunda hembra. Calcular:

(a) La probabilidad de que la familia tenga k hijos varones.

(b) La probabilidad de que la familia tenga a lo más 4 hijos.

(c) Número de varones que espera tener esta familia.

(d) Número de hijos que espera tener esta familia. ◄

SOLUCIÓN:
Se deja como ejercicio al lector. ◄

3.10 Ejercicios

1. ¿Son las siguientes afirmaciones verdaderas o falsas? Justifique cada respuesta.

   (a) Toda variable aleatoria es un número.

   (b) Si f es la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X y 0 es un posible valor de X, entonces, $f(0) = 0$.

   (c) Para cualquier variable aleatoria discreta X se cumple que $P(X = 1) = 1$, en donde 1 es un posible valor de X.

   (d) Si F es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria X discreta, entonces, F es una función escalonada.

   (e) Si X es una variable aleatoria discreta con función de distribución acumulada F, entonces, se cumple que $P(3 \leq X < 5) = F(5) - F(3)$.

   (f) Si X es cualquier variable aleatoria y si la variable aleatoria $X + 4$ tiene esperanza 1, entonces, la esperanza de X es 5.

2. Una pizzería, que atiende pedidos por correo, tiene cinco líneas telefónicas. Sea X la variable aleatoria que representa al número de líneas en uso en un momento específico. Supongamos que la función de probabilidad f de X está dada en la siguiente tabla:

Valor x de X	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,20	0,25	0,10	0,15	0,09	0,21

   Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

   (a) A = “a lo sumo 2 líneas están en uso“.

   (b) B = “menos de 4 líneas están en uso”.

   (c) C = “por lo menos 3 líneas están en uso“.

   (d) D = “entre 2 y 4 (ambos inclusive) líneas están en uso”.

   (e) E = “entre 2 y 5 (ambos inclusive) líneas no están en uso“.

   (f) F = “por lo menos 3 líneas no están en uso”.

3. La función de probabilidad de la variable aleatoria X que representa al número de imperfecciones por 4 metros de un papel especial en rollos continuos de ancho uniforme, está dada por

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,21	0,28	0,10	0,25	0,16

   Determine la función de distribución acumulada de X y represéntela gráficamente.

4. Una fabricante de lapiceros tiene un programa de control de calidad que incluye la inspección de lapiceros recibidos para revisar que no tengan defectos. Supongamos que, en cierto día, él recibe lapiceros en lotes de cinco y se seleccionan dos lapiceros de un lote para inspeccionarlos. Podemos representar los posibles resultados del proceso de selección por pares. Por ejemplo, el par $(3,4)$ representa la selección de los lapiceros 3 y 4 para inspeccionarlos.

   (a) Haga una lista de los resultados diferentes.

   (b) Supongamos que los lapiceros 3 y 4 son los únicos defectuosos de un lote de cinco y se van a escoger dos lapiceros al azar. Defina la variable aleatoria X como el número de de lapiceros defectuosos observado entre los inspeccionados. Encuentre la función de probabilidad de X.

   (c) Encuentre la función de distribución acumulada F de X y represéntela gráficamente.

5. Al invertir en unas acciones particulares, una persona puede tener una ganancia en un año de $8.000.000 con probabilidad de 0,4 o tener una pérdida de $2.000 con probabilidad de 0,6. ¿Cuál es la ganancia esperada de esta persona? Interprete su respuesta.

6. Con el propósito de establecer el grado de aceptación de su producto, una empresa selecciona una muestra de 1.000 consumidores de una población de 1.000.000, de forma tal que cada uno de los elementos de la población tiene la misma probabilidad de ser seleccionado. A cada consumidor seleccionado se le pregunta si prefiere el producto producido por esta empresa o no. ¿Es este un experimento binomial? Explique su respuesta.

7. Un fabricante de celulares, desea controlar la calidad de su producto y rechazar cualquier lote en el que la proporción de celulares defectuosos sea demasiado alta. Con este fin, de cada lote grande (digamos, 20.000 celulares) selecciona y prueba 25. Si por lo menos 3 de éstos están defectuosos, todo el lote será rechazado.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado si 5 % de los celulares están defectuosos?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado si 10 % de los celulares están defectuosos?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado si 30 % de los celulares están defectuosos?

8. Una empresa se dedica a la instalación de nuevos paquetes computacionales. Se ha comprobado que en el 10 % de 250 instalaciones es necesario volver para realizar algunas modificaciones. En una semana determinada se realizaron 10 instalaciones. Asumir independencia en los resultados de esas instalaciones.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario volver en cinco casos?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea necesario volver en ninguno los casos?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario volver en más de un caso?

9. En un lote de 1.000 bombillas fabricadas por una compañía, 10 son defectuosas. Utilice la aproximación de la distribución binomial por la de Poisson para calcular la probabilidad de que en una muestra de 20 bombillas, (a) 2, (b) 0, (c) por lo menos 3 sean defectuosas.

10. En cierto estudio se reporta que de cada 100 personas, una fuma. Consideremos una muestra aleatoria de 2.000 personas.

    (a) ¿Cuál es la distribución aproximada del número de quienes fuman?

    (b) Utiliza la aproximación de la parte (a) para calcular la probabilidad aproximada de que entre 8 y 20 (ambos inclusive) personas fumen.

(c) Utiliza nuevamente la aproximación de la parte (a) para calcular la probabilidad aproximada de que estrictamente entre 12 y 30 personas fumen.

11. Suponga que los buses llegan a cierto terminal de transporte, según un proceso de Poisson, con tasa $\alpha = 8$ buses por hora, de modo que el número de llegadas por un periodo de t horas es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 8t$.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 buses pequeños lleguen durante un período de una hora? ¿Por lo menos 5? ¿A lo más 10?

    (b) ¿Cuáles son el valor esperado y la desviación estándar del número de buses que llegan durante un período de 90 minutos?

    (c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 20 buses lleguen durante un período de 2 horas y media? ¿De que a lo sumo 10 lleguen durante este período?

12. Un fabricante de computadores se preocupa por el mal funcionamiento de cierto programa estadístico en un modelo en particular. El mal funcionamiento puede producir en raras ocasiones un bloqueo en el sistema operativo. Suponga que la distribución del número de computadores por año que tienen un mal funcionamiento del paquete estadístico es la de Poisson con $\lambda = 5$.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más dos computadores por año tenga un bloqueo en el sistema operativo?

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que más de un computador por año tenga un bloqueo en el sistema operativo?

13. Una empresa recibe un pedido de 1.000 artículos. Se analiza una muestra aleatoria de 15 artículos y se acepta el pedido si menos de tres resultan defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un envío que contenga un 5 % de artículos defectuosos?

14. Cada uno de los 13 computadores de cierta marca ha sido devuelto a un proveedor debido al mal funcionamiento de ciertos programas bajo un determinado sistema operativo. Supongamos que 7 de estos 13 tienen problemas con la memoria RAM y los otros 6 tienen problemas con los ejecutables EXE. Si se examinan al azar y sin reemplazo 6 de estos computadores, ¿cuál es la probabilidad de que (a) exactamente 3, (b) a lo más 2, (c) estrictamente entre 2 y 5 computadores tengan problemas con la memoria RAM?

15. Una determinada empresa está interesada en evaluar su procedimiento de inspección actual en embarques de 50 artículos idénticos. El procedimiento es tomar una muestra de cinco y pasar el embarque si no se encuentra más de dos defectuosos. ¿Qué proporción del 20 % de embarques defectuosos se aceptará?

16. El 10 % de los motores armados en una fábrica de montaje están defectuosos. Si se seleccionan en forma aleatoria uno por uno y se prueba, calcule la probabilidad de localizar el tercer motor sin defecto (a) en el quinto ensayo,(b) en el quinto ensayo o antes.

17. De acuerdo con un estudio geológico, en un pozo de exploración petrolera hay 0,2 de probabilidad de encontrar petróleo. Calcule la probabilidad de localizar petróleo por primera vez en el tercer pozo que se perfore.

18. Se sabe que en cierto proceso de fabricación, en promedio, uno de cada 100 artículos está defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el sexto artículo que se inspecciona sea el primer defectuoso que se encuentra.

