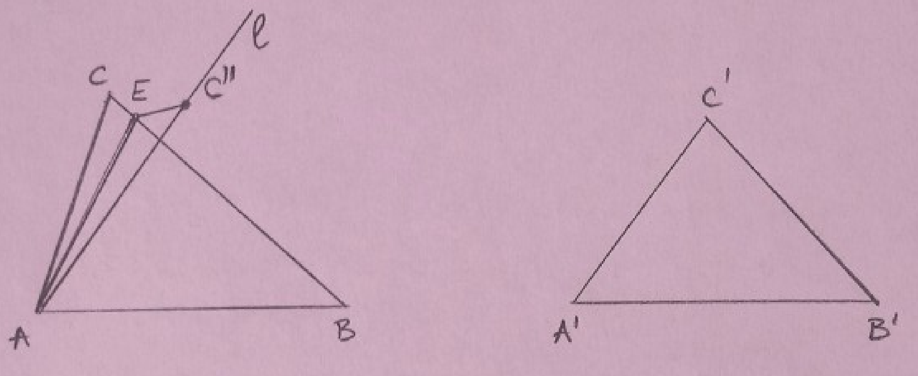
218. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ trouglovi takvi da je

$$AB \cong A'B' \quad i \quad AC \cong A'C'.$$

Dokazati ekvivalenciju:

$$BC > B'C' \iff \sphericalangle BAC > \sphericalangle B'A'C'.$$

Dokaz:



$AB \cong A'B'$ (1)
$AC \cong A'C'$ (2)

($\Leftarrow$) Neka je $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B'A'C'$. Tada postoji poluprava l unutar $\sphericalangle BAC$ takva da je

$$\sphericalangle BA,l \cong \sphericalangle B'A'C'.$$

Neka $C'' \in l$ tako da $AC'' \cong A'C'$.

Dakle,

$$\left.\begin{array}{c} AC'' \cong A'C' \\ \sphericalangle BA,l \cong \sphericalangle B'A'C' \\ AB \cong A'B' \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle ABC'' \cong \triangle A'B'C' \Rightarrow \boxed{BC'' \cong B'C'} \ (*)$$

Trebamo dokazati da je $BC > B'C'$, pa je zbog $(*)$ dovoljno dokazati da $BC > BC''$. Razlikujemo:

Ako tačka $C'' \in \overline{BC}$, onda je to trivijalno ispunjeno.

Pretpostavimo da $C'' \notin \overline{BC}$. Neka je tačka E presječna tačka stranice BC i simetrale $\sphericalangle CAC''$. Tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{c} AC'' \cong A'C' \overset{(2)}{\cong} AC \\ \sphericalangle C''AE \cong \sphericalangle EAC \\ AE \cong AE \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle AEC \cong \triangle AEC'' \Rightarrow \boxed{CE \cong C''E}$$

Otuda je $BC = BE + EC = \underbrace{BE + EC'' > BC''}_{\text{stranica trougla manja je od zbira druge dvije stranice } (\triangle BEC'')} \overset{(*)}{\cong} B'C'$

($\Rightarrow$) Neka je $BC > B'C'$. Pokažimo da ne može vrijediti

$$\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'. \qquad (3)$$

Zaista, ako bi vrijedilo (3), u tom slučaju bi zbog (1), (2), (3) vrijedilo $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. (sus), a iz te podudarnosti bi imali da je $BC \cong B'C'$, a to je kontradikcija s pretpostavkom da je $BC > B'C'$.

Pokažimo da ne može vrijediti

$$\measuredangle BAC < \measuredangle B'A'C'. \qquad (4)$$

Zaista, ako bi vrijedilo (4), tada prema već dokazanom ($\Leftarrow$) vrijedilo bi da je $B'C' > BC$ što predstavlja kontradikciju s pretpostavkom da $BC > B'C'$.

Budući da smo pokazali da ne može vrijediti (3), a ni (4) zaključujemo da mora da vrijedi

$$\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'.$$

– ZNAČAJNE TAČKE TROUGLA –

1. Težište
2. Ortocentar
3. Centar upisane kružnice
4. Centar opisane kružnice

Teorema 1 (o težištu):

Težišne duži trougla sijeku se u jednoj tački, težištu trougla. T i to tako da je $AT = 2A_1T$, gdje je A tjeme trougla, A_1 - središte naspramne stranice.

* Težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 računajući od vrha trougla.

Teorema 2 (o ortocentru):

Prave određene visinama nekog trougla sijeku se u jednoj tački, ortocentru trougla.

Teorema 3 (o centru upisane kružnice):

Bisektrise unutrašnjih uglova trougla sijeku se u jednoj tački, centru upisane kružnice.

