抽象代数笔记

主讲教师：邱德荣
记录人：张钰(1.1-2.3),马明扬(2.4-2.7),李航(2.8-3.3),吴传传(3.4-4.2)

目录

1 环和模

Nakayama引理推论 A是一个局部环，$\mathfrak{m}$是它的极大理想，如果有$x_1,x_2,\cdots,x_n\in M$,使得$\bar{x_1},\bar{x_2},\cdots,\bar{x_n}\in M/\mathfrak{m}M$,是$M/\mathfrak{m}M$作为域$A/\mathfrak{m}$上线性空间的一组基，则$M=<x_1,\cdots,x_n>$.

证明. 令$N=<x_1,\cdots,x_n>$是M中由$x_1,\cdots,x_n$生成的$A-$子模，下证$M=N$.

为此,任取$x\in M$,则$\bar{x}\in M/\mathfrak{m}M$,由所设，有

$$\bar{x}=\bar{a}_1\bar{x}_1+\bar{a}_2\bar{x}_2+\cdots+\bar{a}_n\bar{x}_n$$

其中$a_1,\cdots,a_n\in A,\bar{a}_i\in A/\mathfrak{m}(i=1,\cdots,n)$. 即

$$\bar{x}=\overline{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}\in M/\mathfrak{m}M$$

$$\Rightarrow x-(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)\in\mathfrak{m}M$$

注意到$a_1x_1+\cdots+a_nx_n\in N=<x_1,\cdots,x_n>$,故$x\in N+\mathfrak{m}M\Rightarrow M\subset N+\mathfrak{m}M\Rightarrow M=N+\mathfrak{m}M$. 由于$A$是局部环，$\mathfrak{m}$是它的唯一的极大理想，所以$A$的$Janbous$根$J(A)=\mathfrak{m}$, 故由$Nakayama$引理,得$M=N$. □

1.1 正合列

设A是一个含1交换环，M,N,L是A-模，$M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}L$.设$f,g$是$A$-模同态，则$f$与$g$的合成是从$M$到$L$的模同态.

设$f:M\to N$是一个A-模同态，$K=kerf\leqslant M$,$K\xrightarrow{\eta}N\xrightarrow{f}L$，$f$与$\eta$的合成是0，$K$中元映到$N$中是0.

$L\leqslant M,\bar{M}=M/L$,我们有$L\xrightarrow{g}M\xrightarrow{f}M/L$,其中$g$是单射，且$g(L)=L,kerf=L$,则有$img=kerf$,即上面的列在$M$上正合.

$0\to L\xrightarrow{g}M\xrightarrow{f}M/L\xrightarrow{h}0$是一个短正合列，因为$kerh=M/L$,且$f$是满射，有$imf=M/L$

只要$L\to M$是单射，则在前面加个$0\to L\to M$,其就为一个正合列.

事实:设有模同态$L\xrightarrow{f}M,M\xrightarrow{g}N$,则$f$是单射$\Leftrightarrow 0\to L\xrightarrow{f}M$是正合列，$g$是满射$\Leftrightarrow M\xrightarrow{g}N\to 0$是正合列.

定义（模的正合列）：设有一个模同态，则$\cdots\to M_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}M_n\xrightarrow{f_n}M_{n+1}\xrightarrow{f_{n+1}}\cdots$是一个正合列，如果他在任一个$M_n$处均正合，即$imf_{n-1}=kerf_n$.

设$f:M\to N$是一个A-模同态（任何一个模同态都能给出下面一个正合列）

$0\to K\xrightarrow{g}M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{h}N/f(M)\to 0$是一个$A-$模正合列，因为$K=kerf\leqslant M,f(M)\leqslant N,imf=kerh=f(M)$

1.2 $A-$模复型

设有一$A-$模同态列

$$\overline{M}:\cdots\to M_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}M_n\xrightarrow{f_n}M_{n+1}\xrightarrow{f_{n+1}}\cdots,$$

如果在任意的M_n处，都有$f_n o f_{n-1}=0$(对任意的n),则称它是一个（上）复型.

定义：上述列是一个A-模上复型，即$f_n o f_{n-1}=0$(对任意的n)，等价的,$imf_{n-1}\subseteqq kerf_n$

定义：$H^n(\overline{M})=\frac{kerf_n}{imf_{n-1}}$，称之为上复型$\overline{M}$的第$n$个上同调群（此处，它也是个$A-$模）

对偶地，对于A-模下复型

$$\overline{M_0}:\cdots\to M_{n+1}\xrightarrow{f_{n+1}}M_n\xrightarrow{f_n}M_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots,$$

即对任意的n有$f_n o f_{n+1}=0$成立，我们定义$H^n(\overline{M_0})=\frac{kerf_n}{imf_{n+1}}$是第n个下同调群.

例：设X拓扑空间。则一个n-单形形如$<v_1,v_2\cdots,v_n>$，其中$v_1-v_0,v_2-v_0\cdots,v_n-v_0$是线性无关的.

令$C_n(K(x))$代表由X中所有n-单形生成的自由$Abel$群。则$C_0(K(x))=ZX$.

$v_0\longrightarrow v_1$ $\quad <v_0,v_1>$边缘算子 $\quad \alpha_1(<v_0,v_1>)=\alpha_1(<v_1,v_2>)$

$$\begin{tikzcd} & v_2 \arrow[dr] & \\ v_0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & v_1 \end{tikzcd}$$

$\alpha_1(<v_0,v_1>,v_2)=<v_1,v_2>-<v_0,v_2>+<v_0,v_1>$

一般地，$\alpha_n(<v_0,v_1\cdots,v_n>)=\sum_{i=0}^n(-1)^i<v_0,v_1\cdots,v_{i-1},\widehat{v_i},v_{i+1},\cdots,v_n>$

得到$Z-$模复形（即$Abel$群下复形）：

$$\cdots\to C_n(K(x))\xrightarrow{\alpha_n}C_{n-1}(K(x))\xrightarrow{\alpha_{n-1}}\cdots$$

事实：$\alpha_n\circ\alpha_{n-1}=0$. 例如

$$\begin{aligned}\alpha^2(v_0,v_1,v_2)&=\alpha_1\circ\alpha_2(v_0,v_1,v_2)=\alpha_1(\alpha_2(v_0,v_1,v_2))\\&=\alpha_1(<v_1,v_2>-<v_0,v_2>+<v_0,v_1>)\\&=\alpha_1(<v_1,v_2>)-\alpha_1(<v_0,v_2>)+\alpha_1(<v_0,v_1>)\\&=<v_2>-<v_1>-(<v_2>-<v_0>)+(<v_1>-<v_0>)\\&=0.\end{aligned}$$

定义：$H_n(Z,X)=H_n(K\tilde{(X)})=\frac{ker\alpha_{n-1}}{im\alpha_n}$.

$n-$单形

1.3 范畴和函子的简介

定义：一个范畴$\mathscr{C}$指的是如下要素：

$C1$ 一类对象（$objects$）$O(\mathscr{C}),A\in\mathscr{C}(A\in O(\mathscr{C}))$

$C2$ 对$\mathscr{C}$中任意两个对象的有序对A,B对应于一个集合$Mor(A,B)$称之为从A到B的态射集

满足如下公理

$A1$ 对每个$A\in\mathscr{C}$，有一个特别的元素$1_A\in Mor(A,A)$

$A2$ 对任意的$A,B,C\in\mathscr{C}$

$$Mor_{\mathscr{C}}(A,B)\times Mor_{\mathscr{C}}(B,C)\longrightarrow Mor_{\mathscr{C}}(A,C)$$
$$(f,g)\longmapsto gof$$

且满足结合律

$A3$ 对任意的$f\in Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$

$$A\xrightarrow{1_A}A\xrightarrow{f}B, fo1_A=f,$$

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{1_B}B, 1_Bof=f.$$

例1.集合范畴Set:

对象：集合,态射集：对任意的$A,B\in Set$;$Mor(A,B)=Map(A,B)$=$\{f:A\longrightarrow B$是一个映射$\}$

例2.群范畴G_P:

对象：群,态射集：$G,H\in G_P$,$Mor(G,H)=Hom(G,H)$.

例3.模范畴:

设A是一个含1交换环，$A-$模范畴$A-Mod$,对象：$A-Mod,M$,态射：A-同态,$M,N\in A-Mod$,$Mor_{A-Mod}(M.N)=Hom_A(M,N)$.

子范畴

设$\mathscr{C}$是范畴，若$\mathscr{D}\in\mathscr{C}$,则 $ob(\mathscr{D})\subset ob(\mathscr{C})$,且对任意$A,B\in ob(\mathscr{D})$有$Mor_{\mathscr{D}}(A,B)\subset Mor_{\mathscr{C}}$.

完全子范畴

$\mathscr{D}\in\mathscr{C}$（子范畴）

如果对任意的$A,B\in\mathscr{D}$,都有$Mor_{\mathscr{D}}(A,B)=Mor_{\mathscr{C}}$则称$\mathscr{D}$是$\mathscr{C}$的完全子范畴.

例如：$G_P\leqslant Set$是子范畴，但不是完全子范畴.

函子$(functor)$

设$\mathscr{C}$和$\mathscr{D}$是两个范畴，对应$F:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{D}$,则对任意的$A\in\mathscr{C}$都有$F(A)\in\mathscr{D}$

对任意的$A,B\in\mathscr{C}$有

$$Mor_{\mathscr{C}}(A,B)\longrightarrow Mor_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$$

$$f\longmapsto F(f)$$

满足

$A1$:对任意的$A\in\mathscr{C}$，有$F(1_A)=1_{F(A)}$.

对任意的$A,B,C\in\mathscr{C},f\in Mor_{\mathscr{C}}(A,B),g\in Mor_{\mathscr{C}}(B,C)$,$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$有

$$F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(g)}F(C).$$

即有

$$F(gof)=F(g)oF(f).$$

称上述F为$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的共变函子.

对偶的，反变函子$F:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{D}$,

$$F: Mor_{\mathscr{C}}(A,B)\longrightarrow Mor_{\mathscr{D}}(F(B),F(A))$$

$$f\longmapsto F(f)$$

对任意的$A,B,C\in\mathscr{C}, f\in Mor_{\mathscr{C}}(A,B), g\in Mor_{\mathscr{C}}(B,C)$,$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$有

$$F(A)\xleftarrow{F(f)}F(B)\xleftarrow{F(g)}F(C),$$

即有

$$F(gof)=F(f)oF(g).$$

函子的自然变换

定义：设F,G是范畴$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的两个共变函子，如果对任意的$A\in\mathscr{C}$有

$$l_A\in Mor_{\mathscr{D}}(F(A),G(A)), l_B\in Mor_{\mathscr{D}}(F(B),G(B)).$$

其中$F(f)\in Mor_{\mathscr{D}}(F(A),F(B)), G(f)\in Mor_{\mathscr{D}}(G(A),G(B))$使得

$$l_B oF(f)=G(f)ol_A.$$

即下图交换

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "l_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "l_B"] & G(B). \end{tikzcd}$$

特别的，如果l_A都是同构的（对任意的$A\in\mathscr{C}$），则F,G也是同构的.

范畴的同构与等价

如果存在函子$F:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{D}$与$G:\mathscr{D}\longrightarrow\mathscr{C}$使得$GoF=1_{\mathscr{C}}, FoG=1_{\mathscr{D}}$则称范畴$\mathscr{C}$与$\mathscr{D}$是**同构**的.

如果存在函子$F:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{D}$与$G:\mathscr{D}\longrightarrow\mathscr{C}$使得$GoF\simeq 1_{\mathscr{C}}, FoG\simeq 1_{\mathscr{D}}$则称范畴$\mathscr{C}$与$\mathscr{D}$是**等价**的.

$A-$**模范畴**(A是一个含1交换环)

对$M,N\in A-mod$,$A-$模同态是单的.$Mor_{A-mod}(M,N)\triangleq Hom_A(M,N)$.

对任意的$f,g\in Hom_A(M,N)$,定义$f+g\in Hom_A(M,N)$如下

$$(f+g)(x)\triangleq f(x)+g(x)(x\in M).$$

事实：$(Hom_A(M,N),+)$是一个Abel群.

现固定$M\in A-mod$,

记$F_M=Hom_A(M,-):\quad A-mod\longrightarrow\mathscr{A}b$(Abel群范畴）

$$N\longmapsto F_M(N)$$

其中$F_M(N) = Hom_A(M,-)(N) \triangleq Hom_A(M,N)$.

根据上述的关系，对于$N, L \in A-mod, F_M(N), F_M(L) \in \mathscr{A}b$我们有

$N \xrightarrow{f} L \qquad F_M(N) = Hom_A(M,N) \xrightarrow{F_M(f)} F_M(L) = Hom_A(M,L)$

对于$g : M \longrightarrow N, fog : M \longrightarrow L$有

$$F_M(f)(g) = Hom_A(M,f)(g) = f \circ g.$$

对于$h : M \longrightarrow N, N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} K$有

$$F_M(g \circ f) = F_M(g) \circ F_M(f).$$

因为对任意的$h \in Hom_A(M,N)$,

$$F_M(g \circ f)(h) = g \circ f \circ h = g \circ (F_M(f)(h)) = F_M(g)(F_M(f)(h)) = F_M(g) \circ F_M(f)(h),$$

即$F_M(g \circ f) = F_M(g) \circ F_M(f)$.

共变函子

$$\begin{aligned} Hom_A(M,-) :& A-mod \longrightarrow \mathscr{A}b \\ & N \longmapsto Hom_A(M,N) \end{aligned}$$

反变函子

固定N,

$$\begin{aligned} G_N \triangleq Hom_A(-,N) :& A-mod \longrightarrow \mathscr{A}b \\ & M \longmapsto Hom_A(M,N), \end{aligned}$$

对于$L \xrightarrow{f} M$我们有

$$Hom_A(M,N) \xrightarrow{G_N(f)} Hom_A(L,N).$$

对于$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$,

$$\begin{aligned} Hom_A(-,N)(f) = G_N(f) : \quad & Hom_A(M,N) \longrightarrow Hom_A(L,N), \\ & g \longmapsto gof, \end{aligned}$$

即

$$G_N(f)(g) = gof, g \in Hom_A(M,N),$$

$$Hom_A(-,N)(f)(g) = gof,$$

即$Hom_A(-,N)$是一个反变函子.

A是一个合1交换环,$A-$模范畴,$A-Mod$.取$M \in A-$ Mod. 共变函子 $\mathrm{Hom}_A(M,-) \triangleq h_M$, 反变函子 $\mathrm{Hom}_A(-,N)$

$A-$模的一个短正合列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \tag{$\star$}$$

表示 $(i) f$单； $(ii) g$满；$(iii) Imf = kerg.$
任取$K \in A-\mathrm{mod}$用$h_K = \mathrm{Hom}_A(K, -)$作用$(\star)$。

我们有

$$\begin{tikzcd} & & K \arrow[dl, "h"'] \arrow[dl, phantom, "f\circ h"] \arrow[d, "h_1"] \arrow[dr, "g\circ h_1"] & & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$h_K(L) = \mathrm{Hom}_A(K, L)$

$$0 \to \ \mathrm{Hom}\ _A(K, L) \to \ \mathrm{Hom}\ _A(K, M) \to \mathrm{Hom}_A(K, N) \qquad (\star\star)$$

命题 $(\star)$是一个正合列⇒$(\star\star)$是正合列.

即

$$0 \to h_k(L) \xrightarrow{h_k(f)} h_k(M) \xrightarrow{h_k(g)} h_k(N)$$

是Abel群正合列。

证明. 先证$h_k(f)$是单射.

$\forall h \in h_k(L)$，使得$h_k(f)(h) = 0$,即$h_k(f)(h) = f \circ h = 0$。故对$\forall \alpha \in M$，有$f \circ h(\alpha) = 0 \Rightarrow f(h(\alpha)) = 0$。由于

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

是正合的，故f单射. 于是$h(\alpha) = 0$. 由α的任意性得到$h = 0$.即$h_k(f)$ 是单射。

下证在$h_k(m)$处正合,即$Im\left(h_k(f)\right) = \ker\left(h_k(g)\right)$.
由于$(\star)$正合,故有

$$\mathrm{g} \circ \mathrm{f} = 0 \ \Rightarrow gofoh = 0 \Rightarrow g \circ (foh) = 0.$$

$\therefore (h_k(g) \circ h_k(f))(h) = 0.$由$h$是任取的,$\Rightarrow$ $h_k(y) \circ h_k(t) = 0$, $\therefore Im(h_k(f)) \subseteq (ker(h_k(g))$.

下证 $\ker\ (h_k(g)) \subset I_m\left(h_k(f)\right)$.为此取 $h' \in \ker\left(h_k(g)\right)$，则$h_k(g)\left(h'\right) = goh' = 0$. 也即$\forall x \in K$，均有

$$g \circ h'(x) = 0 \Rightarrow g \circ h'(x) = 0 \Rightarrow h'(x) \in kerg.$$

$h'(x) \in M$, 由于$\mathrm{kerg} = Imf$,即有的$y \in L$,使得$h'(x) = f(y)$.

于是定义

$$h : k \to L$$

$$x \mapsto y$$

易验证$h \in h_k(L)$。

即$h' = f \circ h, \therefore h'(x) = f(y) = f \circ h(x) = f(h(x))$,且$h_k(f)(h) = f \circ h = h'$ 由此得到$h' \in Im(h_k(f)) \Rightarrow \ker\ h_k(g) \subset Im(h_k(f))$。

综上，$Kerh_k(g) = Im(h_k(t))$.

因此可由短正合列$(\star) \Rightarrow (\star\star)$是左正合的。 □

此时称$h_k = \mathrm{Hom}_A\left(k,\right)$呈一个左正合函子(不能像证右边正合)

$\mathrm{Hom}_A\left(\mathrm{M},\mathrm{J}\right)$与$\mathrm{Hom}_A(-,M)$均呈左正合。

取$K \in A - Mod$,由

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[dl, "h"] & 0 \\ & & K & & \end{tikzcd}$$

得到左正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(N,K) \to \mathrm{Hom}_A(M,K) \to \ \mathrm{Hom}\ _A(L,K).$$

1.4 模的张量积 外积 对称积

$M \xrightarrow{f} N$ A-线性(A-模同志)

向量空间 F/V (下域) V为节上的向量空间

$V \backsimeq R^n$ R实数欧式空间

内积 $\langle,\rangle$

$$V \times V \longrightarrow R$$

$$(\alpha,\beta) \mapsto \langle\alpha,\beta\rangle$$

1. $\langle a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2, \beta\rangle = a_1\langle\alpha_1,\beta\rangle + a_2\langle d_2,\beta\rangle$;

2. $\langle\alpha,\quad b_1\beta_1 + b_2\beta_2\rangle = b_1\langle\alpha,\beta_1\rangle + b_2\langle\alpha,\beta_2\rangle$

$\mathbb{R}$-双线性

固定α, $\langle\alpha,-\rangle$:

$$V \to \mathbb{R}$$

$$\beta \mapsto \langle\alpha,\beta\rangle$$

$m \times N \to L$ $\quad M \xrightarrow{f} N$ A线性

$(\alpha,\beta) \longmapsto f\left(\alpha,\beta\right)$

定义：设$M, N, L \in A - mod$. A是含1交换环，称映射$f : M \times N \to L$为一个双线性映射，如果下述条件成立。

1. $f\left(a_1x_1 + a_2x_2, y\right) = a_1f\left(x_1,y\right) + a_2f\left(x_2,y\right)$

2. $f(x, b_1y_1 + b_2y_2) = b_1f\left(x,y_1\right) + b_2f\left(x_1y_2\right)$

   $\forall a_1, a_2, b, b_2 \in A, \quad x_1, x_2 \in M, y_1, y_2 \in N$

   即f对每个分量都是$A-$线性的。

此处固空$x \in M$，则$f(x,-)$：$N \to L, y \longmapsto f(x,y)$是$A-$线性的。 $M \otimes N$

”双线性”作为一个属性，找一个最基本的.

定理 设$M, N \in A-Mod$.(A是一个合1交换环)，则存在一个对(pairs)(T, f),其中$T \in A-Mod$。$f : M \times N \xrightarrow{f} T$.是一个$A-$双线性的。使得如下“泛性质”满足。

(泛性质)对$\forall L \in A-Mod$及双线性映射$g : M \times N \to L$, 则存在唯一一个A-线性映射$h : T \to L$, 使$g = h \circ f$.即下图交换

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & T \arrow[dl, "\exists! h"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

且上述满足泛性质的(T, f)在同构定义下唯一记$T \triangleq M \otimes_A N$. 称为$M$和$N$的张量积。

证明. 以$M \times N$中全体元素为基作一个自由$A-$模,记为$F \triangleq A^{(M\times N)} = \oplus_{\alpha\in M\times N} A$. 故$x \in F \Leftrightarrow x = \sum a_{m,n}(m, n)$,其中$a_{m,n} \in A$ 除有限个均为0.(表示法唯一)

在F中令F_0为有形式如下的元素生成的$A-$子模:

$$(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)\,,$$

$$(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)\,,$$

$$(am, n) - a(m, n), (m, bn) - b(m, n).$$

于是令$T = F/F_0$. 则T满足的双线性的“泛性质” □

记号：将上述构造的$T \triangleq M \otimes_A N$. $\quad M \times N \xrightarrow{f} M \otimes_A N$

$(m.n) \mapsto (m, n)$

更一般的，任给$M_1, \cdots, M_n \in A-Mod$有$n-$重维映射。

$$f = M_1 \times \cdots \times M_n \to N$$

$$\begin{aligned} &f\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, a_i \cdot \alpha_i + a_i'\alpha_i', \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n\right) \\ &= a_i f(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n) + a_i' f\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_i', \cdots, \alpha_n\right) \end{aligned}$$

即f对每个分量均是线性的(多重线性映射).

张量积对$M_1 \times \cdots \times M_n \xrightarrow{f \quad linear} T$，对$M_1 \times \cdots \times M_n \xrightarrow{g} L$都存在唯一的线性映射$h : T \longrightarrow L$，使得$g = hof$. 即有下面交换图

$$\begin{tikzcd} M_1 \times \cdots \times M_n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & T \arrow[dl, "\exists! h"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

记$T = M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$ 性质：

1. $M \otimes_A N = N \otimes_A N$;

2. $M \otimes_A A \simeq M$;

3. $(M \otimes_A N) \otimes_A L \simeq M \otimes_A (N \otimes_A L)$;

4. $M \otimes_A (N \oplus_A L) \simeq (M \otimes_A N) \oplus (M \otimes_A L)$.

例1. V, W分别是$\mathbb{R}$上的m, n维向量空间，则$dim_{\mathbb{R}}(W \otimes V) = mn$.
$v \xrightarrow{f} \mathbb{R}$
$\int : \mathscr{C}[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}(\mathscr{C}[a, b]$是[a,b]上的连续函数的全体)
$f \mapsto \int_{[a,b]} f = \int_a^b t dx$

对称.设$V, W \in A - Mod$,

$$\underset{n\text{重}}{V \times V \cdots \times V} \xrightarrow{f} W$$

若(1)f是n-重线性的. (2)$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}) = f(x_1 \cdots x_n)(\forall \sigma \in S_n)$. 则称$f$为$n$**重对称函数**.