19. Utilizando la opción *Plot. . .Probability Distributions. . .Binomial* de Statgraphics, realizar:

    (a) Los ejemplos 3.5.4 y 3.5.6 de [6].

(b) Los ejercicios 37, 39 (partes b y c), 43 (partes a,b,c y d) y 51 de [6].

20. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Poisson* de Statgraphics, realizar los ejemplos 3.6.2, 3.6.3, 3.6.4, 3.6.5, 3.6.9 y 3.6.10 de [6].
21. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Poisson* de Statgraphics, realizar los ejercicios 53, 55, 57, 61 (incisos a y c) y 63 de [6].
22. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Hypergeometric* de Statgraphics, realizar:
    (a) Los ejemplos 3.7.1, 3.7.3, 3.7.4 y 3.7.5 de [6].
    (b) Los ejercicios 65, 67, 69, 73 y 77 (inciso b) de [6].
23. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Negative Binomial* de Statgraphics, realizar:
    (a) El ejemplo 3.8.2 (incisos b y c) de [6].
    (b) Los ejercicios 80 y 84 de [6].
24. Utilizando la opción *Plot…Probability Distributions…Geometric* de Statgraphics, realizar:
    (a) El ejemplo 3.8.6 (incisos a,b) de [6].
    (b) Los ejercicios 81, 85, 87 y 89 de [6].

A Apéndice de tablas

1. Distribución binomial

Las tablas (a)-(e) muestran la probabilidad $P(X \leq k) = B(k; n, p)$ de que ocurran máximo k éxitos en n ensayos independientes, cada uno con probabilidad de éxito p.

Estas probabilidades se calculan para $n = 5$, 10, 15, 20 y 25, respectivamente.

(a) Tabla binomial para $n = 5$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,774	0,590	0,328	0,237	0,168	0,078	0,031	0,010	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,977	0,919	0,737	0,633	0,528	0,337	0,188	0,087	0,031	0,016	0,007	0,000	0,000
2	0,999	0,991	0,942	0,896	0,837	0,683	0,500	0,317	0,163	0,104	0,058	0,009	0,001
3	1,000	1,000	0,993	0,984	0,969	0,913	0,812	0,663	0,472	0,367	0,263	0,081	0,023
4	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,990	0,969	0,922	0,832	0,763	0,672	0,410	0,226
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

(b) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 10$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,599	0,349	0,107	0,056	0,028	0,006	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,914	0,736	0,376	0,244	0,149	0,046	0,011	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,988	0,930	0,678	0,526	0,383	0,167	0,055	0,012	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,999	0,987	0,879	0,776	0,650	0,382	0,172	0,055	0,011	0,004	0,001	0,000	0,000
4	1,000	0,998	0,967	0,922	0,850	0,633	0,377	0,166	0,047	0,020	0,006	0,000	0,000
5	1,000	1,000	0,994	0,980	0,953	0,834	0,623	0,367	0,150	0,078	0,033	0,002	0,000
6	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,945	0,828	0,618	0,350	0,224	0,121	0,013	0,001
7	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,988	0,945	0,833	0,617	0,474	0,322	0,070	0,012
8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,989	0,954	0,851	0,756	0,624	0,264	0,086
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,972	0,944	0,893	0,651	0,401

(c) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 15$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,463	0,206	0,305	0,013	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,829	0,549	0,167	0,080	0,035	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,964	0,816	0,398	0,236	0,127	0,027	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,995	0,944	0,648	0,461	0,297	0,091	0,018	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,999	0,987	0,836	0,686	0,515	0,217	0,059	0,009	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
5	1,000	0,998	0,939	0,852	0,722	0,403	0,151	0,034	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000
6	1,000	1,000	0,982	0,943	0,869	0,610	0,304	0,095	0,015	0,004	0,001	0,000	0,000
7	1,000	1,000	0,996	0,983	0,950	0,787	0,500	0,213	0,050	0,017	0,004	0,000	0,000
8	1,000	1,000	0,999	0,996	0,985	0,905	0,696	0,390	0,131	0,057	0,018	0,000	0,000
9	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,966	0,849	0,597	0,278	0,148	0,061	0,002	0,000
10	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,991	0,941	0,783	0,485	0,314	0,164	0,013	0,000
11	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,982	0,909	0,703	0,539	0,352	0,056	0,005
12	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,973	0,873	0,764	0,602	0,184	0,036
13	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,995	0,965	0,920	0,833	0,451	0,171
14	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,995	0,987	0,965	0,794	0,537

(d) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 20$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,358	0,122	0,012	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,736	0,392	0,069	0,024	0,008	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,925	0,677	0,206	0,091	0,035	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,984	0,867	0,411	0,225	0,107	0,016	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,997	0,957	0,630	0,415	0,238	0,051	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	1,000	0,989	0,804	0,617	0,416	0,126	0,021	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	1,000	0,998	0,913	0,786	0,608	0,250	0,058	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	1,000	1,000	0,968	0,898	0,772	0,416	0,132	0,021	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
8	1,000	1,000	0,990	0,959	0,887	0,596	0,252	0,057	0,005	0,001	0,000	0,000	0,000
9	1,000	1,000	0,997	0,986	0,952	0,755	0,412	0,128	0,017	0,004	0,001	0,000	0,000
10	1,000	1,000	0,999	0,996	0,983	0,872	0,588	0,245	0,048	0,014	0,003	0,000	0,000
11	1,000	1,000	1,000	0,999	0,995	0,943	0,748	0,404	0,113	0,041	0,010	0,000	0,000
12	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,979	0,868	0,584	0,228	0,102	0,032	0,000	0,000
13	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,942	0,750	0,392	0,214	0,087	0,002	0,000
14	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,979	0,874	0,584	0,383	0,196	0,011	0,000
15	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,949	0,762	0,585	0,370	0,043	0,003
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,984	0,893	0,775	0,589	0,133	0,016
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,965	0,909	0,794	0,323	0,075
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,992	0,976	0,931	0,608	0,264
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,988	0,878	0,642

(e) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 25$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,277	0,072	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,642	0,271	0,027	0,007	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,873	0,537	0,098	0,032	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,966	0,764	0,234	0,096	0,033	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,993	0,902	0,421	0,214	0,090	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,999	0,967	0,617	0,378	0,193	0,029	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	1,000	0,991	0,780	0,561	0,341	0,074	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	1,000	0,998	0,891	0,727	0,512	0,154	0,022	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	1,000	1,000	0,953	0,851	0,677	0,274	0,054	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	1,000	1,000	0,983	0,929	0,811	0,425	0,115	0,013	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	1,000	1,000	0,994	0,970	0,902	0,586	0,212	0,034	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
11	1,000	1,000	0,998	0,980	0,956	0,732	0,345	0,078	0,006	0,001	0,000	0,000	0,000
12	1,000	1,000	1,000	0,997	0,983	0,846	0,500	0,154	0,017	0,003	0,000	0,000	0,000
13	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,922	0,655	0,268	0,044	0,020	0,002	0,000	0,000
14	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,966	0,788	0,414	0,098	0,030	0,006	0,000	0,000
15	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,987	0,885	0,575	0,189	0,071	0,017	0,000	0,000
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,946	0,726	0,323	0,149	0,047	0,000	0,000
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,978	0,846	0,488	0,273	0,109	0,002	0,000
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,993	0,926	0,659	0,439	0,220	0,009	0,000
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,971	0,807	0,622	0,383	0,033	0,001
20	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,991	0,910	0,786	0,579	0,098	0,007
21	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,967	0,904	0,766	0,236	0,034
22	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,991	0,968	0,902	0,463	0,127
23	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,993	0,973	0,729	0,358
24	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,928	0,723

2. Distribución de Poisson

La tabla muestra la probabilidad $P(X \leq k; \lambda)$ para algunos valores λ.

