范畴

Lhzsl

2020 年 12 月 25 日

本文适用于对范畴零基础的读者

范畴的定义

定义:一个**范畴**$\mathfrak{C}$包含以下结构

1.集合$Ob(\mathfrak{C})$,其元素称作$\mathfrak{C}$的对象，

2.对于$\mathfrak{C}$中任意两个对象，给定一个集合$[A,B]_{\mathfrak{C}}$，其中元素称为范畴$\mathfrak{C}$内A到B的**态射**，该集合常简记为$Hom_{\mathfrak{C}}(A,B)$.集合$Moc(\mathfrak{C})=\cup_{A,B\in\mathfrak{C}}Hom_{\mathfrak{C}}(A,B)$中元素称为$\mathfrak{C}$的态射。

3.对每个对象X给定元素$id_X\in Hom_{\mathfrak{C}}(X,X)$,称为X到自身的恒等映射。

4.对于任意$X,Y,Z\in Ob(\mathfrak{C})$,给定态射间的**合成映射**

$$\circ : Hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z)\times Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)\longrightarrow Hom_{\mathfrak{C}}(X,Z)$$

$$(f,g)\mapsto f\circ g,$$

常将 $f\circ g$简记为fg.它满足

(i)结合律:对于任意态射$h,g,f\in Mor(\mathfrak{C})$，若合成$f(gh)$和$(fg)h$都有定义，则

$$f(gh)=(fg)h.$$

故两边可写成同时fgh。

(ii)对于任意态射$f\in Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$,有

$$f\circ id_X=f=id_Y\circ f.$$

设有范畴$\mathfrak{C},\mathfrak{B}$.若有$Ob(\mathfrak{B})\subseteq Ob(\mathfrak{C})$,对于任意$A,B\in Ob(\mathfrak{B})$, $Hom_{\mathfrak{B}}(A,B)\subseteq Hom_{\mathfrak{C}}(A,B)$及$\mathfrak{C},\mathfrak{B}$有相同的合成映射，那么称$\mathfrak{B}$是$\mathfrak{C}$的子范畴，再者，如果对于任意$A,B\in Ob(\mathfrak{C})$有$Hom_{\mathfrak{C}}(A,B)=Hom_{\mathfrak{B}}(A,B)$,则称$\mathfrak{B}$是$\mathfrak{C}$的全子范畴。

这里仅举一个范畴的例子：把所有的群都放在一起得到$\mathfrak{Gp}$.对于任意两个群,所有从A到B的群同态组成$Hom_{\mathfrak{Gp}}(A,B)$, $g\circ f$是映射的合成，这样便得到群范畴$\mathfrak{Gp}$.

设m是范畴$\mathfrak{C}$的态射，如果对于任意$f,g\in Mor(\mathfrak{C})$,从$mf=mg$得到$f=g$,则称m为单态射，另一方面如果对于任意$f,g\in Mor_{\mathfrak{C}}$,从$fm=gm$得到$f=g$,则称m为满态射。我们称$f\in[A,B]_{\mathfrak{C}}$是同构，如果存在$g\in[B,A]_{\mathfrak{C}}$使得$gf=1_A,fg=1_B$.

设$\mathfrak{C},\mathfrak{D}$是两个范畴，由$\mathfrak{C}$到$\mathfrak{D}$的一个(共变(covariant))函子(functor)F是指：

(i)对于$\mathfrak{C}$中任意对象X,F规定了$\mathfrak{D}$中的相应的对象$F(X)$.
(ii)设X,Y是$\mathfrak{C}$中任意两个对象，对于任一$f\in[X,Y]_{\mathfrak{C}}$,F规定$[F(X),F(Y)]_{\mathfrak{D}}$中的一个元素(态射)F(f),满足:

$$F(g\circ f)=F(g)\circ F(f),\forall f\in[X,Y]_{\mathfrak{C}},g\in[Y,Z]_{\mathfrak{C}}$$

