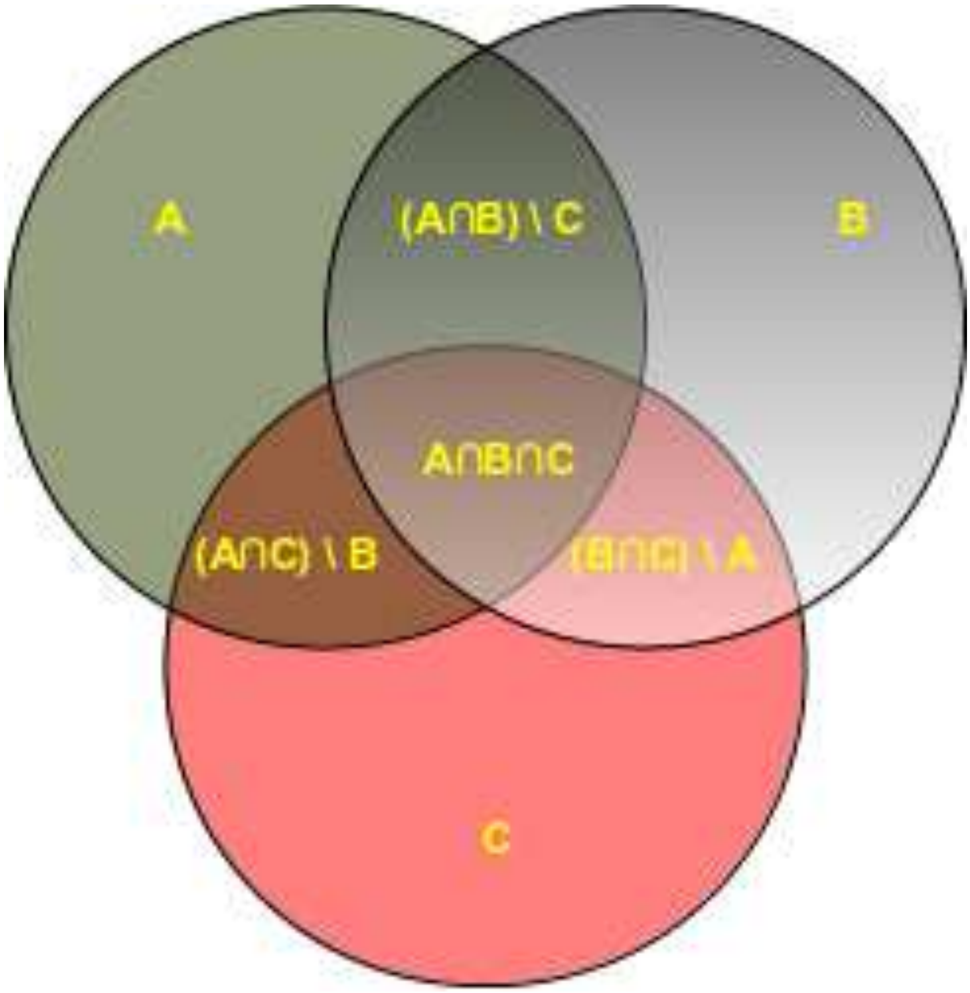
seminarski rad

SKUPOVI

Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Tuzli
Odsjek: **Matematika**
Predmet: **Uvod u programske pakete**



HALILOVIĆ ADIS

2019

SADRŽAJ

1 Skupovi

Jedan od osnovnih ljudskih nagona jeste da sortira i klasificira stvari. Razmislite, naprimjer. Koliko različitih skupova ste vi član? Ako krenete sa nekim jednostavnim kategorijama, kao jeste li muško ili žensko, vaša starosna grupa, država u kojoj živite. Tada ćete možda razmišljati i o etničkoj pripadnosti vaše porodice, sociološko-ekonomskoj grupi, nacionalnosti. Ovo su samo neke od mnogobrojnih načina kako bi mogli opisati sebe drugim ljudima.

Kakva je korist od ovakve kategorizacije? Kao što ćete vidjeti u nastavku ovog poglavlja, sortirajući stvari po skupovima pomaže vam organizirati i urediti vaš svijet. U mogućnosti ste da vladate velikim količinama informacija. Skupovi su učevni alat koji pomaže da se odgovori na pitanje: "Koje su karakteristike grupe?"

