共形映射

1 共形等价和例子。

我们先统一下在本章余下部分将要使用的术语。共形映射或双全纯映射是一个双射且全纯的函数 $f:U\to V$。给一个这样的映射 f,我们称 U 和 V 是共形等价的。一个重要的事实是 f 的逆函数自动的是全纯的。

命题 1.1 如果 $f:U\to V$ 是全纯的且为单射，那么 $f^{'}(z)\neq 0$ 对所有 $z\in U$ 成立，特别的定义在 f 值域上的 f 的逆函数是全纯的，故一个共形映射的逆映射也是全纯的。

证明：用反证法证明，假设 $f^{'}(z_0)=0$ 对某个 $z\in U$ 成立，则 $f(z)-f(z_0)=a(z-z_0)^k+G(z)$ 对于所有接近于 z_0 的 z 成立，这里 $a\neq 0,k\geq 2$，G 是 $O(z-z_0)^{k+1}$，对于充分小的 ω，有

$$f(z)-f(z_0)-\omega=F(z)+G(z)\text{，这里}F(z)=a(z-z_0)^k-\omega.$$

由于在以 z_0 为中心的小圆上有 $|G(z)|<|F(z)|$，并且 F 在这个圆内至少有两个零点，由 Rouch´e'定理知 $f(z)-f(z_0)-\omega$ 在这里有至少两个零点。由于 $f^{'}(z)\neq 0$ 对所有充分接近 z_0 但不等于 z_0 的 z 成立，推出 $f(z)-f(z_0)-\omega$ 的根是隔离的，因此 f 不是单射,矛盾.

用 V 记 f 的值域，令 $g=f^{-1}$ 记为函数 f 的逆函数，设 $\omega_0\in V$，ω 接近于 ω,记 $w=f(z)$，$\omega_0=f(z_0)$，如果 $\omega=\omega_0$,那么我们有

$$\frac{g(\omega)-g(\omega_0)}{\omega-\omega_0}=\frac{1}{\frac{\omega-\omega_0}{g(\omega)-g(\omega_0)}}=\frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}$$

由于 $f^{'}(z)\neq 0$，我们令 $z\to z_0$，得到 g 在 ω_0 处全纯，并且 $g^{'}(\omega_0)=1/f^{'}(g(\omega_0))$.

从这个命题，我们能总结出：两个开集U和 V 是共形等价的当且仅当存在两个全纯函数 $f:U\to V,g:V\to U$ ，使得 $g(f(z))=z,f(g(\omega))=\omega$ ，对于所有 $z\in U,\omega\in V$ 成立。

需要指出这里的术语并不是通用的，有些作者称一个全纯映射 $f:U\to V$ 是共形的：如果 $f^{'}(z)\neq 0$ 对于所有 $z\in U$ 成立。易见，这种定义比我们上面的定义有更少的限制：例如，$f(z)=z^2$ 在缺孔平面 $C-\{0\}$ 上满足 $f^{'}(z)\neq 0$，但它不是单射，然而，条件 $f^{'}(z)\neq 0$ 等价于 f 是一局部双射（练习 1）。条件 $f^{'}(z)\neq 0$ 会导致一个几何上的结果，这是这个术语定义有差异的根本。一个全纯是保角的，粗劣的讲，如果两条曲线γ，η 在 z_0 处相交，α 是两曲线切向量在此处的夹角，映射的像 $f\circ\gamma,f\circ\eta$ 在 $f(z_0)$ 处相交，并且它们的切向量有相同的角α，问题 2 进一步介绍了这一思想。

我们通过观察大量的例子来研究共形映射。第一个给出的共形等价是单位圆盘和上半平面，这在许多问题中扮演重要作用。

1.1 单位圆盘和上半平面

我们记上半平面为 H,它仅包含虚部为正的复数，于是

$$H=\{z\in C:\mathrm{Im}(z)>0\}$$

一个出乎意料但重要的事实是无界集 H 与单位圆盘共形等价。而且有明确的式子给出了等价性，事实上，令

$$F(z)=\frac{i-z}{i+z},G(\omega)=i\frac{1-\omega}{1+\omega}$$

定理 1.2 映射$F:H\to D$是共形映射，逆映射为$G:D\to H$

证明:首先，我们观察到这两个映射都在各自的定义区域中是全纯的。其次注意到任何上半平面中的点距离 i 比-i 近，于是$|F(z)|<1$并且 F 把 H 映射到 D.为了证明 G 映射到上半平面，必须计算 $\mathrm{Im}(G(\omega)),\omega\in D$，最后让$\omega=u+iv$，注意

到 $\mathrm{Im}(G(\omega))=\mathrm{Re}(\frac{1-u-iv}{1+u+iv})=\mathrm{Re}(\frac{(1-u-iv)(1+u+iv)}{(1+u)^2+v^2})=\frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2}>0,(|\omega|<1)$

因此 G 将单位圆盘映射到上半平面.最后, $F(G(\omega))=\frac{i-i\frac{1-\omega}{1+\omega}}{i+i\frac{1-\omega}{1+\omega}}=\frac{1+\omega-1+\omega}{1+\omega+1-\omega}=\omega$,