以及

$$F(1_X)=1_{F(X)}.$$

如果将上述条件(ii)改成
(ii')对于任一$f\in[X,Y]_{\mathfrak{C}}$,F规定了$[F(Y),F(X)]_{\mathfrak{D}}$中的一个元素(态射)F(f),满足：

$$F(g\circ f)=F(f)\circ F(g),\forall f\in[X,Y],g\in[Y,Z]$$

以及

$$F(1_X)=1_{F(X)}$$

则称F为$\mathfrak{C}$到$\mathfrak{D}$的反变函子(contravariant functor)。
对于任何范畴$\mathfrak{C}$,设$((sets))$是全体集合组成的范畴，任取$X\in Ob(\mathfrak{C})$,若规定$h_X:\mathfrak{C}\to((sets)),Y\mapsto Hom_{\mathfrak{C}}(Y,X)$,任意态射$f:Z\to Y$,

$$h_X(f):Hom_{\mathfrak{C}}(Y,X)\to Hom_{\mathfrak{C}}(Z,X),$$

$$g\mapsto g\circ f$$

则h_X(也可写作$Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot,X)$)是$\mathfrak{C}$到$((sets))$的反变函子。
联系两个函子的概念是“函子态射”(或称”自然变换”).设$\mathfrak{C}$和$\mathfrak{D}$是两个范畴，F和G是$\mathfrak{C}$到$\mathfrak{D}$的两个函子。由F到G的函子态射Φ是指:对于$\mathfrak{C}$的任何一个对象X,给定一个态射$\Phi_X:F(X)\to G(X)$，使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\Phi_Y"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

其中X,Y是$\mathfrak{C}$中任意两个对象，f是X到Y的任意态射。我们记函子态射Φ为$\Phi:F\to G$,当所有$\Phi_X:FX\to GX$是同构时，称函子同态是函子同构。
称函子$T:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$是范畴等价：若存在函子$S:\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}$及函子同构

$$\Phi:1_{\mathfrak{D}}\backsimeq TS,\Psi:ST\backsimeq 1_{\mathfrak{C}}.$$

称函子$T:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$是要满函子：若对于任意$Y\in Ob(\mathfrak{D})$, 存在$X\in Ob(\mathfrak{C})$使得$TX$与$Y$同构。
称函子T是忠实的(faithful),如果从任意对象$A,B\in Ob(\mathfrak{C})$所定的映射

$$T:Hom_{\mathfrak{C}}(A,B)\to Hom_{\mathfrak{D}}(T(A),T(B))$$

$$(A\xrightarrow{f}B)\mapsto(T(A)\xrightarrow{T(f)}T(B))$$

是单射。如果此映射是满射，则说函子T是全忠实函子(fully faithful).

命题：函子$F:\mathfrak{C}_1\to\mathfrak{C}_2$等价当且仅当F是全忠实要满函子。

证明:($\Rightarrow$)设拟逆函子$G:\mathfrak{C}_2\to\mathfrak{C}_1$和函子同构$\psi:id_{\mathfrak{C}_1}\approx GF,\phi:id_{\mathfrak{C}_2}\approx FG$.对于$\mathfrak{C}_2$中任何对象$Z$,都有同构$\phi_Z:F(GZ)\to Z$,故$F$是本质满的。

观察到

$$Hom_{\mathfrak{C}_1}(X,Y)\stackrel{F}{\to}Hom_{\mathfrak{C}_2}(FX,FY)\stackrel{G}{\to}Hom_{\mathfrak{C}_1}(GF(X),GF(Y))\to Hom_{\mathfrak{C}_1}(X,Y)$$

$$f\longmapsto Ff\longmapsto GF(f)\longmapsto\psi_Y^{-1}GF(f)\psi_X$$

合成是恒等映射，事实上，由函子同构$\psi:id_{\mathfrak{C}_1}\stackrel{\sim}{\to}GF$，有交换图表

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "f"'] & GF(X) \arrow[d, "GF(f)"] \\
Y \arrow[r, "\psi_Y"'] & GF(Y)
\end{tikzcd}$$

