微分模

Lhzsl

设A是环，M是一个$A-$模，从A到M的一个**导数**是指一个映射 $D : A \to M$满足：

$$D(a+b) = D(a) + D(b), D(ab) = aD(b) + bD(a)$$

对任意$a, b \in A$成立。所有这样的导数组成的集合记为$Der(A, M)$。规定$(D + D')a = Da + D'a, (aD)b = a(Db), \forall a, b \in A$,则$Der(A, M)$具有$A-$模结构。

若A透过映射$f : k \to A$成为$k-$代数，若导数$D \in Der(A, M)$满足$D \circ f = 0$，则称D为$k-$导数，所有这些$k-$导数组成的集合记为$Der_k(A, M)$，它是$Der(A, M)$的$A-$子模。对任意 $D \in Der(A, M)$,易知 $D(1) = D(1) + D(1)$，从而$D(1) = 0$,由此,若将A看作$\mathbb{Z}-$模，则$Der(A, M) = Der_{\mathbb{Z}}(A, M)$.

特别地，若$M = A$,则简记$Der_k(A, A)$为$Der_k(A)$.

设A是一个$k-$代数，N为$A-$模，则直和$A \oplus N$具有$k-$模结构，定义$A \oplus N$中元素的乘法为：

$$(a, x)(a', x') = (aa', ax' + a'x), \forall a, a' \in A, x, x' \in N.$$

则$A \oplus N$成为$k-$代数，用$A * N$表示该$k-$代数。

一般地，给定$k-$代数组成的范畴中交换图

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] & A \\
& C \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "h"]
\end{tikzcd}$$

这里将g看作固定的,称h是g的一个**提升**。用N表示B的理想$Kerf$,若$h' : C \to B$是g的另一个提升，则$(h - h')(C) \subseteq N$，从而$h - h'$可看作从C到N的映射。若$N^2 = 0$,则N是一个$f(B) \cong B/N-$模：若$a \in f(B)$,取a的一个原像b，对于任意$n \in N$，定义$an := bn$,由于$N^2 = 0$，该定义与a的原像选取无关，从而是良好定义的。进一步由映射$g : C \to f(B) \subseteq A$,$N$可看作$C-$模。

断言：$h - h' : C \to N$是C到$C-$模N的一个$k-$导数。

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, hook] & B \arrow[r, "f"] & A \\
& & C \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "{h,h'}"'] \arrow[ull, "h-h'"]
\end{tikzcd}$$

证明. 由于$h, h' : C \to B$均为$k-$代数范畴里的态射，故自然有$h \circ (k \to C) = k \to B = h' \circ (k \to C)$，即$(h - h') \circ (k \to C) = 0$. 剩下便只需证明：$(h - h')(ab) = a(h - h')b + b(h - h')a$对任

意$a,b\in C$成立。这里只需注意C中元素a,b是如何作用在N上。用上述作用的定义，a的作用，即相当于取$g(a)$在f下的任意一个原像去作用，对b同样是。于是

$$\begin{aligned}&a(h-h')b+b(h-h')a\\&=h(a)(h-h')b+h'(b)(h-h')(a)\\&=h(ab)-h'(ab)\\&=(h-h')(ab).\end{aligned}$$

上述式中，$h(a),h'(b)$分别为$g(a),g(b)$在f下的一个原像。由上式看出，$h-h'$确实为C到$C-$模N的一个$k-$导数。 □

设k是环，A为$k-$代数，用$\mathscr{M}_A$表示$A-$范畴，则$M\mapsto Der_k(A,M)$为$\mathscr{M}_A$到自身的协变函子。下面说明该函子为可表函子. 即存在$A-$模M_0及导数$d\in Der_k(A,M_0)$满足下面泛性质：
对任意$A-$模M, 导数$D\in Der_k(A,M)$，存在唯一的$A-$线性映射$f:M_0\to M$，使得$D=f\circ d$.即有下交换图

$$\begin{tikzcd} & M_0 \arrow[dd, dotted, "\exists ! f"] \\ A \arrow[ur, "d"] \arrow[dr, "D"'] & \\ & M \end{tikzcd}$$

