ZADATAK 1

Dokazati da $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$

DOKAZ: (I način - aksion ekstenzionalnosti)

Dokažimo inkluziju "$\subseteq$"
a) Neka je $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ proizvoljan. Tada na osnovu aksioma unije slijedi da x pripada skupu $A \setminus B$ ili skupu $A \cap B$ ili skupu $B \setminus A$,

$$x \in A \setminus B \vee x \in A \cap B \vee x \in B \setminus A.$$

b) Sada na osnovu definicije razlike skupova imamo da x pripada skupu A, a ne pripada skupu B i x pripada skupu B, a ne pripada skupu A,

$$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (A \cap B) \vee (x \in B \wedge x \notin A).$$

c) Na osnovu definicije presjeka, x pripada skupu A i x pripada skupu B,

$$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in B \wedge x \notin A).\ (*)$$

d) Prema tautologiji $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee q)$, i kako je $(\neg q \vee q)$ uvijek tačno, $(*)$ je ekvivalentan sa,

$$\begin{array}{cccccccc} (*) & \Leftrightarrow & x \in A & \wedge & (x \notin B \vee x \in B) & \vee & (x \in B \wedge x \notin A) \\ & \Leftrightarrow & x \in A & \wedge & \top & \vee & (x \in B \wedge x \notin A) \end{array}$$

Ovo je dalje prema tautologiji $p \vee (q \wedge \neg p) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p)$, i kako je $(p \vee \neg p)$ uvijek tačno, ekvivalentno sa,

$$\begin{array}{cccc} \Leftrightarrow & x \in A \vee x \in B & \wedge & x \in A \vee x \notin A \\ \Leftrightarrow & x \in A \vee x \in B & \wedge & \top \\ \Leftrightarrow & x \in A \vee x \in B & & \end{array}$$

e) Konačno na osnovu aksioma unije zaključujemo $x \in (A \cup B)$, te vrijedi

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \subseteq A \cup B.\ (\blacktriangle)$$

Dokažimo inkluziju "$\supseteq$"
a) Neka je $x \in (A \cup B)$ proizvoljan. Prema aksiomu unije x pripada skupu A ili pripada skupu B,

$$x \in A \vee x \in B$$

b) Ako prema tautologiji $(p \vee \neg p) = \top$ na prethodni izraz dodamo tako da vrijedi,

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A)$$

Dalje prema tautologiji $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg p)$ slijedi,

$$x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A).$$

Ako još jednom prema tautologiji $(p \vee \neg p) = \top$ dodamo, ali sada sa lijeve strane,

$$(x \in B \vee x \notin B) \wedge x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A).$$

Dalje korištenjem se tautologije $(q \vee \neg q) \wedge p \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ slijedi,

$$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

c) Na osnovu definicije razlike zaključujemo da $x \in (A \setminus B)$ i $x \in (B \setminus A)$, te na osnovu definicije presjeka slijedi da $x \in (A \cap B)$,

$$x \in A \setminus B \vee x \in A \cap B \vee x \in B \setminus A.$$

d) Konačno na osnovu aksioma unije vrijedi,

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \supseteq A \cup B. \ (\blacktriangle\blacktriangle)$$

Iz $(\blacktriangle)$ i $(\blacktriangle\blacktriangle)$ na osnovu aksioma ekstenzionalnosti zaključujemo jednakost skupova i vrijedi $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

DOKAZ: (II način - algebarski dokaz)

Dokažimo skupovnu jednakost

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B.$$

$$\begin{aligned}
(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c) && (\text{jer je } X \setminus Y = X \cap Y^c) \\
&= A \cap (B^c \cup B) \cup (B \cap A^c) && ((p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee q)) \\
&= A \cap U \cup (B \cap A^c) && (\text{jer je } X^c \cup X = U \ [\mathit{univerzum}]) \\
&= A \cup (B \cap A^c) && (\text{jer je } X \cap U = X) \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) && (p \vee (q \wedge \neg p) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p)) \\
&= (A \cup B) \cap U && (X^c \cup X = U) \\
&= A \cup B && (X \cap U = X)
\end{aligned}$$

ZADATAK 2

Dokazati da $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

DOKAZ: (I način - aksion ekstenzionalnosti)