	$\lambda = 0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$k = 0$	0,905	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407	0,368
1	0,995	0,982	0,963	0,938	0,910	0,878	0,844	0,809	0,772	0,736
2	1,000	0,999	0,996	0,992	0,986	0,977	0,966	0,953	0,937	0,920
3	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,994	0,991	0,987	0,981
4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,996
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

	$\lambda = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$k = 0$	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,406	0,199	0,092	0,040	0,017	0,007	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000
2	0,677	0,423	0,238	0,125	0,062	0,030	0,014	0,006	0,003	0,000	0,000
3	0,857	0,647	0,433	0,265	0,151	0,082	0,042	0,021	0,010	0,000	0,000
4	0,947	0,815	0,629	0,440	0,285	0,173	0,100	0,055	0,029	0,001	0,000
5	0,983	0,916	0,785	0,616	0,446	0,301	0,191	0,116	0,067	0,003	0,000
6	0,995	0,966	0,889	0,762	0,606	0,450	0,313	0,207	0,130	0,008	0,000
7	0,999	0,988	0,949	0,867	0,744	0,599	0,453	0,324	0,220	0,018	0,001
8	1,000	0,996	0,979	0,932	0,847	0,729	0,593	0,456	0,333	0,037	0,002
9	1,000	0,999	0,992	0,968	0,916	0,830	0,717	0,587	0,458	0,070	0,005
10	1,000	1,000	0,997	0,986	0,957	0,901	0,816	0,706	0,583	0,118	0,011
11	1,000	1,000	0,999	0,995	0,980	0,947	0,888	0,803	0,697	0,185	0,021
12	1,000	1,000	1,000	0,998	0,991	0,973	0,936	0,876	0,792	0,268	0,039
13	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,987	0,966	0,926	0,864	0,363	0,066
14	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,983	0,959	0,917	0,466	0,105
15	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,992	0,978	0,951	0,568	0,157
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,973	0,664	0,221
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,995	0,986	0,749	0,297
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,993	0,819	0,381
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,875	0,470
20	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,917	0,559
21	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,947	0,644
22	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,967	0,721
23	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,981	0,787
24	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,989	0,843
25	1,000	1,000	1,000	0,994	0,970	0,902	0,586	0,212	0,034	0,994	0,888
26	1,000	1,000	1,000	0,998	0,980	0,956	0,732	0,345	0,078	0,997	0,922
27	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997	0,983	0,846	0,500	0,154	0,998	0,948
28	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,922	0,655	0,268	0,999	0,966
29	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,966	0,788	0,414	1,000	0,978
30	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,987	0,885	0,575	1,000	0,987
31	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,946	0,726	1,000	0,992
32	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,978	0,846	1,000	0,995
33	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,993	0,926	1,000	0,997
34	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,971	1,000	0,999
35	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,991	1,000	0,999
36	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	1,000	1,000

3.Distribución normal estándar

La tabla muestra la probabilidad $P(Z \leq z)$.

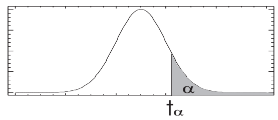
(a) Áreas para valores negativos de Z

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3.1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4009	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

(b) Áreas para valores positivos de Z

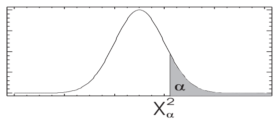
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9278	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9948	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9961	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9971	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

4. Distribución t de Student



	α						
ν	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,620
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,326	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,213	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1.833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,795
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
38	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,496
60	1,296	1.671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	1,282	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
$\infty(=z)$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

5. Distribución chi-cuadrada

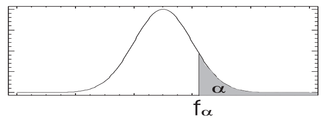


	α									
ν	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,50
1	0,000	0,000	0,000	0,001	0,00393	0,0158	0,0642	0,102	0,148	0,4550
2	0,010	0,0201	0,0404	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,575	0,713	1,386
3	0,0717	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	1,213	1,424	2,366
4	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	1,923	2,195	3,357
5	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	2,675	3,000	4,351
6	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	3,455	3,828	5,348
7	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	4,255	4,671	6,346
8	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	5,071	5,527	7,344
9	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	5,899	6,393	8,343
10	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	6,737	7,267	9,342
11	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	7,584	8,148	10,341
12	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	8,438	9,034	11,340
13	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	9,299	9,926	12,340
14	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	10,165	10,821	13,339
15	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	11,036	11,721	14,339
16	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	11,912	12,624	15,338
17	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	12,792	13,531	16,338
18	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	14,562	15,352	18,338
19	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	14,562	15,352	18,338
20	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	14,578	15,452	16,266	19,337
21	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	16,344	17,182	20,337
22	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	17,240	18,101	21,337
23	9,260	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848	17,187	18,137	19,021	22,337
24	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	19,037	19,943	23,337
25	10,520	11,524	12,692	13,120	14,611	16,473	18,940	19,939	20,867	24,337
26	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	20,843	21,792	25,336
27	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	21,749	22,719	26,336
28	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	21,588	22,657	23,647	27,336
29	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	23,567	24,577	28,336
30	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	24,478	25,508	29,336
31	14,457	15,655	17,042	17,538	19,280	21,433	24,255	25,390	26,440	30,336
32	15,134	16,362	17,783	18,291	20,072	22,271	25,148	26,304	27,373	31,336
33	15,815	17,073	18,527	19,046	20,866	23,110	26,042	27,219	28,307	32,336
34	16,501	17,789	19,275	19,806	21,664	23,952	26,938	28,136	29,242	33,336
35	17,191	18,508	20,027	20,569	22,465	24,796	27,836	29,054	30,178	34,336
36	17,887	19,233	20,783	21,336	23,269	25,643	28,735	29,973	31,115	35,336
37	18,584	19,960	21,542	22,105	24,075	26,492	29,636	30,893	32,053	36,336
38	19,289	20,691	22,304	22,878	24,884	27,343	30,537	31,815	32,992	37,336
39	19,994	21,425	23,069	23,654	25695	28,196	31,441	32,737	33,932	38,335
40	20,706	22,164	23,838	24,433	26,509	29,050	32,345	33,660	34,872	39,335

Valores críticos $\chi^2_\alpha(\nu)$ (continuación)

	α									
ν	0,30	0,25	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
1	1,074	1,323	1,642	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	10,827
2	2,408	2,773	3,219	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	13,815
3	3,665	4,108	4,642	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	16,268
4	4,878	5,385	5,989	5,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860	18,465
5	6,064	6,626	7,289	9,236	11,070	12,832	13,388	15,086	16,750	20,517
6	7,231	7,841	8,558	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	22,457
7	8,383	9,037	9,803	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322
8	9,524	10,219	11,030	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	26,125
9	10,656	11,389	12,242	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	27,877
10	11,781	12,549	13,442	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	29,588
11	12,899	13,701	14,631	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	31,264
12	14,011	14,845	15,812	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	32,909
13	15,119	15,984	16,985	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	34,528
14	16,222	17,117	18,151	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	36,123
15	17,322	18,245	19,311	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	37,697
16	18,418	19,369	20,465	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267	39,252
17	19,511	20,489	21,615	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	40,790
18	20,601	21,605	22,760	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156	42,312
19	21,689	22,718	23,900	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582	43,820
20	22,775	23,828	25,038	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997	45,315
21	23,858	24,935	26,171	29,615	32,671	35,479	36343	38,932	41,401	46,797
22	24,939	26,039	27,301	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	48,268
23	26,018	27,141	28,429	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	49,728
24	27,096	28,241	29,553	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,558	51,179
25	28,172	29,339	30,675	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928	52,620
26	29,246	30,434	31,795	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	54,052
27	30,319	31,528	32,912	36,741	40,113	43,194	44,140	46,963	49,645	55,476
28	31,391	32,620	34,027	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993	56,893
29	32,461	33,711	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	58,302
30	33,530	34,800	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672	59,703
31	34,598	35,887	37,359	41,422	44,985	48,231	49,226	52,190	55,003	61,098
32	35,665	36,973	38,466	42,585	46,194	49,480	50,487	53,486	56,328	62,487
33	36,731	38,058	39,572	43,745	47,400	50,724	51,743	54,774	57,646	63,870
34	37,795	39,141	40,676	44,903	48,602	51,966	52,995	56,061	58,964	65,247
35	38,859	40,223	41,778	46,059	49,802	53,203	54,244	57,340	60,272	66,619
36	39,922	41,304	42,879	47,212	50,998	54,437	55,489	58,619	61,581	67,985
37	40,984	42,383	43,978	48,363	52,192	55,667	56,731	59,891	62,880	69,346
38	42,045	43,462	45,076	49,513	53,384	56,896	57,969	61,162	64,181	70,703
39	43,105	44,540	46,173	50,660	54,572	58,119	59,204	62,426	65,473	72,055
40	44,165	45,616	47,269	51,805	55,758	59,342	60,436	63,691	66,766	73,402

