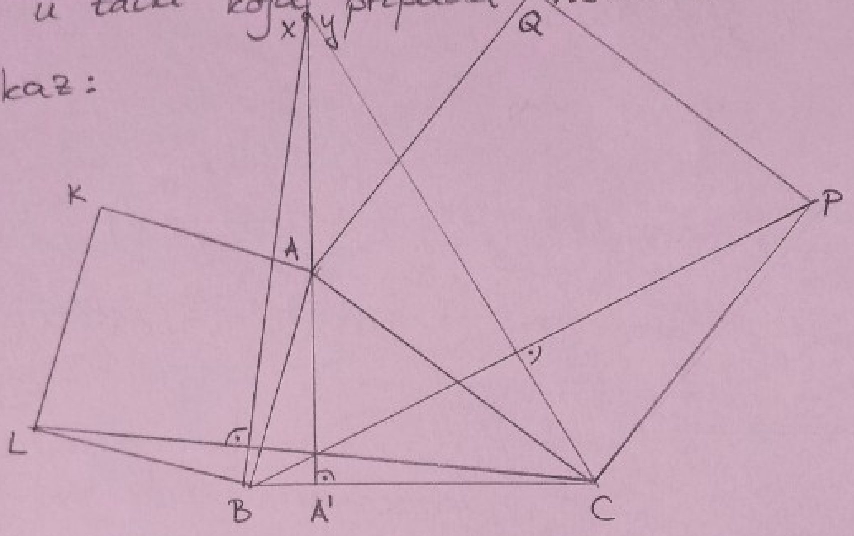
211. Neka su $AKLB$ i $ACPQ$ kvadrati spolja konstruisani nad stranicama AB i AC oštrouglog $\triangle ABC$. Dokazati da se duži BP i CL sijeku u tački koja pripada visini $\triangle ABC$ iz tjemena A.

Dokaz:



AA' - visina $\triangle ABC$

* Neka su x i y presjeci prave $p(A, A')$ sa normalama na $p(C, L)$ i $p(B, P)$ iz tačaka B i C redom
* Dokažimo da je $x \cong y$.
* Posmatrajmo $\triangle BLC$ i $\triangle ABX$:

$BL \cong AB$ (stranice kvadrata $AKLB$)

$\measuredangle BLC = \measuredangle ABX$ (uglovi s normalnim kracima, tj. $BL \perp BA$, $LC \perp BX$)

$\measuredangle BCL = \measuredangle AXB$ (— ıı — , tj. $AX \perp BC$, $LC \perp BX$)

$\overset{\text{suu}}{\Longrightarrow} \triangle BLC \cong \triangle ABX \Rightarrow \boxed{AX \cong BC}$ (1)

* Analogno se dokazuje da $\triangle CPB \cong \triangle ACy$ (Dz!).

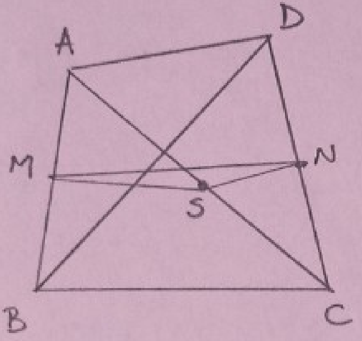
Otuda je $\boxed{Ay \cong BC.}$ (2)

* Iz (1) i (2) $\Rightarrow$ $Ax \cong Ay$, $x, y \in p(A, A') \Rightarrow x \cong y$
* Tada prave $p(A, A')$, $p(B, P)$ i $p(C, L)$ sadrže visine $\triangle xBC$, pa se sijeku u jednoj tački ortocentru $\triangle xBC$.

2/2. Neka su M i N središta ivica AB i CD proizvoljnog četverougla ABCD. Dokazati da je:

$$MN \leq \frac{1}{2}(BC + AD).$$

Dokaz:



* Neka je S središte dijagonale AC četverougla ABCD.
* Tada prema teoremi o srednjoj liniji trougla i nejednakosti trougla vrijedi

ΔABC : $MS = \frac{1}{2} BC$

ΔADC : $SN = \frac{1}{2} AD$

ΔMSN : $MN < MS + SN = \frac{1}{2}(BC + AD)$

Jednakos vrijedi u slučaju kada su tačke M, S, N kolinearne, tj. kada je četverougao ABCD trapez sa osnovicom BC.

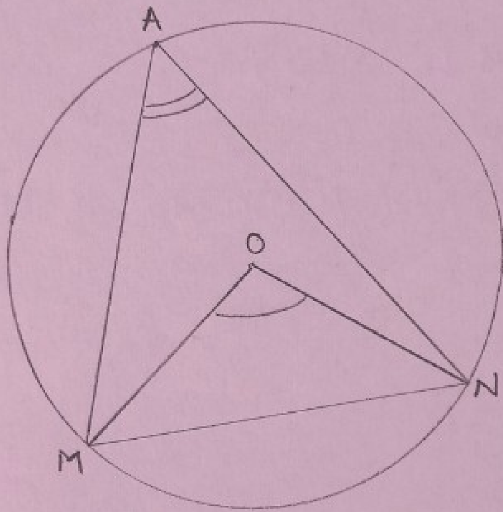
– CENTRALNI I PERIFERIJSKI UGAO KRUGA –

* Neka je $k(O, R)$ – kružnica (krug) s centrom u O i poluprečnika R.

