- IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE RAVNI -

* Izometrijska preslikavanja su preslikavanja ravni na samu sebe čije je osnovno svojstvo da čuvaju udaljenost između tačaka.

* Izometrijska transformacija $J: E^2 \to E^2$ je DIREKTNA ako "čuva" orjentaciju ravni E^2, tj. svaki trougao te ravni preslikava u trougao iste orjentacije.

* Izometrijska transformacija $J: E^2 \to E^2$ je INDIREKTNA ako svaki trougao te ravni preslika u trougao suprotne orjentacije.

* Proizvod
  1. dvije direktne izometrije je direktna
  2. jedne direktne i jedne indirektne je indirektna izometrija
  3. dvije indirektne izometrije je direktna izometrija.

- OSNA SIMETRIJA -

* Tačka A_1 je simetrična tački A u odnosu na pravu a, u oznaci $S_a(A) = A_1$, ako je

  $AA_1 \perp a$ i prava a polovi duž AA_1.

* Ako $A \in a$, tada je $S_a(A) = A$, tj. A je fiksna (nepokretna) tačka simetrije S_a. Prava a se naziva osa simetrije.

* Osobine osne simetrije:
  1. Nepokretne su sve prave koje su normalne na pravu a.
  2. Ako je $S_a(A) = B$, tada je središte duži AB tačka na pravoj a.
  3. $S_a(A) = C$ i $S_a(B) = D \Rightarrow AB = CD$
  4. Kompozicija dvije jednake osne simetrije je identično preslikavanje, tj. $S_a \circ S_a = I$

⑤ Svaka indirektna izometrija ravni koja ima bar jednu nepokretnu tačku, predstavlja osnu simetriju

Teorema 1: Osna simetrija je indirektna izometrija

Teorema 2: Dvije osne simetrije neke ravni komutiraju akko su im ose normalne ili jednake, tj.

$$S_a \circ S_b = S_b \circ S_a \iff (a \perp b \ \vee \ a = b)$$

Teorema 3: Jedine prave koje se osnom simetrijom ravni preslikaju u sebe su osa te simetrije i sve prave te ravni koje su normalne na osu.

Teorema 4: Neka su p i q dvije različite komplanarne prave. Tada jedina moguća fiksna tačka kompozicije $S_q \circ S_p$ je zajednička tačka pravih p i q (ukoliko se sijeku), tj.

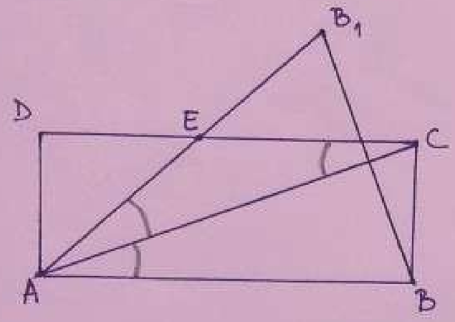
$$S_q \circ S_p(x) = x \iff p \cap q = \{x\}$$

Teorema 5: Kompozicija tri osne simetrije $S_c \circ S_b \circ S_a$ predstavlja osnu simetriju akko su a, b, c prave jednog pramena. Osa te simetrije pripada istom pramenu pravih.

DEFINICIJA: Skup svih pravih neke ravni koje se sijeku u nekoj tački S naziva se <u>pramen pravih</u> sa središtem S i označava se χ_S.
Skup svih pravih neke ravni koje su paralelne s nekom pravom a te ravni naziva se <u>pramen paralelnih pravih</u> i označava se χ_a.

Z/1 ✓ Dat je pravougaonik $ABCD$ $(AB > BC)$ i tačka B_1 simetrična sa B u odnosu na pravu AC. Neka se prave AB_1 i CD sijeku u tački E. Dokazati da je ΔACE jednakokraki.

Dokaz:



Budući da $A \in AC$ imamo da je A nepokretna tačka osne simetrije S_{AC}, tj.

$$S_{AC}(A) = A. \qquad (*)$$

Prema uslovu zadatka je

$$S_{AC}(B) = B_1. \qquad (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ dobijamo da je $AB \cong AB_1$, tj. ΔABB_1 je jednakokraki.

Osim toga, $AC \perp BB_1$ pa zbog činjenice da je ΔABB_1 jednakokraki trougao imamo da je AC simetrala $\angle BAB_1 = \angle BAE$. Dakle,

$$\angle BAC = \angle EAC. \qquad (1)$$

S druge strane,

$$\angle BAC = \angle ACD \text{ (naizmjenični)}. \qquad (2)$$

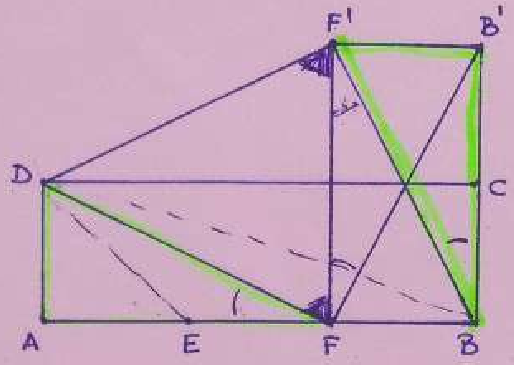
Iz (1) i (2) imamo

$$\angle EAC = \angle ACD,$$ tj. ΔACE je jednakokraki.

