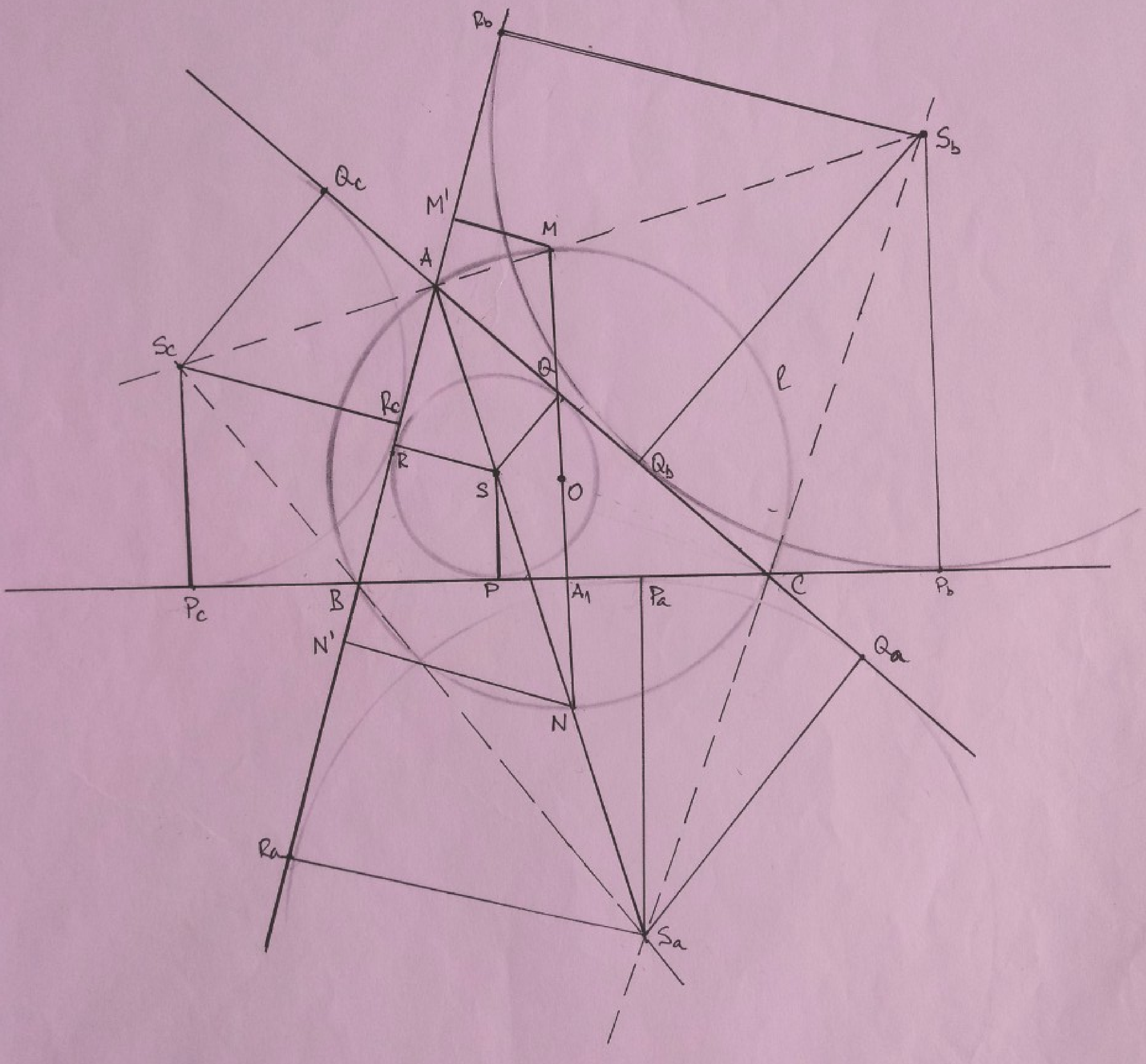
2/1) Neka su P, Q, R dodirne tačke upisane kružnice $k(S, r)$ trougla $\triangle ABC$ sa njegovim stranicama $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ $(b > c)$ i P_i, Q_i, R_i $(i \in \{a, b, c\})$ dodirne tačke spolja upisanih kružnica $k_i(S_i, r_i)$ sa pravama BC, AC, AB.
Neka je dalje: $l(O, R)$ kružnica opisana oko tog trougla, s poluobim, A_1 središte stranice BC, M i N presječne tačke prave OA_1 sa kružnicom $l(N, A \div BC)$ i M', N' podnožja normala iz tih tačaka na pravoj AB. Dokazati:

1) $AQ_a = AR_a = s$;
2) $AQ = AR = s - a$;
3) $QQ_a = RR_a = a$;
4) $PP_a = b - c$;
5) $P_bP_c = b + c$;
6) A_1 središte duži PP_a i P_bP_c;
7) $A_1N = \frac{r_a - r}{2}$;
8) $A_1M = \frac{r_b + r_c}{2}$
9) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$
10) $NN' = \frac{r + r_a}{2}$
11) $AN' = \frac{b+c}{2}$
12) $N'B = \frac{b-c}{2}$

Teorema. Simetrala jednog unutrašnjeg ugla trougla i simetrale spoljašnjih uglova kod druga dva tjemena sijeku se u jednoj tački – centru spolja upisane kružnice.



