参数估计

1、矩估计 C

① 令 $\bar{x}=EX$，计算出 EX 关于某一变量 θ 的表达式

② 令表达式为 θ，计算出 $\hat{\theta}=\frac{a+b\bar{x}}{c}$，$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$，不带具体值的称为矩估计量

③ 具体的 $\bar{x}$ 代入表达式，即求出了矩估计值

例一.

通关题型 | 矩估计 离散型

【例 6-1】设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta(0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数，利用总体 X 的样本值3,1,3,0,3,1,2,3，求 θ 的矩估计值.

① 令 $\bar{X}=EX$，计算 $EX=g(\theta)$

② 解得 $\hat{\theta}=\theta(X_1,X_2,\ldots,X_n)$，即矩估计量

① $\bar{X}=EX=0\cdot\theta^2+1\cdot 2\theta(1-\theta)+2\cdot\theta^2+3\cdot(1-2\theta)=3-4\theta$.

② $\hat{\theta}=\frac{3-\bar{x}}{4}$，$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$

③ $\bar{x}=\frac{3+1+3+0+3+1+2+3}{8}=2$，$\theta$ 的矩估计值为 $\frac{1}{4}$

例二.

通关题型 | 矩估计 连续型

【例 6-2】 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $(\theta>0)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的一个简单随机样本，求参数 θ 的矩估计量.

① 令 $\overline{X}=EX$，计算 $EX=g(\theta)$

② 解得 $\hat{\theta}=\theta(X_1,X_2,\dots,X_n)$，即矩估计量

① $\overline{x}=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=\sqrt{\theta}\int_0^1 x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}\,x^{\sqrt{\theta}+1}}{\sqrt{\theta}+1}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$

② 得 $\hat{\theta}=\left(\frac{\overline{x}}{1-\overline{x}}\right)^2$，$\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i/n$

2. 最大似然估计

① 构造似然函数 $L(\theta)$（抽到样本 X_i 的概率）

- 1. 离散型：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$
- 2. 连续型 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$

② 对似然函数取 ln 得 $\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta)$

③ 解方程 $\frac{d(\ln L(\theta))}{d\theta}=0$，得驻点，即最大似然估计 $\hat{\theta}$（若 $L(\theta)$ 单增，$\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2\cdots x_n\}$，反之取最大）

通关题型 II 极(最)大似然估计 连续型

【例 6-3】 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $(\theta>0)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的一个简单随机样本，求参数 θ 的极大似然估计量.

① 构造似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$

② 取对数 $\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta)$

③ 解方程 $\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=0$，得驻点，即最大似然估计 $\hat{\theta}$.

解：设抽到的样本为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$L(\theta)=\sqrt{\theta}x_1^{\sqrt{\theta}-1}\cdot\sqrt{\theta}x_2^{\sqrt{\theta}-1}\cdot\sqrt{\theta}\cdot x_3^{\sqrt{\theta}-1}\cdots\sqrt{\theta}x_n^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}$

$\ln L(\theta)=\ln\left(\theta^{\frac{n}{2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}\right)=\ln\theta^{\frac{n}{2}}+\sqrt{\theta}-1\cdot\ln(x_1x_2\cdots x_n)$.

$=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\ln\sum_{i=1}^{n}x_i$

$\frac{d(\ln L(\theta))}{d\theta}=0$，即 $\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$.

得 $\hat{\theta}=\frac{n}{(\ln\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}$.

故 θ 的极大似然估计量为 $\frac{n}{(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}$

通关题型 II 极(最)大似然估计 离散型

【例 6-4】设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta(0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数，利用 X 的样本值 3,1,3,0,3,1,2,3，求 θ 的最大似然估计值.

4个3

2个1

1个0

1个2.

1.离

2.连

③ 解方程

解: $L(\theta)=\underbrace{\theta^2}_{1个0}\cdot\underbrace{[2\theta\cdot(1-\theta)]^2}_{2个1}\cdot\underbrace{\theta^2}_{1个2}\cdot\underbrace{(1-2\theta)^4}_{4个3}$ (出现几次,对应概率乘几次)

$L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$

$\ln(L(\theta))=\ln4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$

$\frac{d(\ln(L(\theta)))}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=0$, 得 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