证明. 证明是构造性的。定义$\mu:A\otimes_k A\to A$为$\mu(x\otimes y)=xy$；则μ是$k-$代数同态。令

$$I=Ker\mu,\ \ \Omega_{A/k}=I/I^2,\ \ B=(A\otimes_k A)/I^2;$$

则μ诱导处出同态$\mu':B\to A$且有下述$k-$代数正合列

$$0\to\Omega_{A/k}\to B\overset{\mu'}{\to}A\to 0$$

该正合列是分裂的(split)。事实上，定义映射$\lambda_i:A\to B,i=1,2$为

$$\lambda_1(a)=a\otimes 1\ mod\ I^2\ ,\lambda_2(a)=1\otimes a\ mod\ I^2,$$

这两个映射均为$1_A:A\to A$的提升。

$$\begin{tikzcd} I/I^2 \arrow[r, hook] & (A\otimes_k A)/I^2 \arrow[r, "\mu'"] & A \\ & & A \arrow[u, "id_A"'] \arrow[ul, "\lambda_1,\lambda_2"'] \arrow[ull, "d=\lambda_1-\lambda_2"] \end{tikzcd}$$

故$d=\lambda_2-\lambda_1$是A到$\Omega_{A/k}$的一个导数。下面说明$(\Omega_{A/k},d)$满足前面所说的泛性质。

若$D\in Der_k(A,M)$，定义$\varphi:A\otimes_k A\to A*M$为 $\varphi(x\otimes y)=(xy,xDy)$,可验证$\varphi$保持乘法，将$\varphi$ $k-$线性扩充到整个$A\otimes_k A$上，则得到$k-$代数同态φ, 注意到

$$\mu(\sum x_i\otimes y_i)=\sum x_iy_i=0\Rightarrow\varphi(\sum x_i\otimes y_i)=(0,\sum x_iy_i);$$

故φ将I映到M(此处将M看作$A*M$的一个子代数)，由$A*M$中乘法定义知,在$A*M$中$M^2=0$,故我们便得到映射$f:I/I^2\to\Omega_{A/k}\to M$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "d"] \arrow[ddr] & \Omega_{A/k} \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted] & A\otimes_k A \arrow[dl, "\varphi"] \\
& A*M \arrow[d, "\pi"] & \\
& M &
\end{tikzcd}$$

其中π为$A*M$到第二个分量的投射，而f即为竖直方向上两个映射的合成。

对于$a\in A$，

$$\begin{aligned} f(da) &= f(1\otimes a - a\otimes 1 \ mod\ I^2) = \varphi(1\otimes a)-\varphi(a\otimes 1) \\ &= Da - a\cdot D(1) = Da, \end{aligned}$$

于是$D=f\circ d$.

定义A在$\Omega_{A/k}$上的作用为$a\in A$作用在$A\otimes_k A$上即为$1\otimes 1$乘以$A\otimes_k A$中元素(等价地，用$1\otimes a$去乘:$a\otimes 1-1\otimes a\in I$,$I$中元素作用在$\Omega_{A/k}$上为零)，由此$\Omega_{A/k}$具有$A-$模结构。若$\xi=\sum x_i\otimes y_i\ mod\ I^2\in\Omega_{A/k}$,则$a\xi=\sum ax_i\otimes y_i\ mod\ I^2$,因此 $f(a\xi)=\sum ax_iDy_i=af(\xi)$,故$f$是$A-$线性的。

对于$a,a'\in A$, $a\otimes a'=(a\otimes 1)(1\otimes a'-a'\otimes 1)+aa'\otimes 1$, 于是，若$\omega=\sum x_i\otimes y_i\in I$,则

$$\begin{aligned} \omega &= \sum(x_i\otimes 1)(1\otimes y_i - y_i\otimes 1)+x_iy_i\otimes 1 \\ &= \sum x_idy_i + (\sum x_iy_i\otimes 1) = \sum x_idy_i. \end{aligned}$$

