群的上同调

Lhzsl

目录

1 Abel范畴上的同调代数

1.1 基本定义与定理

加法范畴$\mathcal{A}$中一个上链复形是指$\mathcal{A}$中一个态射链

$$\cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \cdots$$

满足$d^n d^{n-1} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.将此上链复形记为$X^\bullet = (X^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

复形之间的链映射(又称复形态射)$f^\bullet : X \to Y$是指$f^\bullet = (f^n)_{n\in\mathbb{Z}}$,其中每个$f^n : X^n \to Y^n$均是$\mathcal{A}$中态射，满足

$$f^{n+1}d_X^n = d_Y^n f^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

即有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"'] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

也将$f^\bullet$简记为f.两个链映射$(f^n)_{n\in\mathbb{Z}} : X \to Y$与$(g^n)_{n\in\mathbb{Z}} : X \to Y$相等是指$f^n = g^n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

用$C(\mathcal{A})$记$\mathcal{A}$上的上链复形范畴，其对象就是$\mathcal{A}$上所有上链复形，$Hom_{C(\mathcal{A})}(X,Y)$是复形$X$到复形$Y$的所有链映射作成的集合。

Lemma 1.1. *([1]引理3.1.2)*设$\mathcal{A}$是$Abel$范畴，则$C(\mathcal{A})$也是$Abel$范畴.链映射的序列$0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$是$C(\mathcal{A})$中的短正合列当且仅当对每个$n \in \mathbb{Z}, 0 \to X^n \xrightarrow{u^n} Y^n \xrightarrow{v^n} Z^n \to 0$均是$\mathcal{A}$中短正合列。

设$\mathcal{A}$是Abel范畴.对于$\mathcal{A}$上的上链复形$X = (X^n, d^n)_{n\mathbb{Z}}$和任一$n\mathbb{Z}$,因为$d^n d^{n-1} = 0, \forall n\mathbb{Z}$,故由典范单态射$Imd^{n-1} \hookrightarrow Kerd^n$.定义复形$X$的$n$次上同调对象为

$$H^n(X) := Kerd^n / Imd^{n-1}.$$

下面定理被称为同调代数基本定理，即从一个短正合列可得到关于同调群的长正合列([1]定理3.2.1)

Theorem 1.1. *(同调代数基本定理)*设$\mathcal{A}$是$Abel$范畴，$0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$是上链复形的短正合列。则有$\mathcal{A}$中长正合列

$$\cdots \to H^n(X) \xrightarrow{H^n(u)} H^n(Y) \xrightarrow{H^n(v)} H^n(Z) \xrightarrow{c^n} H^{n+1}(X) \xrightarrow{H^{n+1}(u)} H^{n+1}(Y) \longrightarrow \cdots$$

其中连接态射c是自然的：即，若有$C(\mathcal{A})$中交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中上下两行均为$\mathcal{A}$上复形的短正合列，则有$\mathcal{A}$中长正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(X) \arrow[r, "H^n(u)"] \arrow[d, "H^n(f)"'] & H^n(Y) \arrow[r, "H^n(v)"] \arrow[d, "H^n(g)"'] & H^n(Z) \arrow[r, "c^n"] \arrow[d, "H^n(h)"'] & H^{n+1}(X) \arrow[r, "H^{n+1}(u)"] \arrow[d, "H^{n+1}(f)"'] & H^{n+1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "H^{n+1}(g)"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^n(X') \arrow[r, "H^n(u')"] & H^n(Y') \arrow[r, "H^n(v')"] & H^n(Z') \arrow[r, "c'^n"] & H^{n+1}(X') \arrow[r, "H^{n+1}(u')"] & H^{n+1}(Y') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

上述定理证明主体是使用“蛇引理”完成的，连接态射的自然性也是利用蛇引理连接态射的自然性得到，而后者的证明用到了“态射范畴”。

Definition 1.1. 范畴$\mathcal{A}$中对象P称为投射对象，如果存在态射图

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\
X \arrow[r, "\pi"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中π是任意满态射，f是任意态射，均存在g使得$\pi g = f$.如果对于$\mathcal{A}$中对象M,均存在$\mathcal{A}$的投射对象P_0和$\mathcal{A}$中满态射$P_0 \twoheadrightarrow M$,则称$\mathcal{A}$有足够多投射对象。

Definition 1.2. 范畴$\mathcal{A}$中对象I称为内射对象，如果存在态射图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, dotted, "g"] \\
 & I &
\end{tikzcd}$$

其中σ是任意单态射，f是任意态射，均存在g使得$g\sigma = f$.如果对于$\mathcal{A}$中对象M,均存在$\mathcal{A}$的内射对象I^0和$\mathcal{A}$中单态射$M \hookrightarrow I^0$,则称$\mathcal{A}$有足够多内射对象。

设$\mathcal{A}$是具有足够多投射对象的Abel范畴，M是$\mathcal{A}$中任一对象，称形如

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

的正合列为M的一个投射分解,其中每个P_i均是$\mathcal{A}$中投射对象。方便起见，我们简记上述投射分解为$P \xrightarrow{\pi} M \to 0$.称复形$\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \to 0$为$M$的一个删项投射分解。

由定义知若$\mathcal{A}$是具有足够多投射对象的Abel范畴，则$\mathcal{A}$中任一对象M的投射分解总存在。

在Abel范畴$\mathcal{A}$中，称正合列

$$0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0$$

是可裂正合列(split exact),若存在态射$f : B \to A \oplus C$使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "id"] & B \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & A \oplus C \arrow[r, "p"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中$A \oplus C$是A, C的直和，$i : A \to A \oplus C$是自然嵌入，$p : A \oplus C \to C$是投影。

称$\mathcal{A}$上复形的链映射序列$0 \to P' \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} P'' \to 0$是链可裂短正合列，如果对于每个$n \in \mathbb{Z}, 0 \to P'^n \xrightarrow{f^n} P^n \xrightarrow{g^n} P''^n \to 0$均是$\mathcal{A}$中可裂短正合列. 下面是一个重要的引理([1]引理3.4.4)

Lemma 1.2. *(马蹄引理)设$\mathcal{A}$是具有足够多投射对象的$Abel$范畴，$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$是$\mathcal{A}$中短正合列。设$P' \xrightarrow{\pi'} X \to 0$和$P'' \xrightarrow{\pi''} Z \to 0$分别是$X$和$Z$的一个投射分解，则存在$Y$的一个投射分解$P \xrightarrow{\pi} Y \to 0$使得$P_n = P'_n \oplus P''_n, \forall n \geq 0$,且有如下行与列均为正合列的交换图*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d, dotted] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P'_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "d'_0"] & P'_1 \oplus P''_1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, dotted, "d_0"] & P''_1 \arrow[r] \arrow[d, "d''_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'"] & P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d, dotted, "\pi"] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, dotted] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

其中i, p分别是自然的嵌入，投射。从而有复形的链可裂短正合列$0 \to P' \to P \to P'' \to 0$使得$P \to Y \to 0$是$Y$的一个投射分解。

对于内射分解有同样的结论，这里暂且省略(见[1]第3.4节).