外积.设$V, W \in A - Mod$

$$\underset{n\text{重}}{V \times V \cdots \times V} \xrightarrow{f} W$$

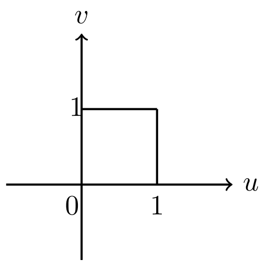
(1) f是n-重线性映射。

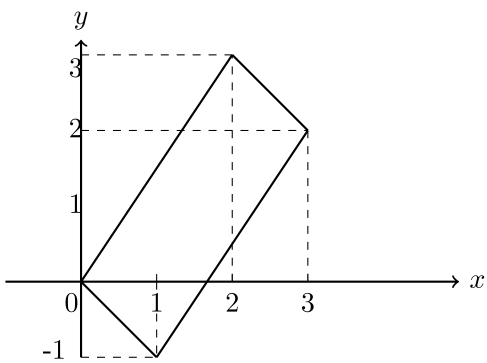
(2) f是交错的。$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot f(x_1 \cdot x_n)$. 其中$\sigma \in S_n$($n$次对称群)

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{当}\sigma\text{是偶置换}, \\ -1 & \text{当}\sigma\text{是奇置换}. \end{cases}$$

外积：$\phi : V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{\phi} \wedge^n V = V \wedge V \wedge \cdots \wedge V$是一$n$重交错线性映射，若对任意$V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{f} W$存在唯一的$g : \wedge^n V \longrightarrow W$使得$f = g \circ \phi$ 则称$\wedge^n V$为V的n次外积。

例1





$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = u + 2v & dx = du + 2dv \\ y = -u + 3v & dy = -du + 3dv \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
S(\Delta) &= \iint_{\Delta} dxdy \\
&= \iint_{\Delta} (du + 2dv) \wedge (-du + 3dv) \\
&= \iint_{\Delta} (3+2) du \wedge dv \\
&= 5 \iint_{\Delta} dudv = 5
\end{aligned}$$

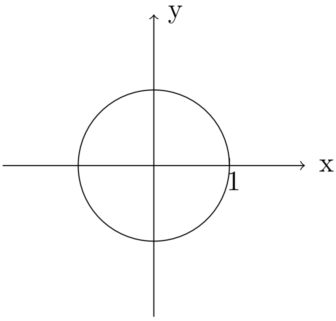
$$du \wedge du = -du \wedge du$$
$$\Rightarrow du \wedge du = 0$$

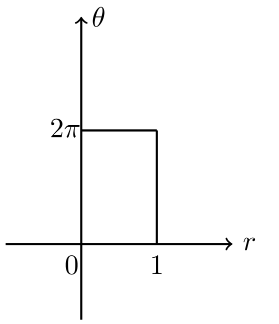
另一种方法求面积

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix} \right\| = |5| = 5 \qquad J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix} \right| = 5$$

$$-\iint_{\Delta} dxdy = \iint_{D} Jdudv = 5 \iint_{D} dudv = 5.$$

例2.计算区域$D, 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$的面积。





$D : x^2 + y^2 \le 1$　　　　$\Delta : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$

解:进行坐标变换$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ y = r\sin\theta & 0 \le r \le 1 \end{cases}$,于是

$$\begin{aligned}
S(\Delta) &= \iint_{\Delta} dxdy = \iint_{D} d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) \\
&= \iint_{D} (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\
&= \iint_{D} r\cos\theta^2 dr d\theta - r\sin^2\theta d\theta dr \\
&= \iint_{D} r(\cos\theta^2 + \sin^2\theta) dr d\theta \\
&= \iint_{D} r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi
\end{aligned}$$

一般地，设D是$\mathbb{R}^n$中区域，$x_1, x_2, \cdots, x_n$是D上坐标，进行坐标变换$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
$A \in M_n(\mathbb{R}), y_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n, (1 \le i \le n)$，得到$\mathbb{R}^n$中区域$D'$,则

$$\begin{aligned} vol(D') &= \int\cdots\int_{D'} dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n \\ &= \int\cdots\int_D d(a_{11}x_1+\cdots a_{1n}x_n)\wedge\cdots\wedge d(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n) \\ &= |A|\int\cdots\int_D dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n \end{aligned}$$

$|A|=J=\left|\frac{\partial(y_1\cdots y_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}\right|$.

1.5　分式模

A环(交换环)
S是A的乘法封闭子集$S\subset A$,

$$S^{-1}A=\left\{\frac{a}{s}|a\in A,s\in S\right\}.$$

设$M\in A-Mod$，分式模为

$$S^{-1}M=\left\{\frac{x}{s}|x\in M,s\in S'\right\}.$$

$\frac{x_1}{s_1}=\frac{x_2}{s_2}\Leftrightarrow\exists t\in S$使得$t(s_2x_1-s_1x_2)=0$.
有自然映射

$$A\to S^{-1}A$$
$$a\mapsto\frac{a}{1}$$

这样$S^{-1}A$可看成一个$A-Mod$.
由定义，$\frac{x_1}{s_1}\sim\frac{x_2}{s_2}(x_1,x_2\in M,s_1,s_2\in S^{-1}\Leftrightarrow\exists t\in S$使得$t(s_2x_1-s_1x_2)=0$。易知“$\sim$”是$S\times M$中的一个等价关系. $\frac{x}{s}$即为$(s,x)\in S\times M$关于“$\sim$”的等价类.
定义$S^{-1}M$中加法为 “+”: $\frac{x_1}{s_1}+\frac{x_2}{s_2}\triangleq\frac{s_2x_1+s_1x_2}{s_1s_2}$.
数乘($S^{-1}A$对$S^{-1}M$的作用):

$$\begin{aligned}&S^{-1}A\times S^{-1}M\to S^{-1}M\\ &\left(\tfrac{a}{s},\tfrac{x}{t}\right)\mapsto\tfrac{a}{s}\tfrac{x}{t}\triangleq\tfrac{ax}{st}\quad(\forall a\in A,s,t\in S,x\in M)\end{aligned}$$

$\therefore S^{-1}M\in S^{-1}A-Mod.$
即上述构造所得$S^{-1}M$是一个$S^{-1}A$-模，称为M关于S的**分式模**。
事实：设A,B是交换环,$f:A\to B$是一个环同态
则：$\begin{aligned}&A\times B\to B\\ &(a,b)\mapsto a\star b\end{aligned}$ (注：若A,B是非交换环，则$f(A)\subset C(B)$)
其中$a\star b\triangleq f(a)\cdot b$. 于是易验证$(B,+,\star)$是一个$A-$模，此时也称$B$为一个$A-$代数.
若B与C为$A-$代数，则可定义

$$B\bigotimes_A C$$
$$(b_1\bigotimes c_1)(b_2\bigotimes c_2)=(b_1b_2)\bigotimes(c_1c_2)$$
$$\Rightarrow B\bigotimes_A C\text{也是一个}A-\text{代数}.$$

定理： 设A是含1交换环，S是A的一个乘法封闭子集，$M\in A-Mod$,则

$$S^{-1}A\otimes_A M\cong S^{-1}M.$$

证明： 首先，令

$$f:S^{-1}A\times M\to S^{-1}M$$
$$\left(\frac{a}{s},x\right)\mapsto\frac{ax}{s}\in M.$$

$\because M\in A-Mod, f(\frac{a}{s},x_1)\triangleq\frac{ax}{s}(\forall\frac{a}{s}\in S^{-1}A,x\in M)$. 易验证，$f$是$A-$双线性映射，从而由张量积的泛性质: $\exists!$的$A-$线性映射$\phi=S^{-1}A\otimes_A M\to S^{-1}M$, 使得$f=\phi\circ\eta$,即下图交换

$$\begin{tikzcd}
S^{-1}A\times M \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & & S^{-1}A\otimes_A M \arrow[dl, "\phi"] \\
& S^{-1}M &
\end{tikzcd}$$

$$\phi:S^{-1}A\otimes_A M\to S^{-1}M$$
$$\frac{a}{s}\otimes_A x\mapsto\frac{ax}{s}$$

下证ϕ是一个同构。

由于$\forall s\in S,x\in M$,有$\frac{x}{s}=f(\frac{1}{s}\otimes x)$,从而$\phi$是满射。

下证ϕ是一个单射。为此，任取$\alpha\in S^{-1}M$有$\alpha=\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{s_i}\otimes x_i$,其中$a_i\in A,s_i\in S,x_i\in M,(i-1,\cdots,n)$。令$s=s_1\cdots s_n$, $s'=\frac{s}{s_i}$,

$$\begin{aligned}\alpha=\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{s_i}\otimes x_i=\sum_{i=1}^n\frac{a_is'}{s}\otimes x_i&=\sum_{i=1}^n\frac{1}{s}\times(a_is'x_i)\\
&=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^n 1\otimes(a_is'x_i)\\
&=\frac{1}{s}\left(1\otimes\sum_{i=1}^n(a_is'x_i)\right)\\
&=\frac{1}{s}(1\otimes x)\qquad\text{其中}x=\sum_{i=1}^n a_is'x_i\\
&=\frac{1}{s}\otimes x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\alpha=\frac{1}{s}\otimes x\in Ker\theta\Leftrightarrow 0=\phi(\alpha)=\phi(\frac{1}{s}\otimes x)=\frac{x}{s}=0\\
\Leftrightarrow\exists t\in S,\text{使得}t(x\cdot 1-s\cdot 0)=tx=0\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{s}\otimes x = \frac{t}{st}\otimes x \\ &= \frac{1}{st}\otimes tx = \frac{1}{st}\otimes 0 = 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow ker\phi = 0 \because \phi$是单的。从而$\phi$呈同构。
上述构造所得$S^{-1}M$是一个$S^{-1}A$-模，称为M关于S的分式模.

Jordan-Holder定理

设$M \in A-\mathrm{mod}$, 如果有序列

$$M = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq M_2 \cdots \subsetneqq M_n = 0(\star)$$

其中$M_i \leq M(i = 0, 1, 2\cdots n)$, 且$M_i/M_{i+1}$均是单$-A$模$(i = 0, 1, \cdots, n-1)$，则称$(\star)$为一个合成列(comprosition serise). M_i/M_{i+1}称为M的合成因子，其中n标为M的长度(length)记为$l(M) = n$.

定理(Jordan-Holder) 设$M \in A-Mod$，如果M有合成列，则M的所有h合成列都有相同的长度，且他们的合成因子在相差一个置换下的对应互相同构。把合成因子M_i/M_{i+1}作直和$M' = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i/M_{i+1}$,当$M$不是半单时，可由$M'$去找合成列。

2 域论

2.1 域的代数扩张

域$F, (F, +, \cdot), u(F) = F^* = F/0$,子域$F_i \leqslant F$其中$i \in I$,$\cap F_i \leqslant F$.

证明：由于$0, 1 \in F_i, \forall i \in I, \Rightarrow 0, 1 \in \bigcap_{i\in I} F_i$.

而$\forall a, b \in F_i, i \in I, \Rightarrow a + b \in F_i, \forall i \in I \Rightarrow a + b \in \bigcap_{i\in I} F_i$

$$ab \in F_i, \forall i \in I \Rightarrow ab \in \bigcap_{i\in I} F_i$$

$\bigcap_{i\in I} F_i \leqslant F$是$F$的子域。

$\alpha \in F$,则$\alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^n \in F$ $(\forall n \in N)$, $a_0\cdot 1 + a_1 \cdot \alpha + 1 + a_n\alpha^n \in F$. 令$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n \in F$，即$\alpha \in F, f(\alpha) \in F$.

若$g(x) \in F[x], g(\alpha) \neq 0$，则$\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \in F$

F是域，F上的关于x的多项式环$F[x]$， F上的关于x的有理分式域$F(x)$，如$\mathbb{R}(x)$，$\mathbb{C}(x)$

一般地，F上关于$x_1\cdots x_n$的多项式环为$F[x_1\cdots x_n]$;F上关于$x_1\cdots x_n$的有理分式域$F(x_1\cdots x_n)$.

固定一个域k，任取k的一个子域F，任取$\alpha \in k$. 问题：k中包含F与α的最小子域是？

答案：$F(\alpha) = \{h(\alpha) \mid h \in F(x) \mid h(\alpha)$ 有意义 $\} = \left\{ \dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \middle| f, g \in F[x] \text{ 且 } g(\alpha) \neq 0 \right\}$

$F(\alpha) \triangleq \bigcap_{\substack{E\in k \\ E\supset FU(\alpha)}} E$，称$F(\alpha)$为$F$添加$k$中元$\alpha$生成的子域。

同理，

$$F(\alpha_1,\alpha_2)=\{h(\alpha_1,\alpha_2)\mid h\in F(x_1,x_2),h(\alpha_1,\alpha_2)\text{ 有意义 }\}$$
$$=\left\{\frac{f(\alpha_1,\alpha_2)}{g(\alpha_1,\alpha_2)}\mid f,g\in F[x_1,x_2]\text{ 且 }g(\alpha_1,\alpha_2)\neq 0\right\}$$

对于$\alpha_1\cdots\alpha_n\in k$

$$F(\alpha_1\cdots\alpha_n)=\left\{\frac{f(\alpha_1\cdots\alpha_n)}{g(\alpha_1\cdots\alpha_n)}\middle| f,g\in F[x_1\cdots x_n]\text{ 且 }g(\alpha_1\cdots\alpha_n)\neq 0\right\}$$

设$F\leqslant k$子域，$S'\subset k$子集，$S\neq\varnothing$，$F(S)$为k中既包含F又包含S'的最小子域，

$$F(S)=\left\{\frac{f(\alpha_1\cdots\alpha_n)}{g(\alpha_1\cdots\alpha_n)}\middle| n\in N,\alpha_1\cdots\alpha_n\in S,f,g\in F[\alpha_1\cdots\alpha_n],g(\alpha_1\cdots\alpha_n)\neq 0\right\}$$

每个元素都可只加S中的有限个元即可得到。

固定k域，$F_1,F_2\leq k$是k的两个子域. 问：k中既包含F_1又包含F_2的最小子域是？

答：$F_1(F_2)=F_2(F_1)\triangleq F_1F_2$称之为$F_1$与$F_2$的合成（域）。

类似地，对于k的子域F_i $(i=1,\cdots,n)$，F_i的合成记为$F_1\cdots F_n$代数扩张。

域扩张：设F,k是域，如果$F\subset k$，则知F为k的子域，k是F的一个扩域，则k可作为F模$\Rightarrow k$可作为F向量空间。

此时，k是F上一个向量空间，$F\times k\longrightarrow k$，$(a,b)\longmapsto ab$

定义：设k/F是一个域扩张$(F\subset k)$，称$\dim_F^k$为其扩张次数，记之为$[k:F]\triangleq\dim_F^k$

当$[k:F]=n<+\infty$时，称k/F为一个n次扩张。

当$[k:F]=+\infty$时，称k/F为一个无限扩张。

定义：设k/F是一个域扩张，$\alpha\in k$，如果有$f(x)\in F[x]\mid\{0\}$，使得$f(\alpha)=0$，则称α在F上代数，也称α是一个F代数元。

若这样的非零多项式不存在，则称α是F上的数据元。

此时，$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]\mid\{0\}$，$a_0,\cdots,a_n\in F$，$n=\deg f,a_n\neq 0$，且显然$n>0$。

定义：设k/F是一个域扩张，如果k中任一元素均是下一代数元，则称k/F是一个代数扩张。

定理1：域的有限扩张均是代数扩张，即对于域扩张k/F，如果$[k:F]<+\infty$，则k/F是一个代数扩张。

证明：设$[k:F]=n<+\infty,\forall\alpha\in k$（只需证$\alpha$是$F$一代数元即可）

则$1,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是$F$一线性相关的（$\because\dim_F^k=n$）

$\therefore$存在不全为0的$a_0\cdots a_n\in F$，使得

$$a_0+a_1\alpha+\cdots+a_n\alpha^n=0$$

令$f(x)=1+a_1x+\cdots+a_nx^n\in F[x]\mid\{0\}$，且$f(\alpha)=0$

$\therefore\alpha$是F一代微元，

$\therefore k/F$是代数扩张。 $\square$

定理2：设域$F \subset E \subset k$，如果E/F，k/E都是有限扩张，则k/F是有限扩张，且$[k:F]=[k:E][E:F]$

证明：设$[E:F]=m, [k:E]=n$，则$\dim_F^F=m$，$\dim_E^k=n$. 取$\{x_1,\cdots,x_m\}$是E上的一组F-基; $\{y_1,\cdots,y_n\}$是k上的一组E-基.

下证$\{x_iy_j\}_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$是$k$的一组$F$-基.

$\forall\alpha\in k$，有$\alpha=\sum\limits_{j=1}^{n}x_jy_j$，其中$b_j\in E$，而$\forall b_j\in E$，有$b_j=\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}x_i$，其中$a_{ij}\in F$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\alpha=\sum_{j=1}^{n}b_jy_j&=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\right)y_j\\&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_iy_j.\end{aligned}$$

$\therefore k$中任一元素都可用$\{x_iy_j\}_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ F-线性表出

设

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=0, a_{ij}\in F,$$

则

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\right)y_j=0.$$

由于$\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}^{\in F}x_i^{\in E}\in E$，由$\{y_1,\cdots,y_n\}$线性无关$\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}x_i=0(\forall j)$，由于$a_{ij}\in F$，$\{y=x_1,\cdots,x_m\}$是$E$上关于$F$的一组基$\Rightarrow a_{ij=0}$,于是$a_{ij=0}(i=1,\cdots,m,1\leqslant j\leqslant n)$.

从而$\{x_iy_j\}_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$是一组$k$的$F$-基. 且有$[k:F]=[k:E][E:F]=mn$. □

同理设域扩张$F=F_0\subset F_1\subset\cdots\subset F_n$，则

$$[F_n:F]=[F_n:F_{n-1}][F_{n-1}:F_{n-2}]\cdots[F_1:F]$$

定理：（单代数扩张结构定理）设k/F是一个域扩张，$\alpha\in k$且α是F-代数元，则$F(\alpha)=F[\alpha]$且$[F(\alpha):F]=n<+\infty$。特别地，$F(\alpha)/F$是代数扩张，其中n为α在F上极小多项式的次数。

2.2 代数扩张与单代数扩张结构

域的特征：F域,有整数环到F的自然嵌入

$$\begin{aligned}\phi:&\mathbb{Z}\to F\\&1\mapsto 1_F\end{aligned}$$

则$\ker\phi=\langle n\rangle$, $n\in\mathbb{Z}\geqslant 0$.于是 $Z/\ker\phi\hookrightarrow F$子域$\Rightarrow$ $\ker\phi$ 是$\mathbb{Z}$中极大理想，或0。

域F的特征，若$\mathrm{ch}(F)=0$,则$\mathbb{Z}\subset F$，又域有逆元，$\mathbb{Q}\subset F$，即$\mathbb{Q}$是F的最小子域(或称素子域)

若$\mathrm{ch}(F)=p$（素数），此时$F_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\subset F$，即$F_p$为$F$的素子域。

定理1:(域的单代数扩张结构):设k/F是一个域扩张，$\alpha\in k$，记$E=F(\alpha)$

(1) 存在F上唯一一个首 1 不可约多项式$P_\alpha(x)\in F[x]$，使得$P_\alpha(x)=0$，记$n=\deg P_\alpha(x)$

(2) $E=F(\alpha)=F[x]$且$\{1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{n-1}\}$是$E$的一组$F$-基，特别地，$[F(\alpha):F]=\deg P_\alpha(x)$，称上述$P_\alpha(x)$为$\alpha$在$F$上的极小多项式（书上记之为$P_\alpha(x)=I_{rr}\left(\alpha,F,x\right)$）

先给出一个引理及证明，利用引理去证明定理 1。

引理：设α，k/F如上述定理，记$I=\{f(x)\in F[x]\mid f(\alpha)=0\}$，则$I=\langle P_\alpha(x)\rangle$是一个素理想，其中$P_\alpha(x)\in F[x]$是$F$上一个首 1 的不可约多项式。

证明：令

$$\begin{aligned}\phi:F[x]&\longmapsto k\\ f(x)&\longmapsto f(\alpha)\end{aligned}$$

则ϕ是环同态，且$\ker\phi=\{f\in F[x]\mid f(\alpha)=0\}=I$

于是由环同态基本定理，有

$$F[x]/I\backsimeq Im(\phi)\leqslant k \text{ 子环}$$

因为k是域，故$F[x]/I$是整环$\Rightarrow$ I是素理想。

又$F[x]$是一个PID，由于α是F-代数元，故$\exists\ f\in F[x]-\{0\}$，使得$f(\alpha)=0$，即$I\neq 0\Rightarrow$ I是极大理想。

从而I是由一个不可约多项式生成(把首项系数化为 1，得到的理想也相同)记为$P_\alpha(x)$，即$I=\langle P_\alpha(x)\rangle$ □

证明定理：

（1）由上述引理即得

（2）设$P_\alpha(x)$为（1）中所给的α在F上的极小多项式，$n=\deg P_\alpha(x)$，于是可设$P_\alpha(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$

下证$F(x)=F[\alpha]$.

为此，任取$\beta\in F(\alpha)$，则$\beta=\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)},f,g\in F[x]$，且$g(\alpha)\neq 0$. 由极小多项式的性质，$P_\alpha(x)\nmid g(x)$. 又$P_\alpha(x)$不可约，则$(P_\alpha(x),g(x))=1$，又$F[x]$是PID，$\therefore$有$u(x),v(x)\in F[x]$，使得

$$u(x)P_\alpha(x)+v(x)g(x)=1$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow u(\alpha)P_\alpha(\alpha)+v(\alpha)g(\alpha)=1\\&\Rightarrow v(\alpha)g(\alpha)=1\\&\Rightarrow \frac{1}{g(\alpha)}=u(\alpha)\\&\Rightarrow \beta=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=f(\alpha)\cdot v(\alpha)\in F[\alpha]\\&\Rightarrow F(\alpha)\subset F[\alpha]\end{aligned}$$

显然$\Rightarrow F(\alpha)\supset F[\alpha]\Rightarrow F(\alpha)=F[\alpha]$.

下证$\{1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}\}$是$E$的一组$F$-基.