Skupovi postavljaju temelje ostalim matematičkim oblastima, poput logike i apstraktne algebre. Ustvari, knjiga *Eléments de Mathématique*, napisana od strane grupe francuskog matematičara pod pseudonimom "Nicolas Bourbaki", kaže: "U današnjici je moguće, logički govoreći: "U današnjici je moguće, logički rečeno, "

Skupovi su osnovni alat za učenje pa čak i za malu djecu. Kao bebe, oni nauče razlikovati "mene" od "mama" i "tata". Kao mališani nauče razlikovati i kategorisati objekte kao članove skupa po veličini, boji, ili obliku. TV emisija "Ulice sezama" uči djecu da prave skupove kroz igru. "Jedna od tih stvari je različita od ostalih."

1.1 Koncepti skupa

Svakodnevno srešemo skupove u našim životima u raznim situacijama. Skup je kolekcija objekata, koji se nazivaju **elementi** ili **članovi** skupa. Naprimjer, Sjedinjena Američka država je kolekcija ili skup 50 manjih država. 50 pojedinih država su članovi ili elementi jednog skupa koji se naziva Sjedinjene Američke države. Skup je **dobro definisan** ako se njegov sadržaj može jasno odrediti. Skup trenutnih sudija koji služe SAD vrhovnom sudu je dobro definisan skup jer njihovi članovi i sudije mogu biti imenovani. Skup tri najbolja auta nije dobro definisan skup jer riječ *najbolji* različiti ljudi različito tumače. U ovom tekstu, mi koristimo samo dobro definisane skupove.

Za označavanje skupa obično se koriste sljedeće tri metode:

opis
popis ili obrazac
notacija skupa

Način označavanja skupa **opisom** prikazan je u primjeru 1.

PRIMJER 1 **"Opis skupova"**

Napisati opis skupa koji sadrži elemente ponedjeljak, utorak, srijeda, četvrtak, petak, subota, nedjelja.

RJEŠENJE

Naziv skupa je "Dani u sedmici"

△

Smještanje elemenata skupa unutar velikih zagrada "{}", naziva se ruster forma. Zagrade su bitan dio notacije jer ona označavaju članove skupa.
Naprimjer, $\{1, 2, 3\}$ predstavlja notaciju za skup kojem pripadaju elemnti 1, 2 i 3, ali $(1, 2, 3)$ i $[1, 2, 3]$ nisu skup iz razloga što velike i srednje zagrade n prikazuju skup.

Skupo se inače imenuju sa velikim štampanim slovima. Naprimjer, ime koje se obično bira za skup prirodnih brojeva je **N**.

PRIRODNI BROJEVI
$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

Tri tačke nakon 5, nazivaju se *elipsa*, i označavaju da elementi skupa nastavljaju dalje na isti način. Ako se nakon elipse pojavi neki elemenat, znači da elementi idu na isti način sve do tog elementa uključujući i njega. Ovakva notacija prikazana je na primjeru 2b.

PRIMJER 2 "Skup u formi popisa"

Predstaviti sljedeće u formi popisa.

a) Skup A je skup prirodnih brojeva manjih od 4.

b) Skup B je skup prirodnih brojeva manjih ili jednako 70.

c) Skup P je skup planeta sunčevog sistema.

RJEŠENJE

a) Prirodni brojevi manji od 4 su 1, 2 i 3. Prema tome, skup A u formi popisa je $A = \{1, 2, 3\}$

b) $B = \{1, 2, 3, 4, ..., 70\}$. Broj 70 nakon 3 tačke znači da se brojevi nastavljaju na isti način sve do 70.

c) $P = \{$Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn, Uran, Neptun, Pluton$\}$.

△

PRIMJER 3 "Riječ *uključujući*"

Sljedeće napiši u formi popisa.

a) Skup prirodnih brojeva između 5 i 8.

b) Skup prirodnih brojeva između 5 i 8, uključujući.

RJEŠENJE

a) $A = \{6, 7\}$.

b) $B = \{5, 6, 7, 8\}$. Primjetite da riječ *uključujći* pokazuje na to da su i brojevi između 5 i 8 unutar skupa.

△

Simbol $\in$, koji se čita, elemenat je, koristi se za označavanje članova u skupu. U primjeru 3, 6 je elemenat skupa A, pišemo $6 \in A$. Također možemo napisati $6 \in \{6, 7\}$. Isto tako $8 \notin A$, što znači da 8 nije elemenat skupa A.