6. Distribución F de Fisher



(a) Valores críticos $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ para $\alpha = 0,05$

	ν_1								
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

(b) Valores críticos $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ para $\alpha = 0,05$

	ν_1									
ν_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	4,06	4,00	3,94	3,87	384	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

(c) Valores críticos $F_\alpha(v_1, v_2)$ para $\alpha = 0,01$

	v_1								
v_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41

(d) Valores críticos $F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2)$ para $\alpha = 0,01$

	ν_1									
ν_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

7. Algunas distribuciones discretas

NOMBRE	FUNCIÓN	PARÁMETROS	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme	$f(x_k)=\frac{1}{n}$, $k=1,2,\dots,n$	$x_i < x_{i+1}$ $n\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 -$ $-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$
De dos puntos	$f(x_1)=p$, $f(x_2)=1-p$	$x_1 < x_2$ $0<p<1$	$x_1 p+$ $+x_2(1-p)$	$(x_1-x_2)^2 a$, a=p(1-p)
Bernoulli	$f(0)=p$, $f(1)=1-p$	p	p	$p(1-p)$
Binomial	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\dots,n$	$0<p<1$ $n\in\mathbb{N}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$f(k)=\frac{1}{k!}e^{-\lambda}\lambda^k$ $k=0,1,2,3,\dots$	$\lambda>0$	λ	λ
Hiper-geomé-trica	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $k\in\mathbb{N}_0$, $k\le n$, $k\le M$	$M\in\mathbb{N}_0$, $n,N\in\mathbb{N}$ $n\le M\le N$	$n\cdot\frac{M}{N}$	$na\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ $p=\frac{M}{N}$ $a=p(1-p)$
Binomial negativa	$\binom{k+r-1}{r-1}p^r(1-p)^k$ $k=0,1,2,\dots$	$r>0$, $0<p<1$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Geomé-trica	$f(k)=p(1-p)^k$ $k=0,1,2,\dots$	$0<p<1$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

8. Algunas distribuciones continuas

NOMBRE	FUNCIÓN	PARÁMETROS	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme	$f(x)=\frac{1}{b-a}$, $a<x<b$	$a<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
Normal	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x\in\mathbb{R}$	$\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2>0$	μ	σ^2
Normal estándar	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$		0	1
Gamma	$f(x)=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}$, $x>0$	$\alpha>0$, $\beta>0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
Exponencial	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$	$\lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
t de Student	$f(x)=a_n\left(1+nx^2\right)^{-(n+1)/2}$, $a_n:=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}}$, $x\in\mathbb{R}$	$n\in\mathbb{N}$	0, $n\ge 2$	$\frac{n}{n-2}$, $n\ge 3$
Chi-cuadrada	$\frac{1}{a_n}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-x/2}$, $a_n:=2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, $x>0$	$n>0$	n	$2n$
F de Fisher	$f(x)=\frac{a_n x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{(m+n)/2}}$ $a_n:=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)m^{m/2}n^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, $x>0$	$m,n\in\mathbb{N}$	$\frac{n}{n-2}$, $n\ge 3$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$, $n\ge 5$
Erlang	$\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda e^{-\lambda x}$	$k\in\mathbb{N}$, $\lambda>0$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$, $x>0$

9. Resumen de distribuciones muestrales e intervalos de confianza

Cuadro A.1: Distribución de la media muestral

	¿FORMA DE LA POBLACIÓN?	¿ES σ^2 CONOCIDA?	¿TAMAÑO DE LA MUESTRA?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿Z Ó t?
1.	Normal	Sí	No importa	Normal	$Z = \frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
2.	Normal	No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$Z = \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
3.	Normal	No	Pequeño ($n < 30$)	t de Student, $\nu = n-1$ grados de libertad	$t = \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
4.	No normal o desconocida	Sí	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$Z = \frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
5.	No normal o desconocida	Sí	Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	
6.	No normal o desconocida	No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$Z = \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
7.	No normal o desconocida	No	Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	

Cuadro A.2: Distribución relacionadas con proporciones

	¿ESTADÍSTICO?	¿SUPUESTO?	¿DIST. MUESTRAL	¿Z?
1.	Proporción muestral	$n \geq 30$	Normal	$Z = \frac{\overline{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$
2.	Proporción muestral	$np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$	Normal	$Z = \frac{\overline{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$
3.	Diferencia de proporciones muestrales	$n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	Normal	$Z = \frac{(\overline{p}_1-\overline{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$
4.	Diferencia de proporciones muestrales	$n_1 p_1 \geq 5$, $n_1(1-p_1) \geq 5$, $n_2 p_2 \geq 5$, $n_2(1-p_2) \geq 5$	Normal	$Z = \frac{(\overline{p}_1-\overline{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$

Cuadro A.3: Distribución de la diferencias de medias muestrales

X representa la población y para las dos últimas posibilidades de la tabla:

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}, \quad \nu' = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

	¿X?	¿σ_1^2 y σ_2^2 SE CONOCEN?	¿$\sigma_1^2=\sigma_2^2$?	¿n_1 y n_2?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿Z Ó t? $d := \overline{x}_1-\overline{x}_2$, $\mu := \mu_1-\mu_2$
1.	No normal	Sí	No importa	Grandes $n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	Normal	$Z = \frac{d-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
2.		No	No importa	Grandes $n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	Normal	$Z = \frac{d-\mu}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$
3.	Normal	Sí		No importa	Normal	$Z = \frac{d-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
4.		No	Sí	Pequeño $n_1 < 30$, $n_2 < 30$	t de Student con $\nu = n_1+n_2-2$ grados de libertad	$t = \frac{d-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1}+\frac{s^2}{n_2}}}$
5.			No	Pequeño $n_1 < 30$, $n_2 < 30$	t de Student con ν' grados de libertad (redondear al entero más cercano)	$t = \frac{d-\mu}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$

Cuadro A.4: Distribución de la varianza muestral y de la razón de varianzas muestrales

	ESTADISTÍCO	¿POBLACIÓN?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿χ^2 Ó F?
1.	s^2	Normal	Chi-cuadrada con $\nu = n-1$ grados de libertad	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$
2.	s_1^2/s_2^2	Ambas normales	F de Fisher con $\nu_1 = n_1-1$, $\nu_2 = n_2-1$ grados de libertad	$F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$ Regla: $F_{1-\alpha}(a,b) = \frac{1}{F_\alpha(b,a)}$

Cuadro A.5: Intervalos de confianza para la media poblacional

	¿POBLACIÓN?	¿σ^2 CONOCIDA?	¿TAMAÑO MUESTRAL?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿INTERVALO? $\overline{x}-b<\mu<\overline{x}+b$, con:
1.	Normal	Sí	No importa	Normal	$b:=Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
2.		No	Grande ($n\geq 30$)	Normal	$b:=Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
3.			Pequeño ($n<30$)	t de Student, $v=n-1$ grados de libertad	$b:=t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
4.	No normal o desconocida	Sí	Grande ($n\geq 30$)	Normal	$b:=Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
5.			Pequeño ($n<30$)	Callejón sin salida	
6.		No	Grande ($n\geq 30$)	Normal	$b:=Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
7.			Pequeño ($n<30$)	Callejón sin salida	

Cuadro A.6: Intervalos para la proporción y para la diferencia de proporciones

	¿ESTADÍSTICO?	¿SUPUESTOS?	¿DISTR. MUESTRAL?	¿INTERVALO DE CONFIANZA? $\overline{p}-b<p<\overline{p}+b$, con:
1.	Proporción muestral	$n\geq 30$	Normal	$b:=Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$
2.		$np\geq 5$, $n(1-p)\geq 5$	Normal	
3.	Diferencia de proporciones muestrales	$n_1\geq 30$, $n_2\geq 30$	Normal	$\overline{p}:=\overline{p}_1-\overline{p}_2$ $b:=Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}_1(1-\overline{p}_1)}{n_1}+\frac{\overline{p}_2(1-\overline{p}_2)}{n_2}}$
4.		$n_1p_1\geq 5$, $n_1(1-p_1)\geq 5$, $n_2p_2\geq 5$, $n_2(1-p_2)\geq 5$	Normal	