由带余除法有$f(x)=g(x)P_\alpha(x)+r(x)$，其中$g(x)\cdot r(x)\in F[x]$，且$r(x)=0$或$\deg r(x)<\deg P_\alpha(x)=n$

于是

$$\beta=f(\alpha)=gf(\alpha)P_\alpha(\alpha)+r(\alpha)=r(\alpha)\in F+F\alpha+\cdots+F\alpha^{n-1}$$

即β可由$\{1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}\}$的$F$-线性表述。

下证$\{1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}\}$线性无关。

设$b_0+b_1\alpha+\cdots+b_{n-1}\alpha^{n-1}=0$，其中$b_0,\cdots,b_{n-1}\in F$. 令$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}\in F[x]$, 则$g(\alpha)=0$，从而$P_\alpha(x)\mid g(x)$. 由于$\deg g(x)=n-1<\deg P_\alpha(x)$

$$\Rightarrow g(x)=0\Rightarrow b_0=b_1=\cdots=b_{n-1}=0,$$

从而$\{1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}\}$是线性无关的。

综上，$\{1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}\}$是$E$的一组$F$-基。 □

定义：设k/F是一个域扩张，如果有$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in k$，使得$k=F\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)$，则称$k$是$F$的一个有限生成扩域，或称$k/F$是一个有限生成扩张。

证明：“$\Longleftarrow$” $k=F\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)=F\left[\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right]$，其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in k$都是$F$-代数元

$$\begin{aligned}
&k=F\left[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\right]\left[\alpha_n\right],F\left[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\right]=F\left[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-2}\right]\left[\alpha_{n-1}\right]\\
&\cdots\\
\Rightarrow\ &[k:F]=\left[k:F\left[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\right]\right]\\
&=\left[F\left[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\right]:F\left[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-2}\right]\right]\cdots\left[F\left[\alpha_2,\alpha_1\right]:F\left[\alpha_1\right]\right]\\
&<+\infty.
\end{aligned}$$

“$\Longrightarrow$” 由于$[k:F]=n<+\infty$，故k作为F的向量空间有一组基. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为k的一组F-基

于是

$$k=F\alpha_1+F\alpha_2+\cdots+F\alpha_n\subset F\left[\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right]\subset k(\Leftarrow\because\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in k,F\subset k)$$

即$k=F\left[\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right]$. 从而$k$是$F$上一个有限生成的代数扩张。 □

例1： $F=Q\left(\sqrt[3]{2}\right)=Q\left(\sqrt[3]{2}\right)$， $\alpha=\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}\in F$，找$f(x)\in Q[x]$，使得$\alpha=f\left(\sqrt[3]{2}\right)$

解： $\sqrt[3]{2}$在Q中的极小多项式为$P(x)=x^3-2$，不可约的

而令$g(x)=x^2-x+2$，则$g\left(\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+2$，即$\alpha=\dfrac{1}{g\left(\sqrt[3]{2}\right)}$

对$P(x)$与$g(x)$作辗转相除法

$$
\begin{aligned}
P(x) &= x^3-2=(x+1)\left(x^2-x+2\right)-x-4 \\
g(x) &= (-x-4)(-x+5)+22 \\
\Rightarrow 22 &= g(x)+(x+4)(-x+5) \\
&= g(x)+[(x+1)g(x)-P(x)](-x+5) \\
&= g(x)+\left(-x^2+4x+5\right)g(x)-P(x)(-x+5) \\
&= \left(-x^2+4x+6\right)g(x)-P(x)(-x+5) \\
\Rightarrow 22 &= \left(-\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+6\right)g(\sqrt[3]{2})-P(\sqrt[3]{2})(-\sqrt[3]{2}+5) \\
&= \left(-\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+6\right)g(\sqrt[3]{2}) \\
\Rightarrow \alpha &= \frac{1}{g\left(\sqrt[3]{2}\right)}=\frac{1}{22}\left(-\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+6\right)
\end{aligned}
$$

$\therefore$取$f(x)=\dfrac{1}{22}\left(-x^2+4x+6\right)$即可得到$\alpha=f\left(\sqrt[3]{2}\right)$ □

命题：设有域扩张$F\subset E\subset k$，则k/F是代数扩张$\Longleftrightarrow$ E/F, k/E都是代数扩张。

证明：“$\Longrightarrow$” 若k/F是代数扩张，则$\forall\ \alpha\in k$，α在F上代数，则自然在E上也代数，$\therefore$ k/E是代数扩张。由于$\forall\,\alpha\in E$，自然$\alpha\in k$，由于k/F是代数扩张，则α在F上的代数元，则E/F是代数扩张。

$\Longleftarrow$” 任取$\alpha\in k$，下证α是F-代数元。

由于k/E是代数扩张，则α是E-代数元，则有

$$
f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in E[x]\mid\{0\}
$$

使得$f(\alpha)=0$。

令

$$
E_1=F\left[a_0,\cdots,a_n\right]=F\left(a_0,\cdots,a_n\right),
$$

则$f(x)\in E_1[x]$且α在E_1代数。由于$a_0,\cdots,a_n\in E$，又E/F是代数扩张，则$a_0,\cdots,a_n$在F上代数。则$E_1=F\left[a_0,\cdots,a_n\right]/F$是一个有限扩张.

综上，$\left[E_1(\alpha):F\right]=\left[E_1(\alpha):E_1\right]\left[E_1:F\right]<+\infty$. 从而$E_1(\alpha)/F$是代数扩张 .

$\therefore$ α在F上代数，由α的任一性, $\Rightarrow$ k/F是代数扩张 .

2.3 代数闭包(1)

$$
\begin{array}{ccc}
\alpha\in & k & \text{域扩张} \\
 & | & \\
 & F &
\end{array}
\qquad f(x)\in F[x]\text{，使得}f(\alpha)=0,\ \tau|F=\sigma
$$

τ为σ延拓

σ为τ在F上的限制

设$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$，$0=f(\alpha)=\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$

$$\begin{aligned}0=\tau(0)=\tau(f(\alpha))&=\tau\left(\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0\right)\\&=\tau(\alpha)^n+\tau(a_{n-1})\tau(\alpha)^{n-1}+\cdots+\tau(a_1)\tau(\alpha)+\tau(a_0)\\&=\tau(\alpha)^n+\sigma(a_{n-1})\tau(\alpha)^{n-1}+\cdots+\sigma(a_1)\tau(\alpha)+\sigma(a_0)\end{aligned}$$

即

$$\tau(\alpha)^n+\sigma(a_{n-1})\tau(\alpha)^{n-1}+\cdots+\sigma(a_1)\tau(\alpha)+\sigma(a_0)=0.$$

令

$$g(x)=x^n+\sigma(a_{n-1})x^{n-1}+\cdots+\sigma(a_1)x+\sigma(a_0),$$

即$g(\tau(\alpha))=0$，即$\tau(\alpha)$是$g(x)$的一个根. 常记$g(x)\triangleq f^\sigma(x)$ $f^0(\tau(\sigma))=0,f^\tau(\tau(\sigma))=0.$

定义：设k/F是一个域扩张，L是一域，$\sigma:\ F\longrightarrow L$与$\tau:\ k\longrightarrow L$均是域同态，如果$\tau|F=\sigma$，则称$\tau$是$\sigma$在$k$上的拓展或$\sigma$是$\tau$在$F$上的限制。

特别地，当$F\subset L$，且σ是恒等嵌入（即$\sigma(\alpha)=\alpha\,\forall\,\alpha\in F$）时，如果$\tau|F=\sigma$，则称$\tau$是$k$到$L$的一个$F$-嵌入。

设$K\xrightarrow{\tau}L,K\longrightarrow F,F\xrightarrow{id}L$

τ是k到L的一个F-嵌入，$\alpha\in k$且是一个F-代数元，则$\tau(\alpha)$也是F-代数元($\because f^\tau(x)=f^\sigma(x)=f(x)$，从而$\alpha$与$\tau(\alpha)$的极小多项式是相同的，故都是$F$-代数元)。

引理：设k/F是一个代数扩张，$\sigma:k\longrightarrow k$是一个$F$-嵌入，则$\sigma$是$k$上的一个自同构。

证明.：由于域嵌入必是单的，故只须让σ是一个满射即可.

为此，任取$\alpha\in k$（找到α的原像），由k/F是代数扩张，则设α在F上的极小多项式$P_\alpha(x)\in F[x]$. 令

$$S=\{\beta\in k\mid P_\alpha(\beta)=0\},$$

则$\alpha\in S$. 又令$E=F(S)=F[S]$, 则k/F是一个有限扩张. 任取$\beta\in S$，有$P_\alpha(\beta)=0$. 于是$\sigma(P_\alpha(\beta))=0$，即$P_\alpha(\sigma(\beta))=0$.

$$\Rightarrow\sigma(\beta)\in S\Rightarrow\sigma(S)\subset S$$

$\sigma(E)\subset E$（下证事实上$\sigma(E)=E$，只需证维数相等）.

设$r_1,r_2,\cdots,r_n$是E的一组F-基, 则$\sigma(r_1),\cdots,\sigma(r_n)\in\sigma(E)$.下证它是$\sigma(E)$的一组$F$-基.

设

$$a_1\sigma(r_1)+\cdots+a_n\sigma(r_n)=0,$$

其中$a_1,\cdots,a_n\in F$, 则

$$\sigma(a_1r_1+\cdots+a_nr_n)=0.$$

由于σ是单的，从而$a_1r_1+\cdots+a_nr_n=0$.

又$\because$ $r_1,\cdots,r_n$是E的一组F-基$\Rightarrow$ $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ 即$\sigma(r_1),\cdots,\sigma(r_n)$线性无关 .

$\therefore \dim_F \sigma(E) \geqslant n$，又$\therefore \dim_F \sigma(E) \leqslant \dim_F E = n$. 则$\dim_F \sigma(E) = n$,即$\sigma(E) = E$. 由$\alpha \in S \subset E$,所以存在$\alpha_1 \in E \subset K$使得$\sigma(\alpha_1) = \alpha$, 即$\alpha$为$\alpha_1$在$\sigma$下的原像. 从而$\sigma : K \longrightarrow K$是满的.

故σ是同构.

□

2.4 代数闭包(2)

K/F是一个数域扩张，$F \overset{\sigma}{\hookrightarrow} K$ 嵌入，对于多项式$F[x]$中多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in F[x]$$

定义$\sigma f(x)$为

$$\sigma f(x) \overset{\triangle}{=} f^{\sigma}(x) = \sigma(a_n)x^n + \sigma(a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + \sigma(a_1)x + \sigma(a_0) \in \sigma(F)[x] \subset K[x].$$

设有$\alpha \in F$ 使得 $f(\alpha) = 0$, 则

$$\begin{aligned} f^{\sigma}(\sigma(\alpha)) &= \sigma(a_n)\sigma(\alpha)^n + \sigma(a_{n-1})\sigma(\alpha)^{n-1} + \cdots + \sigma(a_1)\sigma(\alpha) + \sigma(a_0) \\ &= \sigma(a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0) \\ &= a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

即$\sigma(\alpha)$是f^{σ}上的一个根.

如下图

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\sigma"] & & K \\ & F, \arrow[ul] \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$

$F \subset K, \sigma : K \longrightarrow K$是一个$F\check{}$嵌入, 且$\sigma|_F = id$.设$f(x) \in F[x], \alpha \in K$。若$f(\alpha) = 0$, 则由于$\sigma(f(x)) = f^{\sigma}(x) = f(x)$(因为$\sigma|_F = id_F$)，故

$$0 = \sigma(0) = \sigma(f(\alpha)) = f^{\sigma}(\alpha) = f(\sigma(\alpha)),$$

即$f(\sigma(\alpha)) = 0$. 从而$\sigma(\alpha)$也是$f(x)$的一个根。

$\sigma(f(\alpha)) = f(\sigma(\alpha))$, 考虑

$$\sigma(\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}) = \frac{f^{\sigma}(\sigma(\alpha))}{g^{\sigma}(\sigma(\alpha))},$$

从而得到

$$\sigma(\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}) = \frac{f(\sigma(\alpha))}{g(\sigma(\alpha))}.$$

问：F是一个域，$f(x) \in F[x], degf > 0$是否有F的扩域E，使得f在E中有根？

由于$F[x]$是PID，则任意一个多项式

$$f(x) = P_1(x)^{e_1} \cdots P_r(x)^{e_r}$$

其中$P_i(x)$在F上不可约. 不妨设f在F上不可约，$f(x) \in F[x]$.令$m =< f > \lhd F[x]$，则m是极大理想

$$\begin{tikzcd} F[x] \arrow[rr, "\sigma"] & & F[x]/m \triangleq E \\ & F \arrow[ul, "\eta"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

显然σ为满射,此时E为域，F直接看作E的子域，从而可把E看作F的扩域, 由于$f(x) \in m$，故在$E = F[x]/m$中$\overline{f(x)} = \overline{0}$. 将$f(x)$展开如下：

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in F[X],$$

于是我们有：

$$\begin{aligned} \overline{0} = \overline{f(x)} &= \overline{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0} \\ &= \overline{a_n}\overline{x}^n + \cdots + \overline{a_1}\overline{x} + \overline{a_0} \end{aligned}$$

即在E中（注意到$\overline{a_i} = a_i, i = 1 \cdots n, F \hookrightarrow E$ ）

继而得到：

$$\overline{0} = a_n \overline{x}^n + \cdots + a_1 \overline{x} + \overline{a_0}$$

此时$\overline{x} \in E$,即$f(\overline{x}) = \overline{0}$,也即$f$在$E$中有根.

定理 设F是一个域，$f(x) \in F[X]$,且$degf > 0$,则存在一个F扩域E,使得f在E中有根.(证明上面已给出)

推论 设F是一个域，$f_1(x) \cdots f_n(x) \in F[X]$,且$degf_i > 0, i = 1 \cdots n$,则存在一个$F$扩域$E$,使得$f_1(x) \cdots f_n(x)$在$E$中均有根.

证明. 由上述定理，存在一个F扩域E_1,使得$f_1(x)$在E_1中有根，此时

$$f_2(x) \in F[X] \subset E_1[X],$$

又由上述定理，存在E_1扩域E_2,使得$f_2(x)$在E_2中有根.依次下去，得到E_{n-1}扩域E_n,使得$f_n(x)$在E_n中有根.

即$f_1(x) \cdots f_n(x)$在E_n中有根. □

定义 代数封闭域（$algebraically\ field$）

设K是一个域,如果K上任意一个次数大于0的多项式，均在K中有根，则称K是一个代数封闭域.

事实 设K是一个代数封闭域,$f(x) \in K[X]$,且$n = degf > 0$,则$f(x)$在K中有且只有n个根.(重根按重数计算)

证明. 由所设，$f(x)$在K中有根，取其一为α_1,即$\alpha_1 \in K$,,满足$f(\alpha)=0$,此时由带余除法可知，

$$(x-\alpha_1)|f(x),$$

即:

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdot g(x),$$

其中$g(x)\in K[X]$,且次数为$n-1$.

(1)若$n-1=0$,则$f(x)$在K中有一个根，结论显然成立.

(2)若$n-1>0$,此时$g(x)$在K中有一个根α_2,此时有：

$$g(x)=(x-\alpha_2)\cdot h(x),$$

其中$h(x)\in K[X]$,且次数为$n-2$,即:

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot h(x)$$

依次做下去，得到：

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),$$

故$f(x)$在K中有且只有n个根.(重根按重数计算) □

定理 任一个域均包含于一个代数封闭域 .

证明. (Artin)

设k是一个域,令：

$$S_0=\{f(x)\in k[X], degf>0\},$$

对每个$f\in S_0$,都给f对应于一个未定元，记之为X_f,记

$$S=\{X_f : f\in S_0\}.$$

令$A=K[S]$是k上关于未定元集S的多项式环.注意到，对每个$f\in S_0$,都有$f(X_f)\in A$,令：

$$I=<f(X_f): f\in S_0>,$$

为A中由所有$f(X_f)(f\in S_0)$生成的理想.

下证：I是A的真理想，即证$1\notin I$,

反证，若$1\in I$,就有

$$1=g_1f_1(X_{f_1})+\cdots+g_nf_n(X_{f_n}) \tag{1}$$

其中$g_1\cdots g_n\in A, f_1\cdots f_n\in S_0, g_1\cdots g_n\in A$是$\{X_f\}_{f\in S_0}$中有限个变量的多项式.(虽然$A$中的变量个数是无限的，但每个多项式$g_i$的变量个数是有限的)

对于$f_i(X_{f_i})\in k[X_f], i=1\cdots n$,由上述定理可知，存在$k$的扩域$E_1$,使得$f_i(X_{f_i})$在$E_1$中均有根，不妨取其根为$\alpha_i\in E$,(即$f_i(\alpha_i)=0$),将$\alpha_i$代入（1）中,得到：

$$1=g_1(\alpha_1)f_1(\alpha_1)+\cdots+g_n(\alpha_n)f_n(\alpha_n)=0,$$

矛盾！

因此I是A的真理想，故有A的一个极大理想m,使得$I \subset m$.令$K_1 = A/m$,则K_1是一个域，从而如下图所示：

$$\begin{tikzcd} A = K[S] \arrow[rr, "\sigma"] & & K_1 = A/m \\ & k \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

其中σ显然为满射，K_1可看作是k的一个扩域.任取$f \in S_0, f(X_f) \in I \subset m$. 从而有$\overline{f(X_f)} = \overline{0} \in A/m = K_1$,即$f(\overline{X_f}) = \overline{0}$,也即$\overline{X_f}$是$f$在$K_1$中的一个根.

对于K_1按上述步骤，可构造K_1的一个扩域K_2，使得K_1中的任一次数≥ 0的多项式，在K_2中均有根.依此类推，可得到域的扩张链如下：

$$k \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots,$$

其中K_n中次数大于0的多项式均在K_n-1中有根.令$K = \bigcup \sum_{i=1}^{\infty} K_i$,则显然$K$是一个域，且$k \subset K$.

下证：K是代数封闭域.

为此任取$f(x) \in K[X]$,且$degf > 0$,则由上述构造可知，存在$n \in Z_{\geq 0}$,使得$f(x) \in K_n[X]$,于是$f(x)$在$K_{n+1}[X](\subset K)$中与根，故K是代数封闭域. □

定理 设k是一个域，则存在域K,使得K是代数封闭域，且K/k是代数扩张，称K是k的一个代数闭包.

证明. 由前面的定理可知，k包含于一个代数封闭域E中，令$K = \{\alpha \in E, \alpha$是一个$k$—代数元$\}$,则$K$是一个域，且$K/k$是一个代数扩张.

下证：K是代数封闭域.

为此任取$f(x) \in K[X]$,且$degf > 0$,则$f(x) \in E[X]$,由于E是代数封闭域，故f在E中有根，取其一为α,即$\alpha \in E, f(\alpha) = 0$

显然α是一个K—代数元,即$K[\alpha]/K$是一个代数扩张，又由于K/k是一个代数扩张，进而可知$K[\alpha]/k$是一个代数扩张.即α是一个k—代数元,从而可知$\alpha \in K$,因此K是代数封闭域，K是k的一个代数闭包（同构意义下） □

E是代数封闭域,K/k是一个代数扩张,$\sigma : k \to E$,问是否存在$\tau; K \to E$,使得$\tau|_k = \sigma$.正如下图所示：

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\tau"] & & E \\ & k \arrow[ul] \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

简化模型 $K = k(\alpha)$是k上的单代数扩张，设α在k上的极小多项式为$P_\alpha(x) \in k[X]$,从而有$P_\alpha^\sigma(x) \in \sigma(k)[X] \subset E[X]$,且有$P_\alpha^\tau(x) \in E[X]$.

由$P_\alpha(\alpha) = 0$推出$0 = \tau(P_\alpha(\alpha)) = P_\alpha^\tau(\tau(\alpha)) = P_\alpha^\sigma(\tau(\alpha))$,即$\tau(\alpha)$是$P_\alpha^\sigma$在$E$中的一个根.

反之，$\beta \in E$,且$P_\alpha^\sigma(\beta)=0$,令

$$\tau;k(\alpha)\to E,\quad \alpha\longmapsto\beta$$

从而有对应

$$g(\alpha)\longmapsto g^\sigma(\tau(\alpha))=g^\sigma(\beta)$$

继而下图成立：

$$\begin{tikzcd}
K=k(\alpha) \arrow[rr, "\tau"] & & E \\
& k \arrow[ul] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

命题 设E是代数封闭域,$k\subset$E,α是一个k—代数元,$P_\alpha(x)\in k[X]$是k上的极小多项式，则$k(\alpha)$到E中的k-嵌入的个数=$P_\alpha(x)$中全部互异根的个数$\leq degP_\alpha(x)$

命题 设K/k是一个代数扩张，E是一个代数封闭域，$\sigma;k\to E$是一个域嵌入，则σ可延拓到K上，即有域嵌入

$$\tau;K\to E$$

,使得$\tau|_k=\sigma$.

2.5 分裂域 正规扩张

回顾：设k是代数封闭域，,$f(x)\in k[X]$,且$n=degf>0$,,则$f(x)$在k中有根，从而就有n个根.(重根按重数计算)

设F是一个域，$f(x)\in F[X]$,且$n=degf>0$,,则$f(x)$在F中至多有n个根.

代数闭包：K/k是一个域扩张（1）K/k是代数扩张；（2）K是代数封闭的，则称K是k的一个代数闭包.

取E为代数封闭域，且$k\subset E$,令：$k^\alpha=\{\alpha\in E,\alpha$是一个$k$—代数的$\}$,则$k^\alpha$是$k$的一个代数闭包.

命题 设k是代数封闭域，且K/k是一个代数扩张，则$K=k$.(代数闭域只有平凡的代数扩张)

证明. 任取$\alpha\in K,\alpha$是一个k—代数元，α在k上的极小多项式为,$P_\alpha(x)\in k[X]$,则$degP_\alpha(x)>0$,于是$P_\alpha(x)$在k中完全分解.特别地，$\alpha\in k$ □

命题 设E为代数封闭域，k是一个域，则k到E的任何一个嵌入，$\sigma;k\to E$均可延拓到k的任何一个代数扩域K上，即对于任意代数扩张K/k,存在嵌入：

$$\tau;K\to E,$$

使得$\tau|_k=\sigma$.

证明. 取$S=\{(F,\tau):F$是K/k的中间域,$\tau;F\to E$,且$\tau|_k=\sigma$显然$(k,\sigma)\in S, S\neq\phi$.

在S中引入如下关系：对于$(F_1,\tau_1),(F_2,\tau_2)\in S$，定义$(F_1,\tau_1)\leq(F_2,\tau_2)$，如果$F_1\subset F_2$，且满足$\tau_2|_{F_1}=\tau_1$.

易验证，“$\leq$”是S上的一个偏序关系，即$(S,\leq)$是一个非空偏序集.

如下图：

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & E \\ F_2 \arrow[u] \arrow[ur, "\tau_2"] & \\ F_1 \arrow[u] \arrow[uur, "\tau_1"] & \\ k \arrow[u] \arrow[uuur, "\sigma"] & \end{tikzcd}$$

任取S上的一个全序子集$\{(F_i,\tau_i)\}_{i\in I}$,令$L=\bigcup_{i\in I}F_i$,则$L$是$K/k$的一个中间域，此时我们令：

$$\tau;L\to E\quad \alpha\longmapsto\tau_i(\alpha)$$

其中$\alpha\in F_i$,对任意的$\alpha\in L$,则τ是一个嵌入.

证明思路如下图：

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & E \\ K_0(\alpha) \arrow[u] \arrow[ur, "\tau"] & \\ K_0 \arrow[u] \arrow[uur, "\tau_0"] & \\ k \arrow[u] \arrow[uuur, "\sigma"] & \end{tikzcd}$$

该嵌入是良好定义的.如果$\alpha\in F_i$,且$\alpha\in F_j$,则不妨设$F_i\subset F_j$,此时$\tau_i=\tau_j|_{F_i}$,从而有$\tau(\alpha)=\tau_i(\alpha)=\tau_j|_{F_i}(\alpha)=\tau_j(\alpha)$.且对任意的$\alpha\in K$,有$\alpha\in F_i$（对于任意的$i\in I$)进而有

$$\tau(\alpha)=\tau_i(\alpha)=\sigma(\alpha),$$

即$\tau|_k=\sigma$.可以推出$(L,\tau)\in S$,且显然有$\tau|_{F_i}=\tau_i$,即$(F_i,\tau_i)\leq(L,\tau)(i\in I)$成立.也即$(L,\tau)$是$\{(F_i,\tau_i)\}_{i\in I}$在$S$中的一个上界.

因此由$Zorn$引理可知，S中有极大元，设其中的一个极大元为(K_0,τ_0).

下证：$K=K_0$.

假若不然，则有$\alpha\in K,\alpha\notin K_0$,由所设$\alpha$是一个$k$—代数元,从而$\alpha$也是一个$K_0$—代数元,故$K_0(\alpha)/K_0$是一个单代数扩张.

由前面的定理得τ_0可延拓到$K_0(\alpha)$上,即有嵌入

$$\tau':K_0(\alpha)\to E,$$

使得$\tau'|_{K_0=\tau_0}$.显然有$\tau'|_k=\tau_0|_k=\sigma$,故$(K_0(\alpha),\tau')\in S$.但$(K_0,\tau_0)\le(K_0(\alpha),\tau')$,但$K_0\neq K_0(\alpha)$与$K_0$的极大性矛盾.

因此$K=K_0$. □

取E为代数封闭域，且$k\subset E$,令$k^a=\{\alpha\in E,\alpha$是一个k—代数元$\}$,则k^a是k的一个代数闭包.