相似地，$G(F(z))=z$，这就证明了定理。

这些函数在开集边界上的行为是我们感兴趣的方面。观察到 F 在 C 上除点 $z=-i$ 外都全纯，特别地它在 H 的边界上处处连续，如果取 $z=x$，x 距 i 与-i 有相同的距离, 因此 $|F(x)|=1$, 于是 F 将 R 映射到 D 的边界。记 $F(x)=\frac{i-x}{i+x}=\frac{1-x^2}{1+x^2}+i\frac{2x}{1+x^2}$,

如果用参数表示我们将得更多信息，实轴：$x=\tan t, t\in(-\pi/2,\pi/2)$.由于

$\sin 2a=\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a},\cos 2a=\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$,

我们有 $F(x)=\cos 2t+i\sin 2t=e^{i2t}$，因此实轴的像是单位圆上除点-1 的圆弧。随着 x 从 $-\infty$ 到 ∞，F(x)从-1 开始沿圆弧移动先经过下半平面。

圆弧上的点-1 对应上半平面的“无穷远点”。

注记,形如 $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$ 的映射，这里 a,b,c,d 是复数，分母不是分子的倍数，通常叫做分式线性变换。另一个例子是定理 2.1 和定理 2.4 中圆盘和上半平面的自同构.

1.2 进一步的例子

我们总结一些共形映射的例子。在某些例子中，我们讨论映射在相关区域边界上的行为。一些例子在图一中描绘出。

例 1.平移和数乘给出了第一个简单的例子。事实上，如果 $h\in C$，平移 $z\mapsto z+h$ 是 C 到 C 的共形映射，逆映射为 $\omega\mapsto\omega-h$，如果 h 是实数，那么这个平移是上半平面到自身的共形映射。

对于任何非零复数 c,映射 $f: z \mapsto cz$ 是复平面到自身的共形映射，逆映射是 $g: \omega \mapsto c^{-1}\omega$，如果 c 的模等于 1，于是 $c = e^{i\varphi}, \varphi \in R$，f 便是角度为 φ 的旋转，如果 c>0,f 对应一个伸缩，最后，如果 c<0，f 包含一个长度为|c|的伸缩和角度为 π 的旋转。

例 2.如果 n 是一个正整数，映射 $z \mapsto z^n$ 是集 $S = \{z \in C : 0 < \arg(z) < \pi / n\}$ 到上半平面的共形映射，逆映射是映射 $\omega \mapsto \omega^{1/n}$ 定义在对数的一个分支上。

更一般地，如果 $0 < \alpha < 2$ 映射将上半平面映射到 $S = \{\omega \in C : 0 < \arg(\omega) < \alpha\pi\}$，事实上，我们通过删除正实轴获得的对数的一个分支，$z = re^{i\theta}, r > 0, 0 < \theta < \pi$，那么 $f(z) = z^{\alpha} = |z|^{\alpha} e^{i\alpha\theta}$.因此 f 映射将 H 映到 S。简单的检验证明 f 的逆映射由 $g(\omega) = \omega^{1/\alpha}$ 给出，这里 ω 的取值范围是对数的一个分支 $0<\arg\omega<\alpha\pi$ 。

通过与先前例子中的平移和数乘映射的复合，我们能将上半平面共形地映射到 C 的任何（无限）部分区域。

让我们讨论 f 在边界区域上的行为，如果 x 在实轴上从 $-\infty$ 移动到 0，那么 f(x) 在射线 $\arg z = \alpha\pi$ 从 $\infty e^{i\alpha\pi}$ 移动到 0。x 在实轴上从 0 移动到 ∞ 时，像 f(x)也从 0 移动到 ∞。

例 3.映射 $f(z) = (1+z)/(1-z)$ 把上半圆盘 $\{z = x + iy : |z| < 1, y > 0\}$ 共形映射到第一象限{w = u + iv : u > 0 ,v > 0},事实上，如果 z=x+iy 我们有

$$f(z) = \frac{1-(x^2+y^2)}{(1-x)^2+y^2} + i\frac{2y}{(1-x)^2+y^2},$$

因此 f 将上半圆盘映射到第一象限，$g(\omega) = (\omega-1)/(\omega+1)$ 给出了逆映射，这显然是在第一象限的全纯映射。而且，对于任意第一象限中的点 ω，由于 ω 到-1 的距离大于 ω 到 1 的距离，故 $|\omega+1| > |\omega-1|$；因此 g 映射到单位圆盘，最后，容易检验当 ω 在第一象限时 $g(\omega)$ 的虚部是正的 。因此 g 将第一象限变换到上半圆盘，

因为 g 是 f 的逆映射，我们得出 f 是共形映射。

为了考察 f 在边界上的行为，注意到如果 $z=e^{i\theta}$ 属于上半圆弧，那么 $f(z)=\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}}=\frac{i}{\tan(\theta/2)}$

随着 θ 从 0 移动到 π，我们看到 $f(e^{i\theta})$ 沿着虚轴从正无穷到 0，进一步，如果 z=x 是实数，那么 $f(z)=\frac{1+x}{1-x}$ 也是实数；从这里可以看出，事实上 f 是从 $(-1,1)$ 到正实轴的双射，随着 x 从-1 到 1，f(x)从 0 增加到正无穷。注意 f(0)=1.