Notacija za kreiranje skupa (koja se ponekad naziva i notacija generatra skupa) može se koristiti da simbolizira skup. Navedena notacija skupa se često koristi u algebri. U nastavku primjer ilustrira njegov oblik.

D	$=$	$\{$	**x**	$\vert$	Uslov(i) $\}$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
Skup D	je	skup	svih elemenata x	takvih da	x zadovoljava uslove da bi bio dio skupa

Uzmimo u obzir $E = \{x | x \in N \text{ i } x\ 10\}$. Izraz se čita kao "Skup E je skup svih elemenata x takvih da je x veće od 10." Uslovi koje x mora ispuniti da bi bio elemenat skupa je $x \in N$, što znači da x mora biti prirodan broj, i $x\ 10$, što znači da x mora biti veće od 10. Brojevi koji ispunjavaju oba uvjeta su elementi skupa prirodnih brojeva većih od 10. Skup u formi popisa izgleda ovako

$$E = \{11, 12, 13, 14, ...\}$$

PRIMJER 4 "Korištenje notacije za kreiranje skupova"

a) Napisati skup $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ u obliku notacije za kreiranje skupa

b) Napiši, riječima, kako bi pročitao notaciju za kreiranje skupa B

RJEŠENJE

a) Prema tome da se skup B sastoji od prirodnih brojeva manjih od 6, pišemo

$$B = \{x|x \in N \text{ i } x < 6\}$$

Još jedan prihvatljiv odgovor je $B = \{x|x \in N \text{ i } x \leqslant 5\}$.

b) Skup B je skup svih elemenata x takvih da je x prirodan broj i da je manji od 6.

△

PRIMJER 5 "Forma popisa u notaciji građenja skupova"

a) Napisati skup $S =$ {Maine, Maryland, Massachusetts, Michigen, Minnesota, Mississippi, Missouri, Montana} u notaciji građenja skupova.

b) Napisati riječima kako bi pročitao/la skup S u notaciji iz a).

RJEŠENJE

a) $S = \{x|x$ je država u SAD-u čije ime počinje sa M$\}$.

b) Skup S je skup svih elemenata x takvih da je x država SAD-a čije ime počinje sa slovom M.

△

PRIMJER 6 "Notacija građenja skupova u formi popisa"

Napisati $A = \{x|x \in N \text{ i } 2 \leqslant x < 8\}$ u formi popisa.

RJEŠENJE

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

△

Za skup se kaže da je **konačan**, ako ne sadrži elemente ili broj elemenata u skupu je prirodan broj. Skup $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ je konačan skup zato što je broj elemenata skupa 5, a 5 je prirodan broj. Skup koji nije konačan naziva se **beskonačan** skup. Skup brojivih brojeva je jedan primjer beskonačnog skupa. O beskonačnim skupovima govorit ćemo u Poglavlju ...

Još jedan bitan koncept jeste jednakost skupova.

Skup A **jendak** je skupu B, simbolično napisano $A = B$, ako i samo ako skup A sadrži tačno iste elemente kao skup B.

Naprimjer, ako skup $A = \{1, 2, 3\}$ i skup $B = \{3, 1, 2\}$, onda $A = B$ zato što oba sadrže tačno iste elemente. Radoslijed elemenata u skupu nije bitan. Ako su dva skupa jednaka onda moraju oba biti sačinjnena od istog broja elemenata. Broj elemenata skupa naziva se *osnovnu/kardinalni broj.*

Osnovni/Kardinanli broj skupa A, simbolično napisanon$n(A)$, je broj elemenata skupa A.

Oba skupa $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{\text{Engleska, Francuska, Japan}\}$ imaju osnovni/kardinalni broj 3; to jest, $n(A) = 3$, i $n(B) = 3$. Kažemo da skup A i skup B oba imaju kardinalnost 3.

Za dva skupa se kaže da su **ekvivalentna** ako oba posjeduju isti broj elemenata.

Skup A je **ekvivalentan** skupu B ako i samo ako $n(A) = n(B)$.