Teorema 4 (o centru opisane kružnice):

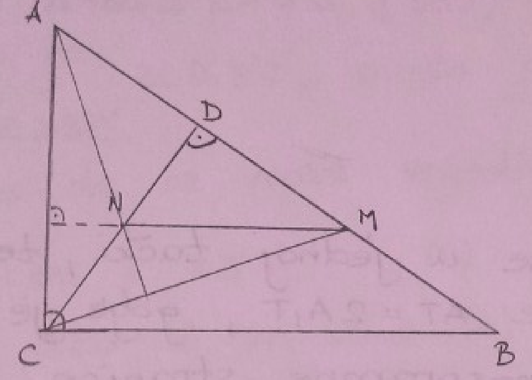
Simetrale stranica trougla sijeku se u jednoj tački, centru opisane kružnice.

* Položaj značajne tačke zavisi od vrste trougla:

1. TEŽIŠTE kod svakog trougla pripada unutrašnjosti trougla.
2. ORTOCENTAR kod
   a) oštrouglog trougla pripada unutrašnjosti trougla
   b) pravouglog trougla je tjeme kod pravog ugla
   c) tupouglog trougla je u njegovoj spoljašnjosti.
3. CENTAR UPISANE KRUŽNICE pripada unutrašnjosti trougla.
4. CENTAR OPISANE KRUŽNICE je u unutrašnjosti ili spoljašnjosti trougla, ovisno da li je on oštrougli ili tupougli trougao. Centar opisane kružnice kod pravouglog trougla je središte njegove hipotenuze.

211. U pravouglom $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90°$) CD je visina iz tjemena C na hipotenuzu AB. Ako je N središte duži CD i M središte duži BD, dokazati da je $AN \perp MC$.

Dokaz:



N - središte duži CD
M - središte duži BD
} => MN je srednja linija $\triangle CBD$ koja odgovara stranici BC, pa je $BC \parallel MN$. (1)

* $\angle ACB = 90° \Rightarrow AC \perp BC$ (2)
* Iz (1) i (2) $\Rightarrow MN \perp AC \Rightarrow MN$ je visina $\triangle ACM$
* CD je visina iz tjemena C $\triangle ABC \Rightarrow CD \perp AB$ (3)
* $M \in p(A,B) \wedge (3) \Rightarrow CD \perp AM$, tj. CD je visina $\triangle ACM$.
* Budući da za visine MN i CD $\triangle ACM$ vrijedi

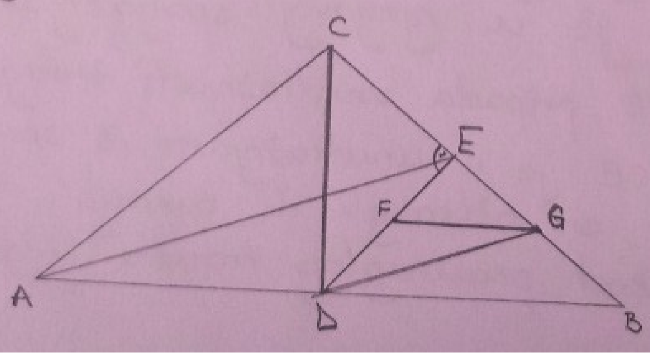
$$CD \cap MN = \{N\}$$

prema teoremi 2 slijedi da je N ortocentar $\triangle ACM$.
Otuda, $AN \perp CM$.

212. Tačka D je središte osnovice AB jednakokrakog $\triangle ABC$, E je ortogonalna projekcija tačke D na $p(B,C)$, a F središte duži DE. Dokazati da je

$$p(A,E) \perp p(C,F)$$

Rješenje:



* Neka je G središte duži BE.
* Budući da je D središte osnovice AB slijedi da je DG srednja linija $\triangle AEB$,

koja odgovara stranici AE, pa je

$$p(A,E) \parallel p(D,G). \qquad (1)$$

* Kako je F središte duži DE, to je FG srednja linija $\triangle DBE$, koja odgovara stranici BD, pa je

$$p(F,G) \parallel p(D,B), \text{ tj. } p(F,G) \parallel p(A,B) \qquad (2)$$

* Kako kod jednakokrakog trougla visina i težišna duž iz vrha C pripadaju jednoj pravoj imamo da

$$p(A,B) \perp p(C,D) \qquad (3)$$

* Iz (2) i (3) $\Rightarrow$

$$p(F,G) \perp p(C,D) \qquad (4)$$

* Prema uslovu zadatka E je ortogonalna projekcija tačke D na BC, pa je

$$p(D,E) \perp p(B,C) \equiv p(G,C) \qquad (5)$$

* Iz (4) i (5) da su $p(D,E)$ i $p(F,G)$ prave kojima pripadaju visine $\triangle CDG$.
Dakle, tačka njihovog presjeka $p(F,G) \cap p(D,E) = \{F\}$ je ortocentar $\triangle CDG$. Otuda vrijedi