Rb
Sb
Qc
M'
M
A
Sc
Q
l
Rc
Qb
R
S
O
Pc
B
P
A1
Pa
C
Pb
N'
Qa
N
Ra
Sa

Dokaz

1) $AQ_a = AR_a = s$, s poluobim

AQ_a i AR_a su tangentne duži iz tačke A na kružnicu $k(S_a, r_a)$, pa je

$$AQ_a = AR_a = \frac{1}{2}(AQ_a + AR_a) = \frac{1}{2}(AB + BR_a + AC + CQ_a) = \frac{1}{2}(AB + BP_a + AC + CP_a) =$$
$$= \frac{1}{2}(a+b+c) = s$$

jer je $BR_a = BP_a$ i $CQ_a = CP_a$ (tangentne duži).

2) $AQ = AR = s - a$

$$AQ = AR = \frac{1}{2}(AQ + AR) = \frac{1}{2}(AB - BR + AC - CQ) = \frac{1}{2}(AB - BP + AC - CP) =$$
$$= \frac{1}{2}(AB + AC - BC) = \frac{1}{2}(c + b - a) = \frac{c+b+a}{2} - a = s - a,$$

jer je $BR = BP$ i $CQ = CP$ (tangentne duži).

3) $QQ_a = RR_a = a$

$$QQ_a = AQ_a - AQ \overset{(1),(2)}{=} s - (s-a) = a$$
$$RR_a = AR_a - AR = s - (s-a) = a$$

4) $PP_a = b - c$

$$PP_a = BC - BP - CP_a = a - (c - s + a) - (s - b) = \cancel{a} - c + \cancel{s} - \cancel{a} - \cancel{s} + b = b - c$$

, jer je

$$BP = BR = AB - AR = AB - AQ = AB - (AQ_a - QQ_a) = c - (s - a) = c - s + a$$
$$CP_a = CQ_a = AQ_a - AC = s - b \quad (*)$$

5) $P_bP_c = b + c$

$$P_bP_c = CP_c + CP_b = CP_c + BP_b - BC = s + s - a = 2s - a = a + b + c - a = b + c,$$

jer je $CP_c = s$, $BP_b = s$ (prema (1)).

6) A_1 je medijte duži PP_a

A_1 je medijte stranice BC tj. $BA_1 = A_1C = \frac{a}{2}$

$CP_a = s - b \quad (*)$ $\quad BP = c - s + a = \frac{2c - a - b - c + 2a}{2} = \frac{a - b + c}{2} = \frac{a + b - c - 2b}{2} = s - b$

$$\left.\begin{array}{l} PA_1 = BA_1 - BP = \frac{a}{2} - s + b = \frac{b-c}{2} \\ PP_a \overset{(4)}{=} b - c \Rightarrow \frac{PP_a}{2} = \frac{b-c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 \text{ je medijte duži } PP_a.$$

7) $\boxed{A_1N = \frac{r_a - r}{2}}$

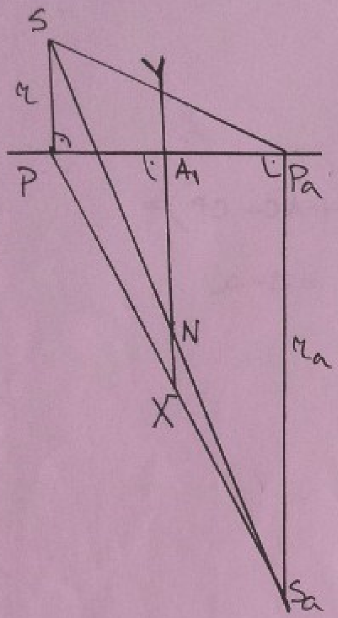
r – poluprečnik upisane kružnice $\triangle ABC$

r_a – poluprečnik spolja upisane kružnice

A_1 – središte duži PP_a (prema 6)

N – središte SS_a (dokazati!)