从而$\psi_Y f=GF(f)\psi_X$.由于ψ_Y是同构，因此$f=\psi_Y^{-1}GF(f)\psi_X$.这就说明F有逆映射,从而是单射，同样可得G是忠实的。

下面证明是满射：首先对任意的$v\in Hom_{\mathfrak{C}_2}(FX,FY)$,令$f=(\psi_Y)^{-1}G(v)(\psi_X)$.对于该映射，上交换图依然交换，于是$GF(f)=G(v)$,由于$G$是忠实的，得到$F(f)=v$,从而是满射。

($\Leftarrow$)首先对于$\mathfrak{C}_2$中每一对象M，$\mathfrak{C}_1$中存在对象A_M(可能有多个，选取其中一个)及同构$v_M:M\to F(A_M)$.

定义函子$G:\mathfrak{C}_2\to\mathfrak{C}_1$如下：若$M\in\mathfrak{C}_2$,设$G(M)=A_M$.若$w:M\to N$，利用$v_M$是同构得到$w':FA\to FB$使有交换图表：

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "v_M"] \arrow[d, "w"'] & FA_M \arrow[d, "w'"] \\
N \arrow[r, "v_N"'] & FA_N
\end{tikzcd}$$

由于F是全忠实函子，故有$w_1:A\to B$使得$F(w_1)=w'$.设$G(w)=w_1$.

取$A\in\mathfrak{C}_1$,设$B=GFA$,于是有同构$v_{FA}:FA\to FB$.因为F是全忠实函子，有唯一$\psi_A:A\to B=GFA$使得$F\psi_A=v_{FA}$.注意由于v_{FA}是同构，F是全忠实函子，得到$\psi_A:A\to GFA$是同构，这就决定函子同构$\psi:1\to GF$.

取$M\in\mathfrak{C}_2$,设$A=GM$.则同构$v_M:M\to FA=FGM$决定函子同构$\phi:1\to FG$,即有$\phi_M=v_M$.

下面验证函子态射的交换性。

首先验证

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi_M=v_M"] \arrow[d, "w"'] & FG(M) \arrow[d, "FG(w)"] \\
N \arrow[r, "\phi_N=v_N"'] & FG(N)
\end{tikzcd}$$

这只需注意到$FG(w)=w'$,由上一个交换图表即得。
下面验证$\mathfrak{C}_1$中函子态射交换性,任意态射$f:A\to Y$,在$\mathfrak{C}_2$中有下交换图表

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{v_{FA}} & FG(FA) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle FG(F(f))} \\ FY & \xrightarrow[v_{FY}]{} & FG(F(Y)) \end{array}$$

从而$F(GF(f))=v_{FY}\circ F(f)\circ(v_{FA})^{-1}$.再注意到$F\psi_A=v_{FA}$.于是$F(\psi_Y\circ f\circ{\psi_A}^{-1})=v_{FY}\circ F(f)\circ(v_{FA})^{-1}$.由于F是忠实的，得到$GF(f)=\psi_Y\circ f\circ{\psi_A}^{-1}$.从而有交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi_A} & GF(A) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle GF(f)} \\ Y & \xrightarrow{\psi_Y} & GF(Y) \end{array}$$

证毕。
若$F,G:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$是两个函子，我们用记号$Tran(F,G)$表示从F到G的自然变换全体.有下述引理
Yoneda 引理：设$\mathfrak{C}$是范畴，F是$\mathfrak{C}$到集合范畴((sets))的反变函子，$X\in Ob(\mathfrak{C})$,则有双射

$$y:Tran(Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot,X),F)\to F(X).$$

$$y:\bar{\xi}\mapsto\bar{\xi}_X(id_X)$$

证明：设$\xi\in F(X)$.对于$\mathfrak{C}$中态射$f:A\to X$,令$\bar{\xi}_A(f)=F(f)(\xi)$.下面验证$\bar{\xi}$是自然变换。在$\mathfrak{C}$中$g:A\to B$为态射，须验证下图交换