设$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$是两个Abel范畴，$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$是范畴之间的加法函子，若对于$\mathcal{A}$中任一正合列$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$,$\mathcal{B}$中有正合列$0 \to FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$,则称$F$是**左**正合函子；若$\mathcal{B}$中有正合列$FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \longrightarrow 0$,则称$F$是**右**正合函子。

Example 1.1. *在$Abel$范畴$\mathcal{A}$中，N是$\mathcal{A}$中对象，Ab表示$Abel$群范畴。则$Hom_{\mathcal{A}}(-, N) : \mathcal{A} \to Ab$是左正合反变函子，$Hom_{\mathcal{A}}(N, -) : \mathcal{A} \to Ab$是左正合(共变)函子。*

设R是环，$R - Mod$表示$R-$模范畴，M是右$R-$模，则$M \otimes_R - : R - Mod \to Ab$是右正合函子。

1.2 导出函子

下面对一般的加法函子定义导出函子.一般地，不管函子是共变或反变，我们只考虑左正合函子的右导出函子，右正合函子的左导出函子.

下面我们讨论反变加法函子的右导出函子，其它情形类似。

设$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$是两个Abel范畴，$\mathcal{A}$中有足够多投射对象。$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$是反变加法函子.对$\mathcal{A}$中任一对象$M$,取$M$的一个投射分解

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

得到M的一个删项投射分解

$$P : \cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{d_n} P_n \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \to 0$$

和复形

$$FP: 0 \xrightarrow{Fd_{-1}} FP_0 \xrightarrow{Fd_0} FP_1 \to \cdots \to P_{n-1} \xrightarrow{Fd_{n-1}} FP_n \xrightarrow{Fd_n} FP_{n+1} \to \cdots$$

定义

$$(R^nF)(M) := H^n(FP) = KerFd_n/ImFd_{n-1}, \quad \forall n \geq 0.$$

下面要说明该定义是良好的，即$R^nF(M)$与M的投射分解的选取无关。为此，需要下面比较定理([1]定理3.4.2) 首先定义链映射的同伦

Definition 1.3. 设$f: X \to Y$和$g: X \to Y$是$\mathcal{A}$中上复形的两个链映射。称f, g同伦是指：存在$\mathcal{A}$中一组态射$s^n: X^n \to Y^{n-1}, \forall n \in \mathbb{Z}$,使得$f^n - g^n = d_Y^{n-1}s^n + s^{n+1}d_X^n, \forall n \in \mathbb{Z}$.并称$s = (s^n)_{n\in\mathbb{Z}}$是链映射$f$到链映射$g$的一个同伦。记作$f \overset{s}{\sim} g$.

不难验证，一个链映射$f: X \to Y$可诱导出上同调对象之间的态射$H^n(f): H^n(X) \to H^n(Y)$，进一步$H^n: C(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$是一个加法函子([1]引理3.1.3)。

可以证明两个同伦的链映射诱导相同的上同调对象之间的态射,即若有$f, g: X \to Y$ 且$f \overset{s}{\sim} g$，则$H^n(f) = H^n(g): H^n(X) \to H^n(Y)$.([1]命题3.3.2).

Theorem 1.2. *(比较定理) 设$\mathcal{A}$是有足够多投射对象的Abel范畴，$f: M \to N$是$\mathcal{A}$中态射，$P \xrightarrow{\pi} M \to 0$是$M$的一个投射分解，$\cdots \to Q_n \to \cdots \to Q_0 \xrightarrow{\pi'} N \to 0$是正合列($Q_i$未必是投射对象),$Q$是删除$N$后得到的复形.则存在链映射$\alpha: P \to Q$,使得下图交换*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, dotted, "\alpha_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, dotted, "\alpha_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dotted, "\alpha_1"] & P_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dotted, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r, "d'_n"] & Q_n \arrow[r, "d'_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "d'_0"] & Q_0 \arrow[r, "\pi'"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

即$f\pi = \pi'\alpha$.进一步，如果还有链映射$\beta: P \to Q$使得上图也交换(即$f\pi = \pi'\beta$)，则α与β同伦.

对于M的两个投射分解

$$P \xrightarrow{\pi} M \to 0 \text{ 和 } Q \xrightarrow{\pi'} M \to 0,$$

在上面比较定理中取$N = M, f = id_M$,就得到链映射$\alpha: P \to Q$,满足$\pi'\alpha_0 = \pi$,以及链映射$\beta: Q \to P$,满足$\pi\beta_0 = \pi'$.从而有连个链映射

$$\beta\alpha: P \to P \text{ 和 } Id_P: P \to P$$

满足$\pi\beta_0\alpha_0 = \pi$和$\pi Id_0 = \pi$.故由比较定理得到$\beta\alpha \sim Id_P$,同样得到$\alpha\beta \sim Id_Q$.因此

$$H^n(\alpha)H^n(\beta) = H^n(\alpha\beta) = H^n(Id_Q) = Id_{H^n(Q)}$$

,

$$H^n(\beta)H^n(\alpha) = H^n(\beta\alpha) = H^n(Id_P) = Id_{H^n(P)}.$$

从而$H^n(\alpha)$与$H^n(\beta)$是同构映射。即 $H^n(P) \cong H^n(Q), \forall n \geq 0.$

Definition 1.4. 对于链映射$f: X \to Y$，若存在链映射$g: Y \to X$使得$gf \sim Id_X, fg \sim Id_Y$.则称$X$与$Y$是同伦等价。

上面分析说明，

Lemma 1.3. *在$Abel$范畴中,若X, Y是同论等价，则$H^n(X) \cong H^n(Y), \forall n \geq 0$.*

回到上面导出函子的定义，设P, Q是M的两个删项投射分解，则由上分析P, Q同伦等价，从而因F是加法函子，FP, FQ也是同伦等价，上同调对象同构。

这就说明导出函子的定义中 $R^nF(M)$ 与M的投射分解选取无关。

关于R^nF在态射上的作用，定义如下(见[1]第三章3.5节)：我们必须一次性选定$\mathcal{A}$中每个对象的投射分解。设$f: M \to M'$是$\mathcal{A}$中态射，$P \xrightarrow{\pi} M \to 0$和$Q \xrightarrow{\pi'} M' \to 0$分别为$M$和$M'$的投射分解(一次性选好的)。由比较定理，存在链映射$\alpha: P \to Q$满足$f\pi = \pi'\alpha_0$.从而有链映射$F\alpha: FQ \to FP$.定义

$$(R^nF)f := H^nF\alpha : H^nFQ \to H^nFP, \quad \forall n \geq 0. \tag{$*$}$$

则可证$(R^nF)f$与$P \to Q$的链映射的选取无关。事实上，由比较定理，所有这些链映射是同伦的，F作用后仍同伦，而同伦的链映射诱导相同的上同调对象之间的态射。

在定义$(R^nF)f$中，注意到(*)式中Q, P都是一次性选定的一个投射分解，即映射$(R^nF)f$的始对象和终对象(通俗说“定义域”，“值域”)都是确定的。而在定义$(R^nF)M$时是任取M的一个投射分解，显然对于函子$F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$的导出函子 $R^nF: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$,任给$\mathcal{A}$中态射$f: M \to M'$,$R^nf$应该是$(R^nf)M$到$(R^nf)M'$的映射。事实上，我们已经说明取$M$的不同投射分解,所得到的$(R^nf)M$都是同构的。因此我们的担心不是问题。

称一系列的反变函子$R^nF: \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \forall n \geq 0$是$F$的第$n$次右导出函子.