Posmatrajmo trapez SPS_aP_a;



A_1X srednja linija $\triangle PP_aS_a$

NX srednja linija $\triangle SPS_a$

$A_1X = \frac{1}{2} P_aS_a = \frac{r_a}{2}$; $NX = \frac{1}{2} SP = \frac{r}{2}$

$A_1N = A_1X - NX = \frac{r_a - r}{2}$

Teorema. Neka simetrala $\measuredangle BAC$ siječe opisanu kružnicu oko $\triangle ABC$ u tački N. Tada je $NS = NB = NC$, gdje je S centar upisane kružnice.

Teorema. Centar opisane kružnice pravouglog trougla je središte hipotenuze.

8) $\boxed{A_1M = \frac{r_b + r_c}{2}}$

$p(O, A_1) \cap \ell(O, R) = \{N, M\}$; $N, A \div BC$

$NA \perp S_cS_b$ kao simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod tjemena A $\triangle ABC$.

Dakle, tačka $M \in S_cS_b$ (ugao nad prečnikom je prav)

$S_cP_c \perp BC$, $S_bP_b \perp BC$, $OA_1 \perp BC$ ($M \in OA_1$), A_1 središte P_bP_c

$\Rightarrow$ M središte S_cS_b, tj. A_1M srednja linija trapeza $S_cS_bP_cP_b$

$$\Rightarrow A_1M = \frac{S_cP_c + S_bP_b}{2} = \frac{r_b + r_c}{2}$$

9) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

$$2R = NM = NA_1 + A_1M \overset{7,8}{=} \frac{r_a - r}{2} + \frac{r_b + r_c}{2}$$

$\Rightarrow 4R = r_a + r_b + r_c - r$, tj. $4R + r = r_a + r_b + r_c$.

10) $\boxed{NN' = \dfrac{r + r_a}{2}}$

Posmatrajmo trapez SRR_aS_a.

N središte SS_a; $NN' \perp AB$; $SR \perp AB$; $S_aR_a \perp AB \Rightarrow N'$ središte RR_a

$$\Rightarrow NN' = \frac{SR + S_aR_a}{2} = \frac{r + r_a}{2}$$

11)

12) $N'B = AM' = \dfrac{b-c}{2}$

N' središte duži RR_a, tj. $RN' = R_aN'$

$$AN' = AR + RN' = AR + R_aN' = AR + AR_a - AN'$$

$$\Rightarrow 2AN' = AR + AR_a \overset{(1)(2)}{=} \Delta - a + \Delta = b + c \Rightarrow AN' = \frac{b+c}{2}$$

$$N'B = AN' - AB = \frac{b+c}{2} - c = \frac{b-c}{2}$$

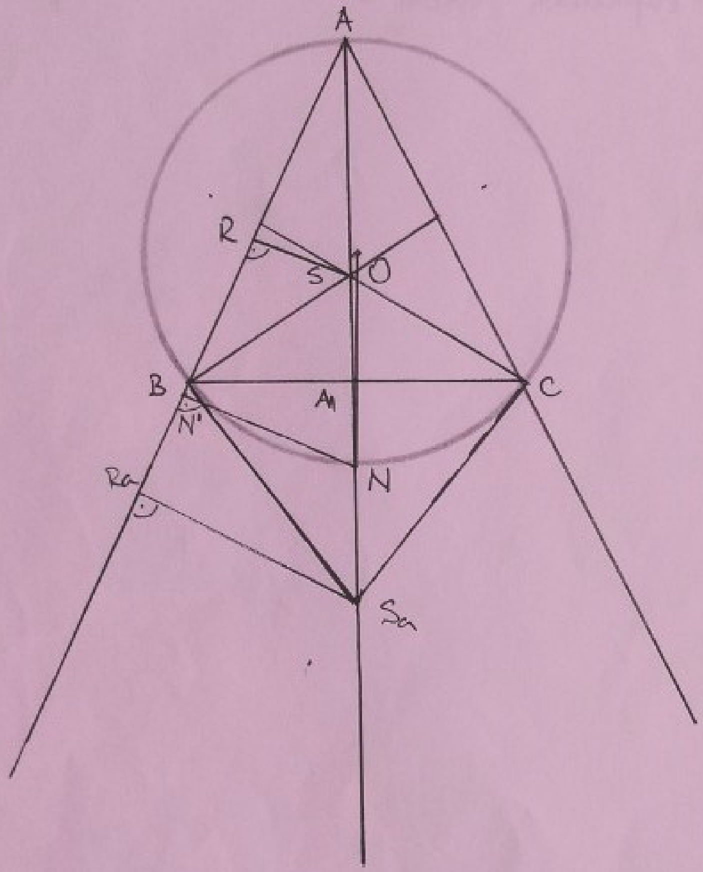
1. Konstruisati trougao $\measuredangle ABC$ ako je dato:

$$b+c,\ r+r_a,\ R$$

Rešenje:

Analiza.