故 θ 的最大似然估计值为 $\frac{7-\sqrt{13}}{12}$

附表：常见分布的矩估计和最大似然估计

X服从分布	矩估计量	最大似然估计量
0-1分布 (参数为 p)	$\hat{p}=\overline{X}$	$\hat{p}=\overline{X}$
$B(n,p)$	$\hat{p}=\dfrac{\overline{X}}{n}$	$\hat{p}=\dfrac{\overline{X}}{n}$
$P(\lambda)$	$\hat{\lambda}=\overline{X}$	$\hat{\lambda}=\overline{X}$
$U(a,b)$	$\hat{a}=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$ $\hat{b}=\overline{X}+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$	$\hat{a}=\min\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ $\hat{b}=\max\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$
$E(\lambda)$	$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$.	$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$

了解规律即可

无偏性：若 $E(\hat{\theta})=\theta$，则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量。

常见结论

● 5个常用结论（背）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，$EX=\mu, DX=\sigma^2$

1) $EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$；

2) $E\bar{X}=\mu$，$D\bar{X}=\dfrac{\sigma^2}{n}$；

3) $ES^2=\sigma^2$　$E\bar{X}^2=D\bar{X}+(E\bar{X})^2$

例：

$DX=E(X^2)-[E(X)]^2$

$\mu^2+\dfrac{\sigma^2}{n}=E\bar{X}^2$

通关题型 3　无偏性.有效性　　必考+速成

【例 6-6】设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，记 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，证明 $T=\bar{X}^2-\dfrac{S^2}{n}$ 是 μ^2 的无偏估计量.

解：$ET=E(\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2)=E\bar{X}^2-\frac{1}{n}E(S^2)=\dfrac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\dfrac{\sigma^2}{n}=\mu^2$

故 $T=\bar{X}^2-\dfrac{S^2}{n}$ 是 μ^2 的无偏估计量

有效性：设 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$ 是 θ 的无偏估计量，若 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$，则 $\hat{\theta}_1$ 更有效

通关题型 3　无偏性、有效性　　必考+速成

【例 6-7】设 X_1, X_2, X_3 为取自总体 X 的简单随机样本，总体均值 $EX = \mu \neq 0$，　DX 存在

则以下三个无偏估计量中最有效的是（ A ）.

(A) $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i$　　(B) $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3$

(C) $\hat{\mu}_3 = X_1$　　(D) 有效性相同

- **无偏性：**

  若 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量，称 $\hat{\theta}$ 具有无偏性.

- **有效性：**

  设 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计量，若有 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效.

解：设总体方差为 σ^2

$D\hat{\mu}_1 = D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{3}$

$D\hat{\mu}_2 = D(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3) = \frac{1}{4}DX_1 + \frac{1}{9}DX_2 + \frac{1}{36}DX_3 = \frac{7}{18}\sigma^2$

$D\hat{\mu}_3 = DX_1 = \sigma^2$　　有 $D\hat{\mu}_1 < D\hat{\mu}_2 < D\hat{\mu}_3$　∴ $\hat{\mu}_1$ 最有效.

期望和方差

一、期望：

①离散型：设分布律 $P(X=x_k)=p_k$，则 $EX=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$

②连续型：设概率密度 $f(x)$，有

$$\begin{cases} EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx \\ E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx \end{cases}$$

（若为 $f(x,y)$，则 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)d\sigma$，$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)d\sigma$

二、方差

$$DX=E(X^2)-(E(X))^2$$

例：
$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1<x<2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$
求 EX，$EY(Y=X^2)$，DX

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1x^2dx+\int_1^2x(2-x)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1x^3dx+\int_1^2x^2(2-x)dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2=\frac{7}{6}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}$$

常见分布的期望与方差.

$D(X)=EX^2-(EX)^2.$

$P(A-B)$

$=P(A)-P(A\cap B)$

$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

常见分布的期望方差

分布类型	分布律或概率密度	期望	方差
0-1 分布	$p_k=P\{X=k\}=p^kq^{1-k}\quad(q=1-p),(k=0,1)$	p	pq
二项分布	$p_k=P\{X=k\}=C_n^kp^kq^{n-k}$ $(q=1-p),(k=1,2,\ldots,n)$	np	npq
泊松分布	$p_k=P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad(i=0,1,2,3\ldots)$	λ	λ
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
正态分布	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty,\sigma>0)$	μ	σ^2
指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
几何分布	$p_k=P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$, $(k=1,2,\ldots,n),0<p<1$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$

【例 4-3】

（I）设随机变量 $X\sim B(n,p)$，已知 $E(X)=0.8$， $D(X)=0.48$

则 n,p 的值分别是?

$$\begin{cases} np=0.8\\ np(1-p)=0.48\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=0.4\\ n=2.\end{cases}$$

（II）设 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $EX^2=6$，则 $\lambda=$ 2.