Cuadro A.7: Intervalos para la varianza y para la razón de varianzas

		¿POBLACIÓN?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿INTERVALO DE CONFIANZA?
1.	s^2	Normal	Chi-cuadrada con $v=n-1$ grados de libertad	$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}<\sigma^2<\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$
2.	s_1^2/s_2^2	Ambas normales	F de Fisher con $v_1=n_1-1$, $v_2=n_2-1$ grados de libertad	$\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(v_1,v_2)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}<\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot F_{\frac{\alpha}{2}}(v_2,v_1)$ Regla: $F_{1-\alpha}(a,b)=\frac{1}{F_\alpha(b,a)}$

Cuadro A.8: Intervalos de confianza para la diferencias de medias poblacionales

X representa la población y para las dos últimas posibilidades de la tabla:

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}, \quad \nu' = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

	¿X?	¿σ_1^2 y σ_2^2 SE CONOCEN?	¿$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$?	¿n_1 y n_2?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿INTERVALO? $d-b<\theta<d+b$, donde $d := \overline{x}_1 - \overline{x}_2$ $\theta := \mu_1 - \mu_2$ y:
1.	No normal	Sí	No importa	Grandes ($n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$)	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
2.		No	No importa	Grandes ($n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$)	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
3.	Normal	Sí	No importa	No importa	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
4.		No	Sí	Pequeño ($n_1 < 30$, $n_2 < 30$)	t de Student con $\nu = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad	$b := t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}$
5.			No	Pequeño ($n_1 < 30$, $n_2 < 30$)	t de Student con ν' grados de libertad (redondear al en- (tero más cercano)	$b := t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

B Guía rápida para trabajar con Statgraphics

B.1 Análisis de un solo conjunto de datos

1. Abrir el archivo de datos **calles.sf3**.
2. Seleccionamos *Describe* … *Numeric Data* … *One-Variable Analysis*.
3. Elegimos *Data* = *Longitud* y pulsamos la opción *OK*.
4. Sale la llamada *ventana del análisis*. Los íconos principales de esta ventana son:
   - *Input dialog* (*ícono de diálogos*): para seleccionar o cambiar variables dentro del archivo y análisis seleccionado.
   - *Tabular options* (*ícono de opciones tabulares*): medidas estadísticas, percentiles, tablas de frecuencia, inferencias, etc.
   - *Graphical options* (*ícono de opciones gráficas*): diagramas de dispersión, histogramas, etc.
   - *Save results* (*ícono de salvar resultados*): permite salvar los resultados del análisis.
5. Transformación de una variable:[1] *One Variable Analysis*, activar el botón *Transform* y, en *Operators*, elegir *logaritmo*.

B.2 Análisis simultáneo de dos o más conjuntos de datos

1. *Compare* … *Two Samples* … *Two Sample Comparison* …
2. Para obtener diagramas de cajas múltiples: *Compare* … *Multiple Samples* … *Multiple-Sample Comparison* … *Multiple Data Columns* … *Ok* … *Samples*= (en esta última opción mencionar los datos que queremos comparar)
3. Para obtener diagramas de cajas múltiples: *Plot* … *Exploratory Plots* … *Multiple Box-and-Whishker Plot* … *Data=distancia* … *Level codes=year* …

[1] Por ejemplo, si quisiéramos trabajar con el logaritmo de la variable escribimos LOG(**longitud**) en vez de **longitud**.

B.3 Gráficos de dispersión

Con la opción *Plot...Scatterplots* se pueden realizar:

1. Gráficos univariantes (*Univariate Plot*). Por ejemplo, abrir archivo de datos **autos.sf3** y utilizar la variable *mpg*.

2. Gráficos bidimensionales X-Y simples (X-Y *plot*) y múltiples (*Multiple* X-Y *Plot*). Por ejemplo, abrir archivo de datos **autos.sf3** y hacer *Y=mpg* y *X=potencia*. Sobre la gráfica, pulsar botón derecho del ratón y elegir *Pane options*. Aparece una pantalla con varios campos. Elegir *Point Codes=model*.

3. Gráficos tridimensionales X-Y-Z simples (X-Y-Z *plot*) y múltiples (*Multiple* X-Y-Z *Plot*). Por ejemplo, abrir archivo de datos **autos.sf3** y hacer *X=accel*, *Y=cilindro*, *Z=price*. Sobre la zona gráfica: botón derecho, *Pane options*, *Point Codes=origin*.

4. Gráficos de matriz (*Matriz Plot*).

5. Gráficos en coordenadas polares (*Polar Coordinates Plot*).

B.4 Diagramas de presentación

Con la opción *Plot...Business Charts* se pueden realizar (abrir siempre el archivo **autos.sf3**):

1. Gráficos de barras simples (*Barchart*). Por ejemplo, realizar un gráfico de barras para la variable *origin* del archivo **autos.sf3**, que contiene el país de origen de los autos. Los valores de la variable *origin* son 1 para los autos norteamericanos, 2 para autos europeos y 3 para autos japoneses. En esta opción sale, entre otros, el campo *Counts* (Frecuencias) que permite introducir la variable que contiene las frecuencias absolutas de los valores de la variable a graficar. Como las frecuencias absolutas de de los valores de la variable *origin* son: 85 para autos norteamericanos, 26 para autos europeos y 44 para autos japoneses, entonces, por esta razón, debemos escribir en este campo *join3(85;26;44)*. Además, el campo *Labels* (Etiquetas) permite introducir el nombre de la variable que contiene las etiquetas a utilizar para cada barra del gráfico. Como las etiquetas de los valores de la variable *origin* están contenidas *carmakers*, que son *America*, *Europe* y *Japan*, hacemos *Labels=carmakers*.

2. Gráficos de barras múltiples (*Multiple Barchart*). Por ejemplo, realizaremos un gráfico de barras dobles para las variables *origin* y *year* del archivo **autos.sf3**, que contienen el país de origen de los autos y el año de construcción, respectivamente. Los valores de la variable *year* son los intervalos 1978, [1979,1980] y [1981,1982]. Aparecen, entre otros, los siguientes campos:

    - *Columns* (Columnas): En este campo se introducen las variables que contienen las frecuencias absolutas de los valores de las variables a graficar, o una expresión de Statgtraphics que contiene operadores y que genera sus valores. Como las frecuencias absolutas de de los valores de la variable *origin* son: 85 para autos norteamericanos, 26 para autos europeos y 44 para autos japoneses, y como las frecuencias absolutas de los valores de la variable *year* son: 36 para 1978, 58 para [1979,1980] y 61 para [1981,1982], entonces, por esta razón, debemos escribir en este campo *join3(85;26;44)* y *join3(36;58;61)*.

    - *Labels* (Etiquetas): Hacemos *Labels=carmakers*.

3. Gráficos de sectores (*Piechart*). Por ejemplo, realizaremos un gráfico de sectores para la variable *origin* del archivo **autos.sf3**, que contienen el país de origen de los autos y el año de construcción, respectivamente. Los valores de la variable *origin* son 1 para los autos norteamericanos, 2 para autos europeos y 3 para autos japoneses. Aparecen, entre otros, los siguientes campos:

   - *Counts* (Frecuencias): En este campo se introducen las variables que contienen las frecuencias absolutas de los valores de las variables a graficar, o una expresión de Statgtraphics que contiene operadores y que genera sus valores. Como las frecuencias absolutas de de los valores de la variable *origin* son: 85 para autos norteamericanos, 26 para autos europeos y 44 para autos japoneses, entonces, por esta razón, debemos escribir en este campo *join3(85;26;44)*.

   - *Labels* (Etiquetas): En este campo se debe introducir el nombre de la variable que contiene las etiquetas a utilizar para cada grupo de barras del gráfico. Como las etiquetas de los valores de la variable *origin* están contenidas *carmakers*, que son *America*, *Europe* y *Japan*, hacemos *Labels=carmakers*.

4. Gráficos de componentes de líneas (*Component Line Chart*)

5. Gráficos de escogencias alta y baja (*High-Low-Chose Chart*).

B.5 Variables numéricas multidimensionales

Seleccione la siguiente secuencia de opciones: *Describe…Numeric Data…Multiple-Variable Analysis* y aparecen todas las variables del archivo. Aparece una ventana de diálogo en cuyo campo *Data* introducimos la variables *origin*, *price* y *year*. Luego, pulsamos el botón OK.