212. Neka je ABCD pravougaonik za koji je $AB = 3BC$. Tačke E, F pripadaju stranici AB tako da je $AE = EF = FB$. Dokazati da je:

$$\measuredangle AED + \measuredangle AFD + \measuredangle ABD = 90^\circ$$

Dokaz:



Neka je

$$B' = S_{CD}(B) \quad i \quad F' = S_{CD}(F) \Rightarrow BF = B'F'. \quad (o)$$

Budući da $D \in CD$, imamo da je D nepokretna tačka simetrije S_{CD}, tj. $S_{CD}(D) = D$.

Prema osobini (3) osne simetrije iz

$$S_{CD}(D) = D \quad \wedge \quad S_{CD}(F) = F' \quad \Rightarrow \boxed{DF = DF'} \quad (\Delta)$$

Dakle, $\Delta DFF'$ je jednakokraki, pa je

$$\boxed{\measuredangle DFF' = \measuredangle DF'F.} \quad (*)$$

Posmatrajmo ΔADF i $\Delta F'B'B$:

$$AF = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}\cdot 3BC = 2BC = BC + CB' = BB', \text{ tj.}$$

$$\left.\begin{array}{l} AF = BB' \\ \measuredangle DAF = \measuredangle BB'F' = 90^\circ \\ AD = BC = \frac{1}{3}AB = BF \overset{(o)}{=} B'F' \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta ADF \cong \Delta F'B'B.$$

$$\Rightarrow \boxed{DF = BF'} \quad (***)$$

$$\measuredangle DFA = \measuredangle F'BB' \quad (1)$$

Primijetimo da su $\measuredangle F'BB'$ i $\measuredangle BF'F$ naizmjenični uglovi, tj.

$$\measuredangle F'BB' = \measuredangle BF'F. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) imamo

$$\boxed{\sphericalangle DFA = \sphericalangle BF'F .} \qquad (**)$$

Sada je:

$$\sphericalangle DF'B = \sphericalangle BF'F + \sphericalangle FF'D \overset{(*)}{\underset{(**)}{=}} \sphericalangle DFA + \sphericalangle DFF' = \sphericalangle AFF' = 90^\circ .$$

$\overset{(\Delta)}{\underset{(***)}{\Longrightarrow}}$ $\Delta DF'B$ je jednakokraki pravougli trougao, pa je

$$\sphericalangle DBF' = 45^\circ . \qquad (3)$$

Osim toga, ΔAED je jednakokraki pravougli trougao, pa je

$$\sphericalangle AED = 45^\circ . \qquad (4)$$

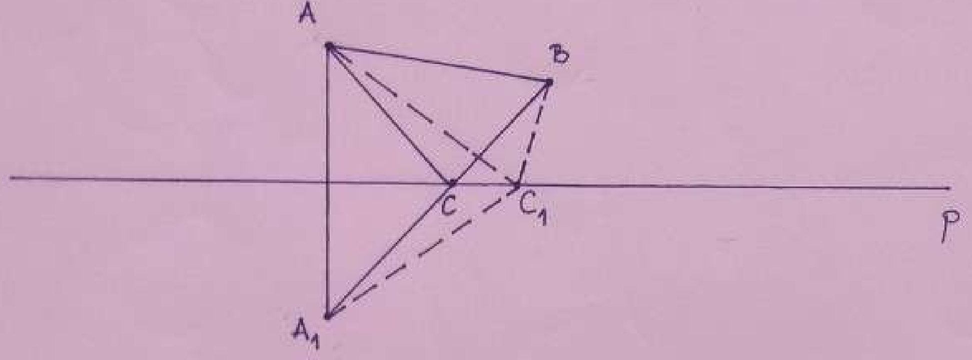
Iz (3) i (4) $\Rightarrow$

$$\boxed{\sphericalangle AED = \sphericalangle DBF' .}$$

$$\sphericalangle AED + \sphericalangle AFD + \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBF' + F'BB' + \sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC = 90^\circ .$$

213. Date su tačke A i B sa iste strane date prave p. Konstruisati tačku C na pravoj p tako da obim $\triangle ABC$ bude najmanji.

Rješenje:



Treba odrediti tačku $C \in p$, tako da zbir duži AC i BC bude najmanji.

Neka je $S_p(A) = A_1$. Presječna tačka duži A_1B i prave p je tražena tačka C.

