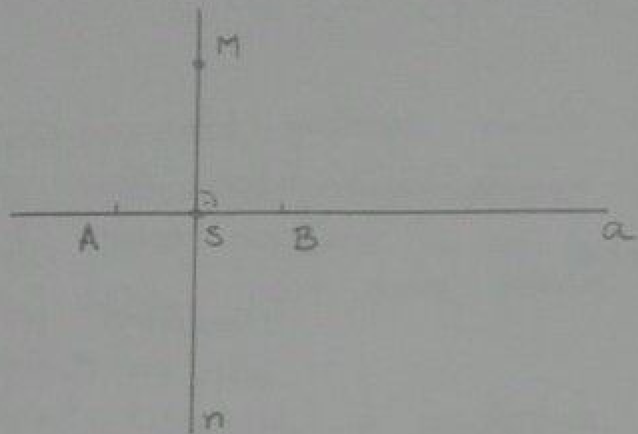
$\boxed{Z/1}$ U datoj tački date prave konstruisati normalu na tu pravu.

Rješenje:

* Analiza: Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je:



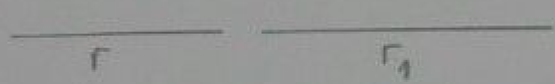
- a - data prava
- $S \in a$
- $n \perp a \wedge n \cap a = \{S\}$.

Neka su $A, B \in a$ takve da $A-S-B$ i $AS \cong SB$.
Primijetimo da za proizvoljnu tačku $M \in n$, $M \neq S$ vrijedi $MA \cong MB$ (zbog $\triangle ASM \cong \triangle BSM$ - prema sus).
Tačku M možemo konstruisati, a poslije toga i pravu $p(M, S) = n$.

* Konstrukcija:

① a, $S \in a$

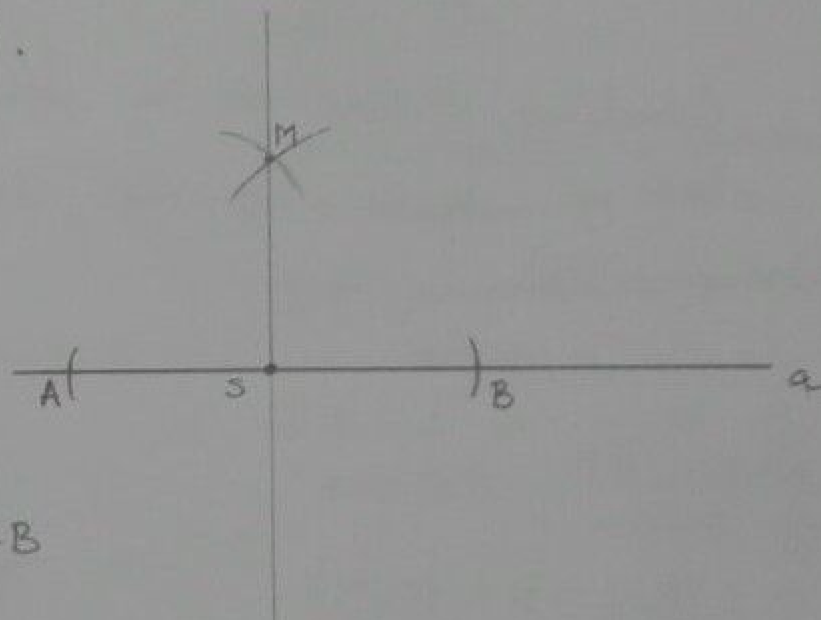
② dužine r, r_1, $r_1 > r$



③ $k(S, r) \cap a = \{A, B\}$, $A-S-B$

④ $k(A, r_1) \cap k(B, r_1) = \{M\}$ ⟶ sa jedne strane prave a

⑤ $p(M, S) = n$



* Dokaz:

Prema konstrukciji prava n sadrži tačku S.
Trebamo dokazati da $n \perp a$.
Prema konstrukciji je:

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong SB \\ MS \cong MS \\ AM \cong BM \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ASM \cong \triangle BSM \Rightarrow \angle ASM = \angle BSM \quad \blacksquare$$