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathfrak{C}}(A,X) & \xrightarrow{\bar{\xi}_A} & F(A) \\ {\scriptstyle Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot,X)(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(g)} \\ Hom_{\mathfrak{C}}(B,X) & \xrightarrow[\bar{\xi}_B]{} & F(B) \end{array}$$

任意$f\in Hom_{\mathfrak{C}}(A,X)$,$F(g)\bar{\xi}_A(f)=F(g)F(f)(\xi)=F(f\circ g)(\xi)$(注意F是反变函子),
$\bar{\xi}_B(Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot,X)(g))(f)=\bar{\xi}_B(f\circ g)=F(f\circ g)(\xi)$,这就是上图交换，于是$\bar{\xi}$是自然变换，且$\bar{\xi}_X(id_X)=F(id_X)(\xi)=\xi$.即该映射是满射。
下证单射：$\bar{\xi}\in Tran(Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot,X),F)$是自然变换,于是对于$\mathfrak{C}$中态射$f:A\to X$，有下交换图

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathfrak{C}}(X,X) & \xrightarrow{\bar{\xi}_X} & F(X) \\ {\scriptstyle Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot,X)(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ Hom_{\mathfrak{C}}(A,X) & \xrightarrow[\bar{\xi}_A]{} & F(A) \end{array}$$

于是$\bar{\xi}_A(f)=\bar{\xi}_A(f)(id_X)=F(f)\circ\bar{\xi}_X(id_X)$.若有另外自然变换$\sigma\in Tran(Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot,X))$,使得$\sigma_X(id_X)=\bar{\xi}_X(id_X)$,则$\bar{\xi}_A(f)=\sigma_A(f)$,于是$\bar{\xi}_B=\sigma_B$对任意$B\in Ob(\mathfrak{C})$成立，即$\bar{\xi}=\sigma$.此即单射。 •
$Abel$范畴有拉回和推出.详细的说，

(1)设$\mathcal{A}$是加法范畴.则$\mathcal{A}$有拉回当且仅当其有核.

设$\mathcal{A}$有核,$b : B \longrightarrow D$和$g : C \longrightarrow D$.考虑$(b, g) : B \oplus C \longrightarrow D$的核$Ker(b, g)$及合成

$$f : Ker(b, g) \hookrightarrow B \oplus C \xrightarrow{(1,0)} B$$

和

$$-a : Ker(b, g) \hookrightarrow B \oplus C \xrightarrow{(0,1)} C.$$

则$(a, f, Ker(b, g))$是(b, g)的拉回.

证明：若$\mathcal{A}$有核，则直接验证上述构造是拉回.

即有拉回

$$\begin{tikzcd}
Ker(f,g) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "b"] & D
\end{tikzcd}$$

为此，需验证(1)$bf = ga$.注意到$Ker(f, g)$是映射$(b, g) : B \oplus C \longrightarrow D$的核,记$h : Ker(b, g) \longrightarrow B \oplus C$,于是有$(b, g)h = 0$,展开得到$(b(1, 0) + g(0, 1))h = 0$,即$bf - ga = 0$.

(2)设另有(t, s, X)使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "b"] & D
\end{tikzcd}$$

需证明存在态射$r : X \longrightarrow Ker(b, g)$使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "r"] \arrow[drr, "s"] \arrow[ddr, "t"'] & & \\
& Ker(b,g) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & D \arrow[d, "g"] \\
& B \arrow[r, "b"] & D
\end{tikzcd}$$

注意到$Ker(f, g)$是映射$(b, g) : B \oplus C \longrightarrow D$的核，我们可构造一个映射$k : X \longrightarrow B \oplus C$使得$(b, g)k = 0$.这样利用核的性质，我们便能得到一个映射$r : X \longrightarrow Ker(b, g)$.这一映射或许就是我们要找的映射。余积$B \oplus C$连同的态射记为$e_1 : B \longrightarrow B \oplus C, e_2 : C \longrightarrow B \oplus C$.

