代数几何基础笔记

Lhzsl

2021 年 1 月 2 日

设X是拓扑空间,$\varphi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$是$X$上的层同态，对$X$上任意点$P\in X$,有诱导同态$\varphi_P:\mathcal{F}_P\to\mathcal{G}_P$(这里$\mathcal{F}_P=dir.\lim\limits_{P\in U}\mathcal{F}(U)$),其定义为：设$t_p\in\mathcal{F}_P$,则存在$X$上$P$的开邻域$P\in U,t^{'}\in\mathcal{F}(U)$使得$t^{'}|_P=t_P$.

$$\varphi_P(t_P):=\varphi(U)(t^{'})_P.$$

该定义与U的选取无关。事实上，若另有邻域$P\in W$及$t^{''}\in\mathcal{F}(W)$使得$t^{''}|_P=t_P$,则$t^{''}|_P=t^{'}|_P$,从而有X中p的开邻域$V\subset W\cap U$使得$t^{''}|_V=t^{'}|_V$.由φ是层同态，

$$\varphi(W)(t^{''})|_V=\varphi(V)(t^{''}|_V)=\varphi(V)(t^{'}|_V)=\varphi(U)(t^{'})|_V.$$

这就说明$\varphi(U)(t^{'})_P=\varphi(W)(t^{''})_P$.

命题1：设X是拓扑空间，$\mathcal{F}$是X上的预层(Presheaf)，则存在X上的一个层$\mathcal{F}^+$和层态射$\theta:\mathcal{F}\to\mathcal{F}^+$，使得对$X$上任意层$\mathcal{G}$及层态射$\phi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$,存在唯一的层态射$\psi:\mathcal{F}^+\to\mathcal{G}$使得$\phi=\psi\theta$.即下图交换

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \mathcal{F}^+ \arrow[dl, "\exists!\psi"] \\
& \mathcal{G} &
\end{tikzcd}.$$

对任意$P\in X$,$\theta_P:\mathcal{F}_P\to\mathcal{F}^+_P$是同构。我们称$\mathcal{F}^+$是$\mathcal{F}$的**伴随层**。

证明. 对X的任意开集U,定义$\mathcal{F}^+(U)$是满足下列条件的所有函数 $s:U\to\amalg_{P\in X}\mathcal{F}_P$组成的集合：
(i)对任意$P\in U$,有$s(P)\in\mathcal{F}_P$.
(ii)对任意$P\in X$,存在P在U中的开邻域U_P，使得存在一固定的$t\in\mathcal{F}(U_P)$对任意$Q\in U_P$满足$s(Q)=t_Q$.
可验证上述定义的$\mathcal{F}^+$是层，且$\mathcal{F}$到$\mathcal{F}^+$有自然的态射θ,其定义为:任取$t\in\mathcal{F}(U)$,对任意$Q\in U$定义$(\theta(U)(t))(Q)=t_Q$.显然有$\theta(U)(t)\in\mathcal{F}^+(U)$.
在该典型态射下，由上述条件(ii)得到:对X上任意开集U，若$s\in\mathcal{F}^+(U)$,则对任意$P\in U$,存在P在U中开邻域U_P及$t\in\mathcal{F}(U_P)$使得$s(Q)=t_Q=\theta(t)(Q)$,即$s|_{U_P}=\theta(t)$.令P跑遍U中的点，我们便得到:对任意$s\in\mathcal{F}^+(U)$,存在U的开覆盖$\{U_i\}_{i\in I}$及$s_i\in\mathcal{F}(U_i)$使得$\theta(s_i)=s|_{U_i}$.而这就说明对任意$P\in$

$X,\theta_P:\mathcal{F}_P\to\mathcal{F}_P^+$是满射，而单射是显然地，于是$\theta_P$是同构。
下面对任意态射$\phi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$定义$\psi:\mathcal{F}^+\to\mathcal{G}$。对任意$X$中开集$U$，及$s\in\mathcal{F}^+(U)$,由上知，存在$U$的开覆盖$\{U_i\}_{i\in I}$及$s_i\in\mathcal{F}(U_i)$使得$\theta(s_i)=s|_{U_i}$,这里需注意到$\theta$是单射，由

$$\theta(s_i|U_i\cap U_j)=\theta(s_i)|_{U_i\cap U_j}=s|U_i\cap U_j=\theta(s_j)|_{U_i\cap U_j}=\theta(s_j|_{U_i\cap U_j})$$

可得到$s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}$.
定义$\psi(U_i)(s|_{U_i})=\phi(U_i)(s_i)\in\mathcal{G}(U_i)$,由$\phi$与$X$上层$\mathcal{F}$的限制映射可交换得到

$$\phi(U_i)(s_i)|_{U_i\cap U_j}=\phi(U_i\cap U_j)(s_i|_{U_i\cap U_j})=\phi(U_i\cap U_j)(s_j|_{U_i\cap U_j})=\phi(U_j)(s_j)|_{U_i\cap U_j}.$$