有了导出函子，我们便可从短正合列得到长正合列。

Theorem 1.3. *设$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$是$Abel$范畴，且$\mathcal{A}$有足够多内射对象，$F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$是反变加法函子，则右导出函子$R^nF: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$有下述性质(见[1]定理3.5.1，这里只列举其中前三条,第四条是连接态射的自然性)*

- *如果F左正合，则$R^0F \cong F$.*

- *如果M是投射对象，则$(R^nF)M = 0, \forall n \geq 1$.*

- *设$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$是$\mathcal{A}$中正合列。则$\mathcal{B}$中有长正合列*

$$0 \to (R^0F)Z \xrightarrow{(R^0F)g} (R^0F)Y \xrightarrow{(R^0F)f} (R^0F)X \xrightarrow{c^0} (R^1F)Z \to \cdots$$

$$\to (R^nF)Z \xrightarrow{(R^nF)g} (R^nF)Y \xrightarrow{(R^nF)f} (R^nF)X \xrightarrow{c^n} (R^{n+1}F)Z \to \cdots.$$

证明. 只写出第三条的证明。

设$P_X\to X\to 0$和$P_Y\to Y\to 0$分别为X和Y的投射分解.由马蹄引理，Y有投射分解$P_Y\to Y\to 0$且有$\mathcal{A}$上复形的链可裂短正合列$0\to P_X\to P_Y\to P_Z\to 0$.加法函子$F$将$\mathcal{A}$中链可裂短正合列变为$\mathcal{B}$中链可裂短正合列(不必将正合列便为正合列)。因此

$$0\to FP_Z\to FP_Y\to FP_Z\to 0$$

也是$\mathcal{B}$上复形的链可裂短正合列。应用同调代数基本定理即得到同调群的长正合列，由导出函子的定义知结论成立。 □

Example 1.2. 设$\mathcal{A}$是具有足够多投射对象的$Abel$范畴,N是$\mathcal{A}$中对象,则$Hom_{\mathcal{A}}(-,N):\mathcal{A}\to Ab$是左正合反变函子，它的第$n$次右导出函子$R^nHom_{\mathcal{A}}(-,N)$通常记为$Ext^n_{\mathcal{A}}(-,N)$.对于$\mathcal{A}$中对象$M$,记

$$Ext^n_{\mathcal{A}}(M,N):=Ext^n_{\mathcal{A}}(-,N)(M).$$

Example 1.3. 设$\mathcal{A}$是具有足够多内射对象的$Abel$范畴,M是$\mathcal{A}$中对象,则$Hom_{\mathcal{A}}(M,-):\mathcal{A}\to Ab$是左正合函子，它的第$n$次右导出函子$R^nHom_{\mathcal{A}}(M,-)$通常记为 $ext^n_{\mathcal{A}}(M,-)$.对于$\mathcal{A}$中对象N,记

$$ext^n_{\mathcal{A}}(M,N):=ext^n_{\mathcal{A}}(M,-)(N).$$

当$\mathcal{A}$是具有足够多内射对象且有足够多投射对象的Abel范畴时，可证明对$\mathcal{A}$中对象M,N,有Abel群同构([1]命题3.6.3)

$$Ext^n_{\mathcal{A}}(M,N)\cong ext^n_{\mathcal{A}}(M,N),\forall n\geq 0.$$

2 群的上同调

2.1 群的上同调定义

本章若无说明,群G默认为是有限群。

设G是群，$\Lambda=\mathbb{Z}[G]$是群环，一个左$G-$模总是指一个左$\Lambda-$模。若A是一个左$G-$模，我们可以赋予A于右模结构。即令:$a\cdot g:=g^{-1}\cdot a,\forall g\in G,a\in A.$

设A,B是加法Abel群。若A,B都是$G-$模，所有A到B的Abel群同态组成的群记为$Hom(A,B)$,所有$G-$模同态组成的群记为$Hom_G(A,B)$.若对任意$\varphi\in Hom(A,B),g\in G$,定义$(g\cdot\varphi)(a):=g\cdot\varphi(g^{-1}a)(a\in A)$,则$Hom(A,B)$成为一个$G-$模。

对任意$G-$模A,用A^G表示A中所有在G作用下不变的元素组成的集合，进一步，A^G是A的子群,也是被G固定的最大A的子模。

若A,B是$G-$模，易验证

$$Hom_G(A,B)=(Hom(A,B))^G; \tag{1.1}$$

特别地

$$Hom_G(\mathbb{Z},A)=(Hom(\mathbb{Z},A))^G\cong A^G,$$

这里$\mathbb{Z}$是指平凡$G-$模。由此，设有$G-$模正合列

$$0\to A\to B\to C\to 0, \tag{1.2}$$

由于Hom函子是左正合的,故有Abel群(没要求作为$G-$模)正合列

$$0\to A^G\to B^G\to C^G.$$

若X是任意Abel群，则有$G-$模$Hom(\Lambda,X)$,我们称这种形式的$G-$模为上诱导*(co-induced)*模.

函子A^G的上同调扩张*(cohomological extension)*是指一系列的函子$H^q(G,A)(q=0,1,\cdots)$,满足：

(1) $H^0(G,A)=A^G$;

(2) 对于形如(1.2)的正合列,有函子性的连接态射

$$\delta:Hom^q(G,C)\to H^{q+1}(G,A)$$

使得序列

$$\cdots\to H^q(G,A)\to H^q(G,B)\to H^q(G,C)\xrightarrow{\delta}H^{q+1}(G,A)\to\cdots \tag{1.3}$$

是正合列;

(3) 对于上诱导模A,满足$H^q(G,A)=0,\forall q\geq 1.$

Theorem 2.1. *函子A^G的上同调扩张在等价的意义下是唯一存在的。*

该定理确定的群$H^q(G,A)$称为$G-$模A的上同调群.

证明. 存在性:取定平凡$G-$模$\mathbb{Z}$的一个投射分解(模范畴中存在充分多投射对象):

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0.$$

故有删项投射分解导出的复形$K^\bullet = Hom_G(P^\bullet, A)$,即:

$$0 \to Hom_G(P_0, A) \to Hom_G(P_1, A) \to \cdots.$$

定义$H^q(G, A) = H^q(K^\bullet)$,下面一一验证:

(1) 有短正合列

$$0 \to ImP_1 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0,$$

由于$Hom_G(-, A)$左正合,故有正合列

$$0 \to A^G \to Hom_G(P_0, A) \xrightarrow{d_0} Hom_G(ImP_1, A),$$

由此，$H^0(G, A) = kerd_0 = A^G$.

(2) 设有正合列(1.2),则有复形正合列(因$P_n (n \geq 0)$是投射模)

$$0 \to Hom_G(P^\bullet, A) \to Hom_G(P^\bullet, B) \to Hom_G(P^\bullet, C) \to 0.$$

由同调代数基本定理知有连接态射

$$\delta : H^q(G, C) \to H^{q+1}(G, A)$$

满足上面长正合列(1.3).