例 5.记住前面的例子，观察到 $z\mapsto \log z$ 也定义了半圆盘{z = x + iy :

|z| < 1, y > 0}到条形区域{w = u + iv : u < 0, 0 < v < π}的共形映射。随着 x 从 0 到 1，logx 从 $-\infty$ 移动到 0，当 x 在上半圆弧上从 1 移动到-1 时，logx 在条形区域的竖直线段上从 0 移动到 πi，最后，x 从-1 移动到 0 时，点 logx 在条形区域的最上方从 πi 移动到 $-\infty+\pi i$。

例 6.映射 f(z)=e^{iz} 将半条形区域 $\{z=x+iy:-\pi/2<x<\pi/2, y>0\}$ 共形映射到半圆盘 $\{\omega=u+iv:|\omega|<1, u>0\}$，这可由下列事实立即得到：若 z=x+iy,那么 $e^{iz}=e^{-y}e^{ix}$，若 x 从 $\pi/2+i\infty$ 移动到 $\pi/2$，那么 f(x)从 0 移动到 x,随着 x 从 $\pi/2$ 移动到- $\pi/2$，f(x)在半圆周上从 i 移动到-i,最后 x 从- $\pi/2$ 移动到 $-\pi/2+i\infty$，f(x) 从-i 返回到 0.这里映射 f 和例 5 中映射的逆有紧密的联系。

例 7，函数 $f(z)=-\frac{1}{2}(z+1/z)$ 是半圆盘 $\{z=x+iy:|z|<1, y>0\}$ 到上半平面的共形映射(练习 5).

f 在边界上的行为如下：x 从 0 到 1，f(x)在实轴上从 ∞ 移动到 1，若 $z=e^{i\theta}$，则 $f(z)=\cos\theta$，并且随着 x 在上半平面中的单位半圆周从 1 移动到-1 时 f(x)在实轴上从 1 移动到-1，最后当 x 从-1 移动到 0 时，f(x)在实轴上从-1 移动到 $-\infty$。

例 8.映射 $f(z)=\sin z$ 将到半条形区域 $\{\omega=x+iy:-\pi/2<x<\pi/2, y>0\}$ 共形映射

到上半平面。为了说明这一点注意到如果$\xi = e^{iz}$，那么

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{-1}{2}(i\xi + \frac{1}{i\xi})$$

因此首先应用例 6，其次乘以 i(即旋转$\pi/2$)，最后应用例 7 中的映射。

随着 x 从$-\pi/2 + i\infty$移动到$\pi/2$，f(x)从$-\infty$移动到-1，当 x 是在-$\pi/2$到$\pi/2$中间的实数时，f(x)是-1 与 1 间的实数，最后如果 x 从$\pi/2$移动到$\pi/2 + i\infty$，f(x)在实轴上从 1 移动到∞。

2 施瓦茨引理；圆盘和上半平面的自同构

施瓦茨引理的叙述和证明都是简单的，但结果的应用确是深远的。我们记得一个旋转是形如$z \mapsto cz$的映射，这里$|c| = 1$，于是$c = e^{i\theta}, \theta \in R$叫做旋转角，若包含$2\pi$的整数倍是良定义的。

引理 2.1：若$f : D \to D$是全纯映射，f(0)=0.那么

(1)$|f(z)| \le |z|, z \in D.$

(2)如果对某个$z_0 \ne 0$，$|f(z_0)| = |z_0|$，那么 f 是旋转。

(3)$|f'(0)| \le 1$,若等号成立，f 是旋转。

证明:首先将 f 在 0 处展成幂级数，该幂级数在 D 内收敛。

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

由于 f(0)=0,我们有$a_0 = 0$，因此$f(z)/z$在 D 内全纯(因为 0 是可去奇点)，如果$|z| = r < 1$，由于$|f(z)| \le 1$，于是得到$|\frac{f(z)}{z}| \le \frac{1}{r}$。根据极大模原理，可得到当$|z| \le r$时，上面等式依然成立，令$r \to 1$就得到了(1).