于是$\phi(U_i)(s|_{U_i})(i\in I)$在$\{U_i\}_{i\in I}$的相交处是一致的。由此可定义出$U$上的一个截面$s'\in\mathcal{G}(U)$，该截面就记为$s$在$\psi(U)$下的像$\psi(U)(s)$.易验证由此定义出的$\psi$满足上述交换图，即$\phi=\psi\theta$.而由其构造过程知$\psi$是唯一的。

□

Remark:上述命题说明任给态射$\phi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$则存在唯一地态射$\psi:\mathcal{F}^+\to\mathcal{G}$使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \mathcal{F}^+ \arrow[dl, "\exists!\psi"] \\
& \mathcal{G} &
\end{tikzcd}.$$

反过来，若给定层态射$\psi:\mathcal{F}^+\to\mathcal{G}$,由于$\mathcal{F}$可通过$\theta$嵌入$\mathcal{F}^+$,我们就可得到一个预层态射$\phi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$,若有层态射$\varphi:\mathcal{F}^+\to\mathcal{G}$使得$\phi=\varphi\theta$,则由上述命题的唯一性知$\psi=\varphi$.

设X是拓扑空间，$\psi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$是$X$上的两个层的态射,定义$X$上预层$ker\psi$:对于任意开集$U\subseteq X$,

$$(ker\psi)(U):=ker(\psi(U)).$$

可直接验证$ker\psi$是X上层，称$ker\psi$为态射ψ的核。用$im\psi$表示X上预层

$$U\mapsto im(\psi(U))$$

的伴随层,称作态射ψ的像。
命题2: 对于任意$P\in X$,

$$ker(\psi_P)=(ker\psi)_P,$$

$$im(\psi_P)=(im\psi)_P.$$

证明. (i)$(ker\psi)_P\subseteq ker(\psi_P)$是显然地。反过来，任取$\overline{(s,W)}\in ker(\psi_P)$,我们有$\psi(W)(s)|_P=0$,故存在$P$的包含在$W$中的开邻域$U$使得$\psi(W)(s)|_U=0$,此即$\psi(U)(s|_U)=0$,于是$(s|_U,U)\in ker(\psi(U))$.故

$$\overline{(s,W)}=\overline{(s|_U,U)}\in ker(\psi(U))|_P\subseteq(ker\psi)_P,$$

这就说明$ker(\psi_P) \subseteq (ker\psi)_P$.从而两者相等。

(ii)需注意到伴随层在任一点处的stalk和原来预层在该处是stalk是一致的。于是$(im\psi)_P \subseteq im(\psi_P)$是显然地。反过来，任取 $s_P \in im(\psi_P)$,存在$t_P \in \mathcal{F}_P$使得$\psi_P(t_P) = s_P$,于是存在X上开集U及$t \in \mathcal{F}(U)$使得$(t,U)|_P = t_P$.于是$\psi(U)((t,U))|_P = \psi_P(t_P) = s_P$,注意到伴随层在任一点处的stalk和原来预层在该处是stalk是一致的,于是$s_P \in (im\psi)_P$.

$\square$

推论：$\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$是单射(满射)当且仅当对任意点$P \in X, \psi_P$是单射(满射).

证明.

$$\begin{aligned} \psi\ is\ injective &\iff ker(\psi) = 0 \\ &\iff ker(\psi)_P = 0, \forall P \in X \\ &\iff ker(\psi_P) = 0, \forall P \in X \\ &\iff \psi_P\ is\ injective, \forall P \in X. \end{aligned}$$

满射是同样的方法

$$\begin{aligned} \psi\ is\ surjective &\iff im(\psi) = \mathcal{G} \\ &\iff im(\psi)_P = \mathcal{G}_P, \forall P \in X (for\ both\ sides\ are\ sheaves) \\ &\iff im(\psi_P) = \mathcal{G}_P, \forall P \in X \\ &\iff \psi_P\ is\ surjective, \forall P \in X. \end{aligned}$$

$\square$

命题3：对任意X上开集U,任意层$\mathcal{F}$,记$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$,证明：$\Gamma(U, \cdot)$是左正合函子，即如果

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}''$$

是层的正合列，则

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}') \xrightarrow{\phi(U)} \Gamma(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi(U)} \Gamma(U, \mathcal{F}'')$$

是群的正合列。

证明. 由上一命题知对任意$P \in X$,

$$0 \to \mathcal{F}'_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{F}_P \xrightarrow{\psi_P} \mathcal{F}''_P$$

是正合列。可得到对任意$P \in U, \phi_P$是单射，从而$\phi(U)$是单射。下面只需证明$im(\phi(U)) = ker(\psi(U))$.任取$s \in \Gamma(U, \mathcal{F}')$ 对任意$P \in X, \psi_P(\phi_P(s_P)) = 0$,因此 $\psi(\phi(s))_P = 0$,这就说明$\psi(\phi(s)) = 0$.即$im(\phi(U)) \subseteq ker(\psi(U))$.