(3) 若A是上诱导模.设$A = Hom(\Lambda, X)$,这里X是Abel群，则对于任意$G-$模B有

$$Hom_G(B, A) \cong Hom(B, X).$$

同构由$\varphi \mapsto \varphi' : b \mapsto \varphi(b)(1)$给出,这里1是$G$的单位元。

验证：单射:设$\varphi, \psi \in Hom_G(B, A)$满足$\varphi' = \psi'$,即对任意$b \in B, \varphi(b)(1) = \psi(b)(1)$,为证$\varphi = \psi$,只需证明对任意$b \in B, g \in G$,有

$$\varphi(b)(g) = \psi(b)(g).$$

对任意$g \in G, b \in B, x \in \Lambda$,由$G-$模$A$的定义知

$$[g \cdot \varphi(b)](x) = g \cdot [\varphi(b)(g^{-1}x)],$$

另一方面,因φ是$G-$模同态，故 $g \cdot \varphi(b) = \varphi(gb)$.因此

$$\varphi(gb)(x) = [g \cdot \varphi(b)](x).$$

结合上面两式，并令$x=1$得到

$$\varphi(b)(g^{-1})=g^{-1}[\varphi(gb)(1)],\quad \forall b\in B,g\in G.$$

这就能推出:若对$\forall b\in B,\varphi(b)(1)=\psi(b)(1)$,则$\varphi(b)(x)=\psi(b)(x),\forall b\in B,x\in\Lambda$.从而$\varphi=\psi$. 满射性:暂略。

因此复形$K^{\bullet}$变为

$$0\to Hom(P_0,X)\to Hom(P_1,X)\to\cdots.$$

其中除$Hom(P_0,X)$项外，其余处均正合(因$P_n(n\geq 0)$是投射模). 故$H^q(G,A)=0,q\geq 1$.

唯一性：对于任意$G-$模A，考虑$G-$模$A^*=Hom(\Lambda,A)$.存在自然的单射$A\to A^*,a\mapsto\varphi_a$满足$\varphi_a(g)=ga,g\in G$.故有$G-$模正合列

$$0\to A\to A^*\to A'\to 0 \tag{1.4}$$

这里$A'=A^*/A$;因A^*是上诱导的，故由(1.3)知

$$\delta:H^q(G,A')\to H^{q+1}(G,A),\quad q\geq 1$$

是同构,且

$$H^1(G,A)\cong Coker(H^0(G,A^*)\to H^0(G,A')).$$

由此知$H^q(G,A)$能从H^0递归的构造出来,且在等价(同构)的意义下是唯一的。 □

2.2 标准复形

在上节定理2.1中，我们用到了$\mathbb{Z}$的投射分解，由唯一性知，上同调群$H^q(G,A)$与投射分解选取无关。本节就来构造一个“标准”的投射分解。

对于$i\geq 0$,令$P_i=\mathbb{Z}[G^{i+1}]$,即P_i是基为$G\times\cdots\times G$((i+1)个)自由$\mathbb{Z}-$模.G对基的作用定义为(由此诱导了G对Λ的作用)：

$$s(g_0,g_1,\cdots,g_i)=(sg_0,sg_1,\cdots,sg_i).$$

态射$d_i:P_i\to P_{i-1}(i\geq 1)$定义如下

$$d(g_0,\cdots,g_i)=\sum_{j=0}^{i}(-1)^j(g_0,\cdots,g_{j-1},g_{j+1},\cdots,g_i), \tag{2.1}$$

而$\varepsilon:P_0\to\mathbb{Z}$定义为$\sum_k a_kg_k\mapsto\sum_k a_k$. 则

$$\cdots\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\to 0 \tag{2.2}$$

是正合列.

事实上,任取$s\in G$,定义$h:P_i\to P_{i+1}$为

$$h(g_0,g_1,\cdots,g_i)=(s,g_0,\cdots,g_i).$$

可验证$d_{i+1}h+hd_i=1(i\geq 1)$,再结合$d_id_{i+1}=0$,便得到 $Imd_{i+1}=Kerd_i(i\geq 1)$. 在$P_0$处，显然有$Imd_1\subseteq Ker\varepsilon$,反之，任取$\sum_k a_kg_k\in P_0$,若$\varepsilon(\sum_k a_kg_k)=0$,则$\sum_k a_k=0$,从而

$$\sum_k a_kg_k=\sum_k a_k(g_k-1_G)\in Imd_1.$$

在$\mathbb{Z}$处正合性是显然地。由上投射分解(2.2)我们可得到复形$K^i=Hom_G(P_i,A)_{i\geq 0}$.任取$f\in K^i=Hom_G(P_i,A)$, f完全由其在Λ的基G^{i+1}上的取值决定，故f可看作一个$G^{i+1}\to A$的函数,且满足

$$f(sg_0,sg_1,\cdots,sg_i)=s\cdot f(g_0,g_1,\cdots,g_i). \tag{$*$}$$

由此f实际上由其在形如$(1,g_1,g_1g_2,\cdots,g_1g_2\cdots g_i)$的元素上的取值所决定。若令

$$\varphi(g_1,\cdots,g_i)=f(1,g_1,g_1g_2,\cdots,g_1g_2\cdots g_i),$$

(反之,$f(g_0,g_1\cdots,g_i)=g_0\cdot\varphi(g_0^{-1}g_1,g_1^{-1}g_2,\cdots,g_{i-1}^{-1}g_i)$) 由此，我们有一一对应

$$Hom_G(P_i,A)\to Mor(G^i,A)$$
$$f\mapsto\varphi,$$

其中$Mor(G^i,A)$表示所有G^i到A的函数组成的集合.这样做的好处是在$Mor(G^i,A)$中我们不必考虑条件(*). 由上一一对应，我们将研究复形$K^\bullet$的问题化为了研究

$$0\longrightarrow Mor(G^0,A)\xrightarrow{d_0^*}Mor(G^1,A)\xrightarrow{d_1^*}\cdots Mor(G^i,A)\xrightarrow{d_i^*}Mor(G^{i+1},A)\xrightarrow{d_{i+1}^*}\cdots$$

其中d_i^*是由d_i诱导的，经计算(请验证),对于$\varphi\in Mor(G^i,A)$,

$$(d_i^*\varphi)(g_1,\cdots,g_{i+1})=g_1\cdot\varphi(g_2,\cdots,g_{i+1})+\sum_{j=1}^{i}\varphi(g_1,\cdots,g_jg_{j+1},\cdots,g_{i+1})+$$
$$(-1)^{i+1}\varphi(g_1,\cdots,g_i).$$

这样就可看出1-上链(1-cocycle)是满足

$$\varphi(gg')=g\cdot\varphi(g')+\varphi(g)$$

的函数$\varphi:G\to A$,称这样的函数为交叉态射*(crossed homomorphism)*. 若存在$a\in A$,使得$\varphi(g)=ga-a$,则φ是上边界*(coboundary)*. 特别地，若G对A是平凡作用则

$$H^1(G,A)=Hom(G,A).$$

为了后文应用，我们给出(1.3)中

$$\delta:H^0(G,C)\to H^1(G,A)$$

的明确描述。实际上，该连接映射是由蛇形引理得到的，故我们只需写出蛇形引理中的元素对应即可。任取$c\in H^0(G,C)=C^G$,取c在B中的一个原像$b\in B$,则d_0^*b是函数$s\mapsto sb-b$,因在C中$(B\to B)sb-b=sc-c=c-c=0$.故$sb-s\in A$,由此$d_0^*b\in H^1(G,A)$.若令取c的一个原像b',则$a:=b-b'\in A$.从而$d_0^*b=d_0^*b'+d_0^*a$, 由此知,db在$H^1(G,A)$的类$\overline{db}$与b的选取无关.

