Zadatak 1. *Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Dokazati:*

1. $A \setminus B \subseteq A \cup B$.
2. $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.

Primjer 1. *Dokažimo $A \setminus B \subseteq A \cup B$.*

DOKAZ:

Za proizvoljno x vrijedi:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\iff x \in A \wedge x \notin B && \big(\text{definicija razlike}\big) \\ &\implies x \in A \vee x \in B && \big(\text{tautologija: } p \wedge \neg q \Leftrightarrow p \vee q\big) \\ &\iff x \in A \cup B && \big(\text{definicija unije}\big) \end{aligned}$$

Kako je x bilo proizvoljno i na osnovu definicije podskupa vrijedi,

$$(\forall x)(x \in A \setminus B \implies x \in A \cup B) \overset{\text{def}}{\iff} A \setminus B \subseteq A \cup B$$

♣

Primjer 2. *Dokažimo $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.*

DOKAZ:

Za proizvoljno x vrijedi:

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \setminus C &\iff x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C && \big(\text{definicija razlike}\big) \\ &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C && \big(\text{definicija razlike}\big) \\ &\iff x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) && \big(\text{asocijativnost konjukcije}\big) \\ &\iff x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) && \big(\text{DeMorganov zakon}\big) \\ &\implies x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C) && \big(\text{tautologija: } p \wedge \neg(q \vee r) \Rightarrow p \wedge \neg(q \wedge \neg r)\big) \\ &\iff x \in A \wedge \neg(x \in B \setminus C) && \big(\text{definicija razlike}\big) \\ &\iff x \in A \wedge x \notin B \setminus C && \big(\text{negacije relacije pripadanja: } \neg(x \in X) \Leftrightarrow x \notin X\big) \\ &\iff x \in A \setminus (B \setminus C) && \big(\text{definicija razlike}\big) \end{aligned}$$

Kako je x bilo proizvoljno i na osnovu definicije podskupa vrijedi,

$$(\forall x)(x \in (A \setminus B) \setminus C \implies x \in A \setminus (B \setminus C)) \overset{def}{\iff} (A \setminus B) \setminus \subseteq A \setminus (B \setminus C)$$

♣

Zadatak 2. *Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. U kom su odnosu skupovi:*

1. $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$ *i* $(A \cap C) \setminus B$.
2. $(C \cup A) \setminus (B \cup C)$ *i* $A \setminus (C \cup B)$.

Primjer 3. *Pokažimo u kom su odnosu skupovi* $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$ *i* $(A \cap C) \setminus B$.

DOKAZ:

Za proizvoljno x vrijedi:

$$
\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) &\Longleftrightarrow x \in (A \setminus B) \land x \notin (A \setminus C) && \big(\text{definicija razlike}\big)\\
&\Longleftrightarrow (x \in A \land x \notin B) \land x \notin (x \in A \land x \notin C) && \big(\text{definicija razlike}\big)\\
&\Longleftrightarrow (x \in A \land x \notin B) \land \neg(x \in A \land x \notin C)\\
& && \big(\text{negacija relacije pripadanja: } \neg(x \in X) \Leftrightarrow x \notin X\big)\\
&\Longleftrightarrow (x \in A \land x \notin C) \land (x \notin A \lor x \in B) && \big(\text{DeMorganov zakon}\big)\\
&\Longleftrightarrow x \in A \land (x \notin A \lor x \in C) \land x \notin B && \big(\text{komutativnost konjukcije}\big)\\
&\Longleftrightarrow (x \in A \land x \notin A) \lor (x \in A \land x \in C) \land x \notin B\\
& && \big(\text{distributivnost konjukcije prema disjunkciji}\big)\\
&\Longleftrightarrow \perp \lor (x \in A \land x \in C) \land x \notin B && \big(p \land \neg p \Leftrightarrow \perp \text{ i } \perp \lor p \Leftrightarrow p\big)\\
&\Longleftrightarrow (x \in A \land x \in C) \setminus B && \big(\text{definicija razlike}\big)\\
&\Longleftrightarrow x \in (A \cap C) \setminus B
\end{aligned}
$$

Kako je x bilo proizvoljno, i kako je $p \Leftrightarrow q \Longleftrightarrow p \Rightarrow q \land p \Leftarrow q$ vrijedi

$$(\forall x)(x \in (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) \Longrightarrow x \in (A \cap C) \setminus B) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) \subseteq (A \cap C) \setminus B$$

i

$$(\forall x)(x \in (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) \Longleftarrow x \in (A \cap C) \setminus B) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) \supseteq (A \cap C) \setminus B$$

Prema aksiomu ekstenzionalnosti zaključujemo jednakost skupova

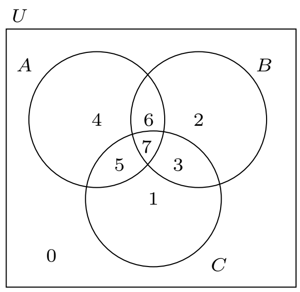
$$(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \cap C) \setminus B$$

♣

Primjer 4. *Pokažimo u kom su odnosu skupovi* $(C \cup A) \setminus (B \cup C)$ *i* $A \setminus (C \cup B)$.

DOKAZ:

Dokažimo vennovim dijagramima odnos skupova $(C \cup A) \setminus (B \cup C)$ i $A \setminus (C \cup B)$.



Skup $A = \{4, 5, 6, 7\}$, skup $B = \{2, 3, 6, 7\}$ i skup $C = \{1, 3, 5, 7\}$.

Skup $C \cup A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, a skup $B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$.
Dalje skup $(C \cup A) \setminus (B \cup C) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} = \{4\}$.

Na drugoj strani, skup $C \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$.
Pa skup $A \setminus (C \cup B) = \{4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} = \{4\}$.

Kako obje strane sadrže identična polja vennovog dijagrama, pokazali smo da su jednake tojest,

$$(C \cup A) \setminus (B \cup C) = A \setminus (C \cup B)$$

♣