Pretpostavimo da postoji trougao sa zadanim elementima: $b+c, r+r_a, R$



Tačka O centar opisane kružnice poluprečnika R;
S centar upisane kružnice poluprečnika r
$k(S,r)$, $k(O,R)$.
R je dodirna tačka $k(S,r)$ i AB;
A_1 središte stranice BC; $\{N\} = OA_1 \cap k(O,R)$; N' podnožje normale iz N na AB
$k(S_a, r_a)$ spolja upisana kružnica;
R_a dodirna tačka $k(S_a,r_a)$ i AB

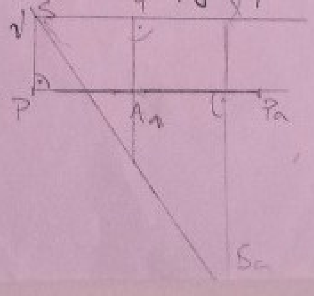
Dokažimo da je $NN' = \frac{r+r_a}{2}$ i $AN' = \frac{1}{2}(b+c)$

(*) NN' je srednja linija trapeza SRR_aS_a, jer je
$NN' \perp AB$, $S_aR_a \perp AB$, $SR \perp AB$ i
N je središte duži SS_a

$\Downarrow$

N' je središte RR_a

$\Rightarrow NN' = \frac{SR+S_aR_a}{2} = \frac{r+r_a}{2}$



A_1 središte PP_a

$$AN' = AR + RN' \overset{N' \text{ središte } RR_a}{=} AR + R_aN' = AR + AR_a - AN'$$

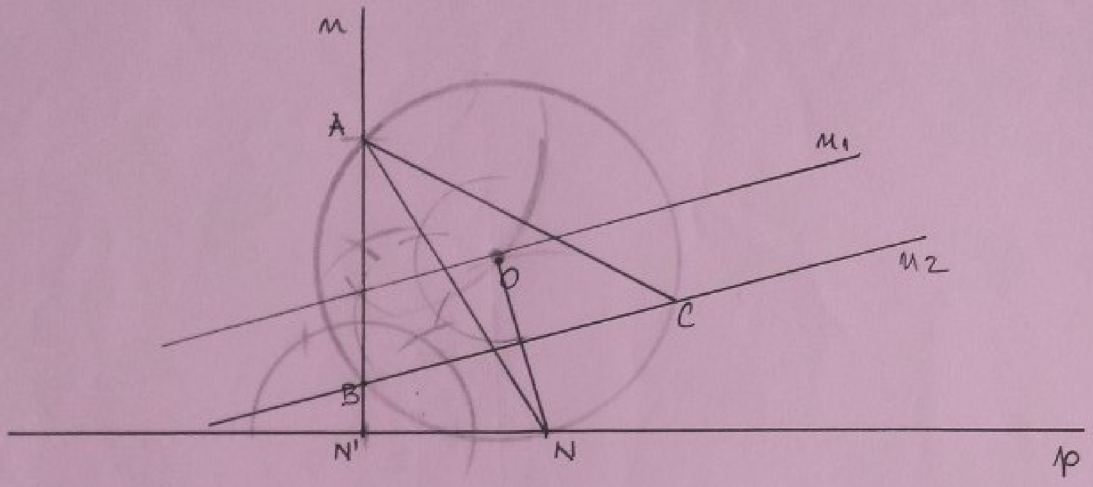
$$\Rightarrow 2AN' = AR + AR_a = s-a+s = 2s-a = b+c \Rightarrow AN' = \frac{b+c}{2}.$$

Dakle, određen je trougao $\triangle ANN'$

$$\left\{ \begin{array}{l} AN' = \frac{b+c}{2} \\ NN' = \frac{r+r_a}{2} \quad \mid \quad \measuredangle NN'A = 90^\circ \end{array} \right.$$

Pošto da tačke A i N leže na kružnici (poznat poluprečnik R) opisanoj oko trougla $\triangle ABC$, odredimo centar O te kružnice.

Tačka C je dijametralno suprotna tački B u odnosu na pravu ON, Konstrukcija



Opis konstrukcije

1° $\triangle ANN'$ $\begin{cases} p,\ N \in p, \\ k(N, \frac{r+r_a}{2}) \cap \overline{Np} = \{N'\} \\ \measuredangle pN'm = 90° \\ k(N', \frac{b+c}{2}) \cap N'm = \{A\} \end{cases}$ i $\triangle ANN'$

2° $k(A, R) \cap k(N, R) = \{O\}$

3° $k(O, R) \cap AN' = \{B\}$

4° ON

5° m_1, $O \in m_1$, $m_1 \perp ON$

6° m_2, $m_2 \parallel m_1$, $B \in m_2$

7° $k(O, R) \cap m_2 = \{C\}$

8° $\triangle ABC$

Dokaz. Dokaz slijedi iz Analize.