2.3 群同调

若A, B是$G-$模，用$A \otimes B$表示A, B在$\mathbb{Z}$上的张量积，$A \otimes_G B$表示它们在Λ上的张量积。$A \otimes B$有自然的$G-$模结构,定义为$g(a \otimes b) = (ga) \otimes (gb)$.

定义态射$\Lambda \to \mathbb{Z}, \sum_g a_g g \mapsto \sum_g a_g$,用$I_G$表示该态射的核。则$I_G$是$\Lambda$的理想，且由$s-1(s \in G)$生成。有正合列

$$0 \to I_G \to \Lambda \to \mathbb{Z} \to 0, \tag{3.1}$$

对于任意$G-$模A,(3.1)在Λ张量上A得到

$$I_G \otimes_G A \to \Lambda \otimes_G A \to \mathbb{Z} \otimes_G A \to 0,$$

其中$I_G \otimes_G A$在$\Lambda \otimes_G A = A$中的像为$I_G A$(并没有说$I_G \otimes_G A \cong I_G A$,若$A$是平坦$G-$模,则有同构),故有同构

$$\mathbb{Z} \otimes_G A \cong A/I_G A.$$

我们用A_G表示$G-$模$A/I_G A$.这是被G作用平凡的A的最大商模。函子$(-)_G$相当于函子$\mathbb{Z} \otimes_G (-)$,故为右正合。

对于任意左$G-$模A, B,张量积$A \otimes_G B$中模A被看作右$G-$模,其定义为 $ag := g^{-1}a$.

在$(A \otimes B)_G$中，有等式

$$(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b, \quad a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b';$$

$$(g^{-1}a) \otimes b = a \otimes (gb),$$

$\forall g, \in G, a, a' \in A, b, b' \in B$. 事实上，第一行两个等式是自然满足地(因作为$\mathbb{Z}$上张量积).而

$$(g^{-1}a) \otimes b - a \otimes (gb) = g^{-1}(a \otimes (gb)) - a \otimes (gb) = (g^{-1} - 1)(a \otimes (gb)) \in I_G(A \otimes B).$$

这里没要求$a \otimes (gb) = g(a \otimes b)$,这在Atiyah交换代数上定义张量积时是要求的，而在H.Cartan, S.Eilenberg及Rotman的同调代数教材中均没有要求这一条,这里也按这样处理(实际是不能证明出来). 上面实际说$I_G(A \otimes B)$是$(g^{-1} - 1)(a \otimes b) = (g^{-1}a) \otimes (g^{-1}b) - a \otimes g(g^{-1}b)$生成的子群(注意张量积$A \otimes_G B$中$A$作为$G-$模的定义)，故$(A \otimes B)_G$恰为张量积$A \otimes_G B$. 即

$$A \otimes_G B \cong (A \otimes B)_G. \tag{3.2}$$

若X是任意Abel群,$\Lambda \otimes X$具有$G-$模结构,称这样形式的模为诱导模*(induced)*.

第一节中，我们定义了A^G的上同调扩张.此处，我们将上述定义中所有态射的方向调换，将上诱导模换为诱导模就得到了A_G的同调扩张*(homological extension)*的定义.类似地，有下述定理

Theorem 2.2. *A_G的同调扩张存在且唯一.*

A的同调群$H_q(G, A)$同样可用标准复形表示，即

$$H_q(G, A) = H_q(P_\bullet \otimes_G A),$$

其中$P_\bullet$是第二节中定义的标准复形. 群$P_n \otimes_G A$中的任意元素x可看作一个映射$x: G^n \to A$,这个映射只在有限个$(g_1, \cdots, g_n)$上不等于零.事实上：x可唯一表达成形式

$$x = \sum_{(1, g_1, \cdots, g_n)} y_{(1, g_1, \cdots, g_n)}((1, g_1, \cdots, g_n) \otimes_G a_{(1, g_1, \cdots, g_n)})$$

其中$y_{(1, g_1, \cdots, g_n)} \in \mathbb{Z}, a_{(1, g_1, \cdots, g_n)} \in A$,且只有有限个$y_{(1, g_1, \cdots, g_n)}$不等于零(若$G$是有限群,该条件自然满足).则$x$诱导出映射

$$\bar{x}: G^n \to A,$$

$$(g_1, \cdots, g_n) \mapsto a_{(1, g_1, \cdots, g_n)}.$$

$\bar{x}$只在有限个$(g_1, \cdots, g_n)$上不等于零. 反之，给出这样的映射$\bar{x}$,则可到$P_n \otimes_G A$中一个元素x.

若G是有限群,则有一一对应

$$P_n \otimes_G A \leftrightarrow Mor(G^n, A) \leftrightarrow Hom_G(P_n, A).$$

其中第二个对应在上节给出。

唯一性可用正合列

$$0 \to A' \to A_* \to A \to 0 \tag{3.3}$$

导出,其中$A_* = \Lambda \otimes A$.

下面说明连接态射$\delta: H_1(G, C) \to H_0(G, A)$.

Proposition 2.1. *记G'为G的换位子群，则$H_1(G, \mathbb{Z}) \cong G/G'$.*

证明. 因Λ是诱导模，故由(3.1)知连接态射为同构，即

$$\delta: H_1(G, \mathbb{Z}) \to H_0(G, I_G) = I_G/I_G^2.$$

另一方面定义映射 $f: G \to I_G/I_G^2$为

$$f: s \mapsto (s-1) + I_G^2.$$

对任意$s, s' \in G$,我们有

$$\begin{aligned} f(ss') - f(s) - f(s') &= (ss'-1) - (s-1) - (s'-1) + I_G^2, \\ &= ss' - s - s' + 1 + I_G^2 \\ &= (s-1)(s'-1) + I_G^2 \\ &= 0 + I_G^2. \end{aligned}$$

故f是态射,因$G/Kerf$是$Abel$群，故$G' \subseteq Kerf$.故f诱导出映射$f': G/G' \to I_G/I_G^2$,直接验证该映射是单射并不容易，故我们构造该映射的逆。

I_G是基为$\{(s-1) | s \in G\}$的一个自由Abel群,故定义映射时只需考虑在该组基上的作用.定义$\mu: I_G \to G/G'$为

$$\mu: s - 1 \mapsto sG',$$

若$I_G^2 \subseteq Ker\mu$,则μ诱导映射$\mu' : I_G/I_G^2 \to G/G'$,该映射显然是$f'$的逆映射,从而就证明了命题。

