微分模

Lhzsl

设A是环,M是一个A-模,从A到M的一个**导数**是指一个映射 $D: A \to M$ 满足:

$$D(a + b) = D(a) + D(b), D(ab) = aD(b) + bD(a)$$

对任意 $a,b \in A$ 成立。所有这样的导数组成的集合记为Der(A,M)。规定 $(D+D')a = Da + D'a, (aD)b = a(Db), \forall a,b \in A, 则 Der(A,M)$ 具有A—模结构。

若A透过映射 $f:k\to A$ 成为k—代数,若导数 $D\in Der(A,M)$ 满足 $D\circ f=0$,则称D为k—导数,所有这些k—导数组成的集合记为 $Der_k(A,M)$,它是Der(A,M)的A—子模。对任意 $D\in Der(A,M)$,易知 D(1)=D(1)+D(1),从而D(1)=0,由此,若将A看作 \mathbb{Z} —模,则 $Der(A,M)=Der_{\mathbb{Z}}(A,M)$.

特别地,若M = A,则简记 $Der_k(A, A)$ 为 $Der_k(A)$.

设A是一个k-代数,N为A-模,则直和 $A \oplus N$ 具有k-模结构,定义 $A \oplus N$ 中元素的乘法为:

$$(a, x)(a', x') = (aa', ax' + a'x), \forall a, a' \in A, x, x' \in N.$$

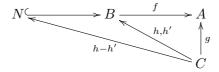
则 $A \oplus N$ 成为k-代数,用A * N表示该k-代数。

一般地,给定k-代数组成的范畴中交换图



这里将g看作固定的,称h是g的一个**提升**。用N表示B的理想Kerf,若 $h':C\to B$ 是g的另一个提升,则 $(h-h')(C)\subseteq N$,从而h-h'可看作从C到N的映射。若 $N^2=0$,则N是一个 $f(B)\cong B/N$ -模:若 $a\in f(B)$,取a的一个原像b,对于任意 $n\in N$,定义an:=bn,由于 $N^2=0$,该定义与a的原像选取无关,从而是良好定义的。进一步由映射 $g:C\to f(B)\subseteq A$,N可看作C-模。

断言: $h - h' : C \to N \not\in C$ 到 $C - \notin N$ 的一个k -导数。



证明. 由于 $h,h':C\to B$ 均为k-代数范畴里的态射,故自然有 $h\circ(k\to C)=k\to B=h'\circ(k\to C)$,即 $(h-h')\circ(k\to C)=0$. 剩下便只需证明: (h-h')(ab)=a(h-h')b+b(h-h')a对任

 $\hat{\mathbf{z}}a,b\in C$ 成立。这里只需注意C中元素a,b是如何作用在N上。用上述作用的定义,a的作用,即相当于取g(a)在f下的任意一个原像去作用,对b同样是。于是

$$a(h - h')b + b(h - h')a$$

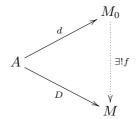
$$= h(a)(h - h')b + h'(b)(h - h')(a)$$

$$= h(ab) - h'(ab)$$

$$= (h - h')(ab).$$

上述式中,h(a), h'(b)分别为g(a), g(b)在f下的一个原像。由上式看出,h-h'确实为C到C-模N的一个k-导数。

设k是环,A为k-代数,用 \mathcal{M}_A 表示A-范畴,则 $M \mapsto Der_k(A, M)$ 为 \mathcal{M}_A 到自身的协变函子。 下面说明该函子为可表函子. 即存在A-模 M_0 及导数 $d \in Der_k(A, M_0)$ 满足下面泛性质: 对任意A-模M,导数 $D \in Der_k(A, M)$,存在唯一的A-线性映射 $f: M_0 \to M$,使得 $D = f \circ d$.即有下交换图



证明. 证明是构造性的。定义 $\mu: A \otimes_k A \to A$ 为 $\mu(x \otimes y) = xy$; 则 μ 是k-代数同态。令

$$I = Ker\mu$$
, $\Omega_{A/k} = I/I^2$, $B = (A \otimes_k A)/I^2$;

