抽象代数

主讲教师：邱德荣

记录人：许晓宇(1.1-1.4)，赵玲钰(1.5-2.2),李雪芳(2.3-2.7), 张钰(2.8-3.3),
马明扬(3.4-3.7),李航(3.8-4.3),吴传传(4.4-5.2)

目录

1 群

1.1 集合上的等价关系

集合的分类:如果非空集合S的一组非空子集$\{S_\lambda|\lambda\in I\}$,$I$为指标集,满足下列条件:

(1)$S=\bigcup_{\lambda\in I}S_\lambda$;

(2)$S_\lambda\cap S_\mu=\emptyset,\lambda\neq\mu,\lambda,\mu\in I$;

则$\{S_\lambda\}$叫做S的一个分类.

Definition 1.1. **关系**:*非空集合S上的一个关系指的是任意一个子集$R\subset S\times S$.$(a,b)\in S\times S$,a与b有关系R,即 $(a,b)\in R$,也记为aRb.*

特别地，当R为$S\times S$或$\emptyset$时,为平凡关系.

$R_1,R_2\subset S\times S$,$R_1\circ R_2\triangleq\{(a,b)\in R:$存在$c\in S$,使得$(a,c)\in R_1,(c,b)\in R_2\}$

$$a\xrightarrow{R_1}c\xrightarrow{R_2}b$$

Definition 1.2. **等价关系**:*设R是非空集合S上的一个关系.如果满足如下条件:*

(1)(自反性) $(a,a)\in R(\forall a\in S)$

(2)(对称性) 若$(a,b)\in R$,则 $(b,a)\in R$

(3)(传递性) 若$(a,b)\in R$且$(b,c)\in R$,则$(a,c)\in R$,

则称R为S上的等价关系.记为aRb或$(a,b)\in R$或$a\equiv_R b$.

Example 1.1. 取$S=\mathbb{Z}$

(1)$\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_{>0}\cup\mathbb{Z}\cup\mathbb{Z}_{<0}$,$a\sim b$:要么$a,b$都为$0$,要么$a,b$同号.

(2)$\mathbb{Z}=2\mathbb{Z}\cup(2\mathbb{Z}+1)$,$a\sim b$:$a,b$同奇偶性.

(3)$n>1,\mathbb{Z}=n\mathbb{Z}\cup(n\mathbb{Z}+1)\cup\cdots\cup(n\mathbb{Z}+n-1)=\overline{0}\cup\overline{1}\cup\cdots\cup\overline{(n-1)}$

$$a\sim_n b\Leftrightarrow n|(a-b)\Leftrightarrow a\equiv b(mod\ n)$$

$$\mathbb{Z}/\sim_n=\{\overline{0},\overline{1},\cdots,\overline{(n-1)}\}$$

设R是S上一个等价关系,对应的分类:$S=\bigcup_{a\in S}[a]$,其中$[a]=\{b\in S:b\sim_R a\}$

Proposition 1.1. 给定非空集合S,则S上的分类与等价关系可以互相导出.

证明. (1)$S=\bigcup_{i\in\wedge}S_i$是$S$上一个分类,即$S_i\subset S$且对$\forall i,j\in\wedge$如果$S_i\cap S_j\neq\emptyset$,则$S_i=S_j$,于是定义$S$上的一个关系$R$如下:

$$(a,b)\in R\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}\text{存在}i\in\wedge,\text{使得}a,b\in S_i.$$

①$\forall a,(a,a)\in R$.事实上,$a\in S=\bigcup_{i\in\wedge}S_i$,则$a\in S_i$,对某个$i$,即$(a,a)\in R$.

②$(a,b)\in R\to(b,a)\in R$.

③设$(a,b)\in R,(b,c)\in R$.由$(a,b)\in R$知,存在$i\in\wedge$,使得$a,b\in S_i$.由$(b,c)\in R$知,存在$j\in\wedge$,使得$b,c\in S_j$.于是$b\in S_i\cap S_j$,即$S_i\cap S_j\neq\emptyset$.故$S_i=S_j$,$a,c\in S_i$,即$(a,c)\in R$.

因此R是S上的一个等价关系.

(2)设R是S上的一个等价关系.则$S=\bigcup_{a\in S}[a]$.其中$[a]\triangleq\overline{a}=\{b\in S:(b,a)\in R\}$

①$a\in[a]$.覆盖成立.

②对$\forall a,b\in S$.如果$[a]\cap[b]\neq\emptyset$.下证$[a]=[b]$.

由所设,有$c\in[a]\cap[b]$.即$c\sim a$且$c\sim b$,则$a\sim b$.即$a\in[b]$.且$b\in[a]$.因此$[a]=[b]$.

(3)$S=\bigcup_{i\in\wedge}S_i\Rightarrow R\Rightarrow$分类$S=\bigcup_{a\in S}[a]_R$,则对任取$a\in S$,有 $a\in S_i$,对某个i,即$S_i=[a]$. □

Definition 1.3. **偏序关系**:*设R是非空集合S上的一个关系.如果满足如下条件:*

(1)(自反性) $(a,a)\in R(\forall a\in S)$,

(2)(反对称性) 若$(a,b)\in R$且$(b,a)\in R$,则$a=b$,

(3)(传递性) 若$(a,b)\in R$且$(b,c)\in R$,则$(a,c)\in R$,

则称R为S上的一个偏序关系(partial order),(S,R)称为一个偏序集.

Example 1.2. $(\mathbb{R},\leq)$,$(S,\subset)$

Lemma 1.1. *Zorn***引理** *设$(S,\leq)$是一个偏序集,如果S中的每个全序子集在S中都有上界,则S中存在极大元.*

1.2 群

Definition 1.4. *设G是带有一个运算"$*$"的一个非空集合.如果下述条件成立:*

(1)(结合律) $(a*b)*c=a*(b*c),\forall a,b,c\in G$;

(2)(单位元) 存在$e\in G$,*使得*$a*e=e*a=a(\forall a\in G)$;

(3)(逆元) $\forall a\in G$,*存在*$b\in G$,*使得*$a*b=b*a=e$,*并记*$b=a^{-1}$;

则称$(G,*)$是一个群.

如果还满足交换律:$a*b=b*a(\forall a,b\in G)$,则称$(G,*)$是一个**交换群**(*abelian*).

Example 1.3.

(1)$(\mathbb{Z},+)$;

(2)$(\mathbb{Z},\times)$ *不是群,除*$1,-1$*外，其他元素无逆元;*

(3)$M_n(\mathbb{R},+)$ $\mathbb{R}$*上的全体*n*级矩阵对普通加法构成的群;*

$M_{m\times n}(\mathbb{R},+)$;

(4)$GL_n(\mathbb{R},\cdot)$ $\mathbb{R}$*上的全体*n*级可逆矩阵对矩阵乘法构成的群，称为***一般线性群**;

(5)$SL_n(\mathbb{R},\cdot)$ $\mathbb{R}$*上的全体行列式为1的*n*级矩阵对矩阵乘法构成的群，称为***特殊线性群**;

(6)$\mathcal{U}_n=\{a\in\mathbb{C}:a^n=1\}$ x^n-1*在*$\mathbb{C}$*中的全部根对普通乘法构成群，称为*n*次单位根群，*$(\mathcal{U},\cdot)$;

(7)

$$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$$

$$g\circ f$$

令$S = X \neq \emptyset$,$Perm(S) = I(S) = \{f : f$是S到自身的一一到上的变换$\}$,则$P(S)$关于变换的合成构成一个群,称为S上的变换群.

$(S_n, \circ)$ n次对称群,元素个数为$n!$.

$V \xrightarrow{f} W$为线性映射.证明其为单射的方法:①$f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$,②$kerf = f^{-1}(0) = \{0\}$;

(8)$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{(n-1)}\}$ $\overline{a} + \overline{b} \triangleq \overline{a+b}$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{\overline{a} : a \in \mathbb{Z}, (a, n) = 1\}$

$((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot)$ 此群元素个数为$\varphi(n)$.

内部:子结构

外部:群同态

Definition 1.5. ***子群***:对于群$G \neq \emptyset$,非空子集$H \subset G$称为G的一个子群,如果H在G中的运算下也是一个群,此时记为$H \leq G$.

下列条件等价:

(1)①单位元 $e \in H$,

②封闭性 $\forall a, b \in H, a \cdot b \in H$,

③逆元 $a^{-1} \in H$.

(2)$H \neq \emptyset. \forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$. (验证子群的方法)

G的平凡子群:$\{e\}, G$.

子群的交与并 $H, K \leq G$.

$H \cup K \nleq G$

反例:$H = \{[0], [3]\}, K = \{[0], [2], [4]\}$,易知$H \cup K$不满足封闭性.

$H \cap K \leq G$

一般地，设$H_i \leq G (i \in \wedge)$,则$H = \bigcap_{i \in \wedge} H_i \leq G$

证明. ①$e \in H_i (i \in \wedge) \Rightarrow e \in H$.

②$\forall a, b \in H$,有$a, b \in H_i (\forall i \in \wedge) \Rightarrow a \cdot b \in H_i (\forall i \in \wedge) \Rightarrow a \cdot b \in H$.

③$\forall a \in H \Rightarrow a \in H_i (\forall i \in \wedge) \Rightarrow a^{-1} \in H_i \Rightarrow a^{-1} \in \bigcap_{i \in \wedge} H_i = H$.

$\Longrightarrow H \leq G$. □

子集生成的子群:

问题:群G，$\emptyset \neq S \subset G$,$G$中是否有子群包含$S$,若有,最小者是?

令$\mathscr{F} = \{H \leq G : H \supset S\}$.显然,$G \in \mathscr{F}$,即$\mathscr{F} \neq \emptyset$.记$\langle S \rangle = \bigcap_{H \in \mathscr{F}}$,则$\langle S \rangle$是$G$中包含$S$的最小子群.

即(1)$\langle S \rangle \leq G$(子群对取交封闭)

(2)设$H \leq G$,且$S \subset H$,则$H \supset \langle S \rangle$.

称$\langle S \rangle$为S在G中生成的子群.

定义 特别地，对群G,如果有$a \in G$,使得$G = \langle a \rangle$,则称G为一个**循环群**.
易知$\forall$群G,$a \in G$, $\langle a \rangle \leq G$.

群的阶:$|G|$.

Definition 1.6. 元素的阶:$a \in G, |\langle a\rangle|$称为元素$a$的阶.

注:群$(G,\cdot)$,$G=\langle a\rangle$,$e=a^0$,$a\in G, a^2, a^3, \cdots \in G$,其中$a^n=\underbrace{a*\cdots*a}_{n}(n\in\mathbb{Z}_{>0})$,则$a^{-1}, a^{-2}, \cdots \in G$,则$a^{\mathbb{Z}} \triangleq \{a^m : m\in\mathbb{Z}\}$.

事实:$\langle a\rangle = a^{\mathbb{Z}}$.

证明. (1)$\langle a\rangle \supset a^{\mathbb{Z}}$,

(2)只需说明$a^{\mathbb{Z}}$是子群.(显然) □

结论:若有群$(G,\cdot)$,$\forall a\in G$,则有$\langle a\rangle = a^{\mathbb{Z}}$.

另一方面,有满同态$f:\mathbb{Z}\to\langle a\rangle, m\mapsto a^m$.

Example 1.4. $(\mathbb{Z},+)=\langle 1\rangle$

群$(G,\cdot)$,$H,K\subset G$,定义$H\cdot K=\{hk:h\in H,k\in K\}$,易知$H\cdot K\subset G$;另一方面,有$G=HG=\bigcup_{a\in G}H\cdot a$.其中$H\cdot a\subset G$

事实:$\{Ha:a\in G\}$给出了G上的一个分类.

证明. (1)$\bigcup_{a\in G}H\cdot a=G$;

(2)任取$a,b\in G$,如果$Ha\cap Hb\neq\emptyset$,则有$Ha=Hb$.事实上,由所设,有$c\in Ha\cap Hb$,即$c=h_1a=h_2b$.其中$h_1,h_2\in H$.下证$Ha=Hc$.

对$\forall h\in H, ha=h({h_1}^{-1}c)=(h{h_1}^{-1})c\in Hc$即$Ha\subset Hc$.同理$hc=hh_1a=(hh_1)a\in Ha$,即$Hc\subset Ha$.因此,$Ha=Hc$.同理可证$Hb=Hc$,所以$Ha=Hb$. □

于是从上述讨论,得到了G关于H的一个(右)陪集分类.$G=\bigcup_{a\in G}Ha=\bigcup_{a\in G}[a]$.其中$Ha$称为$a$所在的右陪集.(显然$a=ea\in H$)由前述,上述分类必对应于$G$上的一个等价关系$\sim$. 即$\forall a,b\in G, a\sim b\Leftrightarrow Ha=Hb\Leftrightarrow ab^{-1}\in H$.

记所得的商集为$G/H=\{Ha:a\in G\}=\{[a]:a\in G\}=\{\overline{a}:a\in G\}, [a]=\overline{a}\triangleq Ha$.

注意:$a,b\in G, Ha=Hb\Leftrightarrow ab^{-1}\in H$.

同样地,$G=GH=\bigcup_{a\in G}aH$是G上的一个分类.称为G关于H的左陪集分类.

注意:$a,b\in G, aH=bH\Leftrightarrow a^{-1}b\in H$.

商集$H\setminus G(\triangleq G/H)=\{aH:a\in G\}=\{\overline{a}:a\in G\}$ 且有$|G/H|=|\sum_{a_i\in G}a_iH=|\frac{|G|}{|H|}$,为此只需证$f:H\Rightarrow aH, h\mapsto ah$既单又满,易证.

称$|G/H|=\frac{|G|}{|H|}$为G关于H的$index$(指数),记之为(G:H).且有$|G|=|H|\cdot(G:H)$.$|G|=(G:\{e\})$

设$H\leq G$(群),$G/H=\{aH:a\in G\}$(左商集),问:是否可在G/H中引进某个运算,使得$(G/H,\cdot)$是一个群.

取$aH,bH\in G/H$,要使$aH*bH=abH\in G/H$成立,必须满足对$\forall a\in G$,都有$aH=Ha$.

Definition 1.7. *设$H\leq G$(群),如果对$\forall a\in G$,都有$aH=Ha$,则称H是G的一个正规子群.记之为$H\lhd G$.*

显然$\{e\}$与G是G的两个平凡的正规子群.特别地,交换群中的任一子群均是正规的.

Proposition 1.2. 设$H \leq G$,则下列陈述等价.

(1)$H \lhd G$;

(2)$\forall h \in H, a \in G$,有$aha^{-1} \in H$;

(3)对$\forall a \in G, aHa^{-1} \subset H$;

(4)$aHa^{-1} = H, (\forall a \in G)$.

证明. (2)⇒(4)

$aHa^{-1} \subset H, h = a(a^{-1}ha)a^{-1}$,则有$a^{-1}ha = (a^{-1})h(a^{-1})^{-1} \in H$. □

事实:设$H \lhd G$,则按下述方式引进G/H上的运算$\cdot$构成一个群,称之为G关于H的商群.

$$G/H = \{aH : a \in G\} = \{\overline{a} : a \in G\}, \overline{a} = aH(= Ha)$$

任取$a, b \in G, \overline{a}, \overline{b} \in G/H$.规定$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$(即$aH \cdot bH \triangleq (a \cdot b)H$)

$aH \cdot bH = Ha \cdot bH = H(a \cdot b)H = (a \cdot b)HH \Rightarrow H^2 = H(H \leq G), H^2 = \{h_1h_2 : h_1, h_2 \in H\}$

1.3 群同态基本定理

Definition 1.8. 设G_1, G_2是两个群,$f : G_1 \to G_2$ 是一个映射.如果f满足如下条件:

(1)$f(e_1) = e_2$;

(2)$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b), \forall a, b \in G_1$.

则称f为从G_1到G_2的一个(群)同态.

由$f(a^{-1}) \cdot f(a) = f(a^{-1} \cdot a) = f(e_1) = e_2$知$f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \in G_2$.

Example 1.5. 群$(\mathbb{R}, +)$和$(S^1, \cdot)$,其中$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$,令$f : \mathbb{R} \Rightarrow S^1, a \mapsto e^{2\pi ia}$,则$f$是一个群同态.

(1)$f(0) = e^{2\pi i0} = 1$.

(2)$f(a + b) = e^{2\pi i(a+b)} = e^{2\pi ia} \cdot e^{2\pi ib} = f(a)f(b)$.

特别地,当f是满射,单射或一一到上的映射时,分别称f为满同态,单同态或同构.

设$f : G \Rightarrow H$是群同态,则$f(e) = e$,记$kerf = f^{-1}(e) = \{a \in G : f(a) = e\}$,称之为$f$的核($kernel$).

(1)$kerf \leq G$

证明. 任取$a, b \in kerf$,则$f(a) = f(b) = e$.
于是

$$f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} = e \Rightarrow ab^{-1} \in kerf$$

.

进一步,$\forall a \in G, b \in kerf$.则$f(b) = e$.于是$f(aba^{-1}) = f(a)f(b)f(a)^{-1} = f(a)ef(a)^{-1} = e \Rightarrow aba^{-1} \in kerf$. 故$kerf \lhd G$,于是有商群$G/kerf$.

于是$f: G \to G/H$(单位元为$\overline{e}=H$), $a \mapsto \overline{a}(=aH)$,

$$f(ab) = abH = aH \cdot bH = f(a) \cdot f(b), f(e) = eH = H$$

$$kerf = f^{-1}(\overline{e}) = \{a \in G : f(a) = \overline{e}\} = \{a \in G : aH = H\} = H$$

$$\overline{f} : G/kerf \to H, \overline{a} \mapsto f(a).$$

下证映射$\overline{f}$为良定义的，即与代表元选取无关.

$$a_1, a_2 \in G, \overline{a_1} = \overline{a_2} \Rightarrow a_1 kerf = a_2 kerff \Rightarrow {a_1}^{-1} a_2 \in kerf$$

即

$$f({a_1}^{-1}a_2) = e, f({a_1}^{-1})f(a_2) = e \Rightarrow f(a_1) = f(a_2).$$

□

$$\overline{f} : G/kerf \to H, \overline{a} \mapsto f(a), \overline{f}(\overline{a}) \overset{\triangle}{=} f(a).(\forall a \in G)$$

事实:证明$\overline{f}$为群同态.

证明. $\overline{f}(\overline{e}) = \overline{f(e)} = f(e) = e$

$\overline{f}(\overline{a}\overline{b}) = \overline{f}(\overline{ab}) = f(ab) = f(a)f(b) = \overline{f}(\overline{a})\overline{f}(\overline{b})$ □

Lemma 1.2. **引理**:*群同态$f : G \to H$是单的,$\Leftrightarrow kerf = \{e\}$.*

$ker\overline{f} = \{\overline{e}\}$

$\overline{a} \in ker\overline{f} \Leftrightarrow \overline{f}(\overline{a}) = e$,即$f(a) = e \Rightarrow a \in kerf \Rightarrow \overline{a} = \overline{e} \Rightarrow ker\overline{f} = \{\overline{e}\}$

问题:$G = \langle a \rangle = a^{\mathbb{Z}}$,令$f : \mathbb{Z} \to a^{\mathbb{Z}}, m \mapsto a^m$,

(1)$kerf = \{1\}$,

(2)$H \leq (\mathbb{Z}, +), H = \{n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

Theorem 1.1. **群同态基本定理**

设$f : G \to H$是一个群同态,则

(1)$kerf = f^{-1}(e) \lhd G, imf = f(G) \leq H$.

(2)f诱导出群同态$\overline{f} : \overline{G} = G/kerf \simeq imf \to H$,使得下图交换,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\eta"'] & H \\ & G/kerf \arrow[u, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

即$f = \overline{f} \circ \eta$,其中$\eta : G \to \overline{G}, a \mapsto \overline{a} = akerf, \overline{f} : \overline{G} \to H, \overline{a} \mapsto f(a), ker\overline{f} = \{\overline{0}\}$.

Corollary 1.1. **推论**:*设G是一个群,$H, K \lhd G$.如果$H \subset K$,则$K/H \lhd G/H$,且有群同构$(G/H)/(K/H) \simeq G/K$.*

证明. 令$f: G/H \to G/K, aH \mapsto aK$,

则f是一个映射:设$aH = bH(a,b \in G)$,则$a^{-1}b \in H$.由于$H \subset K$.故$a^{-1}b \in K$.即$aK = bK$,也即$f(aH) = f(bH)$.

又显然,

$$f(aH \cdot bH) = f(abH) = abK = aK \cdot bK = f(aH) \cdot f(bH)$$

即f是一个群同态,且显然是满的.

于是有群同态基本定理,得

$$\begin{aligned} kerf &= \{aH \in G/H : f(aH) = eK\} \\ &= \{aH \in G/H : aK = eK\} \\ &= \{aH \in G/H : a \in K\} \\ &= K/H \triangleleft G/H \end{aligned}$$

且$(G/H)/(K/H) \simeq f(G/H)$,即$(G/H)/(K/H) \simeq G/K$. □

Definition 1.9. *(子群的正规化):设$H \leq G$(群),定义*

(1)$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$

事实:①$N_G(H) \leq G$,

②$H \triangleleft N_G(H)$.

称$N_G(H)$为H在G中的正规化子($normilirer$).

任取$H, K \leq G$,若$HK = KH$,即$hK = Kh$,所以$h \in N_G(K)$即$H \subset N_G(K)$.

(2a)G的中心.$C(G) = \{a \in G : ab = ba(\forall b \in G)\}$,易证$C(G) \triangleleft G$.

(2b)中心化子:设$S \subset G$,定义S在G中的中心化子为$C_G(S) = \{a \in G : ab = ba(\forall b \in S\}$.

(3)非交换群的交换化(即Abel化):设G是一个群(非交换),由交换群性质$ab = ba$,即$(ab)(ba)^{-1} = e = aba^{-1}b^{-1}$得到换位子定义:

G的换位子群:对于$a, b \in G$.记$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$,称为一个换位子.且记$S = \{[a,b] : a, b \in G\}$.令$[G:G] = \langle S \rangle$为$S$生成的子群,称$[G,G]$为$G$的换位子群.

事实:$[G:G] \triangleleft G$.

称商群$G/[G:G]$为G的交换化,记之为$G^{ab} \triangleq G/[G:G]$.

事实:(1)G^{ab}是一个交换群.

(2)满足如下所谓"泛性质":对任意交换群H及群同态$g : G \to H$,则存在唯一的群同态$\rho : G^{ab} \Rightarrow H$,使得$g = \rho \circ f$(试比较$kerf$与$kerg$的关系)

Corollary 1.2. *设$H, K \leq G$,且$H \subset N_G(K)$,则*

(1)$HK \leq G$,且$K \triangleleft HK$

(2)有群同构$HK/K \simeq H/H \cap K$.

证明. 令$f: H \to HK/K, h \mapsto hK(\forall h \in H)$,易知$f$是一个群满同态.又

$$\begin{aligned} kerf &= \{h \in H : f(h) = eK\} \\ &= \{h \in H : hK = K\} \\ &= \{h \in H : h \in K\} \\ &= H \cap K \end{aligned}$$

由群同态基本定理,知$H \cap K = kerf \lhd H$,且$H/H\cap K \simeq f(H) = HK/K$即$H/H\cap K \simeq HK/K$. □

(循环群的结构)

设$G = \langle a \rangle$是一个循环群,则$G = a^{\mathbb{Z}} = \{a^m : m \in \mathbb{Z}\}$令$f : (\mathbb{Z}, +) \to G = a^{\mathbb{Z}}, m \mapsto a^m$,显然$f$是一个群满同态,于是由群同态基本定理,得$\mathbb{Z}/kerf \simeq G$

事实:$(\mathbb{Z}, +) = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$是一个无限循环群.

$H \leq \mathbb{Z}, H = n\mathbb{Z} = \langle n \rangle (n \in \mathbb{Z})$

(1)$H = \{0\}$

(2)$H \neq \{0\}$,此时$H \cap \mathbb{Z}_{\geq 1} \neq \emptyset$.取$H$中的最小正整数$n$,则断言$H = n\mathbb{Z} = \langle n \rangle (= \langle -n \rangle)$.

对$\forall m \in H$,有带余数除法知,$m = qn + r$,其中$q, r \in \mathbb{Z}$且$0 \leq r < n.r = m - qn \in H$.由$n$的最小性知$r = 0$,即$m = qn \in n\mathbb{Z} \Rightarrow H \subset n\mathbb{Z} \subset H \Rightarrow H = n\mathbb{Z}$,因此$kerf = n\mathbb{Z}$.

$$G = \langle n \rangle \simeq \mathbb{Z}/kerf = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

(1)无限循环群:$G \simeq \mathbb{Z}$,

(2)有限循环群:$G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{(n-1)}\} (n \neq 0)$.

事实:$G = \langle a \rangle$是一个循环群.$|G| = n$

元素阶的性质:$a \in G$,a的阶$o(a)$为n.

$$o(a) = n \Leftrightarrow n = |\langle a \rangle| \Leftrightarrow n\text{是使得}a^n = e\text{的最小正整数}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)a^n = e \\ (2)a^m = e \Leftrightarrow n|m \end{cases}$$

对$\forall b \in G, b = a^r$,则$o(b) = o(a^r) = \frac{n}{(r,n)}$,此外,当$H \leq G, \#H = m$且$m|n$,则$H = \langle a^{\frac{n}{m}} \rangle$.