对于(2),我们看到$f(z)/z$在 D 内部取得了极大值，因此是一常数，即有$f(z) = cz$，

在 z_0 处考虑这一形式，并取绝对值，可发现 $|c|=1$，因此存在 $\theta \in R$，使得 $c=e^{i\theta}$，这就说明 f 是旋转。

最后注意到如果 $g(z)=f(z)/z$，那么在 D 内有 $|g(z)|\le 1$，并且

$$g(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=f^{'}(0)$$

因此，如果 $|f^{'}(0)|=1$，那么 $|g(0)|=1$，由极大值原理 g 是常数，这暗示着 $f(z)=cz,|c|=1$

我们对这一引理的第一个应用是去决定圆盘的自同构。

2.1 圆盘的自同构

一个从开集 Ω 到自身的共形映射叫做 Ω 的自同构。Ω 的所有自同构组成的集合记为 Aut(Ω),它具有群的结构。群的运算是映射的合成，单位元素是恒等映射 $z\mapsto z$，元素的逆元是函数的逆函数。明显地，若 f,g 是 Ω 的自同构，那么 $f\circ g$ 也是一个自同构，事实上，逆为 $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$。

像上面提到的，恒等映射总是自同构。我们能给出其它更有趣的单位圆盘的自同构。明显地，任何角度为 $\theta \in R$ 的旋转，即 $r_\theta : z\mapsto e^{i\theta}z$ 是单位圆盘的自同构，其逆为角度是 $-\theta$ 的旋转，即 $r_{-\theta} : z\mapsto e^{-i\theta}z$。更有趣的是形如下面的自同构：$\psi_\alpha(z)=\dfrac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z},\alpha\in C,|\alpha|<1$

这样的映射已经在第一章练习 7 中介绍过，它具很多有用的性质，因此出现在复分析中的很多问题中。证明它们是 D 的自同构是很简单地。首先观察到因为 $|\alpha|<1$，映射 ψ_α 在单位圆盘上是全纯地，如果 $|z|=1$，那么 $z=e^{i\theta}$ 并且

$$\psi_\alpha(e^{i\theta})=\frac{\alpha-e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta}-\overline{\alpha})}=e^{-i\theta}\frac{\omega}{\overline{\omega}},\omega=\alpha-e^{i\theta}$$

因此 $|\psi_\alpha(z)|=1$。由极大模原理，我们得到 $|\psi_\alpha(z)|<1, z\in D$。最后我们做下面非

常简单地观察:

$$(\psi_\alpha \circ \psi_\alpha)(z) = \frac{\alpha - \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}}{1-\overline{\alpha}\frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}} = \frac{\alpha - |\alpha|^2 z - \alpha + z}{1-\overline{\alpha}z - |\alpha|^2 + \overline{\alpha}z}$$
$$= \frac{(1-|\alpha|^2)z}{1-|\alpha|^2} = z$$

因此我们可以得到ψ_α是自身的逆映射。ψ_α的另一个重要的性质是$z=\alpha$是它的零点，而且它交换 0 和α，$\psi_\alpha(0)=\alpha, \psi_\alpha(\alpha)=0$。下一个定理说明旋转和映射$\psi_\alpha$的复合穷尽了所有圆盘的自同构。

定理 2.2 如果 f 是圆盘的自同构，那么存在$\theta \in \mathrm{R}, \alpha \in D$使得

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}$$

证明:因为 f 是圆盘的自同构，从而存在唯一的复数$\alpha \in D$，使得$f(\alpha)=0$。现在让我们考虑定义为$g = f \circ \psi_\alpha$的自同构。那么$g(0)=0$，由施瓦茨引理得到

（2） $$|g(z)| \le |z|, z \in D,$$

而且$g^{-1}(0)=0$，于是应用施瓦茨引理到g^{-1}，我们发现$|g^{-1}(\omega)| \le |\omega|, \omega \in D$。使用上面的不等式到$\omega = g(z), z \in D$得到

（3） $$|z| \le |g(z)|, z \in D$$

综合（2）和（3）我们得到$|g(z)|=|z|, z \in D$，应用施瓦茨引理，我们得到$g(z)=e^{i\theta}z, \theta \in R$，用$\psi_\alpha(z)$代替 z,并用$(\psi_\alpha \circ \psi_\alpha)(z)=z$，我们得到$f(z)=e^{i\theta}\psi_\alpha(z)$，证毕。

在定理中令$\alpha=0$得到下面的结果。

推论 2.3 固定原点的圆盘的唯一自同构是旋转。

通过使用映射ψ_α，我们能看出圆盘的自同构群在圆盘上的作用是传递的：任给圆盘上两点α, β，存在自同构ψ将α映到β，例如$\psi = \psi_\beta \circ \psi_\alpha$。

D 的自同构的明确的公式给出群 Aut(D)的一个很好的描述，事实上，自同构群“几乎”同构于 2×2 的复整矩阵记为 SU(1,1),这个群包含了保持 $C^2\times C^2$ 中埃尔米特形式($<Z,W>=z_1\overline{\omega_1}-z_2\overline{\omega_2}$)的所有 2×2 矩阵.更多关于这一话题的信息，请读者看问题 4.

2.2 上半平面的自同构

关于 D 的自同构和第一部分给出的共形映射 $F:H\to D$ 是我们可以决定 H 的自同构群，记为 Aut(H).