则 μ 诱导处出同态 $\mu': B \to A$ 且有下述k-代数正合列

$$0 \to \Omega_{A/k} \to B \xrightarrow{\mu'} A \to 0$$

该正合列是分裂的(split)。事实上,定义映射 $\lambda_i: A \to B, i=1,2$ 为

$$\lambda_1(a) = a \otimes 1 \mod I^2$$
, $\lambda_2(a) = 1 \otimes a \mod I^2$,

这两个映射均为 $1_A: A \to A$ 的提升。

$$I/I^{2} \xrightarrow{} (A \otimes_{k} A)/I^{2} \xrightarrow{\mu'} A$$

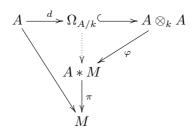
$$\downarrow d = \lambda_{1} - \lambda_{2}$$

$$\downarrow id_{A}$$

故 $d = \lambda_2 - \lambda_1$ 是A到 $\Omega_{A/k}$ 的一个导数。下面说明 $(\Omega_{A/k}, d)$ 满足前面所说的泛性质。

$$\mu(\sum x_i \otimes y_i) = \sum x_i y_i = 0 \Rightarrow \varphi(\sum x_i \otimes y_i) = (0, \sum x_i y_i);$$

故 φ 将I映到M(此处将M看作A*M的一个子代数),由A*M中乘法定义知,在A*M中 $M^2=0$,故 我们便得到映射 $f:I/I^2\to\Omega_{A/k}\to M$.



其中 π 为A*M到第二个分量的投射,而f即为竖直方向上两个映射的合成。

对于 $a \in A$,

$$f(da) = f(1 \otimes a - a \otimes 1 \mod I^2) = \varphi(1 \otimes a) - \varphi(a \otimes 1)$$
$$= Da - a \cdot D(1) = Da,$$

于是 $D = f \circ d$.

定义A在 $\Omega_{A/k}$ 上的作用为 $a\in A$ 作用在 $A\otimes_k A$ 上即为 $1\otimes 1$ 乘以 $A\otimes_k A$ 中元素(等价地,用 $1\otimes a$ 去乘: $a\otimes 1-1\otimes a\in I, I$ 中元素作用在 $\Omega_{A/k}$ 上为零),由此 $\Omega_{A/k}$ 具有A—模结构。若 $\xi=\sum x_i\otimes y_i \ mod\ I^2\in \Omega_{A/k},$ 则 $a\xi=\sum ax_i\otimes y_i \ mod\ I^2,$ 因此 $f(a\xi)=\sum ax_iDy_i=af(\xi),$ 故f是A—线性的。

对于 $a, a' \in A, a \otimes a' = (a \otimes 1)(1 \otimes a' - a' \otimes 1) + aa' \otimes 1$, 于是,若 $\omega = \sum x_i \otimes y_i \in I$,则

$$\omega = \sum (x_i \otimes 1)(1 \otimes y_i - y_i \otimes 1) + x_i y_i \otimes 1$$
$$= \sum x_i dy_i + (\sum x_i y_i \otimes 1) = \sum x_i dy_i.$$

故 $\Omega_{A/k}$ 作为A-模由 $\{da|a\in A\}$ 生成。满足 $D=f\circ d$ 的A-线性映射f的唯一性是显然的。

称上面构造的A-模 $\Omega_{A/k}$ 为A在k上的**微分模(module of differentials)**或称**K** \ddot{a} hler differentials.称 $da \in \Omega_{A/k}$ 为 $a \in A$ 的微分(differential).用 $d_{A/k}$ 表示 $d: A \to \Omega_{A/k}$.从定义知有同构

$$Hom_A(\Omega_{A/k}, M) \cong Der_k(A, M)$$

$$f \mapsto f \circ d_{A/k}$$
.