Example 1.6. *(1)群$(\mathbb{R}, +)$和$(S^1, \cdot)$,其中$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$,令$f : \mathbb{R} \Rightarrow S^1, a \mapsto e^{2\pi i a}$,则$f$是一个群满同态.$kerf = (\mathbb{Z}, +)$,且有$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) \simeq (S^1, \cdot)$,以及$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq S^n = S^1 \times S^1 \times \cdots S^1$.*

(2)$G = GL_n(\mathbb{R})$,则$det : G \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}, S \mapsto detA = |A|$,则$kerdet = \{A \in GL_n\mathbb{R} : detA = 1\} = SL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{R}) \lhd GL_n(\mathbb{R})$,且$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$

(3)$f : (\mathbb{Z}, +) \to (2\mathbb{Z}, +), a \mapsto 2a$.则$f(3\mathbb{Z}) = 6\mathbb{Z}$,且有$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq f(\mathbb{Z})/f(3\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,但$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

所以,对于一般的群同态$f : G_1 \to G_2$,当H_1是G_1的正规子群,则有$G_1/H_1 \simeq f(G_1)/f(H_1)$.

1.4 群作用

$|G|=n$,由算术基本定理$n={p_1}^{e_1}\cdots {p_r}^{e_r}$,$p_i$为素数.

重要工具:群作用(*actions of groups*)

Definition 1.10. 设G是一个群,S是一个非空集合,G对S的一个作用,指的是满足下述条件的映射$*:G\times S\to S$:

(条件):(1)$e\cdot s=s(e\in G$是单位元$,s\in S)$

(2)$(a*b)*c=a*(b*c)(\forall a,b\in G,s\in S)$

Example 1.7. $\forall a\in G, f_a:S\to S, s\mapsto as$,且易证$f_a$为置换(即$f_a\in Perm(S)$),$f:G\to Perm(S), a\mapsto f_a$为群同态.此时$G\times S\to S,(a,s)\mapsto as=f(a)(s)=f_a(s)$.

设$G\times S\to S$是个群作用,则该作用给出了S上的如下一个等价关系:$\sim_G$:

对于$s_1,s_2\in S$,定义:$s_1\sim_G s_2 \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$存在$a\in G$,使得$s_2=as_1$.

事实:$\sim_G$是S上的一个等价关系.于是有对应的分类,

商集:

$$S/G=\{[s]:s\in G\}=\{\overline{s}:s\in G\}$$

$$t\in[s]\Leftrightarrow t=as(\exists a\in G),$$

即

$$[s]=G\cdot s=\{as:a\in G\}$$

称$[s]$为s所在的$G-$轨道.

$$S=\bigcup_{s\in S}G\cdot s$$

特别地,如果$\sharp S<+\infty$,则可选取$s_1,s_2,\cdots,s_r\in S$使得$S=[s_1]\cup\cdots\cup[s_r]=G\cdot s_1\cup\cdots\cup G\cdot s_r$.

于是得计数公式:

$$|S|=\sum_{i=1}^{r}|G\cdot s_i|$$

每个轨道元素个数:

令$G_s=\{a\in G:as=s\}$

事实:$G_s\leq G$.

称G_s为S在G中的稳定子群(*stablizer*).

$$\phi:G/G_s\to G\cdot s,\overline{a}\mapsto as(\forall a\in G)$$

(1)ϕ是$well-defined$:

设$\overline{a_1}=\overline{a_2}(a_1,a_2\in G)$,则${a_1}^{-1}a_2\in G_s$,即${a_1}^{-1}a_2s=s\Rightarrow a_1({a_1}^{-1}a_2)s=a_1s$,即$a_2s=a_1s(\phi(\overline{a_1})=\phi(\overline{a_2}))$

(2)显然ϕ是满射,下证ϕ是单射:

设$a_1,a_2\in G$且$\phi(\overline{a_1})=\phi(\overline{a_2})$,则

$$a_1s=a_2s\Rightarrow {a_2}^{-1}a_1s=s\Rightarrow {a_2}^{-1}a_1\in G_s\Rightarrow\overline{a_2}=\overline{a_1}$$

.

结论:$\phi : G/G_s \to G \cdot s, \phi$是双射,于是$|G \cdot s| = |G/G_s| = (G : G_s)$.

计数公式(稍精细些):群G作用在有限集S上,有$G-$轨道分类:$S = G \cdot s_1 \cup \cdots \cup G \cdot s_r$.

(计数公式):$|S| = \sum_{i=1}^{r} |G \cdot s_i| = \sum_{i=1}^{r} (G : G(s_i)$

Example 1.8. *(1)G为群,取$S = G, G \times S \to S, (a, s) \mapsto as$,*

(2)当$H \leq G$.则$S = G/H = \{aH : a \in G\}$且$G \times S \to S, (a, bH) \mapsto abH$.

Definition 1.11. **共轭关系**:*设G是一个群,$a, b \in G$.如果存在$c \in G$,使得$cac^{-1} = b$,则称a与b共轭.*

事实:共轭关系是一个等价关系.

$G/\sim = \{[a] : a \in G\}$,其中$[a] = \{bab^{-1} : b \in G\}$是$G$中$a$所在的共轭类.则$G = \bigcup_{a \in G} [a]$.而$[a] = \{a\} \Leftrightarrow a \in C(G)$,所以有$|G| = |C(G)| + \sum_{i=1}^{r} \sharp [a_i], a_i \notin C(G)$

用群作用的观点:取$S = G, G \times S \Rightarrow S, (a, s) \mapsto asa^{-1}$,易证$e \cdot s = s, (a * b) * s = a * (b * s)$,

任取$s \in S = G$,则有

$$G \cdot s = \{asa^{-1} : a \in G\} = [s]$$

则由$G = C(G) + \bigcup_{a \in G}^{r} [s_i]$得

$$\begin{aligned} |S| &= \sharp C(G) + \sum_{i=1}^{r} |[s_i]| \\ &= \sharp C(G) + \sum_{i=1}^{r} |G \cdot s_i| \\ &= \sharp C(G) + \sum_{i=1}^{r} (G : G_{s_i}) \end{aligned}$$

$$G_{s_i} = \{a \in G : as_i a^{-1} = C_G(s_i)\} \Rightarrow |S| = |C(G)| + \sum_{i=1}^{r} (G : C_G(s_i))$$

当$H \leq K$,有$S = \{gHg^{-1} : g \in G\}$,即$G \times S \Rightarrow S, (a, bHb^{-1}) \mapsto a * (bHb^{-1}) \overset{\triangle}{=} a(bHb^{-1})a^{-1}$

则$G_H = \{g \in G : gHg^{-1} = H\} = N_G(H)$.

复习:(群作用)

群G作用于$S(\neq \emptyset)$上,即

$$G \times S \Rightarrow S$$

$$S/G = S/\sim_G = \{[s] : s \in S\}$$

$$s_1, s_2 \in S, s_1 \sim_G s_2 \Leftrightarrow \text{存在} a \in G, \text{使得} as_1 = s_2$$

$[s] = G \cdot s = \{as : a \in G\} : s$所在的$G$轨道，且有$S = \bigcup_{s \in S} G \cdot s$,

当$\sharp S < +\infty$时,选择$s_1, s_2, \cdots, s_r \in S$使得$S = [s_1] \cup \cdots \cup [s_r] = G \cdot s_1 \cup \cdots \cup G \cdot s_r$.

轨道计数公式:$|S| = \sum i = 1^r |G \cdot s_i| = \sum i = 1^r (G : G(s_i)$

特别地,对于

$$s \in G, [s] = G \cdot s = \{s\} \Leftrightarrow a \cdot s = s (\forall a \in G) \Leftrightarrow G_s = G$$

此时称s为G的一个不动点.

1.5 $Sylow$定理（有限群“结构”定理）

Definition 1.12. 设p是素数,G是一个有限群,如果$|G|$是p的幂,则称G为一个p群.

Definition 1.13. 设G是一个n阶群,p是一个给定的素数,且$p|n$.于是有唯一的$r \in Z_{\geq 0}$使得$p^r||n$,称G的任意一个阶为p^r的子群为G的$Sylow$-子群.

Theorem 1.2. *(有限子群$Sylow$定理)*

设G是一个n阶群,p是一个素数,且$p|n$,记$n = p^r m, r \in Z_{\geq 1}$,且$p \nmid m$.则

(1)G的任一个p子群必包含于G的某个$Sylow-p$子群中.

(2)G的$Sylow-p$子群互相共轭.

(3)记S为G的全部$Sylow-p$子群组成的集合,则$|S| \equiv 1(mod \quad p)$.

(4)$|S| \mid m$.

设H是一个p群,p是素数,H作用在集合$S(\neq\emptyset)$上.

s是一个$H-$固定点 $\Longleftrightarrow hs = s(\forall h \in H) \Longleftrightarrow H_s = H$.

1=$|[s]|$=$|H : H_s|$

s不是$H-$固定点 $\Longleftrightarrow (H : H_s) > 1 \Longleftrightarrow p|(H : H_s)$

记S_f=$\{ s \in S$:s是H固定点$\}$

则 S=$S_f \bigcup H_{s1} \bigcup \cdots \bigcup H_{sr}$

$|S|$=$|S_f|$+ $\prod_{i=1}^{r} |H_{si}|$=$|S_f|$+ $\prod_{i=1}^{r}(H : H_{si}) \Rightarrow |S| \equiv |S_f|(mod \quad p)$ (因为$p|(H : H_{si}),i = 1,\cdots,r$)

综上,得

Proposition 1.3. 设p是一个素数,H是一个p群,S是一个$H-$集.记S_f=$\{ s \in S$:s是H固定点$\}$. 则$|S_f| \equiv |S|(mod \quad p)$.

证明. （有限子群$Sylow$定理）

(1)设H是G的一个p子群，P是G的一个$Sylow-p$子群.令S=$\{aPa^{-1} : a \in G\}$.于是S是一个自然的$G-$集（在共轭作用下），且是可迁的.

$$G \times S \to S$$
$$(a, bPb^{-1}) \to a(bPb^{-1})b^{-1}$$

于是$|S| = |[P]| = (G : G_p)$,其中$G_P = \{a \in G : aPa^{-1} = P\} = N_G(P)$ (即P是G中的正规化子).

$\Rightarrow |S| = (G : G_P) = (G : N_G(P))$

又$P \subset N_G(P) \subset G$

$\Rightarrow (G : N_G(P))|(G : P) = m$

$\Rightarrow p \nmid (G : N_G(P))$,即$p \nmid |S|$

又显然S也是一个$H-$集合,记$S_f(H) = \{s \in S : h{*}s = s(\forall h \in H)\}$,则由前述命题,得$|S_f(H)| \equiv |S|(mod \quad p)$.

由上述结论,$p \nmid |S|$,$\Rightarrow p \nmid |S_f(H)|$.

特别地,$S_f(H)\neq\emptyset$,也即

S中必有$H-$固定点,不妨设其中一个为P'.于是,对$\forall h\in H$,有$hP'h^{-1}=P'$,即$h\in N_G(P')$.因此$H\subset N_G(P')$.

由群同态基本定理,得$H/H\bigcap P'\simeq HP'/P'$,$\Rightarrow (H:H\bigcap P')=(HP':P')$.

由于$P'\subset HP'\subset G$且$(HP':P')|(G:P')=m$

$\Rightarrow (H:H\bigcap P')|m$

$\Rightarrow (H:H\bigcap P')||H|=p^t \quad (1\leq t\leq r)$

$\Rightarrow (H:H\bigcap P')|(m,p^t)=1$

$\Rightarrow (H:H\bigcap P')=1$

$\Rightarrow H\bigcap P'=H$

$\Rightarrow H\subset P'$

(2)任取G的一个$Sylow-p$子群H.下证$H\in S$.

与上述（1）的证明中的讨论一样,即S作为一个$H-$集,必有固定点,取其中一个为Q,于是有$H\subset N_G(Q)$,$\Rightarrow H\subset Q$.

但$|H|=|Q|=p^r$.故$H=Q\in S$.

(3)同理,S也是一个$p-$集,且S有且仅有一个$P-$固定点,即P自身:

$$Q\in S_f \iff aQa^{-1}=Q(\forall a\in P),\text{即}a\in N_G(Q)\Rightarrow P\subset N_G(Q)\Rightarrow P\subset Q\Rightarrow Q=P$$

因此,由前面关于p群作用的固定点结果,$|S|\equiv \#S_f(mod \quad p)$,即$|S|\equiv 1(mod \quad p)$.

(4)S作为一个$G-$集,有$|S|=|\{aPa^{-1}:a\in G\}|=(G:N_G(P))|(G:P)=m$

□

循环群:(1)$G\simeq(Z,+)$可作其生成元的元素为1,-1,$<1>=<-1>$.(2)$G=<a>$,$\circ(a)=n$,$G\simeq(Z/nZ,+)$.$<a>=<a^r>\iff (r,n)=1$,则r有$\phi(n)$个.

Example 1.9. *(1)*$Z/6Z=<\overline{1}>=<\overline{5}>$

(2)$(Z/nZ)^*=\{\overline{a}:(a,n)=1\}$

置换群:

$S=\{a_1,\cdots,a_n\}\longrightarrow\{1,2,\cdots,n\}$

$P(S)=Perm(S)$,$\sigma\in P(s)$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}$$

$\sigma\circ\tau$：先用τ作用,再用σ作用.$(i_1\dots i_r)$是r循环.

可解群:

$G\supset G_0\supset G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_n=\{e\}$,且$G_{i+1}\lhd G_i\ (i=0,\dots,n-1)$,$G_i/G_{i+1}$是交换的.

幂零群一定是可解群.

有限生成$Abel$群结构

(1)有限$Abel$群

设A是一个n阶$Abel$群,$(A,+)$,p是素数,$p|n$.A的$Sylow-p$子群有且只有一个,记之为$A(p)$.

$A(p)=\{a\in A:\exists r\in Z_{\geq 0},\rightarrow p^r a=0\}$,称之为$A$的$p-primary$($p$准素)子群.

$n={p_1}^{e_1}\dots {p_s}^{e_s}$.$p_1,\dots,p_s$是两两互异的素数,$e_1,\dots,e_s\in Z_{\geq 0}$.

对应地,有A的p_i-准素子群$A(p_i)$.

注记:一般地,对于$Abel$群A及$n\in Z_{\geq 1}$,记$A[n]=\{a\in A:na=0\}$,$A[n]\leq A$,

于是$A(p)=\bigcup\limits_{m\in Z_{\geq 0}}A[p^m]=\bigcup\limits_{m=0}^{\infty}A[p^m]$.　$A[1]=\{0\}$.

(2)$Abel$群的直和

$A=A_1\oplus A_2$:(1)$A=A_1+A_2$　(2)表示法唯一:$a=a_1+a_2=a_1'+a_2'\Rightarrow a_1=a_1',a_2=a_2'$.$A_1\bigcap A_2=\{0\}$.

Theorem 1.3. 设A是一个n阶$Abel$群,且$n={p_1}^{e_1}\dots {p_r}^{e_r}$,$p_1,\dots,p_r$是两两互异的素数,$e_1,\dots,e_r\in Z_{\geq 1}$.则$A=A(p_1)\oplus\dots\oplus A(p_r)=\bigoplus\limits_{i=1}^{r}A(p_i)$.

证明. 先证$A(p_1)\bigcap\sum\limits_{i=2}^{r}A(p_i))=\{0\}$

任取其中一个元素α,则$\alpha\in A(p_1)$且$\alpha=\sum\limits_{i=2}^{r}a_i,a_i\in A(p_i)$.

记$\circ(a_i)=p_i^{t_i}$　　$(i=2,\dots,r)$.$\circ(\alpha)=p_1^{t_1}$.

令$t=max\{t_i:i=2,\dots,r\}$,则$(p_2,\dots,p_r)^t\alpha=(p_2,\dots,p_r)^t(\sum\limits_{i=2}^{r}a_i)=0$.

$p_1^{t_1}\alpha=0\Rightarrow\circ(\alpha)|(p_1^{t_1},(p_2,\dots,p_r)^t)=1\Rightarrow\circ(\alpha)=1\Rightarrow\alpha=0$.

不妨设$n=p^{e_1}q^{e_2}$,下证$A=A(p)+A(q)$.

$(p^{e_1},q^{e_2})=1\iff\exists u,v\in Z\rightarrow up^{e_1}+vq^{e_2}=1$.

则对A中任意元素a有$a=1\cdot a=(up^{e_1}+vq^{e_2})\cdot a=up^{e_1}a+vq^{e_2}a\in A(p)+A(q)$.

□

设$(A,+)$是$Abel$群,$a\in A$,$n\in Z_{>0}$,则$na=a+\dots+a(n个a)$.

若$n\in Z_{\geq 1}$,记$A[n]=\{a\in A:na=0\}$,p是素数,$A[p^n]=\{a\in A:p^n a=0\}$,$A(p)=\bigcup\limits_{n\in Z_{>0}}A[p^n]$是$A$的$p-$准素子群$(p-primary)$,$A[1]=\{0\}$.

事实:A交换$\Rightarrow A=\bigoplus\limits_{p}A(p)$,其中$p$取遍所有素数.

特别地,当$|A|<+\infty$,即A是一个有限$Abel$群,记$|A|=n={p_1}^{e_1}\dots {p_r}^{e_r}$.$p_1,\dots,p_r$是两两互异的素数,$e_1,\dots,e_r\in Z_{\geq 1}$.

此时,$A=A(p_1)\oplus\dots\oplus A(p_r)$

事实:p是素数,有限p群必是循环p子群的直和,即

$A=A(p)\simeq Z/p^{r_1}Z\oplus\dots\oplus Z/p^{r_s}Z$.（不妨设$r_1\leq\dots\leq r_s$),其中$s$在同构意义下不变,称之为$A$的$p-$秩$(rank)$.　$p-rank(A)=s$.

若$A=Z/p^rZ$　　$p-rank(A)=1$.

$A[p]=\{a\in A:pa=0\}=\{\overline{m}:p\overline{m}=\overline{0}\}=\{\overline{a}:a\in p^{r-1}Z\}=p^{r-1}Z/p^rZ$.

即$A[p] = p^{r-1}Z/p^rZ \simeq Z/pZ = F_p$,即$dim_{F_p}A[p] = 1 = dim_{F_p}A/pA, p-rank(A) = dim_{F_p}A[p]$.

由$A = Z/p^rZ$,有$pA = pZ/p^rZ \leq A$,商群$A/pA = (Z/p^rZ)/(pZ/p^rZ) \simeq Z/pZ = F_p$.

事实:设p是素数,A是一个有限$Abel$群,则

$$p-rankA = p-rankA(p) = dim_{F_p}A[p] = dim_{F_p}A/pA.$$

1.6 自由$Abel$群

Definition 1.14. *设A是一个$Abel$群,$\emptyset \neq S \subset A$,如果下述条件成立:*

(1)对$\forall \alpha \in A$,都有$\alpha = \sum\limits_{s\in S} a_s \cdot S$,其中$a_s \in Z$,且对几乎所有(即除有限个外)的$s \in S, a_s = 0$.

(2)上述(1)中的表示法唯一.

则称S为A的一组基,此时也称A为一个自由$Abel$群.

Example 1.10. *1.$A = (Z, +), S = \{1\}$*

2.设$x_1, \ldots, x_n$是一组未定元,令$A = Z_{x_1} \oplus \cdots \oplus Z_{x_n}$

Lemma 1.3. 7.2(P40) *设$f: A \to A'$是一个群满同态,其中A, A'都是$Abel$群,且A'是自由的,则存在A的一个子群C,使得$f|_C : C \simeq A'$,且$A = C \oplus kerf$.*

证明. 取A'的一组基$S' = \{x_i'\}_{i\in I}$,且对每个$i \in I$,取定一个$x_i \in A$,使得$f(x_i) = x_i'$(因f是满射),并记$S = \{x_i : i \in I\}$.

(1)下证S中的元素是$Z-$线性无关的.为此,令$\sum\limits_{i\in I} a_ix_i = 0$,其中$a_i \in Z$,$i \in I$,且对几乎所有的$i \in I, a_i = 0$. $\Rightarrow 0 = f(\sum\limits_{i\in I} a_ix_i) = \sum\limits_{i\in I} a_if(x_i) = \sum\limits_{i\in I} a_ix_i' \Rightarrow a_i = 0, (\forall i \in I)$. 于是,令$C =< S >$为$A$中由$S$生成的子群,则$C$是以$S$为一组基的自由$Abel$群.

(2)下证$C \bigcap kerf = \{0\}$.任取$\alpha \in C \bigcap kerf$,有$\alpha = \sum\limits_{i\in I} a_ix_i$($a_i \in Z$,且除有限个外均取0),且$0 = f(\alpha) = f(\sum\limits_{i\in I} a_ix_i) = \sum\limits_{i\in I} a_if(x_i) = \sum\limits_{i\in I} a_ix_i' \Rightarrow a_i = 0, (\forall i \in I)$,即$\alpha = 0$.

(3)下证$A = C \oplus kerf$.任取$\alpha \in A$,$f(\alpha) \in A'$,$f(\alpha) = \sum\limits_{i\in I} a_ix_i'$(有限和), 即$f(\alpha) = \sum\limits_{i\in I} a_if(x_i) = f(\sum\limits_{i\in I} a_ix_i) \Rightarrow f(\alpha - \sum\limits_{i\in I} a_ix_i) = 0 \Rightarrow \alpha - \sum\limits_{i\in I} a_ix_i \in kerf \Rightarrow \alpha \in C + kerf$.

□

Theorem 1.4. 7.3(P41) *自由$Abel$群A的非平凡子群是自由的,且其基的基数$\leq A$的基的基数.由此即知,A中任两组基的基数均相等,称该基数为A的秩($rank$).*

证明. (为简单证,只考虑基的基数$< +\infty$的情形),即只考虑有限生成的自由$Abel$群.

(对基的基数用归纳法)

$r = 1$时显然,$Z \simeq nZ(n \neq 0)$.

现设$A = Z_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus Z_{\alpha_n}$(即$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$是$A$的一组自由基). 令

$$f : A \to Z_{\alpha_1}\text{(即投影到第一个分量)}$$
$$\sum_{i\in I} a_i\alpha_i \to a_1\alpha_1$$

显然,f是一个群满同态.由群同态基本定理,$A/kerf \simeq Z_{\alpha_1} \Rightarrow kerf = Z_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus Z_{\alpha_n}$.

设$B \leq A$.将f限制在B上,得 $f|_B : B \to Z_{\alpha_1}$.

注意到$Z_{\alpha_1} \simeq Z$,故$im(f|_B)$作为Z_{α_1}的子群有以下两种情形:

(1)$im(f|_B) = 0$.由群同态基本定理得 $B/ker(f_B) \simeq im(f|_B) = 0 \Rightarrow B = ker(f|_B) \subset kerf$

由归纳假设,B是自由的,且B的基的基数$\leq n-1 < n$.

(2)$im(f|_B) \neq 0$,此时$im(f|_B) \simeq Z$,即$f|_B$是满的. 于是由前述引理7.2知B中有一个子群C,使得$C \simeq Z_{\alpha_1}$,且$B = ker(f|_B) \oplus C$.

由归纳假设,$ker(f|_B) \subset kerf = Z_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus Z_{\alpha_n}$知 B是自由的(因为$ker(f|_B)$是自由的,C也是自由的),且 B的基的基数=$ker(f|_B)$的基的基数+C的基的基数$\leq n-1+1 = n$.

□

1.7 有限生成$Abel$群

Definition 1.15. 设A是一个$Abel$群,令$A_{tors} = \{a \in A : \exists m \in Z_{\geq 1} \to ma = 0\}$.

事实:$A_{tors} \leq A$,称A_{tors}为A的挠子群($torsion \quad subgroup$).特别地,当$A_{tors} = \{0\}$时,我们称A为一个$torsion-free$群.

事实:A/A_{tors}是一个$torsion-free$群.

证明. 任取$\alpha = \overline{a} \in A/A_{tors}$,其中$a \in A$.假设有$m \in Z_{\geq 1}$,使得$m\alpha = \overline{0}$ 即$m\overline{a} = \overline{0}, \overline{ma} = \overline{0} \iff ma \in A_{tors} \Rightarrow \exists n \in Z_{\geq 1}, s.t., nma = 0 \Rightarrow a \in A_{tors} \Rightarrow \alpha = \overline{a} = 0$.

□

Theorem 1.5. 8.4($P45$):对于有限生成$Abel$群A.$torsion-free \iff free$.

证明. 不妨设$A \neq 0$.

设S是A的一个生成元集,($S \neq \emptyset$)即$A = \underset{s \in S}{\oplus} Z_s, |S| < +\infty$.

则可取A在S中的如下一个极大$Z-$线性无关组$x_1, \ldots, x_n$,即

(1)$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 (a_i \in Z, i = 1, \ldots, n) \Rightarrow a_i = 0 (i = 1, \ldots, n)$

(2)对$\forall x \in A$,有不全为0的整数$a_0, a_1, \ldots, a_n \in Z, s.t., a_0x + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$

令$B = Z_{x_1} \oplus \cdots \oplus Z_{x_n}$,则$B$是$A$的一个秩$n$的自由$Abel$子群. 特别地,$\forall s \in S$,都有不全为0的整数$a_0, a_1, \ldots, a_n \in Z, s.t., a_0s + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.

此时,$a_0 \neq 0 \Rightarrow a_0s = -a_1x_1 - \cdots - a_nx_n \in B$.由于$|S| < +\infty$,故有$m \in Z_{\geq 1}, s.t., ms \in B (\forall s \in S)$.

