MATEMATIČKE OSNOVE KOMPJUTERSKE NAUKE

Rok za predaju zadaće:

1. Gdje je greška u sljedećem "dokazu"?

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1.$$

   a. Precizno definisati i objasniti grešku (greške) u gornjem "dokazu";

   b. Dokazati: ako je $1 = -1$, onda je $2 = 1$;

   c. Svaki *pozitivan* realan broj r ima dva kvadratna korijena - jedan pozitivan i jedan negativan. Standardna konvencija je da se izraz $\sqrt{r}$ odnosi na pozitivni korijen od r. Koristeći poznate osobine množenja realnih brojeva, dokazati da za pozitivne brojeve r i s,

$$\sqrt{rs} = \sqrt{r}\cdot\sqrt{s}.$$

2. Pokazati da je $\log_7 n$ ili cio ili iracionalan, gdje je n prirodan broj. Koristiti poznate činjenice o cijelim brojevima koje Vam trebaju, ali jasno naznačiti te činjenice.

3. Ako stepenujemo iracionalan broj iracionalnim brojem, može li rezultat biti racionalan? Pokazati (dokazom po slučajevima) da može tako što ćete razmatrati $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

4. Dokazati kontradikcijom da je $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ iracionalan.

5. Neka su koeficijenti polinoma

$$P_m(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

   cijeli brojevi. Dokazati da je svaki realan korijen ovog polinoma cio ili iracionalan. **Hint.** Ako je $p \in \mathbb{N}$ prost broj i p dijeli a^k, gdje su $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \in \mathbb{N}$, onda p dijeli a.

6. Dokazati: ako je $n \in \mathbb{N}$ i $2^n - 1$ prost broj, onda je n također prost broj.

7. Neka je $n \in \mathbb{Z}$. Koristeći dokaz po slučajevima, dokazati da je $n^2 - 3n + 9$ neparan.

8. Dokazati da na zabavi od $n \geq 2$ ljudi, makar dvoje ima isti broj prijatelja (od ljudi na zabavi) (pretpostavljamo da je "... biti prijatelj ... " simetrična relacija - ako je osoba a prijatelj osobi b, onda je i osoba b prijatelj osobi a).

9. Ako je c neparan cio broj, pokazati da jednačina $n^2 + n - c = 0$ nema cjelobrojnih korijena.

10. Dokazati da ne postoji prirodan broj n takav da je $n^2 + n^3 = 100$.