若$u \in I_G^2$,则

$$\begin{aligned} u &= (\sum_{x\neq 1} m_x(x-1))(\sum_{y\neq 1} n_y(y-1)) \\ &= \sum_{x,y} m_x n_y (x-1)(y-1) \\ &= \sum_{x,y} m_x n_y \left((xy-1)-(x-1)-(y-1)\right) \end{aligned}$$

因此$\mu(u) = \prod_{x,y} xyx^{-1}y^{-2}G' = G'$.即$I_G^2 \subseteq Ker\mu'$. 故最终证明了

$$H_1(G,\mathbb{Z}) \cong G/G'.$$

□

2.4 换基

设G'是G的换位子群。若A'是$G'-$模,令$A = Hom_{G'}(\Lambda, A')$,对任意$g \in G, \varphi \in A$,定义

$$(\varphi)g : g' \mapsto \varphi(g'g),$$

则A成为右$G-$模，类似第一节中，我们定义$g \cdot \varphi := (\varphi)g^{-1}$,即$(g\cdot\varphi)(g') := \varphi(g'g^{-1}), \forall g' \in G$.则$A$成为左$G-$模。后文若无说明都是指$A$是左$G-$模.

Proposition 2.2. *(Shapiro's Lemma)*

$$H^q(G,A) = H^q(G',A'),\ \forall q \geq 0.$$

证明. 若$P^\bullet$是$\mathbb{Z}$的自由$\Lambda-$模预解,则$P^\bullet$也是自由$\Lambda'-$模预解，且有

$$Hom_G(P_n, Hom_{G'}(\Lambda, A')) \cong Hom_{G'}(P_n, A'),\ \forall n \geq 0.$$

由此即得到结论. □

若$f : G' \to G$是群同态，P', P表示对应地标准复形，则f诱导了P'到P的态射，从而对任意$G-$模A,f诱导了态射

$$f^* : H^q(G,A) \to H^q(G',A)$$

这里将A通过态射f看作$G'-$模。特别地,取G'为G的一个正规子群H,$f : H \to G$为嵌入，我们有限制*(restriction)*同态

$$Res : H^q(G,A) \to H^q(H,A).$$

现在考虑商映射$f : G \to G/H$.对于任意$G-$模A,A^H成为一个$G/H-$模.因此有态射

$$H^q(G/H, A^H) \to H^q(G, A^H).$$

包含映射$A^H \to A$诱导出同调群之间态射$H^q(G, A^H) \to H^q(G, A)$.将这两个映射复合起来得到膨胀*(inflation)*态射

$$Inf : H^q(G/H, A^H) \to H^q(G, A).$$

相似地,同态$f : G' \to G$给出了同调群之间态射

$$f_* : H_q(G', A) \to H_q(G, A);$$

特别地,取$G' = H$是G的子群,$f : H \to G$是嵌入,则有***corestriction***态射

$$Cor : H_q(H, A) \to H_q(G, A).$$

固定$t \in G$,考虑G的内自同构:$\psi_t : G \to G, s \mapsto tst^{-1}$.设有$G-$模$A$,则$A$可通过$\psi_t$看作一个新$G-$模$A^t$:作为群有$A^t = A$,但$G-$模作用为

$$\begin{aligned} G \times A^t &\to A^t \\ (s, a) &\mapsto (tst^{-1}) \circ a. \end{aligned}$$

这里$\circ$表示G对$G-$模A的作用。由此ψ_t诱导出(与上面f^*相似)态射

$$\begin{aligned} \psi_t^* : H^q(G, A) &\to H^q(G, A^t). \\ g &\mapsto g \circ \psi_t. \end{aligned} \tag{4.1}$$

这里$\circ$表示函数的复合。映射$a \mapsto t^{-1}a$诱导同态$A^t \to A$,进而诱导出同态

$$H^q(G, A^t) \to H^q(G, A). \tag{4.2}$$

Proposition 2.3. *(4.1)与(4.2)的复合是$H^q(G, A)$上的恒等映射.*

证明. 对$q = 0$,我们有$H^0(G, A^t) = (A^t)^G = t \cdot A^G$,故(4.1)像当于乘以$t$,而(4.2)恰为乘以$t^{-1}$.显然此时复合是恒等映射。

现在设$q > 0$,并且命题对$q - 1$成立。对应于正合列(1.4),我们有

$$0 \to A^t \to (A^*)^t \to (A')^t \to 0.$$

因$(A^*)^t$作为$G-$模同构于A^*,故为上诱导模,从而有

$$H^q(G, A^t) \cong H^{q-1}(G, (A')^t) \quad (q \geq 2)$$

且

$$H^1(G, A^t) \cong Coker(H^0(G, (A^*)^t) \to H^0(G, (A')^t)).$$

考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "t"] & A^* \arrow[r] \arrow[d, "t"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "t"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^t \arrow[r] \arrow[d, "t^{-1}"] & (A^*)^t \arrow[r] \arrow[d, "t^{-1}"] & (A')^t \arrow[r] \arrow[d, "t^{-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A^* \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

故有复形的交换图($P_\bullet$中都是自由模,从而是投射模)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Hom_G(P_\bullet, A) & \longrightarrow & Hom_G(P_\bullet, A^*) & \longrightarrow & Hom_G(P_\bullet, A') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Hom_G(P_\bullet, A^t) & \longrightarrow & Hom_G(P_\bullet, (A^*)^t) & \longrightarrow & Hom_G(P_\bullet, (A')^t) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Hom_G(P_\bullet, A) & \longrightarrow & Hom_G(P_\bullet, A^*) & \longrightarrow & Hom_G(P_\bullet, A') & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

从而由同调代数基本定理(连接态射的自然性)得到交换图

$$\begin{array}{ccc}
H^{q-1}(G, A') & \longrightarrow & H^q(G, A) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{q-1}(G, (A')^t) & \longrightarrow & H^q(G, A^t) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{q-1}(G, A') & \longrightarrow & H^q(G, A)
\end{array}$$

由上分析知水平方向为同构，左侧两个竖直箭头的复合为恒等(假设),故右侧两个竖直箭头的复合也是恒等.证毕. □

上述命题中的证明技巧称为"维数平移"。

2.5 限制-膨胀列

Proposition 2.4. *设H是群G的正规子群，A是$G-$模，则有正合列*

$$0 \to H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{Inf} H^1(G, A) \xrightarrow{Res} H^1(H, A).$$

证明. (1)$H^1(G/H, A^H)$处正合性.设$f : G/H \to A^H$是1-cocycle，则f诱导映射

$$\bar{f} : G \to G/H \to A^H \to A.$$

易知$\bar{f}$是1-cocycle,且$[\bar{f}] = Inf[f]$,这里$[\cdot]$表示1-cocycle所在的类.若$\bar{f}$是coboundary,则存在$a \in A$使得 $\bar{f}(s) = sa - a(s \in G)$.但$\bar{f}$作用在$aH(\forall a \in G)$上是常数，故$sa - a = sta - a$对任意$t \in H$成立，从而$ta = a, \forall t \in H$.故$a \in A^H$,因此$f$是coboundary.

(2)Res $\circ$ Inf=0.若$\varphi : G \to A$是一个1-cocycle,则$\varphi|H : H \to A$所在类是φ所在类的限制。进一步，若$\varphi = \bar{f}$,则$\bar{f}|H$是常数等于$f(1) = 1 \cdot f(1) + f(1) = 0$.