对$\forall \alpha \in A$,有$\alpha = \sum\limits_{s \in S} a_s \cdot s, a_s \in Z$,于是$m\alpha = \sum\limits_{s \in S} a_s \cdot (ms) \in B$, 即$mA \leq B$.

由前述结论,可知mA是自由$Abel$群.又显然

$$A \simeq mA$$
$$a \to ma$$

(因为$ma = 0 \iff a = 0, A$是$torsion-free$.)

□

Theorem 1.6. *8.5(P46):设A是一个有限生成$Abel$群,则$A \simeq A_{tors} \oplus A_f$,其中$A_{tors}$是$A$的$torsion$子群,是一个有限群; A_f是一个自由$Abel$群,且$A_f \simeq Z^r = Z \oplus \cdots \oplus Z(r$个$)$,$r = rank(A_f), A \simeq A_{tors} \oplus Z^r$.*

证明. $A = \sum\limits_{s \in S} Z_s$.$S$是$A$的一个生成元集,$|S| < +\infty$.

令$F = \bigoplus\limits_{s \in S} Z_s$,则$F$是一个以$S$为一组基的自由$Abel$群,且有一个自然的群满同态

$$f : F = \bigoplus_{s \in S} Z_s \to \sum_{s \in S} Z_s$$
$$\bigoplus_{s \in S} a_s \cdot s \to \sum_{s \in S} a_s \cdot s$$

$f^{-1}(A_{tors})$作为F的子群,是一个有限生成的自由$Abel$群 $\Rightarrow A_{tors} = f(f^{-1}(A_{tors}))$是$A$的有限生成子群 $\Rightarrow A_{tors}$是有限群.

前面已证A/A_{tors}是一个有限生成$torsion-free \quad Abel$群, 故A/A_{tors}是一个有限生成自由$Abel$群,即$A/A_{tors} \simeq Z^r.r \in Z_{\geq 1}$.

再用引理7.2及群满同态,$g : A \to A/A_{tors} \simeq Z^r. \Rightarrow A = A_{tors} \oplus C, C \simeq Z^r$.

□

2 环与模

2.1 一些简单定义

Example 2.1. *$(Z, +, \times)$(两个运算)*

(1)$(Z, +)$是一个交换群

(2)$(Z, \times)$是一个半群,$\times$满足结合律

(3)分配律:$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Definition 2.1. 环*$(Ring)$:$(R, +, \times) \quad R \neq \emptyset$*

(1)$(R, +)$是一个$Abel$群

(2)R对乘法"$\times$"封闭且满足结合律

(3)分配律:$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

特殊元素:$1 \in R, 1 \cdot a = a \cdot 1 = a(\forall a \in R)$

Definition 2.2. 模*:设R是一个环(含1),$(M, +)$是一个交换群,且有R对M的如下作用:*

$$R \times M \to M$$
$$(a, \alpha) \to a \cdot \alpha$$

满足如下条件(公理):

(1)$(a_1 a_2)\alpha = a_1(a_2\alpha) \quad (\forall a_1, a_2 \in R, \alpha \in M)$

(2)$1 \cdot \alpha = \alpha(\forall \alpha \in M)$;$0 \cdot \alpha = 0(\forall \alpha \in M)$; $a \cdot 0 = 0(\forall a \in A)$

(3)$(a_1 + a_2)\alpha = a_1\alpha + a_2\alpha; a(\alpha_1 + \alpha_2) = a\alpha_1 + a\alpha_2(a_1, a_2, a \in R, \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in M)$

则称M为一个R模$(R - module)$.

Definition 2.3. 一些特殊环:

1.(1)$(R,+,\cdot)$是一个交换环;*(2)*$(R\setminus\{0\},\cdot)$是一个乘法群,则称R是一个域

2.(1)$(R,+,\cdot)$是一个非交换环;*(2)*$(R\setminus\{0\},\cdot)$是一个群,则称R是一个除环$(skew\quad ring)(division\quad ring)$

Example 2.2. *1.*域:$Q,R,C.Q(x)=\{\frac{f}{g}:f,g\in Q[x]$,且$g\neq 0\}$*(有理分式域)*.$(Q,+,\cdot),(Q\setminus\{0\},\cdot)$

*2.*域F上的多项式环$F[x]$.

3.$Gauss$整数环$Z[i]=\{a+bi:a,b\in Z\}$

4.$Z[\sqrt{-3}]=\{a+b\sqrt{-3}:a,b\in Z\}$

5.$(Mn(R),+,\cdot)(n>1)$

$Mn(R)=Hom_R(R^n,R^n)=End_R(R^n)$

$GLn(R)=Mn(R)^*$

Definition 2.4. *(1)*对于环$(R,+,\cdot)$*(含1)*.记$R^\times(=R^*)=\{a\in R:\exists b\in R,s.t.,ab=ba=1\}$

事实:$(R^\times,\cdot)$是一个群,称为环R的*(乘法)*单位群.

*(2)*零因子:环R,$a\in R$.称为一个零因子，如果有$b\in R\setminus\{0\},s.t.,ab=0.$

Definition 2.5. 一个不含非零幂零元的交换环称为一个既约环$(reduced\quad ring)$.

2.2 子结构

Definition 2.6. **子环**:R是一个含*1*的环,$R_0\leq R$是R的子环,$1\in R_0.(R_0,+,\cdot)$是一个含*1*的环.

Definition 2.7. **理想**: 设$(R,+,\cdot)$是一个含*1*的环,I是R的一个加法子群,如果I还满足如下条件:

*(*对乘法的吸收性*)*:对$\forall a\in R,b\in I$,都有$ab,ba\in I$,则称I是R的一个理想$(ideal)$,记之为$I\lhd R$.

环的商:设R是一个含*1*的环,$I\lhd R$.

*(1)*有加法商群$R/I:(R,+)/(I,+)\quad \overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}(\forall a,b\in R)$.

*(2)*在R/I中引进乘法"$\cdot$"如下:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a\cdot b}(\forall a,b\in R)$$
$$\overline{a_1}=\overline{a_2}\iff a_1-a_2\in I\Rightarrow(a_1-a_2)b\in I(\forall b\in R)\text{即}a_1b-a_2b\in I\Rightarrow\overline{a_1b}=\overline{a_2b}.$$

结论:$(R/I,+,\cdot)$是一个环.

Definition 2.8. **环同态**设R_1,R_2是含*1*的环,$f:R_1\to R_2$是一个映射,如果f保运算,即

(1)$f(a+b)=f(a)+f(b)(\forall a,b\in R_1)$

(2)$f(ab)=f(a)f(b)(\forall a,b\in R_1)$

(3)$f(1)=1$

Theorem 2.1. **环同态基本定理**设R_1,R_2是含*1*的环,$f:R_1\to R_2$是一个环同态,则

(1)f的核$kerf=f^{-1}(0)=\{a\in R_1:f(a)=0\}$是$R_1$的理想,即$kerf\lhd R_1,imf=f(R_1)\leq R_2$.

*(2)*有环同构$R_1/kerf\simeq imf$,故有交换图

$$f = \overline{f} \circ \eta$$

$$\begin{tikzcd}
R_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta"'] & & R_2 \\
& R_1/Ker(f) \arrow[ur, hook, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta"'] & & f(a) \\
& \overline{a} \arrow[ur, hook, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\overline{f} : R/kerf \to R_2$$
$$\overline{a} \to f(a)$$
$$\overline{f}(\overline{a}) = \overline{f}(\overline{b}), a, b \in R_1 \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(a-b) = 0 \Rightarrow a - b \in kerf \Rightarrow \overline{a} = \overline{b}.$$

事实:环同态$f : R_1 \to R_2$是单一同态 $\iff$ $kerf = \{0\}$.

$(R, +, \cdot)$是含1交换环

平凡理想:0与R

理想的交:I, J

$$(I \bigcap J, +)$$
$$b \in I \bigcap J, \forall a \in R$$
$$ab \in I, ab \in J \Rightarrow ab \in I \bigcap J$$

结论:理想对取”交”封闭.

Definition 2.9. **子集生成的理想**:$\emptyset \neq S \subset R$(环),记$\mathscr{F}(S) = \{I : I \lhd R, I \supset S\}$, 令$< S >= \bigcap\{I : I \lhd R, I \supset S\} = \bigcap\limits_{I \in \mathscr{F}(S)} I$

特别地,可由一个元素生成的理想称为一个主理想.$I =< a > (a \in R)$.

$(R, +, \cdot)$环(含1),$a \in R \Rightarrow Ra, aR, RaR \subset < a >, Ra = \{ra : r \in R\}$

$RaR \subset < a >, \alpha \in RaR \iff \alpha = r_1 a r_1' + r_2 a r_2' + \cdots + r_n a r_n'$

又$RaR \lhd R, RaR \supset < a >$,故$< a >= RaR$.

特别地,当R是含1交换环时,$< a >= Ra(= aR), < a_1, \ldots, a_n >= Ra_1 + \cdots + Ra_n$.

$< \emptyset >= \{0\}$

R是含1交换环.I, J. $I \bigcap J \lhd R, I \bigcup J$不一定是理想. $< I \bigcup J > \subset I + J \subset K, K \lhd R$且$K \supset I \bigcup J, a \in I, b \in J, a + b \in K$.

Proposition 2.1. *设$(R, +, \cdot)$是一个含1的交换环.*

(1)对$\forall a \in R, < a >= Ra$.

(2)$I_1, \ldots, I_n \lhd R$,则$< I_1 \bigcup \cdots \bigcup I_n >= I_1 + \cdots + I_n$.

更一般地,对R的任一簇理想$\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$,有$< \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha >= \sum\limits_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$.

Definition 2.10. *设R是含1交换环,$I \lhd R$,称I是R的一个极大理想,如果下述条件成立:*

(1)$1 \notin I$(即$I \neq R$),也即I是R的真理想(proper).

(2)(极大性)如果$J \lhd R$,且$I \subset J \subset R$则$J = I$或$J = R$.

Theorem 2.2. *含1交换环必有极大理想.由此可知,该环中的任一个真理想必包含于某个极大理想中.*

证明. ($Zorn$引理的引用)

令$S=\{I\lhd R:1\notin I\},0\in S$,故$S\neq\emptyset$,且$S$在集合的"包含$\subset$"关系下是一个偏序集.

任取S中的一个全序子集$(Chain)\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 即对$\forall\alpha,\beta\in\Lambda,I_\alpha\subset I_\beta$或$I_\beta\subset I_\alpha$.

令$J=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$.断言:$J$是$R$的一个真理想.

事实上,对$\forall a,b\in J$,则$a\in I_\alpha,b\in I_\beta$(对某个$\alpha,\beta\in\Lambda$).

由所设,不妨设$I_\alpha\subset I_\beta$,则$a,b\in I_\beta\Rightarrow a+b\in I_\beta$且对$\forall c\in R,ca\in I_\beta\Rightarrow a+b\in J$且$ca\in J\Rightarrow J$是理想.

又$1\notin J$,假如不然,由$1\in J\Rightarrow 1\in I_\alpha$(对某个$\alpha\in\Lambda$),矛盾!

综上,J是$\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$在$S$中的一个上界,故由$Zorn$引理,命题得证.

□

练习:

1.Z中的所有理想,极大理想.

2.$Z/24Z$中的所有理想,极大理想.

2.3 理想、模、分式环

A是一个含1交换环

Definition 2.11. **(素理想)**: *$I\rhd A$真理想,满足条件: $a,b\in A$ 若$ab\in I$, 则$a\in I$或$b\in I$,称I是A的一个素理想*

Example 2.3. *$A=Z,I\rhd A$是素理想$\Longleftrightarrow I=\langle n\rangle$其中$n=p$($p$是素数)或$n=0$*

Example 2.4. *$B=F[x]$,F是域,$\mathcal{P}\rhd B$是素理想$\Longleftrightarrow\mathcal{P}=\langle p(x)\rangle$其中$p(x)$是$F[x]$的不可约多项式 $Z[x]$不是PID(主理想整环)(因为$I=\langle 2,x\rangle$不是由一个元素生成的主理想)*

商环

设A是含1交换环,$\mathcal{M}\rhd A$是极大理想,$\overline{A}=A/\mathcal{M}$ 。$\forall\bar{a}\in\bar{A}(a\in A),\bar{a}=\bar{0}\Longleftrightarrow a\in\mathcal{M}$,故有$\forall\bar{a}\neq\bar{0}\Longleftrightarrow a\notin\mathcal{M}$,从而$\mathcal{M}\subsetneq\{a+\mathcal{M}\}\subseteq A$。由$\mathcal{M}$是极大理想,所以$A=<a+\mathcal{M}>=\langle a\rangle+\mathcal{M}$。因为$1\in A,\exists x\in\langle a\rangle,y\in\mathcal{M}$,即$x=ax_1,x_1\in A$ 有$1=x+y=ax_1+y$,从而有$\bar{1}=\overline{ax_1+y}=\bar{a}\bar{x}_1+\bar{y}$。因为$y\in\mathcal{M}$,所以有$\bar{y}=\bar{0}$,从而$\bar{1}=\bar{a}\bar{x}_1$,即$\bar{a}$在$\bar{A}$中可逆。 $\bar{A}$在任一个非零元$\bar{a}$都有逆,故$\bar{A}=A/\mathcal{M}$是域。

Proposition 2.2. **(极大理想的判别)** *设A是交换环(含1), $I\rhd A$真理想, 则I是A的极大理想$\Longleftrightarrow A/I$是一个域*

证明. "$\Rightarrow$" (必要性)记$\bar{A}=A/I,\forall\bar{a}\in\bar{A}\backslash\{0\}(a\in A)$,则 $a\in I$。令$J=\langle\{a\}\cup I\rangle=\langle a\rangle+I$,则$J\rhd A$且$I\subsetneq J\subseteq A$。由$I$是极大理想,故$J=A$,即$A=\langle a\rangle+I$。由于$1\in A$,所以$\exists x=ax_1\in$

$\langle a\rangle$，其中$x_1\in A,y\in I$，于是有$1=x+y=ax_1+y$，从而在A中有$\bar{1}=\overline{ax+y}=\bar{a}\bar{x}+\bar{y}=\bar{a}\bar{x}$，(因为$y\in I$，所以$\bar{y}=\bar{0}$)即$\bar{1}=\bar{a}\bar{x}$，所以$\bar{a}$在$\bar{A}$中可逆，故$\bar{A}$是一个域。
"$\Leftarrow$"(充分性)任取$J\rhd A$，使得$I\subseteq J\subseteq A$。若$J\neq I$(下证$J=A$)，则有$x\in J\backslash I$，于是在$\bar{A}$中，$\bar{a}\neq\bar{0}$，由于$\bar{A}$是域，故$\exists y\in A$，使得$\bar{x}\bar{y}=\bar{1}$，即$\overline{xy}=\bar{1}$，从而$1-xy\in I$，即$1\in xy+I\subseteq J$。故$J=A$ □

记号:$I\rhd A,\bar{A}=A/I,a,b\in A,\bar{a}=\bar{b}\Longleftrightarrow a-b\in A$,也记为$a\equiv b(\mathrm{mod}I)$

Proposition 2.3. **（素理想的判别）**设A是交换环*(含1)*，$I\rhd A$真理想，则I是A的素理想$\Longleftrightarrow$ A/I是一个整环*(证明作为课后练习)*

记号:常记(1)spec$A$=$\{\mathcal{P}$—$\mathcal{P}$是A的素理想$\}$ (2)Max$A$=$\{\mathcal{M}\mid\mathcal{M}$是$A$的极大理想$\}$

Corollary 2.1. *在含1交换环A中,极大理想也是素理想*

Definition 2.12. 设A是交换环*(含1)*,定义$J(A)=\bigcap_{m\in Max(A)}m$,称它为$A$的$Jacobson$根

Definition 2.13. **（幂0元）** 设A是交换环*(含1)*,$a\in A$,如果有$\exists n\in Z_{\geq 1}$,使得$a^n=0$，则称a为A一个幂0元。记*N(A)*=$\{a\in A$—a是A的幂0元$\}$

Proposition 2.4. *N(A)*$\rhd A$,称*N(A)*为A的幂0根。*(nipotant radical)*,有时也称*N(A)=rad(A)*

(证明用于课后练习)
当N(A)=0时，称A是既约环

Proposition 2.5. *N(A/N(A))*=$\{\bar{0}\}$,即*A/N(A)*是既约的*(rediced)*

证明. 任取$\bar{a}\in$ N(A/N(A))($a\in A$)，则$\exists n\in Z_{\geq 1}$,使得$\bar{a}^n=\bar{0}$，即有$\bar{a^n}=\bar{0}$，故$a^n\in$N(A)。从而$\exists m\in Z_{\geq 1}$,使得$(a^n)^m=0$，即$a^{nm}=0$，故有$a\in$N(A)，从而$\bar{a}=\bar{0}$。所以N(A/N(A))=$\{\bar{0}\}$。 □

Proposition 2.6. 设A是交换环*(含1)*,则*N(A)*=$\bigcap_{\mathcal{P}\in spec(A)}\mathcal{P}$

证明. 首先证N(A)$\subseteq\bigcap_{\mathcal{P}\in spec(A)}\mathcal{P}$。 $\forall a\in$N(A)$\exists n\in Z_{\geq 1}$,使得$a^n=0\in\mathcal{P}(\forall\mathcal{P}\in spec(A))$。由于$\mathcal{P}$是素理想,所以$a\in\mathcal{P}$。故有N($A$)$\subseteq\bigcap_{\mathcal{P}\in spec(A)}\mathcal{P}$。
下证$\bigcap_{\mathcal{P}\in spec(A)}\mathcal{P}\subseteq$N($A$)。任取$a\in A$/N($A$),则$\forall n\in Z_{\geq 1}$,有$a^n\neq 0$。令

$$\varepsilon=\{I\rhd A|n\cap a^{Z_{\geq 1}}=\varnothing\}=\{I\rhd A|a^n\notin I,\forall n\in Z_{\geq 1}\},$$

显然$\langle 0\rangle\in\varepsilon$,则$\varepsilon\neq\varnothing$。因为在通常的包含关系下，$(\varepsilon,\subseteq)$构成一个偏序集。故任取$\varepsilon$中的一个全序子集$\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，令$J=\cup_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$。由于$\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$有包含关系,从而$J\rhd A$。
下证$J\in\varepsilon$,即证$J\cap a^{Z_{\geq 1}}=\varnothing$。若不然,则有$a^m\in J(\exists m\in Z_{\geq 1})$。由于$J=\cup_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$,则$\exists\alpha\in\Lambda$,使得$a^m\in I_\alpha$与$I_\alpha\in\varepsilon$矛盾。从而$J\cap a^{Z_{\geq 1}}=\varnothing$，故$J\in\varepsilon$,即$J$是全序子集$\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$在$\varepsilon$中的上界。由Zorn引理,$\varepsilon$必有极大元。设$J$为是一个$\varepsilon$的极大元,且$J\in specA$,即$J$是素理想。从而$\forall x,y\in A,xy\in J$,有$x\in J$或$y\in J$。若不然$x\notin J$且$y\notin J$,有$\langle x\rangle+J\supsetneqq J,\langle y\rangle+J\supsetneqq J$。由$J$的极大

性得$\langle x\rangle + J \notin \varepsilon$,$\langle y\rangle + J \notin \varepsilon$。又由$\varepsilon$的定义,$\exists m,n \in Z_{\geq 1}$使得$a^m \in \langle x\rangle + J, a^n \in \langle y\rangle + J$。从而$a^{mn} = a^m a^n \in (\langle x\rangle + J)(\langle y\rangle + J) \subseteq \langle xy\rangle + J$(因为$xy \in J$)与$J \in \varepsilon$矛盾。所以$J \in specA$，故$\forall a \in A/\mathrm{N}(A)$，有$a \notin J, J \rhd A$是素理想，所以$a \notin \bigcap_{\mathcal{P}\in spec(A)} \mathcal{P}$。故$a \in \bigcap_{\mathcal{P}\in spec(A)} \mathcal{P}$，从而$b \in$N$(A)$,即$\bigcap_{\mathcal{P}\in spec(A)} \mathcal{P} \subseteq$N$(A)$。
综上N(A)=$\bigcap_{\mathcal{P}\in spec(A)} \mathcal{P}$ □

$I \rhd A$,

$$A \twoheadrightarrow \bar{A} = A/I$$
$$I \longmapsto J/I$$

N(A/I)=$\bigcap_{\mathcal{P}\in spec(A/I)} \mathcal{P}$=$\bigcap_{\mathcal{P}\in spec(A),\mathcal{P}\supset I} \mathcal{P}$

Definition 2.14. *设A是交换环(含1),$I \rhd A$,定义$\sqrt{I}$ =rad(I),称之为的I根*
rad(I)=$\sqrt{I} \triangleq \{a \in A|\exists n \in Z_{\geq 1}$,使得$a^n \in I\}$

显然$I \subset \sqrt{I}$, $rad(I) \rhd A$(课后练习) 特别的,当rad(I)=I时,称I是A的一个根理想,rad(rad(I))=rad(I
$\sqrt{I}$,即rad(I)是一个根理想

证明. 显然$\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$,下证$\sqrt{\sqrt{I}} \subset \sqrt{I}$。$\forall a \in \sqrt{\sqrt{I}}$, $\exists m \in Z_{\geq 1}$，使得$a^m \in \sqrt{I}$。也$\exists n \in Z_{\geq 1}$，使得$a^{mn} = a^{nm} \in I$。故有$a \in \sqrt{I}$，即$\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$ □

特别的，$\sqrt{0}$ =N(A)。

Proposition 2.7. *设A是交换环(含1),$I \rhd A$，则$\sqrt{I}$ =rad(I)=$\bigcap_{\mathcal{P}\in spec(A),\mathcal{P}\supset I} \mathcal{P}$。记$A$的Jaobson radical为$J(A)$=$\bigcap_{m\in MaxA} m$。*

Proposition 2.8. *设A和$J(A)$如上，则$x \in J(A) \iff 1 - xy \in A^* = u(A)(\forall y \in A)$，其中$u(A)$是指$A$的乘法单位群。$u(A)$=$\{a \in A|\exists b \in A$，使得$ab = 1\}$。*

证明. “$\Leftarrow$”：若$x \notin J(A) = \bigcap_{m\in MaxA} m$，则存在$\mathcal{M} \in$Max$A$，使得$x \notin \mathcal{M}$。则$\mathcal{M} \subsetneqq \langle x\rangle + \mathcal{M}$，从而$\langle x\rangle + \mathcal{M} = A$，即存在$y \in A, m \in \mathcal{M}$，使得$1 = m + xy$。故$1 - xy = m \in \mathcal{M}$与$1 - xy \in u(A)$矛盾。所以$x \in J(A)$。
“$\Rightarrow$”：若$1 - xy \notin u(A)$，则$\langle 1 - xy\rangle \neq A$。即存在$\mathcal{M}'$是极大理想，使得$\langle 1 - xy\rangle \subsetneq \mathcal{M}'$。从而$1 - xy \in \mathcal{M}'$，故$1 \in xy + \mathcal{M}'$。由于$x \in J(A) = \bigcap_{m\in MaxA} m$，从而有$x \in \mathcal{M}'$，即$xy \in \mathcal{M}'$，故$1 \in xy + m' \subset \mathcal{M}'$,这与$\mathcal{M}'$是极大理想矛盾。所以$1 - xy \in u(A)$。 □

Theorem 2.3. 中国剩余定理(Chinese Remainder thm) *设A是一个含1交换环，$I_1, I_2, \ldots I_n \rhd A$，且这些理想两两互素，即$I_j + I_k = \langle 1\rangle = A(\forall j,k \in \{1,2,\ldots n\}, j \neq k)$，则*
(1)$I_1 I_2 \ldots I_n = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n$
(2)$A/I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n \simeq A/I_1 \times A/I_2 \times \cdots \times A/I_n$
换言之,

$$\phi : A \to A/I_1 \times A/I_2 \times \cdots \times A/I_n$$
$$a \longmapsto (a + I_1, a + I_2, \ldots, a + I_n)$$

是一个环满同态，且ker(ϕ)=$I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n$。

Definition 2.15. 设A是一个含*1*交换环，$I \rhd A, J \rhd A$。若有$I+J=A$，则称I与J互素。

Example 2.5. $A = Z[x], p = \langle 2\rangle, q = \langle x\rangle$。由于$Z[x]/\langle x\rangle \simeq \mathbb{Z}$是整环，得$q \rhd A$是素理想。$p=\langle 2\rangle$显然也是素理想，$p+q=\langle 2\rangle+\langle x\rangle=\langle 2,x\rangle$。考虑

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}[X] & \overset{\phi}{\twoheadrightarrow} & \mathbb{Z} & \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ f(x) & \mapsto & f(0) & \mapsto & \overline{f(0)} \\ & & m & \mapsto & \overline{m} \end{array}$$

则$\eta=\psi\circ\phi$：$\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{\bar{0},\bar{1}\}$环满同态，且$ker\eta$=$\{f(x)\in\mathbb{Z}[x] \mid \overline{f(0)}=\bar{0}\}$=$\{f(x)\in\mathbb{Z}[x] \mid 2|f(0)\}$=$\langle 2,x\rangle$,则$\mathbb{Z}[x]/\langle 2,x\rangle\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$是域，因此$m=\langle 2,x\rangle=q+p$是极大理想。但显然$1\notin\langle 2,x\rangle$，从而$q$与$p$并不是互素的。

Definition 2.16. A,B是两个含*1*交换环，令$A\times B$=$\{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$，则$A\times B$是一个环*(*按照分量相加，相乘*)*，称之为两个环的乘积。

$$\phi : A \to A/I_1 \times A/I_2 \times \cdots \times A/I_n$$
$$a \longmapsto (a+I_1, a+I_2, \ldots, a+I_n)$$

显然是一个同态，下面说明是满的，即任意的$(a_1+I_1, a_2+I_2, \ldots, a_n+I_n)\in A/I_1\times A/I_2\times\cdots\times A/I_n$，存在$a\in A$，使得$\phi(a)=(a_1+I_1,a_2+I_2,\ldots,a_n+I_n)$，即$(a_1+I_1,a_2+I_2,\ldots,a_n+I_n)=(a+I_1,a+I_2,\ldots,a+I_n)$，从而有，即是方程组的解。

Example 2.6. $A=\mathbb{Z}$，$I_1=\langle 2\rangle, I_2=\langle 3\rangle, I_3=\langle 5\rangle$

$$\begin{cases} x\equiv a_1 \pmod{\langle 2\rangle} \\ x\equiv a_2 \pmod{\langle 3\rangle} \\ x\equiv a_3 \pmod{\langle 5\rangle} \end{cases}$$

有解$x=a$.