设A为k-代数,若A具有下列泛性质:对任意k-代数C,C的理想N, $N^2=0$,及任意k-代数同态u: $A \to C/N$,存在u的提升 $v: A \to C,v$ 是k-代数同态。换句话说,若有交换图

$$A \xrightarrow{u} C/N$$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$

$$k \longrightarrow C$$

则存在v使得下图交换



则称A为**0-smooth**(over k).若至多存在一个v,则称A为**0-unramified** over k。若A同时为0-smooth,0-unramified ,则称A为**0-etale**.

 $\Omega_{A/k} = 0 \Leftrightarrow A \not\equiv 0$ -unramified.

- \Rightarrow)若u存在两个提升 v_1, v_2 ,由前面证明过程知, $d = v_1 v_2 : A \to N$ 是导数,从而存在 $f \in Hom_A(\Omega_{A/k}, N)$ 使得 $v_1 v_2 = f \circ d_{A/k}$,但此时 $d_{A/k} = 0$,故 $v_1 v_2 = 0$,即 $v_1 = v_2$,矛盾!
- \Leftarrow)利用 $\Omega_{A/k}$ 的构造过程,取 $C = (A \otimes_k A)/I^2, N = I/I^2$,这里 $I = Ker(A \otimes_k A \to A)$,由于 $A \not= 0 unramified$,故上面构造的 $\lambda_1 = \lambda_2$,从而 $d_{A/k} = 0$,于是 $\Omega_{A/k} = 0$.

Theorem 0.1. 设有环同态 $k \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B$,则有B-模正合列

$$\Omega_{A/k} \otimes_A B \stackrel{\alpha}{\to} \Omega_{B/k} \stackrel{\beta}{\to} \Omega_{B/A} \to 0,$$

这里 α, β 分别为 $\alpha(d_{A/k}a\otimes b)=bd_{B/k}g(a), \beta(d_{B/k}b)=d_{B/A}b,$ 其中 $a\in A,b\in B.$ 进一步,若B在A上是 θ -smooth,则有分裂正合列

$$0 \to \Omega_{A/k} \otimes_A B \stackrel{\alpha}{\to} \Omega_{B/k} \stackrel{\beta}{\to} \Omega_{B/A} \to 0.$$

下述证明过程不短, 但原理简单。

证明. 一般地, 想要证明B-模序列

$$N' \stackrel{\alpha}{\to} N \stackrel{\beta}{\to} N''$$

是正合的,只需证明,对任意B-模T,诱导序列

$$Hom_B(N',T) \stackrel{\alpha^*}{\leftarrow} Hom_B(N,T) \stackrel{\beta^*}{\leftarrow} Hom_B(N'',T)$$

是正合的。事实上,取T=N'',则得到 $\alpha^*\beta^*(1_T)=0$,故 $\beta\alpha=0$;取 $T=N/Im\alpha$,则可知 $Ker\beta=Im\alpha$.

由上分析, 我们只需证明

$$0 \to Hom_B(\Omega_{B/A}, T) \xrightarrow{\beta^*} Hom_B(\Omega_{B/k}, T) \xrightarrow{\alpha^*} Hom_B(\Omega_{A/k} \otimes_A B, T)$$

是正合列。

对于A-模M, B-模T,我们有同构 $\Phi: Hom_B(M \otimes_A B, T) \cong Hom_A(M, T)$:任取 $\psi \in Hom_B(M \otimes_A B, T)$,定义 $\Phi(\psi)(m) := \psi(m \otimes 1), m \in M$ 。对任意 $a \in A$,

$$\Phi(\psi)(am) = \psi(am \otimes 1) = \psi(m \otimes g(a)1) = \psi(g(a)(m \otimes 1))$$
$$= g(a)\psi(m \otimes 1) := a\psi(m \otimes 1) = a\Phi(\psi)(m).$$

这里只需注意到B通过环同态 $g: A \to B$ 成为A-模。此即 $\Phi(\psi) \in Hom_A(M,T)$.

