反例及典型题

Lhzsl

2020 年 12 月 12 日

1.有限生成模的子模不必是有限生成的。

例：令$R=\{f(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0\in Q[X]|a_0\in Z\}$.可验证R关于多项式的乘法和加法成为环。其理想$I=\{f(X)\in R|a_0=0\}$作为R-模不是有限生成的。

2.度量空间中的有界闭集不一定是紧集。

例.在R上定义度量$d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$,则整数集Z是$(R,d)$中的有界闭集，同时由于$d(x_n,x)\to 0 \iff |x_n-x|\to 0$,因此这一度量空间和通常的度量空间有相同的开集，闭集，紧集，从而Z不是(R,d)中的紧集。

例.ℓ^∞表示有界实数序列组成的集合,定义其中元素$x=(x_n)_{n\in N}$范数是$||x||_\infty=sup_{n\in N}|x_n|$.则$\ell^\infty$中的单位球$B(0,1)=\{x\in\ell_\infty|||x||_{\infty\le 1}\}$是有界闭集,不是紧集，取$e_i=(\delta_i^n)_{n\in N}\in B(0,1),i=1,2,\cdots$,但$\{e_i\}$没有收敛子列，于是$B(0,1)$不是列紧的，但由于度量空间中紧性等价于列紧性，从而$B(0,1)$不是紧集。

3.99阶群是循环群。

证明：由$sylow$定理，存在$sylow-3$子群P，$sylow-11$子群N,且P,N都是正规子群，由于$|P|=3^2$,从而P是循环群，$|N|=11$，N也是循环群,设P，N的生成元分别为a,b.由$(9,11)=1$,得到$P\cap N=\{e\}$,考虑$b^{-1}aba^{-1}$,由于P,N都正规，于是$b^{-1}aba^{-1}\in P\cap N$,从而$b^{-1}aba^{-1}=e$,即$ab=ba$.由此可知$ab$的阶为99,从而该群是循环群。

4.p,q是两个不同的素数，设$p<q$,若$p\nmid q-1$,则pq阶群是Abel群，否则存在pq阶非Abel群。

证明:前半部分是简单的，只需利用$sylow$第三定理便可推的。下面证明后一部分，事实上，半直积$\mathbb{Z}_q\rtimes\mathbb{Z}_p$就不是Abel群，这里半直积的定义如下：设$H,N$为群，并给定同态$\alpha:H\to Aut(N)$.相应的半直积$N\rtimes_\alpha H$定义为如下的群(下标$\alpha$经常略去)：

(i)作为集合，$N\rtimes H$无非是积集$N\times H$;

(ii)二元运算是$(n,h)(n^{'},h^{'})=(n\alpha(h)(n^{'}),hh^{'})$,其中$n,n^{'}\in N,h,h^{'}\in H$.

设$\alpha:\mathbb{Z}_p\to Aut(\mathbb{Z}_q)$是同态,$\mathbb{Z}_q$的自同构必定把生成元映为生成元$\mathbb{Z}_q$的生成元为$\bar{1},\bar{2},\cdots,q\bar{-}1$,由此易得$\mathbb{Z}_q$共有q-1个自同构$\beta_i:\bar{1}\to\bar{i},i=1,\cdots,q-1$.

在$\mathbb{Z}_q\rtimes\mathbb{Z}_p$中

$$(1,0)(0,1)=(1+\alpha(0)(0),1+0)=(1,1)$$

$$(0,1)(1,0)=(\alpha(1)(1),1)$$

于是,若$\alpha(1)(1)\neq 1$,那么$\mathbb{Z}_q\rtimes\mathbb{Z}_p$便不是Abel群，这相当于$\alpha(1)\neq\beta_1$.注意到$\bar{1}$是$\mathbb{Z}p$中生成元，对于任一映射$\alpha$,只要给出$\bar{1}$在映射下的像，便确定了其它元素的像，而后需要检验是否保持运算，于