设k,k'是域，$\sigma:k\to k'$为同态应射同态映射；$\eta:k\to k^a$为恒等嵌入；$\eta':k'\to k'^a$为恒等嵌入.如图所示：

$$\begin{tikzcd}
k^a \arrow[r, "\tau"] & k'^a \\
k \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "\sigma"'] & k' \arrow[u, "\eta'"']
\end{tikzcd}$$

则σ可延拓到k^a上，即有域嵌入$\tau:k^a\to k'^a$,使得$\tau|_k=\sigma$.即有：

$$\begin{tikzcd}
k^a \arrow[r, "\tau"] & k'^a \\
k \arrow[u] \arrow[ur]
\end{tikzcd}$$

推论　任一个域k的代数闭包在k—同构下是唯一的，即对于k的两个的代数闭包K_1与K_2,都有域同构：

$$\sigma:K_1\to K_2,$$

使得$\sigma|_k=id$.(即K_1与K_2是k—同构的)

命题　域F的任一个有限乘法子群都是循环的.

证明. 设$G\subset F^*$是一个有限群，且$|G|>1$，由有限$Able$群结构定理可知，只需证G是一个P群的情形.（P是素数）此时记$|G|=p^n(n\in Z_{\ge1})$,令$S=\{m\in Z_{\ge0}:$存在$a\in G$,使得$\sigma(a)=p^m\}$,则$S\neq\phi$,且对于任意$m\in S$,有$m\le n$.由S是一个有限集合，故S中有最大整数，记之为r,且有$b\in G$,使得$\circ(b)=p^r$,显然$r\le n$.

于是对任意的$\alpha\in G$,记$\circ(\alpha)=p^s,s\in Z_{\ge0}$,则$s\le r$.于是就有$\alpha^{p^r}=(\alpha^{p^s})^{p^{r-s}}=1^{p^{r-s}}=1$.因此，$G$中元素均是$X^{p^r}-1$的根.

因为$G\subset F^*$,而$X^{p^r}-1$在F中至多有p^r个根，可以推出$|G|\le p^r$,即$p^n\le p^r\le p^n$,从而得到$r=n$,进而得到$\circ(b)=p^n$.

故$G=<b>$. □

分裂域　正规扩张

设k是一个域，$f(x)\in k[X]$,且$n=,degf>0$,取k^a为k的一个代数闭包，则$f(x)$在k^a中可完全分解为：

$$f(x)=a(x-\alpha_1)+\cdots+(x-\alpha_n)$$

令$K=k(\alpha_1\cdots\alpha_n)\subset k^a$.

事实:上述K是k^a/k中使得$f(x)$在其中可完全分解的最小中间域.若$\alpha_1\cdots\alpha_n \in K'$,则可以得到$K=k(\alpha_1\cdots\alpha_n)\subset K'$,称$K$为$f$在$k$上的一个分裂域.我们有：

$$K=k(\alpha_1\cdots\alpha_n)\to K^\sigma=k\{\sigma(\alpha_1)\cdots\sigma(\alpha_n)\}$$

从而我们有对应：

$$\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}\longmapsto\{\sigma(\alpha_1)\cdots\sigma(\alpha_n)\}$$

从而我们有下图：

$$\begin{tikzcd}
K=k(\alpha_1\cdots\alpha_n) \arrow[rr, "\sigma"] & & K^\sigma=k\{\sigma(\alpha_1)\cdots\sigma(\alpha_n)\} \\
& k \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

分裂域是在k—同构意义下是唯一的.

对于两个多项式的分裂域，$f_1,f_2 \in k(x)$,f_1的根为$\alpha_1\cdots\alpha_m$；f_2的根为$\beta_1\cdots\beta_n$；我们得到$E_1=k(\alpha_1\cdots\alpha_m),E_2=k(\beta_1\cdots\beta_n)$,则有：

$$\begin{aligned}E&=E_1E_2=E_1(E_2)=E_2(E_1)\\&=k(\alpha_1\cdots\alpha_m)k(\beta_1\cdots\beta_n)\\&=k(\alpha_1\cdots\alpha_m\beta_1\cdots\beta_n)\end{aligned}$$

定义(分裂域)　设K是一个域,$\{f_i\}_{i\in I}$是k上的一簇多项式，取定k^a为k的一个代数闭包,$\{f_i\}_{i\in I}$在k^a/k中的分裂域是指K:$k\subset K\subset k^a$,且满足：

（1）每个$f_1,(i=1\cdots n)$在K中完全分解；

（2）对k^a/k的任一个中间域E,如果k^a/k在E中完全分解，有$K\subset E$；

具体地,令$S=\{\alpha\in k^a$:存在$i\in I$,使得$f_i(\alpha)=0$,则有$K=k(S)$.注意到：分裂域是在k—同构意义下是唯一的.

考虑不可约多项式，设k是一个域,$f(x)\in k[X]$,且f在k上不可约，从而有：

$$f(x)=a(x-\alpha_1)+\cdots+(x-\alpha_n)$$

$\alpha_1\cdots\alpha_n\in k^a$,令$S=\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}$, 我们有映射：

$$\sigma:k(\alpha)\to k^a\quad \alpha\longmapsto\sigma(\alpha),$$

由$f(\sigma(\alpha))=0$,可知：$\sigma(\alpha)\in\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}$我们有下图：

$$\begin{tikzcd}
k(\alpha) \arrow[r, "\sigma"] & K^a \\
k \arrow[u] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

进而我们考虑下图：

$$
\begin{tikzcd}
K = k(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \arrow[r] & k^a \\
k(\alpha) \arrow[u] \arrow[ur] & \\
k \arrow[u] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}
$$

取$K = k(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$为$f$在$k^a/k$中的分裂域，对于映射

$$\tau : K \to \tau(K) \quad \tau|_k = id,$$

我们有:$f^\tau(x) = f(x)$,推出$0 = \tau(0) = \tau(f(\alpha_i)) = f(\tau(\alpha_i))$,从而推出$\tau(\alpha_i) \in S$,进而有$\tau(K) \subset k(S) = K$,即$\tau(K) = K$.

又由于K/k是代数扩张，故τ是满的，从而$\tau \in Aut_k(K)$为K到自身的一个k-嵌入. 即有下图：

$$\tau : K \to K \quad \tau|_k = id.$$

定义（正规扩张） 设K/k是一个域的代数扩张，k^a为k的一个代数闭包,如果K到自身的k-自同构，则称K/k是一个正规扩张.

定义 设k是一个域, $\alpha\beta \in k^a$.如果在k上的不可约多项式，$P(x) \in k[X]$,使得$P(\alpha) = P(\beta) = 0$,则称α与β是k-共轭的.(极小多项式相同，即多项式的根之间为k-共轭元.)

定义 $\alpha \sim \beta \in k^a \iff$ 极小多项式相同,(固定一个代数闭包的情形下，给一个$\alpha \in k$,则就对应于一个极小多项式.)则"$\sim$"是一个等价关系.

$k^a / \sim = \{k-$共轭类$\}$

2.6 正规扩张 可分扩张

定理 设K/k是一个域的代数扩张，k^a是k的包含K一个代数闭包,则下列陈述等价：

（1）K到k^a的任一个k-嵌入均是K的一个k-自同构，即$\sigma(K) = K$.

（2）$k[X]$中的任一不可约多项式f如果在K中有一个根，则f在K中完全分解.（即K包含$\alpha \in k^a$的同时也包含α的在k^a中的全部共轭元.）

（3）K是k上一簇多项式在k上的分裂域.

证明. （1）$\Longrightarrow$（2）证明思路如下图：

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\tau"] & k^a \\
k(\alpha) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, "\sigma"] & k(\beta) \arrow[u] \\
k \arrow[u] \arrow[ur, "id"] &
\end{tikzcd}$$

设$f(x) \in k[X]$为k上的一个不可约多项式，且有$\alpha \in K$.使得$f(\alpha) = 0$

下证：$f(x)$在k^a中的任一个根β都必在K中.

事实上，对于上述的$\beta \in k^a$,令

$$\sigma : k(\alpha) \to k^a \quad \alpha \longmapsto \beta,$$

则$\sigma : k(\alpha) \to k^a$是一个$k$-嵌入.

由于$K/k(\alpha)$是代数的，故σ可延拓为

$$\tau : K \to k^a,$$

即$\tau|_{k(\alpha)} = \sigma$.

显然τ也是一个k-嵌入，由所设，$\tau(K) = K$.特别地，$\beta = \sigma(\alpha) = \tau(\alpha) \in K$,故$K$包含$\alpha$的全部共轭元.

（2）$\Longrightarrow$（3）取$S = \{P(x) \in k[X], P(x)$是某个$\alpha \in K$在$k$上的不可约多项式$\}$,则$K$是$S$在$k$上的分裂域.

（3）$\Longrightarrow$（1）设K是多项式簇$\{f_i\}_{i \in I} \subset k[X]$在$k$上的分裂域.(其中$deg f_i > 0$)

任取K到k^a的任一个k-嵌入如下：

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "\sigma"] & & k^a \\
& k \arrow[ul] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

下证$\sigma(K) = K$.

下面只需证：$\sigma(K) \subset K$.

为此任取$\alpha \in K$，由所设，有$f_i \subset k[X]$，使得$f_i(\alpha) = 0$,从而有$\sigma(f_i(\alpha)) = 0$,即$f_i(\sigma(\alpha)) = 0 \Rightarrow \sigma(\alpha) \in K \Rightarrow \sigma(\alpha) \subset K$.故$\sigma(K) = K, \sigma$是$K \to K$的自同构. □

定理 （1）设K/k是一个域的正规扩张，对k的任一个扩域F，则FK/K也是正规的；

（2）设$k \subset E \subset K$,如果K/k是正规的，则K/E也是正规的；

（3）设K_1, K_2均是k的代数扩张，且$K_1, K_2 \subset L$，如果$K_1/k, K_2/k$均是正规的，则K_1K_2/k, $K_1 \cap K_2/k$均是正规的.

可分扩张 E/F是一个代数扩张，L, L'是F的两个代数封闭域，则有下图：

$$\begin{tikzcd}
L' & E \arrow[l, "\tau^*"'] \arrow[r, "\sigma^*"] & L \\
& F \arrow[ul, "\tau"] \arrow[u] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

设$\sigma : F \to L$是一个嵌入，$\tau : F \to L'$,令：$S(\sigma) = \{\sigma^* : E \to L$嵌入，且$\sigma^*|_F = \sigma\}$,$S(\tau) = \{\tau^* : E \to L'$嵌入，且$\tau^*|_F = \tau\}$.

事实：

$$S(\sigma) \longleftrightarrow S(\tau) \quad \sigma^* \longmapsto \tau^*$$

不妨令$\tau^* = \lambda \circ \sigma^*$，则有下图：

$$\begin{tikzcd}
L' & & L \arrow[ll, "\lambda"'] \\
& E \arrow[ul, "\tau^*"] \arrow[ur, "\sigma^*"'] & \\
\tau(F) \arrow[uu] & F \arrow[l] \arrow[r] \arrow[uul, "\tau"] \arrow[uur, "\sigma"'] & \sigma(F) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

其中λ是$\tau \circ \sigma^{-1} : \sigma(F) \to L'$到$L'$上的延拓.

任取$\alpha \in F$,$\tau^*(\alpha) = \lambda\sigma^*(\alpha) = \lambda\sigma(\alpha) = \tau \circ \sigma^{-1}\sigma(\alpha) = \tau(\alpha)$,故$\tau^*|_F = \tau$.

定义 设E/F是一个代数扩张，F^a是F的一个代数闭包，任取一个F-嵌入$\sigma : F \to F^a$,令$S(\sigma) = \{\sigma^* : E \to F^a$嵌入，且$\sigma^*|_F = \sigma\}$.定义$E/F$的可分次数为$[E : F]_s \triangleq \# \ S(\sigma)$.特别地$\sigma = id$

$$\begin{aligned}
[E : F]_s &= \#S(id) \\
&= \#\{\sigma^* : E \to F^*, \sigma^*|_F = id\}
\end{aligned}$$

即为$\#\{E$到F^*的全部F-嵌入$\}$.

例如：$E = F(\alpha)$为一个单代数扩张，$\alpha \in F^a$,则$[E : F]_s = \alpha$在F上的极小多项式全部互异根（根在F^a中）的个数.即有：

$$\begin{tikzcd}
F(\alpha) \arrow[rr, "\sigma"] & & F^* \\
& F \arrow[ul] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

定理 设有域扩张$k \subset F \subset E$,则有$[E : k]_s = [E : F]_s[F : k]_s$.

证明. 令$S_E=\{\tau:E\to k^a$嵌入，且$\tau|_k=id\}$,$S_F=\{\sigma:F\to k^a$嵌入，且$\sigma|_k=id\}$,即有：

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\tau"] & & k^a \\
F \arrow[u] \arrow[urr, "\sigma_i"] & & \\
k \arrow[u] \arrow[uurr, "id"'] & &
\end{tikzcd}$$

设$S_F=\{\sigma_1\cdots\sigma_m\}$,对每一个$\sigma_i\in S_F$,记$S_{E/F}(\sigma_i)=\{\tau:E\to k^a$嵌入，且$\tau|_F=\sigma_i\}$,则$\#S_{E/F}(\sigma_i)=[E:F]_s$,且有$S_E\subset\{\tau:E\to k^a$嵌入，且$\tau|_F=\sigma_i$,对每个$i\in\{1\cdots n\}\}\triangleq T$

任取$\tau\in S_E$,则$\tau|_F$是F 到k^a的一个k-嵌入，$\tau|_F=\sigma_i$,对某个$i\in\{1\cdots n\}$,从而得到$S_E\subset T$,因此$S_E=T$.

故我们得到：$[E:k]_s=\#S_E=\#T=m\#S_{E/F}(\sigma_i)=[E:F]_s[F:k]_s$. □

定理 设K/k是一个域的有限扩张，则$[E:k]_s\le[E:k]$.(即可分次数≤扩张次数)

证明. 由所设，$K=k(\alpha_1\cdots\alpha_n)$,其中$\alpha_1\cdots\alpha_n\in K$.于是有：

$$k\subset k(\alpha_1)\subset k(\alpha_1,\alpha_2)\subset\cdots\subset k(\alpha_1\cdots\alpha_n)=K,$$

其中 $k(\alpha_1\cdots\alpha_i)=k(\alpha_1\cdots\alpha_{i-1})(\alpha_i)$.

由前面的结果有：

$$\begin{aligned}[k(\alpha_1\cdots\alpha_i):k(\alpha_1\cdots\alpha_{i-1})]_s&=[k(\alpha_1\cdots\alpha_{i-1})(\alpha_i):k(\alpha_1\cdots\alpha_{i-1})]_s\\&\le[k(\alpha_1\cdots\alpha_i):k(\alpha_1\cdots\alpha_{i-1})].\end{aligned}$$

于是我们得到：

$$\begin{aligned}[K:k]_s&=[K:k(\alpha_1\cdots\alpha_{n-1})]_s\cdots[k(\alpha_1):k]_s\\&\le[K:k(\alpha_1\cdots\alpha_{n-1})]\cdots[k(\alpha_1):k]\\&=[K:k].\end{aligned}$$

□

命题 设$K=k(\alpha)$是k的单代数扩张，则K/k是可分的$\Longleftrightarrow\alpha$是可分代数元

证明. $[K:k]_s=[k(\alpha):k]_s=P_\alpha(x)$在$k^a$中互异根的个数.

故：K/k可分$\Longleftrightarrow[K:k]_s=[K:k]=degP_\alpha(x)$=$P_\alpha(x)$在$k^a$中互异根的个数$\Longleftrightarrow P_\alpha(x)$在$k^a$中无重根$\Longleftrightarrow P_\alpha(x)$为可分的$\Longleftrightarrow\alpha$为$k$上的可分代数元. □

定义 设k是一个域，k_a是k的一个代数闭包，$\alpha\in k^a$,称α为k上的可分代数元.如果α在k上的极小多项式是可分的.

注：多项式可分$\Longleftrightarrow$它无重根；

命题　域的代数扩张K/k是可分的$\Longleftrightarrow$ K中的每个元素均是k上的可分代数元.特别地，对于有限扩张K/k有：K/k可分$\Longleftrightarrow$ $K=k(\alpha_1\cdots\alpha_n),\alpha_1\cdots\alpha_n\in K$为$k$上的可分代数元.

正规闭包

回忆一下正规扩张，$K/k,K=k(\alpha),\alpha\in K$单代数扩张，$\alpha$在$k$上的极小多项式为：

$$P_\alpha(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n),\quad \alpha_1=\alpha\in K$$

记E为$P_\alpha(x)$在k上的分裂域（$\subset k^a$）,则E是k^a中包含$k(\alpha)$的最小正规扩域,称E是$k(\alpha)/k$的一个正规闭包.

由于K/k是正规扩张，从而在K上完全分裂，$\tau(\alpha)\in E,E/k$正规，$\tau|_K=\sigma\Rightarrow\tau(\alpha)=\sigma(\alpha)=\alpha_i$,对某个$i\in\{1\cdots n\}$,即有下图：

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\tau"] & & k^a \\
K=k(\alpha) \arrow[u] \arrow[urr, "\sigma"] & & \\
k \arrow[u] \arrow[uurr, "id"'] & &
\end{tikzcd}$$

一般地，任一个代数扩张K/k在k^a中均有一个正规闭包k',即：（1）k'/k是正规的（$k'\subset k^a$）;(2)设$E\subset k^a,E/k$是正规的，且$E\supset K$,则$E\supset K'$.

定理　本原元（*primtive　element*）

设K/k是域的有限扩张，则：K是k的单代数扩张$\Longleftrightarrow$ K/k只有有限个中间域.特别地,域的有限可分扩张必是单代数扩张，此时$K=k(\alpha),\alpha$称为K/k的一个本原元.

证明. (1)"$\Leftarrow$"(充分性)若k是有限域，则由K/k是有限扩张$\Rightarrow$ K是有限域，则K^*是循环群，记$K^*=<\alpha>,\alpha\in K,\alpha\neq\{0\}$,从而推出$K=k(\alpha)$.则$K$为单扩张.

若k是无限域，设K/k只有有限多个中间域，由于K/k是有限扩张，不妨$K=k(\alpha,\beta)$.对任意的$c\in k^*$,有中间域:

$$E_c=k(\alpha+c\beta),$$

由所设K/k只有有限个中间域，但$c\in k^*$是无限的，从而有$c_1,c_2\in k^*,c_1\neq c_2$,使得$k(\alpha+c_1\beta)=k(\alpha+c_2\beta)\overset{\triangle}{=}E$.于是$\alpha+c_1\beta,\alpha+c_2\beta\in E$,从而推出$(c_1-c_2)\beta\in E$.又由于$c_1\neq c_2\Rightarrow c_1-c_2\neq 0\Rightarrow\frac{1}{(c_1-c_2)}(c_1-c_2)\beta\in E$.即$\beta\in E$,进而我们有$\alpha=(\alpha+c_1\beta)-c_1\beta\in E$.即

$$K=k(\alpha,\beta)\subset E\subset K,$$

故$K=E=k(\alpha+c\beta)$.

"$\Rightarrow$"(必要性)设$K=k(\alpha)$是k的一个单代数扩张，设$P_\alpha(x)$为α在k上的极小多项式，记$S=\{$中间域$E:k\subset E\subset K\}$,对每个$E\in S,\alpha$也是E上的代数元，记α在E上的极小多项式为$P_{\alpha,E}(x)$，则显然有$P_{\alpha,E}(x)|P_\alpha(x)$,(因为$P_\alpha(x)$也是$E$上的多项式，且$P_\alpha(\alpha)=0$.)

记$T=\{P_{\alpha,E}(x):E\in S\}$,则$\#T<+\infty$.令：

$$\phi:S\to T\quad E\mapsto P_{\alpha,E}(x).$$

下证：ϕ是一个单射.

对于$P_{\alpha,E}(x)\in T,(E\in S)$,令$F$为$k$上添加$P_{\alpha,E}(x)$的全部系数所得的扩域，则$k\subset F\subset E$.此时$P_{\alpha,E}(x)\in F(X)$,且为$F$上不可约多项式.

又显然$K=k(\alpha)=E(\alpha)=F(\alpha)\Rightarrow[K:E]=degP_{\alpha,E}(x);[K:F]=degP_{\alpha,E}(x)$,从而推出$[K:E]=[K:F]$,又由于$F\subset E$,即可得到$E=F$.由此可知$\phi$是一个单射.

故有$\#S\le\#T<+\infty$,即S是一个有限集，从而K/k中的中间域只有有限个. □

（2）下证：域的有限可分扩张必是单代数扩张，$\#k=+\infty$.

证明. 证法一（书上），设$[K:k]=n$,不妨设$K=k(\alpha,\beta),(\alpha,\beta\in K)$,由所设$[K:k]_s=n$,取$k$的代数闭包$k^a$,使得$k^a\subset K$.此时$K$到$k^a$共有$n$个不同的$k$-嵌入$\sigma_1\cdots\sigma_n$.即：

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\sigma_i"] & k^a \\ k \arrow[u] \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$

令$f(x)=\prod_{1\le i\neq j\le n}\{(\sigma_i\alpha+x\sigma_i\beta)-(\sigma_j\alpha+x\sigma_j\beta)\}$,则$f(x)\neq 0$.(不是零多项式)

假若不然，则有上述$i,j,i\neq j$,使得$\sigma_i\alpha+x\sigma_i\beta=\sigma_j\alpha+x\sigma_j\beta$,即满足$\sigma_i\alpha=\sigma_j\alpha,\sigma_i\beta=\sigma_j\beta$,从而对于$\sigma_i,\sigma_j:K\to k^a$,我们得到：$\sigma_i=\sigma_j$,与所设矛盾，故$f(x)\neq 0$.

设$f(x)$在k^a中至多有有限个根（零点），故在k中也只有有限个零点.但$\#k=+\infty$.，从而存在$c\in k^*$,使得$f(c)\neq 0$.于是$(\sigma_i\alpha+c\sigma_i\beta)-(\sigma_j\alpha+c\sigma_j\beta)\neq 0$,也即$\sigma_i\alpha+c\sigma_i\beta\neq\sigma_j\alpha+c\sigma_j\beta,(i\neq j)$.注意到$\sigma_i\alpha+c\sigma_i\beta=\sigma_i(\alpha+c\beta),(i=1\cdots n)$,而$\sigma_i$是$K$到$k^a$的$k$-嵌入，故$\sigma_i(\alpha+c\beta)$均是$\alpha+c\beta$的$k$-共轭元，从而推出$[k(\alpha+c\beta):k]_s\ge n$.

另一方面，$k(\alpha+c\beta)\subset K$,即有：

$$n=[K:k]=[K;k]_s\ge[k(\alpha+c\beta):k]=[k(\alpha+c\beta):k]_s\ge n,$$

故有，$K=k(\alpha+c\beta)$. □

证明. 证法二（构造法）把满足上面条件的c找出

不妨设$K=k(\alpha,\beta)$,取定k的一个代数闭包k^a,使得$k^a\subset K$,分别设α,β在k^a中的全部共轭元为$\alpha=\alpha_1\cdots\alpha_m,\beta=\beta_1\cdots\beta_n$,令

$$S=\{\frac{\alpha_i-\alpha_j}{\beta_l-\beta_k}|1\le i\neq j\le m,1\le l\neq k\le n\},$$

显然S是一个有限集.

