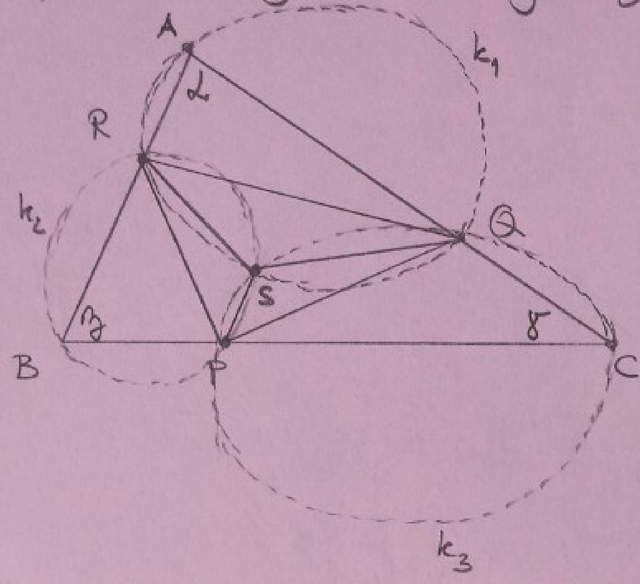
213. Neka su P, Q, R proizvoljne tačke stranica BC, AC, AB $\triangle ABC$. Dokazati da se krugovi opisani oko $\triangle AQR$, $\triangle PBR$, $\triangle PQC$ sijeku u jednoj tački.

Dokaz:



* Neka su k_1, k_2, k_3 opisani krugovi oko $\triangle AQR$, $\triangle PBR$, $\triangle PQC$. Neka su α, β, γ unutrašnji uglovi $\triangle ABC$.
* Neka je $k_2 \cap k_3 = \{S\}$ druga presječna tačka krugova k_2 i k_3. Otuda su $\square BPRS$ i $\square PCQS$ tetivni (četverouglovi oko kojih su opisani krugovi), pa je zbog teoreme 9

$$\left.\begin{aligned} \measuredangle RSP &= 180^\circ - \beta \\ \measuredangle QSP &= 180^\circ - \gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \measuredangle RSQ = 360^\circ - \measuredangle RSP - \measuredangle QSP$$

$$\boxed{\measuredangle RSQ = \beta + \gamma}$$

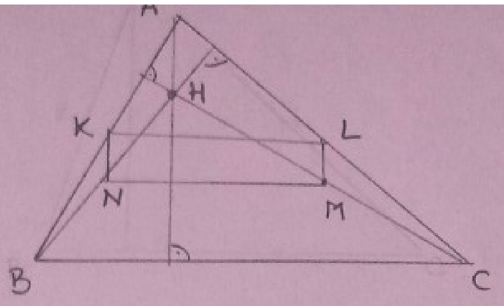
$$\Rightarrow \measuredangle RAQ + \measuredangle RSQ = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$\overset{th.\,9}{\Rightarrow}$ $\square ARSQ$ je tetivan, pa se oko njega može opisati kružnica, a to je baš k_1. Dakle, $k_1 \ni S$.

$$k_1 \cap k_2 \cap k_3 = \{S\}.$$

214. Neka je H ortocentar $\triangle ABC$. Ako su K, L, M, N središta duži AB, AC, HC, HB dokazati da je $\square KLMN$ pravougaonik.

Dokaz:



* KL i MN su srednje linije trouglova ΔABC i ΔHBC, i odgovaraju istoj stranici BC, pa kao takve su podudarne i paralelne, tj.

$$KL = MN = \frac{1}{2} BC \quad i \quad KL \parallel BC \parallel MN.$$

Otuda prema iskazu ④ teoreme 3 (o paralelogramu) slijedi da $\square KLMN$ je paralelogram.
Dovoljno je još da dokažemo da mu je ugao prav.
Duž KN je srednja linija ΔABH pa je paralelna s AH, tj. s pravom koja sadrži visinu ΔABC iz tjemena A.
Dakle, $KN \perp BC$, a $BC \parallel MN \parallel KL$.