Zbir duži AC i BC jednak je duži A_1B, jer je

$$\left.\begin{array}{l} S_p(C) = C \\ S_p(A) = A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow AC = A_1C. \text{ Dakle, } AC + BC = A_1C + BC = A_1B. \quad (*)$$

Dokažimo da je na taj način određena tačka C tražena. U tom cilju uzmimo proizvoljnu tačku $C_1 \in p$ i $C_1 \neq C$.

Budući da je: $S_p(A) = A_1$ i $S_p(C_1) = C_1$ to je

$$AC_1 = A_1C_1. \quad (**)$$

Iz $\triangle A_1BC_1$ imamo da je

$$A_1B < A_1C_1 + BC_1. \quad (***)$$

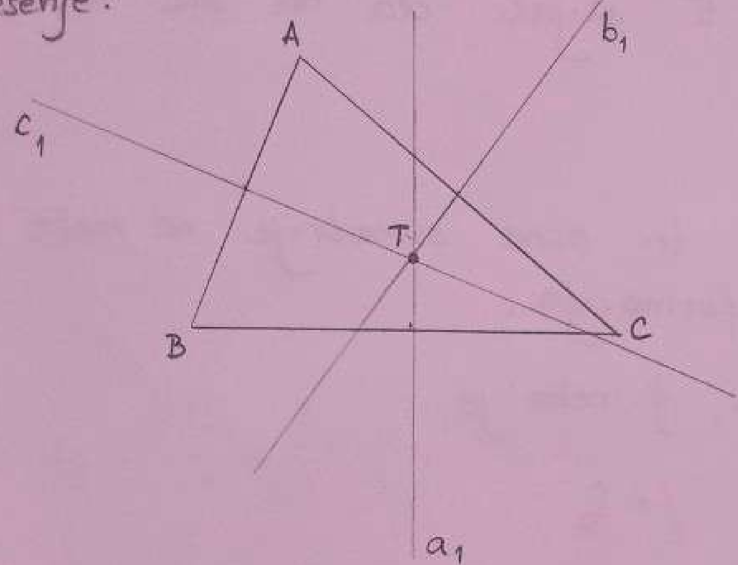
Iz (*), (**) i (***) slijedi

$$AC + BC < AC_1 + BC_1,$$

pa je obim $\triangle ABC$ manji od obima $\triangle ABC_1$.

$\boxed{2/4.}$ Dokazati da medijatrise stranica ΔABC pripadaju nekom pramenu.

Rješenje:



* Neka su a_1, b_1, c_1 - medijatrise stranica BC, CA, AB redom. Pokažimo da prave a_1, b_1, c_1 pripadaju jednom pramenu. Prema teoremu 5 dovoljno je pokazati da kompozicija tri osne simetrije $S_{a_1} \circ S_{b_1} \circ S_{c_1}$ je osna simetrija.

* Kako je osna simetrija indirektna izometrija (prema teoremi 1) a proizvod dvije indirektne izometrije direktna, te proizvod indirektne i direktne izometrije indirektna izometrija slijedi da

$$S_{a_1} \circ S_{b_1} \circ S_{c_1} \text{ je indirektna izometrija.} \qquad (1)$$

* Da bismo pokazali da je $S_{a_1} \circ S_{b_1} \circ S_{c_1}$ osna simetrija prema osobini (5), zbog (1), treba da pokažemo da indirektna izometrija $S_{a_1} \circ S_{b_1} \circ S_{c_1}$ ima bar jednu nepokretnu tačku.

Posmatrajmo:

$$S_{a_1} \circ S_{b_1} \circ S_{c_1}(B) = S_{a_1}(S_{b_1}(\underbrace{S_{c_1}(B)}_{=A})) = S_{a_1}(\underbrace{S_{b_1}(A)}_{C})$$
$$= S_{a_1}(C) = B \implies$$

B je jedna nepokretna tačka izometrije $S_{a_1} \circ S_{b_1} \circ S_{c_1}$, pa je $S_{a_1} \circ S_{b_1} \circ S_{c_1}$ osna simetrija.
Otuda, prema teoremi 5 slijedi da da su a_1, b_1, c_1 prave jednog pramena.

$\boxed{215.}$ Dokazati da proizvod tri osne simetrije ne može biti identična transformacija.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. neka je

$$S_a \circ S_b \circ S_c = I \quad / \circ S_c$$

$$S_a \circ S_b \circ \underbrace{S_c \circ S_c}_{=I} = S_c$$

$$S_a \circ S_b = S_c \qquad (*)$$

Prema teoremi 4 $S_a \circ S_b$ može imati najviše jednu nepokretnu tačku i to presječnu tačku pravih a i b, dok osna simetrija S_c ima beskonačno mnogo fiksnih tačaka (sve tačke prave c), što predstavlja kontradikciju s (*). Dakle, vrijedi tvrdnja.