由所设，k是一个无限域，故有$c\in k^*$,使得$c\notin S$,又设$f(x),g(x)\in k[X]$是α,β在k上的极小多项式，记$r=\alpha+c\beta=\alpha_1+c\beta_1\in K$,令$h(x)=f(r-cx)$,则$h(x)\in k[r][X]\subset K[X]$,则$h(\beta_1)=f(r-c\beta_1)=f(\alpha_1)=0$,可以推出$\beta_1$是$h(x)$的一个根，又$\beta_1$也是$g(x)$的一个根，而$h(\beta_j)\neq 0,(j=2\cdots n)$,若不然，$h(\beta_j)=0\Rightarrow f(r-c\beta_j)=0$,而$f(x)$的根为$\alpha_1\cdots\alpha_m$,进而有$r-c\beta_j=\alpha_i$,对某个$i=1\cdots m$,即

$$\alpha_1+c\beta_1-c\beta_j=\alpha_i\Rightarrow\alpha_1-\alpha_i=c(\beta_j-\beta_1)\Rightarrow c=\frac{\alpha_1-\alpha_i}{\beta_j-\beta_1}\Rightarrow c\in S,$$

矛盾!

由于$g(x),h(x)\in k[r][X]$,且由上述讨论可知，$g(x),h(x)$的最大公因式为$(x-\beta_1)$,即$(g(x),h(x))=x-\beta_1$,由辗转相除法可知：$x-\beta_1\in k[r][X]\Rightarrow\beta=\beta_1\in k[r]$,又由于$r=\alpha+c\beta\Rightarrow\alpha=r-c\beta\in k[r]\Rightarrow k(\alpha,\beta)=K\subset k[r]\subset K$,故

$$K=k(r)=k(\alpha,\beta).$$

□

例如：$K=Q(\sqrt{-1},\sqrt{-2})=Q(r)$,求$r$.

解：由于$K=Q(\sqrt{-1})(\sqrt{-2})$,而$\sqrt{-1}$的$Q$-共轭元为$\pm\sqrt{-1}$,$\sqrt{2}$的$Q$-共轭元为$\pm\sqrt{2}$,$[Q(\sqrt{-1}):Q]=2,[Q(\sqrt{-1})(\sqrt{-2}):Q(\sqrt{-1})]=2$.(这是由于$\sqrt{-2}\notin Q(\sqrt{-1})$,如若不然$\sqrt{-2}=a+b\sqrt{-1}$,$a,b\in Q\Rightarrow 2=a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}$.左边属于$Q$,右边属于$C$,但不属于$Q$,从而矛盾,故$\sqrt{-2}\notin Q(\sqrt{-1})$,$\Rightarrow[Q(\sqrt{-1})(\sqrt{-2}):Q(\sqrt{-1})]=2$.)故有$[K:Q]=4$.

K/Q是有限可分，故有本原元,从而有：

$$S=\{\pm\frac{\sqrt{-1}-(-\sqrt{-1})}{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}\}=\{\pm\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\}.$$

取$c=1$即满足条件.即有：

$$Q(\sqrt{-1})(\sqrt{-2})=Q(\sqrt{-1}+\sqrt{2}).$$

2.7 有限域

设k是一个有限域，此时k的特征$char(k)=p$,(p为素数)即为p元域，$F_p\subset k$.换言之F_p是k的素子域,显然，k/F_p是有限扩张（即有限域的有限扩张）.

不妨设$[k;F_p]=n,\Rightarrow k=|F_p|^n=p^n$,记$k=F_q,F_q=p^n$.取$k$的一个代数闭包$k^a$,则$G=F_q^*$是一个$q-1$阶循环群，可以推出存在$\alpha\in F_q^*$,有$\alpha^{q-1}=1\Rightarrow\alpha^q=\alpha$(任意$\alpha\in F_q$).即$\alpha$是多项式$x^{q-1}-1$在$k^a$中的一个根.

$k=F_q\subset\{x^q-x$在k^a中的根$\}.\Rightarrow q=\#k\leq\#\{x^q-x$在$k^a$中的根$\}\leq q$,从而有$k=\{x^q-x$在$k^a$中的根$\}$,且$x^q-x$在$k$中是可分的，由于$f(x)=x^q-x\Rightarrow f'(x)=qx^{q-1}-1=-1,(f(x),f'(x))=1$.

设K,k均为有限域，且$k\subset K$,记$char(k)=p$,(p为素数)，由前述讨论可知：$\#k=p^m,\#K=p^n,(m,n\in Z_{\geq1})$.记$[K;k]=r\in Z_{\geq1}$,则$p^n=|K|=|k|^r=(p^m)^r\Rightarrow n=mr\Rightarrow m|n$.即若有限域有包含关系，其指数定有整除关系.

事实上，设K,k均为有限域，且$k\subset K$，则K/k是一个可分的单代数扩张.由于$|k|=p^m,|K|=p^n.\Rightarrow k=\{x^{p^m}-x$在$k^a$中的全部根$\}=x^{p^m}-x$在$F_q$上的分裂域,$\Rightarrow k/F_q$也是正规扩张$\Rightarrow K/k$也

是正规扩张，即有：

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & k^a \\
k \arrow[u] \arrow[ur, "\sigma"] & \\
F_q \arrow[u] \arrow[uur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

设$char(k)=p$,(p为素数).令：

$$\phi: k \to k \quad \alpha \mapsto \alpha^p,$$

则$\phi \in Aut_{F_p}(k)$是k到自身的一个自同构.

由于任意$\alpha,\beta \in k$,有：

$$\phi(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^p=\alpha^p+\beta^p=\phi(\alpha)+\phi(\beta),$$

且满足：

$$\phi(\alpha\beta)=(\alpha\beta)^p=\alpha^p\beta^p=\phi(\alpha)\phi(\beta),$$

ϕ是一个域同态，又由于其是$x^{p^m}-x$在F_p上的分裂域，ϕ是自同构，即$\phi \in Aut(k)$.

定义：称上述映射$\phi: k \to k$为k上的$Frobenious$自同构，记为$Frob_k$.

事实：ϕ是k到自身的F_p-自同构，任意的$\alpha \in F_p \Rightarrow \phi(\alpha)=\alpha^p=\alpha$.易知$Aut_{F_p}(k)$关于映射的合成是一个群.

首先有$\#Aut_{F_p}(k)=[k:F_p]=m, \phi \in Aut_{F_p}(k)=\{\sigma:\sigma$是$k$到自身的$F_p$-自同构$\}$.任意的$\alpha \in k$,

$$\phi(\alpha)=\alpha^p,$$

$$\phi^2(\alpha)=\phi(\phi(\alpha))=\phi(\alpha^p)=\phi(\alpha)^p=\alpha^{p^2},$$

即有:

$$\phi^r(\alpha)=\alpha^{p^r},$$

特别地，

$$\phi^m(\alpha)=\alpha^{p^m}=\alpha,(\alpha \in k)$$

即$\phi^m=id. \Rightarrow \circ(\phi)|m$.

又记$\circ(\phi)=r$,则$\phi^r=id$.于是任意的$\alpha \in k$,有$\phi^r=\alpha=id(\alpha) \Rightarrow \alpha^{p^r}=\alpha \Rightarrow k \subset \{x^{p^r}-x$在$k^a$中的全部根$\}$.

进而有$p^m \leq p^r \Rightarrow m \leq r|m \Rightarrow r=\circ(\phi)=m \Rightarrow Aut_{F_p}(k)=<\phi>=<Frob_{F_p}>$.

故$Aut_{F_p}(k)$是由$Frobenious$元生成的m阶循环群.

一般地，对于有限域扩张K/k,$char(k)=p$,(p为素数)，$Aut_k(K)=<Frob_K>=<\phi_K>$.

$$Frob_K: K \to K \quad \alpha \mapsto \alpha^{p^m}=\alpha^{|k|},$$

且有$\circ(\phi_K)=\#Aut_k(K)=[K:k]=\frac{n}{m}$.

故$Aut_k(K)$是一个$[K:k]$阶循环群.

2.8 不可分扩张

设 $K|k$ 是单代数扩张, $K = k(\alpha)$, α在k上极小多项式为$f(x) \in k[x]$. 设$deg(f) = n$,则$\{1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1}\}$ 是K的一组$k-$基,$K = k(\alpha) = k[\alpha]$.
取定k的代数闭包k^a,设$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$是$f(x)$在$k^a$中的全部互异根，$\alpha_i$的重数记为$r_i$, 则在$k^a$中，有

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_m)^{r_m},$$

其中$m = [K : k]_s$(可分次数)。K到k^a的$k-$嵌入共有m个，分别记为$\sigma_1, \cdots, \sigma_m$,取定$\alpha = \alpha_1$,不妨设$\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$,将$\sigma_i$延拓为$k^a$上的一个$k-$自同构，记之为$\tau_i$,于是有 $\tau_i|_K = \sigma_i$,

$$\tau_i(f(x)) = (x-\tau_i(\alpha_1))^{r_1} \cdots (x-\tau_i(\alpha_m))^{r_m},$$

即

$$\begin{aligned}&(x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_i)^{r_i} \cdots (x-\alpha_m)^{r_m}\\ &= (x-\alpha_i)^{r_1} \cdots (x-\tau_i(\alpha_m))^{r_m}\end{aligned}$$

由此可得$r_i = r_1 (i = 1, \cdots, m)$.即极小多项式的所有根在代数闭包$k^a$中有相同的重数。特征为零的域上不可约多项式无重根.因此若f有重根，则$char(k) = p$，其中p为某一素数。同时注意到由于f有重根，故$(f, f^{'}) \neq 1$,但由于f不可约且 $deg(f^{'}) < deg(f)$,$f^{'}$只能为零，这就说明f是形如$f(x) = g(x^p)$的多项式(其中$g(x) \in k[x]$,且由于$f(x)$为$k[x]$中不可约多项式，$g(x)$也是$k[x]$中不可约多项式.). 于是α^p是$g(x)$的一个根。重复上述过程，最终，我们可以找到最小的整数$r \geq 0$，使得α^{p^r}是$k[x]$中一个可分不可约多项式$h(x)$的根，且

$$f(x) = h(x^{p^r}).$$

设$h(x)$在k^a中的分解为$h(x) = (x-\beta_1)\cdots(x-\beta_s)$, 令$\gamma_i \in k^a (i = 1, \cdots, s)$使得$\gamma_i^{p^r} = \beta_i$, 设$t = r_1 = \cdots = r_m$ 则

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-\alpha_1)^t \cdots (x-\alpha_m)^t\\ &= (x^{p^r} - \gamma_1^{p^r}) \cdots (x^{p^r} - \gamma_s^{p^r})\\ &= (x-\gamma_1)^{p^r} \cdots (x-\gamma_s)^{p^r}\end{aligned}$$

由一元多项式分解的唯一性知$m = s, t = p^r$.
于是

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{p^r} \cdots (x-\alpha_s)^{p^r}.$$

由

$$[k(\alpha) : k] = deg(f) = s \cdot p^r = [k(\alpha) : k]_s \cdot p^r$$

知$[k(\alpha) : k]_s | [k(\alpha) : k]$,它们的商$\frac{[k(\alpha):k]}{[k(\alpha):k]_s} = p^r$称为$k(\alpha)|k$的**不可分次数**,记之为$[k(\alpha) : k]_i$.
令$\beta = \alpha^{p^r}$,则$h(\beta) = h(\alpha^{p^r}) = f(\alpha) = 0$,由于$h(x)$是首一不可约多项式，于是$h(x)$是$\beta$在$k[x]$上的

极小多项式.因$h(x)$无重根， $[k(\alpha^{p^r}):k]=[k(\alpha^{p^r}):k]_s=deg(h(x))=s$. 由域扩张的次数传递公式知$[k(\alpha):k(\alpha^{p^r})]=\frac{n}{[k(\alpha^{p^r}):k]}=\frac{n}{s}=p^r$.同样可得到

$$[k(\alpha):k(\alpha^{p^r})]_s=\frac{[k(\alpha):k]_s}{[k(\alpha^{p^r}):k]_s}=\frac{s}{s}=1.$$

于是$[k(\alpha):k(\alpha^{p^r})]_i=p^r$. 注意到$k(\alpha)=k(\alpha^{p^r})(\alpha)$,令$a=\alpha^{p^r}\in k(\alpha^{p^r})$, 则$x^{p^r}-a$是$\alpha$在$k(\alpha^{p^r})$上的极小多项式，该极小多项式只有一个根$\alpha$且重数为$p^r$.

定义：设k是域，$char(k)=p>0$, k^a是k的一个代数闭包，设$\alpha\in k^a$,如果有$r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$使得 $\alpha^{p^r}\in k$,则称α为k上的一个**纯不可分元**。

命题：设K/k是一个代数扩张，$char(k)=p>0$,则下列陈述等价：

(i)$[K:k]_s=1$.

(ii)K中任一元素均是k上纯不可分元。

(iii)对$\forall\alpha\in K$, α在k上的极小多项式均形如$x^{p^r}-a, a\in k, r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(iv)K是在k上添加若干个纯不可分元生成。

称满足上述命题中等价条件的域扩张K/k为一个**纯不可分扩张**。

证明. $(i)\Rightarrow(ii)$任取$\alpha\in K$,由$[k(\alpha):k]_s|[K:k]_s=1$知 $[k(\alpha):k]_s=1$,由此知α在k上极小多项式必形如 $x^{p^r}-a\in k[x]$,由此$\alpha^{p^r}\in k$,即α是k上纯不可分元。

$(ii)\Rightarrow(iii)$设$\alpha\in K$是k上的纯不可分元，即有$\exists r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, x^{p^r}-a\in k[x]$,使得$\alpha^{p^r}=a\in k$,不妨设$r$是满足该条件的最小的非负整数，令$f(x)=Irr(\alpha,k,x)$为$\alpha$在$k$上的不可约多项式(极小多项式)，则$f(x)|x^{p^r}-a$. 由于

$$x^{p^r}-a=x^{p^r}-\alpha^{p^r}=(x-\alpha)^{p^r},$$

$f(x)=(x-\alpha)^m$,其中$m=p^st\leq p^r, s\leq r, p\nmid t$.对$f(x)$进行二项式展开，

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-\alpha)^{p^st}\\&=(x^{p^s}-\alpha^{p^s})^t\\&=x^{p^st}-t\cdot\alpha^{p^s}x^{p^s(t-1)}+\cdots+(-1)^t\alpha^{p^st}\in k[x],\end{aligned}$$

因此$t\cdot\alpha^{p^s}\in k$,由$p\nmid t$,而$char(k)=p$得到t在k中可逆，于是$\alpha^{p^s}=b\in k$.由r的极小性得到$r\leq s$.又由上面知$s\leq r$,因此$r=s, t=1$.即 $f(x)=x^{p^r}-a$.即$x^{p^r}-a$是α在k上的不可约多项式。

$(iii)\Rightarrow(iv)$显然地.

$(iv)\Rightarrow(i)$任取K到k的某一代数闭包$\bar{F}$的 $k-$嵌入，设K由在k上纯不可分元$\{\alpha_i\}_{i\in I}$生成，则

$$f_i(X)=Irr(\alpha_i,k,X)$$

是α_i在k上的极小多项式，由于α_i是纯不可分元, 存在$r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, a\in k$使得$\alpha_i^{p^r}=a_i\in k$，因此$f_i(X)|(X^{p^r}-a_i)$,即$f(X)$只有唯一根$\alpha_i$,任意$K$到$\bar{F}$的$k$嵌入$\tau$把元素映到其共轭元，但任意$\alpha_i$的共轭元只有自身,于是$\tau$是恒等映射,即$[K:k]_s=1$. □

命题：设$K|k$是一个代数扩张，K_0为K中所有在k上可分的代数扩张的合，则$K_0|k$是可分扩张，$K|K_0$是纯不可分的。也称K_0为k在K中的可分闭包。

证明. $K|k$的可分子扩张的复合仍是可分扩张，于是$K_0|k$是可分扩张；若$char(k)=0$,则显然$K_0=K$,若$char(k)=p$,则任给$\alpha\in K$,存在非负整数n使得α^{p^n}在k上可分的，于是$\alpha^{p^n}\in K_0$,即$K|K_0$是纯不可分扩张。 □

推论:对于上述命题中$K|k$为有限扩张的情形,有

$$\begin{aligned}[K:k]_s &= [K_0:k],\\ [K:k]_i &= [K:K_0].\end{aligned}$$

证明.

$$\begin{aligned}[K:k]_s &= [K:K_0]_s\cdot[K_0:k]_s\\ &= 1\cdot[K_0:k]_s\\ &= [K_0:k].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[K:k]_i &= [K:K_0]_i\cdot[K_0:k]_i\\ &= [K:K_0]_i\cdot 1\\ &= [K:K_0].\end{aligned}$$

□

推论:设$K|k$是域的正规扩张，K_0是k在K中的可分闭包，则$K_0|k$也是正规扩张。

证明. 设k^a是k的一个代数闭包，任取K_0到k^a的一个$k-$嵌入σ,下面证明$\sigma(K_0)=K_0$,从而$K^0|k$是正规扩张.

σ可延拓到K上，记为$\tau:K\to k^a$.由于$K|k$是正规扩张，$\tau(K)=K$.任取$\alpha\in K_0$, α在k上极小多项式$P_\alpha(X)\in k[X]$无重根,而$\tau(\alpha)=\sigma(\alpha)$在$k$上极小多项式也是$P_\alpha(X)$，于是$\tau(\alpha)$在$k$上也可分，从而$\tau(\alpha)\in K_0$,即$\tau(K_0)\subseteq K_0\Rightarrow\sigma(K_0)=K_0$. □

推论:设$E|k$是域的一个有限扩张，$p=char(k)>0$,若$E^p\cdot k=E$,则$E|k$是可分的。反之，如果$E|k$是可分，则$E^{p^r}k=E(\forall r\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$.

证明. $\Rightarrow$:设E_0是k在E中的极大可分扩张，$E|k$是有限扩张，因此对$\forall\alpha\in E$,存在固定的$m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$使得$\alpha^{p^m}\in E_0$,于是$E^{p^m}\subseteq E_0$.

另一方面，

$$
\begin{aligned}
E^p k &= E \\
&\Rightarrow E^p = (E^p k)^p = E^{p^2} k^p \\
&\Rightarrow E^{p^2} k^{p+1} = E^p k = E \\
&\Rightarrow E^{p^2} k \supseteq E^{p^2} k^{p+1} = E \supseteq E^{p^2} k \\
&\Rightarrow E = E^{p^2} k
\end{aligned}
$$

如此归纳下去便得到$E = E^{p^n} k (n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$, 但$E^{p^m} k \subseteq E_0 k = E_0$,于是$E \subseteq E_0 \subseteq E$,即$E_0 = E$, $E|k$是可分的。
$\Leftarrow$:设$E|k$可分，则$E|E^p k$是可分.又对任意$\alpha \in E$,有$\alpha^p \in E^p \subseteq E^p k$，于是$E|E^p k$是纯不可分的.故$E = E^p k$.由上面证明可得对任意$r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, E^{p^r} \cdot k = E$. □

命题：设$K|k$是域的一个正规扩张，令$G = Aut_k(K)$是K到自身的$k-$自同构，又记

$$K^G = \{\alpha \in K | \sigma(\alpha) = \alpha, \forall \sigma \in G\}.$$

则K^G是$K|k$的中间域，且$K^G|k$是纯不可分的，$K|K^G$是可分的。又设K_0是k在K中的可分闭包，则$K_0 K^G = K, K_0 \cap K^G = k$.

证明. 任取$\sigma \in Aut_k(K), \sigma|_k = id$,于是$k \subseteq K^G$,即$K^G$是$K|k$的中间域。

(1)下证$K^G|k$是纯不可分的。
为此，任取$\alpha \in K^G$,取定k的一个代数闭包k^a，使得$k^a \supseteq k$. 任取$k(\alpha)$到k^a的$k-$嵌入$\sigma : k(\alpha) \to k^a$，将$\sigma$延拓到$K$上，记之为$\tau : K \to k^a$.由所设$K|k$是正规扩张，则$\tau(K) = K$.即$\tau$是一个$K$到自身的$k-$嵌入，于是$\tau \in G$, $\sigma(\alpha) = \tau(\alpha) = \alpha(\forall \alpha \in K^G)$. 这就说明$\sigma = id$,即$k(\alpha)$到自身的$k-$嵌入只有唯一的恒等映射。从而$[k(\alpha) : k]_s = 1$，$\alpha$是$k$上的纯不可分元，令$\alpha$跑遍$K^G$可得$K^G|k$是纯不可分扩张。
(2)证明$K|K^G$是可分的，方法用$Serge\ Lang : Algebra.P_{264}$Artin定理的证明。
(3)若K_0是k在K中的可分闭包，则$K_0|k$是可分的，于是 $K_0 \cap K^G|k$是可分的，又由于$K^G|k$是纯不可分的，于是 $K_0 \cap K^G|k$是纯不可分的.综上，$K_0 \cap K^G = k$.
(4)由$K|K^G$是可分的，$K|(K^G \cdot K_0)$也是可分的，又因 K_0是k在K中的可分闭包，故$K|(K^G K_0)$是纯不可分的，于是 $K = K^G K_0$. □

例:(1)设p是素数，p元域$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$中，任意$\alpha \in \mathbb{F}_p, \alpha^p = \alpha$,于是$\mathbb{F}_p^p = \mathbb{F}_p$.
(2)$F = \mathbb{F}_p[x]$中，因x不能表示出某个多项式的p 次方,故$F^p \neq F$.

定义:设k是一个域，
(1)当$char(k) = 0$时，称k是一个perfect域。
(2)当$char(k) = p > 0$时，如果$k^p = k$,则称k是一个perfect域。
推论:设k是一个perfect 域，则k的任意代数扩张都是可分扩张，k的任意代数扩张都是$perfect$.

证明. 设$K|k$是域的代数扩张，任取$\alpha \in K$,设E是$k(\alpha)|k$在K中的正规闭包，记$G = Aut_k(E)$,则$E^G|k$是纯不可分的.

对于任意$\beta \in E^G$有$\beta^{p^r} \in k$，即$\beta^{p^r} = a \in k$. 由于k是perfect,有$b \in k$使得$a = b^p$,于是$\beta^{p^{r-1}} = b \in k$,继续下去可得到$\beta \in k$,于是$E^G \subseteq k$，但又因 $E^G \supseteq k$,故$E^G = k$。这就得到$E|k$是可分的，α 在k上是可分的，由于α是任意的，于是$K|k$是可分扩张.

□

3 Galois理论

3.1 有限Galois理论

设$K|k$是域的一个代数扩张，令$G = Gal(K|k) = Aut_k(K)$,则G是一个群，称为$K|k$的Galois群。任取$H \leq G$(子群),令

$$K^H = \{\alpha \in K|\sigma(\alpha) = \alpha, \forall \sigma \in H\},$$

结论:$k \subseteq K^H \subseteq K, K^H$是一个域。
证:任取$\alpha, \beta \in K^H$,对任意$\sigma \in H, \sigma(\alpha) = \alpha, \sigma(\beta) = \beta$,于是

$$\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha)+\sigma(\beta) = \alpha+\beta \Longrightarrow \alpha+\beta \in K^H$$
$$\sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta) = \alpha\beta \Longrightarrow \alpha\beta \in K^H$$

若$\alpha \in K^H$,设$\beta = \alpha^{-1} \in K$, 由$\alpha\beta = 1$,得$\sigma(\alpha)\sigma(\beta) = \alpha\beta = 1$.于是$\sigma(\beta) = \beta$，即$\beta \in K^H$.综上，$K^H$是一个域。

定义:设$K|k$是一个域的代数扩张，如果$K|k$既是可分的，也同时是正规的，则称$K|k$是一个$Galois$**扩张**。
设$K|k$是一个n次$Galois$扩张，$n = [K:k]$.则$|Gal(K|k)| = [K:k]_s = [K:k]$.
定理(Artin)设k是一个域，$G \subseteq Aut(K)$是一个有限子群，令$k = K^G$,则$K|k$是一个$Galois$扩张，且其$Galois$群为$Gal(K|k) = G$.