Dokažimo inkluziju "$\subseteq$"
a) Neka je $x \in A \setminus (B \setminus C)$ proizvoljan. Tada na osnovu definicije razlike x pripada skupu A, a ne pripada skupu $B \setminus C$, i pripada skupu B, a ne pripada skupu C,

$$x \in A \wedge x \notin (x \in B \wedge x \notin C),$$

što je ekvivalentno sa,

$$x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C).$$

b) Prema DeMorganovih zakonima slijedi,

$$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C).$$

c) Na osnovu definicija presjeka i razlike skupova imamo sljedeće,

$$x \in A \setminus B \vee x \in A \cap C$$

d) Konačno na osnovu askioma unije vrijedi,

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C),$$

prema tome,

$$A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap C). \ (\spadesuit)$$

Dokažimo inkluziju "$\supseteq$"
a) Neka je $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ proizvoljno. Prema aksiomu unije x pripada skupu $A \setminus B$ ili skupu $A \cap C$,

$$A \setminus B \vee A \cap C$$

b) Na osnovu definicija presjeka i razlike skupova x pripada skupu A, a ne pripada skupu B ili pripada skupu A i skupu B,

$$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

c) Na osnovu DeMorganovih zakona slijedi,

$$x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C),$$

što još možemo zapisati kao,

$$x \in A \wedge x \notin (x \in B \wedge x \notin C)$$

d) Ako primjenimo definiciju razlike skupova vrijedi sljedeće,

$$\begin{aligned}
&x \in A \wedge x \notin (x \in B \wedge x \notin C)\\
&x \in A \wedge x \notin (A \setminus C)\\
&x \in A \setminus (A \setminus C),
\end{aligned}$$

prema tome vrijedi,

$$A \setminus (B \setminus C) \supseteq (A \setminus B) \cup (A \cap C).\ (\spadesuit\spadesuit)$$

Iz ($\spadesuit$) i ($\spadesuit\spadesuit$) na osnovu aksioma ekstenzionalnosti zaključujemo jednakost skupova i vrijedi $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

DOKAZ: (II način - algebarski dokaz)

Dokažimo skupovnu jednakost

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)B.$$

$$\begin{aligned}
A \setminus (B \setminus C) &= A \cap (B \cap C^c)^c && (\text{jer je } X \setminus Y = X \cap Y^c)\\
&= A \cap (B^c \cup C) && (\text{osobine komplementa})\\
&= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) && (\text{DeMorganovi zakoni})\\
&= (A \setminus B) \cup (A \cap C) && (X \setminus Y = X \cap Y^c)
\end{aligned}$$

ZADATAK 3

Dokazati da
1. $(A^c)^c = A$.
2. $U^c = \varnothing$; $\varnothing^c = U$.
3. $A \cup A^c = U$; $A \cap A^c = \varnothing$.

DOKAZ:

Dokažimo skupovnu jednakost

$$(A^c)^c = A$$

$$\begin{aligned}
(A^c)^c &= (U \setminus A)^c && \text{(jer jer } X^c = U \setminus X) \\
&= U \setminus (U \setminus A) && (X^c = U \setminus X) \\
&= U \cap x \notin (U \cap x \notin A) && (X \setminus Y = X \cap x \notin Y) \\
&= U \cap (x \notin U \cup A) && \text{(djelovanje negacije)} \\
&= (U \cap x \notin U) \cup (U \cap A) && (U \cap x \notin U = \varnothing,\ U \cap A = A) \\
&= A
\end{aligned}$$

Dokažimo skupovne jednakosti

$$U^c = \varnothing \ ; \ \varnothing^c = U$$

$$\begin{aligned}
U^c &= U \setminus U && (X^c = U \setminus X) \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varnothing^c &= U \setminus \varnothing && (X^c = U \setminus X) \\
&= U
\end{aligned}$$

Dokažimo skupovne jednakosti

$$A \cup A^c = U \ ; \ A \cap A^c = \varnothing$$

$$\begin{aligned}
A \cup A^c &= A \cup (U \setminus A) && (X^c = U \setminus X) \\
&= A \cup (U \cap x \notin A) && (X \setminus Y = X \cap x \notin Y) \\
&= (A \cup U) \cap (A \cup x \notin A) && \text{(DeMorganovi zakoni)} \\
&= (A \cup U) \cap \top && (A \cup x \notin A = \top\ [\textit{neprazan skup}]) \\
&= A \cup U && (X \cap \top = X) \\
&= U && (X \cup U = U)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \cap A^c &= A \cap (U \setminus A) && (X^c = U \setminus X) \\
&= A \cap (U \cap x \notin A) && (X \setminus Y = X \cap x \notin Y) \\
&= (A \cap U) \cap (A \cap x \notin A) && \text{(DeMorganovi zakoni)} \\
&= (A \cap U) \cap \varnothing && (A \cap x \notin A = \varnothing) \\
&= \varnothing && (X \cap \varnothing = \varnothing)
\end{aligned}$$