2.4

2.4.1 几类重要的特殊环

A是一个含1交换环

Definition 2.17. **（局部环）***:*只有一个极大理想的含*1*交换环，就称为局部环。

Proposition 2.9. 设A是一个局部环，m是A的极大理想，则$A^\times=u(A)=A\backslash m$

证明. 因为$a\in A$，存在$b\in A$，使得$ab=1$，所以$aA=\langle a\rangle=A$，故$a\notin m$，即$a\in A\backslash m$，从而有$u(A)\subset A\backslash m$。若$aA\neq A$，由$\langle a\rangle\rhd m$，且$A$是局部环，只有唯一极大理想$m$，则$\langle a\rangle\subset m$，从而$a\in m$。即由$a\notin A^\times$，有$a\in m$。综上有$A^\times=u(A)=A\backslash m$。 □

Fact: $I \triangleright A$,若$A\backslash I = A^{\times}$，则$A$是一个局部环且$I$是它的唯一一个极大理想。

Example 2.7. 由$\mathbb{Q}\backslash\{0\} = u(\mathbb{Q})$，得$\mathbb{Q}$是一个局部环。

Fact: 任一个域都是局部环。下面举一个不是域但是是局部环的例子。 $A = \{\frac{b}{a} \mid (a,b) = 1, a, b \in \mathbb{Z}, 2 \nmid a\}$。由于$A^{\times} = u(A) = \{\frac{b}{a} \mid a, b \in \mathbb{Z}, (a,b) = 1, 2 \nmid ab\}$，$m = \{\frac{b}{a} \mid a, b \in \mathbb{Z}, (a,b) = 1, 2 \mid b, 2 \nmid a\} = 2A$，所以$A\backslash m = u(A)$。又$A/2A \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_2$, 所以，$2A$是$A$的极大理想且是唯一的，故$A$是局部环。

Example 2.8. $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，$m = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.$A$是一个局部环,且$A/m \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,所以$A$是$m$的唯一极大理想。

2.4.2 UFD唯一分解环或唯一析因环

Definition 2.18. **不可约元**:*设A是一个含1交换环，$a \in A$且$a \neq 0, a \notin A^{\times}$，如果下述条件成立:$a = bc, b, c \in A$，有$b \in A^{\times}$,或者$c \in A^{\times}$，则称$a$是$A$一个不可约元。*

Definition 2.19. ***UFD***:*设A是一个整环，如果A中任一个非0非单位元都可分解为有限个不可约元之积，且在不计单位顺序下，上述分解是唯一的，则称A是一个UFD。*

Example 2.9. $\mathbb{Z}$是个*UFD*。

Example 2.10. *F是域，$F[x], F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$是UFD。*

Proposition 2.10. *设A是UFD,$\pi \in A$，π是一个不可约元，则$\langle\pi\rangle \triangleright A$是素理想。*

证明. 对任意$ab \in \langle\pi\rangle$分，则存在$c \in A$，有$ab = c\pi$。由于$ab \in A$，A是UFD，则由唯一分解性，a中必有分解元π或者b分解出因子π，即$a \in \langle\pi\rangle$，或者$b \in \langle\pi\rangle$，从而$\langle\pi\rangle \triangleright A$是素理想。 □

记号:若$a = bc$，记$b \mid a, c \mid a$。

Proposition 2.11. *PID必是UFD。*

Example 2.11. *PID:$\mathbb{Z}, F[x]$，其中F是域，$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$*
不是PID:$\mathbb{Z}$。(因为$\langle 2, x\rangle$不是主理想)。

环的特征

A是一个含1交换环。

$$f : \mathbb{Z} \to A$$
$$1 \longmapsto 1_A$$

f是一个环同态，且ker(f)=$n\mathbb{Z}$。所以有

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \hookrightarrow A$$
$$\bar{a} \longmapsto f(a)$$

因为$n\bar{a}=0$，所以对任意的$a \in A, na=0$。
情形1:char$A$=0(A的特征为0),此时$\mathbb{Z} \subset A, n \in \mathbb{Z}, a \in A$,由$na=0$，得$n=0$或者$a=0$。
情形2:char$A$=n($n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$)，n是使得对任意的$a \in A, na = 0$成立的最小正整数。此时$A$的素环为$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Example 2.12. $A=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$,则*charA=6*。
$A=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[x]$,则*charA=6*。特别的，当$A$是一个整环时，*chA=0*或者$p$($p$是素数)。当$chA \neq 0$时，

$$f: \mathbb{Z} \to A$$
$$1 \longmapsto 1_A$$

$ker(f)=n\mathbb{Z}(n \in \mathbb{Z})$，从而有$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset A$子环，由于$A$是整环，故$A$无零因子，即$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$无零因子，所以$n$为素数。

2.4.3 分式环(环的局部化方法)

设A是含1交换环，S是A的一个非空子集，如果S满足:
(1)$1 \in S$
(2)$a, b \in S$，则$ab \in S$
则称S为A的一个乘法闭子集。由此可构造如下集合，

$$A \times S = \{(a,s) \mid a \in A, s \in S\}$$

在其中引入如下关系" "

$$(a_1,s_1)\hat{\ }(a_2,s_2) \in A \times S \Leftrightarrow \exists t \in S, t(s_2a_1 - s_1a_2) = 0$$

Fact: 上述定义的" "是$A \times S$上的一个等价关系(验证作为课后练习)。现考虑商集$A \times S/\hat{\ }$。对于$(a,s) \in A \times S$，将(a,s)的上述等价类$\overline{(}a,s) \triangleq \frac{a}{s}$。且记$A \times S/\hat{\ } = S^{-1}A$ 在中引入如下运算(一般取$0 \notin S$,若$0 \in S$,则$S^{-1}A=\{0\}$)
加法:$\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_2}{s_2} \triangleq \frac{a_1s_2+a_2s_1}{s_1s_2}(a_1,a_2 \in A, s_1,s_2 \in S)$
乘法:$\frac{a_1}{s_1}\Delta\frac{a_2}{s_2} \triangleq \frac{a_1a_2}{s_1s_2}$(验证上述定义的有效性，课外练习)
结论:$(S^{-1}A,+,\Delta)$是一个含1交换环，称A为关于S的分式环

$$f: A \to S^{-1}A$$
$$a \longmapsto \frac{a}{1}$$

是环同态 $ker(f)=\{a \in A \mid \frac{a}{1}=0=\frac{0}{1}\}$=$\{a \in A \mid$存在$t \in S$,使得$t(1\Delta a - 1\Delta 0)=0\}$=$\{a \in A \mid ta=0\}$

Theorem 2.4. *分式环的泛性质(universasity)* 设S是环A(一个含1交换环)的一个乘法封闭子集，则典范同态

$$f: A \to S^{-1}A$$
$$a \longmapsto \frac{a}{1}$$

有如下泛性质:任意一个环同态g,$g : A \to B$,如果$g(S) \subset B^{\times} = u(B)$,则存在唯一的环同态$h : S^A \to B$使得下图可交换:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & S^{-1}A \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & B & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \frac{a}{1} \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & g(a) & \end{tikzcd}$$

证明. 存在性:令

$$h : S^{-1} \to B$$
$$\frac{a}{s} \longmapsto g(a)\Delta g(s)^{-1}$$

需要证明h是良好定义的,对任意$\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}A$,则$h(\frac{a_1}{s_1}) = g(a_1)\Delta g(s_1)^{-1}$, $h(\frac{a_2}{s_2}) = g(a_2)\Delta g(s_2)^{-1}$,由于$\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2}$,则存在$t \in S$，使得$t(s_2a_1 - s_1a_2) = 0$, 所以

$$g(t(s_2a_1 - s_1a_2))g(t)g(g(s_2a_1) - g(a_2s_1)) = 0.$$

因为$t \in S$,所以$g(t)$可逆，故有$g(s_2)g(a_1) - g(s_1)g(a_2) = 0$,从而$g(s_2)g(a_1) = g(s_1)g(a_2)$，即$g(s_2)^{-1}g(a_2) =$ $g(s_1)^{-1}g(a_1)$,所以$h(\frac{a_1}{s_1}) = h(\frac{a_2}{s_2})$。从而$h$是良好定义的，即这样的环同态$h$是存在的。唯一性:显然。 □

Fact:特别的，S不含A中的零因子时，

$$f : A \to S^{-1}A$$
$$a \longmapsto \frac{a}{1}$$

是一个单一的环同态，实际上$ker(f) = \{a \in A \mid \frac{a}{1} = 0\} = \{a \in A \mid \exists t \in S, ta = 0\} = \{0\}$

Example 2.13. *A是整环,则$S = A\backslash\{0\}$是一个A的乘法封闭子集，此时分式环$S^{-1}A$是一个域，称为的分式商域。*

证明. 显然$S^{-1}A$已经是一个分式环了，任意的$\alpha \neq 0 \in S^{-1}A$,即$0 \neq \alpha = \frac{a}{s}, a \in A, s \in S$。由于$\alpha = \frac{a}{s} = 0$当且仅当存在$t \in S$使得$ta = 0$。又由于$S$无零因子，所以$a = 0$，所以$\alpha = 0$当且仅当$a = 0$,故$\alpha = \frac{a}{s} \neq 0$当且仅当$a \neq 0$,即$a \in S$，于是$\frac{s}{a} \in S^{-1}A$。显然$\alpha\Delta\frac{s}{a} = \frac{a}{s}\Delta\frac{s}{a} = 1$,所以$\alpha$在$S^{-1}A$中可逆。从而$S^{-1}A$是一个域。 □

Example 2.14. *$\mathbb{Z}, S = \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \mathbb{Q} = S^{-1}\mathbb{Z}, A = \mathbb{Q}[x], S = \mathbb{Q}[x]\backslash\{0\}, S^{-1}A = \mathbb{Q}(x) = \{fracfg \mid f, g \in \mathbb{Q}[x], g \neq 0\}$,$A$是任一个含1交换环，则它的乘法封闭子集$S$可取为:*
(1)$S = \{1\}$，则$S^{-1}A = A$。
(2)$\forall a \in A\backslash N(A), S = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$
(3)$\forall p \in spec(A)$,由于$ab \in p$当且仅当 $a \in p$或者$b \in p$,则$ab \notin p$当且仅当$a \notin p$且$b \notin p$,所以$S = A\backslash p = \{a \in A \mid a \notin p\}$是一个乘法封闭子集。记$p$对应的分式环为$A_p = S^{-1}A$。 $I \triangleright A, \bar{A} = A/I$,

$$A \overset{\phi}{\twoheadrightarrow} A/I = \bar{A}$$

结论:$\bar{A}$的理想均形如J/I，其中$J \rhd A$，且$I \subset J$。

Example 2.15. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \langle 24 \rangle \subset J \rhd \mathbb{Z}$,所以$J$可以取:

$$\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}, 8\mathbb{Z}, 12\mathbb{Z}, 24\mathbb{Z}.$$

从而$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$的理想为:

$$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, 8\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, 12\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, 24\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}.$$

素理想为:

$$2\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}/24\mathbb{Z},$$

极大理想为:

$$2\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$$

典范同态

$$f : A \to S^{-1}A$$
$$I \longmapsto S^{-1}I$$

其中$I \rhd A$,若$S \cap I \neq \varnothing$，则存在$a \in S$且$a \in I$，即$\frac{a}{a} = 1$在$S^{-1}I$中可逆，所以$S^{-1}I = S^{-1}A$。故若需要$S^{-1}I$是真理想，则需要$S \cap I = \varnothing$。

2.5 分式环

Theorem 2.5. 设S是含1交换环A的一个乘法封闭子集，则映射

$$\psi : \{P \in spec(A) \mid P \cap S = \varnothing\} \to spec(S^{-1}A)$$
$$P \longmapsto S^{-1}P$$

是一个双射。

证明. 先证明任意$P \in spec(A)$,若$P \cap S = \varnothing$,则

$$\psi(p) = S^{-1}P = \{\frac{a}{s} \mid a \in P, s \in S\} \in spec(S^{-1}A).$$

先证明$S^{-1}P$是$S^{-1}A$的理想，其中$a_1, a_2 \in P, s_1, s_2 \in S$,

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{s_2a_1 + s_1a_2}{s_1s_2},$$

由于$s_2a_1 + s_1a_2 \in P, s_1, s_2 \in S$，所以$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}P$ 对任意的$c \in A, s \in S, \frac{c}{s} \in S^{-1}A$,

$$\frac{c}{s} \cdot \frac{a_1}{s_1} = \frac{ca_1}{ss_1}$$

,由于$P \rhd A$,得$ca_1 \in P$,从而$\frac{c}{s} \cdot \frac{a_1}{s_1}$,即$S^{-1}P \rhd S^{-1}A$。

下证是$S^{-1}P$素理想。任意$\frac{a_1}{s_1},\frac{a_2}{s_2}\in S^{-1}A, a_1,a_2\in A; s_1,s_2\in S$且$\frac{a_1}{s_1}\cdot\frac{a_2}{s_2}\in S^{-1}P$,即

$$\frac{a_1a_2}{s_1s_2}=\frac{a}{s}, a\in P, s\in S.$$

则存在$s'\in S$使得$s'(sa_1a_2-s_1s_2a)=0$,从而$s'sa_1a_2=s's_1s_2a\in P$。

由于$S\cap P=\varnothing$,所以$s's\notin P$。又由于P是素理想,所以$a_1a_2\in P$,得$a_1\in P$或者$a_2\in P$,从而$\frac{a_1}{s_1}\in S^{-1}P$或者$\frac{a_2}{s_2}\in S^{-1}P$,故$S^{-1}P$素理想。即$P\in spec(A)$,所以，$\psi$是有意义的。

再证明ψ是满的。任取$\beta\in spec(S^{-1}A)$,令

$$P=\{a\in A\mid 存在s\in S,使得\frac{a}{s}\in\beta\},$$

下证$P\in spec(A)$，即P是A的一个素理想。首先证$P\triangleright A$。任取$a,b\in P$, 则存在$s_1,s_2\in S$,使得$\frac{a}{s_1},\frac{b}{s_2}\in\beta$,于是

$$\frac{a}{1}=\frac{s_1}{1}\cdot\frac{a}{s_1}\in\beta,\frac{b}{1}=\frac{s_2}{1}\cdot\frac{b}{s_2}\in\beta,$$

有$\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{a+b}{1}\in\beta$,所以$a+b\in P$。又对任一个$c\in A$, $\frac{c}{1}\Delta\frac{a}{s_1}\in\beta$,即$\frac{ca}{s_1}\in\beta$,故$ca\in P$,从而$P\triangleright A$。

下证P满足素性条件。设$a,b\in A$且$ab\in P$。由定义存在$s\in S$,使得$\frac{ab}{s}\in\beta$, 即$\frac{a}{1}\Delta\frac{b}{s}\in\beta$。由于$\beta\in spec(S^{-1}A)$,则$\frac{a}{1}\in\beta$或者$\frac{b}{s}\in\beta$,从而$a\in P$或者$b\in P$,综上$P\in spec(A)$且$\psi(P)=\beta=S^{-1}P$,即$\psi$是满的。

下证ψ是单的。设$P_1,P_2\in spec(A)$且$P_i\cap S=\varnothing(i=1,2)$。若$\psi(P_1)=\psi(P_2)$,则$S^{-1}P_1=S^{-1}P_2$。下证$P_1=P_2$即可。

任意$a_1\in P_1$,有$\frac{a_1}{1}\in S^{-1}P_1=S^{-1}P_2$,即$\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{s}, a_2\in P_2, s\in S$。所以存在$s'\in S$使得$s'(sa_1-a_2)=0$,故有$s'sa_1=sa_2\in P_2$。由于$S\cap P_2=\varnothing$，所以$a_1\in P_2$,即$P_1\subset P_2$;同理可得$P_2\subset P_1$。综上$P_1=P_2$,故$\psi$是单的。从而$\psi$是双射。

□

Example 2.16. 设A是含1交换环，$P\in spec(A)$是一个素理想，$S=A\backslash P$是一个乘法封闭子集，记关于S的分式环$S^{-1}A=A_P$，(有时称A_P为A关于P的局部化或者局部环)，$spec(A_P)=\{S^{-1}P\mid P_1\in spec(A), P_1\subset P\}$。特别的， $S^{-1}P$且是A_P中唯一的极大理想，故A_P是一个局部环。$S^{-1}P=(S^{-1}A)P=PA_P$，从而A_P/PA_P是一个域，称之为模P的剩余类域。

Example 2.17. 设A是含1交换环，$f\in A\backslash N(A)$，令$S_f=\{f^n\mid n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}=\{1,f,f^2,f^3\ldots\}$，$S_f$是$A$的一个乘法封闭子集。对应的分式环$S_f^{-1}A$记为$A_f$。$spec(A_f)=\{S_f^{-1}P\mid P\in spec(A), P\cap S_f=\varnothing\}$。记$V(f)=\{P\mid P\in spec(A), f\in P\}$，所以$spec(A_f)=\{S_f^{-1}P\mid P\in spec(A), f\notin P\}\triangleq D(f)=spec(A)\backslash V(f)$。

2.6 反向极限与正向极限(在集合上)

2.6.1 正向集(directed portialy ordered set)

Definition 2.20. 设$(S,\leq)$是一个非空偏序集，对任意$i,j\in S$存在$k\in S$，使得$i\leq k, j\leq k$，则称$(S,\leq)$是一个正向集。

Definition 2.21. 反向系 设$(\Lambda,\leq)$是一个正向集，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是一个集合簇，若对任意的$\alpha,\beta\in\Lambda$，当$\alpha\leq\beta$时，有映射$\varphi_{\beta\alpha}:A_\beta\to A_\alpha$且满足下列条件

(1)$\varphi_{\alpha\alpha}=id_{A_\alpha}$*(*恒等映射*)*，$\forall\alpha\in\Lambda$

*(2)*对任意的$\alpha,\beta,\gamma\in\Lambda$，若$\alpha\leq\beta\leq\gamma$，则有下图可交换

$$\begin{tikzcd}
A_\gamma \arrow[rr, "\varphi_{\gamma\beta}"] \arrow[dr, "\varphi_{\gamma\alpha}"'] & & A_\beta \arrow[dl, "\varphi_{\beta\alpha}"] \\
& A_\alpha &
\end{tikzcd}$$

则称$\{(A_\alpha,\varphi_{\alpha\beta})\}$为定义在正向集$(\Lambda,\leq)$上的反向系。

射影(反向)极限的构造 设$\{(A_\alpha,\varphi_{\beta\alpha})\}_\Lambda$是正向集$(\Lambda,\leq)$上的一个反向系，如果$A$是一个集合且对任意$\alpha\in\Lambda$，都有映射$\psi:A\to A_\alpha$满足对任意的$\alpha,\beta\in\Lambda$，若$\alpha\leq\beta$，则有下图可交换

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\psi_\beta"] \arrow[dr, "\psi_\alpha"'] & & A_\beta \arrow[dl, "\varphi_{\beta\alpha}"] \\
& A_\alpha &
\end{tikzcd}$$

如果还具备以下泛性质(universality)

设有集合B以及映射$\rho_\alpha:B\to A_\alpha(\forall\alpha\in\Lambda)$，如果$(B,\rho_\alpha)_{\alpha\Lambda}$满足

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\rho_\beta"] \arrow[dr, "\rho_\alpha"'] & & A_\beta \arrow[dl, "\varphi_{\beta\alpha}"] \\
& A_\alpha &
\end{tikzcd}$$

则存在唯一映射$h:B\to A$使得下面图表可交换

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, dashed, "\exists! h"] \arrow[dr, "\rho_\beta"] \arrow[ddr, "\rho_\alpha"'] & & A \arrow[dl, "\psi_\beta"'] \arrow[ddl, "\psi_\alpha"] \\
& A_\beta \arrow[d, "\varphi_{\beta\alpha}"] & \\
& A_\alpha &
\end{tikzcd}$$

则称A是反向系$\{(A_\alpha,\varphi_{\beta\alpha})\}_{\alpha\in\Lambda}$的反向极限，记为$A=\varprojlim_\alpha A_\alpha$ 对于上述反向系$\{(A_\alpha,\varphi_{\beta\alpha})\}_{\alpha\in\Lambda}$，及其反向极限$A=\varprojlim_\alpha A_\alpha$。由构造可知$A=\varprojlim_\alpha A_\alpha=\{(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\mid\forall\alpha,\beta\in\Lambda,\alpha\leq\beta,x_\alpha\in A_\alpha,x_\alpha=\phi_{\beta\alpha}(x_\beta)\}$，特别的$\varprojlim_\alpha A_\alpha\subset\prod_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$。

Example 2.18. 取$\Lambda=\mathbb{Z}_{\geq1}$，当$m\mid n$时，定义为$m\leq n$。对任意$n\in\Lambda$，令$A_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*(*模$n$的剩余类加群*)*。对于任意的$m,n\in\Lambda$，若$m\leq n$，则令

$$\varphi_{nm}:\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

$$a+n\mathbb{Z}\longmapsto a+m\mathbb{Z}$$

则$(A_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\varphi_{nm})$是$(\Lambda,\leq)$上的一个反向系，其射影极限$\varprojlim_n\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\triangleq\hat{\mathbb{Z}}$

$\mathbb{Z} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/P^n\mathbb{Z}$,($P$进整数)，$\mathbb{Z}_P \subset \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/P^n\mathbb{Z}$子集，$\Lambda = \mathbb{Z}_{\geq 1}, m \leq n$，则$(\Lambda, \leq)$是正向集。令$A_n = \mathbb{Z}/P^n\mathbb{Z}$，

$$\begin{aligned} \varphi_{nm} : \mathbb{Z}/P^n\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/P^m\mathbb{Z} \\ a + P^n\mathbb{Z} &\longmapsto a + P^m\mathbb{Z} \end{aligned}$$

正向极限的定义和构造

Definition 2.22. **正向系** *设$(\Lambda, \leq)$是一个正向集，$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$是一个集合簇，若对任意的$\alpha, \beta \in \Lambda$，当$\alpha \leq \beta$时，有映射$\varphi_{\alpha\beta} : A_\alpha \to A_\beta$且满足下列条件*
(1)$\varphi_{\alpha\alpha} = id_{A_\alpha}$(恒等映射)，$\forall \alpha \in \Lambda$
(2)对任意的$\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$，若$\alpha \leq \beta \leq \gamma$，则有下图可交换

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[rr, "\varphi_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "\varphi_{\alpha\gamma}"'] & & A_\beta \arrow[dl, "\varphi_{\beta\gamma}"] \\ & A_\gamma & \end{tikzcd}$$

则称$\{(A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})\}$为定义在正向集$(\Lambda, \leq)$上的正向系。

射影(正向)极限的构造 设$\{(A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}$是正向集$(\Lambda, \leq)$上的一个正向系，如果$A$是一个集合且对任意$\alpha \in \Lambda$，都有映射$\eta_\alpha : A_\alpha \to A$满足对任意的$\alpha, \beta \in \Lambda$，若$\alpha \leq \beta$，则有下图可交换

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[rr, "\eta_\alpha"] \arrow[dr, "\psi_{\alpha\beta}"'] & & A \\ & A_\beta \arrow[ur, "\eta_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

如果A还具备以下泛性质(universality)
设有集合B以及映射$\lambda_\alpha : A_\alpha \to B(\forall \alpha \in \Lambda)$，如果$(B, \lambda_\alpha)_{\alpha\Lambda}$满足

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[rr, "\lambda_\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_{\alpha\beta}"'] & & B \\ & A_\beta \arrow[ur, "\lambda_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

则存在唯一映射$\rho : A \to B$使得下面图表可交换

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, dashed, "\exists! h"] & & A \\ & A_\beta \arrow[ul, "\eta_\beta"] \arrow[ur, "\lambda_\beta"'] & \\ & A_\alpha \arrow[uul, "\eta_\alpha"] \arrow[uur, "\lambda_\alpha"'] \arrow[u, "\varphi_{\alpha\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

则称A是正向系$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$的正向极限，记为$A = \varinjlim_\alpha A_\alpha$

Example 2.19. $\varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，其中

$$\begin{aligned}\varphi_{nm}:\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}&\to\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\\ a+n\mathbb{Z}&\longmapsto\frac{m}{n}a+m\mathbb{Z}\end{aligned}$$

则$\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\varphi_{nm}\}$构成正向系，其正向极限$\varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。

Example 2.20. $p\in\mathbb{C},\Lambda$=$\{$开领域$U|\ p\in\mathbb{C}\}$,$U\leq V\Leftrightarrow V\subset U$。对每个$U\in\Lambda$，令$F_U$ =$\{f\mid f$在U上的解析函数$\}$。若$U\leq V\Leftrightarrow V\subset U$，

$$\begin{aligned}\varphi_{UV}:F_U&\to F_V\\ f&\longmapsto f\mid_V\end{aligned}$$

则$\{(F_U,\varphi_{UV})\}$是$(\Lambda,\leq)$上的一个正向系，其正向极限记为$O_p=\varinjlim_{U\in\Lambda}F_U$
具体构造$\varinjlim_\alpha A_\alpha$，令$\widetilde{A}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，在$\widetilde{A}$中引入如下关系:$x,y\in\widetilde{A}\Rightarrow x\in A_\alpha,y\in A_\beta$。设$x\sim y$当且仅当存在$\gamma\in\Lambda$，使得$\varphi_{\alpha\gamma}(x)=\varphi_{\beta\gamma}(y)$。对于$\bar{f},\bar{g}\in O_p=\varinjlim_{U\in\Lambda}F_U,\bar{f}\in F_U,\bar{g}\in F_V$，则$\bar{f}=\bar{g}$当且仅当存在$W\subset U\cap V$使得$f\mid_W=g\mid_W$

2.7 模

Definition 2.23. 设A是一个含1交换环，M是一个加法群，称M是一个$A-$模，如果有作用

$$\begin{aligned}A\times M&\to M\\ (a,\alpha)&\longmapsto a\Delta\alpha\end{aligned}$$

且满足“相关公理”(类似于向量空间中的公理)

子模

Definition 2.24. 设M是一个$A-$模，$N\subset M$,若N满足如下条件:
(1)N是M的加法子群
(2)对$a\in A,x\in N$有$ax\in N$
则称N是M的一个$A-$子模，记之为$N\leq M$。

如果模M的子模只有0和M，则称M是一个单模

子模的交

设M是一个$A-$模，$M_\alpha\leq M,\alpha\in\Lambda$，则$\cap_{\alpha\in\Lambda}\leq M$

证明. 显然$\cap_{\alpha\in\Lambda}$是M子群，对任意的$x\in\cap_{\alpha\in\Lambda},a\in A$，则有任意$\alpha\in\Lambda,x\in\cap_{\alpha\in\Lambda}$,得$\forall\alpha\in\Lambda,ax\in M_\alpha$，即$\forall\alpha\in\Lambda,ax\in\cap_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$，所以$\cap_{\alpha\in\Lambda}$是$M$子群。 □

注:子模的交仍是子模，但子模的并不一定是子模。

Example 2.21. $V=\mathbb{R}^2$,W_1=$\{x$轴$\}$,W_2=$\{y$轴$\}$，所以W_1,W_2是V的线性子空间，且$W_1\cap W_2=\{0\}$也是线性子空间，但$W_1\cup W_2$ =$\{x$轴$\cup y$轴$\}$不是线性子空间。

生成模

设M是一个$A-$模，$S\subset M,S\neq\varnothing$，令$\langle S\rangle=\cap_{N\leq M,N\supset S}$，则$\langle S\rangle$是$M$中包含$S$的最小子模，称之为由$S$生成的子模。特别的，由一个元素生成的模$\langle x\rangle$为包含$x$的最小子模。

Fact:$N=\langle x\rangle=Ax$，显然$\langle x\rangle$是Ax的子模，而对任意一个子模N'，且$x\in N'$，由任意$a\in A$，有$ax\in N'$，得到$Ax\subset N'$，即Ax是包含x的最小子模。所以有$A\langle x\rangle=\langle x\rangle$

推广到有限个:$x_1,x_2,\ldots,x_n\in M,\langle x_1,x_2,\ldots,x_n\rangle=Ax_1+Ax_2+\cdots+Ax_n$

子模的和

$N,L\leq M,N+L\triangleq\{x+y\mid x\in N,y\in L\}$.