故$\Omega_{A/k}$作为$A-$模由$\{da|a\in A\}$生成。满足$D=f\circ d$的$A-$线性映射f的唯一性是显然的。 □

称上面构造的$A-$模$\Omega_{A/k}$为A在k上的**微分模(module of differentials)**或称**K$\ddot{a}$hler differentials**.称$da\in\Omega_{A/k}$为$a\in A$的微分(differential).用$d_{A/k}$表示$d:A\to\Omega_{A/k}$.从定义知有同构

$$Hom_A(\Omega_{A/k},M)\cong Der_k(A,M)$$

$$f\mapsto f\circ d_{A/k}.$$

设A为$k-$代数，若A具有下列泛性质：对任意$k-$代数C,C的理想N,$N^2=0$,及任意$k-$代数同态$u:A\to C/N$,存在u的提升$v:A\to C$,v是$k-$代数同态。换句话说，若有交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] & C/N \\
k \arrow[u] \arrow[r] & C \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

则存在v使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "v"] & C/N \\
k \arrow[u] \arrow[r] & C \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

则称A为**0-smooth**(over k).若至多存在一个v,则称A为**0-unramified** over k。若A同时为0-smooth，0-unramified ，则称A为**0-etale**.

$\Omega_{A/k}=0 \Leftrightarrow A$是0-unramified.

$\Rightarrow$)若u存在两个提升v_1,v_2，由前面证明过程知，$d=v_1-v_2:A\to N$是导数，从而存在$f\in Hom_A(\Omega_{A/k},N)$使得$v_1-v_2=f\circ d_{A/k}$,但此时$d_{A/k}=0$,故$v_1-v_2=0$，即$v_1=v_2$，矛盾!

$\Leftarrow$) 利用$\Omega_{A/k}$的构造过程，取$C=(A\otimes_k A)/I^2, N=I/I^2$，这里$I=Ker(A\otimes_k A\to A)$, 由于$A$是$0-unramified$,故上面构造的$\lambda_1=\lambda_2$，从而$d_{A/k}=0$,于是$\Omega_{A/k}=0$.

Theorem 0.1. *设有环同态$k\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}B$,则有$B-$模正合列*

$$\Omega_{A/k}\otimes_A B\xrightarrow{\alpha}\Omega_{B/k}\xrightarrow{\beta}\Omega_{B/A}\to 0,$$

这里α,β分别为$\alpha(d_{A/k}a\otimes b)=bd_{B/k}g(a), \beta(d_{B/k}b)=d_{B/A}b$,其中$a\in A, b\in B$.进一步，若$B$在$A$上是0-smooth，则有分裂正合列

$$0\to\Omega_{A/k}\otimes_A B\xrightarrow{\alpha}\Omega_{B/k}\xrightarrow{\beta}\Omega_{B/A}\to 0.$$

下述证明过程不短，但原理简单。

证明. 一般地，想要证明$B-$模序列

$$N'\xrightarrow{\alpha}N\xrightarrow{\beta}N''$$

是正合的，只需证明,对任意$B-$模T，诱导序列

$$Hom_B(N',T)\xleftarrow{\alpha^*}Hom_B(N,T)\xleftarrow{\beta^*}Hom_B(N'',T)$$

是正合的。事实上，取$T=N''$,则得到$\alpha^*\beta^*(1_T)=0$,故$\beta\alpha=0$;取$T=N/Im\alpha$,则可知$Ker\beta=Im\alpha$.

由上分析，我们只需证明

$$0\to Hom_B(\Omega_{B/A},T)\xrightarrow{\beta^*}Hom_B(\Omega_{B/k},T)\xrightarrow{\alpha^*}Hom_B(\Omega_{A/k}\otimes_A B,T)$$

是正合列。

对于$A-$模M，$B-$模T,我们有同构 $\Phi: Hom_B(M\otimes_A B,T)\cong Hom_A(M,T)$:任取$\psi\in Hom_B(M\otimes_A B,T)$,定义$\Phi(\psi)(m):=\psi(m\otimes 1), m\in M$。对任意$a\in A$,

$$\Phi(\psi)(am)=\psi(am\otimes 1)=\psi(m\otimes g(a)1)=\psi(g(a)(m\otimes 1))$$

$$=g(a)\psi(m\otimes 1):=a\psi(m\otimes 1)=a\Phi(\psi)(m).$$

这里只需注意到B通过环同态$g:A\to B$ 成为$A-$模。此即$\Phi(\psi)\in Hom_A(M,T)$.