任取$t \in Ker\psi$，对任意$P \in U$,存在$s_P \in \mathcal{F}'_P$使得$\phi_P(s_P) = t_P$,这就说明存在U的开覆盖$\{U_i\}_{i\in I}$及$s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F}')$使得$\phi_{s_i} = t|_{U_i}$，由于$\phi(s_i|_{U_i\cap U_j}) = \phi(s_j|_{U_i\cap U_j}) = t|_{U_i\cap U_j}$，而$\phi$是单射，故$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_I\cap U_j}$,于是存在$s \in \Gamma(U, \mathcal{F}')$使得$s|_{U_i} = s_i$,从而$\phi(s) = t$,即 $ker(\psi(U)) \subseteq im(\phi(U))$.

□

Remark:(i)$\Gamma(U, \cdot)$不是右正合的例子:设$X = \mathbb{C} - \{0\}$,$\mathcal{O}(U)$表示U上所有全纯函数组成的加法群，$\mathcal{O}^*(U)$表示U上所有非零全纯函数组成的乘法群。考虑态射

$$exp : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*,$$

对任意$f \in \mathcal{O}(U), exp(f) = e^{2\pi i f} \in \mathcal{O}^*(U)$.由于对数函数$log$在$X = \mathbb{C} - \{0\}$上不是全纯函数，$z \in \mathcal{O}^*(X)$没有原像，故$\exp(X)$不是满射。局部地，对任意点$P \in X, exp_P : \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}^*_P$是满射，故$exp : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$是满射。
(ii)如果对于X上任何两个开集U, V且$V \subseteq U$,限制映射$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$是满射，则称$X$上层$\mathcal{F}$为flasque sheaf。可以证明上述命题中若$\mathcal{F}'$是flasque sheaf，则$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\psi(U)} \mathcal{F}''(U)$是满射。

两个拓扑空间上的层可由其间的映射相互转化。
设$f : X \to Y$是连续映射。$\mathcal{F}$是X上的层，$\mathcal{F}$的像$f_*\mathcal{F}$(direct image)是Y上的层，其定义为,对于Y上的任意开集V,

$$(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)).$$

对于Y上的层$\mathcal{G}$,定义$\mathcal{G}$的逆像$f^{-1}\mathcal{G}$为X上预层

$$U \mapsto dir. \lim_{f(U)\subset V} \mathcal{G}(V)$$

的伴随层。

对于X上的任意层$\mathcal{F}$,我们有典型的态射：

$$f^{-1}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

定义如下：由$f^{-1}f_*\mathcal{F}$是下述预层

$$U \mapsto dir. \lim_{f(U)\subset V} f_*\mathcal{F}(V) = dir. \lim_{U\subset f^{-1}(V)} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

的伴随层，我们只需定义$U \mapsto dir. \lim_{U\subset f^{-1}(V)} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$到$\mathcal{F}$的预层态射。我们定义

$$dir. \lim_{U\subset f^{-1}(V)} \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{F}(U)$$

是由限制映射$\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{F}(U)$ 诱导的。这样就得到一个典型态射$f^{-1}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

对于Y上任意层$\mathcal{G}$,也有典型态射

$$f_*f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{G}.$$

其定义为:对于Y中任意开集W,由于$f(f^{-1}(W))\subset W$,我们有自然的映射

$$\mathcal{G}(W)\to dir.\lim_{f(f^{-1}(W))\subset V}\mathcal{G}(V),$$

该映射将$\mathcal{G}(W)$中的一个元素(s,W)映射为其在上述直极限中的代表类$\overline{(s,E)}$,将该自然映射与态射

$$dir.\lim_{f(f^{-1}(W))\subset V}\mathcal{G}(V)\to f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(W))$$

复合起来便得到映射 $\mathcal{G}(W)\to f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(W))=(f_*f^{-1}\mathcal{G})(W)$,因此有层态射 $\mathcal{G}\to f_*f^{-1}\mathcal{G}$.