(3)$H^1(G, A)$处的正合性.设$\varphi : G \to A$是1-cocycle且限制到H上是coboundary;则存在$a \in A$使得对任意$t \in H, \varphi(t) = ta - a$.从$\varphi$中减去上边界$s \mapsto sa - a$,我们可假设$\varphi|H = 0$.

φ满足公式

$$\varphi(st) = \varphi(s) + s \cdot \varphi(t),$$

取$t\in H$得到φ在H的每个配集内取值为常数.若取$s\in H,t\in G$,可得

$$s\cdot\varphi(t)=\varphi(st)=\varphi(ts')=\varphi(t),$$

其中s'满足$st=ts'$,因$tH=Ht$,$s'\in H$存在且唯一。上式说明$Im(\varphi)\subseteq A^H$.从而φ是某个1-cocycle $G/H\to A^H$的膨胀.证毕. □

Proposition 2.5. 设$q\geq 1$,对于$1\leq i\leq q-1$有$H^i(H,A)=0$,则有正合列

$$0\to H^q(G/H,A^H)\xrightarrow{Inf}H^q(G,A)\xrightarrow{Res}H^q(H,A).$$

证明. 用“维数平移”完成证明。$q=1$时，即上一个命题。

下设$q>1$,且命题对q-1成立.在序列(1.4)中A^*是上诱导$H-$模(因$\Lambda=\mathbb{Z}[G]$是自由$\mathbb{Z}[H]-$模),因此

$$H^i(H,A')\cong H^{i+1}(H,A)=0\quad 1\leq i\leq q-2.$$

因$H^1(H,A)=0$,我们有正合列

$$0\to A^H\to(A^*)^H\to(A')^H\to 0.$$

因$(A^*)^H=Hom(\mathbb{Z}[G],A)^H\cong Hom(\mathbb{Z}[G/H],A)$是上诱导$G/H-$模, 结合序列(1.4),有交换图(连接态射的自然性,注意到$Map(G^k,A)\to Map(H^k,A)\quad f\mapsto f\circ(H^k\hookrightarrow G^k)$诱导的映射即限制映射Res)

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & H^{q-1}(G/H,(A')^H) & \longrightarrow & H^{q-1}(G,A') & \longrightarrow & H^{q-1}(H,A') \\
& \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta \\
0 \longrightarrow & H^q(G/H,A^H) & \longrightarrow & H^q(G,A) & \longrightarrow & H^q(H,A)
\end{array}$$

其中竖直箭头全是同构，上面一行为正合列，故下面一行也是正合列.证毕. □

Corollary 2.1. 条件同上一命题，则有

$$H^i(G/H,A^H)\cong H^i(G,A),\forall 1\leq i\leq q-1.$$

2.6 Tate群

设G是有限群,用N表示$\Lambda=\mathbb{Z}[G]$中元素$\sum_{s\in G}s$.对任意$G-$模A,N作用在A上定义了自同态$N:A\to A$,显然有

$$I_GA\subseteq Ker(N),\qquad Im(N)\subseteq A^G.$$

注意到$H_0(G,A)=A/I_GA,H^0(G,A)=A^G$, 因此$N$诱导了同态

$$N^*:H_0(G,A)\to H^0(G,A),$$

定义

$$\widehat{H}_0(G,A)=Ker(N^*),\qquad \widehat{H}^0(G,A)=Coker(N^*)=A^G/N(A),$$

从而有正合列

$$0 \to \widehat{H}_0(G,A) \hookrightarrow H_0(G,A) \xrightarrow{N^*} H^0(G,A) \twoheadrightarrow \widehat{H}^0(G,A) \to 0.$$

设X是任意Abel群，定义映射

$$\begin{aligned} Hom(\Lambda, X) &\to \Lambda \otimes X \\ \varphi &\mapsto \sum_{s\in G} s \otimes \varphi(s), \end{aligned}$$

因G是有限群,可证上述映射是$G-$模同构，从而有限群的诱导模和上诱导模是没有区别的。

Proposition 2.6. 若A是诱导$G-$模，则$\widehat{H}_0(G,A) = \widehat{H}^0(G,A) = 0$.

证明. 令$A = \Lambda \otimes X$,这里X是Abel群.因Λ是自由$\mathbb{Z}-$模,A中元素能被唯一写成形式$\sum\limits_{s\in G} s \otimes x_s$.若这样的元素是$G-$不变的，即对任意$g \in G$,有$\sum\limits_s gs \otimes x_s = \sum\limits_s s \otimes x_s$.由此得到，所有$x_s$必相同,设为$x$,则$\sum\limits_s s \otimes x_s = N(1 \otimes x) \in N(A)$.由定义$\widehat{H}^0(G,A) = 0$.

相似地，若$N(\sum\limits_s s \otimes x_s) = 0$,易知$\sum x_s = 0$,因此

$$\sum s \otimes x_s = \sum (s-1)(1 \otimes x_s) \in I_G A.$$

故$\widehat{H}_0(G,A) = 0$. □

Remark 2.1. 前面已说明，有限群的诱导模和上诱导模是同构的，故上述命题对上诱导模A也成立.

对任意整数q,定义$Tate$上同调群如下：

$$\begin{aligned} \widehat{H}^q(G,A) &= H^q(G,A) \qquad for\ q \geq 1 \\ \widehat{H}^{-1}(G,A) &= \widehat{H}_0(G,A) \\ \widehat{H}^{-q}(G,A) &= H_{q-1}(G,A) \quad for\ q \geq 2. \end{aligned}$$

Theorem 2.3. 任给$G-$模正合列

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

我们有长正合列

$$\cdots \to \widehat{H}^q(G,A) \to \widehat{H}^q(G,B) \to \widehat{H}^q(G,C) \xrightarrow{\delta} \widehat{H}^{q+1}(G,A) \to \cdots.$$

此处我们省略证明.读者可查看[2]Chapter section9.1或[3]Chapter IV section 6. 但在这里我们说下$Tate$群的另一种构造过程，详细过程请看上面两个参考书.

前面我们已经有标准复形

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

令$P_n^* = Hom(P_n, \mathbb{Z})$为$P_n$的对偶群，则有正合列(因$P_i$是$\mathbb{Z}-$自由)

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon^*} P_0^* \to P_1^* \to \cdots$$

记$P_{-n}=P^*_{n-1}$.将上面两个正合列拼接起来得到正合列L：

$$\cdots\to P_1\to P_0\to P_{-1}\to P_{-1}\to\cdots$$

L称为标准完全预解*(Standard complete resolution)*. 对于任意$G-$模A,*Tate*群定义为上同调群

$$H^q(Hom_G(L,A)),$$

其中$q\in\mathbb{Z}$.可验证该定义与上面定义是相同的(见参考文献).

若H是G的子群，我们已经对所有$q\geq 0$定义限制映射

$$Res: H^q(G,A)\to H^q(H,A)$$

因此对Tate群$H^q(q\geq 1)$定义了限制映射,且该映射与连接态射δ交换(见上节命题2.5中交换图).由维数平移我们可对所有$\widehat{H}^q(q\in\mathbb{Z})$定义Res映射(利用正合列(3.3)及$A_*$是诱导$H-$模这一事实).