任取$\varphi\in Hom_A(M,T)$,定义$\Phi^{-1}(\varphi)(m\otimes x):=x\cdot\varphi(m)$.可验证$\Phi^{-1}$与$\Phi$互逆，故由上述同构。

于是$Hom_B(\Omega_{A/k}\otimes_A B,T)\cong Hom_A(\Omega_{A/k},T)$. 利用微分模的典型同态，我们有

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_B(\Omega_{B/A},T) \arrow[r, "\beta*"] \arrow[d] & Hom_B(\Omega_{B/k},T) \arrow[r, "\alpha*"] \arrow[d] & Hom_B(\Omega_{A/k}\otimes_A B,T) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Der_A(B,T) \arrow[r, "\beta'"] & Der_k(B,T) \arrow[r, "\alpha'"] & Der_k(A,T)
\end{tikzcd}$$

其中竖直方向均为同构，α', β'定义为使上图交换的映射.$Der_A(B,T)$中任意元素可表示为$f \circ d_{B/A}$,其中$f \in Hom_B(\Omega_{B/A}, T)$,由$\beta^*$定义可知

$$\beta'(f \circ d_{A/B}) = f \circ \beta \circ d_{B/k}.$$

对任意$h \circ d_{B/k} \in Der_k(B,T), h \in Hom_B(\Omega_{B/k}, T)$,上面交换图最右侧竖线实际是映射

$$Hom_B(\Omega_{A/k} \otimes_A B, T) \to Hom_A(\Omega_{A/k}, T) \to Der_k(A,T)$$

的合成，于是

$$\alpha'(h \circ d_{B/k}) = h \circ \alpha(d_{A/k}(\cdot) \otimes 1).$$

首先注意到$\beta \circ \alpha = 0$.事实上，由定义，任取$d_{A/k}a \otimes b \in \Omega_{A/k} \otimes_A B, \beta \circ \alpha(d_{A/k}a \otimes b) = bd_{B/A}g(a) = 0$(注意到$d_{B/A} \circ g = 0$)。由此易知$\alpha' \circ \beta' = 0$.

下证$Ker\alpha' \subseteq Im\beta'$.设$h \in Hom_B(\Omega_{B/k}, T)$,且$0 = h \circ \alpha(d_{A/k}a \otimes 1) = h \circ d_{B/k}g(a)$对任意$a \in A$成立。于是$(h \circ d_{B/k}) \circ g = 0$, 易知$h \circ d_{B/k} : B \to T$是导数，进一步由定义$h \circ d_{B/k} \in Der_A(B,T)$,于是存在$f \in Hom_B(\Omega_{B/A}, T)$,使得$h \circ d_{B/k} = f \circ d_{B/A} = f \circ \beta(d_{B/k})$. 于是

$$h \circ \alpha(d_{A/k}a \otimes 1) = h \circ d_{B/k}d(a) = f \circ \beta d_{B/k}g(a) = f \circ \beta \circ \alpha(d_{A/k}a \otimes 1), \forall a \in A.$$

此即$Ker\alpha' \subseteq Im\beta'$. 这便证明了定理中第一个正合列。

现在设B在A上是0-smooth.取$D \in Der_k(A,T)$,考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "1_B"] & B \\ A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\varphi"] & B * T \arrow[u] \end{tikzcd}$$

这里$\varphi(a) = (ga, Da)$.由假设在上图中可添加一映射$h : B \to B * T$使之仍然交换。可将h表示为$h(b) = (b, D'b)$,则$D = D' \circ g$,且由$B * T$中乘法定义知$D' : B \to T$是导数，故有线性映射$\alpha' : \Omega_{B/k} \to T$使得$D' = \alpha' \circ d_{B/k}$.

现取T为$\Omega_{A/k} \otimes B$,D为$D(a) = d_{A/k}(a) \otimes 1$,则$D = d_{A/k}(\cdot) \otimes 1 = D' \circ g = \alpha' \circ d_{B/k} \circ g = \alpha' \circ \alpha(d_{A/k}(\cdot) \otimes 1)$.即$\alpha' \circ \alpha = 1$.即上面第二个正合列是分裂的。 $\square$