是我们可先假设$\alpha(1)=\beta_i$,那么由α是态射得到$\alpha(0)=\beta_1$,另一方面$\alpha(0)=\alpha(p\bar{1})=\alpha(\bar{1})^p=\beta_i^p$(注意自同构群中运算是乘法),从而必须有$\beta_i^p=\beta_1$.问题便为是否有这样的$\beta_i, 2\leq i\leq q-1$.由$\beta_i$的定义,上述问题等价于$x^p\equiv 1(mod \quad q), 2\leq x\leq q-1$是否有解,有下命题

$$p|q-1 \iff \exists 2\leq x\leq q-1, s.t, x^p\equiv 1(mod \quad q)$$

$\Rightarrow$)由Fermat小定理$\forall 2\leq x\leq q-1, s.t, x^{q-1}\equiv 1(mod \quad q)$.由$p|q-1$得$q-1=kp$,从而$(x^k)^p\equiv 1(mod \quad q)$.由于$k\leq q-3$,从而存在$2\leq y\leq q-1$使得在$\mathbb{Z}_q$中$y^k \quad mod \quad q$不为$\bar{1}$,这就是一个解。
$\Leftarrow$)在群F_q^*中考虑,其中每个元素得阶是$q-1$得因数,于是$p|q-1$.
综上,存在半直积$\mathbb{Z}_q\rtimes_\alpha\mathbb{Z}_p$不是Abel群.
5.设n阶矩阵A的极分解唯一,求证:A可逆。
证明:只需证明若A奇异($det(A)=0$),A的极分解不唯一。设A有极分解$A=UP$,其中U是一个酉矩阵,$P=\sqrt{AA^T}$,由于A奇异,得到P奇异。注意到U满足$A=UP$当且仅当

$$U(Px)=Ax,\forall x\in\mathbb{C}^n$$

设$\{x_1,\cdots,x_r\}$是P的像空间的一组正交基,将其扩张成$\mathbb{C}^n$的一组基$\{x_1,\cdots,x_n\}$,设V是一个酉变换,且在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & V' \end{pmatrix}$$

这里$I_{r\times r}$是单位矩阵,V'是任意酉矩阵,令$U_2=U_1V$,则有$U_2Px=U_1Px=Ax,\forall x\in\mathbb{C}^n$,于是$A=U_2P$,只要$V\neq I$,就有$U_1\neq U_2$.
6.设A是3阶实正交矩阵,且$det(A)=1$,证明

$$(Tr(A)-1)^2+\sum_{i<j}(a_{ij}-a_{ji})^2=4.$$

证明:设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

那么对于上述等式。

$$LHS=4+2(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33})-2(a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}+a_{23}a_{32})-2(a_{11}+a_{22}+a_{33})$$

$$=4+2(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})+2(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})+2(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-2(a_{11}+a_{22}+a_{33})$$

$$=4+2(minor(a_{33})+minor(a_{22})+minor(a_{11}))-2(a_{11}+a_{22}+a_{33}).$$

这里$minor(a_{11})=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$,其它两个类似。下面利用特征多项式完成证明。
设$Det(tI-A)=t^3-c_2t^2+c_1t-c_0$.直接计算便得到$c_0=Det(A)=1, c_1=minor(a_{33})+minor(a_{22})+minor(a_{11}), c_2=Tr(A)$.由于$A$是奇数阶方阵,必有实特征值,由于A是正交阵,这

一特征值必是-1或1,于是由$det(A)=1$,得到A有特征值1，代数特征多项式得到$1-c_2+c_1-c_0=0$,于是

$$minor(a_{33})+minor(a_{22})+minor(a_{11})=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

最后$LHS=4$.

7.举出一例是正规扩张但非可分扩张.

8.阶数小于60群的分类.

(i)所有素数阶群均是循环群，例如$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,57,59$阶群。

(ii)pq阶群G，这里$p\neq q$,p,q均为素数.