对于X上任意层$\mathcal{F}$及Y上任意层$\mathcal{G}$,我们可定义下述映射

$$\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}:Hom(\mathcal{G},f_*\mathcal{F})\to Hom(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F}).$$

其定义为,对于任意态射$\phi:\mathcal{G}\to f_*\mathcal{F}$, $\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\phi)$为下述映射的复合

$$f^{-1}\mathcal{G}\xrightarrow{f^{-1}\phi}f^{-1}f_*\mathcal{F}\to\mathcal{F}.$$

具体地，对于X上任意开集U,有下图

$$\begin{tikzcd}
 & f^{-1}\mathcal{G}(U) \arrow[r, "f^{-1}\phi"] & f^{-1}f_*\mathcal{F}(U) \arrow[r] & \mathcal{F}(U) \\
U\to dir.\lim\limits_{f(U)\subset V}\mathcal{G}(V) \arrow[ur, "associated"] \arrow[rr, "\phi"] & & U\to dir.\lim\limits_{U\subset f^{-1}(V)}\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \arrow[u, "associated"] \arrow[ur, "restrictions"'] &
\end{tikzcd}$$

注意到上图中映射$f^{-1}\phi$是由ϕ诱导得到的.
定义映射

$$\beta_{\mathcal{F},\mathcal{G}}:Hom(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F})\to Hom(\mathcal{G},f_*\mathcal{F})$$

如下：对于任意 $\psi:f^{-1}\mathcal{G}\to\mathcal{F}$,定义$\beta_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\psi)$是下列映射的复合

$$\mathcal{G}\to f_*f^{-1}\mathcal{G}\xrightarrow{f_*\psi}f_*\mathcal{F},$$

具体地，对于Y中任意开集W,

$$\begin{tikzcd}
 & f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(W))=(f_*f^{-1}\mathcal{G})(W) \arrow[dr, "f_*\psi(W)=\psi(f^{-1}(W))"] & \\
\mathcal{G}(W)\arrow[r] & dir.\lim\limits_{f(f^{-1}(W))\subset V}\mathcal{G}(V) \arrow[u, "associated"] \arrow[r] & \mathcal{F}(f^{-1}(W))=f_*\mathcal{F}(W)
\end{tikzcd}$$

由命题一中态射$\psi:\mathcal{F}^+\to\mathcal{G}$的唯一性知有对任意$(s,W)\in\mathcal{G}(W)$,

$$\beta_{\mathcal{F},\mathcal{G}}\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\phi)(s,W)=\phi(s,W),$$

即 $\beta_{\mathcal{F},\mathcal{G}}\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$是恒等映射。也有

$$\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}\beta_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\psi)=\psi,$$

即$\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}\beta_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$是恒等映射。

对于一个环A,我们可定义其上的环层$\mathcal{O}_{SpecA}$,其定义为：赋$SpecA$于Zariski拓扑,对于$SpecA$中的任何开集U,定义$\mathcal{O}_{SpecA}(U)$是满足下列条件所有函数$s: U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in SpecA} A_{\mathfrak{p}}$组成的集合：
(i)对于任意$\mathfrak{p} \in U$,有$s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$.
(ii)对于任意$\mathfrak{p} \in U$.U中存在包含$\mathfrak{p}$的开邻域$U_{\mathfrak{p}}$,对任意$\mathfrak{q} \in U_{\mathfrak{p}}$,存在$a, f \in A, f \notin \mathfrak{q}$,使得$s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{q}}$.
定义环层上限制映射为函数的限制映射。称$(SpecA, \mathcal{O}_{SpecA})$为$A$的谱$(Spectrum)$.$\mathcal{O}_{SpecA}$常简记为$\mathcal{O}$.

Remark:立即注意到上述定义与前文中伴随层定义极为相似，即$\mathcal{O}$或许为$SpecA$上某一预层的伴随层。事实上，对于$SpecA$中的任意开集U,定义U上常值函数集

$$\{\frac{a}{f} : \mathfrak{p} \mapsto \frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{p}} | a \in A, f \notin \mathfrak{p} \quad for \quad \forall \mathfrak{p} \in U.\},$$

这就形成$SpecA$上的一个预层,而$\mathcal{O}_{SpecA}$是该预层的伴随层。

命题4：(i)对于任意$\mathfrak{p} \in SpecA$,有典型同构$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$.
(ii)对于任意$f \in A$,有典型同构$\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$.特别地，取$f = 1$,得到$\mathcal{O}(SpecA) \cong A$.

分析:对于(i)我们可利用命题1中预层在一点上的stalk和其伴随层在该点的stalk同构得到，而这只需要说明上述Remark中定义的预层在$\mathfrak{p}$处的stalk等同于$A_{\mathfrak{p}}$.令

$$D(f) = SpecA - V((f)) = \{\mathfrak{p} \in SpaecA | f \notin \mathfrak{p}\},$$

则$D(f)$是$SpecA$中开集，且$D(f)(f \in A)$为$SpecA$的一组拓扑基。任取$f \notin \mathfrak{p}$,则$\mathfrak{p} \in D(f)$. $(\frac{a}{f}, D(f))$在$\mathfrak{p}$的germ等同于$\frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{p}}$.反过来，上述预层在$\mathfrak{p}$处的germ显然等同于$A_{\mathfrak{p}}$的一个子集.于是两者相等。于是$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$.
下面我们直接证明(i):对于$\mathfrak{p}$的任意邻域U，定义同态$\mathcal{O}(U) \to A_{\mathfrak{p}}$为$s \mapsto s(\mathfrak{p})$.该映射诱导态射