* CENTRALNI UGAO KRUGA je svaki ugao ravni kruga čije tjeme je tačka O.

* PERIFERIJSKI UGAO KRUGA je ugao čije je tjeme neka tačka kruga, a kraci sadrže tetive kruga.

* Centralni ugao je dva puta veći od odgovarajućeg periferijskog ugla kruga.



$\measuredangle MON = 2\measuredangle MAN$

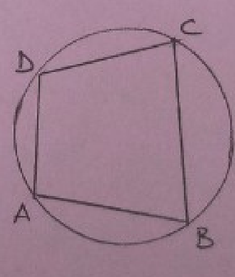
– TANGENTNI ČETVEROUGAO –

Definicija: Četverougao čije su stranice tangente jednog kruga, tj. četverougao u koji se može upisati krug, naziva se TANGENTNI ČETVEROUGAO.

Teorema 7: Tangentne duži konstruisane iz iste tačke van datog kruga su međusobno podudarne.

Teorema 8: Četverougao ABCD je tangentni akko je

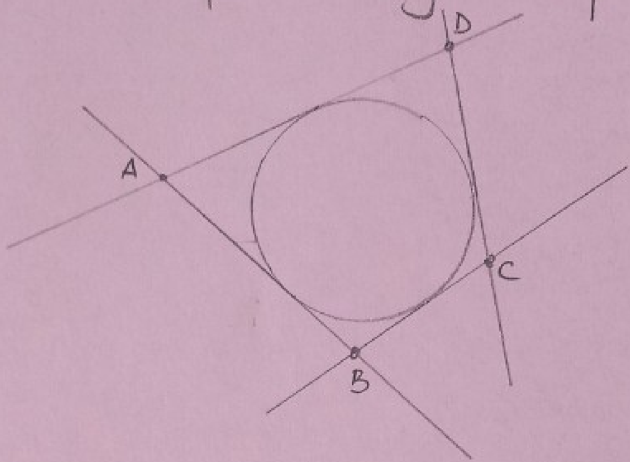
$$AB + CD = BC + AD.$$



- TETIVNI ČETVEROUGAO -

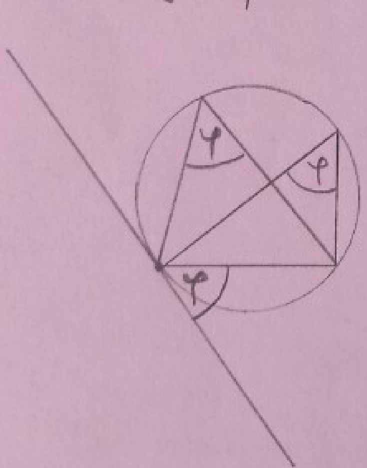
Definicija: Četverougao oko kojeg se može opisati krug, tj. čije su sve stranice tetive nekog kruga naziva se tetivni četverougao.

Teorema 9: Konveksni četverougao je tetivni akko su njegovi raspramni uglovi suplementni.



$\measuredangle ABC + \measuredangle ADC = \measuredangle BAD + \measuredangle BCD = 180^\circ$.

Teorema 10: Ugao određen tetivom i tangentom u jednoj krajnjoj tački tetive nekog kruga podudaran je periferijskom uglu nad tom tetivom.

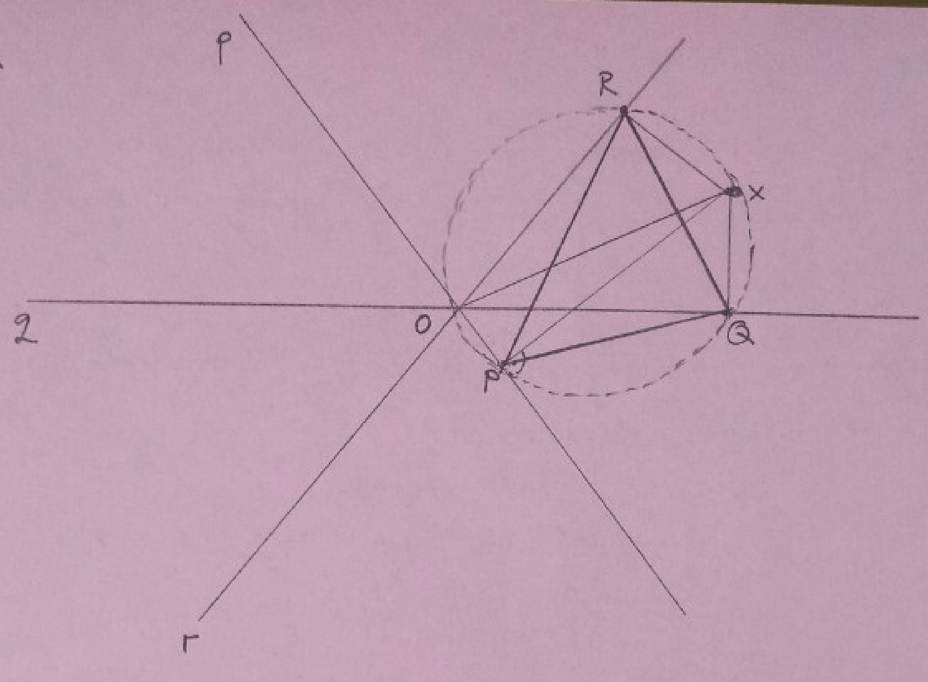


Teorema 11: Periferijski ugao nad prečnikom je prav.