$DX=EX^2-(EX)^2$

$\lambda=6-\lambda^2$

$\Downarrow$

$\lambda=2$ 或 -3 (舍)

$\lambda^2+\lambda-6=0$

$1 \quad -2$

$1 \quad 3$

期望、方差的运算性质

通关题型1　数学期望 EX、方差 DX　（由运算性质）

【例4-4】 (I) 设随机变量 $X\sim N(2,1), Y\sim N(1,2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $Z=X-2Y+4\sim$ $N(4,9)$

$E(X-2Y+4)=EX-2EY+4=2-2+4$

$D(X-2Y+4)=DX+4DY=1+8=9$

（II）设随机变量 X_1,X_2 相互独立，其中 $X_1\sim U[0,6]$，X_2 服从参数 $\lambda=\frac{1}{3}$ 的指数分布，则 $D(2X_1-X_2)=$ 21.

$D(2X_1-X_2)=4DX_1+DX_2$

$=4\cdot\frac{6^2}{12}+\frac{1}{(\frac{1}{3})^2}$

$=12+9=21$

- 数学期望的性质（☆关键在于分清 X 和 C!）:

① $E(C)=C$（其中 C 为常数）; ② $E(X+C)=E(X)+C$;

③ $E(CX)=CE(X)$; ④ $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$;

①-④无条件成立.

⑤ 设 X,Y 相互独立，则 $E(XY)=EXEY$.

- 方差的性质

① $D(C)=0$（其中 C 为常数）; ② $D(X+C)=DX$;

③ $D(CX)=C^2DX$;

④ 若 X,Y 相互独立，则 $D(X\pm Y)=DX+DY$.

⑤ $D(X\pm Y)=DX+DY\pm2\mathrm{cov}(X,Y)$

⑥ $D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\,\mathrm{cov}(a,b)$.

数学期望EX（核心）、方差DX　协方差Cov(X,Y)　相关系数ρXY　不相关与独立　二维正态分布

协方差

定义：$\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EXEY$

通关题型 2　协方差 Cov(X,Y)

【例4-5】(I)（接【例 3-1】）盒中黑、红、白球各 2 个，从中随机任取 2 个球，X 表示取得的黑球的个数，Y 表示取得的红球的个数．求 $Cov(X,Y)$．

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	0
2	$\frac{1}{15}$	0	0

解：$\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EXEY$

XY的取值：0,1

$EXY=0\cdot P(X=0,Y=0)+1\cdot P(X=1,Y=1)=\frac{4}{15}$

$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{2}{5} & \frac{8}{15} & \frac{1}{15}\end{pmatrix}$　$EX=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{2}{5} & \frac{8}{15} & \frac{1}{15}\end{pmatrix}$，$EY=\frac{2}{3}$

$\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{7}{45}$

协方差的性质：

通关题型 2 协方差 Cov(X,Y)

(由运算性质)

【例 4-7】设 X 服从 $N(1,4)$，Y 服从 $P(1)$，且 X,Y 相互独立，则 $Cov(X+3,Y+2X)=$ 8 .

$$cov(X+3,Y+2X)=cov(X,Y+2X)$$
$$=cov(X,Y)+cov(X,2X)$$
$$=0+2cov(X,X)$$
$$=2DX$$
$$=8$$

- 协方差的性质 $Cov(X,Y)=EXY-EXEY$

① $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$；② $Cov(X,C)=0$；

☆ ③ $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$；$Cov(X,X)=DX$；

☆ ④ $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$；

⑤ $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2Cov(X,Y)$；（知三求一）

⑥ 设 X,Y 相互独立，则 $Cov(X,Y)=0$； ☆

相关系数 ρ_{xy}

定义：$\rho_{xy}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$

若 $\rho_{xy}=0$，则 X,Y 不相关，若为 -1，X,Y 负相关，若为 1，X,Y 正相关.

通关题型 4 不相关与独立

【例 4.9】 设随机变量 X,Y 满足 $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$，$\mathrm{Cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow X,Y$ 不相关.

则下列说法不正确的是（D）.

（A）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ （B）$E(XY)=E(X)E(Y)$

（C）X 与 Y 不相关 （D）X 与 Y 独立.