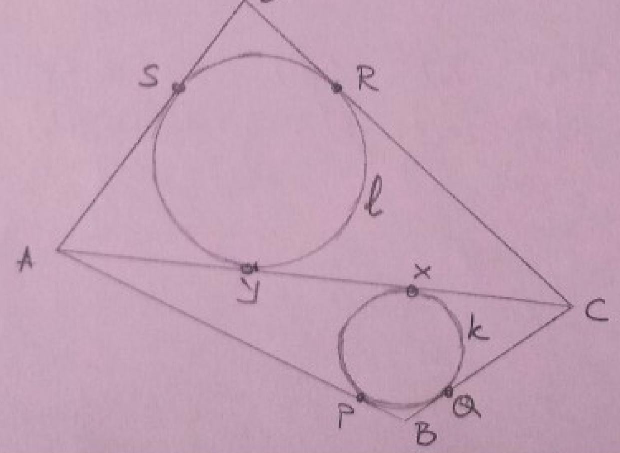
$\Rightarrow KN \perp KL$ tj. paralelogram $\square KLMN$ je pravougli.

Osim toga, $KL = MN = \frac{1}{2} BC$, $KN = ML = \frac{1}{2} AH$.

Dakle, $\square KLMN$ je pravougaonik.

$\boxed{215.}$ Neka je ABCD konveksan četverougao. Dokazati da se krugovi upisani u ΔABC i ΔACD dodiruju akko je četverougao ABCD tangentan.

Rješenje:



* U ovom zadatku ekvivalenciju nećemo dokazivati u dva smjera, već direktno.
Prije toga izvedimo neke relacije koje važe kod proizvoljnog konveksnog četverougla ABCD.

* Neka su P, Q, X dodirne tačke upisanog kruga k $\triangle ABC$ s njegovim stranicama AB, BC i CA, te R, S, Y dodirne tačke kruga l $\triangle ACD$ s njegovim stranicama CD, DA i AC.

$$AX \overset{\text{TH.7}}{=} AP = \frac{1}{2}(AX+AP) = \frac{1}{2}(AC - CX + AB - BP) =$$
$$= \frac{1}{2}(AC - \underline{CQ} + AB - \underline{BQ}) =$$
$$= \frac{1}{2}(AC + AB - BC) \qquad (1)$$

$$AY \overset{\text{TH.7}}{=} AS = \frac{1}{2}(AY + AS) = \frac{1}{2}(AD - DS + AC - CY) =$$
$$= \frac{1}{2}(AD - DR + AC - CR) =$$
$$= \frac{1}{2}(AD + AC - CD) \qquad (2)$$

* Sada možemo početi s dokazivanjem ekvivalencije:
Krugovi k i l se dodiruju akko $X = Y$, tj. $AX = AY$, a na osnovu (1) i (2) to znači

$$\cancel{AC} + AB - BC = AD + \cancel{AC} - CD$$
$$AB + CD = AD + BC.$$

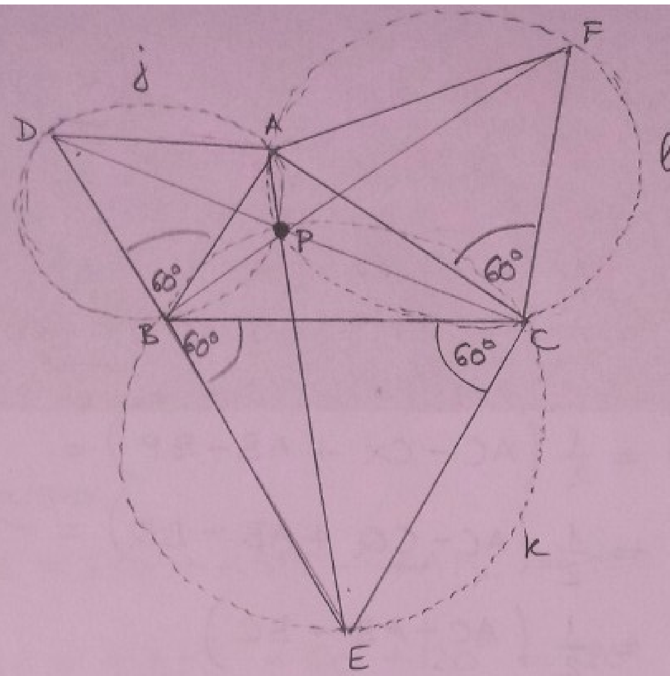
Posljednja jednakost važi akko je četverougao ABCD tangentan. (prema th. 8).