Bilo koji skupovi koju su jednaki moraju biti i ekvivalenti. Međutim, nisu svi ekvivalentni skupovi jednaki. Skupovi $D = \{a, b, c\}$ i $E = \{\text{apple, orange, pear}\}$ su ekvivalenti, stoga što oba imaju isti osnovni/kardinalni broj, 3. Zbog toga što se elementi ralikuju, međutim, skupovi nisu jednaki.

Dva skupa koja su ekvivalentna i imaju istu kardinalnost mogu se dopisati 1-1. Skup A i skup B mogu se dopisati 1-1 ako svaki elemenat skupa A može biti povezan sa tačno jednim elementom skupa B i svaki elemenat skupa B može biti povezan sa tačno jednim elementom skupa A. Naprimjer, dopis 1-1 postoji između imena studenata sa liste razreda i sa njihovim identifikacionim brojevima zato što povezati njihova imena sa njihovim brojevima.

Uzmimo u obzir skup B, ime brenda produkta, i skup D, pića.

$$B = \{\text{Meggle, Biljana, Oaza, Zlatna džezva}\}$$
$$D = \{\text{čaj, mlijeko, kafa, voda}\}$$

Dva zarličita dopisa 1-1 za skupove B i D slijede.

$$B = \{\text{Meggle, Biljana, Oaza, Zlatna džezva}\}$$
$$D = \{\text{čaj, mlijeko, kafa, voda}\}$$

$$B = \{\text{Meggle, Biljana, Oaza, Zlatna džezva}\}$$
$$D = \{\text{čaj, mlijeko, kafa, voda}\}$$

Drugi dopisi 1-1 su mogući između skupova B i D. Da li znate koje piće ide sa kojim imenom brenda produkta?

1.1.1 NULA ILI PRAZAN SKUP

Neki skupovi ne sadrže ni jedan elemenat, kao naprimjer skup zebri koje su u ovoj sobi.

Skup koji ne sadrži elemente naziva se **prazan skup** ili **nula skup** i simbolično se označava sa $\{\ \}$ ili $\varnothing$.

Imajte na umu da $\varnothing$ nije prazan skup. Ovaj skup sadrži elemenat $\varnothing$ i ima kardinalnost 1. Skup $\{0\}$ također nije prazan skup zato što sadrži elemenat 0. I on ima kardinalnost 1.

PRIMJER 7 **"Rješenja prirodnih brojeva"**

Naznalite skup prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednačinu $x + 2 = 0$.

RJEŠENJE

Vrijednosti koje zadovoljavaju jednačinu moraju biti takve da jednačina bude tačna. Samo broj -2 zadovoljava ovu jednačinu. Zbog toga što -2 nije prirodan bro, rješenje iove jednačine je $\{\ \}$ ili $\varnothing$.

△

1.1.2 UNIVERZALNI SKUP

Još jedan bitan skup jeste **univerzalni skup**.

univerzalni skup, simbolično napisan sa U, je skup koji sadrži sve elemente za bilo koju diskusiju.

Kada je dat univerzalni skup, samo elementi univerzalnog skupa mogu se razmatrati prilikom rješavanja problema. Ako je, naprimjer, univerzalni skup za određeni problem definisan kao $U = \{1, 2, 3, 4, .., 10\}$, onda samo prirodni brojevi od 1 do 10 mogu biti korišteni tokom problema.

ZADACI ZA VJEŽBU

KONCEPT/VJEŽBE PISANJA

U zadacima od 1 do 8, odgovoriti na pitanja punom rečenicom.

1. Šta je skup?
2. Koje su tri varijante kojima skup može biti zapisan? navedite primjer za svaku od njih.
3. Šta je beskonačan skup?
4. Šta je konačan skup?
5. Šta su jednaki skupovi?
6. Šta su ekvivalenti skupovi?
7. Šta je kardinalni broj skupa?
8. Šta je univerzalni skup?
9. Šta je prazan skup?

ZADACI ZA VJEŽBU VJEŠTINE

U zadacima od 10 do 12, odredite da li su skupovi dobro definisani.

10. Skup najboljih internet sajtova
11. Skup ljudi koji posjeduju velike pse
12. Skup učenika razreda koji su rođeni u Bosni i Hercegovini

U zadacima od 13 do 24, odredite da li je skup konačan ili beskonačan.

13. $\{1, 3, 5, 7, ...\}$
14. Skup parnih brojeva većih od 15
15. Skup neparnih brojeva većih od 15
16. Skup vrabaca koji cvrkuću u parku 4. jula u 10 sati.