考虑映射 $\Gamma:Aut(D)\to Aut(H):\Gamma(\varphi)=F^{-1}\circ\varphi\circ F$,明显地，当 φ 是 D 的自同构时 $\Gamma(\varphi)$ 是 H 的自同构，并且 Γ 是一双射，其逆由 $\Gamma^{-1}(\psi)=F\circ\psi\circ F^{-1}$ 给出。事实上，Γ 保持自同构群的运算：设 $\varphi_1,\varphi_2\in Aut(D)$，因为 $F\circ F^{-1}$ 是 D 的恒等映射，我们发现

$$\begin{aligned}&\Gamma(\varphi_1\circ\varphi_2)=F^{-1}\circ\varphi_1\circ\varphi_2\circ F\\&=F^{-1}\circ\varphi_1\circ F\circ F^{-1}\circ\varphi_2\circ F\\&=\Gamma(\varphi_1)\circ\Gamma(\varphi_2)\end{aligned}$$

这样我们能得到两个群 Aut(D),Aut(H)是一样的，因为 Γ 是它们的同构映射。我们仍然没有给出 Aut(H)中元素的描述。一系列包含通过 F 将圆盘上自同构拉回到上半平面的自同构的计算显示 Aut(H)包含所有形如 $z\mapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$ 的映射，这里 a,b,c,d 都是实数，且 $ad-bc=1$。这一条件蕴含一个矩阵群。令 $SL_2(R)$ 是所有 2×2，且行列式为一的实矩阵，即 $SL_2(R)=\{M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}:a,b,c,d\in R,\det(M)=ad-bc=1\}$。

这个群叫做特殊线性群。

给定 $M\in SL_2(R)$，定义映射 f_M 为 $f_M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$。

定理 2.4 H 的每个自同构都具有形式 $f_M,M\in SL_2(R)$，反过来，每个这样形式的

映射都是 H 的自同构。

证明分为几步，出于简洁性，我们用 G 代表 $SL_2(R)$。

第 1 步；如果 $M\in G$，则 f_M 将 H 映到自身，这可由下面观察得到

(4) $$\operatorname{Im}(f_M(z))=\frac{(ad-bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}=\frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}>0, z\in H$$

第 2 步：如果 $M,M^{'}$ 是 G 中的两个矩阵，那么 $f_M\circ f_{M^{'}}=f_{MM^{'}}$，这是直接的计算，我们省略。作为结果，我们能证明定理的第一部分，每一个 f_M 是自同构，这是由于它由逆映射 $(f_M)^{-1}$，即是 $f_{M^{-1}}$，事实上，如果 I 是单位矩阵。那么

$$(f_M\circ f_{M^{-1}})(z)=f_{MM^{-1}}(z)=f_I(z)=z$$

第 3 步：任给 H 中的两点 z,ω，存在 $M\in G$ 使得 $f_M(z)=\omega$，由此 G 在 H 上的作用是传递的。为了证明这，只需证明能将任何点 $z\in H$ 映射到 I.在(4)中令 d=0，则有 $\operatorname{Im}(f_M(z))=\frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz|^2}$，我们可以选择实数 c，使得 $\operatorname{Im}(f_M(z))=1$，下一步，我们令矩阵 $M_1=\begin{pmatrix}0 & -c^{-1}\\ c & 0\end{pmatrix}$，于是 $f_{M_1}(z)$ 的虚部为 1，下面可通过矩阵 $M_2=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}, b\in R$ 将 $f_{M_1}(z)$ 变换到 i，最终 f_M 将 z 变换到 I,这里 $M=M_1M_2$。

第 4 步；如果 θ 是实数，那么矩阵 $M_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 属于 G,如果 $F:H\to D$ 是标准共形映射，那么 $F\circ f_{M_\theta}\circ F^{-1}$ 是圆盘上角度为 -2θ 的旋转，这是由于 $F\circ f_{M_\theta}=e^{-2i\theta}F(z)$。

第 5 步；现在来完成命题的证明。设 f 是 H 上的自同构，且 $f(\beta)=i$，考虑矩阵 $N\in G$，使得 $f_N(i)=\beta$，那么 $g=f\circ f_N$ 满足 $g(i)=i$，因此 $F\circ g\circ F^{-1}$ 是圆盘上固定原点的自同构，因此 $F\circ g\circ F^{-1}$ 是旋转，由第 4 步，存在 $\theta\in R$ 使得 $F\circ g\circ F^{-1}=F\circ f_{M_\theta}\circ F^{-1}$，因此 $g=f_{M_\theta}$，进而可得到 $f=f_{M_\theta N^{-1}}$，这既是我们想要

得到的。

最后的一个观察是 Aut(H)并不同构于$SL_2(R)$，这是因为矩阵 M 和-M 给出相同的函数 $f_M = f_{-M}$，因此，如果我们将 M 和-M 视为等价，我们便获得了$PSL_2(R)$，叫做特殊线性射影群；这个群是同构于 Aut(H)的。

3 Riemann 映照定理

3.1 定理的叙述和所需的必要条件

现在我们来叙述本章最重要的部分。基本的问题是一个开集Ω满足什么条件才能保证存在共形映射$F:\Omega \to D$。

简单的观察可以发现Ω需要满足的一些必要条件。首先，如果$\Omega = C$，将没有共形映射$F:\Omega \to D$，这是因为根据 Liouville 定理 F 将是常数。因此，一个必要条件是假设$\Omega \neq C$。由于 D 是连通的，我们也必须要求Ω是连通的。我们还关注一些必要条件，由于 D 是单连通的，Ω也必须是单连通(练习 3)。出乎意料地好，Ω需要满足的这些必要条件就保证了存在Ω到 D 的双全纯映射。

出于简洁性，我们称 C 的一个子集Ω为恰当的，如果它不是空集且不是整个 C.