$(b, g)e_1 t = bt, (b, g)(-e_2)s = -gs$.从而$(b, g)(e_1 t - e_2 s) = 0$.于是存在映射$r : X \longrightarrow Ker(b, g)$使

得$hr=e_1t-e_2s$.下面验证：$ar=-(0,1)hr=s, fr=(1,0)hr=t$.满足交换性。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "r"] \arrow[drrr, bend left=10, "s"] \arrow[ddrr, bend right=10, "t"'] & & & \\
& Ker(b,g) \arrow[dr, "h"] & & \\
& & B\oplus C \arrow[r, "-(0,1)"] \arrow[d, "(1,0)"'] \arrow[dr, "(b,g)"] & C \arrow[d, "g"] \\
& & B \arrow[r, "b"] & D
\end{tikzcd}$$

设$\mathcal{A}$是有零对象的范畴，考虑下图

$$\begin{tikzcd}
A^{'} \arrow[r] & A \arrow[d] \\
B^{'} \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

其中$B^{'}\longrightarrow B$是某个态射$B\longrightarrow B^{''}$的核.则该图能扩展成交换图当且仅当$A^{'}\longrightarrow A$是复合态射$A\longrightarrow B\longrightarrow B^{''}$的核.

证明:设$A^{'}\longrightarrow A$是复合态射$A\longrightarrow B\longrightarrow B^{''}$的核，则存在唯一的态射$A^{'}\longrightarrow B^{'}$使得上图交换。若有X使得$X\longrightarrow A\longrightarrow B=X\longrightarrow B^{'}\longrightarrow B$,则$X\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow B^{''}=X\longrightarrow B^{'}\longrightarrow B\longrightarrow B^{''}$.由于$A^{'}\longrightarrow A$是复合态射$A\longrightarrow B\longrightarrow B^{''}$的核,因此存在唯一态射$X\longrightarrow A^{'}$使得$X\longrightarrow A^{'}\longrightarrow A=X\longrightarrow A$.并且

$$X\longrightarrow A^{'}\longrightarrow B^{'}\longrightarrow B=X\longrightarrow A^{'}\longrightarrow A\longrightarrow B=X\longrightarrow A\longrightarrow B=X\longrightarrow B^{'}\longrightarrow B.$$

由于$B^{'}\to B$是单射，$X\to A^{'}\to B^{'}=X\to B^{'}$.

反之，若有拉回

$$\begin{tikzcd}
A^{'} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
B^{'} \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

则$A^{'}\longrightarrow A$是复合态射$A\longrightarrow B\longrightarrow B^{''}$的核。事实上，若$X\to A\longrightarrow B\longrightarrow B^{''}=0$由于$B^{'}\to B$是$B\to B^{''}$的核,于是存在态射$X\to B^{'}$使得$X\to A\to B=X\to B^{'}\to B$.再根据拉回性质，存在态射$X\to A^{'}$使得$X\to A^{'}\to A=X\to A$.

(9 lemma) 如下是范畴中的一个交换图，所有行和列是正合列.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & A' \arrow[d] & A \arrow[d] & A'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

存在态射$A^{'} \to A$和$A \to A^{''}$使得图交换，并且$0 \to A^{'} \to A \to A^{''} \to 0$是正合列。

下图是一拉回

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\
B \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

其中$B \to C$是满射，$C^{'} \to C$是单射，则能扩充为下面交换图.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & C'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C'' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

证明:令$C \to C^{''}$是$C^{'} \to C$的余核，$A \to B$是$B \to C$的核。由上面命题知$B^{'} \to B$是$B \to C \to$

$C^{''}$的核，于是便能得到中间一列的正合性。接下来对下图应用“9引理”便得到结果。

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & A \arrow[d, equal] & B^{'} \arrow[d] & C^{'} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & C^{''} \arrow[r, equal] \arrow[d] & C^{''} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

这里注意到存在唯一地态射$B^{'} \to C^{'}$使得

$$
\begin{tikzcd}
B^{'} \arrow[r] \arrow[d] & C^{'} \arrow[d] \\
B \arrow[r] & C
\end{tikzcd}
$$

交换，于是由”9引理”得到的态射$B^{'} \to C^{'}$核原来是一致的。