复矩阵 N 称为正规矩阵若 $N^*N=NN^*$，这里 N^* 是 N 的共轭转置。

复矩阵 N 称为酉矩阵，若 $N^*N=E$，这里 E 是单位矩阵。

实矩阵 N 称为正规矩阵若 $N^TN=NN^T$，这里 N^T 是 N 的转置。

（QR 分解）任意 n 阶是可逆矩阵 A 都分解成正交矩阵 Q 与上三角矩阵 R 的乘积。

证明：设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，令 $\beta_1=\alpha_1,\cdots,\beta_k=\alpha_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(\alpha_k,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i, k=2,\cdots,n$，则

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}:=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P,(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)P^{-1},$$

再令 $\gamma_i=\frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$，便得到

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\begin{bmatrix}\|\beta_1\| & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \|\beta_n\|\end{bmatrix}P^{-1}:=Q\begin{bmatrix}\|\beta_1\| & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \|\beta_n\|\end{bmatrix}P^{-1},$$

再令 $R=\begin{bmatrix}\|\beta_1\| & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \|\beta_n\|\end{bmatrix}P^{-1}$，可验证 Q 是正交矩阵，R 是上三角矩阵，证毕。

命题 1：任意 n 阶复矩阵 A 都酉相似于上三角矩阵，且其主对角元素是 A 的特征值。

证明：对矩阵的阶数用归纳法，当 n=1 时，显然成立，设 n=k-1 时命题成立，则 n=k 时，，设 A 的一个单位特征（列）向量是 η，对应的特征值为 λ_1，将 η_1 扩充称 k 维向量空间的一组标准正交基 $\eta_1,\cdots,\eta_k$，则 $U=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k)$ 是酉矩阵，并且，

$$AU=A(\eta_1,\cdots,\eta_k)=(\eta_1,\cdots,\eta_k)\begin{bmatrix}\lambda_1 & \beta\\ 0 & A^{'}\end{bmatrix}$$

这里 $A^{'}$ 是 k-1 阶矩阵，

因此

$$A=U\begin{bmatrix}\lambda_1 & \beta \\ 0 & A^{'}\end{bmatrix}U^*$$

运用假设条件可知存在酉矩阵U_1使得$A^{'}=U_1\begin{bmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k\end{bmatrix}U_1^*:=U_1A_2U_1^*$,

于是 $A=U\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & U_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \beta U_1 \\ 0 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & U_1\end{bmatrix}^*U^*$，令 $U_2=U\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & U_1\end{bmatrix}$，则 $A=U_2\begin{bmatrix}\lambda_1 & \beta U_1 \\ 0 & A_2\end{bmatrix}U_2^*$，由此知命题成立。

命题 2：复矩阵酉相似于对角矩阵当且仅当该矩阵是正规矩阵。

证明：若复矩阵 A 酉相似于对角矩阵，即存在酉矩阵 U，使得$A=U^*\Lambda U$，这里Λ是对角矩阵，显然有$A^*A=AA^*$。

若矩阵 A 是正规矩阵，存在酉矩阵 U,使得$U^*AU=\Lambda$，这里Λ是上三角矩阵，由$A^*A=AA^*$，得到$\Lambda^*\Lambda=\Lambda\Lambda^*$，直接计算可知$\Lambda$中除对角元素，其它元素均为零，由此可得到$\Lambda$是对角矩阵，证毕。

在实数域中，有下面相似的一个命题，

命题 3：若实矩阵 A 的所有复特征值为实数，则矩阵正交相似于对角矩阵（从而是对称矩阵）的充要条件是矩阵是实正规矩阵，即$A^TA=AA^T$。

证明：必要性是显然的。

充分性：设 A 的 Jordan 标准型为 J,即存在可逆矩阵 P,使得$P^{-1}AP=J$，这里注意到，由于 A 的所有复特征值为实数,可逆矩阵 P 可设为实矩阵，由 QR 分解，存在正交矩阵 Q，上三角矩阵 R 使得 P=QR,故有$\mathrm{R}^{-1}Q^{-1}AQR=J,Q^{-1}AQ=RJR^{-1}$，即$Q^{-1}AQ$为上三角矩阵，由$A^TA=AA^T$得到$Q^{-1}AQ$是对角矩阵，于是 A 是对称矩阵。