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}}.$$

利用上述分析，我们很容易得到该诱导态射是满射。下面证明该映射是单射。设$(s, U) \in \mathcal{O}_U$满足$s(\mathfrak{p}) = 0 \in A_{\mathfrak{p}}$,由定义，$U$中存在$\mathfrak{p}$的一个开邻域$U_{\mathfrak{p}}$,对任意$\mathfrak{q} \in U_{\mathfrak{p}}$,存在$a, \in A, f \in \mathfrak{q}, s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{q}}$.由于$s(p) = 0$,故存在$t \notin \mathfrak{p}$,使得$at = 0$,因对任意 $\mathfrak{q} \in D(f) \cap D(t)$,我们有$\frac{a}{f} = \frac{at}{ft} = 0 \in A_{\mathfrak{q}}$.显然$U_{\mathfrak{p}} \subseteq D(f)$,因此 $s|_{U_{\mathfrak{p}} \cap D(t)} = 0$,注意到$U_{\mathfrak{p}} \cap D(t)$是$\mathfrak{p}$的开邻域，于是$\mathfrak{p} \to A_{\mathfrak{p}}$是单射。
对于(ii),这里省略证明(详细证明请看扶磊《代数几何》Page19)，只说明其态射。定义态射$A_f \to \mathcal{O}(D(f))$为，对任意$\frac{a}{f^k} \in A_f$,将其看作常值函数

$$\frac{a}{f^k} : D(f) \to \coprod_{\mathfrak{p}\in SpecA} A_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p} \mapsto \frac{a}{f^k} \in A_{\mathfrak{p}}.$$

可证明该态射是双射，由此知$\mathcal{O}(D(f))$中元素均是常值函数。

一个**环质空间(ringed space)**包含一个拓扑空间X及X上的环层$\mathcal{O}_X$，记为$(X,\mathcal{O}_X)$.如果对任意的$P\in X$,$\mathcal{O}$在P处的stalk$\mathcal{O}_{X,P}$是局部环(即有唯一地极大理想)，则称$(X,\mathcal{O}_X)$为局部环质空间(locally ringed space).
设$(X,\mathcal{O}_X)$和$(Y,\mathcal{O}_Y)$是两个环质空间，$(X,\mathcal{O}_X)$到$(Y,\mathcal{O}_Y)$的态射包含一个连续映射$f:X\to Y$及层同态$f^\sharp:\mathcal{O}_Y\to f_*\mathcal{O}_X$，记为$(f,f^\sharp)$.对于任意$P\in X$, $f^\sharp$诱导了态射$\mathcal{O}_{Y,f(P)}\to(f_*\mathcal{O}_X)_{f(P)}$, 该映射与嵌入$(f_*\mathcal{O}_X)_{f(P)}\to\mathcal{O}_{X,P}$的复合记为

$$f_P^\sharp:\mathcal{O}_{Y,f(P)}\to\mathcal{O}_{X,P}.$$

设$(X,\mathcal{O}_X)$和$(Y,\mathcal{O}_Y)$是两个局部环质空间，局部环质空间的态射是指一个环质态射$(f,f^\sharp):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$，且满足对任意$P\in X$, $f_P^\sharp:\mathcal{O}_{Y,f(P)}\to\mathcal{O}_{X,P}$是局部态射 (局部态射是两个局部环$A,B$的环同态$f:A\to B$，且满足$f^{-1}(\mathfrak{m}_A)=\mathfrak{m}_B$)。

命题5：设$\phi:A\to B$是环同态，则ϕ自然地诱导一个局部环层空间的同态。

$$(f,f^\sharp):(SpecB,\mathcal{O}_{SpecB})\to(SpecA,\mathcal{O}_{SpecA}).$$

证明. 任给环同态$\phi:A\to B$,可定义态射$f:SpecB\to SpecA$为$\forall\mathfrak{q}\in SpecB, f(\mathfrak{q})=\phi^{-1}(\mathfrak{q})$.对于$A$中的任意理想$\mathfrak{a}$,设$\mathfrak{b}$是$\phi(\mathfrak{a})$在$B$中生成的理想，则

$$\mathfrak{q}\in f^{-1}(V(\mathfrak{a}))\Longleftrightarrow f(\mathfrak{q})\in V(\mathfrak{a})\Longleftrightarrow\phi^{-1}(\mathfrak{q})\supseteq\mathfrak{a}\Longleftrightarrow\mathfrak{q}\supseteq\mathfrak{b}\Longleftrightarrow\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{b}).$$