X,Y 独立 $\Downarrow\ \not\Uparrow$

- X,Y 不相关的四个等价命题 “已知 X,Y 不相关 / 判 X,Y 是否相关”

$\mathrm{Cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow \rho_{XY}=0 \Leftrightarrow EXY=EXEY \Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY$

性质：X,Y 不相关的 4 个等价命题：

不相关 $\Leftrightarrow \rho_{xy}=0 \Leftrightarrow \mathrm{cov}(X,Y)=0$

而 $\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EXEY$，故 $EXY=EXEY$

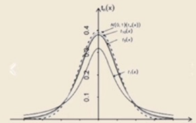
$D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{cov}(X,Y)=DX+DY$，

故有 $\rho_{xy}=0 \Leftrightarrow \mathrm{cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow EXY=EXEY \Leftrightarrow D(X+Y)=DX+DY$.

☆：独立能推不相关，不相关推不出独立！

三大统计分布：知道这些分布的形式

通关题型 2　三大分布(卡方,t,F)



【例 5-4】 如果随机变量 $T\sim t($B$)$，则（　　）.

(A) $\frac{1}{T}\sim t(n)$　(B) $ET=0$　(C) $T^2\sim F(n,1)$　(D) $\frac{1}{T^2}\sim F(1,n)$

$ET=\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)=0$

三个分布均要求样本服从 $N(0,1)$.

$T\sim t$

核式目 (例) $X_1,X_2,X_3 \overset{iid}{\sim} N(0,1)$

$X_1^2\sim\chi^2(1)$，$X_2^2+X_3^2\sim\chi^2(2)$

- **χ^2 分布**　$D(X_2^2+X_3^2)=2\cdot2=4$　$\chi^2(2)$

定义　$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布于 $N(0,1)$，则

则 $X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n)$，$n$ 为自由度（参数）

性质　①设 $\chi_1^2\sim\chi^2(n_1),\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$，且 χ_1^2,χ_2^2 独立，

则 $\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2)$；　可加性 独立才存在

②若 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，则有 $E(\chi^2)=n$，$D(\chi^2)=2n$

- **F 分布**　(两个 χ^2 分布比自由度再相除)

定义　设 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X,Y 独立，

则 $\frac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$，$(n_1,n_2)$ 为自由度（参数）

性质　若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$

- **t 分布**

定义　设 ① $X\sim N(0,1)$，② $Y\sim\chi^2(n)$，③ 且 X,Y 独立，

则 $\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$，$n$ 为自由度（参数）

性质　①t 分布的概率密度 $f(t)$ 为偶函数；

②若 $T\sim t(n)$，则 $T^2\sim F(1,n)$.

例：样本 $X_1, X_2 \cdots X_n \sim N(0,1)$，$Z = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_8^2$，$Y = X_9^2 + \cdots + X_{15}^2$

则 $\frac{7Z}{8Y} = ?$

$Z \sim \chi^2(8)$，$Y \sim \chi^2(7)$，$\frac{7}{8} \cdot \frac{\frac{\chi^2(8)}{8}}{\frac{\chi^2(7)}{7}} = F(8,7)$

正态总体抽样分布的性质（样本必须符合正态分布）

通关题型 3 正态总体抽样分布

统计量的分布

【例 5-7】设 $X_1, X_2, \dots, X_n\ (n \ge 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则（D）.

(A) $\cancel{n}\bar{X} \sim N(0,1)$ (B) $nS^2 \sim \chi^2(\cancel{n})$

(C) $\cancel{(n-1)}\bar{X}/S \sim t(n-1)$ (D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$

$X_1^2 \sim \chi^2(1)$

$\sum_{i=2}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$

(A) $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$

$\dfrac{\bar{X}}{1/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\bar{X} \sim N(0,1)$

(B) $\dfrac{(n-1)S^2}{1} \sim \chi^2(n-1)$

(C) $\dfrac{\bar{X}-0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$

● 单正态抽样分布（必须倒背如流！整体性思维！）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则

1) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$；

2) $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立；

正态

3) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$； $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；

$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$；

证 $\dfrac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}} \sim t(n-1)$

4) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$\dfrac{\bar{X}-u}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$\bar{X} \sim N(u, \dfrac{\sigma^2}{n})$,

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$\bar{X} \sim (0, \frac{1}{n})$.

$\dfrac{\bar{X}-0}{1/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\bar{X} \sim N(0,1)$.

$\dfrac{\bar{X}-0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$.

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 样本

总体

$S^2 = \dfrac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

单侧检验.

通关题型 2　均值μ，单侧检验　　　判类型 + 套公式

【例 7-2】某部门对鸡蛋价格进行调查．抽查全省 19 个集市，算得平均售价为3.399．鸡蛋售价服从正态分布．已知往年平均售价稳定在3.25，标准差为0.262 (单位：元/500 克).问在显著性水平0.05 下，能否认为当前鸡蛋售价明显高于往年?