一些不等式

命题 4，设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶复方阵 $A=(a_{ij})$ 的全部特征值，那么

（1） $Tr(AA^*)\ge\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$；

（2） $\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{Re}\,\lambda_j(A))^2\le\sum_{1\le i,j\le n}|\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}|^2$;

（3） $\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{Im}\,\lambda_j(A))^2\le\sum_{1\le i,j\le n}|\frac{a_{ij}-a_{ji}}{2}|^2$;

上式中有一个等号成立，其它两个也成立，且等号成立当且仅当 A 是正规矩阵。

证明：由命题 1 知，存在酉矩阵 U，使得 $A=U^*\begin{bmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}U:=U^*PU$，于是

$$tr(AA^*)=tr(\begin{bmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ \bar{*} & & \overline{\lambda_n}\end{bmatrix})$$

$$\ge\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$$

设 P 中非对角元记为 $\delta_{ij},j>i$，令 $H=\frac{1}{2}U^*(P+P^*)U$，于是 $Tr(HH^*)\ge\sum_{i=1}^{n}|\frac{\lambda_i+\overline{\lambda_i}}{2}|^2=\sum_{i=1}^{n}|\mathrm{Re}(\lambda_i)|^2$，类似可证明（3）由证明过程可以看出，上面三个不等式中等号成立当且仅当 $\delta_{ij}=0$,即等号成立当且仅当 A 酉相似于对角矩阵，等价于 A 是正规矩阵，证毕。

由（1）式可得到特征值的一个界，设 $M=\max_{i,j}\{|a_{ij}|\}$，λ 是 A 的一个特征值，则 $|\lambda|\le nM$ 。 事实上，设 $\lambda_{\max}=\max_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$，则由不等式 1 得到

$$\lambda_{\max}{}^2\le\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\le Tr(AA^*)\le n^2M^2$$

两边开平方即得到 $|\lambda|\le\lambda_{\max}\le nM$

下面说下欧式空间上正规变换结构:

命题 5，存在一组标准正交基使得在这组基下为准对角型（矩阵中都是实数）

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} & & & \\ & & & \lambda_{2i+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

证明：对 n 进行归纳：如果有是特征值，就取长度为 1 的特征向量，记该向量生成的一维子空间为 M，然后对 $M^{\perp}$ 用归纳假设即可。如果没有实特征值，取一个复特征值 λ 和对应的复特征向量 X_0，$AX_0=\lambda X_0$，所以 $X_0^{'}AX_0=\lambda X_0^{'}X_0$，此外，由于 $|(A-\lambda)X_0|=0$，推出 $|(A^{'}-\overline{\lambda})X_0|=0$，（这是由于正规变换具有性质 $|Ax|=|A^{*}x|$）即 $A^{'}X_0=\overline{\lambda}X_0$，两边取转置再右乘 X_0 得到 $X_0^{'}AX_0=\overline{\lambda}X_0^{'}X_0$，从而 $X_0^{'}X_0=0$。

接着设 $\lambda=a+ib, X_0=\alpha+i\beta$，这里 α,β 是实向量且不妨设 α 的长度是 1，那么 $AX_0=\lambda X_0$ 说明

$$(A\alpha, A\beta)=(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

即 α,β 生成一个 2 维不变子空间 M。$X_0^{'}X_0=0$ 说明 $\alpha^{'}\alpha=\beta^{'}\beta=1, \alpha^{'}\beta=\beta^{'}\alpha=0$，即 α,β 构成 M 的一组标准正交基，剩下的对 $M^{\perp}$ 用归纳假设即可。

习题 1.证明;如果 M 是正规变换 A 的不变子空间，那么 $M^{\perp}$ 也是 A 的不变子空间。

习题 2，证明:A 是正规矩阵当且仅当 A^{*} 可以表示为 A 的多项式。

习题 3，证明:实矩阵 A 是正规矩阵当且仅当 $A^{'}$ 可表示成 A 的实系数多项式。(利

用命题 5 及中国剩余定理)