任取 $\varphi \in Hom_A(M,T)$,定义 $\Phi^{-1}(\varphi)(m \otimes x) := x \cdot \varphi(m)$.可验证 Φ^{-1} 与 Φ 互逆,故由上述同构。于是 $Hom_B(\Omega_{A/k} \otimes_A B, T) \cong Hom_A(\Omega_{A/k}, T)$. 利用微分模的典型同态,我们有

$$0 \longrightarrow Hom_{B}(\Omega_{B/A}, T) \xrightarrow{\beta*} Hom_{B}(\Omega_{B/k}, T) \xrightarrow{\alpha*} Hom_{B}(\Omega_{A/k} \otimes_{A} B, T)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

其中竖直方向均为同构, α',β' 定义为使上图交换的映射. $Der_A(B,T)$ 中任意元素可表示为 $f\circ d_{B/A}$,其中 $f\in Hom_B(\Omega_{B/A},T)$,由 β^* 定义可知

$$\beta'(f \circ d_{A/B}) = f \circ \beta \circ d_{B/k}.$$

对任意 $h \circ d_{B/k} \in Der_k(B,T), h \in Hom_B(\Omega_{B/k},T)$,上面交换图最右侧竖线实际是映射

$$Hom_B(\Omega_{A/k} \otimes_A B, T) \to Hom_A(\Omega_{A/k}, T) \to Der_k(A, T)$$

的合成, 于是

$$\alpha'(h \circ d_{B/k}) = h \circ \alpha(d_{A/k}(\cdot) \otimes 1).$$

首先注意到 $\beta\circ\alpha=0$.事实上,由定义,任取 $d_{A/k}a\otimes b\in\Omega_{A/k}\otimes_A B, \beta\circ\alpha(d_{A/k}a\otimes b)=bd_{B/A}g(a)=0$ (注意到 $d_{B/A}\circ g=0$)。由此易知 $\alpha'\circ\beta'=0$.

下证 $Ker\alpha' \subseteq Im\beta'$.设 $h \in Hom_B(\Omega_{B/k}, T)$,且 $0 = h \circ \alpha(d_{A/k}a \otimes 1) = h \circ d_{B/k}g(a)$ 对任意 $a \in A$ 成立。于是 $(h \circ d_{B/k}) \circ g = 0$,易知 $h \circ d_{B/k} : B \to T$ 是导数,进一步由定义 $h \circ d_{B/k} \in Der_A(B, T)$,于是存在 $f \in Hom_B(\Omega_{B/A}, T)$,使得 $h \circ d_{B/k} = f \circ d_{B/A} = f \circ \beta(d_{B/k})$.于是

$$h \circ \alpha(d_{A/k}a \otimes 1) = h \circ d_{B/k}d(a) = f \circ \beta d_{B/k}g(a) = f \circ \beta \circ \alpha(d_{A/k}a \otimes 1), \forall a \in A.$$

此即 $Ker\alpha' \subseteq Im\beta'$. 这便证明了定理中第一个正合列。

现在设B在A上是0-smooth.取 $D \in Der_k(A,T)$,考虑如下交换图

$$B \xrightarrow{1_B} B$$

$$\downarrow g \qquad \qquad \downarrow \\
A \xrightarrow{\varphi} B * T$$

这里 $\varphi(a)=(ga,Da)$.由假设在上图中可添加一映射 $h:B\to B*T$ 使之仍然交换。可将h表示为h(b)=(b,D'b),则 $D=D'\circ g$,且由B*T中乘法定义知 $D':B\to T$ 是导数,故有线性映射 $\alpha':\Omega_{B/k}\to T$ 使得 $D'=\alpha'\circ d_{B/k}$.

现取T为 $\Omega_{A/k}\otimes B$,D为 $D(a)=d_{A/k}(a)\otimes 1$,则 $D=d_{A/k}(\cdot)\otimes 1=D'\circ g=\alpha'\circ d_{B/k}\circ g=\alpha'\circ\alpha(d_{A/k}(\cdot)\otimes 1)$.即 $\alpha'\circ\alpha=1$.即上面第二个正合列是分裂的。