B.6 Distribuciones de probabilidad

Plot … Probability Distributions. Escogemos la distribución deseada. Los valores de los parámetros que definen la distribución (están fijados por defecto por el programa) los podemos modificar si pulsamos el botón derecho del ratón y escogemos la opción *Analysis Options*.

B.7 Inferencias basadas en una sola muestra

1. Se escoge *Describe … Numeric Data … One Variable Analysis*. Elegimos la variable que va a ser objeto del análisis y pulsar *OK*. Al pulsar el ícono *Tabular options* aparecen, entre otros:

   - *Confidence Intervals*.
     Calcula intervalos para la media (*Confidence Interval for Mean*) y la desviación típica (*Confidence Interval for Standard Deviation*) de la distribución. Pulsando el botón derecho del ratón y escogiendo *Pane Options* se puede modificar el nivel de confianza (*Confidence Level*) y el tipo de intervalo (*Interval Type*).

   - *Hypothesis Testing*
     Se realizan los contrastes de la media y de la desviación típica. Pulsando el botón derecho del ratón y escogiendo

Pane options se pueden modificar el valor del parámetro para la hipótesis nula (por ejemplo *Mean* = μ_0), del nivel de significancia α (*Alpha*) y de la hipótesis alternativa:

2. *Cálculo de la curva de potencia.*
   Describe ... Hypothesis Test ... Normal Mean y en *Null Hypothesis* se elige el valor de la media bajo la hipótesis nula. En la casilla *Sample Sigma* se escoge el valor de la desviación típica de la población. El tamaño de muestra se fija a través de *Sample Size*. Seleccionando el ícono de gráficos se selecciona la única gráfica posible (curva de potencia - *Power Curve*) y se pulsa *OK*.

B.8 Inferencias basadas en dos muestras

1. Elegir *Compare ... Two Samples*, en donde aparecen cuatro (4) opciones: *Two Sample Comparison*, *Paired-Sample Comparison*, *Hypotesis Tests*, *Sample-Size Determination*.
2. Cuando seleccionamos *Two Sample Comparison*[2] el programa pide al usuario que especifique las dos columnas de datos a comparar (*Sample 1* y *Sample 2*). Seleccionando *Tabular options* aparece, entre otros:
   - *Comparison of Means*: Intervalo de confianza para la diferencia de medias y contraste de igualdad de medias.
   - *Comparison of Standard Deviations*: Intervalo de confianza para el cociente de varianzas y contraste de igualdad de varianzas.
   - *Kolmogorov-Smirnov Test*: Prueba de hipótesis para saber si las distribuciones de ambas muestras son idénticas.

B.9 Bondad de ajuste

1. Se selecciona *Describe... Distribution Fitting...Uncensured Data*. Al pulsar *OK* se obtiene, entre otras, la salida de las contrastes de bondad de ajuste.
2. Si, estando situados sobre esta salida, pulsamos el botón derecho del ratón y elegimos la opción *Analysis Options* del menú emergente resultante, obtenemos la caja de diálogo *Probability Distributios Options*, que presenta todas las posibles distribuciones a considerar para el ajuste (observamos que por defecto el ajuste se realiza a una distribución normal).
3. También aparecen los siguientes campos:
   - *Number of Trials* (número de ensayos).
     Se rellena con el número de tiradas cuando la distribución elegida para el ajuste es binomial;
   - *Number of Successes* (número de eventos).
     Se rellena con el número de éxitos cuando la distribución elegida es una binomial negativa.
   - *Population Size* (tamaño de la población).
     Se rellena con el tamaño de la población cuando la distribución elegida es una hipergeométrica.

[2] El procedimiento es idéntico cuando seleccionamos la opción *Paired-Sample Comparison*

4. La opción tabular *Tests for Normality*: realiza los contrastes de normalidad.
5. Opción tabular *Goodness-of-Fit Tests*: realiza los contrastes de la bondad de ajuste de los datos a una distribución dada.

C Guía rápida para trabajar con SPSS

C.1 Definición de las variables

Para definir cada variable hay dos procedimientos:

- Hacer doble clic sobre el encabezamiento de la variable o
- Seleccionar, en la parte inferior, la pestaña *vista de variables*.

Cuando se hace esto, observamos que hay una fila para cada variable del conjunto de datos y que existen 10 columnas: *Nombre*, *Tipo*, *Anchura*, *Decimales*, *Etiqueta*, *Valores*, *Perdidos*, *Columnas*, *Alineación* y *Medida*. La definición de una variable se basa en las opciones que se ofrecen en esa ventana:

1. *Asignar un nombre a cada variable*, cumpliendo las siguientes reglas:
   - Nombres con no más de 8 caracteres (el primero debe ser una letra o @).
   - No utilizar símbolos como &, /, $, etc.
   - No utilizar nunca espacios en blanco.
   - No utilizar expresiones como ALL, AND, BY, EQ, GE, GT, LE, NE, NOT, OR, TO, o WITH.
2. *Asignar un tipo a cada variable*, indicando el máximo número de dígitos que deseamos para anotar las observaciones de la variable y el tipo de la variable con la que vamos a trabajar (*alfanumérica*, *fecha*, *moneda* o *numérica*) indicando en este caso el número de cifras decimales con que queremos que aparezca en el editor. SPSS permite trabajar con los siguientes tipos de variables:
   - *Numéricas*: formato numérico estándar.
   - *Coma*: comas de separación cada tres posiciones. Un punto para la parte decimal.
   - *Punto*: al contrario que el anterior.
   - *Notación Científica*: uso de la E para exponente.
   - *Cadena*: variable alfanumérica (de más de 8 caracteres se considera larga).

- Además están los formatos de *fecha*, *dólar* y *moneda personalizada*.

Si no escogemos el tipo, el sistema lo asigna automáticamente, siendo el formato por defecto: *Numérica 8.2* que significa: Anchura: 8 y Decimales: 2; es decir, una amplitud de columna de 8 espacios, siendo los 2 últimos para los decimales.

3. *Asignar una Etiqueta a cada variable* de no más de 120 caracteres (entre 30 y 40 es el valor recomendado) que nos permita tener más información sobre esa variable.

4. *Asignar Valores*: se trata de asignar etiquetas a los valores de cada variable. No es obligatorio, pero sí muy útil en algunos casos.

5. *Definir Perdidos*: permite definir los valores de los datos especificados como perdidos por el usuario. Sitúese en el campo correspondiente a *Perdidos* de cualquier variable y pulse sobre el recuadro coloreado, aparece: Los códigos asignados a los valores ausentes deben de ser coherentes con el tipo de variables declarado: numéricos para las numéricas y alfanuméricos para las alfanuméricas (máximo 9 caracteres). Se pueden introducir hasta 3 valores perdidos (individuales) de tipo discreto, un rango de valores perdidos o un rango más un valor de tipo discreto. Sólo pueden especificarse rangos para las variables numéricas. Estos valores ausentes son denominados por SPSS "valores ausentes definidos por el usuario" (*user-defined missing values*), a diferencia de los definidos por el sistema (*system-missing values* o *sysmis*). Estos últimos corresponden a los que establece el sistema para los espacios en blanco y caracteres ilegales que puedan haber en el archivo de datos. Aparecen en los listados representados por comas.

6. *Definir Columnas*: consiste en especificar la amplitud de la columna. Podemos hacerlo también desde el propio archivo de datos.

7. *Definir Alineación*: seleccionar la justificación de las entradas de la columna: *Izquierda*, *Derecha* y *Centrado*.

8. *Especificar medida*. Se puede seleccionar uno de los tres niveles de medida:

   - *Escala*: los valores de datos son numéricos en una escala de intervalo. Las variables de escala deben ser numéricas.

   - *Ordinal*: los valores de datos representan categorías con un cierto orden intrínseco (bajo, medio, alto; totalmente de acuerdo, de acuerdo, en desacuerdo). Las variables ordinales pueden ser de cadena o valores numéricos. Notar que para variables de cadena ordinales, se asume que el orden alfabético de los valores de cadena indica el orden correcto de las categorías; en el caso de bajo, medio y alto el orden sería alto, bajo y medio (orden que no es correcto), por lo que es más fiable utilizar códigos numéricos para representar datos ordinales que usar etiquetas de estos códigos.