2 Podskupovi

U našem složenom svijetu, inače veće skupove razbijamo na manje skupove s kojim nam je lakše raditi. takve skupove nazivamo *podskupovi*. Napriimjer, uzmite u obzir skup ljudi u vašem odjeljenju. Prepostavimo da kategorišemo ljude po prvom slovu njihovog prezimena(A, B, C, idt.). Kada to odradimo, svaki od novih skupova može se smatrati podskupom orginalnog skupa. Svaki od ovih podskupova može se dalje razdvajati. Naprimjer, osobe kod kojih prezime počinje sa A možemo kategorisati po tome jesu li muškog ili ženskog spola ili po njihovim godinama. Svaka od ovih kolekcija je podskup. Početni skup može imati mnogo različitih podskupova.

Skup A je **podskup** skupa B, simbolično pišemo $A \subseteq B$, ako i samo ako su elementi skupa A također elementi skupa B.

Simbol $A \not\subseteq B$ označava da "skup je A podskup skupa B". Simbol $\not\subseteq$ znači "nije podskup". Iz toga, $A \not\subseteq B$ znači da skup A nije podskup skupa B. *Da pokažemo to da skup A nije podskup skupa B, moramo pronaći makar jedan elemenat skupa A koji nije elemenat skupa B.*

PRIMJER 8 **"Da li je A podskup?"**

Odrediti da li je skup A podskup skupa B.

a) $A = \{\text{krastavac, paradajz, paprika}\}$ $B = \{\text{paradajz, sir, krastavac, paprika}\}$

b) $A = \{2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3\}$

c) $A = \{x | x \text{ žuto voće}\}$ $B = \{\text{ crveno voće}\}$

d) $A = \{\text{kašika, viljuška, nož}\}$ $B = \{\text{nož, kašika, viljuška}\}$

RJEŠENJE

a) Svi elementi skupa A sadržani su u skupu B, prema tome $A \subseteq B$.

b) Elementi 4 i 5 su u skupu A ali ne u skupu B, stoga $A \not\subseteq B$ (A nije podskup od B). Mežutim, u ovom primjeru svi elementi skupa B sadržani su u skupu A; stoga, $B \subseteq A$.

c) Postoji voće, kao naprimjer banane, koje su iz skupa A ali ne iz skupa B,pa $A \not\subseteq B$.

d) Svi elementi skupa A sadržani su u skupu B, prema tome $A \subseteq B$. Primjetite da je $A =$ skup B.

$\triangle$

2.0.1 ODGOVARAJUĆI PODSKUPOVI

Skup A je **odgovarajući podskup** skupa B, simbolično pišemo $A \subset B$, ako i samo ako su svi elementi skupa A također elementi skupa B i skup $A \neq$ skup B(to jest, skup B mora imati makar jedan elemenat koji se ne nalazi u skupu A).

Uzmite u obzir da $A = \{\text{crvena, plava, žuta}\}$ i $B = \{\text{crvena, narandžasta, žuta, zelena, plava, ljubičasta}\}$. Skup A je *podskup* skupa B, $A \subseteq B$, zato što je svaki elemenat skupa A također elemenat skupa B. Skup A je također *odgovarajući skup* skupa B, $A \subset B$, zato šsto skup A i skup B nisu jednaki. Sada uzmimo u obzir skup $C = \{\text{auto, autobus, voz}\}$ i skup $D = \{\text{voz, auto, autobus}\}$. Skup C je podskup skupa D, $C \subseteq D$, zato što je svaki elemenat skupa C također elemenat skupa D. Međutim, skup C, nije odgovarajući podskup skupa D, $C \not\subset D$, zato što su skup C i skup D jednaki skupovi.

PRIMJER 9 **"Da li je skup odgovarajući podskup?"**

Odrediti da li je skup A odgovarajući podskup skupa B.

a) $A = \{\text{Korveta, Vajper, BMW}\}$ $B = \{\text{Vajper, BMW, Kamero, Korveta, Mustang}\}$

b) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{a, c, b, d\}$

RJEŠENJE

a) Svi elementi skupa A su sadržani u skupu B i B nisu jednaki; iz toga slijedi, $A \subset B$.

b) Skup $A =$ skup B, prema tome $A \not\subset B$. (Međutim, $A \subseteq B$.)