于是$f^{-1}(V(\mathfrak{a}))=V(\mathfrak{b})$.即$f$连续。
下面定义$f^\sharp$.任取$SpecA$中开集V,$\mathcal{O}_{SpecA}(V)$中任一截面$s:V\to\coprod_{\mathfrak{p}\in SpecA}A_\mathfrak{p}$. $f^\sharp(V):\mathcal{O}_{SpecA}(V)\to f_*\mathcal{O}_{SpecB}(V)=\mathcal{O}_{SpecB}(f^{-1}(V))$. 注意到对于任意$\mathfrak{q}\in f^{-1}(V)$,我们有$f(\mathfrak{q})=\phi^{-1}(\mathfrak{q})\in V$.
ϕ诱导映射$\phi_\mathfrak{q}:A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q})}\to B_\mathfrak{q},\phi_\mathfrak{q}(\frac{a}{s}):=\frac{\phi(a)}{\phi(s)}$,显然下图交换

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q})} \arrow[r, "\phi_\mathfrak{q}"] & B_\mathfrak{q}
\end{tikzcd}$$

对任意$\mathfrak{q}\in f^{-1}(V)$,定义$f^\sharp(V)$为

$$f^\sharp(V)(s)(\mathfrak{q}):=\phi_\mathfrak{q}(s(f(\mathfrak{q})))\in B_\mathfrak{q}.$$

需验证$f^\sharp(V)(s)$满足定义(ii):由于$f(\mathfrak{q})\in V$,存在$f(\mathfrak{q})$在V中的开集$V_{f(\mathfrak{q})}$使得，对任意 $\mathfrak{p}\in V_{f(\mathfrak{q})}$,存在$a\in A,t\notin\mathfrak{p},s(\mathfrak{p})=\frac{a}{t}$.由此知$\mathfrak{q}$存在开邻域$f^{-1}(V_{f(\mathfrak{q})})$，任取$\mathfrak{q}'\in f^{-1}(V_{f(\mathfrak{q})})$,

$$f^\sharp(s)(\mathfrak{q}')=\phi_{\mathfrak{q}'}(s(f(\mathfrak{q}')))=\frac{\phi(a)}{\phi(t)}.$$

由$t \notin f(\mathfrak{q}') = \phi^{-1}(\mathfrak{q}')$得到$\phi(t) \notin \mathfrak{q}'$.
为证$f^\sharp_\mathfrak{q} : \mathcal{O}_{SpecA,f(\mathfrak{q})} \to \mathcal{O}_{SpecB,\mathfrak{q}}$是局部态射，只需注意下面图是交换的，

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{SpecA,f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "f^\sharp_\mathfrak{q}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{SpecB,\mathfrak{q}} \arrow[d] \\
A_{f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "\phi_\mathfrak{q}"] & B_\mathfrak{q}
\end{tikzcd}$$

其中竖直方向上是赋值映射,由命题4中(i)得该映射是同构，于是由$\phi_\mathfrak{q}$是局部映射，得到$f^\sharp_\mathfrak{q}$是局部映射。

□

命题6:任意$(f, f^\sharp) : (SpecB, \mathcal{O}_{SpecB}) \to (SpecA, \mathcal{O}_{SpecA})$是由某个$A$到$B$的环同态用上述命题中的方法诱导的。

证明. 由$\mathcal{O}_{SpecA}(SpecA) \cong A, \mathcal{O}_{SpecB}(SpecB) \cong B$,知存在环同态$\phi : A \to B$使下图交换

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{SpecA}(SpecA) \arrow[r, "f^\sharp"] & \mathcal{O}_{SpecB}(SpecB),
\end{tikzcd}$$

同样地，对任意$\mathfrak{q} \in SpecB$,我们可以定义环态射$\phi'_\mathfrak{q} : A_{f(\mathfrak{q})} \to B_\mathfrak{q}$使下图交换

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{SpecA,f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "f^\sharp_\mathfrak{q}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{SpecB,\mathfrak{q}} \arrow[d] \\
A_{f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "\phi'_\mathfrak{q}"] & B_\mathfrak{q},
\end{tikzcd}$$

由于$f^\sharp_\mathfrak{q}$是局部态射，$\phi'_\mathfrak{q}$也是局部态射。
注意到下面交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{SpecA}(SpecA) \arrow[r, "f^\sharp"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{SpecB}(SpecB) \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{SpecA,f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "f^\sharp_\mathfrak{q}"] & \mathcal{O}_{SpecB,\mathfrak{q}}.
\end{tikzcd}$$

与上面两个复合便得到交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "p_B"] \\
A_{f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "\phi'_\mathfrak{q}"] & B_\mathfrak{q}
\end{tikzcd}$$

其中$p_A : A \to A_{f(\mathfrak{q})}, p_B : B \to B_\mathfrak{q}$是典范态射，即$p_A(a) = \frac{a}{1}, p_B(b) = \frac{b}{1}$. 于是

$$\phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \phi^{-1}p_B^{-1}(\mathfrak{q}B_\mathfrak{q}) = p_A^{-1}(\phi'_\mathfrak{q})^{-1}(\mathfrak{q}B_\mathfrak{q}) = p_A^{-1}(f(\mathfrak{q})A_{f(\mathfrak{q})}) = f(\mathfrak{q}),$$