   - *Nominal*: los valores de datos representan categorías sin un cierto orden intrínseco. Las variables nominales pueden ser de cadena o valores numéricos que representan categorías diferentes, por ejemplo *1 = Hombre* y *2 = Mujer*.

C.1.1. Transformación de una variable

Elegimos *Transformar* … *Calcular*, y realizamos los siguientes pasos:

a) Asignar un nombre y un tipo (por defecto será numérica) a la nueva variable en el cuadro de texto de la *Variable de destino*.

b) Definir la expresión numérica que va a permitir calcular los valores de la misma. Para ello utilizaremos los nombres de las variables del archivo (podemos escribirlos o seleccionarlos del listado que aparece), constantes, operadores y funciones.

c) Pulsar *Aceptar*.

Para construir estas expresiones pueden usarse operadores aritméticos como +, −, *, /, ** y funciones como SQRT, EXP, LG10, LN, ARTAN, COS, SIN, ABS, MOD10, TRUNC, RND, entre otras:

- MOD10 (Resto resultante de dividir entre 10).
- TRUNC (Parte entera de un número).
- RND (Redondeo al entero más cercano).

Pulsando el botón derecho sobre le nombre de la función, aparece su descripción. El argumento de las funciones debe ir entre paréntesis. Existen funciones particulares como UNIFORM y NORMAL, que se utilizan para la generación de variables aleatorias. Son de bastante utilidad en estudios de simulación.

Es importante tener cuidado con el orden de utilización de los operadores y no olvidar que los valores antiguos pierden su vigencia al recodificar una variable sobre el mismo nombre.

El botón *SI*… permite realizar modificaciones similares, pero sujetas a que se verifique una condición lógica. Se incluirán aquellos casos que verifiquen la condición. Los que no la cumplan pasarán a ser valores ausentes definidos por el sistema.

Una expresión lógica es una expresión que puede ser evaluada como verdadera o falsa en función de los valores de las variables en ella relacionadas. El nexo de las variables son los operadores de relación: = , >= , <= , < , > , ~= . Es posible formar expresiones complejas, utilizando los operadores lógicos: AND (&), OR (|), NOT (~).

C.1.2. Recodificación de una Variable

A partir de una variable podemos crear otra cuyos valores sean una recodificación de los de la primera. Esta recodificación podemos hacerla tanto en la misma variable como en variables diferentes. Para ello, seleccionaremos *Transformar … Recodificar … En distintas variables*. Se abre una ventana en la que deberemos asignar un nombre (y una etiqueta si queremos) a la nueva variable.[1]

C.1.3. Filtrado de datos

El programa SPSS permite seleccionar determinados casos para un próximo proceso, bien temporalmente o de forma permanente, sobre la base de un criterio lógico o de una decisión aleatoria. Para ello seleccionaremos el menú *Datos … Seleccionar casos*. La selección de individuos puede ser temporal (*filtrados*) o permanente (*eliminados*). En la selección permanente eliminamos del archivo activo los individuos deseados, mientras que en la temporal, la selección es recuperable (los casos son filtrados). En esta última situación, los individuos (casos) del archivo que no satisfacen la condición aparecerán marcados como excluidos mediante una línea que cruza en diagonal su número de fila. Aparece también una variable llamada *filter*$ que el sistema crea para controlar el filtrado de datos.

Especificaciones:

- *Todos los casos*: indica que quiere procesar todos los casos del archivo de datos de trabajo.

[1] Cuidado!, si se selecciona … borrarás la variable original.

- *Si se satisface la condición*: indica que quiere procesar sólo los casos que satisfagan una condición lógica. Para especificar o cambiar la condición, pulse en *Si*. Esta alternativa crea la variable *filter*$, que el sistema crea para controlar el filtrado de datos.
- *Muestra aleatoria de casos*: indica que queremos seleccionar los casos de forma aleatoria para su procesamiento. Si ha tecleado las especificaciones de muestreo, éstas aparecerán junto al botón de comando Muestra. Si no, o si quiere cambiarlas, pulse en *Muestra*(véase más adelante). Esta alternativa también crea la variable *filter*$.
- *Basándose en el rango del tiempo o de los casos*: permite seleccionar los casos deseados siempre que sean consecutivos.
- *Usar variable de filtro*: indica que quiere utilizar los valores de una variable numérica existente para controlar el filtrado de casos. Seleccione la variable de la lista de la izquierda. Los casos cuyo valor sea 0, o ausentes, en la variable de filtro se excluyen del análisis.

C.2 Análisis exploratorio de datos

Primero abrir el archivo de datos.

a) **Tablas de frecuencias:** *Analizar … Estadísticos descriptivos … Frecuencias*. SPSS también cuenta con el menú alternativo *Analizar … Tablas personalizadas* que posibilita alterar el formato del resultado.

b) **Estadísticos:** *Analizar … Estadísticos descriptivos … Descriptivos* donde hay que seleccionar la variable o variables de interés y después *Opciones* para escoger los estadísticos que interesan. Sin embargo con este menú no se pueden obtener los percentiles. Para obtenerlos hay que usar *Analizar … Estadísticos descriptivos … Frecuencias* y entrar en la opción *Estadísticos* en donde se seleccionan los percentiles deseados.

c) **Gráficos de sectores:** *Gráficos … Sectores* y seleccionaremos una o varias variables apareciendo un cuadro de diálogo, cuyas opciones pasamos a comentar:

1) *Resúmenes para grupos de casos*: Genera un gráfico en el que cada sector corresponde a un valor de la variable seleccionada. El tamaño del sector se determina por la opción *Los sectores representan*, esta opción aparece en el cuadro de diálogo que surge después de pulsar el botón *Definir* del cuadro anterior. También es posible que los sectores representen otra cosa, como la media de los valores de otra variable, el valor máximo, etc.; esto se consigue con la opción *Otra función resumen*. Se puede también editar el gráfico haciendo doble clic sobre él, con posibilidad de cambiar colores, tramas, desgajar sectores, etc.

2) *Resúmenes para distintas variables*. Permite que los sectores representen variables en lugar de grupos de casos. Cada sector representa una función de una determinada variable (por ejemplo, la suma de los valores de sus casos).

3) *Valores individuales de los casos*. Se resume una única variable, los casos ya son valores agrupados de la variable. Cada sector representa el valor de un caso individual. Con *Gráficos … Interactivos … Sectores* podemos obtener representaciones con efectos más llamativos.

d) **Diagramas de barras:** *Gráficos … Barras y Gráficos … Interactivos … Barras*.

e) **Histogramas:** *Gráficos … Histograma o Gráficos … Interactivos … Histograma*.

f) **Gráficos de tallo y hojas:** *Analizar … Estadísticos descriptivos … Explorar.*

g) **Diagramas de caja:** *Gráficos … Diagrama de cajas.*

h) **Diagramas de dispersión:** *Gráficos … dispersión … simple* o *Gráficos … Interactivos … Diagrama de dispersión*, en donde aparece un cuadro de diálogo en el que se puede elegir qué variable ocupará el eje X y qué otra el eje Y.

C.3 Inferencia sobre una o más poblaciones

Primero abrir el archivo de datos.

a) **Análisis de una muestra:** *Analizar … Comparar medias … Prueba T para una muestra.* Aparece una pantalla en cuyo campo *Contrastar Variables* introducimos las varaibles que queremos contrastar. En esta ventana, seleccione *Opciones*, para introducir el grado de confianza deseado (por defecto es del 95 %). Al final se pulsa *Aceptar*.

b) **Análisis de dos muestras emparejadas o relacionadas (Prueba T para muestras relacionadas).** Para efectuar la prueba T para muestras relacionadas se necesita una columna en los datos para cada una de las variables a comparar. Seleccionamos *Analizar … Comparar medias … Prueba T para muestras relacionadas.* Aparece la ventana en donde seleccionamos las variables en cuya comparación estamos interesados. Al hacer la primera selección en la columna de variables, esta aparece en el recuadro selecciones actuales como *variable 1*, y al realizar la segunda selección aparecerá como *variable 2*. En ese momento, ya seleccionadas las dos, es cuando las podemos introducir en la columna variables relacionadas. Se pulsa *Aceptar*.

c) **Análisis de dos muestras independientes (Prueba T para muestras independientes).** El programa necesita una columna en el editor de datos que contenga los valores de la variable cuyas medias en las dos poblaciones se desea comparar, y otra que indica la población o grupo a que pertenece cada individuo. A continuación, seleccionamos *Analizar … Comparar medias … Prueba T para muestras independientes.* Aparece una ventana en donde, en primer lugar seleccionamos una variable numérica y con el puntero la situamos en la ventana de *Contrastar variables*. A continuación, seleccionamos una única variable de agrupación y pulsamos *Definir grupos*. En esta ventana debemos especificar los dos grupos de la variable de contraste, eligiendo entre:

- *Usar valores especificados.* Escribimos un valor para el Grupo 1 y otro para el Grupo 2. Los casos con otros valores quedarán excluidos.
- *Punto de corte.* Escribimos un número que divida los valores de la variable de agrupación en dos conjuntos.