216. Nad stranicama $\triangle ABC$ sa spoljašnje strane konstruisani su pravilni trouglovi $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, $\triangle CFA$.

a) Dokazati da su duži AE, BF, CD međusobno podudarne

b) Dokazati da se prave AE, BF, CD sijeku u jednoj tački.

Dokaz:



a)* Posmatrajmo $\triangle AEC$ i $\triangle FBC$:

$$\left.\begin{array}{ll} AC = CF & (\triangle AFC\text{ - jednakostraničan}) \\ CE = BC & (\triangle BCE\text{ - jednakostraničan}) \\ \measuredangle ACE = \measuredangle ACB + 60^\circ = \measuredangle BCF & \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow}$$

$$\triangle AEC \cong \triangle FBC \Rightarrow \boxed{AE = BF} \quad (1)$$

* Posmatrajmo $\triangle ABE$ i $\triangle BCD$:

$$\left.\begin{array}{ll} AB = BD & (\triangle ABD\text{ - jednakostraničan}) \\ BE = BC & (\triangle BCE\text{ - jednakostraničan}) \\ \measuredangle ABE = \measuredangle CBA + 60^\circ = \measuredangle CBD & \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow}$$

$$\triangle ABE \cong \triangle BCD \Rightarrow \boxed{AE \cong CD} \quad (2)$$

Iz (1) i (2) $\Rightarrow$ $AE = BF = CD$

b) Neka su k, l, j krugovi opisani oko $\triangle BCE$, $\triangle ACF$, $\triangle ABD$. Dokažimo da se ti krugovi sijeku u jednoj tački.

* Neka je P druga presječna tačka krugova k i l $(P \neq C)$. Tada su $\square BPCE$ i $\square APCF$ tetivni i vrijedi

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle BPC = 180^\circ - \measuredangle BEC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \\ \measuredangle APC = 180^\circ - \measuredangle AFC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\measuredangle BPC = \measuredangle APC}$$

* Posmatrajmo

$$\measuredangle APB = 360^\circ - \measuredangle BPC - \measuredangle APC = 120^\circ.$$

$\Rightarrow \measuredangle ADB + \measuredangle APB = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \square ADBP$ je tetivni četverougao.

$\Rightarrow$ Tačka P pripada krugu opisanom oko $\triangle ADB$, tj. $P \in j$.

Dakle, $k \cap l \cap j = \{P\}$.

* Trebamo pokazati da duži AE, BF i CD prolaze kroz tačku P.

$$P \in l \Rightarrow \begin{cases} \measuredangle APF = \measuredangle ACF = 60^\circ & \text{(periferijski uglovi nad } AF) \\ \measuredangle FPC = \measuredangle FAC = 60^\circ & (\quad -\|- \quad FC) \end{cases}$$

$P \in k \Rightarrow \underline{\measuredangle CPE = \measuredangle CBE = 60^\circ}$ (periferijski uglovi nad CE)

$\Rightarrow \measuredangle APE = \measuredangle APF + \measuredangle FPC + \measuredangle CPE = 180^\circ$

$\Rightarrow A, P, E$ su kolinearne tačke, tj. $P \in p(A,E)$.

* Analogno se pokazuje da $P \in p(B,F)$ i $P \in p(C,D)$. D2

* Dakle, $p(A,E) \cap p(B,F) \cap p(C,D) = \{P\}$.