第三个等号是由于$\phi'_{\mathfrak{q}}$是局部态射。因此$\phi^{-1}(\mathfrak{q})=f(\mathfrak{q})$. 由对任意$a\in$,$\phi'_{\mathfrak{q}}(a)=\phi(a)$知，对任意$a,b\in A$, $\phi'_{\mathfrak{q}}(\frac{a}{b})=\frac{\phi(a)}{\phi(b)}=\phi_{\mathfrak{q}}(\frac{a}{b})$.即$\phi'_{\mathfrak{q}}=\phi_{\mathfrak{q}}$.
对于$SpecA$的任意开集V及任意$\mathfrak{q}\in f^{-1}(V)$,我们有下述交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{SpecA}(V) \arrow[r, "f^\sharp"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{SpecB}(f^{-1}(V)) \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{SpecA,f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "f^\sharp_{\mathfrak{q}}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{SpecB,\mathfrak{q}} \arrow[d] \\
A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q})} \arrow[r, "\phi_{\mathfrak{q}}"] & B_{\mathfrak{q}}
\end{tikzcd}$$

其中竖直方向上为取值映射(分别为在$\phi^{-1}(\mathfrak{q})$及$\mathfrak{q}$处的取值)，于是任取$\mathcal{O}_{SpecA}(U)$中截面$s:V\to\coprod_{\mathfrak{p}\in SpecA}A_{\mathfrak{p}}$,我们有

$$f^\sharp(s)(\mathfrak{q})=\phi_{\mathfrak{q}}(s(\phi^{-1})(\mathfrak{q})).$$

因此 $(f,f^\sharp)$由ϕ诱导。 □

上面两个命题说明$Hom(SpecB,SpecA)$(局部环质空间之间的态射)和$Hom_{ring}(A,B)$(环同态)之间存在一一对应。

定义:若局部环层空间$(X,\mathcal{O}_X)$同构于$(SpecA,\mathcal{O}_{SpecA})$，这里$A$是某个环，则称$(X,\mathcal{O}_X)$是**仿射概型(Affine scheme)**。若局部环层空间$(X,\mathcal{O}_X)$存在开覆盖$\{U_i\}_{i\in I}$使得，对任意i, $(U_i,\mathcal{O}_X|_{U_i})$是仿射概型，则称$(X,\mathcal{O}_X)$是**概型(Scheme)**。

在上一命题中将$SpecB$换为任意概型其结论依然成立。我们下面用$Mor(X,Y)$表示X到Y的概型态射组成的集合。
命题7:设Y是仿射概型，对于任意概型X, 我们有两个集合之间的一一对应

$$\rho:Mor(X,Y)\to Hom_{ring}(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(X)).$$

证明. 任取$(f,f^\sharp)\in Mor(X,Y)$，定义$\rho((f,f^\sharp))=f^\sharp(Y)$.
设$X=\cup_i U_i$,其中U_i是仿射开集。我们有下面交换图

$$\begin{tikzcd}
Mor(X,Y) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\alpha"'] & Hom(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(X)) \arrow[d, "\beta"'] \\
\prod_i Mor(U_i,Y) \arrow[r, "\gamma"] & \prod_i Hom(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(U_i))
\end{tikzcd}$$

由上述两命题γ是双射。由α是单射知ρ是单射。任取$\varphi\in Hom(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(X))$; φ和限制映射$\mathcal{O}_X(X)\to\mathcal{O}_X(U_i)$的复合用$\gamma$拉回的像记为$f_i\in Mor(U_i,Y)$. 对于任何仿射开集$V\subseteq U_i\cap U_j$,由于$f_i|_V$和$f_j|_V$在 $Hom(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(V))$中有相同的像，故$f_i|_V=f_j|_V$,于是 $f_i|_{U_i\cap U_j}=f_j|_{U_i\cap U_j}$.这样我们就可以把$f_i$沾成一个态射$f\in Mor(X,Y)$.再由$\beta$是单射知 $\rho(f)=\varphi$.即ρ是满射。 □