则$N+L=<N\cup L>$.

一般地，$N_1,N_2,\cdots,N_r\leq M$,则 $N_1+\cdots+N_r=\{x_1+\cdots+x_r|x_i\in N_i,i=1,\cdots,r\}$.则

$$N_1+\cdots+N_r=<N_1\cup\cdots\cup N_r>$$

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}N_\alpha=<\cup_{\alpha\in\Lambda}N_\alpha>(\text{里面的元素}\sum x_\alpha\text{为有限和})$$

设A是环，$I\lhd A$.则

(1)$(I,+)\leq(A,+)$,加法子群；

(2)$A\times I\to I$

$(a,\alpha)\mapsto a\alpha$,即$I$是一个$A-$模。

有限生成模

Definition 2.25. 设M是一个$A-$模，如果有$x_1,\cdots,x_n\in M$使得

$$M=<x_1,\cdots,x_n>=Ax_1+Ax_2+\cdots+Ax_n.$$

则称M是一个有限生成$A-$模。

自由模

Definition 2.26. *(基)设M是一个$A-$模，如果存在$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$使得如下条件成立:*

(1)对$\forall x\in M$,都有$a_\alpha\in A(\forall\alpha\in\Lambda)$使得

$$x=\sum_{\alpha\in\Lambda}a_\alpha x_\alpha(\text{其中只有有限个}\alpha\text{使得}a_\alpha\neq0).$$

(2)上述表示法唯一(等价于0表示法唯一)。

则称$\{x_\alpha\}$为M的一组$A-$基,此时称M是一个自由$A-$模(即有一组$A-$基的模，称为一个自由的$A-$模).

例1.A是环(含1交换环)，$n\in\mathbb{Z}_{\geq1}$。令$M=A^n$(卡氏积)，$x\in M,x=(x_1,\cdots,x_n),x_i\in A(\forall1,\cdots,n)$

$$A\times M\to M$$

$$(a,x)\mapsto a\cdot x:=(ax_1,\cdots,ax_n).$$

则显然$M=A^n$是一个自由$A-$模(因为$\epsilon_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,\epsilon_n=(0,\cdots,0,1)$是$M$的一组$A-$基)。

Definition 2.27. 设M, N是$A-$模，$f : M \to N$是一个映射，称f是一个$A-$模同态。如果f是$A-$线性，即

$$f(a\alpha + b\beta) = af(\alpha) + bf(\beta)(\forall a, b \in A, \alpha, \beta \in M).$$

若f是模同态，

- f是单的，称f是单同态;
- f是满的，称f是满同;
- f即单又满，则称f为一个模同构，此时亦称M与N同构，记之为$M \overset{f}{\cong} N$.

商模

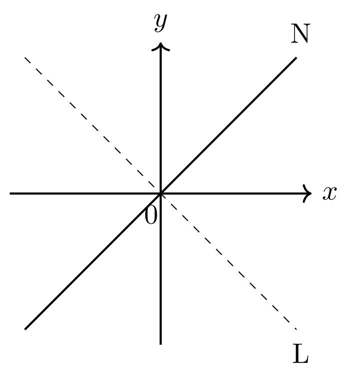
Proposition 2.12. 设M是一个$A-$模,$N \le M$,则M/N是M关于N的商模。

证明. 规定$a \cdot \bar{x} := \overline{ax}$.

下证这是良好定义的：设$x, x' \in M$,且$\bar{x} = \overline{x'}$,则$x - x' \in N$,由于$N \le M$,对任意$a \in A$,$a(x - x') \in N \Rightarrow ax - ax' \in N \Rightarrow \overline{ax} = \overline{ax'}$.

显然M/N已是商群，再加上上面定义的模结构，成为一个模。 □

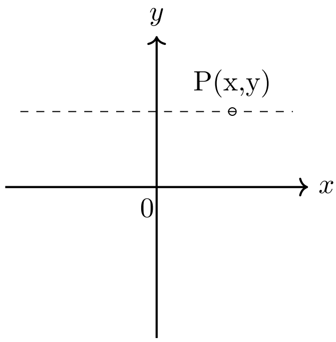
例 $M = \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}\alpha, \alpha = (1, 1)$,则$M/N = L$.



$N = \mathbb{R}\alpha, \alpha = (1, 0)$,则$M/N = y$轴。设$P = (x, y)$

$$\begin{aligned}\overline{(x,y)} = \bar{P} &= P + N \\ &= (x, y) + \{(x', 0) | x' \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x + x', y) | x' \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{距离}x\text{轴长度为}y,\text{且与}y\text{轴平行} \\ &= \overline{(0, y)}\end{aligned}$$

从而M/N是y轴。



Theorem 2.6. *(模同态基本定理)设$f : M \to N$是一个$A-$模同态，则 (1)$f(M) = im(f) \leq N$,(2)f的核$Kerf = f^{-1}(0) \leq M$. (3)f导出模同构*

$$\bar{f} : M/Ker(f) \simeq im(f)$$
$$\bar{a} \longmapsto f(a), \forall a \in M.$$

即有交换图

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\phi"'] & & N \\
& M/Ker(f) \arrow[ur, hook, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

$f = \eta \circ \phi.$

证明. (1)(2)显然成立。

(3)$\bar{f}$呈满射也显然，下证$\bar{f}$是单的。若$\forall \bar{x_1}, \bar{x_2} \in Im(f)$,且有$\bar{f}(\bar{x_1}) = \bar{f}(\bar{x_2})$. 则

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in Ker(f) \Rightarrow \bar{x_1} = \bar{x_2}.$$

于是$\bar{f}$是单的。显然$\bar{f}$是模同态，于是$\bar{f}$是模同构。 □

Corollary 2.2. 设M是一个$A-$模，$N, L \leq M$,则有模同构

$$\begin{tikzcd}
& N+L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
N \arrow[dr, dash] & & L \arrow[dl, dash] \\
& N \cap L &
\end{tikzcd}$$

$(N + L)/N \cong L/(N \cap L).$

Corollary 2.3. M是$A-$模，$N, L \leq M$,且$N \subseteq L$(则$N \leq L$),则$L/N \leq M/N$，且有模同构

$$(M/N)/(L/N) \cong M/L.$$

设M,N是$A-$模，记$Hom_A(M,N)=\{f:|f:M\to N$是一个模同态$\}$。$Hom_A(M,N)$上有加法以及同态的复合，构成一个非交换环。

$End_A(M)=\{f|f:M\to M$是一个模同态$\}$. $(End_A(M),+,\circ)$是一个环，其中"$\circ$"是映射的合成。

Lemma 2.1. *设M是有限生成$A-$模，$I\lhd A,\phi\in End_A(M)$,如果$\phi(M)\in IM$,则存在$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\in I$使得*

$$\phi^n+a_{n-1}\phi^{n-1}+\cdots+a_1\phi+a_0=0.$$

证明. 由M是有限生成$A-$模，设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是M的一组生成元，则$\phi(\alpha_1),\cdots,\phi(\alpha_n)\in IM=I\alpha_1+\cdots+I\alpha_n,\Rightarrow\phi(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B,B\in M_n(I)$.

令

$$\begin{aligned}f(x)&=det(xE_n-B)\\&=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.\end{aligned}$$

其中$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\in I$. 类似于"高代"中Hamilton-Kayley定理的证明可得$f(\phi)=0$. 即 $\phi^n+a_{n-1}\phi^{n-1}+\cdots+a_1\phi+a_0=0$. □

Corollary 2.4. *设M是一个有限生成$A-$模，$I\lhd A$,如果$IM=M$,则存在$x\in A$使得$x\equiv1(mod\ I)$且$x\cdot M=0$.(x零化M中的所有元素)*

证明. 在上一引理中，取$\phi=id$(恒等映射)且有$\phi(M)=M=IM$成立。则由上述引理，$\exists a_0,\cdots,a_{n-1}\in I$使得

$$id+a_{n-1}id^{n-1}+\cdots+a_1id+a_0=0\in End_A(M),$$

$\Rightarrow1+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_1=0$.令 $x=1+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$,则$xM=0M=0$,且$x\in A$,有$x-1=a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0\in I$.即$x\equiv1(mod\ I)$。 □

Lemma 2.2. *(NaKayama引理1)设M是有限生成$A-$模，J是A的Jacobson根，$I\lhd A$且$I\subseteq J$,若$IM=M$，则$M=0$.*

证明. 由上述推论，$\exists x\in A$使得

$$x\equiv1(mod\ I)\quad 且xM=0.$$

即$x-1\in I,\Rightarrow x=1+y,\exists y\in I\subseteq J$,即$y\in J\Rightarrow x=1+y\in u(A)$,$x$可逆。

从而$M=x^{-1}(xM)=x^{-1}0=0$. □

Lemma 2.3. *(Nakayama引理2)设M是有限生成$A-$模,$N\le M,I\lhd A$且$I\subseteq J(A)$(J是A的Jacobson根),若$N+IM=M$,则$N=M$.*

证明. 考虑商模M/N.首先有$I\cdot(M/N)=(IM+N)/N$.

由于$a\bar{x}\in I\cdot(M/N)(a\in I,\bar{x}\in M/N)$,$ax\in IM+N,\Rightarrow\overline{ax}\in(IM+N)/N$.

$\overline{ax+y}\in(IM+N)/N(a\in I,x\in M,y\in N)$,$\overline{ax+y}=\overline{ax}+\overline{y}=\overline{ax}=a\bar{x}\in I\cdot(M/N)$.

$\Rightarrow I\cdot(M/N)=(IM+N)/N.$

由于M是有限生成，$\Rightarrow M/N$也是有限生成，又由

$$N+IM=M\Rightarrow I(M/N)=(IM+N)/N=M/N.$$

由M/N是有限生成，由$NaKayama$引理1 $\Rightarrow M/N=0\Rightarrow M=N.$ □

例：设A是一个局部环，M是一个生成$A-$模，m是A的唯一理想，$mM\leq M, A/m=F.$

M/mM是一个$F-$向量空间，若有限，取$\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n$是其一组基，则$x_1,\cdots,x_n$是$M$的生成元(是一组基)

M是$A-$模，$I\lhd A, IM=0$,则M可看作一个$A/I-$模

$$A/I\otimes M\to M$$
$$(\bar{a},x)\mapsto\bar{a}\cdot x=\overline{ax}$$

Nakayama引理推论 A是一个局部环，$\mathfrak{m}$是它的极大理想，如果有$x_1,x_2,\cdots,x_n\in M$,使得$\bar{x_1},\bar{x_2},\cdots,\bar{x_n}\in M/\mathfrak{m}M$,是$M/\mathfrak{m}M$作为域$A/\mathfrak{m}$上线性空间的一组基，则$M=<x_1,\cdots,x_n>.$

证明. 令$N=<x_1,\cdots,x_n>$是M中由$x_1,\cdots,x_n$生成的$A-$子模，下证$M=N.$

为此,任取$x\in M$,则$\bar{x}\in M/\mathfrak{m}M$,由所设，有

$$\bar{x}=\bar{a}_1\bar{x}_1+\bar{a}_2\bar{x}_2+\cdots+\bar{a}_n\bar{x}_n$$

其中$a_1,\cdots,a_n\in A,\bar{a}_i\in A/\mathfrak{m}(i=1,\cdots,n)$. 即

$$\bar{x}=\overline{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}\in M/\mathfrak{m}M$$
$$\Rightarrow x-(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)\in\mathfrak{m}M$$

注意到$a_1x_1+\cdots+a_nx_n\in N=<x_1,\cdots,x_n>$,故$x\in N+\mathfrak{m}M\Rightarrow M\subset N+\mathfrak{m}M\Rightarrow M=N+\mathfrak{m}M.$ 由于A是局部环，$\mathfrak{m}$是它的唯一的极大理想，所以A的$Janbous$根$J(A)=\mathfrak{m}$, 故由$Nakayama$引理,得$M=N.$ □

2.8 正合列

设A是一个含1交换环，M,N,L是A-模，$M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}L$.设$f,g$是$A$-模同态，则$f$与$g$的合成是从$M$到$L$的模同态.

设$f:M\to N$是一个A-模同态，$K=kerf\leqslant M$,$K\xrightarrow{\eta}N\xrightarrow{f}L$，$f$与$\eta$的合成是0，$K$中元映到$N$中是0.

$L\leqslant M,\bar{M}=M/L$,我们有$L\xrightarrow{g}M\xrightarrow{f}M/L$,其中$g$是单射，且$g(L)=L,kerf=L$,则有$img=kerf$,即上面的列在$M$上正合.

$0\to L\xrightarrow{g}M\xrightarrow{f}M/L\xrightarrow{h}0$是一个短正合列，因为$kerh=M/L$,且$f$是满射，有$imf=M/L$

只要$L\to M$是单射，则在前面加个$0\to L\to M$,其就为一个正合列.

事实:设有模同态$L\xrightarrow{f}M,M\xrightarrow{g}N$,则$f$是单射$\Leftrightarrow 0\to L\xrightarrow{f}M$是正合列，$g$是满射$\Leftrightarrow M\xrightarrow{g}N\to 0$是正合列.

Definition 2.28. （模的正合列）：设有一个模同态，则$\cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$是一个正合列，如果它在任一个$M_n$处均正合，即$imf_{n-1} = kerf_n$.

设$f: M \to N$是一个A-模同态（任何一个模同态都能给出下面一个正合列）

$0 \to K \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{h} N/f(M) \to 0$是一个$A-$模正合列，因为$K = kerf \leqslant M, f(M) \leqslant N, imf = kerh = f(M)$

2.9 $A-$模复型

设有一$A-$模同态列

$$\overline{M}: \cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots,$$

如果在任意的M_n处，都有$f_n o f_{n-1} = 0$(对任意的n),则称它是一个（上）复型.

Definition 2.29. 上述列是一个A-模上复型，即$f_n o f_{n-1} = 0$(对任意的n)，等价的,$imf_{n-1} \subsetneqq kerf_n$

Definition 2.30. 定义：$H^n(\overline{M}) = \frac{kerf_n}{imf_{n-1}}$，称之为上复型$\overline{M}$的第$n$个上同调群（此处，它也是个$A-$模）

对偶地，对于A-模下复型

$$\overline{M_0}: \cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots,$$

即对任意的n有$f_n o f_{n+1} = 0$成立，我们定义$H^n(\overline{M_0}) = \frac{kerf_n}{imf_{n+1}}$是第n个下同调群.

例：设X拓扑空间。则一个n-单形形如$< v_1, v_2 \cdots, v_n >$，其中$v_1 - v_0, v_2 - v_0 \cdots, v_n - v_0$是线性无关的.

令$C_n(K(x))$代表由X中所有n-单形生成的自由$Abel$群。则$C_0(K(x)) = ZX$.

$v_0 \longrightarrow v_1$ $\quad < v_0, v_1 >$边缘算子 $\quad \alpha_1(< v_0, v_1 >) = \alpha_1(< v_1, v_2 >)$

$$\begin{tikzcd} & v_2 \arrow[dr] & \\ v_0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & v_1 \end{tikzcd}$$

$\alpha_1(< v_0, v_1 >, v_2) =< v_1, v_2 > - < v_0, v_2 > + < v_0, v_1 >$

一般地，$\alpha_n(< v_0, v_1 \cdots, v_n >) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i < v_0, v_1 \cdots, v_{i-1}, \widehat{v_i}, v_{i+1}, \cdots, v_n >$

得到$Z-$模复形（即$Abel$群下复形）：

$$\cdots \to C_n(K(x)) \xrightarrow{\alpha_n} C_{n-1}(K(x)) \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots$$

事实：$\alpha_n \circ \alpha_{n-1} = 0$. 例如

$$\begin{aligned}
\alpha^2(v_0, v_1, v_2) &= \alpha_1 \circ \alpha_2(v_0, v_1, v_2) = \alpha_1(\alpha_2(v_0, v_1, v_2)) \\
&= \alpha_1(< v_1, v_2 > - < v_0, v_2 > + < v_0, v_1 >) \\
&= \alpha_1(< v_1, v_2 >) - \alpha_1(< v_0, v_2 >) + \alpha_1(< v_0, v_1 >) \\
&=< v_2 > - < v_1 > -(< v_2 > - < v_0 >) + (< v_1 > - < v_0 >) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

定义：$H_n(Z,X)=H_n(K\tilde{(X)})=\frac{ker\alpha_{n-1}}{im\alpha_n}$.

$n-$单形

2.10 范畴和函子的简介

Definition 2.31. 一个范畴$\mathscr{C}$指的是如下要素：

$C1$ 一类对象（$objects$）$O(\mathscr{C}), A\in\mathscr{C}(A\in O(\mathscr{C}))$

$C2$ 对$\mathscr{C}$中任意两个对象的有序对A,B对应于一个集合$Mor(A,B)$称之为从A到B的态射集

满足如下公理

$A1$ 对每个$A\in\mathscr{C}$，有一个特别的元素$1_A\in Mor(A,A)$

$A2$ 对任意的$A,B,C\in\mathscr{C}$

$$Mor_{\mathscr{C}}(A,B)\times Mor_{\mathscr{C}}(B,C)\longrightarrow Mor_{\mathscr{C}}(A,C)$$
$$(f,g)\longmapsto gof$$

且满足结合律

$A3$ 对任意的$f\in Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$

$$A\xrightarrow{1_A}A\xrightarrow{f}B, fo1_A=f,$$
$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{1_B}B, 1_Bof=f.$$

例1.集合范畴Set:

对象：集合,态射集：对任意的$A,B\in Set$;$Mor(A,B)=Map(A,B)$=$\{f:A\longrightarrow B$是一个映射$\}$

例2.群范畴G_P:

对象：群,态射集：$G,H\in G_P$,$Mor(G,H)=Hom(G,H)$.

例3.模范畴:

设A是一个含1交换环，$A-$模范畴$A-Mod$,对象：$A-Mod,M$,态射：A-同态,$M,N\in A-Mod$,$Mor_{A-Mod}(M.N)=Hom_A(M,N)$.

子范畴

Definition 2.32. 设$\mathscr{C}$是范畴，若$\mathscr{D}\in\mathscr{C}$,则 $ob(\mathscr{D})\subset ob(\mathscr{C})$,且对任意$A,B\in ob(\mathscr{D})$有$Mor_{\mathscr{D}}(A,B)\subset Mor_{\mathscr{C}}$.

完全子范畴

Definition 2.33. $\mathscr{D}\in\mathscr{C}$（子范畴）

如果对任意的$A,B\in\mathscr{D}$,都有$Mor_{\mathscr{D}}(A,B)=Mor_{\mathscr{C}}$则称$\mathscr{D}$是$\mathscr{C}$的完全子范畴.

例如：$G_P\leqslant Set$是子范畴，但不是完全子范畴.

函子

Definition 2.34. 设$\mathscr{C}$和$\mathscr{D}$是两个范畴，对应$F:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{D}$,则对任意的$A\in\mathscr{C}$都有$F(A)\in\mathscr{D}$对任意的$A,B\in\mathscr{C}$有

$$Mor_{\mathscr{C}}(A,B)\longrightarrow Mor_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$$

$$f\longmapsto F(f)$$

满足

A1:对任意的$A\in\mathscr{C}$，有$F(1_A)=1_{F(A)}$.
对任意的$A,B,C\in\mathscr{C}, f\in Mor_{\mathscr{C}}(A,B), g\in Mor_{\mathscr{C}}(B,C)$,$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$有

$$F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(g)}F(C).$$

即有

$$F(gof)=F(g)oF(f).$$

称上述F为$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的共变函子.
对偶的，反变函子$F:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{D}$,

$$F:Mor_{\mathscr{C}}(A,B)\longrightarrow Mor_{\mathscr{D}}(F(B),F(A))$$

$$f\longmapsto F(f)$$

对任意的$A,B,C\in\mathscr{C}, f\in Mor_{\mathscr{C}}(A,B), g\in Mor_{\mathscr{C}}(B,C)$,$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$有

$$F(A)\xleftarrow{F(f)}F(B)\xleftarrow{F(g)}F(C),$$

即有

$$F(gof)=F(f)oF(g).$$

函子的自然变换

Definition 2.35. 设F,G是范畴$\mathscr{C}$到$\mathscr{D}$的两个共变函子，如果对任意的$A\in\mathscr{C}$有

$$l_A\in Mor_{\mathscr{D}}(F(A),G(A)), l_B\in Mor_{\mathscr{D}}(F(B),G(B)).$$

其中$F(f)\in Mor_{\mathscr{D}}(F(A),F(B)), G(f)\in Mor_{\mathscr{D}}(G(A),G(B))$使得

$$l_BoF(f)=G(f)ol_A.$$

即下图交换

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "l_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "l_B"] & G(B). \end{tikzcd}$$

特别的，如果l_A都是同构的（对任意的$A\in\mathscr{C}$），则F,G也是同构的.

范畴的同构与等价

如果存在函子$F:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{D}$与$G:\mathscr{D}\longrightarrow\mathscr{C}$使得$GoF=1_{\mathscr{C}},FoG=1_{\mathscr{D}}$则称范畴$\mathscr{C}$与$\mathscr{D}$是**同构**的.

如果存在函子$F:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{D}$与$G:\mathscr{D}\longrightarrow\mathscr{C}$使得$GoF\simeq 1_{\mathscr{C}},FoG\simeq 1_{\mathscr{D}}$则称范畴$\mathscr{C}$与$\mathscr{D}$是**等价**的.

$A-$**模范畴**(A是一个含1交换环)

对$M,N\in A-mod$,$A-$模同态是单的.$Mor_{A-mod}(M,N)\triangleq Hom_A(M,N)$.

对任意的$f,g\in Hom_A(M,N)$,定义$f+g\in Hom_A(M,N)$如下

$$(f+g)(x)\triangleq f(x)+g(x)(x\in M).$$

事实：$(Hom_A(M,N),+)$是一个Abel群.