△

Svaki skup je podskup samoga sebe, ali nijedan skup nije odgovarajući podskup sebe. Za sve skupove A, $A \subseteq A$, ali $A \not\subset A$. Naprimjer, ako $A = \{1, 2, 3\}$, onda $A \subseteq A$ zato što je svaki elemenat skupa A sadržan u skupu A, ali $A \not\subset A$ zato što je skup $A =$ skupu A.

Neka $A = \{\ \}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Da li je $A \subseteq B$? Da bi poakazali $A \not\subseteq B$, treba pronaći makar jedan elemenat skupa A koji nije elemenat skupa B. pošto ovo ne može biti odrađeno, $A \subseteq B$ mora biti tačno. Korsteći se istim rezonom, možemo pokazati da *prazan skup je podskup svih skupova, uključujući i samoga sebe.*

PRIMJER 10 **"Elemenat ili podskup?"**

Odredite da li su sljedeći izrazi tačni.

a) $3 \in \{3, 4, 5\}$

b) $\{3\} \in \{3, 4, 5\}$

c) $\{3\} \in \{\{3\}, \{4\}, \{5\}\}$

d) $\{3\} \subseteq \{3, 4, 5\}$

e) $3 \subseteq \{3, 4, 5\}$

f) $\{\ \} \subseteq \{3, 4, 5\}$

RJEŠENJE

a) $3 \in \{3, 4, 5\}$ je tačan izraz zato što je 3 član skupa $\{3, 4, 5\}$.

b) $\{3\} \in \{3, 4, 5\}$ je netačan izraz zato što je $\{3\}$ skup, a skup $\{3\}$ nije elemenat skupa $\}3, 4, 5\}$.

c) $\{3\} \in \{\{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ je tačan izraz zato što je $\{3\}$ elemenat skupa. Elementi skupa $\{\{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ su sami sobom skupovi.

d) $\{3\} \subseteq \{3, 4, 5\}$ je tačan izraz zato što je svaki elemenat prvog skupa ujedno elemenat drugog skupa.

e) $3 \subseteq \{3, 4, 5\}$ je netačan izraz zato što 3 nije u velikim zagradama, pa nije skup i prema tome ne može biti podksup. 3 je elemenat skupa kako je naglašeno u dijelu a).

f) $\{\ \} \subseteq \{3, 4, 5\}$ je tačan izraz zato što je prazan skup podskup svakog skupa.

△

2.0.2 BROJ PODSKUPOVA

Koliko se različitih podskupova može napraviti od jednog ponuđenog skupa? Prazan skup nema elemenata i ima tačno jedan podskup. A skup sa tri elementa ima osam podskupova. Pogledajte tabelu 1 na strani 10. koliko podskupova sadrži skup sa četiri elementa?

Skup	Podskup	Broj podskupova
$\{\}$	$\{\}$	$1 = 2^0$
$\{a\}$	$\{a\}$ $\{\}$	$2 = 2^1$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$ $\{a\}, \{b\}$ $\{\}$	$4 = 2 \times 2 = 2^2$
$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$ $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ $\{\}$	$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

Tabela 1: Broj podskupova

Nastavljajući ovu tabelu sa većim i većim skupovima, možemo razviti generalnu formulu za računanje broja različitih podskupova datog skupa.

Broj različitih skupova konačnog skupa A je 2^nm gdje n predstavlja broj elemenata skupa A.

PRIMJER 11 **"Različiti podskupovi"**

a) Odredite broj različitih podskupova skupa {S, L, E, D}.

b) Napiđite sve raličite podskupove skupa {S, L, E, D}.

c) Koliko različitih podskupova su pravilni podskupovi?

RJEŠENJE

a) Broj elemenata skupa je 4, prema tome, broj različitih skupova je $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.

b)

$\{S, L, E, D\}$	$\{S, L, E\}$	$\{S, L\}$	$\{S\}$	$\{\}$
	$\{S, L, D\}$	$\{S, E\}$	$\{L\}$	
	$\{S, E, D\}$	$\{S, D\}$	$\{E\}$	
	$\{L, E, D\}$	$\{L, E\}$	$\{D\}$	
		$\{L, D\}$		
		$\{E, D\}$		

c) Pravilnih podskupova ima 15. Svi podskupovi osim $\{S, L, E, D\}$ su pravilni podskupovi.

△