Teorema 12: Periferijski uglovi kruga nad istom tetivom su međusobno podudarni (ako su im tjemena s iste strane prave određene tetivom).

$\boxed{211.}$ Neka su p, q, r prave neke ravni koje se sijeku u jednoj tački i dijele tu ravan na šest podudarnih uglova. Ako su P, Q, R podnožja normala iz proizvoljne tačke X te ravni redom na tim pravama. Dokazati da je ΔPQR pravilan!

Rješenje:



* Neka je $p \cap q \cap r = \{O\}$.
* Kako je $\sphericalangle XPO = \sphericalangle XQO = \sphericalangle XRO = 90^\circ$ zaključujemo da tačke P, Q, R pripadaju krugu k prečnika OX.
* Budući da prave p, q, r dijele ravan na 6 jednakih uglova to je

$$\sphericalangle POQ = \sphericalangle QOR = 60^\circ. \qquad (1)$$

* Primijetimo da vrijedi:

$$\sphericalangle RPQ = \sphericalangle QOR \overset{(1)}{=} 60^\circ \qquad (2)$$

↳ periferijski uglovi nad tetivom RQ

$$\sphericalangle PRQ = \sphericalangle POQ \overset{(1)}{=} 60^\circ \qquad (3)$$

↳ periferijski uglovi nad tetivom PQ

* Kako je zbir unutrašnjih uglova u trouglu 180°, iz (2) i (3) slijedi

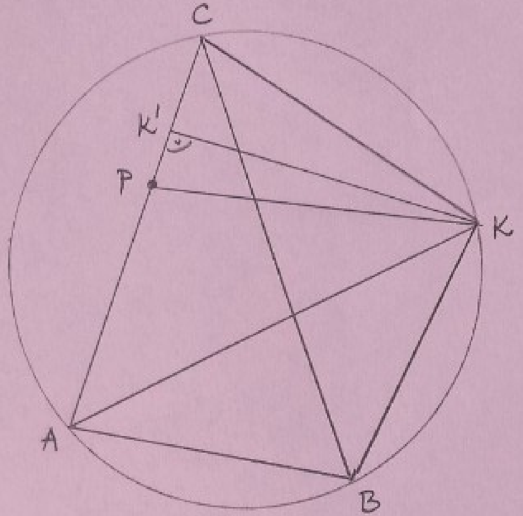
$$\sphericalangle PQR = 180^\circ - \sphericalangle RPQ - \sphericalangle PRQ = 60^\circ.$$

$\Rightarrow \sphericalangle RPQ = \sphericalangle PRQ = \sphericalangle PQR = 60^\circ \Rightarrow \Delta PQR$ je pravilan!

[Z12] Simetrala ugla kod tjemena A $\triangle ABC$ siječe kružnicu opisanu oko $\triangle ABC$ u tački K. Ako je K' projekcija tačke K na dužu od stranica AC i AB, dokazati da je

$$AK' = \frac{AB+AC}{2}.$$

Dokaz:



* Pretpostavimo da je $AB < AC$. Tada na $\overline{AC}$ postoji tačka P takva da je

$$\boxed{AP = AB} \qquad (\Delta)$$

* Posmatrajmo $\triangle APK$ i $\triangle ABK$.

$$\left.\begin{array}{l} AP = AB \\ \measuredangle PAK = \measuredangle BAK = \frac{\alpha}{2} \\ AK = AK \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle APK \cong \triangle ABK \Rightarrow \boxed{PK = BK} \quad (1)$$

* Iz jednakosti periferijskih uglova $\measuredangle BAK = \frac{\alpha}{2} = \measuredangle KAC$ slijedi jednakost tetiva (koje odgovaraju tim uglovima) tj.

$$\boxed{BK = CK} \qquad (2)$$

* Iz (1) i (2) $\Rightarrow$ $\triangle CPK$ je jednakokraki trougao

* Dakle, KK' je visina jednakokrakog $\triangle CPK$ koja odgovara njegovoj osnovici, pa je K' sredina osnovice, tj.

$$PK' = K'C = \frac{PC}{2}.$$

* Zbog toga je:

$$AK' = AP + PK' \overset{(\Delta)}{=} AB + \frac{PC}{2} = AB + \frac{AC-AP}{2} \overset{(\Delta)}{=} AB + \frac{AC-AB}{2}$$

$$\boxed{AK' = \frac{AB+AC}{2}}$$