现固定$M\in A-mod$,

记$F_M=Hom_A(M,-):\quad A-mod\longrightarrow\mathscr{A}b$(Abel群范畴)

$$N\longmapsto F_M(N)$$

其中$F_M(N)=Hom_A(M,-)(N)\triangleq Hom_A(M,N)$.

根据上述的关系，对于$N,L\in A-mod,F_M(N),F_M(L)\in\mathscr{A}b$我们有

$N\xrightarrow{f}L\qquad F_M(N)=Hom_A(M,N)\xrightarrow{F_M(f)}F_M(L)=Hom_A(M,L)$

对于$g:M\longrightarrow N,fog:M\longrightarrow L$有

$$F_M(f)(g)=Hom_A(M,f)(g)=f\circ g.$$

对于$h:M\longrightarrow N,N\xrightarrow{f}L\xrightarrow{g}K$有

$$F_M(g\circ f)=F_M(g)\circ F_M(f).$$

因为对任意的$h\in Hom_A(M,N)$,

$$F_M(g\circ f)(h)=g\circ f\circ h=g\circ(F_M(f)(h))=F_M(g)(F_M(f)(h))=F_M(g)\circ F_M(f)(h),$$

即$F_M(g\circ f)=F_M(g)\circ F_M(f)$.

共变函子

$$Hom_A(M,-):A-mod\longrightarrow\mathscr{A}b$$
$$N\longmapsto Hom_A(M,N)$$

反变函子

固定N,

$$G_N\triangleq Hom_A(-,N):A-mod\longrightarrow\mathscr{A}b$$
$$M\longmapsto Hom_A(M,N),$$

对于$L \xrightarrow{f} M$我们有

$$Hom_A(M,N) \xrightarrow{G_N(f)} Hom_A(L,N).$$

对于$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$,

$$\begin{aligned} Hom_A(-,N)(f) = G_N(f): \quad & Hom_A(M,N) \longrightarrow Hom_A(L,N), \\ & \qquad\qquad g \longmapsto gof, \end{aligned}$$

即

$$G_N(f)(g) = gof, g \in Hom_A(M,N),$$

$$Hom_A(-,N)(f)(g) = gof,$$

即$Hom_A(-,N)$是一个反变函子.

A是一个合1交换环,$A-$模范畴,$A-Mod$.取$M \in A-$ Mod. 共变函子 $\mathrm{Hom}_A(M,-) \triangleq h_M$, 反变函子 $\mathrm{Hom}_A(-,N)$

$A-$模的一个短正合列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \tag{$\star$}$$

表示 $(i)f$单; $(ii)g$满; $(iii)Imf = kerg$.
任取$K \in A-\mathrm{mod}$用$h_K = \mathrm{Hom}_A(K,-)$作用$(\star)$。

我们有

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "h_1"] \arrow[dl, phantom, "f\circ h"] \arrow[dr, "g\circ h_1"] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$h_K(L) = \mathrm{Hom}_A(K,L)$

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(K,L) \to \mathrm{Hom}_A(K,M) \to \mathrm{Hom}_A(K,N) \tag{$\star\star$}$$

Proposition 2.13. *$(\star)$是一个正合列$\Rightarrow$$(\star\star)$是正合列.*

即

$$0 \to h_k(L) \xrightarrow{h_k(f)} h_k(M) \xrightarrow{h_k(g)} h_k(N)$$

是$Abel$群正合列。

证明. 先证$h_k(f)$是单射.

$\forall h \in h_k(L)$，使得$h_k(f)(h) = 0$,即$h_k(f)(h) = f \circ h = 0$。故对$\forall \alpha \in M$，有$f \circ h(\alpha) = 0 \Rightarrow f(h(\alpha)) = 0$。由于

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

是正合的，故f单射. 于是$h(\alpha) = 0$. 由α的任意性得到$h = 0$.即$h_k(f)$ 是单射。

下证在$h_k(m)$处正合,即$Im\left(h_k(f)\right)=\ker\left(h_k(g)\right)$.
由于$(\star)$正合,故有

$$\mathrm{g}\circ\mathrm{f}=0\ \Rightarrow gofoh=0\Rightarrow g\circ(foh)=0.$$

$\therefore(h_k(g)\circ h_k(f))(h)=0$.由$h$是任取的,$\Rightarrow h_k(y)\circ h_k(t)=0$, $\therefore Im(h_k(f))\subseteq(ker(h_k(g))$.

下证 $\ker\left(h_k(g)\right)\subset I_m\left(h_k(f)\right)$.为此取 $h'\in\ker\left(h_k(g)\right)$，则$h_k(g)\left(h'\right)=goh'=0$. 也即$\forall x\in K$，均有

$$g\circ h'(x)=0\Rightarrow g\circ h'(x)=0\Rightarrow h'(x)\in kerg.$$

$h'(x)\in M$, 由于$\mathrm{kerg}=Imf$,即有的$y\in L$,使得$h'(x)=f(y)$.

于是定义

$$h:k\to L$$

$$x\mapsto y$$

易验证$h\in h_k(L)$。

即$h'=f\circ h,\therefore h'(x)=f(y)=f\circ h(x)=f(h(x))$,且$h_k(f)(h)=f\circ h=h'$ 由此得到$h'\in Im(h_k(f))\Rightarrow\ker\ h_k(g)\subset Im(h_k(f))$。

综上，$Kerh_k(g)=Im(h_k(t))$.

因此可由短正合列$(\star)\Rightarrow(\star\star)$是左正合的。 □

此时称$h_k=\mathrm{Hom}_A\left(k,\right)$呈一个左正合函子(不能像证右边正合)

$\mathrm{Hom}_A\left(\mathrm{M},\mathrm{J}\right)$与$\mathrm{Hom}_A(-,M)$均呈左正合。

取$K\in A-Mod$,由

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[dl, "h"] & 0 \\
& & K & &
\end{tikzcd}$$

得到左正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_A(N,K)\to\mathrm{Hom}_A(M,K)\to\ \mathrm{Hom}\ _A(L,K).$$

2.11 模的张量积 外积 对称积

$M\xrightarrow{f}N$ A-线性(A-模同志)

向量空间 F/V (下域) V为节上的向量空间

$V\backsimeq R^n$ R实数欧式空间

内积 $\langle,\rangle$

$$V\times V\longrightarrow R$$

$$(\alpha,\beta)\mapsto\langle\alpha,\beta\rangle$$

1. $\langle a_1\alpha_1+a_2\alpha_2,\beta\rangle=a_1\langle\alpha_1,\beta\rangle+a_2\langle d_2,\beta\rangle$;

2. $\langle\alpha,\quad b_1\beta_1+b_2\beta_2\rangle=b_1\langle\alpha,\beta_1\rangle+b_2\langle\alpha,\beta_2\rangle$

$\mathbb{R}$-双线性

固定α, $\langle\alpha,-\rangle$:

$$V\to\mathbb{R}$$

$$\beta\mapsto\langle\alpha,\beta\rangle$$

$m\times N\to L \qquad M\xrightarrow{f}N$ A线性

$(\alpha,\beta)\longmapsto f(\alpha,\beta)$

定义：设$M,N,L\in A-mod$. A是含1交换环，称映射$f:M\times N\to L$为一个双线性映射，如果下述条件成立。

1. $f(a_1x_1+a_2x_2,y)=a_1f(x_1,y)+a_2f(x_2,y)$

2. $f(x,b_1y_1+b_2y_2)=b_1f(x,y_1)+b_2f(x_1y_2)$

$\forall a_1,a_2,b,b_2\in A,\quad x_1,x_2\in M,y_1,y_2\in N$

即f对每个分量都是$A-$线性的。

此处固空$x\in M$，则$f(x,-)$：$N\to L,y\longmapsto f(x,y)$是$A-$线性的。 $M\otimes N$

”双线性”作为一个属性，找一个最基本的.

Theorem 2.7. *设$M,N\in A-Mod$.(A是一个合1交换环)，则存在一个对(pairs)(T,f),其中$T\in A-Mod$。 $f:M\times N\xrightarrow{f}T$.是一个$A-$双线性的。使得如下“泛性质”满足。*

(泛性质)对$\forall L\in A-Mod$及双线性映射$g:M\times N\to L$, 则存在唯一一个A-线性映射$h:T\to L$, 使$g=h\circ f$.即下图交换

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & T \arrow[dl, "\exists! h"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

且上述满足泛性质的(T,f)在同构定义下唯一记$T\triangleq M\otimes_A N$. 称为M和N的张量积。

证明. 以$M\times N$中全体元素为基作一个自由$A-$模,记为$F\triangleq A^{(M\times N)}=\oplus_{\alpha\in M\times N}A$. 故$x\in F\Leftrightarrow x=\sum a_{m,n}(m,n)$,其中$a_{m,n}\in A$ 除有限个均为0.(表示法唯一)

在F中令F_0为有形式如下的元素生成的$A-$子模:

$$(m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n),$$

$$(m,n_1+n_2)-(m,n_1)-(m,n_2),$$

$$(am,n)-a(m,n),(m,bn)-b(m,n).$$

于是令$T=F/F_0$. 则T满足的双线性的“泛性质” $\square$

记号：将上述构造的$T \triangleq M \otimes_A N$. $\quad M \times N \xrightarrow{f} M \otimes_A N$

$(m.n) \mapsto (m,n)$

更一般的，任给$M_1, \cdots, M_n \in A-Mod$有$n-$重维映射。

$$f = M_1 \times \cdots \times M_n \to N$$

$$\begin{aligned} &f\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, a_i \cdot \alpha_i + a_i'\alpha_i', \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n\right) \\ &= a_i f(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n) + a_i' f\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_i', \cdots, \alpha_n\right) \end{aligned}$$

即f对每个分量均是线性的(多重线性映射).

张量积对$M_1 \times \cdots \times M_n \xrightarrow{f \quad linear} T$，对$M_1 \times \cdots \times M_n \xrightarrow{g} L$都存在唯一的线性映射$h : T \longrightarrow L$，使得$g = hof$. 即有下面交换图

$$\begin{tikzcd} M_1 \times \cdots \times M_n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & T \arrow[dl, "\exists! h"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

记$T = M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$ 性质：

1. $M \otimes_A N = N \otimes_A N$;

2. $M \otimes_A A \simeq M$;

3. $(M \otimes_A N) \otimes_A L \simeq M \otimes_A (N \otimes_A L)$;

4. $M \otimes_A (N \oplus_A L) \simeq (M \otimes_A N) \oplus (M \otimes_A L)$.

例1. V, W分别是$\mathbb{R}$上的m, n维向量空间，则$dim_{\mathbb{R}}(W \otimes V) = mn$.

$v \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$\int : \mathscr{C}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$($\mathscr{C}[a,b]$是[a,b]上的连续函数的全体)

$f \mapsto \int_{[a,b]} f = \int_a^b tdx$

对称.设$V, W \in A-Mod$,

$$\underbrace{V \times V \cdots \times V}_{n\text{重}} \xrightarrow{f} W$$

若(1)f是n-重线性的. (2)$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}) = f(x_1 \cdots x_n)(\forall \sigma \in S_n)$. 则称$f$为$n$**重对称函数**.

外积.设$V, W \in A-Mod$

$$\underbrace{V \times V \cdots \times V}_{n\text{重}} \xrightarrow{f} W$$

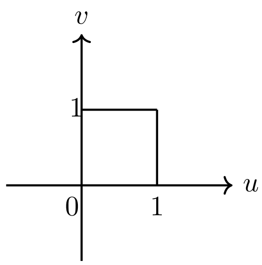
(1) f是n-重线性映射。

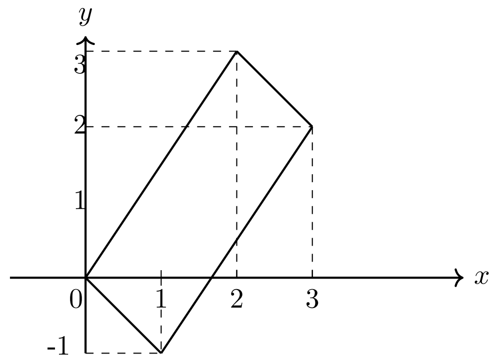
(2) f是交错的。$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot f(x_1\cdot x_n)$. 其中$\sigma\in S_n$($n$次对称群)

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{当}\sigma\text{是偶置换}, \\ -1 & \text{当}\sigma\text{是奇置换}. \end{cases}$$

外积：$\phi: V\times V\times\cdots\times V \xrightarrow{\phi} \wedge^n V = V\wedge V\wedge\cdots\wedge V$是一$n$重交错线性映射，若对任意$V\times V\times\cdots\times V \xrightarrow{f} W$存在唯一的$g:\wedge^n V\longrightarrow W$使得$f = g\circ\phi$ 则称$\wedge^n V$为V的n次外积。

例1





$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = u + 2v & dx = du + 2dv \\ y = -u + 3v & dy = -du + 3dv \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= \iint_\Delta dxdy \\ &= \iint_\Delta (du + 2dv)\wedge(-du + 3dv) \\ &= \iint_\Delta (3+2)du\wedge dv \\ &= 5\iint_\Delta dudv = 5 \end{aligned}$$

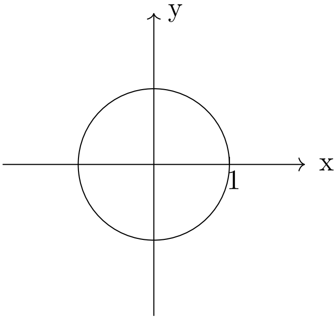
$$du\wedge du = -du\wedge du$$
$$\Rightarrow du\wedge du = 0$$

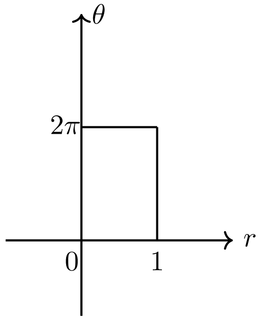
另一种方法求面积

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix} \right\| = |5| = 5 \qquad J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$-\iint_\Delta dxdy = \iint_D Jdudv = 5\iint_D dudv = 5.$$

例2.计算区域$D, 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi$的面积。





$D: x^2+y^2 \leq 1$ $\qquad\qquad$ $\Delta: 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

解:进行坐标变换$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r\sin\theta & 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$,于是

$$\begin{aligned}
S(\Delta) &= \iint_\Delta dxdy = \iint_D d(r\cos\theta)\wedge d(r\sin\theta) \\
&= \iint_D (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)\wedge(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\
&= \iint_D r\cos\theta^2 drd\theta - r\sin^2\theta d\theta dr \\
&= \iint_D r(\cos\theta^2+\sin^2\theta)drd\theta \\
&= \iint_D rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi
\end{aligned}$$

一般地，设D是$\mathbb{R}^n$中区域，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是D上坐标，进行坐标变换$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$A\in M_n(\mathbb{R}), y_i = a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n, (1\leq i\leq n)$，得到$\mathbb{R}^n$中区域$D^{'}$,则

$$\begin{aligned}
vol(D') &= \int\cdots\int_{D'} dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n \\
&= \int\cdots\int_D d(a_{11}x_1+\cdots a_{1n}x_n)\wedge\cdots\wedge d(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n) \\
&= |A|\int\cdots\int_D dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n
\end{aligned}$$

$|A| = J = \left|\frac{\partial(y_1\cdots y_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}\right|$.

2.12 分式模

A环(交换环)
S是A的乘法封闭子集$S\subset A$,

$$S^{-1}A=\left\{\frac{a}{s}|a\in A,s\in S\right\}.$$

设$M\in A-Mod$，分式模为

$$S^{-1}M=\left\{\frac{x}{s}|x\in M,s\in S'\right\}.$$

$\frac{x_1}{s_1}=\frac{x_2}{s_2}\Leftrightarrow\exists t\in S$使得$t(s_2x_1-s_1x_2)=0$.
有自然映射

$$A\to S^{-1}A$$
$$a\mapsto\frac{a}{1}$$

这样$S^{-1}A$可看成一个$A-Mod$.
由定义，$\frac{x_1}{s_1}\sim\frac{x_2}{s_2}(x_1,x_2\in M,s_1,s_2\in S^{-1}\Leftrightarrow\exists t\in S$使得$t(s_2x_1-s_1x_2)=0$。易知“$\sim$”是$S\times M$中的一个等价关系. $\frac{x}{s}$即为$(s,x)\in S\times M$关于“$\sim$”的等价类.
定义$S^{-1}M$中加法为“+”: $\frac{x_1}{s_1}+\frac{x_2}{s_2}\triangleq\frac{s_2x_1+s_1x_2}{s_1s_2}$.
数乘($S^{-1}A$对$S^{-1}M$的作用):

$$\begin{aligned}&S^{-1}A\times S^{-1}M\to S^{-1}M\\&\left(\tfrac{a}{s},\tfrac{x}{t}\right)\mapsto\tfrac{a}{s}\tfrac{x}{t}\triangleq\tfrac{ax}{st}\quad(\forall a\in A,s,t\in S,x\in M)\end{aligned}$$

$\therefore S^{-1}M\in S^{-1}A-Mod$.
即上述构造所得$S^{-1}M$是一个$S^{-1}A$-模，称为M关于S的**分式模**。
事实：设A,B是交换环,$f:A\to B$是一个环同态
则：$\begin{aligned}&A\times B\to B\\&(a,b)\mapsto a\star b\end{aligned}$ (注：若A,B是非交换环，则$f(A)\subset C(B)$)
其中$a\star b\triangleq f(a)\cdot b$. 于是易验证$(B,+,\star)$是一个$A-$模，此时也称$B$为一个$A-$代数.
若B与C为$A-$代数，则可定义

$$\begin{aligned}&B\bigotimes\nolimits_A C\\&(b_1\bigotimes c_1)(b_2\bigotimes c_2)=(b_1b_2)\bigotimes(c_1c_2)\\&\Rightarrow B\bigotimes\nolimits_A C\text{也是一个}A-\text{代数}.\end{aligned}$$

Theorem 2.8. *设A是含1交换环，S是A的一个乘法封闭子集，$M\in A-Mod$,则*

$$S^{-1}A\otimes_A M\cong S^{-1}M.$$

证明. 首先，令

$$f:S^{-1}A\times M\to S^{-1}M$$
$$\left(\frac{a}{s},x\right)\mapsto\frac{ax}{s}\in M.$$

$\because M \in A-Mod, f(\frac{a}{s}, x_1) \triangleq \frac{ax}{s} (\forall \frac{a}{s} \in S^{-1}A, x \in M)$. 易验证，$f$是$A-$双线性映射，从而由张量积的泛性质: $\exists!$的$A-$线性映射$\phi = S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$, 使得$f = \phi \circ \eta$,即下图交换

$$\begin{tikzcd} S^{-1}A \times M \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & & S^{-1}A \otimes_A M \arrow[dl, "\phi"] \\ & S^{-1}M & \end{tikzcd}$$

$$\phi : S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$$
$$\frac{a}{s} \otimes_A x \mapsto \frac{ax}{s}$$

下证ϕ是一个同构。

由于$\forall s \in S, x \in M$,有$\frac{x}{s} = f(\frac{1}{s} \otimes x)$,从而$\phi$是满射。

下证ϕ是一个单射。为此，任取$\alpha \in S^{-1}M$有$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i} \otimes x_i$,其中$a_i \in A, s_i \in S, x_i \in M, (i-1, \cdots, n)$。令$s = s_1 \cdots s_n$, $s' = \frac{s}{s_i}$,

$$\begin{aligned} \alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i} \otimes x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i s'}{s} \otimes x_i &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s} \times (a_i s' x_i) \\ &= \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes (a_i s' x_i) \\ &= \frac{1}{s} \left(1 \otimes \sum_{i=1}^{n} (a_i s' x_i) \right) \\ &= \frac{1}{s} (1 \otimes x) \qquad \text{其中} x = \sum_{i=1}^{n} a_i s' x_i \\ &= \frac{1}{s} \otimes x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha = \frac{1}{s} \otimes x \in Ker\theta \Leftrightarrow 0 = \phi(\alpha) = \phi(\frac{1}{s} \otimes x) = \frac{x}{s} = 0 \\ \Leftrightarrow \exists t \in S, \text{使得} t(x \cdot 1 - s \cdot 0) = tx = 0 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{s} \otimes x = \frac{t}{st} \otimes x \\ &= \frac{1}{st} \otimes tx = \frac{1}{st} \otimes 0 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow ker\phi = 0 \therefore \phi$是单的。从而$\phi$呈同构。 □

上述构造所得$S^{-1}M$是一个$S^{-1}A$-模，称为M关于S的分式模.

Jordan-Holder定理

Definition 2.36. 设$M \in A-mod$, 如果有序列

$$M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq M_2 \cdots \supsetneqq M_n = 0(\star)$$

其中$M_i \leq M(i = 0, 1, 2 \cdots n)$, 且$M_i/M_{i+1}$均是单$-A$模$(i = 0, 1, \cdots, n-1)$，则称$(\star)$为一个合成列*(comprosition serise)*. M_i/M_{i+1}称为M的合成因子，其中n标为M的长度*(length)*记为$l(M) = n$.

Theorem 2.9. *(Jordan-Holder)* 设$M \in A - Mod$，如果M有合成列，则M的所有h合成列都有相同的长度，且他们的合成因子在相差一个置换下的对应互相同构。

把合成因子M_i/M_{i+1}作直和$M^{'} = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i/M_{i+1}$,当$M$不是半单时，可由$M^{'}$去找合成列。

3 域论

3.1 域的代数扩张

域$F, (F, +, \cdot), u(F) = F^* = F/0$,子域$F_i \leqslant F$其中$i \in I$,$\cap F_i \leqslant F$.

证明：由于$0, 1 \in F_i, \forall i \in I, \Rightarrow 0, 1 \in \bigcap\limits_{i \in I} F_i$.

而$\forall a, b \in F_i, i \in I, \Rightarrow a + b \in F_i, \forall i \in I \Rightarrow a + b \in \bigcap\limits_{i \in I} F_i$

$$ab \in F_i, \forall i \in I \Rightarrow ab \in \bigcap\limits_{i \in I} F_i$$

$\bigcap\limits_{i \in I} F_i \leqslant F$是$F$的子域。

$\alpha \in F$,则$\alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^n \in F$ $(\forall n \in N)$, $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \alpha + 1 + a_n\alpha^n \in F$. 令$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n \in F$，即$\alpha \in F, f(\alpha) \in F$.

若$g(x) \in F[x], g(\alpha) \neq 0$，则$\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \in F$

F是域，F上的关于x的多项式环$F[x]$， F上的关于x的有理分式域$F(x)$，如$\mathbb{R}(x)$，$\mathbb{C}(x)$

一般地，F上关于$x_1 \cdots x_n$的多项式环为$F[x_1 \cdots x_n]$;F上关于$x_1 \cdots x_n$的有理分式域$F(x_1 \cdots x_n)$.

固定一个域k，任取k的一个子域F，任取$\alpha \in k$. 问题：k中包含F与α的最小子域是?

答案：$F(\alpha) = \{h(\alpha) \mid h \in F(x) \mid h(\alpha) \text{ 有意义 }\} = \left\{ \dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \middle| f, g \in F[x] \text{ 且 } g(\alpha) \neq 0 \right\}$

$F(\alpha) \triangleq \bigcap\limits_{\substack{E \in k \\ E \supset FU(\alpha)}} E$，称$F(\alpha)$为$F$添加$k$中元$\alpha$生成的子域。

同理，

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \alpha_2) &= \{h(\alpha_1, \alpha_2) \mid h \in F(x_1, x_2), h(\alpha_1, \alpha_2) \text{ 有意义 }\} \\ &= \left\{ \frac{f(\alpha_1, \alpha_2)}{g(\alpha_1, \alpha_2)} \mid f, g \in F[x_1, x_2] \text{ 且 } g(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

对于$\alpha_1 \cdots \alpha_n \in k$

$$F(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = \left\{ \frac{f(\alpha_1 \cdots \alpha_n)}{g(\alpha_1 \cdots \alpha_n)} \middle| f, g \in F[x_1 \cdots x_n] \text{ 且 } g(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \neq 0 \right\}$$

设$F \leqslant k$子域，$S' \subset k$子集，$S \neq \varnothing$，$F(S)$为k中既包含F又包含S'的最小子域，

$$F(S)=\left\{\frac{f\left(\alpha_1\cdots\alpha_n\right)}{g\left(\alpha_1\cdots\alpha_n\right)}\middle| n\in N,\alpha_1\cdots\alpha_n\in S,f,g\in F\left[\alpha_1\cdots\alpha_n\right],g\left(\alpha_1\cdots\alpha_n\right)\neq 0\right\}$$

每个元素都可只加S中的有限个元即可得到。

固定k域，$F_1,F_2\leq k$是k的两个子域. 问：k中既包含F_1又包含F_2的最小子域是？

答：$F_1\left(F_2\right)=F_2\left(F_1\right)\triangleq F_1F_2$称之为$F_1$与$F_2$的合成（域）。

类似地，对于k的子域F_i $(i=1,\cdots,n)$，F_i的合成记为$F_1\cdots F_n$代数扩张。

域扩张：设F,k是域，如果$F\subset k$，则知F为k的子域，k是F的一个扩域，则k可作为F模$\Rightarrow k$可作为F向量空间。

此时，k是F上一个向量空间，$F\times k\longrightarrow k$，$(a,b)\longmapsto ab$

Definition 3.1. 设k/F是一个域扩张$(F\subset k)$，称$\dim_F^k$为其扩张次数，记之为$[k:F]\triangleq\dim_F^k$

当$[k:F]=n<+\infty$时，称k/F为一个n次扩张。

当$[k:F]=+\infty$时，称k/F为一个无限扩张。

Definition 3.2. 设k/F是一个域扩张，$\alpha\in k$，如果有$f(x)\in F[x]\mid\{0\}$，使得$f(\alpha)=0$，则称α在F上代数，也称α是一个F代数元。

若这样的非零多项式不存在，则称α是F上的数据元。

此时，$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]\mid\{0\}$，$a_0,\cdots,a_n\in F$，$n=\deg f,a_n\neq 0$，且显然$n>0$。

Definition 3.3. 设k/F是一个域扩张，如果k中任一元素均是下一代数元，则称k/F是一个代数扩张。

Theorem 3.1. 域的有限扩张均是代数扩张，即对于域扩张k/F，如果$[k:F]<+\infty$，则k/F是一个代数扩张。

证明. 设$[k:F]=n<+\infty,\forall\alpha\in k$（只需证$\alpha$是$F$一代数元即可）

则$1,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是$F$一线性相关的（$\because\dim_F^k=n$）

$\therefore$存在不全为0的$a_0\cdots a_n\in F$，使得

$$a_0+a_1\alpha+\cdots+a_n\alpha^n=0$$

令$f(x)=1+a_1x+\cdots+a_nx^n\in F[x]\mid\{0\}$，且$f(\alpha)=0$

$\therefore\alpha$是F一代微元，

$\therefore k/F$是代数扩张。 □

Theorem 3.2. 设域$F\subset E\subset k$，如果E/F，k/E都是有限扩张，则k/F是有限扩张，且$[k:F]=[k:E][E:F]$

证明. 设$[E:F]=m,[k:E]=n$，则$\dim_F^F=m$，$\dim_E^k=n$. 取$\{x_1,\cdots,x_m\}$是E上的一组F-基; $\{y_1,\cdots,y_n\}$是k上的一组E-基.