首先注意到若N_1,N_2是G的正规子群，且$N_1\cap N_2=\{e\},G=N_1N_2$.则有群同构

$$\alpha:N_1\times N_2\to G$$

$$(a,b)\mapsto ab$$

可以验证该映射是群同态，单射，满射，从而是群同构。

不妨设$p<q$,若$p\nmid q-1$,则群G的$sylow-p,sylow-q$群H,N均为正规子群,且$N\cap H=\{e\},NH=G$,从而$G\cong N\times H$,但$N\cong Z_{(p)},H\cong Z_{(q)},(p,q)=1$,由中国剩余定理知$Z_{(p)}\times Z_{(q)}\cong Z_{(pq)}$,于是$G\cong Z_{(pq)}$.

若$p|q-1$,由上面知存在非Abel群，下面说明的是任意两个pq阶非Abel群同构，此时$sylow-q$子群N是G的正规子群，

若N,H是G的子群，且N是正规子群，且$G=NH,N\cap H=\{e\}$,同态$\phi:H\to Aut(N)$定义为$\phi(h)(n)=hnh^{-1}$.H,N关于此同态的半直积记为$N\rtimes_\phi H$,则有同构

$$\beta:N\rtimes_\phi H\to G$$

$$(n,h)\mapsto nh$$

由于$G=NH$,映射显然是满射，又由于$|N\rtimes_\phi H|=|N||H|=|NH||N\cap H|=|G|$知该映射是单射，简单地验证即知该映射是同态。

由此可知非Abel群pq阶群必定同构于$sylow-p,sylow-q$子群H，N的一个半直积，即是上面构造的半直积，若该映射$\phi:H\to Aut(N)$是平凡的,即$\forall h\in H,n\in N,hn=nh$,则$G\cong N\rtimes_\phi H=N\times H\cong Z_{(pq)}$,于是G是循环群，从而$\phi$非平凡，但由于$p|q-1$,$\phi$只能是唯一的，事实上，设$H=<x|x^p=e>,N=<y|y^q=e>$,N的自同构群$Aut(N)$是q-1阶循环群，有唯一的p阶子群K，从而若$\phi:H\to Aut(N)$非平凡，则只能是$\phi(H)=K$.这就说明H,N的非Alel群半直积是唯一的，进而可知pq阶非Abel群都是同构的。

https://math.stackexchange.com/questions/1889482/classify-all-groups-with-order-pq-p-noredirect=1&lq=1 pq阶Abel群同构于$Z_{(pq)}$,所有pq阶非Abel群都是同构的

p^2阶群是循环群. 非平凡p群有非平凡的中心Z_G,于是$|Z_G|=p$,或$Z_G=G$,若为前者，则G/Z_G是p阶群，从而是循环群，若为后者，则G当然是循环群。

4阶群均是循环群，由有限Abel群分类定理知，4阶群同构于$Z_{(4)}$或$Z_{(2)}\oplus Z_{(2)}$.

8阶群，

9.设$\{a_n\}$是正实数序列，$a_{m+n}\le a_m+a_n$对任意m,n成立，证明$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$存在。

10.Z_p的自同构群是循环群。

11.证明：群$A_n(n\ge 4)$的中心$Z(A_n)=\{(1)\}$.

证明：任意非恒等置换$\sigma\in A_n$，存在$1\le i\ne j\le n$使得$\sigma(i)=j$,取$(jkl)\in A_n$,其中k,l不等于i,j中任何一个(注意到$n\ge 4$),于是$((jkl)\sigma)(i)=k,(\sigma(jkl))(i)=j$, 这就说明$Z(A_n)=\{(1)\}$.同样可证明$n\ge 3$