$N(3.25, 0.262^2)$

① 提出原假设 H_0 和备择假设 H_1

$H_0: u \le u_0 = 3.25$ ， $H_1: u > u_0 = 3.25$.

② 写出适当的检验统计量 U 和拒绝域

检验统计量 $z = \dfrac{\bar{x} - u_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim z_{0.05}(19)$.

拒绝域 $z > z_{0.05} = 1.645$

③ 在 H_0 成立的条件下，计算检验统计值

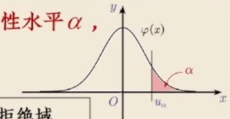
$$z = \frac{3.399 - 3.25}{0.262/\sqrt{19}} = 2.479.$$

④ 执行统计判决

2.479 > 1.645，故落在拒绝域内，拒绝 H_0，…

● 总体 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$，显著性水平 α，

$H_0: \mu \le \mu_0$，　$H_1: \mu > \mu_0$



	检验统计量	拒绝域
σ^2 已知	$U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$u > u_\alpha$
σ^2 未知	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t > t_\alpha(n-1)$

$H_0: \mu \ge \mu_0$，　$H_1: \mu < \mu_0$

	检验统计量	拒绝域
σ^2 已知	$U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$u < -u_\alpha$
σ^2 未知	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t < -t_\alpha(n-1)$

双侧检验

通关题型1　均值μ，双侧检验

判类型 + 套公式

【例 7-1】设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩 $\bar{x}=66.5$，标准差为 $s=15$（单位：分）．问:在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?（已知 $t_{0.025}(35)=2.0301$ ）

① **提出原假设 H_0 和备择假设 H_1**

$H_0: \mu=\mu_0=70$　　　$H_1: \mu\neq\mu_0=70$

② **写出适当的检验统计量 T 和拒绝域**

检验统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t_{0.025}(35)$. $=2.0301$

拒绝域 $|t|\geqslant t_{0.025}(35)$.

③ **在 H_0 成立的条件下，计算检验统计值**

$|t|=\left|\dfrac{66.5-70}{15/\sqrt{35}}\right|=1.4<2.0301$

④ **执行统计判决**

不落在拒绝域内，不拒绝 H_0，故可认为 ....

● **假设检验的基本思想——“小概率事件原理”**

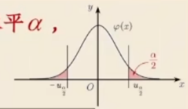
小概率事件在一次试验中几乎不可能发生，如果发生，则有理由认为假设 H_0 不成立，从而拒绝假设 H_0.

● **显著性检验:**

给定样本容量 n，控制犯第一类错误的概率不大于 α（“小概率事件发生概率 α ”），称为**显著性检验问题**，给定的 α 称为**显著性水平**.

● **总体 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，显著性水平 α，**

$H_0:\mu=\mu_0$，　$H_1:\mu\neq\mu_0$



	检验统计量	拒绝域
σ^2 已知	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\lvert u\rvert>u_{\frac{\alpha}{2}}$
σ^2 未知	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert t\rvert>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

方差检验：

通关题型 3　方差 σ^2 的检验　χ^2　　判类型 + 套公式

【例 7-3】某厂生产的电池寿命长期服从方差 $\sigma^2=5000$ 的正态分布．现从中随机抽取 26 个电池，测得其寿命的样本方差 $s^2=9200$，问能否推断这批电池寿命的方差较以前有显著的增大（$\alpha=0.02$）？

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$.

① 提出原假设 H_0 和备择假设 H_1

$H_0:\ \sigma^2\le\sigma_0^2=5000$ ，$H_1:\ \sigma^2>\sigma_0^2=5000$

② 写出适当的检验统计量 T 和拒绝域

检验统计量 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

拒绝域 $\chi^2\geqslant\chi^2(25)=41.566$

③ 在 H_0 成立的条件下，计算检验统计值

$\chi^2=\frac{25\cdot 9200}{5000}=46>41.566$，落在拒绝域内

④ 执行统计判决

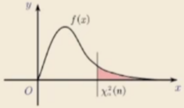
故拒绝 H_0．故明显增大

● 总体 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，显著性水平 α，

(1) $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2\ne\sigma_0^2$

(2) $H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$

(3) $H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$

	检验统计量	拒绝域
μ 已知	$\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$	(1) $\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ (2) $\chi^2>\chi^2_{\alpha}(n)$ (3) $\chi^2<\chi^2_{\alpha}(n)$ 
μ 未知	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	(1) $\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ (2) $\chi^2>\chi^2_{\alpha}(n-1)$ (3) $\chi^2<\chi^2_{\alpha}(n-1)$