定理 3.1(Riemann 映照定理) 开集Ω是恰当的且单连通。如果$z_0 \in \Omega$，那么存在唯一的共形映射$F:\Omega \to D$使得$F(z_0) = 0, F'(z_0) > 0$。

推论 3.2 C 的任意两个恰当且单连通的子集是共形等价的。

明显地，推论来源于定理，因为我们能使用单位圆盘作为中介。同时，定理叙述中的唯一性也是可以直接得到的，如果 F 和 G 是Ω到 D 的两个满足上述条件的共形映射，那么$H = F \circ G^{-1}$是圆盘的固定原点的自同构。因此 $H(z)=e^{i\theta}z$，由于

$H^{'}(0)>0$，我们有 $e^{i\theta}=1$，从而可得到 F=G.

这一节余下的部分是证明共形映射 F 的存在性。证明的想法如下：我们考虑所有的全纯单射 $f:\Omega\to D, f(z_0)=0$，从中我们希望选出一个映射 f 使得其像充满 D，通过使 $f^{'}(z_0)$ 尽可能地大可以获得这样地函数。这样做时，我们应该能从一列函数中得到一个极限函数，我们首先讨论这一点。

3.2 Montel 定理

Ω 是 C 的开集，Ω 上全纯函数族 F 叫做正则的，如果 F 的每个函数序列有在 Ω 的每个紧子集上一致收敛的子序列(极限不必属于 F).

证明一族函数是正则实际上是一致有界性和等度连续性的结果。下面我们就来定义。

称函数族 F 在 Ω 的紧子集上一致有界，如果对每个紧集 $K\in\Omega$，存在 $B>0$，使得 $|f(z)|<B, \forall z\in K, f\in F$ 。

同时，称函数族 F 在紧集 K 上等度连续，如果对每一个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意 $z,\omega\in K, |z-\omega|<\delta$，有 $|f(z)-f(\omega)|<\varepsilon, \forall f\in F$ 。

等度连续是一个很强的条件，须要一致连续，且在函数族上也一致。例如，任何在[0,1]上其导数一致有界的可微函数族是等度连续的。另一方面，[0,1]上函数族 $\{f_n\}$: $f_n=x^n$ 不是等度连续的，因为对任意固定的 $0<x_0<1$，随着 n 趋于正无穷 $|f_n(1)-f_n(x_0)|\to 1$ 。

下面的定理将这两个性质结合在一起，在 Riemann 映照定理的证明中起重要作用。

定理 3.3 设 F 是 Ω 上的全纯函数族，F 在 Ω 的紧子集上是一致有界的，那么

(1)F 在Ω的每个紧子集上是等度连续的。

(2)F 是正则族。

定理包含两个独立的部分。第一部分说，在假设 F 是在Ω的紧子集上是一致有界的全纯函数族的假设下，F 是等度连续的。证明是柯西积分公式的应用，因此这依赖于 F 包含的是全纯函数，这个结论是与实数情况下完全相反的，例如(0,1)上的函数族 $f_n(x)=\sin(nx)$ 是一致有界的，然而不是等度连续的，在(0,1)的任何紧子区间上没有收敛子序列。

定理的第二部分本质上不是复分析。事实上，仅仅假设 F 是一致有界且在Ω的紧子集上等度连续就可得到 F 是正则族。其实这就是 Arzela-Ascoli 定理的结果，它的证明主要包含了一个选取对角线方法。

我们需要证明在Ω的任意紧子集上收敛，因此介绍下面的记号是有用的，Ω的一个紧子集序列$\{K_l\}_{l=1}^{\infty}$叫做穷尽的，如果

(a) K_l 包含在 $K_{l+1}, l=1,2,....$ 的内部。

(b)任何紧集 $K\subset\Omega$ 被包含在某个 K_l 内，特别地，$\Omega=\bigcup_{l=1}^{\infty}K_l$ 。

引理 3.4，复平面中的任何开集Ω有穷尽的序列。

证明:如果Ω是有界的，用 K_l 表示Ω中所有到Ω的边界的距离大于$1/l$的点。如果Ω是无界的，用 K_l 表示相同的集，并附加条件$|z|\le l, z\in K_l$ 。

我们现在证明 Montel 定理，K 是Ω的紧子集选择$r>0$，使得对于所有的$z\in K$，$D_{3r}(z)$包含在Ω中，这只需要选择 r,使得 3r 小于 K 到Ω的边界的距离。令 $z,\omega\in K, |z-\omega|<r$ ，用γ表示圆盘$D_{2r}(\omega)$的边界圆，那么由柯西积分公式，

$$f(z)-f(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(\varsigma)\left[\frac{1}{\varsigma-z}-\frac{1}{\varsigma-\omega}\right]d\varsigma$$