设$(X,\mathcal{O}_X)$是概型，$f\in\mathcal{O}_X(X)$,用X_f表示f在X上点P处germ为可逆元的P点的全体。注意若X为仿射概型$SpecA$,则$\mathcal{O}_{SpecA}(SpecA)\cong A$,由前面可知$f$是常值映射，此时$X_f$即为$D(f)$.
关于X_f有以下性质:
命题8:设$(X,\mathcal{O}_X)$是概型, (i)对任意$f\in\mathcal{O}_X(X)$,X_f是开集。它是空集当且仅当X存在开覆盖$\{U_i\}_{i\in I}$使得$f|_{U_i}$是幂零。对任意$f,g\in\mathcal{O}_X(X)$,我们有$X_f\cap X_g=X_{fg}$.
(ii)设$(\phi,\phi^\sharp):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$是概型态射，$f\in\mathcal{O}_Y(Y)$,则有 $\phi^{-1}(Y_f)=X_{\phi^\sharp(f)}$.
(iii)设X能被有限个仿射开子概型$\{U_i\}_{i\in I}$覆盖，且对于任意$i,j\in I$,$U_i\cap U_j$能被有限个仿射开子概型覆盖.令$A=\mathcal{O}_X(X)$,任取$f\in A$,有$\mathcal{O}(X_f)\cong A_f$.
证明:(i)设X有仿射开覆盖$\{U_i\}_{i\in I},U_i=SpecA_i$,令$f_i=f|_{U_i}$,则$X_f\cap U_i=D(f_i)$为开集($\forall i\in I$)，于是$X_f$为开集。
若X_f为空集，则$D(f_i)=\emptyset$,由此知 $f_i\in\sqrt{0}$,即$f|_{U_i}=f_i$幂零.反过来也是显然地。
对于任意$P\in X,(fg)_P$是可逆元当且仅当f_P,g_P均是可逆元,于是$X_f\cap X_g=X_{fg}$.
(ii)对于任意$P\in X$及$f\in\mathcal{O}_Y(Y)$,由于$\phi^\sharp_P:\mathcal{O}_{Y,\phi(P)}\to\mathcal{O}_{X,P}$是局部态射，$f_{\phi(P)}$可逆当且仅当$(\phi^\sharp(f))_P$可逆，即$\phi(P)\in Y_f\Leftrightarrow P\in X_{\phi^\sharp(f)}$，此即$\phi^{-1}(Y_f)=X_{\phi^\sharp(f)}$.
(iii)限制映射$A=\mathcal{O}_X(X)\to\mathcal{O}_{X_f}$将$f$映射为可逆元，因此这就诱导态射$A_f\to\mathcal{O}_X(X_f)$.下面证明这是同构.
首先注意到，对任意$i,U_i=SpecA_i$，令f_i为f在限制映射$\mathcal{O}_X(X)\to\mathcal{O}_X(U_i)=A_i$下的像。于是$X_f\cap U_i=D(f_i)(D(f_i)\subseteq U_i)$.

任取$s\in\mathcal{O}_X(X)$满足$s|X_f=0$,我们将证明存在正整数n使得$f^ns=0$在$\mathcal{O}_X(X)$中成立，这就等价于$A_f\to\mathcal{O}_X(X_f)$是单射。
由$s|_{X_f}=0$知:$s|_{U_i}$在限制映射$\mathcal{O}_X(U_i)\to\mathcal{O}_X(U_i\cap X_f)$的像为0.注意到下交换图 (命题4中(ii))

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & (A_i)_{f_i} \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathcal{O}_X(U_i) \arrow[r] & \mathcal{O}_X(U_i\cap X_f)
\end{tikzcd}$$

因此由$s|_{U_i\cap X_f}$得到存在正整数n_i使得$f_i^{n_i}s|_{U_i}=0$在U_i中成立。由$\{U_i\}_{i\in I}$是有限覆盖知存在正整数n使得$f_i^ns|_{U_i}=0$对任意i成立。于是$f^ns=0$.
下面我们证明对任意$t\in\mathcal{O}_X(X_f)$,存在正整数n,使得f^nt为$\mathcal{O}_X(X)=A$中某一元素s在限制映射$\mathcal{O}_X(X)\to\mathcal{O}_X(X_f)$下的像。此时$\frac{s}{f^n}$在映射$A_f\to\mathcal{O}_X(X_f)$下的像便为$t$, 这就证明$A_f\to\mathcal{O}_X(X_f)$为满射.

同样地，利用上面交换图可得：存在正整数n,使得对任意i, $f_i^nt|_{U_i\cap X_f}$为$\mathcal{O}_X(U_i)=A_i$中某一元素t_i 在限制映射$\mathcal{O}_X(U_i)\to\mathcal{O}_X(U_i\cap X_f)$下的像。注意到

$$(t_i|_{U_i\cap U_j}-t_j|_{U_i\cap U_j})|_{U_i\cap U_j\cap X_f}=t_i|_{U_i\cap U_j\cap X_f}-t_j|_{U_i\cap U_j\cap X_f}=f_i^nt|_{U_i\cap U_j\cap X_f}-f_j^nt|_{U_i\cap U_j\cap X_f}=0$$

因此类似单射中证明过程知存在正整数m，使得对任意$i,j\in I$,

$$f^m(t_i|_{U_i\cap U_j}-t_j|_{U_i\cap U_j})=0.$$

因此我们由$f_i^m t_i (i \in I)$得到$\mathcal{O}_X(X) = A$中一个元素s使得$s|_{X_f} = f^{m+n} t$.