$$p(C,F) \perp p(D,G). \qquad (6)$$

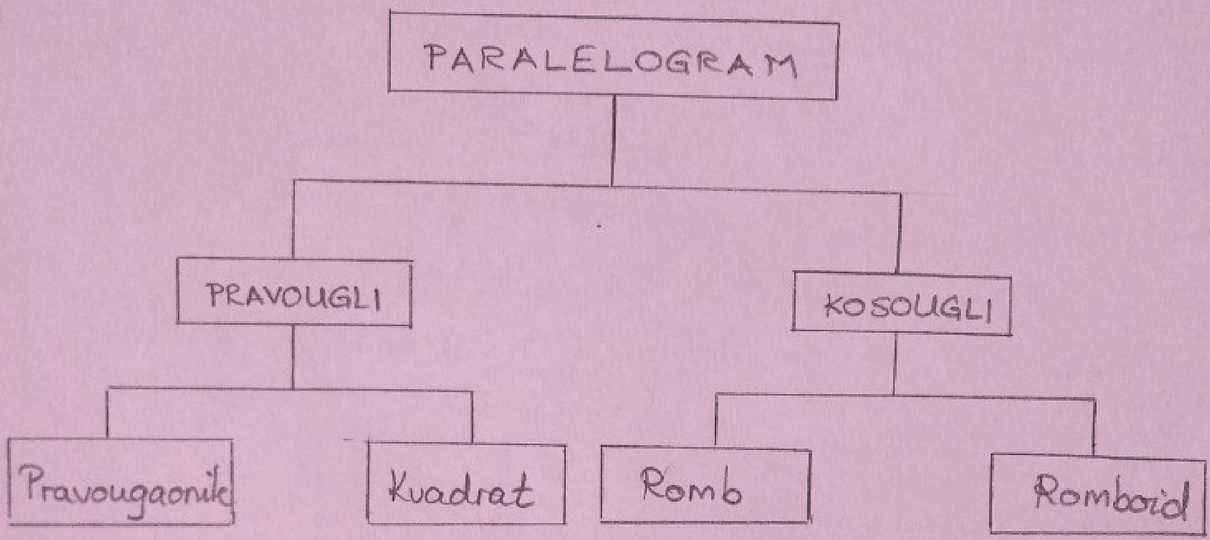
* Iz (6) i (1) slijedi

$$p(C,F) \perp p(A,E)$$

–ČETVEROUGAO–

Teorema 1: Zbir unutrašnjih uglova četverougla je 360°.
Teorema 2: Zbir spoljašnjih uglova četverougla je 360°.

PODJELA ČETVEROUGLA:
1. PARALELOGRAM
2. TRAPEZ
3. TRAPEZOID



Definicija: Paralelogram je četverougao sa dva para paralelnih

Teorema 3: Neka je ABCD konveksan četverougao. Tada su sljedeći iskazi ekvivalentni

1. Četverougao ABCD je paralelogram.
2. Svaka dva susjedna unutrašnja ugla četverougla ABCD su suplementni uglovi.
3. Parovi naspramnih uglova četverougla ABCD su parovi podudarnih uglova.
4. $AB \parallel CD$ i $AB \cong CD$
5. $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$
6. Dijagonale četverougla se polove, tj. AC i BD imaju zajedničko središte.

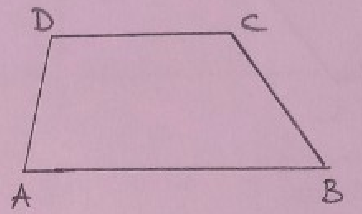
Teorema 4: a) Paralelogram je romb ako su mu dijagonale međusobno normalne.

b) Paralelogram je pravougaonik ako su mu dijagonale međusobno podudarne.

c) Paralelogram je kvadrat ako su mu dijagonale međusobno normalne i podudarne.

<u>Definicija</u>: Mnogougao je PRAVILAN ako su mu sve ivice i svi unutrašnji uglovi međusobno podudarni.
(Npr. jednakostraničan trougao, kvadrat, itd.)

<u>Definicija</u>: Četverougao sa jednim parom paralelnih stranica je TRAPEZ.



AB, CD - osnovice trapeza
AD, BC - kraci trapeza.

Trapez je jednakokraki ako je $BC \cong AD$ i nije $BC \parallel AD$, a pravougli ako je jedan njegov unutrašnji ugao $90°$.

<u>Teorema 5</u>: a) Uglovi na osnovicama jednakokrakog trapeza su jednaki.
b) U jednakokrakom trapezu dijagonale su jednake.

Definicija: Duž koja spaja sredine krakova trapeza je srednja linija trapeza.

<u>Teorema 6</u>: Srednja linija trapeza je paralelna osnovicama trapeza i jednaka njihovom poluzbiru.

Definicija: Četverougao bez ijednog para paralelnih stranica je TRAPEZOID.

Deltoid - to je trapezoid kojeg jedna dijagonala dijeli na dva nepodudarna jednakokraka trougla.