证明. 任取$\alpha \in K$,设α的$G-$轨道为

$$G \cdot \alpha = \{\sigma_1\alpha, \sigma_2\alpha, \cdots, \sigma_r\alpha\}.$$

不妨设$\sigma_1 = id$,显然,对任意$\tau \in G, \tau G\alpha = G\alpha$,即

$$\{\tau\sigma_1\alpha, \tau\sigma_2\alpha, \cdots, \tau\sigma_r\alpha\}.$$

令$f(x) = (x-\sigma_1\alpha)\cdots(x-\sigma_r\alpha)$, 则

$$\begin{aligned} f^\tau(x) &= (x-\tau\sigma_1\alpha)\cdots(x-\tau\sigma_r\alpha) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

这就说明$f(x)\in K^G[x]=k[x]$.显然，由于$\sigma_1=id,f(\alpha)=0$. 而$\sigma_1\alpha,\cdots,\sigma_r\alpha$两两不同，故$f(x)$无重根，即可分。从而$\alpha$是$k$上的可分元，由$\alpha$的任意性，$K|k$是可分的。

又设α在k上的极小多项式为$P_\alpha(x)$,则$P_\alpha|f(x)$,于是α的$k-$共轭元必属于$\{\sigma_1\alpha,\cdots,\sigma_r\alpha\}\subseteq K$,于是$\sigma(K)\subseteq K$,即$K|k$是正规扩张.综上，$K|k$是$Galois$扩张.

下证$Gal(K|k)=G$.设$|G|=n$,首先由定义易知$G\subseteq Gal(K|k)$. 又由上述证明可知，对任意$\alpha\in K$,有

$$[k(\alpha):k]=degP_\alpha(x)\le degf(x)\le|G|=n,$$

由此下述引理可证得$[K:k]\le n$.于是$|Gal(K|k)|\le n$.综上，$Gal(K|k)=G$. □

引理:设$E|k$是可分代数扩张，若存在固定地正整数n使得对任意 $\alpha\in E,[k(\alpha):k]\le n$.则$E|k$是有限扩张，且$[E:k]\le n$.

证明. 不妨设m是k的单代数扩张的最大次数，即有$\alpha\in K$,使得 $[k(\alpha):k]=m$,且$\forall\beta\in K,[k(\beta):k]\le m$. 下面说明$K=k(\alpha)$。
若不然，存在$\beta\in K-k(\alpha)$,由本原元定理，存在$\gamma\in K$使得$k(\alpha,\beta)=k(\gamma)$.于是

$$k\subseteq k(\alpha)\subsetneqq k(\alpha)(\beta)=k(\gamma).$$

由$k(\gamma)|k$是单代数扩张，$[k(\gamma):k]\le m$,这与$k(\alpha)\subsetneqq k(\gamma)$矛盾！故$K=k(\alpha)$,进而$[K:k]=m\le n$. □

引理:设$K|k$是Galois扩张，$G=Gal(K|k)$,则$K^G=k$.

证明. 显然，$k\subseteq K^G$.下证$K^G\subseteq k$.

对任意$\alpha\in K^G$,任取$k(\alpha)$到K的一个$k-$嵌入，则σ可延拓为$k-$嵌入$\tau:K\to K$, 即$\tau\in G,\tau|_{k(\alpha)}=\sigma$.由所设 $\sigma(\alpha)=\tau(\alpha)=\alpha(\forall\alpha)\in K^G$.于是$\sigma=id$.由$k(\alpha)|k$是可分扩张，$[k(\alpha):k]=[k(\alpha):k]_s=1$.即$k(\alpha)=k$,由于$\alpha\in K^G$是任意，故$K^G\subseteq k$.综上，$K^G=k$. □

Galois理论基本定理(有限扩张情形).设$K|k$是域的n次$Galois$扩张,其$Galois$群为
$G=Gal(K|k)$,用S表示所有k和K的中间域组成的集合，J表示G的所有子群组成的集合。令

$$\begin{aligned}\phi:&S\to J\\ &E\mapsto Gal(K|E)\end{aligned}$$

则(1)ϕ是一个双射，特别地，$K^{Gal(K|k)}=k$.
(2)设$k\subseteq E_1\subseteq E_2\subseteq K$,则对应地，有$\phi(E_1)\supseteq\phi(E_2)$.反之，如果 $1\le H_1\le H_2\le G$,则$\phi^{-1}(H_1)\supseteq\phi^{-1}(H_2)$,
(3)对于中间域E,$k\subseteq E\subseteq K$, $E|k$是$Galois$扩张当且仅当$\phi(E)\lhd G$,此时

$$Gal(E|k)\cong G/\phi(E)\cong G/Gal(K|E).$$

(4)设有中间域$k \subseteq E_i \subseteq K(i=1,2)$，则

$$\phi(E_1 \cap E_2) =< \phi_(E_1) \cup \phi(E_2) >$$

$$\phi(E_1E_2) = \phi(E_1) \cap \phi(E_2)$$

(5)设中间域$k \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq K$,则 $E_2|E_1$是$Galois$的当且仅当$\phi(E_2) \triangleleft \phi(E_1)$.此时有

$$Gal(E_2|E_1) \cong \phi(E_1)/\phi(E_2) = Gal(K|E_1)/Gal(K|E_1).$$

证明. (1)任取$E \in S$,由于$K|k$是Galois扩张，$K|E$是Galois扩张，即$Gal(K|E) \in J$，从而ϕ是良定义的。

下证ϕ是单射。设对于中间域$k \subseteq E_i \subseteq bK(i=1,2)$,若有$\phi(E_1) = \phi(E_2)$,即

$$Gal(K|E_1) = Gal(K|E_2).$$

由上一引理得,$E_1 = K^{Gal(K|E_1)}$, $E_2 = K^{Gal(K|E_2)}$.由此$E_1 = E_2$,即ϕ是单射.

下证ϕ是满射。任取$H \leq G$,令$E = K^H$,此时由$Artin$定理，$K|E$是Galois扩张，且$Gal(K|E) = H$,显然E是中间域，且$\phi(E) = H$.故ϕ是满射.

综上，ϕ是双射。

(2)若$k \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq K$, $\phi(E_1) = Gal(K|E_1), \phi(E_2) = Gal(K|E_2)$. 任取$\sigma \in Gal(K|E_2)$, 则$\sigma|_{E_2} = id$,从而$\sigma|_{E_1} = id$.于是$\sigma \in Gal(K|E_1)$.这便是$\phi(E_1) \supseteq \phi(E_2)$.

同样可得:若$1 \leq H_1 \leq H_2 \leq G$,则$\phi^{-1}(H_1) \supseteq \phi^{-1}(H_2)$.

(3)若$k \subseteq E \subseteq K$,且$E|k$是正规的，令

$$\psi : Gal(K|k) \to Gal(E|k)$$

$$\sigma \mapsto \sigma|_E,$$

则显然ψ是群同态，下证ψ是满射.任取$\sigma \in Gal(E|k)$,将σ延拓为K到k的代数闭包k^a的$k-$嵌入τ,由于$K|k$是正规扩张，故$\tau(K) = K$,从而$\tau \in Gal(K|k)$,于是$\psi(\tau) = \sigma$,即ψ是满射。

另一方面,

$$ker(\psi) = \{\sigma \in Gal(K|k) | \psi(\sigma) = id\} \subseteq Gal(K|E).$$

又$\forall \sigma \in Gal(K|E)$,则$\psi(\sigma) = \sigma|_E = id$,于是$Gal(K|E) \subseteq Ker\psi$.故$Gal(K|E) = ker\psi$.此时，$Gal(K|E)$是$Gal(K|k)$的正规子群，且由群同态基本定理得

$$Gal(K|k)/Gal(K|E) \cong Gal(E|k).$$

反过来，若$E|k$不是正规扩张，则存在E到K的$k-$嵌入λ使得$\lambda E \neq E$,将λ延拓成K的$k-$子同构,仍记为λ(因$K|k$是正规扩张,$\lambda(K) = K$),于是

$$Gal(K|\lambda E) = \lambda Gal(K|E)\lambda^{-1}.$$

$Gal(K|\lambda E)$与$Gal(K|E)$共轭但不相同(因对应的中间域不同)，这就说明$Gal(K|E)$不是$Gal(K|k)$的正规子群。

(4)若中间域$k \subseteq E_i \subseteq K(i=1,2)$，则

$$\begin{aligned}&E_1 \supseteq E_1 \cap E_2, E_2 \supseteq E_1 \cap E_2\\ \Rightarrow&\psi(E_1) \subseteq \psi(E_1 \cap E_2), \psi(E_2) \subseteq \psi(E_1 \cap E_2)\\ \Rightarrow& < \psi(E_1) \cup \psi(E_2) > \subseteq \psi(E_1 \cap E_2)\end{aligned}$$

下证

$$\psi(E_1 \cap E_2) \subseteq \psi(E_1) \cup \psi(E_2) := H_0 = H_1 \cup H_2.$$

由于$H_0 \supseteq H_1, H_0 \supseteq H_2$,

$$\begin{aligned}&K^{H_0} \subseteq K^{H_1}, K^{H_0} \subseteq K^{H_1}\\ &\Rightarrow H_0 \subseteq K^{H_1} \cap K^{H_2} = E_1 \cap E_2\\ &\Rightarrow H_0 \supseteq Gal(K|E_1 \cap E_2) = \psi(E_1 \cap E_2)\\ &\Rightarrow < \psi(E_1) \cup \psi(E_2) > \supseteq \psi(E_1 \cap E_2)\\ &\Rightarrow \psi(E_1 \cap E_2) = < \psi(E_1) \cup \psi(E_2) >\end{aligned}$$

(5)这是(3)的直接推论：运用(3)于域扩张$E_1 \subseteq E_2 \subseteq K$. □

3.2 Galois理论的若干应用

3.2.1 关于多项式根式解的Galois定理

例.$f(x) = x^4 - 6x^2 + 7 \in \mathbb{Q}[x]$.
令$t = x^2$, $f(x) = 0 \Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = 3 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{2}}$.考虑下列域扩张

$$k := \mathbb{Q} \subseteq k_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq k_2 := \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3+\sqrt{2}}) \subseteq k_3 := \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3+\sqrt{2}})(\sqrt{3-\sqrt{2}})$$

则

$$k_3 = k_2(\sqrt{3-\sqrt{2}}), k_2 = k_2(\sqrt{3+\sqrt{2}}), k_1 = k(\sqrt{2}),$$
$$(\sqrt{3-\sqrt{2}})^2 \in k_2, (\sqrt{3+\sqrt{2}})^2 \in k_1, (\sqrt{2})^2 \in k = \mathbb{Q}.$$

定义:设k是一个域，$f(x) \in k[x]$,称f在k上**可根式解**：如果存在k的扩域序列

$$k \subseteq k_1 \subseteq \cdots \subseteq k_r$$

使得k_r包含f的分裂域，且k_r是k的一个根式扩张，即有

$$k_r = k(\alpha_1, \cdots, \alpha_r), k_i = k_{i-1}(\alpha_i),$$

且$\alpha_i^{n_i} \in k_{i-1}$对某一正整数$n_i$成立.
定义：设$K|k$是一个域扩张.如果有域扩张序列

$$k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq \cdots \subseteq k_r = K$$

及$n_1,\cdots,n_r\in\mathbb{Z}_{>0}$使得 $K=k(\alpha_1,\cdots,\alpha_r),k_i=k_{i-1}(\alpha_i)$且$\alpha_i^{n_i}\in k_{i-1}(i=1,\cdots,r)$,则称$K$是$k$的一个根式扩张。若记$n=n_1\cdots n_r$,则 $\alpha_i^n\in k_{i-1}$,此时称K是k的$n-$**根式扩张**(n不是唯一的).

性质:设$K|E$和$E|k$均是根式扩张，则$K|k$也是根式扩张。

证明. 由$K|E$和$E|k$是根式扩张，有

$$k=k_0\subseteq k_1\subseteq\cdots\subseteq k_r=E,$$

满足$k_i=k_{i-1}(\alpha_i),\alpha_i^n\in k_{i-1}$.

$$E=E_0\subseteq E_1\subseteq\cdots\subseteq E_s=K,$$

满足$E_i=E_{i-1}(\beta_i),\beta_i^m\in E_{i-1}$.于是

$$k=k_0\subseteq k_1\subseteq\cdots\subseteq k_r=E=E_0\subseteq E_1\subseteq\cdots\subseteq E_s=K$$

就满足$K|k$的根式扩张的条件。即$K|k$是根式扩张。 □

定理:设$K|k$是域的有限扩张，且L是$K|k$的一个正规闭包(选定k的一个代数闭包k^a).如果$K|k$是根式扩张，则$L|k$也是根式扩张.

证明. 由$K|k$是有限扩张，则设$K=k(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$.对$r$用归纳法。

当$r=1$时，简记$K=k(\alpha)$,因为L是$K|k$的正规闭包，故$L=k(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$,其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是$\alpha$的全部$k-$共轭元。由所设，$K|k$是一个$n-$根式扩张，于是$\alpha^n=a\in k$(对某个$a\in k$),即$\alpha$是$k$上多项式$x^n-a$的一个根，于是$P_\alpha(x)|(x^n-a)$,故$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$都是$x^n-a$的根，即$\alpha_i^n=a\in k$. $L|k$是$n-$根式扩张。

现对于$K=k(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$,记$E=k(\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1})$,并设$E|k$的正规闭包为$L_1$,则由$E$是$k$的根式扩张，及归纳假设$L_1|k$也是根式扩张，又设$L$是$K|k$的正规闭包，则$L=L_1(\beta_1,\cdots,\beta_s)$,其中$\beta_1=\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$是$\alpha_r$的全部$k-$共轭元。

任取β_i,令

$$\sigma_i:k(\alpha_r)\to k^a$$
$$\alpha_r\mapsto\beta_i$$

则σ_i是$k(\alpha_r)$到k^a的一个$k-$嵌入，σ可延拓成L到k^a的一个$k-$嵌入τ_i，由所设$K|k$是根式扩张，而$K=E(\alpha_r)$,于是 $\alpha_r^n=\gamma\in E$对于某一$n\in\mathbb{Z}_{>0}$成立。由于$E\subseteq L_1$，而L_1是一正规闭包，故

$$(\tau_i(\alpha_r))^n=\tau_i(\alpha_r^n)=\tau(\gamma)=\tau_i|_{L_1}(\gamma)\in L_1.$$

于是$\beta_i^n\in L_1(i=1,\cdots,s)$. 即$L|L_1$是根式扩张，又$L_1|k$是根式扩张，故$L|k$是根式扩张。 □

定义:设G是群，若存在G的子群列

$$G=G_0\supseteq G_1\supseteq\cdots\supseteq G_r=\{1\},$$

使得$G_{i+1} \trianglelefteq G_i$,且$G_i/G_{i-1}$是Abel群，则称$G$是可解群.

定理:(Galois)设k是一个域，$char(k)=0, f(x)\in k[x]$，K是$f(x)$在k上的分裂域。则f可根式解当且仅当$Gal(K|k)$是可解群.

证明. $\Rightarrow$)由f可根式解，K包含于某个k的根式扩域E中，又取$E|k$的正规闭包$L|k$,由前述定理可知$L|k$也是根式扩张。

不妨设$L|k, E|k$均是$n-$次根式扩张。即有域的扩张序列

$$k=k_0\subseteq k_1\subseteq\cdots\subseteq k_r=E\subseteq L,$$

其中$k_i=k_{i-1}(\alpha_i), \alpha_i^n\in k_{i-1}(i=1,\cdots,r), L=E(\alpha), \alpha^n\in E.$

记$G=Gal(L|k)$为$L|k$的Galois群，且记$H_i=Gal(L|k_i)(i=1,\cdots,r)$,即有子群序列

$$\{1\}\subseteq H_r\subseteq H_{r-1}\subseteq\cdots\subseteq H_1\subseteq H_0=G.$$

为简记，设k包含n次本原单位根ξ_n。

考虑扩张k_i/k_{i-1},由于$k_i=k_{i-1}(\alpha_i), \alpha_i^n\in k_{i-1}$,又$\xi_n\in k\in k_{i-1}$. 则由$Kummer$扩张结果可知,$k_i/k_{i-1}$是一个循环扩张(即$Gal(k_i|k_{i-1})$是循环群)。由$Galois$理论知$H_i\triangleleft H_{i-1}$(正规子群),且

$$H_{i-1}/H_i\cong Gal(k_i|k_{i-1})$$

是循环群。即$G=Gal(L|k)$是一个可解群，G的商群$Gal(K|k)$也是可解群($Gal(K|k)\cong G/Gal(L|K)$).

$\Leftarrow$)设$Gal(K|k)$是一个可解群，则有子群序列

$$G=Gal(K|k)=G_0\supseteq G_1\supseteq\cdots\supseteq G_r=\{e\}.$$

其中$G_{i+1}\triangleleft G_i$,且$G_i/G_{i+1}(i=0,\cdots,r-1)$是Abel群. 记$n=[K:k]$,且设$k$包含一个$n$次本原单位根$\xi_n$. 记$k_i=K^{G_i}$,则由$Galois$理论，可得$K$的子群序列

$$k=k_0\subseteq k_1\subseteq\cdots\subseteq k_r=k,$$

且$k_i|k_{i-1}$是Abel扩张(因为$Gal(k_i|k_{i-1})\cong G_{i-1}/G_i$是Abel群). 又由所设$\sigma^n=id(\forall\sigma\in G)$,故每个$k_i/k_{i-1}$均为指数为$n$的Abel扩张，由Kummer理论可知$k_i|k_{i-1}(i=1,2,\cdots,r)$是一个根式扩张,从而$K|k$是根式扩张，即$f$可根式解。 □

Kummer理论：若有根式扩张$k(\sqrt[n]{\alpha})(\alpha\in k)$(Kummer扩张)，且$\xi_n\in k$,则Kummer扩张一定是循环扩张。

3.2.2 古希腊四大数学难题

1.化圆为方。 2.倍立方。 3.三等分角。 4.正多边形的作图问题。

方法：作图工具只有直尺与圆规.

(1)直线相交:l_1与l_2相交，

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$$

其中$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2$.若有交点$P$,则$P \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
(2)直线与圆相交:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0 \end{cases}$$

其中$a_1, b_1, c_1, c, d, e \in \mathbb{Q}$. 若有交点$P$,则$P = (x_0, y_0) \in \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}) \times \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}), 0 \leq \Delta \in \mathbb{Q}$.
命题:设$\alpha \in R$,则α可尺规构作当且仅当有域扩张序列

$$\mathbb{Q} = k_0 \subseteq k_1 \subseteq \cdots \subseteq k_r,$$

使得$[k_i : k_{i-1}] \leq 2 (i = 1, \cdots, r)$,且$\alpha \in k_r$.特别地,$\alpha \in k_r$且$[k_r : \mathbb{Q}] = 2^s (s \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$,即$\alpha$必为代数数。

问题1:化圆为方(π=正方形的面积?)

解：无解.原因:π是超越数。如若不然，则有$\mathbb{Q}$的某个2^s次扩域k,使得$\pi \in k$,由此得到π是代数数，矛盾!

问题2：倍立方(2=正方形的体积?)

解：无解.问题等价于$\sqrt[3]{2}$是否尺规构作.由于$\sqrt[3]{2}$是3次代数数，$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$,而3不是2的幂，从而$\sqrt[3]{2}$不可尺规构作。

问题3：三等分角。

首先，θ可尺规构作当且仅当$cos\theta, sin\theta$均可尺规构作.
解：一般情况下无解。例$\beta = 60^0, \theta = \frac{\beta}{3} = 20^0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= cos60^0 = cos(3\theta) = cos(2\theta + \theta) \\ &= cos2\theta cos\theta - sin2\theta sin\theta \\ &= (2cos^2\theta - 1)cos\theta - 2sin^2\theta cos\theta \\ &= 2cos^3\theta - cos\theta - 2cos\theta + 2cos^3\theta \\ &= 4cos^3\theta - 3cos(\theta) \end{aligned}$$

即$cos\theta$是多项式$f(x) = 8x^3 - 3x - 1$的根，而$f(x)$在$\mathbb{Q}$上不可约，于是$[\mathbb{Q}(cos\theta) : \mathbb{Q}] = 3$,但3不是2的方幂，故$cos\theta$不可尺规作出。

问题4：正多边形作图问题。

解:正n边形可尺规作出当且仅当$\frac{2\pi}{n}$可尺规作出，又等价于 $cos\frac{2\pi}{n}, sin\frac{2\pi}{n}$可尺规作出。
令$\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}} = cos\frac{2\pi}{n} + isin\frac{2\pi}{n} (n > 2)$,则$\xi_n^{-1} = cos\frac{2\pi}{n} - isin\frac{2\pi}{n}$.于是

$$cos\frac{2\pi}{n} = \frac{\xi_n + \xi_n^{-1}}{2} \in \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1}) \subseteq R.$$

由$\xi_n \notin \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})$得$\mathbb{Q}(\xi_n) \supsetneqq \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})$,于是

$$[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})] \geq 2.$$

又因ξ_n是多项式$f(x) = x^2 - (\xi_n + \xi_n^{-1})x + 1 \in \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})[x]$的根，故

$$[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})] \leq 2.$$

综上，

$$[\mathbb{Q}(\xi_n):\mathbb{Q}(\xi_n+\xi_n^{-1})]=2.$$

定理:正n边形可尺规构作当且仅当$\phi(n)$(欧拉函数)是2的幂。

证明. 正n边形可尺规构作$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{n}$可尺规作出$\Leftrightarrow cos\frac{2\pi}{n}, sin\frac{2\pi}{n}$可尺规作出 $\Leftrightarrow [\mathbb{Q}(cos\frac{2\pi}{n}):\mathbb{Q}]$是2的幂。而

$$\begin{aligned}\phi(n)&=[\mathbb{Q}(\xi_n):\mathbb{Q}]\\&=[\mathbb{Q}(\xi_n):\mathbb{Q}(cos\frac{2\pi}{n})][\mathbb{Q}(cos\frac{2\pi}{n}):\mathbb{Q}]\\&=2[\mathbb{Q}(cos\frac{2\pi}{n}):\mathbb{Q}].\end{aligned}$$

由此即知命题成立。 □

3.3 域的无限Galois扩张

设$K|k$是无限Galois扩张，一般我们就取K是k的代数闭包。记$G=Gal(K|k)$,对于中间域$k\subset E\subset K$记$H_E=Gal(K|E)$.定义集合 $\mathcal{I}=\{E:E$是$K|k$的中间域，且$E|k$是有限Galois扩张$\}$. $\mathcal{N}=\{H:H=Gal(K|E),E\in\mathcal{I}\}$.

命题1：(1) $\cap_{H\in\mathcal{N}} H=\{e\}$.(2) $\cap_{H\in\mathcal{N}}\sigma H=\{\sigma\}(\forall\sigma\in G)$.

证明：(1)任取$\sigma\in\cap_{H\in\mathcal{N}}H$,对任意$\alpha\in K$，设$E$是$k(\alpha)|k$在$K|k$中的正规闭包，则$E\in\mathcal{I},H_E=Gal(K|E)\in\mathcal{N}$,特别地$\sigma\in H_E$,对$\alpha\in E,\sigma(\alpha)=\alpha$,由$\alpha$的任意性，$\sigma=id$,即$\sigma$在$K$是恒等映射.