相似地，我们首先有H_q(即$\widehat{H}^{-q-1},q\geq 1$)的膨胀映射，由维数平移就可到所有$\widehat{H}^q$的膨胀映射。

Proposition 2.7. 令H是G的子群，A是$G-$模，则

(1) $Res:\widehat{H}_0(G,A)\to\widehat{H}_0(H,A)$由$N'_{G/H}:A_G\to A_H$诱导，这里

$$N'_{G/H}(a)=\sum_i s_i^{-1}a$$

其中(s_i)是G/H的一组陪集代表元；

(2) $Cor:\widehat{H}^0(H,A)\to\widehat{H}^0(G,A)$由$N_{G/H}:A^H\to A^G$诱导，这里

$$N_{G/H}(a)=\sum_i s_i a.$$

证明. (i)首先考虑正合列(3.3) 连接态射$\widehat{\delta}:\widehat{H}^0(G,A)\to H^1(G,A')$是由$\delta: H^0(G,A)\to H^1(G,A')$诱导出的. 限制映射$Res: H^0(G,A)\to H^0(H,A)$由嵌入$A^G\to A^H$给出，且与连接态射交换.定义$Res:\widehat{H}^0(G,A)\to\widehat{H}^0(H,A)$是由$A^G\to A^H$诱导的态射，则有交换图

$$\begin{array}{ccc}\widehat{H}^0(G,A) & \xrightarrow{\widehat{\delta}} & H^1(G,A') \\ \downarrow{\scriptstyle Res} & & \downarrow{\scriptstyle Res} \\ \widehat{H}^0(H,A) & \xrightarrow{\widehat{\delta}} & H^1(H,A').\end{array}$$

此即是将限制映射扩充到$\widehat{H}^0$. 现在设$v:\widehat{H}_0(G,A)\to\widehat{H}_0(H,A)$是由$N'_{G/H}$诱导的态射.我们验证有交换图

$$\begin{array}{ccc}\widehat{H}_0(G,A) & \xrightarrow{\delta} & \widehat{H}^0(G,A') \\ \downarrow{\scriptstyle Res} & & \downarrow{\scriptstyle Res} \\ \widehat{H}_0(H,A) & \xrightarrow{\delta} & \widehat{H}^0(H,A').\end{array}$$

设$\bar{a} \in \widehat{H}_0(G,A)$,取$a \in A$是$\bar{a}$的一个代表元,则$N_G(a) = \sum_{s\in G} sa = 0$.取$a$在$A_*$中的一个原像$b$,显然$N_G(b)$是$G$不变的，且$N_G(b)$在$A$中的像是零.因此$N_G(b) \in (A')^G \subseteq (A')^H$.故$Res \circ \delta(\bar{a})$就是$N_G(b)\ mod\ N_G(A')$.另一方面,$v(\bar{a})$为$N'_{G/H}(a)\ mod\ I_H A$,而$N'_{G/H}(a)$在$A_*$中的一个原像为$N'_{G/H}(b)$,因此 $\delta \circ v(\bar{a})$所在类可由$N_H \circ N'_{G/H}(b) = N_G(b)$表示.这就说明上图交换.

(ii)证明略.

□

Proposition 2.8. 若$(G:H) = n$,则

$$Cor \circ Res = n.$$

证明. 首先考虑$\widehat{H}^0$.此时Res由嵌入$A^G \to A^H$诱导,Cor由$N_{G/H}: A^H \to A^G$定义.对于$a \in A^G$,

$$N_{G/H}(a) = na.$$

命题对$\widehat{H}^0$成立.

一般情形用维数平移证明. 首先,类似前文,有正合列(3.3)

$$0 \to A' \to A_* \to A \to 0.$$

对于$q \leq 0$, 有交换图

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{H}^{q-1}(G,A) & \xrightarrow{\delta} & \widehat{H}^q(G,A') \\
\downarrow{\scriptstyle Res} & & \downarrow{\scriptstyle res} \\
\widehat{H}^{q-1}(H,A) & \xrightarrow{\delta} & \widehat{H}^q(H,A') \\
\downarrow{\scriptstyle Cor} & & \downarrow{\scriptstyle Cor} \\
\widehat{H}^{q-1}(G,A) & \xrightarrow{\delta} & \widehat{H}^q(G,A')
\end{array}$$

因A_*是诱导$G-$模,上图中连接态射δ都是同构(事实上,正是利用该同构扩充限制态射Res).故若命题对$\widehat{H}^q$成立,则对$\widehat{H}^{q-1}$也成立。

对于$q \geq 1$,考虑正合列

$$0 \to A \to A^* \to A' \to 0.$$

类似上面,因命题对$\widehat{H}^0$成立，可得到命题对$q \geq 1$ 成立. □

Corollary 2.2. 若G的阶为n,则n零化所有$\widehat{H}^q(G,A)$.

证明. 在命题2.8中取$H = \{1\}$,注意到对任意$q \in \mathbb{Z}$有$\widehat{H}^q(H,A) = 0$. □

Corollary 2.3. 若A是有限生成$G-$模,则所有$\widehat{H}^q(G,A)$是有限群.

证明. Tate群可由标准完全预解L计算，由此可知$\widehat{H}^q(G,A)$是有限生成Abel群，但由推论2.2知所有这样的群被$n = |G|$零化,故它们都是有限群. □

Corollary 2.4. 令S是G的$p-sylow$子群.则限制映射

$$Res:\widehat{H}^q(G,A)\to\widehat{H}^q(S,A)$$

在$\widehat{H}^q(G,A)$的$p-primary$分支上是单射.

证明. 令$Card(G)=p^am,(p,m)=1$.设x在$\widehat{H}^q(G,A)$的$p-primary$分支中，且$Res(x)=0$.则由命题2.8

$$mx=Cor\circ Res(x)=0.$$

另一方面，由推论2.2,$p^ax=0$,因$(p,m)=1$,最终有$x=0$. □

Corollary 2.5. 设S是G的任意一个$sylow$子群，若$\widehat{H}^q(G,A)$中元素x限制到$\widehat{H}^q(S,A)$上都为零,则$x=0$.

证明. 若x在$\widehat{H}^q(G,A)$的某一$p-primary$分支内，由推论2.4自然有$x=0$,若x不在任何一个$p-primary$分支内，将其分解为一些分支中元素的乘积，同样可证明$x=0$. □

该推论说明映射

$$\overline{Res}:=\prod_S Res_S:\widehat{H}^q(G,A)\to\prod_S\widehat{H}^q(S,A)$$

是单射,其中Res_S为限制映射$\widehat{H}^q(G,A)\to\widehat{H}^q(S,A)$.

2.7 Cup积

3 Galois上同调

参考文献

[1] 章璞，吴泉水.基础代数学讲义.Vol,66. 现代数学基础丛书.北京：高等教育出版社，2018.

[2] Joseph J. Rotman.*An Introduction to Homological Algebra*(Second Edition).Springer.

[3] J.W.S.Cassels,A.Frohlich.*Albebraic number theory*(ed).