观察到

$$\left|\frac{1}{\varsigma - z} - \frac{1}{\varsigma - \omega}\right| = \frac{|z-\omega|}{|\varsigma - z||\varsigma - \omega|} \le \frac{|z-\omega|}{r^2}$$

由于$\varsigma \in \gamma$，并且$|z-\omega|<r$，因此$|f(z)-f(\omega)| \le \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi r}{r^2}B|z-\omega|$

，这里 B 为Ω中所有到 K 的距离不大于 2r 的点组成的紧集上函数族的一致界。

因此对于所有$z,\omega \in K, |z-\omega|<r, f \in F$，有$|f(z)-f(\omega)|<C|z-\omega|$，因此正如想要展示的，这个函数族是等度连续的。

为了证明定理的第二部分，做下面讨论。设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是 F 中的一个序列，K 是Ω的一个紧子集。选择Ω中的一个稠密点列$\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$，因为$\{f_n\}$是一致有界的，因此$\{f_n\}$中存在子序列$\{f_{n,1}\} = \{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{3,1}, \ldots\}$使得$f_{n,1}(\omega_1)$收敛。

从$\{f_{n,1}\}$中我们能选出子序列$\{f_{n,2}\} = \{f_{1,2}, f_{2,2}, f_{3,2}, \ldots\}$使得$f_{n,2}(\omega_2)$收敛，我们继续这一过程，从$\{f_{n,j-1}\}$中选取子序列$\{f_{n,j}\}$使得$f_{n,j}(\omega_j)$收敛。

最后，让$g_n = f_{n,n}$，考虑对角子序列$\{g_n\}$，由构造可知$g_n(\omega_j)$对于每个 j 收敛，由等度连续性可知g_n在 K 上一致收敛。给定$\varepsilon > 0$，选择δ作为等度连续的度量，注意到对于某个 J,集 K 包含在圆盘$D_\delta(\omega_1), \ldots, D_\delta(\omega_J)$的并中。选取 N 足够大，如果$n,m>N$，那么$|g_m(\omega_j)-g_n(\omega_j)|<\varepsilon, j=1,\ldots,$ J。于是如果$z \in K$，那么对于某个$1 \le j \le J, z \in D_\delta(\omega_j)$，因此

$$\begin{aligned}&|g_n(z)-g_m(z)| \le |g_n(z)-g_n(\omega_j)| + |g_n(\omega_j)-g_m(\omega_j)| + \\ &|g_m(\omega_j)-g_m(z)| < 3\varepsilon, n,m>N\end{aligned}$$

因此$\{g_n\}$在 K 上一致收敛。

最后，我们需要进一步对角化的方法在获得在Ω的每个紧子集上都一致收敛的函数列。设$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_l \subset \cdots$是$\Omega$的一个穷尽列，原始序列$\{f_n\}$的子序列$\{g_{n,1}\}$在$K_1$上一致收敛，从$\{g_{n,1}\}$中选取在$K_2$上一致收敛的子序列$\{g_{n,2}\}$，继续下去，

那么$\{f_n\}$的子序列$\{g_{n,n}\}$在每个K_l上一致收敛，并且由于K_l穷尽Ω，序列$\{g_{n,n}\}$在Ω的任何紧子集上一致收敛，正如我们像证明的。

在我们证明 Riemann 映照定理之前，我们需要进一步的结果。

命题 3.5　如果Ω是 C 的连通子集，$\{f_n\}$是Ω上单射全纯函数列，在Ω的每个紧子集上收敛到一全纯函数 f，那么 f 是单射或常数。

证明：我们可以假设 f 不是单射推出矛盾。于是Ω中存在z_1, z_2使得$f(z_1)=f(z_2)$，定义一个新序列$g_n(z)=f_n(z)-f_n(z_1)$，于是g_n除z_1外无其它零点，序列$\{g_n\}$在Ω的紧子集上一致收敛到$g(z)=f(z)-f(z_1)$。如果 g 不是恒为零，那么z_2是 g 的另一个孤立零点(因为Ω是连通的)；因此$1=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(\varsigma)}{g(\varsigma)}d\varsigma$，这里$\gamma$是以$z_2$为中心的小圆，使得 g 在$\gamma$上不为零或在$\gamma$内除$z_2$的任何点不为零。因此$1/g_n$在$\gamma$上一致收敛到$1/g$，由于在$\gamma$上$g_n' \to g'$是一致收敛，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_n'(\varsigma)}{g_n(\varsigma)}d\varsigma \to \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(\varsigma)}{g(\varsigma)}d\varsigma$$

但由于g_n在γ内部无零点，因此$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_n'(\varsigma)}{g_n(\varsigma)}d\varsigma = 0, \forall n$，矛盾！