下证$\{x_iy_j\}_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$是$k$的一组$F$-基.

$\forall\alpha\in k$，有$\alpha=\sum\limits_{j=1}^{n}x_jy_j$，其中$b_j\in E$，而$\forall b_j\in E$，有$b_j=\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}x_i$，其中$a_{ij}\in F$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\alpha=\sum_{j=1}^{n}b_jy_j&=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\right)y_j\\&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_iy_j.\end{aligned}$$

$\therefore k$中任一元素都可用$\{x_iy_j\}_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ F-线性表出

设

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=0,a_{ij}\in F,$$

则

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\right)y_j=0.$$

由于$\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}^{\in F}x_i^{\in E}\in E$，由$\{y_1,\cdots,y_n\}$线性无关$\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}x_i=0(\forall j)$，由于$a_{ij}\in F$，$\{y=x_1,\cdots,x_m\}$是$E$上关于$F$的一组基$\Rightarrow$ $a_{ij=0}$,于是$a_{ij=0}(i=1,\cdots,m,1\leqslant j\leqslant n)$.

从而$\{x_iy_j\}_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$是一组$k$的$F$-基. 且有$[k:F]=[k:E][E:F]=mn$. □

同理设域扩张$F=F_0\subset F_1\subset\cdots\subset F_n$，则

$$[F_n:F]=[F_n:F_{n-1}][F_{n-1}:F_{n-2}]\cdots[F_1:F]$$

Theorem 3.3. *(单代数扩张结构定理）设k/F是一个域扩张，$\alpha\in k$且α是F-代数元，则$F(\alpha)=F[\alpha]$*
且$[F(\alpha):F]=n<+\infty$。特别地，$F(\alpha)/F$是代数扩张，其中n为α在F上极小多项式的次数。

3.2 代数扩张与单代数扩张结构

域的特征：F域,有整数环到F的自然嵌入

$$\phi:\mathbb{Z}\to F$$
$$1\mapsto 1_F$$

则$\ker\phi=\langle n\rangle$, $n\in\mathbb{Z}\geqslant0$.于是 $Z/\ker\phi\hookrightarrow F$子域$\Rightarrow$ $\ker\phi$ 是$\mathbb{Z}$中极大理想，或0。

域F的特征，若$\mathrm{ch}(F)=0$,则$\mathbb{Z}\subset F$，又域有逆元，$\mathbb{Q}\subset F$，即$\mathbb{Q}$是F的最小子域(或称素子域)

若$\mathrm{ch}(F)=p$（素数），此时$F_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\subset F$，即$F_p$为$F$的素子域。

Theorem 3.4. *(域的单代数扩张结构):设k/F是一个域扩张，$\alpha\in k$，记$E=F(\alpha)$*

(1) 存在F上唯一一个首 *1* 不可约多项式$P_\alpha(x) \in F[x]$，使得$P_\alpha(x)=0$，记$n=\deg P_\alpha(x)$

(2) $E=F(\alpha)=F[x]$且$\{1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{n-1}\}$是$E$的一组$F$-基，特别地，$[F(\alpha):F]=\deg P_\alpha(x)$，称上述$P_\alpha(x)$为$\alpha$在$F$上的极小多项式（书上记之为$P_\alpha(x)=I_{rr}(\alpha,F,x)$）

先给出一个引理及证明，利用引理去证明定理 1。

Lemma 3.1. 设α，k/F如上述定理，记$I=\{f(x)\in F[x]\mid f(\alpha)=0\}$，则$I=\langle P_\alpha(x)\rangle$是一个素理想，其中$P_\alpha(x)\in F[x]$是$F$上一个首 *1* 的不可约多项式。

证明. 令

$$\begin{aligned} \phi: F[x] &\longmapsto k \\ f(x) &\longmapsto f(\alpha) \end{aligned}$$

则ϕ是环同态，且$\ker\phi=\{f\in F[x]\mid f(\alpha)=0\}=I$
于是由环同态基本定理，有

$$F[x]/I \backsimeq Im(\phi) \leqslant k \text{ 子环}$$

因为k是域，故$F[x]/I$是整环$\Rightarrow$ I是素理想。

又$F[x]$是一个PID，由于α是F-代数元，故$\exists\ f\in F[x]-\{0\}$，使得$f(\alpha)=0$，即$I\neq 0\Rightarrow$ I是极大理想。

从而I是由一个不可约多项式生成(把首项系数化为 1，得到的理想也相同)记为$P_\alpha(x)$，即$I=\langle P_\alpha(x)\rangle$ □

定理的证明

证明. （1）由上述引理即得

（2）设$P_\alpha(x)$为（1）中所给的α在F上的极小多项式，$n=\deg P_\alpha(x)$，于是可设$P_\alpha(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$

下证$F(x)=F[\alpha]$.

为此，任取$\beta\in F(\alpha)$，则$\beta=\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)},f,g\in F[x]$，且$g(\alpha)\neq 0$. 由极小多项式的性质，$P_\alpha(x)\nmid g(x)$. 又$P_\alpha(x)$不可约，则$(P_\alpha(x),g(x))=1$，又$F[x]$是PID，$\therefore$有$u(x),v(x)\in F[x]$，使得

$$u(x)P_\alpha(x)+v(x)g(x)=1$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow u(\alpha)P_\alpha(\alpha)+v(\alpha)g(\alpha)=1 \\ &\Rightarrow v(\alpha)g(\alpha)=1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{g(\alpha)}=u(\alpha) \\ &\Rightarrow \beta=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=f(\alpha)\cdot v(\alpha)\in F[\alpha] \\ &\Rightarrow F(\alpha)\subset F[\alpha] \end{aligned}$$

显然$\Rightarrow F(\alpha)\supset F[\alpha]\Rightarrow F(\alpha)=F[\alpha]$.

下证$\{1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}\}$是$E$的一组$F$-基.

由带余除法有$f(x)=g(x)P_\alpha(x)+r(x)$，其中$g(x)\cdot r(x)\in F[x]$，且$r(x)=0$或$\deg r(x)<\deg P_\alpha(x)=n$

于是

$$\beta=f(\alpha)=gf(\alpha)P_\alpha(\alpha)+r(\alpha)=r(\alpha)\in F+F\alpha+\cdots+F\alpha^{n-1}$$

即β可由$\{1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}\}$的$F$-线性表述。

下证$\{1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}\}$线性无关。

设$b_0+b_1\alpha+\cdots+b_{n-1}\alpha^{n-1}=0$，其中$b_0,\cdots,b_{n-1}\in F$. 令$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}\in F[x]$, 则$g(\alpha)=0$，从而$P_\alpha(x)\mid g(x)$. 由于$\deg g(x)=n-1<\deg P_\alpha(x)$

$$\Rightarrow g(x)=0\Rightarrow b_0=b_1=\cdots=b_{n-1}=0,$$

从而$\{1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}\}$是线性无关的。

综上，$\{1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}\}$是$E$的一组$F$-基。 □

Definition 3.4. 设k/F是一个域扩张，如果有$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in k$，使得$k=F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则称$k$是$F$的一个有限生成扩域，或称$k/F$是一个有限生成扩张。

证明. “$\Longleftarrow$” $k=F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=F[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]$，其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in k$都是$F$-代数元

$$k=F[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}][\alpha_n],F[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}]=F[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-2}][\alpha_{n-1}]$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ [k:F]&=[k:F[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}]]\\&=[F[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}]:F[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-2}]]\cdots[F[\alpha_2,\alpha_1]:F[\alpha_1]]\\&<+\infty.\end{aligned}$$

“$\Longrightarrow$” 由于$[k:F]=n<+\infty$，故k作为F的向量空间有一组基. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为k的一组F-基

于是

$$k=F\alpha_1+F\alpha_2+\cdots+F\alpha_n\subset F[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]\subset k(\Leftarrow\because\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in k,F\subset k)$$

即$k=F[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]$. 从而$k$是$F$上一个有限生成的代数扩张。 □

Example 3.1. $F=Q\left(\sqrt[3]{2}\right)=Q\left(\sqrt[3]{2}\right)$， $\alpha=\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}\in F$，找$f(x)\in Q[x]$，使得$\alpha=f\left(\sqrt[3]{2}\right)$

解： $\sqrt[3]{2}$在Q中的极小多项式为$P(x)=x^3-2$，不可约的

而令$g(x)=x^2-x+2$，则$g\left(\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+2$，即$\alpha=\dfrac{1}{g\left(\sqrt[3]{2}\right)}$

对$P(x)$与$g(x)$作辗转相除法

$$\begin{aligned}
P(x)&=x^3-2=(x+1)\left(x^2-x+2\right)-x-4\\
g(x)&=(-x-4)(-x+5)+22\\
\Rightarrow 22&=g(x)+(x+4)(-x+5)\\
&=g(x)+[(x+1)g(x)-P(x)](-x+5)\\
&=g(x)+\left(-x^2+4x+5\right)g(x)-P(x)(-x+5)\\
&=\left(-x^2+4x+6\right)g(x)-P(x)(-x+5)\\
\Rightarrow 22&=\left(-\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+6\right)g(\sqrt[3]{2})-P(\sqrt[3]{2})(-\sqrt[3]{2}+5)\\
&=\left(-\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+6\right)g(\sqrt[3]{2})\\
\Rightarrow \alpha&=\frac{1}{g\left(\sqrt[3]{2}\right)}=\frac{1}{22}\left(-\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+6\right)
\end{aligned}$$

$\therefore$取$f(x)=\dfrac{1}{22}\left(-x^2+4x+6\right)$即可得到$\alpha=f\left(\sqrt[3]{2}\right)$ □

Proposition 3.1. 设有域扩张$F\subset E\subset k$，则k/F是代数扩张$\Longleftrightarrow$ E/F, k/E都是代数扩张。

证明. "$\Longrightarrow$" 若k/F是代数扩张，则$\forall\ \alpha\in k$，α在F上代数，则自然在E上也代数，$\therefore\ k/E$是代数扩张。由于$\forall\ \alpha\in E$，自然$\alpha\in k$，由于k/F是代数扩张，则α在F上的代数元，则E/F是代数扩张。

$\Longleftarrow$" 任取$\alpha\in k$，下证α是F-代数元。

由于k/E是代数扩张，则α是E-代数元，则有

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in E[x]\mid\{0\}$$

使得$f(\alpha)=0$。

令

$$E_1=F\left[a_0,\cdots,a_n\right]=F\left(a_0,\cdots,a_n\right),$$

则$f(x)\in E_1[x]$且α在E_1代数。由于$a_0,\cdots,a_n\in E$，又E/F是代数扩张，则$a_0,\cdots,a_n$在F上代数。则$E_1=F\left[a_0,\cdots,a_n\right]/F$是一个有限扩张.

综上，$\left[E_1(\alpha):F\right]=\left[E_1(\alpha):E_1\right]\left[E_1:F\right]<+\infty$. 从而$E_1(\alpha)/F$是代数扩张 .

$\therefore\ \alpha$在F上代数，由α的任一性, $\Rightarrow\ k/F$是代数扩张 . □

3.3　代数闭包(1)

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \in & k \\ & & | \\ & & F \end{array} \quad 域扩张 \qquad f(x)\in F[x]，使得f(\alpha)=0,\ \tau|F=\sigma$$

τ为σ延拓

σ为τ在F上的限制

设$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$， $0=f(\alpha)=\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$

$$\begin{aligned} 0=\tau\left(0\right)=\tau\left(f\left(\alpha\right)\right)&=\tau\left(\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0\right)\\ &=\tau\left(\alpha\right)^n+\tau\left(a_{n-1}\right)\tau\left(\alpha\right)^{n-1}+\cdots+\tau\left(a_1\right)\tau\left(\alpha\right)+\tau\left(a_0\right)\\ &=\tau\left(\alpha\right)^n+\sigma\left(a_{n-1}\right)\tau\left(\alpha\right)^{n-1}+\cdots+\sigma\left(a_1\right)\tau\left(\alpha\right)+\sigma\left(a_0\right) \end{aligned}$$

即

$$\tau\left(\alpha\right)^n+\sigma\left(a_{n-1}\right)\tau\left(\alpha\right)^{n-1}+\cdots+\sigma\left(a_1\right)\tau\left(\alpha\right)+\sigma\left(a_0\right)=0.$$

令

$$g(x)=x^n+\sigma\left(a_{n-1}\right)x^{n-1}+\cdots+\sigma\left(a_1\right)x+\sigma\left(a_0\right),$$

即$g\left(\tau\left(\alpha\right)\right)=0$，即$\tau\left(\alpha\right)$是$g\left(x\right)$的一个根. 常记$g(x)\triangleq f^{\sigma}(x)$ $f^{0}(\tau(\sigma))=0$,$f^{\tau}(\tau(\sigma))=0$.

Definition 3.5. 设k/F是一个域扩张，L是一域，$\sigma:\ F\longrightarrow L$与$\tau:\ k\longrightarrow L$均是域同态，如果$\tau|F=\sigma$，则称$\tau$是$\sigma$在$k$上的拓展或$\sigma$是$\tau$在$F$上的限制。

特别地，当$F\subset L$，且σ是恒等嵌入（即$\sigma(\alpha)=\alpha\,\forall\,\alpha\in F$）时，如果$\tau|F=\sigma$，则称$\tau$是$k$到$L$的一个$F$-嵌入。

设$K\xrightarrow{\tau}L, K\longrightarrow F, F\xrightarrow{id}L$

τ是k到L的一个F-嵌入，$\alpha\in k$且是一个F-代数元，则$\tau(\alpha)$也是F-代数元($\because f^{\tau}(x)=f^{\sigma}(x)=f(x)$，从而$\alpha$与$\tau(\alpha)$的极小多项式是相同的，故都是$F$-代数元)。

Lemma 3.2. 设k/F是一个代数扩张，$\sigma:k\longrightarrow k$是一个$F$-嵌入，则$\sigma$是$k$上的一个自同构。

证明. : 由于域嵌入必是单的，故只须让σ是一个满射即可.

为此，任取$\alpha\in k$（找到α的原像），由k/F是代数扩张，则设α在F上的极小多项式$P_\alpha(x)\in F[x]$. 令

$$S=\{\beta\in k\mid P_\alpha(\beta)=0\},$$

则$\alpha\in S$. 又令$E=F(S)=F[S]$, 则k/F是一个有限扩张. 任取$\beta\in S$，有$P_\alpha(\beta)=0$. 于是$\sigma\left(P_\alpha(\beta)\right)=0$，即$P_\alpha\left(\sigma\left(\beta\right)\right)=0$.

$$\Rightarrow\sigma(\beta)\in S\Rightarrow\sigma(S)\subset S$$

$\sigma(E)\subset E$（下证事实上$\sigma(E)=E$，只需证维数相等）.

设$r_1,r_2,\cdots,r_n$是E的一组F-基, 则$\sigma\left(r_1\right),\cdots,\sigma\left(r_n\right)\in\sigma(E)$.下证它是$\sigma(E)$的一组$F$-基.

设

$$a_1\sigma(r_1)+\cdots+a_n\sigma(r_n)=0,$$

其中$a_1,\cdots,a_n\in F$, 则

$$\sigma\left(a_1r_1+\cdots+a_nr_n\right)=0.$$

由于σ是单的，从而$a_1r_1+\cdots+a_nr_n=0$.

又$\because$ $r_1,\cdots,r_n$是E的一组F-基$\Rightarrow$ $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ 即$\sigma\left(r_1\right),\cdots,\sigma\left(r_n\right)$线性无关 .

$\therefore \dim_F\sigma(E)\geqslant n$，又$\because \dim_F\sigma(E)\leqslant\dim_F E=n$. 则$\dim_F\sigma(E)=n$,即$\sigma(E)=E$. 由$\alpha\in S\subset E$,所以存在$\alpha_1\in E\subset K$使得$\sigma(\alpha_1)=\alpha$, 即$\alpha$为$\alpha_1$在$\sigma$下的原像. 从而$\sigma:K\longrightarrow K$是满的.

故σ是同构.

$\square$

3.4 代数闭包(2)

K/F是一个数域扩张，$F\overset{\sigma}{\hookrightarrow}K$ 嵌入，对于多项式$F[x]$中多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$$

定义$\sigma f(x)$为

$$\sigma f(x)\overset{\triangle}{=}f^{\sigma}(x)=\sigma(a_n)x^n+\sigma(a_{n-1})x^{n-1}+\cdots+\sigma(a_1)x+\sigma(a_0)\in\sigma(F)[x]\subset K[x].$$

设有$\alpha\in F$ 使得 $f(\alpha)=0$, 则

$$\begin{aligned}f^{\sigma}(\sigma(\alpha))&=\sigma(a_n)\sigma(\alpha)^n+\sigma(a_{n-1})\sigma(\alpha)^{n-1}+\cdots+\sigma(a_1)\sigma(\alpha)+\sigma(a_0)\\&=\sigma(a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0)\\&=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0\\&=0.\end{aligned}$$

即$\sigma(\alpha)$是f^{σ}上的一个根.

如下图

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\sigma"] & & K \\ & F, \arrow[ul] \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$

$F\subset K,\sigma:K\longrightarrow K$是一个$F$ˇ嵌入, 且$\sigma|_F=id$.设$f(x)\in F[x],\alpha\in K$。若$f(\alpha)=0$, 则由于$\sigma(f(x))=f^{\sigma}(x)=f(x)$(因为$\sigma|_F=id_F$)，故

$$0=\sigma(0)=\sigma(f(\alpha))=f^{\sigma}(\alpha)=f(\sigma(\alpha)),$$

即$f(\sigma(\alpha))=0$. 从而$\sigma(\alpha)$也是$f(x)$的一个根。

$\sigma(f(\alpha))=f(\sigma(\alpha))$, 考虑

$$\sigma(\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)})=\frac{f^{\sigma}(\sigma(\alpha))}{g^{\sigma}(\sigma(\alpha))},$$

从而得到

$$\sigma(\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}) = \frac{f(\sigma(\alpha))}{g(\sigma(\alpha))}.$$

问：F是一个域，$f(x) \in F[x], degf > 0$是否有F的扩域E，使得f在E中有根？

由于$F[x]$是PID，则任意一个多项式

$$f(x) = P_1(x)^{e_1} \cdots P_r(x)^{e_r}$$

其中$P_i(x)$在F上不可约. 不妨设f在F上不可约，$f(x) \in F[x]$.令$m =< f > \lhd F[x]$，则m是极大理想

$$\begin{tikzcd} F[x] \arrow[rr, "\sigma"] & & F[x]/m \overset{\triangle}{=} E \\ & F \arrow[ul, "\eta"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

显然σ为满射,此时E为域，F直接看作E的子域，从而可把E看作F的扩域, 由于$f(x) \in m$，故在$E = F[x]/m$中$\overline{f(x)} = \overline{0}$. 将$f(x)$展开如下：

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in F[X],$$

于是我们有：

$$\begin{aligned} \overline{0} = \overline{f(x)} &= \overline{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0} \\ &= \overline{a_n x}^n + \cdots + \overline{a_1 x} + \overline{a_0} \end{aligned}$$

即在E中（注意到$\overline{a_i} = a_i, i = 1 \cdots n, F \hookrightarrow E$ ）

继而得到：

$$\overline{0} = a_n \overline{x}^n + \cdots + a_1 \overline{x} + \overline{a_0}$$

此时$\overline{x} \in E$,即$f(\overline{x}) = \overline{0}$,也即$f$在$E$中有根.

Theorem 3.5. *设F是一个域，$f(x) \in F[X]$,且$degf > 0$,则存在一个F扩域E,使得f在E中有根.(证明上面已给出)*

Corollary 3.1. *设F是一个域，$f_1(x) \cdots f_n(x) \in F[X]$,且$degf_i > 0, i = 1 \cdots n$,则存在一个$F$扩域$E$,使得$f_1(x) \cdots f_n(x)$在$E$中均有根.*

证明. 由上述定理，存在一个F扩域E_1,使得$f_1(x)$在E_1中有根，此时

$$f_2(x) \in F[X] \subset E_1[X],$$

又由上述定理，存在E_1扩域E_2,使得$f_2(x)$在E_2中有根.依次下去，得到E_{n-1}扩域E_n,使得$f_n(x)$在E_n中有根.

即$f_1(x) \cdots f_n(x)$在E_n中有根. □

Definition 3.6. 代数封闭域（*algebraically field*）

设K是一个域,如果K上任意一个次数大于*0*的多项式，均在K中有根，则称K是一个代数封闭域.

事实　设K是一个代数封闭域,$f(x) \in K[X]$,且$n = degf > 0$,则$f(x)$在K中有且只有n个根.(重根按重数计算)

证明. 由所设，$f(x)$在K中有根，取其一为α_1,即$\alpha_1 \in K$,,满足$f(\alpha)=0$,此时由带余除法可知，

$$(x-\alpha_1)|f(x),$$

即:

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdot g(x),$$

其中$g(x) \in K[X]$,且次数为$n-1$.

(1)若$n-1=0$,则$f(x)$在K中有一个根，结论显然成立.

(2)若$n-1>0$,此时$g(x)$在K中有一个根α_2,此时有：

$$g(x)=(x-\alpha_2)\cdot h(x),$$

其中$h(x) \in K[X]$,且次数为$n-2$,即:

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot h(x)$$

依次做下去，得到：

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),$$

故$f(x)$在K中有且只有n个根.(重根按重数计算)　□

Theorem 3.6. 任一个域均包含于一个代数封闭域 .

证明. (Artin)

设k是一个域,令：

$$S_0=\{f(x) \in k[X], degf>0\},$$

对每个$f \in S_0$,都给f对应于一个未定元，记之为X_f,记

$$S=\{X_f : f \in S_0\}.$$

令$A=K[S]$是k上关于未定元集S的多项式环.注意到，对每个$f \in S_0$,都有$f(X_f) \in A$,令：

$$I=<f(X_f) : f \in S_0>,$$

为A中由所有$f(X_f)(f \in S_0)$生成的理想.

下证：I是A的真理想，即证$1 \notin I$,

反证，若$1 \in I$,就有

$$1=g_1f_1(X_{f_1})+\cdots+g_nf_n(X_{f_n}) \tag{1}$$

其中$g_1\cdots g_n\in A, f_1\cdots f_n\in S_0, g_1\cdots g_n\in A$是$\{X_f\}_{f\in S_0}$中有限个变量的多项式.(虽然$A$中的变量个数是无限的，但每个多项式$g_i$的变量个数是有限的)

对于$f_i(X_{f_i})\in k[X_f], i=1\cdots n$,由上述定理可知，存在$k$的扩域$E_1$,使得$f_i(X_{f_i})$在$E_1$中均有根，不妨取其根为$\alpha_i\in E$,(即$f_i(\alpha_i)=0$),将$\alpha_i$代入（1）中,得到：

$$1=g_1(\alpha_1)f_1(\alpha_1)+\cdots+g_n(\alpha_n)f_n(\alpha_n)=0,$$

矛盾！

因此I是A的真理想，故有A的一个极大理想m,使得$I\subset m$.令$K_1=A/m$,则K_1是一个域，从而如下图所示：

$$\begin{tikzcd}
A=K[S] \arrow[rr, "\sigma"] & & K_1=A/m \\
& k \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

其中σ显然为满射，K_1可看作是k的一个扩域.任取$f\in S_0, f(X_f)\in I\subset m$. 从而有$\overline{f(X_f)}=\overline{0}\in A/m=K_1$,即$f(\overline{X_f})=\overline{0}$,也即$\overline{X_f}$是$f$在$K_1$中的一个根.