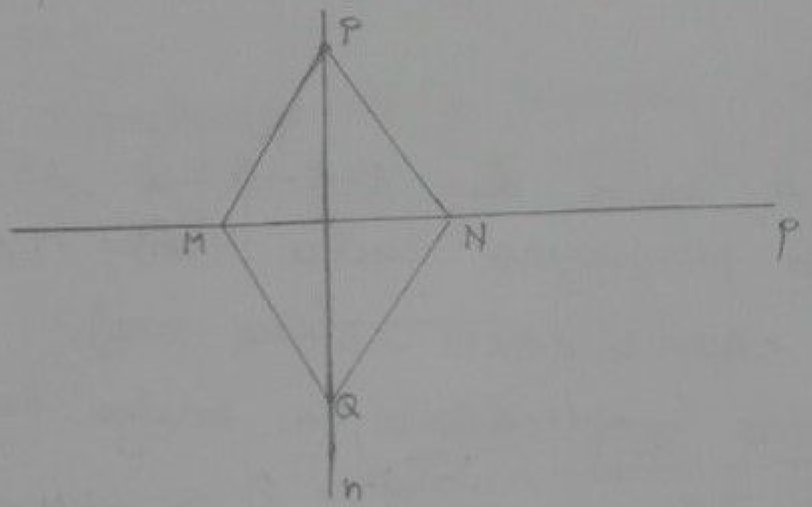
Kako je $\measuredangle ASM + \measuredangle BSM = 180^\circ$ i $\boxed{\cdot}$ $\Rightarrow \measuredangle ASM = \measuredangle BSM = 90^\circ$

* Diskusija: Jedinstvenost rješenja slijedi iz jedinstvenosti normale na datu pravu u datoj tački.

$\boxed{7/2.}$ Kroz datu tačku koja ne pripada datoj pravoj konstruisati normalu na datu pravu.

Rješenje:

* Analiza: Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je p data prava i $P \notin p$, i neka je n tražena prava, tj. $n \perp p \wedge P \in n$.



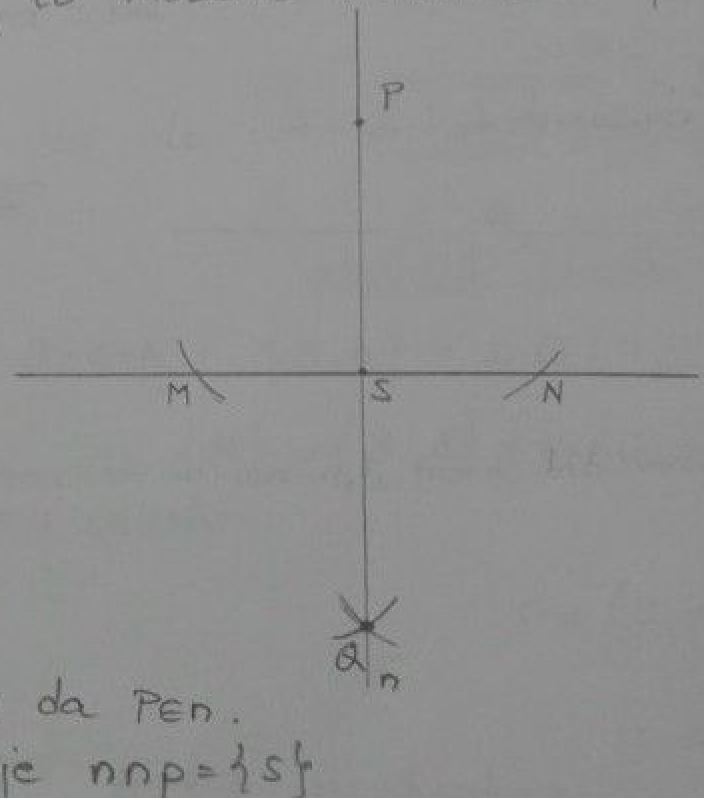
Označimo $p \cap n = \{S\}$, i neka su $M, N \in p$ takve da $MS \cong NS$. Primijetimo:

$$\left.\begin{array}{l} MS \cong NS \\ \measuredangle MSP = \measuredangle NSP = 90^\circ \\ PS \cong PS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS}$$

$\triangle MSP \cong \triangle NSP \Rightarrow \boxed{PM \cong PN}$

Odredimo tačku Q na pravoj n tako da $PM = MQ = QN$.

Kako je $MP = NP = MQ = NQ$, to možemo konstruisati pravu $n = p(P, Q)$.



* Konstrukcija:

① p, $P \notin p$

② dužina r

③ $k(P, r) \cap p = \{M, N\}$

④ $k(M, r) \cap k(N, r) = \{P, Q\}$

⑤ $n = p(P, Q)$

* Dokaz:

Na osnovu konstrukcije imamo da $P \in n$.