Si la variable de agrupación es de cadena corta, por ejemplo, *SI* y *NO*, podemos escribir una cadena para el Grupo 1 y otra para el Grupo 2. Los casos con otras cadenas quedarán excluidos del análisis. Una vez completada la ventana y tras pulsar *Continuar*, volvemos a la ventana de *Prueba T para muestras independientes*. Pulsando el botón *Opciones* podemos introducir un valor entre 1 y 99 para el coeficiente de confianza de un intervalo, cuyo valor por defecto es del 95 %. Tras pulsar el botón *Aceptar*.

d) **Pruebas de normalidad.** *Analizar … Estadísticos descriptivos … Explorar.* Aparece la ventana *Explorar*. En el caso de una muestra situamos la variable en la ventana *Dependientes*, y dejamos *Factores* en blanco. Para dos muestras independientes, situamos la variable a contrastar en la ventana *Dependientes*, y la variable que forma los grupos en la de Factores. Para dos muestras emparejadas situamos una variable con la diferencia de las dos originales en la ventana *Dependientes*, y dejamos *Factores* en blanco. A continuación, debemos pulsar el botón

Gráficos y en la nueva ventana escoger la opción de *Histograma* y activar la opción de *Gráficos con pruebas de normalidad.*

D Uso de la calculadora en la estadística

Las explicaciones las basaremos en la utilización de las calculadoras Casio fx-82MS, fx-83MS, fx-85MS, fx-270MS, fx-300MS y fx-350MS.

Cálculos estadísticos

Para realizar cálculos estadísticos en la calculadora, tenga en cuenta los siguientes comentarios:

- Utilice MODE 2 para ingresar el modo estadístico SD.
- Utilice SHIFT CLR 1 = para borrar la memoria.
- Ingrese los datos usando la secuencia de tecla siguiente: <Dato> DT.
- Tenga en cuenta la tabla siguiente para los cálculos que se necesiten:

Para llamar este tipo de valor:	Realice esta operación:
$\sum x^2$	SHIFT S-SUM 1
$\sum x$	SHIFT S-SUM 2
n	SHIFT S-SUM 3
$\overline{x}$	SHIFT S-VAR 1
σ_n	SHIFT S-VAR 2
σ_{n-1}	SHIFT S-VAR 3

Ejemplo D.1

Calcule n, $\sum x$, $\sum x^2$, $\overline{x}$, σ_n y σ_{n-1} para los datos siguientes: 55, 54, 51, 55, 53, 53, 54 y 52.
SOLUCION:

- Primero, ingresamos al modo SD con las teclas MODE 2.
- Luego, borramos la memoria con la secuencia de teclas SHIFT CLR 1 =.
- Posteriormente, ingresamos los datos: 55 DT 54 DT 51 DT 55 DT 53 DT 53 DT 54 DT 52 DT
- Por último, calculamos las medidas estadísticas pedidas:

Suma de los cuadrados de los valores $\sum x^2 = 22{,}805$	SHIFT S-SUM 1 =
Suma de valores $\sum x = 427$	SHIFT S-SUM 2 =
Número de datos $n = 8$	SHIFT S-SUM 3 =
Media aritmética $\overline{x} = 53{,}375$	SHIFT S-VAR 1 =
Desviación estándar poblacional $\sigma_n = 1{,}316956719$	SHIFT S-VAR 2 =
Desviación estándar muestral $\sigma_{n-1} = 1{,}407885953$	SHIFT S-VAR 3 =

Precauciones con el ingreso de datos

- DT DT ingresa el mismo dato dos veces.
- También puede ingresar múltiples entradas del mismo dato usando SHIFT ;. Por ejemplo, para ingresar el dato 110 diez veces presiones 110 SHIFT ; 10 DT.
- Mientras ingresa datos o después de completar el ingreso de datos, puede usar las teclas △ y ▽ para ir visualizando a través de los datos que ha ingresado.
- Si ingresa múltiples ingresos del mismo dato usando SHIFT ; para especificar la frecuencia de datos (número de ítemes de datos) como se describe anteriormente, pasando a través de los datos muetra el ítem de dato y una pantalla separada para la frecuencia de datos (freq).
- Los datos visualizados pueden editarse, si así lo desea. Ingrese el valor nuevo y presione la tecla = para reemplazar el valor antiguo por el valor nuevo. Esto también significa que si desea realizar alguna otra operación (cálculo, llamada de resultados de cálculos estadísticos, etc.), siempre deberá presionar primero la tecla AC para salir de la presentación de datos.
- Presionando la tecla DT en lugar de = después de cambiar un valor sobre la presentación, registra el valor que ha ingresado como un elemento de dato nuevo, y deja el valor antiguo tal como está.
- Puede borrar el valor del dato visualizado usando △ y ▽, y luego presionando SHIFT CL. Borrando un valor de dato ocasiona que todos los valores siguientes se desplacen hacia arriba.
- Después de ingresar los datos en el modo SD, no podrá visualizar o editar más los datos ítemes de datos individuales, después de cambiar a otro modo.

Bibliografía

[1] AGRESTI, A., *Categorical data analysis*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1990.

[2] BARBOSA, R.; LLINÁS, H., *Procesos estocásticos con aplicaciones*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2013.

[3] HOSMER, D. and LEMESHOW S., *Applied Logistic Regression*, Segunda edición, John Wiley and Sons, 2000.

[4] KALB, K. y KONDER, P., *Una visión histórica del concepto moderno de integral*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2006 (editor: Dr. rer. nat. Humberto LLinás).

[5] KLEINBAUM, D. and KLEIN, M., *Logistic Regression: A self Learning Text*, Segunda edición, Ed. Springer, 2002.

[6] LLINÁS, H.; ROJAS, C., *Estadística descriptiva y distribuciones de probabilidad*. Barranquilla: Ediciones Uninorte, 2005.

[7] LLINÁS, H., *Precisiones en la teoría de los modelos logísticos*, Revista Colombiana de Estadística, Volumen 29, Número 2, pág. 239-265, 2006.

[8] LLINÁS, H., *Estadística inferencial*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2006.

[9] LLINÁS, H., *Medida e integración*. Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2007.

[10] LLINÁS, H., *Applet: La ley de los grandes números*. Se puede encontrar en el siguiente link: http://ylang-ylang.uninorte.edu.co/Objetos/Estadistica/LeyDeGrandesNumeros/index.html

[11] LLINÁS, H., *Applets de estadística*, 2007. Se puede encontrar en el siguiente link: *http://ylang-ylang.uninorte.edu.co:8080/drupal/?q=node/238*

[12] LLINÁS, H.; ALONSO, J. FLÓREZ, K., *Introducción a la estadística con aplicaciones en Ciencias Sociales*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2012.

[13] LLINÁS, H., *Introducción a la estadística matemática*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2014.

[14] LLINÁS, H., *Introducción a la teoría de probabilidad*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2014.

[15] NELDER, J.A. and WEDDERBURN, R.W.M., *Generalized linear models*. The Journal of the Royal Statistical Society, serie A 135, pág.370-384, 1972.

[16] PÉREZ, C., *Estadística práctica con Statgraphics*. España: Prentice Hall, 2002.

[17] Página web de datos estadísticos del Institute for Digital Research and Education (IDRE) de la Universidad de California en Los Angeles (UCLA): *https://stats.idre.ucla.edu/*. En especial, consultar: *https://stats.idre.ucla.edu/other/examples/alr2/*