(2)

$$\begin{aligned}\forall\tau\in\cap_{H\in\mathcal{N}}\sigma H&\Rightarrow\tau\in\sigma H(\forall H\in\mathcal{N})\\&\Rightarrow\sigma^{-1}\tau\in H(\forall H\in\mathcal{N})\\&\Rightarrow\sigma^{-1}\tau\in\cap_{H\in\mathcal{N}}=e\\&\Rightarrow\sigma=\tau\\&\Rightarrow\cap_{H\in\mathcal{N}}\sigma H=\{\sigma\}(\forall\sigma\in G).\end{aligned}$$

命题2：设$H_1,H_2\in\mathcal{N}$,则$H_1\cap H_2\in\mathcal{N}$.

证明: 由$\mathcal{N}$的定义，存在$E_1,E_2\in\mathcal{I}$使得$H_1=Gal(K|E_1),H_2=Gal(K|E_2)$.由于$E_1E_2|k$是有限Galois扩张$E_1E_2\in\mathcal{I}$.由Galois理论知$H_1\cap H_2=Gal(K|E_1E_2)$于是$H_1\cap H_2\in\mathcal{N}$.

定义G上的$Krull$拓扑：规定$\{\sigma H:\sigma\in G,H\in\mathcal{N}\}$为$G$上的一个拓扑基。即$G$中子集$H'$为开集当且仅当$H'$为上述拓扑基元素之并。

定理:G在上述拓扑基下为Hausdorff,紧致且完全不连通的拓扑群。

证明:(i)完全不连通(能写成两个非空开子集的不交并，连通子集只有单点集)。

设$X\subset G$,且$|X|\geq 2$,取$\sigma,\tau\in X$,且$\sigma\neq\tau$. 由$\cap_{H\in\mathcal{N}}\sigma H=\{\sigma\}$知$\tau\notin\cap_{H\in\mathcal{N}}\sigma H$,从而$\exists H_0\in\mathcal{N}$使得$\tau\notin\sigma H_0$,即 $\tau\in G-\sigma H_0$ 注意到

$$X=X\cap G=X\cap(\sigma H_0\cup(G-\sigma H_0))=(X\cap\sigma H_0)\cup(X\cap(G-\sigma H_0))$$

G关于子群H有陪集分解$G=\cup_{i\in I}\sigma_i H$,由此知若$H$是开集，由于$G$是拓扑群，对任意$\sigma\in G$,$\sigma H$为开集，从而$H$为其所有非平凡陪集的补集，为闭集。注意到$\sigma\in X\cap\sigma H_0,\tau\in X\cap(G-\sigma H_0)$,且$\sigma H_0,G-\sigma H_0$均为开集，这就得到$X$是完全不连通的。特别地，$G$是完全不连通的，此处还可以看出, G是hausdorff空间。

另证:若$\sigma,\tau\in G$且$\sigma\neq\tau$,则存在有限Galois子扩张$E|k$使得$\sigma|_E\neq\tau|_E$(注意到任取$x\in K$,必存在包含x的$K|k$的有限Galois子扩张$E|k$,例如E取$k(x)|k$在$K|k$中的代数闭包。若对任意有限Galois子扩张$E|k$有$\sigma|_E=\tau|_E$,则对任意$x\in K,\sigma(x)=\tau(x)$.矛盾！)因此$\sigma Gal(K|E)\neq\tau Gal(K|E)$,因此$\sigma Gal(K|E)\cap\tau Gal(K|E)=\emptyset$.
对于G的紧性,这里先省略证明。

注:设G关于闭子群H有陪集分解$G=\cup_{i\in I}\sigma_i H$，则由$G$的紧致性,$H$是$G$的开子集当且仅当$(G:H)$有限。
定理：设$H\leq G$,记$H^{'}=Gal(K|K^H)$,则$H^{'}=\bar{H}$(H在G中的闭包.)
证明:显然，$H\leq H^{'}$.下证$H^{'}$为G中的闭集,只需证$G-H^{'}$为开集.

任取$\sigma\in G-H^{'}$,必有$\alpha\in K^H$使得$\sigma(\alpha)\neq\alpha$.对于$\alpha\in K$,有$E\in\mathcal{I}$使得$\alpha\in E$,于是取$H_0=Gal(K|E)\in\mathcal{N}$.对于$\forall\tau\in H_0$,有$\tau\alpha=\alpha$,于是$\sigma(\tau\alpha)=\sigma\alpha\neq\alpha$,即

$$\sigma\tau(\alpha)\neq\alpha\Rightarrow\sigma\tau\in G-H^{'}\Rightarrow\sigma H_0\in G-H^{'}\Rightarrow G-H\quad is\quad open\Rightarrow H^{'}is\quad closed.$$

下证$\bar{H}=H^{'}$.需证$\forall\sigma\in H^{'},N\in\mathcal{N}$.都有$\sigma N\cap H\neq\emptyset$.
由定义，取$E\in\mathcal{I}$使得$N=Gal(K|E)$,令$H_0=\{\rho|_E:\rho\in H\}$,于是$K^{H_0}=K^H\cap E$,由有限Galois基本定理到$H_0=Gal(E|K^H\cap E)$,由$\sigma\in H^{'},\sigma|_{K^H}=id$,因此$\sigma|_E\in H_0$.存在$\rho\in H$使得$\rho|_E=\sigma|_E$.于是$\sigma^{-1}\rho\in Gal(K|E)=N$，即$\rho\in\sigma N\cap H.\sigma N\cap H\neq\emptyset$.

命题：设$K|k$是无限Galois扩张，任取$K|k$的一个中间域，则$H_E=Gal(K|E)$是G的一个闭子群。
证：$H_E\leq G$,则$K^{Gal(K|E)}=E\Rightarrow H_E=Gal(K|E)=Gal(K|K^{H_E})=\bar{H}_E$.
无限Galois扩张基本定理:设$K|k$是无限Galois扩张，令$G=Gal(K|k)$, $\mathcal{I}_0=\{E:E$是$K|k$的中间域$\}$, $\mathcal{N}_0=\{H|H$是G的子群$\}$.定义映射

$$\varphi:\mathcal{I}_0\to\mathcal{N}_0$$
$$E\mapsto Gal(K|E)$$

则φ是一个双射。
(1)$E|k$是Galois$\Leftrightarrow$ $H_E=Gal(K|E)\triangleleft G$.
(2)对于$E\in\mathcal{I}_0,[E:k]\leq+\infty\Leftrightarrow H_E=Gal(K|E)$是$G$的开子群。(若$H$是开子群，则任意$\sigma\in G$,$\sigma H$也是开子群，从而由陪集分解 $G=\cup_{i\in I}\sigma_i H$,知$H$也是闭子群.此时再由$G$的紧致性知$[G:H]\leq+\infty$.反之，若已知$H$是闭集，则由$[G:H]\leq+\infty$知$H$是开集)。

3.4 例题

例F_p(p是素数)。例1：分圆域$K=Q(\zeta_n)$,其中$\zeta_n=e^{2i\pi/n}=\cos 2\pi/n+i\sin 2\pi/n\in C$. ζ_n是n次本原单位根，也是代数元. 问：K/Q是否为Galois扩张?

答：由$char(Q) = 0$知,K/Q是可分的。ζ_n是$x^n - 1$的根. 事实上，K是$x^n - 1$在Q上的分裂域，即K/Q是正规的，因此K/Q是$Galois$扩张。记其$Galois$群为$G = Gal(K/Q)$。

(1)设ζ_n在Q上的极小多项式为$f(x)$，则$f(x) \mid x^n - 1$。
任取$\sigma \in G$，$\sigma(\zeta_n)$⇒是ζ_n的一个共轭元。且$\sigma(\zeta_n)$=$(\zeta_n)^k$, 对某个$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

$$\sigma(\zeta_n)\text{的阶} = r \Rightarrow \sigma(\zeta_n) = 1 \Rightarrow \sigma(\zeta_n^r) = 1 \Rightarrow \zeta_n^r = \sigma(1) = 1 \Rightarrow r = n.$$

注：ζ 是n次本原单位根⇔ ζ的阶是n,即$\zeta \in \mathbb{C}^*$且是$\mathbb{C}^*$中的一个阶为n的数，比如上述ζ_n.

$$\circ(\sigma(\zeta_n)) = \circ(\zeta_n^k) = \frac{n}{(n,k)} = n \Leftrightarrow (n,k) = 1.$$

即对$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$,$\zeta_n^k$是$n$次本原单位根⇔$(n,k) = 1$. 于是，$f(x) = \prod\limits_{k=1,(n,k)=1}^{n} (x - \zeta_n^k)$
显然，$deg(f(x)) = \phi(n)$(Euler函数)称上述$f(x)$为n次分圆多项式，常记之为$f(x) \doteq \phi_n(x)$, 特别地，当$n = p$是一个素数时，

$$\phi_p(x) = \prod_{k=1,(k,p)=1}^{p} (x - \zeta_p^k) = \prod_{k=1}^{p-1} (x - \zeta_p^k) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \ldots + x + 1.$$

$\#Gal(K/Q) = [K : Q] = deg(\phi_n(x)) = \phi_n(x)$.(比如$n = p$素数时，$[Q(\zeta_p) : Q] = p - 1$).

(2)计算$Gal(K/Q)$.

$\forall \sigma \in Gal(K/Q)$, $\sigma : K = Q(\zeta_n) \longrightarrow Q(\zeta_n)$. 事实：$\sigma(\zeta_n)$必是$n$次本原单位根，故$\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^k, k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. 而$\sigma \longrightarrow \overline{k}$建立了Gal(K/Q)到$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$的映射.
结论：$K = Q(\zeta_n), G$同上，有$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \backsimeq G = Gal(K/Q)$.

证明. 令

$$\begin{aligned} \psi : (Z/nZ)^* &\longrightarrow Gal(K/Q) \\ \overline{k} &\longmapsto \sigma_k : \zeta_n \longmapsto \zeta_n^k. \end{aligned}$$

群同态：即证明$\psi(\overline{kl}) = \psi(\overline{kl}) = \sigma_k \sigma_l$.

$$\sigma_{kl}(\zeta_n) = \zeta_n^{kl} = (\zeta_n^l)^k = \sigma_k(\sigma_l(\zeta_n)) = (\sigma_k \circ \sigma_l)(\zeta_n).$$

即$\sigma_{kl} = \sigma_k \circ \sigma_l$. 也即$\psi(\overline{kl}) = \psi(\overline{k}) \circ \psi(\overline{l})$
ψ是单的：阶数一样，故证明是双射只需证单。
设$\overrightarrow{k} \in ker\psi$,则$\psi(\overline{k}) = \sigma_k = id$. 即

$$\sigma_k(\zeta_n) = \zeta_n^k = \zeta_n \Rightarrow \zeta_n^{k-1} = 1 \Rightarrow n|(k-1) \Rightarrow k \equiv 1 \pmod{n},$$

即$\overline{k} = \overline{1}$. ⇒ $ker(\psi) = \{\overline{1}\}$.
又$\#Gal(K/Q) = \phi(n) = \#(Z/nZ)^*$,故$\phi$也是满的，从而有$G = Gal(K/Q) \backsimeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. □

$O_k = Z[\zeta_n] \to PID$? 例：$K = Q(\sqrt{-1}, \sqrt{2})|Q$是$Galois$扩张？
(1)K/Q是否均$Galois$扩张？
$charQ = 0 \Rightarrow K/Q$可分。
$\alpha = \sqrt{-1}, \beta = \sqrt{2}$。它们在$Q$上的极小多项式分别是:$P_\alpha(x) = x^2+1$, 根为：$\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$;$P_\beta(x) = x^2-2$,根为：$\sqrt{2}, -\sqrt{2}$. $K = Q(\pm\sqrt{-1}, \pm\sqrt{2})$是$\{P_\alpha, P_\beta\}$在Q上的分裂域.$\Rightarrow$ K/Q是正规的,从而K/Q是Galois的，记$G = Gal(K/Q)$. 于是$\#G = [K : Q] = 4, Q \subset Q(\sqrt{-1}) \subset Q(\sqrt{-1}, \sqrt{2}) = K$
(2)计算Galois群
$\forall \sigma \in G, K = Q(\alpha, \beta), \sigma(\alpha) \in \{\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\}, \sigma(\beta) \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.
确定：$\sigma : (\alpha, \beta) \longmapsto (\sigma(\alpha), \sigma(\beta))$, $\sigma : (\sqrt{-1}, \sqrt{2}) \longmapsto (\sigma(\sqrt{-1}), \sigma(\sqrt{2}))$.有下列四种情形：

$$a : \sqrt{-1} \longmapsto \sqrt{-1}, \sqrt{2} \longmapsto \sqrt{2}, \text{此时}\sigma = id;$$

$$b : \sqrt{-1} \longmapsto \sqrt{-1}, \sqrt{2} \longmapsto -\sqrt{2}, \text{记为}\sigma_1;$$

$$c : \sqrt{-1} \longmapsto -\sqrt{-1}, \sqrt{2} \longmapsto \sqrt{2}, \text{记为}\sigma_2;$$

$$d : \sqrt{-1} \longmapsto -\sqrt{-1}, \sqrt{2} \longmapsto -\sqrt{2}, \text{记为}\sigma_3;$$

于是$G = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = id, \sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$,可知

$$G =< \sigma_1, \sigma_2 >=< \sigma_1 > \times < \sigma_2 > \backsimeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

G的子群为：$\{1\}, < \sigma_1 >, < \sigma_2 >, < \sigma_1\sigma_2 >=< \sigma_3 >$, G对应的中间域为K.

$$K^{<\sigma_1>} = K^{\sigma_1} = Q(\sqrt{-1}), K^{\sigma_2} = Q(\sqrt{2}), K_3^\sigma = Q(\sqrt{-2}).$$

4 环与模的链条件

4.1 环与模的链条件

Theorem 1. *设A是一个含幺交换环，M是一个A-模，则下列陈述等价：*
(1)(ACC)(升链条件)：对M中的任意子模升链（可数链） $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$ 则(*)式是稳定的，即存在$n \in Z_{\geq 1}, \ddot{\ } M_n = M_{n+1} = \ldots$
(2)(极大条件)任意一个由M的子模构成的非空集合均有极大元。(集合的包含关系)
(3)(有限生成条件)M的任一子模均是有限生成A-模。

Definition 1. *对于$M\in A$-模，如果M满足上述定理的条件，则称M是一个$Noether$ A-模。*

证明. (1)$\Rightarrow$(2)设$\mathscr{M}$是M的一个子模非空集簇，要证$\mathscr{M}$中含极大元。(反证)假若不然，任取$M_1 \in \mathscr{M}$,则M_1不是$\mathscr{M}$中极大元，故有$M_2 \in \mathscr{M} \Rightarrow M_1 \subsetneqq M_2$.同理，$M_2$也不是$\mathscr{M}$中极大元，故有$M_3 \in \mathscr{M} \Rightarrow M_2 \subsetneqq M_3$.以此类推即可得到M中一个无限长子模链。$M_1 \subsetneqq M_2 \subset M_3 \subsetneqq \ldots$与所设矛盾！
(2)$\Rightarrow$(3) 任取子模N$\leq$ M,不妨设N$\neq$ 0，下证N是有限生成的。为此，令 $\mathscr{M}$=$\{L : L \leq N$,且L是有限生成的$\}$.显然，$0 \in \mathscr{M}$,故，$\mathscr{M} \neq \Phi$, 由所设，$\mathscr{M}$中含极大元，设其一为N_0. 只需证$N_0 = N$。

假若$N_0 \neq N$，即$N_0 \subsetneqq N$。于是有$\alpha \in N \setminus N_0$,令$L_0 =< N_0, \alpha >= N_0 + A\alpha$则，$L_0 \leq N$,且$L_0$是有限生成的，故$L_0 \in \mathscr{M}$.但$N_0 \subsetneqq L_0$，这与$N_0$的极大性矛盾！因此，$N = N_0$是有限生成的。
(3)⇒(1),任取M的一个可数子模升链，$M_1 \subset M_2 \subset \ldots$,令$N = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$,则$N \leq M$,有所设，N是有限生成A-模，即$N =< \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m >= A\alpha_1 + \ldots + A\alpha_m, (\alpha_1, \ldots \alpha_m \in N)$由$\alpha_1, \ldots \alpha_m \in N = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$,故有$r \in Z_{\geq 1} \Rightarrow \alpha_1, \ldots \alpha_m \in M_r \Rightarrow N =< \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m > \subset M_R \subset N \Rightarrow N = M_r \Rightarrow M_r \subset M_{r+k} \subset N = M_r \Rightarrow M_{r+k} = M_r (\forall k \in Z_{\geq 0})$ □

对偶地，有Artin 模

Theorem 2. *设A是一个含1交换环，M是一个A-模，则下列条件等价：*
(1)(DCC)M的任一个可数子模降链均稳定的，即对任一个子模链, $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$则有$n \in Z_{\geq 1}$,使得$M_n = M_{n+1} = \ldots$
(2)(极大条件).有M的子模构成的任一非空集簇均有极小元。

Noether 模，Artin 模

Definition 2. *设A是一个含1交换环，如果A是一个Noether $A-$模，则称A是Noether 环。*

等价地，A是$Noether$环⇔ A的理想均是有限生成的。
对偶地，A是$Artin$环⇔ A作为A模是一个Artin模。
例1，整数环$\mathbb{Z}Noether$环 (1)满足acc,$I_1 \subset I_2 \subset \ldots I_i = (a_i), (a_1) \subset (a_2) \subset \ldots, (a_1) \subset (a_2) \Leftrightarrow (a_2|a_1), (p) \subset (p), < 1 >= \mathbb{Z}$.
(2)不满足dcc. 例：$(2) \supset (2^2) \supset (2^3) \supset \ldots$ 可无限下去(倍) 结论：$\mathbb{Z}$是$Noether$环，但不是$Artin$环。
例2.$G = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$,(注：$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{tor}$).
$(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{R}, +), \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1)$(作为集合)$\simeq (S^1, \cdot)$单位圆.
$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)_{tors} = \overline{a} : a \in \mathbb{R}, \circ(a) < \infty$.
设p是一个素数，G的$Sylow - p$子群

$$G(p) = \{a \in G : \circ(a)\text{是}p\text{的幂}\} = p^{-1}Z/Z \cup p^{-2}Z/Z \cup \ldots = \bigcup_{n=0}^{\infty} p^{-n}Z/Z,$$

$p^{-n}Z/Z \subset p^{-(n+1)}Z/Z, p^{-1}Z/Z \subsetneqq p^{-2}Z/Z \subsetneqq \ldots$(无限升链)
$\Rightarrow Q/Z$不是$NoetherZ-$模。
例.$A = k[x]$(k域)A是$PID \Rightarrow A$是$Noether$的，但A不是$Artin$的,$(x) \supsetneqq (x^2) \supsetneqq \ldots$
例3.$A = k[x_1, x_2, \ldots]$
A不是$Artin$环,$(x_1) \supsetneqq (x_1^2) \supsetneqq \ldots$; A也不是$Noether$ 环,$(x_1) \subsetneqq (x_1, x_2) \subsetneqq \ldots$
注：A是整环，设F是它的分式域，即$F = FracA$，F是$Noether$的(域中的理想只有0和本身)，$A \subset F$,A不是$Noether$ 的.
(环)Noether性质对子结构不封闭
(模)但M是$NoetherA-$模，$N \subseteq M$，则N也是$NoetherA-$模.原因：子模的子模是子模，N的子模是M的子模⇒有限生成.

$MNoetherA-$模，$N \leq M, NNoether!$
$L \leq N \Rightarrow L \leq M$子模的子模是子模
$M/N, A \times M/N \longrightarrow M/N, (a, \overline{m}) \longmapsto \overline{am}$
$\overline{M} = M/N, \overline{M_1} \leq \overline{M_2} \leq \ldots, N \leq M_i \leq M, \overline{M_i} = M_i/N$
$\Rightarrow M_1 \leq M_2 \leq \ldots$
验证：$\forall \alpha \in M_1, \overline{\alpha} \in \overline{M_1} \subset \overline{M_2} \Rightarrow \overline{\alpha} = \overline{\beta}$ 对某个$\beta \in M_2$.即$\alpha - \beta \in N, \alpha - \beta = \gamma \in N \subset M_2 \Rightarrow \alpha = \beta + \gamma \in M_2$
$\exists n \in Z_{\geq}1$使得$M_n = M_{n+1} = \ldots \Rightarrow \overline{M_n} = \overline{M_n + 1} = \ldots \Rightarrow \overline{M} = M/N$是Noether的.

Theorem 3. *设A是交换环,$L,N,M \in$ A-Mod.且有正合列$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$,则$M$是Noether模$\Leftrightarrow$ L与N均是Noether A-模。Artin仍成立。*

证明. $\Rightarrow$ 任取$L_1 \leq L_2$,则$L_1 \leq M$，由所设，知L_1是有限生成的，故是Noether模。任取N的一个子模升链$N_1 \leq N_2 \leq \ldots$则有M的子模升链$f(L) \subset g^{-1}(N_1) \leq g^-1(N_2) \leq \ldots$ 由所设，$\exists m \in Z_{\geq}1$, 使得$g^{-1}(N_m) = g^{-1}(N_m + 1) = \ldots \Rightarrow N_m = g(g^{-1}(N_m)) = g(g^{-1}(N_m + 1)) = N_{m+1} = \ldots \Rightarrow$ N是个Noether A-模。
$\Leftarrow$ 任取M的一个可数子模升链$M_1 \leq M_2 \leq \ldots$ 于是有L中的子模升链$f^{-1}(M_1) \leq f^{-1}(M_2) \leq \ldots$ 及N中的子模升链$g(M_1) \leq g(M_2) \leq \ldots$ 由所设，存在k使得$f^{-1}(M_k) = f^{-1}(M_k + 1) = \ldots$ 且$g(M_k) = g(M_k + 1) = \ldots$
下证$M_k = M_{k+1} = \ldots$,只需证$M_{k+1} \subset M_k$.
为此，任取$\alpha \in M_{k+1}$则$g(\alpha) \in g(M_k + 1) = g(M_k)$即$g(\alpha) = g(\beta)$,对某个$\beta \in M_k$. 也即$g(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta \in ker(g) = im(f) = f(L)$即有$\gamma \in L$,使得 $alpha - \beta = f(\gamma)$,又$alpha - \beta \in M_{k+1}$,故$\gamma \in f^{-1}(M_k + 1) = f^{-1}(M_k) \Rightarrow f(\gamma) \in M_k \Rightarrow \alpha = \beta + f(\gamma) \in M_k \Rightarrow M_{k+1} \subset m_k$.从而有$M_{k+1} = M_k$ 同理可证$M_{k+1} = M_{k+2} = \ldots$ 因此，M是Noether A-模。 □

Corollary 1. *M是Noether模$\Rightarrow M \bigoplus M$是Noether的。*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \bigoplus M \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$
$$\alpha \longmapsto (\alpha, 0),$$
$$(\alpha, \beta) \longmapsto \beta.$$

Corollary 2. *设$M_i (1 \leq i \leq r)$是Noether A-模，则$\bigoplus_{i=1}^{r} M_i$也是Noether模。*

证明. 归纳法：

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$
$$a_1 \longmapsto (a_1, 0),$$
$$(a_1, a_2) \longmapsto a_2.$$

$\Rightarrow M_1 \oplus M_2$是Noether的。
$0 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$

一般地.