Dokažimo da je $n \perp p$. Neka je $n \cap p = \{S\}$

$$\left.\begin{array}{l} PM = PN = r \\ MQ = NQ = r \\ PQ = PQ \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \triangle PMQ \cong \triangle PNQ \Rightarrow \boxed{\measuredangle MPQ = \measuredangle NPQ} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} MP = PN = r \\ \sphericalangle MPS \overset{(1)}{=} \sphericalangle NPS \\ PS = PS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle MPS \cong \triangle NPS \Rightarrow \boxed{\sphericalangle MSP \cong \sphericalangle NSP} \quad (2)$$

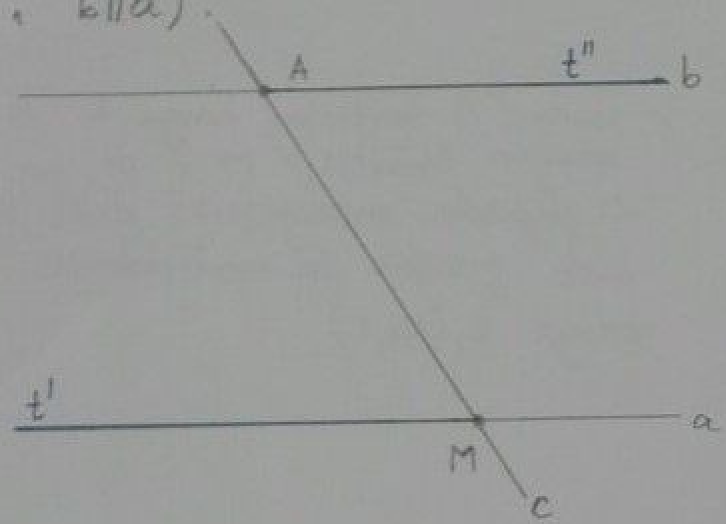
Kako je $\sphericalangle MSP + \sphericalangle NSP = 180°$ i (2) slijedi da $\sphericalangle MSP = \sphericalangle NSP = 90°$.

Dakle, $n \perp p$.

* Diskusija: Jedinstvenost rješenja slijedi iz jedinstvenosti normale na datu pravu u datoj tački.

213. Kroz datu tačku van date prave konstruisati pravu paralelnu toj pravoj.

Analiza: Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data prava a, tačka $A \notin a$, i neka je b tražena prava (tj. $A \in b$ i $b \parallel a$).



* Neka je c proizvoljna prava koja sadrži tačku A i siječe pravu a u tački M.
* Neka su:
  1. t' - poluprava s početnom tačkom M, $t' \subseteq a$
  2. t'' - poluprava s početnom tačkom A, $t'' \subseteq b$
  3. t' i t'' se nalaze sa različite strane prave c.

Kako je $a \parallel b$ to je

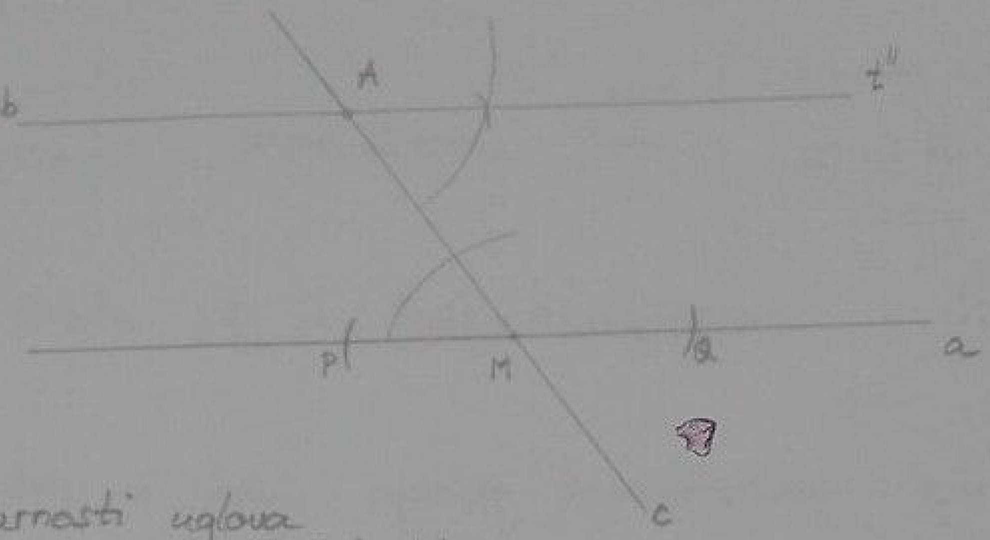
$$\sphericalangle t'MA = \sphericalangle MAt'',$$

pa pravu b nije teško konstruisati.