12.求A_5的所有共轭类。

设$x\in A_5$.先考虑S_5对自身的共轭作用，由轨道-稳定子公式

$$|orb(x)_{S_5}|=\frac{|S_5|}{|Stab(x)_{S_5}|}.$$

同样有公式

$$|orb(x)_{A_5}|=\frac{|A_5|}{|Stab(x)_{A_5}|}.$$

下面对$orb(x)_{A_5}$进行讨论：

1)若$Stab(x)_{S_5}\subseteq A_5$,则由上述公式$|orb(x)_{A_5}|=\frac{1}{2}|orb(x)_{S_5}|$,此时$x$在$S_5$中的共轭类在$A_5$中分裂成两个共轭类。事实上，此时任取$y\in orb(x)_{S_5}-orb(x)_{A_5}$,首先注意到存在$g\in S_5$使得$y=g^{-1}xg$,因此$x$与$y$有相同的奇偶性，故$y\in A_5$。但由于$y\notin orb(x)_{A_5}$,必有$g\in S_5-A_5$,即$g$为奇置换.于是任取$z\in Stab(x)_{S_5}$,存在$h\in S_5$使得$z=h^{-1}xh$.若$h$是偶置换，则$z$在$A_5$中与$x$共轭；若$h$是奇置换，则$z$在$A_5$中与$y$共轭。

2)$Stab(x)_{S_5}\not\subseteq A_5$:首先显然有

$$Stab(x)_{A_5}=A_5\cap Stab(x)_{S_5}.$$

其次由$[S_5:A_5]=2$,A_5是S_5的正规子群。由$Stab(x)_{S_5}\not\subseteq A_5$知$Stab(x)_{S_5}A_5=S_5$, 于是由第一群同态定理(或许有些地方称为第二群同态定理)

$$Stab(x)_{S_5}/Stab(x)_{S_5}\cap A_5\cong Stab(x)_{S_5}A_5/A_5=S_5/A_5.$$

于是$[Stab(x)_{S_5}:[Stab(x)_{S_5}]=2$,进而$|orb(x)_{A_5}|=|orb(x)_{S_5}|$.即$x$在$A_5$和$S_5$中有相同的共轭类。

利用上述分析，我们便可给出A_5的共轭类分类。

在S_n中，设置换σ的不相交的轮换分解式(包含所有的1−轮换)为

$$\sigma=(a_1a_2\cdots a_{l_1})(b_1b_2\cdots b_{l_2})\cdots(q_1q_2\cdots q_{l_t})$$

其中$l_1\ge l_2\ge\cdots\ge l_t$,且$l_1+\cdots+l_t=n$,则我们把有序整数组$(l_1,l_2,\cdots,l_t)$称为置换$\sigma$的型，也称为$n$的一个分拆。

易证得σ_1和σ_2在S_n中共轭当且仅当σ_1和σ_2同型。

于是S_n中共轭的个数等于n的分拆的个数。

5有7种分拆，$5=1+1+1+1+1, 5=4+1, 5=3+2, 5=3+1+1, 5=2+2+1, 5=2+1+1+1, 5=5.$
于是S_5有7个共轭类，其代表元分别为

$$(1),(12345),(1234)(5),(123)(45),(123)(4)(5)=(123),(12)(34)(5),(12)(3)(4)(5).$$

上述7个代表元中属于A_5的是$(1),(12345),(123),(12)(34)$. 若$\sigma_1$和$\sigma_2$在$A_5$中不同型，$\sigma_1$和$\sigma_2$在$A_5$中必不共轭。但若$\sigma_1$和$\sigma_2$同型，$\sigma_1$和$\sigma_2$在$A_5$中也可能不共轭。注意到$(45)(123)(45)^{-1}=(123)$,即$(45)\in Stab((123))_{S_5}$,但显然$(45)\notin A_5$,于是由上面2)$orb((123))_{A_5}=orb((123))_{S_5}$.同样地可得到$orb((12)(34))_{A_5}$
$orb((12)(34))_{S_5}$.
而对于(12345),可由:σ_1和σ_2在S_n中共轭当且仅当σ_1和σ_2同型这一结论得到

$$Stab((12345))_{S_5}=<(12345)>\subseteq A_5.$$

因之$<(12345)>$在A_5中分裂成两个共轭类.任取$\sigma\in S_5-A_5$,例如(12),则 $(12)(12345)(12)=(13452)$.于是A_5中有5个共轭类，其一组代表元为

$$(1),(123),(12)(34),(12345),(13452).$$