3.3 Riemann 映照定理的证明

一旦我们获得上述结果，Riemann 映照定理的余下证明将是非常优美的。这包含三步，我们分别来证明。

第 1 步：设Ω是 C 的恰当单连通开子集，我们断定Ω共形等价于单位圆盘的一个包含原点的开子集。事实上，选择一个不属于Ω的复数α(回想起Ω是恰当的)，观察到$z-\alpha$在单连通集合Ω上不为零。因此，我们能定义带有对数性质的全纯函数$f(z)=\log(z-\alpha)$，作为结果有$e^{f(z)}=z-\alpha$，特别地证明了 f 是单射，取点

$\omega \in \Omega$，观察到 $f(z) \neq f(\omega)+2\pi i, z \in \Omega$，否则，我们用指数作用在这个式子，得到 $z=\omega$，进而 $f(z)=f(\omega)$，矛盾。事实上，我们断定 $f(z)$ 严格与 $f(\omega)+2\pi i$ 有间隔，即存在以 $f(\omega)+2\pi i$ 为中心的小圆盘不包含 $f(\Omega)$ 的任何点。否则，Ω 中将存在点列 $\{z_n\}$ 使得 $f(z_n) \to f(\omega)+2\pi i$。我们用指数作用在这一关系上，由于指数函数是连续的，因此一定有 $z_n \to \omega$，但这暗示 $f(z_n) \to f(\omega)$，矛盾。

最后，考虑映射 $F(z)=\dfrac{1}{f(z)-(f(\omega)+2\pi i)}$，由于 f 是单射，因此 F 也是单射，从而 $F:\Omega \to F(\Omega)$ 是共形映射。而且，通过我们的分析 $F(\Omega)$ 是有界的。我们因此可以通过平移和数乘 F 获得从 Ω 到单位圆盘的一个包含原点的开集的共形映射。

第 2 步：由第一步，我么可以假设 Ω 是 D 的包含原点的开子集，考虑 Ω 上所有映射到单位圆盘且固定原点的单的全纯函数组成的函数族 F

$$\mathbb{F}=\{f:\Omega \to D\text{全纯，单射，}f(0)=0\}$$

首先，注意到 F 是非空，因为它包含恒等映射，同时，这个族一致有界，因为所有的函数是映射到单位圆盘的。

现在，我们的问题是找到具有极大 $|f'(0)|$ 的函数 $f \in \mathbb{F}$，首先观察到当 f 在 F 中时，量 $|f'(0)|$ 是一致有界的,这由柯西不等式(第 2 章推论 4.3)将 f' 应用以原点为中心的小圆盘上可得.

下一步，令 $s=\sup\limits_{f\in F}|f'(0)|$，我们选取序列 $\{f_n\}\subset \mathbb{F}$，使得 $|f_n'(0)| \to s, n \to \infty$，由 Montel 定理(定理 3.3)，这一序列在 Ω 的任何紧子集上有一致收敛到全纯函数 f 的子序列，因为 $s \geq 1$(因为 $z \mapsto z$ 属于 F)，f 非常数 ，因此由命题 3.5 知是单射。同时，由连续性，我们有 $|f(z)| \leq 1, z \in \Omega$，从极大模原理知有 $|f(z)|<1$，由于有 f(0)=0,从而 $f \in F, |f'(0)|=s$

第 3 步，在最后一步，我们说明 f 是 Ω 到 D 的共形映射。由于 f 已经是单射，只

需证明 f 是满射，若非这样，我们能构造中的函数，其在 0 处的导数的模大于 s，

事实上，假设存在$\alpha \in D$，使得$f(z) \neq \alpha$，考虑圆盘的交换 0 和α自同构ψ_α，即

$\psi_\alpha = \dfrac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$，由于$\Omega$是单连通的，因此$U = (\psi_\alpha \circ f)(\Omega)$也是单连通，而且 U 不包

含原点。因此可以定义 U 上的平方根函数$g(\omega) = e^{\frac{1}{2}\log\omega}$。

下一步，考虑函数$F = \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f$，我们断定$F \in \mathbb{F}$，F 是全纯映射和将 0 映为 0 是明显的，同时 F 映射到单位圆盘，因为它是这样函数的复合，最后 F 是单射，这是由$\psi_\alpha, \psi_{g(\alpha)}$是自同构，平方根函数 g 和函数 f 是单射；如果 h 表示平凡函数$h(\omega) = \omega^2$，那么我们有

$$f = \psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1} \circ F = \Phi \circ F$$

但是Φ将 D 映射到 D，$\Phi(0) = 0$，由于 F 是单射，h 不是单射，因此Φ不是单射，由施瓦茨引理的最后部分，得到$|\Phi^{'}(0)| < 1$。我们注意到

$f^{'}(0) = \Phi^{'}(0) F^{'}(0)$，因此$|f^{'}(0)| < |F^{'}(0)|$，与$\mathbb{F}$中$|f^{'}(0)|$的极大性矛盾，证明完成。

最后，我们用一绝对值为 1 的复数乘以 f,使$f^{'}(0) > 0$，这就结束证明。

了解其它不同的证明，请看问题 7.