Konstrukcija:

1. a, $A \notin a$
2. c - proizvoljna prava takva da $A \in c$ i $a \cap c = \{M\}$
3. Neka su $P, Q \in a$ tako da $PM \cong MQ = r$, tj. $k(M, r) \cap a = \{P, Q\}$ i $P\text{-}M\text{-}Q$
4. $\sphericalangle MAt'' = \sphericalangle PMA$

⑤ b, $b \equiv t''$.



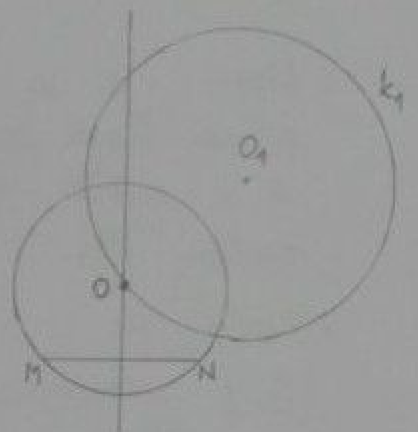
* Dokaz: Na osnovu podudarnosti uglova na transferzali (iz konstrukcije) dobijamo da su prave a i b paralelne

* Diskusija: Jedinstvenost rješenja slijedi iz petog Euklidovog aksioma.

2/4 Konstruisati krug k koji sadrži dvije date tačke M i N i čiji centar pripada datom krugu $k_1(O_1, r_1)$.

Rješenje:

* Analiza:



* Centar O traženog kruga k je jednako udaljen tačaka M i N, pa tačka O pripada medijatrisi duži MN i biće presjek te medijatrise i datog kruga $k_1(O_1, r)$

* Konstrukcija

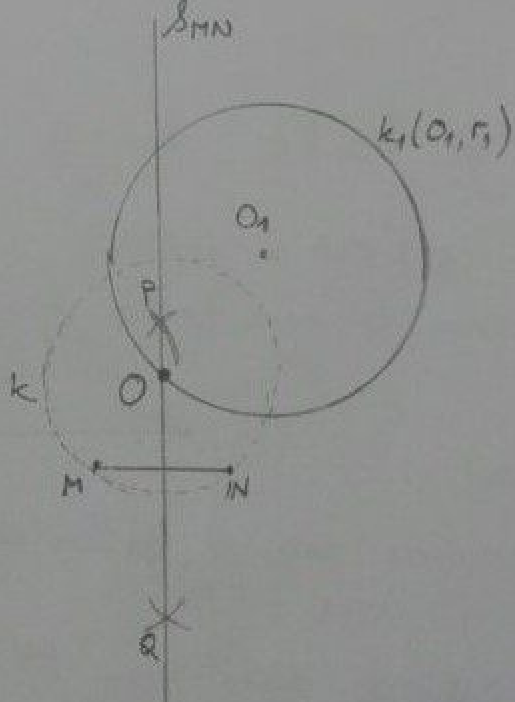
① $\overline{MN}$, $k_1(O_1, r_1)$

② $k(M, r) \cap k(N, r) = \{P, Q\}$ pri čemu je $r > \frac{\overline{MN}}{2}$

③ $s_{MN} = p(P, Q)$

④ $s_{MN} \cap k_1(O_1, r_1) = \{O\}$

⑤ $k(O, OM)$



* Dokaz: Treba dokazati da

① krug k sadrži tačke M i N

② centar kruga k pripada krugu k_1.

Krug k sadrži tačku M po konstrukciji, a tačku N jer je $OM \cong ON$ (tačka O pripada medijatrisi duži $\overline{MN}$, pa je jednako udaljena od krajnjih tačaka). Centar kruga k, tačka O, pripada krugu k_1 po konstrukciji.

- Diskusija: Zadatak ima dva, jedno ili nijedno rješenje u zavisnosti da li konstruisana medijatrisa siječe, dodiruje ili nema zajedničkih tačaka s krugom k_1.