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} M_i \longrightarrow M_r \longrightarrow 0$$

特别地，当M是一个Noether模时，$M^n = M^{\oplus n}$是Noether的。
$M \oplus \ldots \oplus M = M \times \ldots \times M$ □

例.X是紧的Hausdorff拓扑空间，且$\# X = +\infty . C(X) = \{f : f$是$X$上的实值函数$\}, f : X \longrightarrow R$连续，显然，$(C(X), +, \cdot)$是一个含幺交换环，令$B_1 \supsetneqq B_2 \supsetneqq \ldots$ 是X中一个严格闭子集降链，又令$I_n \lhd C(X)$,且$I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq I_3 \subsetneqq \ldots$(理想的无限升链)$\Rightarrow C(X)$不是Noether环。

Proposition 1. *Noether环上的有限生成模必是Noether模。*

证明. 设A是Noether环，M是一个有限生成A-模，即$M = A\alpha_1 + A\alpha_2 + \ldots + A\alpha_r, \alpha_1, \ldots$ fi$\alpha_r \in M$. 显然有A-模满同态$\Phi : A^r \longrightarrow M, (a_1, \ldots, a_r) \longmapsto a_1\alpha_1 + \ldots + a_r\alpha_r$.由所设，A是Noether环，故A也是一个Noether A-模，于是A^r也是Noether A-模，从而M是Noether的。 □

设M∈ A-Mod，设有子模降链：$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_r = \{0\}(*)$,且$M_i/M_{i+1}$ 是单模，$(i = 0, 1, \ldots, r-1)$此时称$(*)$是M的一个合成列，称r为M的长度，记为r=L(M)，这样的M就成为是一个有限长模.(Jordan-Holder 定理)

Theorem 4. *设A是一个交换环，M∈ A-Mod,则M是有限长模⇔ M既是Noether模，也是Artin模。*

证明. $\Rightarrow$ 显然，M是有限长模则不可能有无限升链，也不可能有无限降链。$\Leftarrow$ $M \neq 0$.令$\mathscr{N}$={N:N≤ M且N≠ $M\}$≠ ∅.则$0 \in \mathscr{N}$，由于M 是Noether模，故$\mathscr{N}$中含极大元，取其中一个为M_1，则M/M_1是单模，且M_1 也是Noether的。当M_1=0 时，已证;当$M_1 \neq 0$时，则对M_1用上述讨论可得$M_2 \leq M_1, M_2 \neq M_1$,且$M_1/M_2$是单的，以此类推，可得M的子模的严格降链：$M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq M_2 \supsetneqq \ldots (*)$
由所设，M是Artin的，故$(*)$必是稳定的，从而由上述讨论可知，$\exists r \in Z_{\geq}1$,使得M_r=0.因此得M的合成列：$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_r = \{0\}$ □

Theorem 5. *(Hilbert基本定理) Noether环上的多项式环必是Noether环。具体言之，设A是一个Noether环，$x_1, \ldots, x_n$是n个未定元，则A 上的多项式环$A[x_1, \ldots, x_n]$是Noether环。*

证明. 只需证$A[x]$是$Noether$环，其中x是未定元。为此任取$A[x]$中一个非零理想$\mathscr{A}$，令$I = \{a \in A : \exists f \in \mathscr{A}$, 使得$a$是$f$的首项系数$\}$则$I \lhd A$.事实上，显然$0 \in I$,设$a, b \in I$,则有$f, g \in \mathscr{A}$.使得$a, b$分别是$f, g$的首项系数。不妨设

$$f(x) = ax^m + \ldots,$$

$$g(x) = bx^n + \ldots.$$

且设$m \geqslant n$，则$f(x)+g(x)x^{m-n} \in \mathscr{A}$且其首项系数均为$a+b.I \lhd A$. 由所设，$A$是$Noether$环，故$I$是有限生成的，即$I =< a_1,\ldots,a_s >$,其中$a_1,\ldots,a_s \in A$. 由所设，对每个$a_i$,$\exists f_i \in \mathscr{A}$,使得$a_i$是$f_i$的首项系数。记$m_i = deg(f_i), m = max\{m_i : i = 1,\ldots,s\}$(规定$deg0 = \infty$)记$\mathscr{A}' =< f_1,\ldots,f_s >$(在$A[x]$中生成)，显然$\mathscr{A} = \mathscr{A}'$. 又记$\mathscr{B} = A+Ax+\ldots+Ax^{m-1}$是由$\{1,x,\ldots,x^{m-1}\}$生成的$A-$模. 任取$f \in \mathscr{A}$,如果$deg(f) < m$,则$f \in b$.如果$deg(f) = n \geq m$.此时设$f$的首项系数为$a$.则$a \in I$, 于是有$a = c_1a_1+\ldots+c_sa_s$, 其中$c_1,\ldots,c_s \in A$.令$g(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{s} c_i x^{n-mi} f_i$. 则$g(x) \in \mathscr{A}$,但此时$deg(g(x)) < n$.以此类推，有限步后，可得$f(x) = h(x)+l(x)$,其中$h(x) \in \mathscr{A}', l(x) \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$,(因为$f,h \in \mathscr{A} \Rightarrow l \in \mathscr{A}$) 即$f(x) \in \mathscr{A}' + (\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{A} \subset \mathscr{A}' + (\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{A} = \mathscr{A}' + (\mathscr{A} \cap \mathscr{B})$ 注意到A是Noether环，$\mathscr{B}$是有限生成$A-$模，故$\mathscr{B}$是Noether $A-$模$\Rightarrow \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$也是$Noether A-$模，故有$g_1,\ldots,g_t \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$,使得 $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = Ag_1+\ldots+Ag_t \Rightarrow \mathscr{A} = \mathscr{A}' + Ag_1 + \ldots + Ag_t \subset \mathscr{A}' + A[x]_{g_1} + \ldots + A[x]_g \subset \mathscr{A}. \Rightarrow \mathscr{A} =< f_1,\ldots,f_s,g_1,\ldots,g_t >$. □

Hilbert基定理
设A是Noether环，则A上的多项式环$A[x_1,\ldots,x_n]$也是Noether环。

Proposition 2. *A与B是交换环，$A \subset B$，设A是$Noether$环，B是有限生成$A-$模，则B是一个$Noether$环。*

证明. 任取$I \lhd B$ (理想)，由所设，B是有限生成$A-$模，另一方面，显然I是B的一个$A-$子模，$(A \subset B)$.从而I 使有限生成A模，即有$I = A\alpha_1+\ldots+A\alpha_m$.其中$\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in I \subset B$.于是$I = A\alpha_1+\ldots+A\alpha_m \subset B\alpha_1+\ldots+B\alpha_m \subset I \Rightarrow I = B\alpha_1+\ldots+B\alpha_m$即$I$是$B$中有限生成理想，因此$B$是一个Noether环。 □

Proposition 3. *设A是一个交换环，S是A的一个乘法闭子集，如果A是一个$Noether$环，则分式环$S^{-1}A$也是$Noether$环。*

证明. 任取$S^{-1}A$中理想J，则$J = S^{-1}I$,其中$I \lhd A$。由所设，I是有限生成的，即$I = A\alpha_1+\ldots+A\alpha_m$,其中$\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in A. \Rightarrow J = S^{-1}I, = S^{-1}A\alpha_1+\ldots+S^{-1}A\alpha_m$.即$J$是$S^{-1}A$的有限生成理想$\Rightarrow S^{-1}A$ 是Noether环。特别地，任取$P \in Spec(A)$(A的素理想集)，$A_p = S^{-1}A$,其中$A = A \setminus P$. □

Corollary 3. *A是$Noether$环，则A_p是$Noether$环。*

多项式及多项式组的零点(system)
1.一个变量
$f(x) \in R[x].f(x) = x^2-2x+1, y = ax^2+bx+c(a>0)$.$R$不是代数封闭域
$y = f(x), 2 \nmid deg(f)$,图像一定过x轴,$x \to +\infty, 2 \nmid n$. 2.两个变量的情形
$f(x,y) = ax+by+c.(a,b,c \in R, a,b$不同时为0) $f(x,y) = 0, f(p) = 0, f(x,y) = x^2+y^2-r^2$,
$f(x,y) = x^2+y^2+1$.
设k是一个代数封闭域，考虑k上的多项式环，$A = k[x_1,\ldots,x_n].f \in A, k^n$为$k$上$n$维仿射空间。记$Z(f) = \{p = (a_1,\ldots,a_n) \in k^n : f(p) = 0\}$.同样地，任取$I \subset A, Z(I) = \{p \in k^n : f(p) = 0, (\forall f \in I)\}$,称$Z(f)$为$f$在$k$上的零点集。显然，$Z(1) = Z(c) = \varnothing (c \in k^*), Z(0) = k^n$.
$f \in A$,令$I = I(f) =< f >= Af$,为f在A中生成的理想。$Z(f) = Z(< f >) = Z(Af), p \in Z(f) \Rightarrow$

$f(p)=0 \Rightarrow p \in Z(<f>)=Z(Af), \forall g \in <f>$,有$g=fh, h \in A. g(p)=f(p)h(p)=0$.
事实上:(1)$Z(f)=Z(<f>)$.(2)任取$S \subset A, S \neq \varnothing$,有$Z(S)=Z(<S>)$.
对$\forall a \lhd A, Z(a)$.

Proposition 4. *对A中的任一真理想a，有$Z(a) \neq \varnothing$.*

Theorem 6 (Hilbert零点定理(Hilbert's Nullstellensatz))**.** *设k是一个代数封闭域，$A=k[x_1,\ldots,x_n]$是k上的多项式环，$a \lhd A$是A的一个真理想。$f \in A \setminus 0$,如果$Z(f) \subset Z(a)$,即$f(p)=0(\forall p \in Z(a))$.则存在$r \in Z_{\geqslant}1$, 使得$f^r \in A$.(即$f \in \sqrt{a}=rad(a)-a$的根理想)。*

证明. 引入一个变量y，令$B=k[x_1,\ldots,x_n,y]$,为方便记，简记$X=[x_1,\ldots,x_n]$,在B中考虑由a与$(1-fy)$生成的理想a'，即$a'=<a \cup (1-fy)>$(在B中)。断言：$a'=<1>$.假若不然，则a'为B中的真理想，于是$Z[a'] \neq \varnothing$.特别地，有$P=(a_1,\ldots,a_n,b) \in k^n \times k$,且$(1-fy)(P_0)=1-f(p_0)b=0(*)$
但另一方面，有所设，$P_0 \in Z(a) \subset Z(f)$,故有$f(P_0)=0$,与$(*)$矛盾！因此，$a'=<1>$.于是

$$1=g_1h_1+\ldots+g_sh_s+(1-fg)h.(**)$$

其中$g_i=g_i(x)=g_i(x_1,\ldots,x_n) \in a, h_i=h_i[x,y] \in B, h=h(x,y) \in B, X=(x_1,\ldots,x_n)$.在$(**)$中取$y=\frac{1}{f}$,得

$$1=g_1(x)h_1(x,\frac{1}{f})+\ldots+g_s(x)h_s(x,\frac{1}{f})=\frac{1}{f^r}(g_1(x)f_1(x)+\ldots+g_s(x)f_s(x)),$$

$\Rightarrow f^r=g_1(x)f_1(x)+\ldots+g_s(x)f_s(x) \in a.$ □

4.2 域的Galois扩张例子选讲

例2.(三次扩域)
设$f(x)=x^3+ax+b \in \mathbb{Q}[x]$,是$\mathbb{Q}$上不可约多项式，设$\alpha_1=\alpha,\alpha_2,\alpha_3$为$f(x)$在$C$中的全部根，令$k=\mathbb{Q}(\alpha)$,则$[K:\mathbb{Q}]=deg(f)=3$.又记$K=\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$为$f$在$\mathbb{Q}$上的分裂域。$K/\mathbb{Q}$是$Galois$的$\Leftrightarrow k=K$.
(1)$K/\mathbb{Q}$是$Galois$的记$G=Gal(K/\mathbb{Q})$,任取$\sigma \in G: \alpha_1 \longmapsto \sigma(\alpha_1), \alpha_2 \longmapsto \sigma(\alpha_2), \alpha_3 \longmapsto \sigma(\alpha_3)$.

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)=x^3+ax+b$$

$$f(x)=\sigma(f(x))=(x-\sigma(\alpha_1))(x-\sigma(\alpha_2))(x-\sigma(\alpha_3)).$$

σ 只作用在系数上。
$\Rightarrow (\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\sigma(\alpha_3))$是$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的一个置换，于是有映射

$$G \longrightarrow S_3, \sigma \longmapsto (\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)).$$

且显然是单一群同态.像相同原像相同.$\Rightarrow \#G||S_3|=6 \Rightarrow |G|=3$或6.
令$S=(\alpha_1-\alpha_2),(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)$, f的判别式即是$\Delta=S^2$,(注：一般地，对于多项式$f(x)=$

$a\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$,则$\sigma(f)=\prod_{1\leqslant i\leqslant j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$
如：$f(x)=x-\alpha$,

$$f(x)=x^2+ax+b=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2).\Delta=a^2-4b,$$
$$\Delta=(\alpha_1-\alpha_2)^2=(\alpha_1+\alpha_2)^2-4\alpha_1\alpha_2=(-a)^2-4b=a^2-4b.$$

$\delta=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1),\sigma(\delta)=(\sigma(\alpha_1)-\sigma(\alpha_2))(\sigma(\alpha_2)-\sigma(\alpha_3))(\sigma(\alpha_3)-\sigma(\alpha_1))=\delta$ 或$-\delta$
且$\sigma(\delta)=\delta\Leftrightarrow\sigma\in A_3$(偶置换),
$sigma(\Delta)=\sigma(\delta^2)=\Delta(\Delta\in\mathbb{Q})$多项式系数在哪里，$\Delta$ 就在哪里。
$\sigma(\Delta)=\Delta(\forall\sigma\in G)\Rightarrow\Delta\in K^G=\mathbb{Q}$
由上述讨论可知

$$\delta\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\delta\in K^G\Leftrightarrow\sigma(\delta)=\delta(\forall\sigma\in G)\Leftrightarrow G=A_3.$$

又$\delta\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\Delta=\delta^2\in\mathbb{Q}^2$
结论：对于上述$k=\mathbb{Q}(\alpha),K/\mathbb{Q}$是Galois扩张$\Leftrightarrow k=K\Leftrightarrow G=Gal(K/\mathbb{Q})=A_3\Leftrightarrow\Delta\in\mathbb{Q}^2$(即$\delta\in\mathbb{Q}$).
对于上述$f(x)=x^3+ax+b,\Delta(f)=-4a^3-27b^2$.
例如，(1)取$f(x)=x^3-x-1,f(\alpha)=0.\Delta(f)=-4(-1)^3-27=4-27=-23$不属于$\mathbb{Q}^2$。故$\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$不是Galois 扩张。对于$f$在$\mathbb{Q}$上的分裂域$K$，有$Gal(K/Q),\simeq S_3$.
(2)$f(x)=x^3-3x+1,\Delta(f)=-4(-3)^3-27=81=9^2\in\mathbb{Q}^2.\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$是Galois的且$Gal(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})=A_3$.
例3.设$f(x)=x^4-2\in\mathbb{Q}[x]$.
则$f(x)$在$\mathbb{Q}$上不可约(爱森斯坦判别法，$p=2$)，记$\alpha=\sqrt[4]{2}$,则f在C中的所有根为 $\alpha,i\alpha,i^2\alpha,i^3\alpha(i=\sqrt{-1})$,于是$f$在$\mathbb{Q}$上的分裂域为$K=\mathbb{Q}(\alpha,i\alpha,i^2\alpha,i^3\alpha)=\mathbb{Q}(\alpha,i)=\mathbb{Q}(\beta)$.
$K/\mathbb{Q}$是Galois扩张且$[K:\mathbb{Q}]=[K:\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=2\times4=8,K=\mathbb{Q}(\alpha,i)=\mathbb{Q}(\alpha)(i)$.
记$G=Gal(K/\mathbb{Q})$,下面计算G，任取$\sigma'\in G$

$$\sigma':K\longrightarrow K,\sigma'(\alpha,i)\longmapsto(\sigma'(\alpha),\sigma'(i)),$$
$$\sigma'(\alpha)=\{\alpha,i\alpha,i^2\alpha,i^3\alpha\},\sigma'(i)=\{i,-i\}.$$

令

$$\tau:i\longmapsto -i,\alpha\longmapsto\alpha,$$
$$\sigma:i\longmapsto i,\alpha\longmapsto i\alpha.$$

于是$\tau,\sigma\in G=Gal(K/Q)$且$\tau^2=id$

$$\sigma(i)=\sigma^2(i)=\sigma^3(i)=\ldots=i;$$
$$\sigma^2(\alpha)=\sigma(i\alpha)=\sigma(i)\sigma(\alpha)=i(i\alpha)=-\alpha=i^2\alpha;$$
$$\sigma^3(\alpha)=\sigma(\sigma^2(\alpha))=\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)=-i\alpha=i^3\alpha;$$
$$\sigma^4(\alpha)=\sigma(\sigma^3(\alpha))=\sigma(-i\alpha)=-i\sigma(\alpha)=\alpha.$$

即$\sigma^4 = id$.故在G中，阶$\circ(\tau) = 2, \circ(\sigma) = 4$,事实：$G =< \sigma, \tau >$,且$\#G = 8$(由扩张次数即知)
$G \supset < \sigma, \tau >, G \supset < \sigma >$,但$\tau$ 不属于$< \sigma >$,故 $\# < \sigma, \tau >> 4. \Rightarrow \# < \sigma, \tau >\geqslant 8$
G中的二阶元:$\circ(\tau) = 2, \circ(\sigma^2) = 2, \circ(\tau\sigma^2) = 2, \circ(\sigma^2\tau) = 2, \circ(\sigma\tau) = 2.$
关系：

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} = \sigma^3.$$

G共有五个二阶子群，分别为：

$$< \tau >, < \sigma^2\tau >, < \sigma^2 >, < \sigma\tau >, < \sigma^3\tau >$$

所对应的中间域分别为：

$$Q(\alpha), Q(i\alpha), Q(\alpha^2 + i), Q((i+1)\alpha), Q((i-1)\alpha).$$

G共有三个四阶子群，分别为：

$$< \tau, \sigma^2 >, < \sigma >, < \sigma^2, \tau\sigma >,$$

所对应的中间域分别为：

$$Q(\sqrt{2}), Q(i), Q(\sqrt{-2}).$$

例4.设k是一个域，$t_1, \ldots, t_n$是n个在k上代数无关的元,(未定元)考虑域$K = k(t_1, \ldots, t_n)$,显然，n次对称群S_n可作用于集合$\{t_1, \ldots, t_n\}$上，即对$\forall \sigma \in S_n$,令 $\sigma(t_1, \ldots, t_n) = (t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)})$由此导出，$K$到自身的一个$k-$自同构，仍记为$\sigma$.即$\sigma \in Aut_k(K)$,事实上，得到单一群同态$S_n \hookrightarrow Aut_k(K)$于是，可把$S_n$ 看作$Aut_k(K)$的子群.令$E = K^{S_n}$,则由Artin定理可知，K/E是Galois的.且$Gal(K/Q) \backsimeq S_n$.

$f \in E \Leftrightarrow \sigma(f) = f(\forall \sigma \in S_n)$其中 $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)})$即$f$是关于$t_1, \ldots, t_n$的对称多项式$\Rightarrow$ $f = g(s_1, \ldots, s_n)$,其中$g \in K, s_1, \ldots, s_n$是关于$t_1, \ldots, t_n$的全部初等对称多项式$\Rightarrow$ $E = k(s_1, \ldots, s_n)$.

另一方面，对$\forall h \in k(s_1, \ldots, s_n)$,显然有$\sigma(h) = h(\forall \sigma \in S_n) \Rightarrow k(s_1, \ldots, s_n) \subset E$,因此$E = k(s_1, \ldots, s_n)$, 即

$$K^{S_n} = k(t_1, \ldots, t_n)^{S_n} = k(s_1, \ldots, s_n),$$

又，令$f(x) = (x - t_1)\ldots(x - t_n)$,则$K = k(t_1, \ldots, t_n)$是$f$在$k$上的分裂域，$f$可分，$f(x) \in F[x]$,其中$E = k(s_1, \ldots, s_n) \Rightarrow K/E$ 是Galois扩张，且$Gal(K/E) = S_n$.
(Galois逆问题).任给一个有限群H，是否有有理数域$\mathbb{Q}$的Galois扩张K，使得$Gal(K/\mathbb{Q}) = H$?

例5.复数域$\mathbb{C}$是一个代数封闭域.(代数基本定理)

证明. 3个事实:(0)任意非负实数均是某个实数的平方.$\alpha \in R_{\geqslant 0}, \alpha = \beta^2$
(1)奇次数实系数多项式必有实数根.(用连续性)
(2)$R(i)$中任意元素在$R(i)$中均有一个平方根.(假设不知是$\mathbb{C}$)即$\forall \alpha = a + bi \in R(i)(a, b \in R)$都有$\alpha = (c + di)^2$,其中$c^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}, d^2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$
下证$R(i)$是代数封闭的.

为此，任取$R(i)$中一个有限扩域K，则K/R是有限扩张，设L是K/R的一个正规闭包，记$G = Gal(L/R)$，显然,$2 = [R(i) : R]|[L : R]$.即$2|\#G$.令H为G的$Sylow-2$子群，记E为L对R的对应于H的中间域，则$2 \nmid [E : R]$,即E为R 的奇数次扩张，又由本原元素定理，$E = R[\alpha]$,对某个$\alpha \in E$,设α 在R上的极小多项式为$P_\alpha(x)$. 则$P_\alpha(x) \in R[x]$, $2 \nmid deg(P_\alpha(x))$,且$P_\alpha(x)$在R上不可约，于是由前面的事实(1)可知，$deg(P_\alpha(x)) = 1$,即$\alpha \in R \Rightarrow E = R \Rightarrow G = H$,即$G$是一个$2-$群，记$\#G = 2^r$,下证$r = 1$.
为此，记$G_0 = Gal(L/R(i))$,则$\#G_0 = 2^{r-1}$.假若$r-1 > 0$,则G_0由一个2^{r-2}阶子群H_0,且令$E_0 = L^{H_0}$,则$[E : R(i)] = [G_0 : H_0] = 2$,即$E_0$是$R(i)$的二次扩域，与事实(2)矛盾.$\Rightarrow r = 1 \Rightarrow L = R(i) \Rightarrow K = R(i)$,即$R(i)$是代数封闭的。 □

例6.设p是一个素数，$f(x) \in \mathbb{Q}$是$\mathbb{Q}$上的p次不可约多项式，如果f恰有两个非实的复根，则f在$\mathbb{Q}$上的分裂域的Galois群即是S_p(p次对称群)。

证明. 用到如下事实：S_p可由p-循环$(12\dots p)$与任一个对换生成.($S_P =< 12\dots p, tau > \tau = (mn)$是个对换),记$K$为$f$在$\mathbb{Q}$上的分裂域，且设$\alpha$为$f$在$\overline{\mathbb{Q}}$中的一个根，并记$F = \mathbb{Q}(\alpha)$,则$[F : \mathbb{Q}] = degf = p \Rightarrow p|[K : \mathbb{Q}] = \#G$,其中$G = Gal(K/\mathbb{Q})$,即$G$中含有$p$阶元，又$G \leqslant S_p$,由置换群的性质可知，$S_p$中的$p$阶元必与$p$轮换$(12\dots p)$共轭，又由所设，$f(x)$有$p-2$个实根 $\alpha_1, \dots \alpha_{p-2}$, 及一对共轭复根$\beta, \overline{\beta}$.
令

$$\tau : K \longrightarrow K$$

$$\alpha_i \longmapsto \alpha_i$$

$$\beta \longmapsto \overline{\beta}$$

$$\overline{\beta} \longmapsto \beta$$

则$\tau \in S_n$,是一个对换$\Rightarrow G = S_p$. □

如$f(x) = x^5 - 4x + 2$,则f在$\mathbb{Q}$上的分裂域K的Galois群即为S_5.
$f'(x) = 5x^4 - 4, x = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$.
$f''(x) = 20x^3, f''(-\sqrt[4]{\frac{4}{5}}) < 0$极大值点，$f''(\sqrt[4]{\frac{4}{5}}) > 0$极小值点。