对于K_1按上述步骤，可构造K_1的一个扩域K_2，使得K_1中的任一次数≥ 0的多项式，在K_2中均有根.依此类推，可得到域的扩张链如下：

$$k\subset K_1\subset\cdots\subset K_n\subset\cdots,$$

其中K_n中次数大于0的多项式均在K_-n-1中有根.令$K=\bigcup\sum_{i=1}^{\infty}K_i$,则显然$K$是一个域，且$k\subset K$.

下证：K是代数封闭域.

为此任取$f(x)\in K[X]$,且$degf>0$,则由上述构造可知，存在$n\in Z_{\geq 0}$,使得$f(x)\in K_n[X]$,于是$f(x)$在$K_{n+1}[X](\subset K)$中与根，故K是代数封闭域. □

Theorem 3.7. *设k是一个域，则存在域K,使得K是代数封闭域，且K/k是代数扩张，称K是k的一个代数闭包.*

证明. 由前面的定理可知，k包含于一个代数封闭域E中，令$K=\{\alpha\in E,\alpha$是一个k—代数元$\}$,则K是一个域，且K/k是一个代数扩张.

下证：K是代数封闭域.

为此任取$f(x)\in K[X]$,且$degf>0$,则$f(x)\in E[X]$,由于E是代数封闭域，故f在E中有根，取其一为α,即$\alpha\in E, f(\alpha)=0$

显然α是一个K—代数元,即$K[\alpha]/K$是一个代数扩张，又由于K/k是一个代数扩张，进而可知$K[\alpha]/k$是一个代数扩张.即α是一个k—代数元,从而可知$\alpha\in K$,因此K是代数封闭域，K是k的一个代数闭包（同构意义下） □

E是代数封闭域,K/k是一个代数扩张,$\sigma:k\to E$,问是否存在$\tau;K\to E$,使得$\tau|_k=\sigma$.正如下图

所示：

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\tau"] & E \\ & k \arrow[ul] \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

简化模型　$K = k(\alpha)$是k上的单代数扩张，设α在k上的极小多项式为$P_\alpha(x) \in k[X]$,从而有$P_\alpha^\sigma(x) \in \sigma(k)[X] \subset E[X]$,且有$P_\alpha^\tau(x) \in E[X]$.

由$P_\alpha(\alpha) = 0$推出$0 = \tau(P_\alpha(\alpha)) = P_\alpha^\tau(\tau(\alpha)) = P_\alpha^\sigma(\tau(\alpha))$,即$\tau(\alpha)$是$P_\alpha^\sigma$在$E$中的一个根.

反之，$\beta \in E$,且$P_\alpha^\sigma(\beta) = 0$,令

$$\tau; k(\alpha) \to E, \quad \alpha \longmapsto \beta$$

从而有对应

$$g(\alpha) \longmapsto g^\sigma(\tau(\alpha)) = g^\sigma(\beta)$$

继而下图成立：

$$\begin{tikzcd} K = k(\alpha) \arrow[r, "\tau"] & E \\ & k \arrow[ul] \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Proposition 3.2. 设E是代数封闭域,$k \subset E$,α是一个k—代数元,$P_\alpha(x) \in k[X]$是k上的极小多项式，则$k(\alpha)$到E中的k-嵌入的个数$=P_\alpha(x)$中全部互异根的个数$\leq degP_\alpha(x)$.

Proposition 3.3. 设K/k是一个代数扩张，E是一个代数封闭域，$\sigma; k \to E$是一个域嵌入，则σ可延拓到K上，即有域嵌入

$$\tau : K \to E$$

使得$\tau|_k = \sigma$.

3.5　分裂域　正规扩张

回顾：设k是代数封闭域，,$f(x) \in k[X]$,且$n = degf > 0$,,则$f(x)$在k中有根，从而就有n个根.(重根按重数计算)

设F是一个域，$f(x) \in F[X]$,且$n = degf > 0$,,则$f(x)$在F中至多有n个根.

代数闭包：K/k是一个域扩张（1）K/k是代数扩张;（2）K是代数封闭的，则称K是k的一个代数闭包.

取E为代数封闭域，且$k \subset E$,令：$k^\alpha = \{\alpha \in E, \alpha$是一个$k$—代数的$\}$,则$k^\alpha$是$k$的一个代数闭包.

Proposition 3.4. 设k是代数封闭域，且K/k是一个代数扩张，则$K = k$.*(代数闭域只有平凡的代数扩张)*

证明. 任取$\alpha \in K, \alpha$是一个k—代数元，α在k上的极小多项式为,$P_\alpha(x) \in k[X]$,则$degP_\alpha(x) > 0$,于是$P_\alpha(x)$在k中完全分解.特别地，$\alpha \in k$ □

Proposition 3.5. 设E为代数封闭域，k是一个域，则k到E的任何一个嵌入，$\sigma; k \to E$均可延拓到k的任何一个代数扩域K上，即对于任意代数扩张K/k,存在嵌入：

$$\tau; K \to E,$$

使得$\tau|_k = \sigma$.

证明. 取$S = \{(F, \tau) : F$是K/k的中间域,$\tau; F \to E$,且$\tau|_k = \sigma$显然$(k, \sigma) \in S, S \neq \phi$.

在S中引入如下关系：对于$(F_1, \tau_1), (F_2, \tau_2) \in S$，定义$(F_1, \tau_1) \leq (F_2, \tau_2)$，如果$F_1 \subset F_2$，且满足$\tau_2|_{F_1} = \tau_1$.

易验证，"$\leq$"是S上的一个偏序关系，即$(S, \leq)$是一个非空偏序集.

如下图：

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & E \\
F_2 \arrow[u] \arrow[ur, "\tau_2"] & \\
F_1 \arrow[u] \arrow[uur, "\tau_1"] & \\
k \arrow[u] \arrow[uuur, "\sigma"] &
\end{tikzcd}$$

任取S上的一个全序子集$\{(F_i, \tau_i)\}_{i \in I}$,令$L = \bigcup_{i \in I} F_i$,则$L$是$K/k$的一个中间域，此时我们令：

$$\tau; L \to E \quad \alpha \longmapsto \tau_i(\alpha)$$

其中$\alpha \in F_i$,对任意的$\alpha \in L$,则τ是一个嵌入.

证明思路如下图：

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & E \\
K_0(\alpha) \arrow[u] \arrow[ur, "\tau"] & \\
K_0 \arrow[u] \arrow[uur, "\tau_0"] & \\
k \arrow[u] \arrow[uuur, "\sigma"] &
\end{tikzcd}$$

该嵌入是良好定义的.如果$\alpha \in F_i$,且$\alpha \in F_j$,则不妨设$F_i \subset F_j$,此时$\tau_i = \tau_j|_{F_i}$,从而有$\tau(\alpha) = \tau_i(\alpha) = \tau_j|_{F_i}(\alpha) = \tau_j(\alpha)$.且对任意的$\alpha \in K$,有$\alpha \in F_i$（对于任意的$i \in I$)进而有

$$\tau(\alpha) = \tau_i(\alpha) = \sigma(\alpha),$$

即$\tau|_k = \sigma$.可以推出$(L, \tau) \in S$,且显然有$\tau|_{F_i} = \tau_i$,即$(F_i, \tau_i) \leq (L, \tau)(i \in I)$成立.也即$(L, \tau)$是$\{(F_i, \tau_i)\}_{i \in I}$在$S$中的一个上界.

因此由$Zorn$引理可知，S中有极大元，设其中的一个极大元为(K_0,τ_0).

下证：$K=K_0$.

假若不然，则有$\alpha\in K,\alpha\notin K_0$,由所设$\alpha$是一个$k$—代数元,从而$\alpha$也是一个$K_0$—代数元,故$K_0(\alpha)/K_0$是一个单代数扩张.

由前面的定理得τ_0可延拓到$K_0(\alpha)$上,即有嵌入

$$\tau':K_0(\alpha)\to E,$$

使得$\tau'|_{K_0=\tau_0}$.显然有$\tau'|_k=\tau_0|_k=\sigma$,故$(K_0(\alpha),\tau')\in S$.但$(K_0,\tau_0)\leq(K_0(\alpha),\tau')$,但$K_0\neq K_0(\alpha)$与$K_0$的极大性矛盾.

因此$K=K_0$. □

取E为代数封闭域，且$k\subset E$,令$k^a=\{\alpha\in E,\alpha$是一个k—代数元$\}$,则k^a是k的一个代数闭包.

设k,k'是域，$\sigma:k\to k'$为同态应射同态映射；$\eta:k\to k^a$为恒等嵌入；$\eta':k'\to k'^a$为恒等嵌入.如图所示：

$$\begin{tikzcd}
k^a \arrow[r, "\tau"] & k'^a \\
k \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "\sigma"'] & k' \arrow[u, "\eta'"']
\end{tikzcd}$$

则σ可延拓到k^a上，即有域嵌入$\tau:k^a\to k'^a$,使得$\tau|_k=\sigma$.即有：

$$\begin{tikzcd}
k^a \arrow[r, "\tau"] & k'^a \\
k \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Corollary 3.2. *任一个域k的代数闭包在k—同构下是唯一的，即对于k的两个的代数闭包K_1与K_2,都有域同构：*

$$\sigma:K_1\to K_2,$$

使得$\sigma|_k=id$.(即K_1与K_2是k—同构的)

Proposition 3.6. *域F的任一个有限乘法子群都是循环的.*

证明. 设$G\subset F^*$是一个有限群，且$|G|>1$，由有限$Able$群结构定理可知，只需证G是一个P群的情形.（P是素数）此时记$|G|=p^n(n\in Z_{\geq1})$,令$S=\{m\in Z_{\geq0}:$存在$a\in G$,使得$\sigma(a)=p^m\}$,则$S\neq\phi$,且对于任意$m\in S$,有$m\leq n$.由S是一个有限集合，故S中有最大整数，记之为r,且有$b\in G$,使得$\circ(b)=p^r$,显然$r\leq n$.

于是对任意的$\alpha\in G$,记$\circ(\alpha)=p^s,s\in Z_{\geq0}$,则$s\leq r$.于是就有$\alpha^{p^r}=(\alpha^{p^s})^{p^{r-s}}=1^{p^{r-s}}=1$.因此，$G$中元素均是$X^{p^r}-1$的根.

因为$G\subset F^*$,而$X^{p^r}-1$在F中至多有p^r个根，可以推出$|G|\leq p^r$,即$p^n\leq p^r\leq p^n$,从而得到$r=n$,进而得到$\circ(b)=p^n$.

故$G=<b>$. □

分裂域 正规扩张

设k是一个域，$f(x) \in k[X]$,且$n =, degf > 0$,取k^a为k的一个代数闭包，则$f(x)$在k^a中可完全分解为：

$$f(x) = a(x - \alpha_1) + \cdots + (x - \alpha_n)$$

令$K = k(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \subset k^a$.

事实:上述K是k^a/k中使得$f(x)$在其中可完全分解的最小中间域.若$\alpha_1 \cdots \alpha_n \in K'$,则可以得到$K = k(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \subset K'$,称$K$为$f$在$k$上的一个分裂域.我们有：

$$K = k(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \to K^\sigma = k\{\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_n)\}$$

从而我们有对应：

$$\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\} \longmapsto \{\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_n)\}$$

从而我们有下图：

$$\begin{tikzcd}
K = k(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \arrow[rr, "\sigma"] & & K^\sigma = k\{\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_n)\} \\
& k \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

分裂域是在k—同构意义下是唯一的.

对于两个多项式的分裂域，$f_1, f_2 \in k(x)$,f_1的根为$\alpha_1 \cdots \alpha_m$；f_2的根为$\beta_1 \cdots \beta_n$；我们得到$E_1 = k(\alpha_1 \cdots \alpha_m), E_2 = k(\beta_1 \cdots \beta_n)$,则有：

$$\begin{aligned}
E = E_1E_2 = E_1(E_2) &= E_2(E_1) \\
&= k(\alpha_1 \cdots \alpha_m)k(\beta_1 \cdots \beta_n) \\
&= k(\alpha_1 \cdots \alpha_m\beta_1 \cdots \beta_n)
\end{aligned}$$

Definition 3.7. *(分裂域)* 设K是一个域,$\{f_i\}_{i\in I}$是k上的一簇多项式，取定k^a为k的一个代数闭包,$\{f_i\}_{i\in I}$
在k^a/k中的分裂域是指K:$k \subset K \subset k^a$,且满足：

（1）每个$f_1, (i = 1 \cdots n)$在K中完全分解；

（2）对k^a/k的任一个中间域E,如果k^a/k在E中完全分解，有$K \subset E$；

具体地,令$S = \{\alpha \in k^a$:存在$i \in I$,使得$f_i(\alpha) = 0$,则有$K = k(S)$.注意到：分裂域是在k—同构意义下是唯一的.

考虑不可约多项式，设k是一个域,$f(x) \in k[X]$,且f在k上不可约，从而有：

$$f(x) = a(x - \alpha_1) + \cdots + (x - \alpha_n)$$

$\alpha_1 \cdots \alpha_n \in k^a$,令$S = \{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$, 我们有映射：

$$\sigma : k(\alpha) \to k^a \quad \alpha \longmapsto \sigma(\alpha),$$

由$f(\sigma(\alpha))=0$,可知：$\sigma(\alpha)\in\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}$我们有下图：

$$\begin{tikzcd} k(\alpha) \arrow[r, "\sigma"] & K^a \\ k \arrow[u] \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$

进而我们考虑下图：

$$\begin{tikzcd} K=k(\alpha_1\cdots\alpha_n) \arrow[r] & k^a \\ k(\alpha) \arrow[u] \arrow[ur] & \\ k \arrow[u] \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

取$K=k(\alpha_1\cdots\alpha_n)$为$f$在$k^a/k$中的分裂域，对于映射

$$\tau: K\to\tau(K)\quad \tau|_k=id,$$

我们有:$f^\tau(x)=f(x)$,推出$0=\tau(0)=\tau(f(\alpha_i))=f(\tau(\alpha_i))$,从而推出$\tau(\alpha_i)\in S$,进而有$\tau(K)\subset k(S)=K$,即$\tau(K)=K$.

又由于K/k是代数扩张，故τ是满的，从而$\tau\in Aut_k(K)$为K到自身的一个k-嵌入. 即有下图：

$$\tau: K\to K\quad \tau|_k=id.$$

Definition 3.8. （正规扩张）设K/k是一个域的代数扩张，k^a为k的一个代数闭包,如果K到自身的k-自同构，则称K/k是一个正规扩张.

Definition 3.9. 设k是一个域, $\alpha\beta\in k^a$.如果在k上的不可约多项式，$P(x)\in k[X]$,使得$P(\alpha)=P(\beta)=0$,则称α与β是k-共轭的.(极小多项式相同，即多项式的根之间为k-共轭元.)

Definition 3.10. $\alpha\sim\beta\in k^a \iff$ 极小多项式相同,(固定一个代数闭包的情形下，给一个$\alpha\in k$,则就对应于一个极小多项式.)则”$\sim$”是一个等价关系.

$k^a/\sim=\{k$–共轭类$\}$

3.6 正规扩张 可分扩张

Theorem 3.8. 设K/k是一个域的代数扩张，k^a是k的包含K一个代数闭包,则下列陈述等价：

（1）K到k^a的任一个k-嵌入均是K的一个k-自同构，即$\sigma(K)=K$.

（2）$k[X]$中的任一不可约多项式f如果在K中有一个根，则f在K中完全分解.（即K包含$\alpha\in k^a$的同时也包含α的在k^a中的全部共轭元.）

（3）K是k上一簇多项式在k上的分裂域.

证明.（1）$\Longrightarrow$（2）证明思路如下图：

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\tau"] & k^a \\
k(\alpha) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, "\sigma"] & k(\beta) \arrow[u] \\
k \arrow[u] \arrow[ur, "id"] &
\end{tikzcd}$$

设$f(x) \in k[X]$为k上的一个不可约多项式，且有$\alpha \in K$.使得$f(\alpha) = 0$

下证：$f(x)$在k^a中的任一个根β都必在K中.

事实上，对于上述的$\beta \in k^a$,令

$$\sigma : k(\alpha) \to k^a \quad \alpha \longmapsto \beta,$$

则$\sigma : k(\alpha) \to k^a$是一个$k$-嵌入.

由于$K/k(\alpha)$是代数的，故σ可延拓为

$$\tau : K \to k^a,$$

即$\tau|_{k(\alpha)} = \sigma$.

显然τ也是一个k-嵌入，由所设，$\tau(K) = K$.特别地，$\beta = \sigma(\alpha) = \tau(\alpha) \in K$,故$K$包含$\alpha$的全部共轭元.

（2）$\Longrightarrow$（3）取$S = \{P(x) \in k[X], P(x)$是某个$\alpha \in K$在$k$上的不可约多项式$\}$,则$K$是$S$在$k$上的分裂域.

（3）$\Longrightarrow$（1）设K是多项式簇$\{f_i\}_{i \in I} \subset k[X]$在$k$上的分裂域.(其中$degf_i > 0$)

任取K到k^a的任一个k-嵌入如下：

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "\sigma"] & & k^a \\
& k \arrow[ul] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

下证$\sigma(K) = K$.

下面只需证：$\sigma(K) \subset K$.

为此任取$\alpha \in K$，由所设，有$f_i \subset k[X]$，使得$f_i(\alpha) = 0$,从而有$\sigma(f_i(\alpha)) = 0$,即$f_i(\sigma(\alpha)) = 0 \Rightarrow \sigma(\alpha) \in K \Rightarrow \sigma(\alpha) \subset K$.故$\sigma(K) = K$,$\sigma$是$K \to K$的自同构. □

Theorem 3.9. *(1)* 设K/k是一个域的正规扩张，对k的任一个扩域F，则FK/K也是正规的；

(2) 设$k \subset E \subset K$,如果K/k是正规的，则K/E也是正规的；

（3）设K_1, K_2均是k的代数扩张，且$K_1, K_2 \subset L$，如果$K_1/k, K_2/k$均是正规的，则K_1K_2/k，$K_1 \cap K_2/k$均是正规的.

可分扩张 E/F是一个代数扩张，L, L'是F的两个代数封闭域，则有下图：

$$\begin{tikzcd}
L' & E \arrow[l, "\tau^*"'] \arrow[r, "\sigma^*"] & L \\
& F \arrow[ul, "\tau"] \arrow[u] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

设$\sigma : F \to L$是一个嵌入，$\tau : F \to L'$,令：$S(\sigma) = \{\sigma^* : E \to L\text{嵌入，且}\sigma^*|_F = \sigma\}$,$S(\tau) = \{\tau^* : E \to L'\text{嵌入，且}\tau^*|_F = \tau\}$.

事实：

$$S(\sigma) \longleftrightarrow S(\tau) \quad \sigma^* \longmapsto \tau^*$$

不妨令$\tau^* = \lambda \circ \sigma^*$，则有下图：

$$\begin{tikzcd}
L' & & L \arrow[ll, "\lambda"'] \\
& E \arrow[ul, "\tau^*"'] \arrow[ur, "\sigma^*"] & \\
\tau(F) \arrow[uu] & F \arrow[l] \arrow[r] \arrow[uul, "\tau"] \arrow[uur, "\sigma"'] & \sigma(F) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

其中λ是$\tau \circ \sigma^{-1} : \sigma(F) \to L'$到$L'$上的延拓.

任取$\alpha \in F$,$\tau^*(\alpha) = \lambda\sigma^*(\alpha) = \lambda\sigma(\alpha) = \tau \circ \sigma^{-1}\sigma(\alpha) = \tau(\alpha)$,故$\tau^*|_F = \tau$.

Definition 3.11. 设E/F是一个代数扩张，F^a是F的一个代数闭包，任取一个F-嵌入$\sigma : F \to F^a$,令$S(\sigma) = \{\sigma^* : E \to F^a\text{嵌入，且}\sigma^*|_F = \sigma\}$.定义$E/F$的可分次数为$[E : F]_s \triangleq \# S(\sigma)$.特别地$\sigma = id$

$$\begin{aligned}
[E : F]_s &= \# S(id) \\
&= \#\{\sigma^* : E \to F^*, \sigma^*|_F = id\}
\end{aligned}$$

即为$\#\{E\text{到}F^*\text{的全部}F\text{-嵌入}\}$.

例如：$E = F(\alpha)$为一个单代数扩张，$\alpha \in F^a$,则$[E : F]_s = \alpha$在F上的极小多项式全部互异根（根在F^a中）的个数.即有：

$$\begin{tikzcd}
F(\alpha) \arrow[rr, "\sigma"] & & F^* \\
& F \arrow[ul] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

Theorem 3.10. 设有域扩张$k \subset F \subset E$,则有$[E : k]_s = [E : F]_s[F : k]_s$.

证明. 令$S_E=\{\tau:E\to k^a$嵌入，且$\tau|_k=id\}$,$S_F=\{\sigma:F\to k^a$嵌入，且$\sigma|_k=id\}$,即有：

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\tau"] & k^a \\
F \arrow[u] \arrow[ur, "\sigma_i"] & \\
k \arrow[u] \arrow[uur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

设$S_F=\{\sigma_1\cdots\sigma_m\}$,对每一个$\sigma_i\in S_F$,记$S_{E/F}(\sigma_i)=\{\tau:E\to k^a$嵌入，且$\tau|_F=\sigma_i\}$,则$\#S_{E/F}(\sigma_i)=[E:F]_s$,且有$S_E\subset\{\tau:E\to k^a$嵌入，且$\tau|_F=\sigma_i$,对每个$i\in\{1\cdots n\}\}\triangleq T$

任取$\tau\in S_E$,则$\tau|_F$是F 到k^a的一个k-嵌入，$\tau|_F=\sigma_i$,对某个$i\in\{1\cdots n\}$,从而得到$S_E\subset T$,因此$S_E=T$.

故我们得到：$[E:k]_s=\#S_E=\#T=m\#S_{E/F}(\sigma_i)=[E:F]_s[F:k]_s$. □

Theorem 3.11. *设K/k是一个域的有限扩张，则$[E:k]_s\le[E:k]$.(即可分次数$\le$扩张次数)*

证明. 由所设，$K=k(\alpha_1\cdots\alpha_n)$,其中$\alpha_1\cdots\alpha_n\in K$.于是有：

$$k\subset k(\alpha_1)\subset k(\alpha_1,\alpha_2)\subset\cdots\subset k(\alpha_1\cdots\alpha_n)=K,$$

其中 $k(\alpha_1\cdots\alpha_i)=k(\alpha_1\cdots\alpha_{i-1})(\alpha_i)$.

由前面的结果有：

$$\begin{aligned}[k(\alpha_1\cdots\alpha_i):k(\alpha_1\cdots\alpha_{i-1})]_s&=[k(\alpha_1\cdots\alpha_{i-1})(\alpha_i):k(\alpha_1\cdots\alpha_{i-1})]_s\\&\le[k(\alpha_1\cdots\alpha_i):k(\alpha_1\cdots\alpha_{i-1})].\end{aligned}$$

于是我们得到：

$$\begin{aligned}[K:k]_s&=[K:k(\alpha_1\cdots\alpha_{n-1})]_s\cdots[k(\alpha_1):k]_s\\&\le[K:k(\alpha_1\cdots\alpha_{n-1})]\cdots[k(\alpha_1):k]\\&=[K:k].\end{aligned}$$

□

Proposition 3.7. *设$K=k(\alpha)$是k的单代数扩张，则K/k是可分的$\Longleftrightarrow\alpha$是可分代数元.*

证明. $[K:k]_s=[k(\alpha):k]_s=P_\alpha(x)$在$k^a$中互异根的个数.

故：K/k可分$\Longleftrightarrow[K:k]_s=[K:k]=degP_\alpha(x)$=$P_\alpha(x)$在$k^a$中互异根的个数$\Longleftrightarrow P_\alpha(x)$在$k^a$中无重根$\Longleftrightarrow P_\alpha(x)$为可分的$\Longleftrightarrow\alpha$为$k$上的可分代数元. □

Definition 3.12. *设k是一个域，k_a是k的一个代数闭包，$\alpha\in k^a$,称α为k上的可分代数元.如果α在k上的极小多项式是可分的.*

注：多项式可分$\Longleftrightarrow$它无重根；

Proposition 3.8. 域的代数扩张K/k是可分的$\Longleftrightarrow$ K中的每个元素均是k上的可分代数元.特别地，对于有限扩张K/k有：K/k可分$\Longleftrightarrow$ $K=k(\alpha_1\cdots\alpha_n),\alpha_1\cdots\alpha_n\in K$为$k$上的可分代数元.

正规闭包

回忆一下正规扩张，$K/k,K=k(\alpha),\alpha\in K$单代数扩张，$\alpha$在$k$上的极小多项式为：

$$P_\alpha(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n),\quad \alpha_1=\alpha\in K$$

记E为$P_\alpha(x)$在k上的分裂域（$\subset k^a$）,则E是k^a中包含$k(\alpha)$的最小正规扩域,称E是$k(\alpha)/k$的一个正规闭包.

由于K/k是正规扩张，从而在K上完全分裂，$\tau(\alpha)\in E,E/k$正规，$\tau|_K=\sigma\Rightarrow\tau(\alpha)=\sigma(\alpha)=\alpha_i$,对某个$i\in\{1\cdots n\}$,即有下图：

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\tau"] & k^a \\
K=k(\alpha) \arrow[u] \arrow[ur, "\sigma"] & \\
k \arrow[u] \arrow[uur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

一般地，任一个代数扩张K/k在k^a中均有一个正规闭包k',即：（1）k'/k是正规的（$k'\subset k^a$）;(2)设$E\subset k^a,E/k$是正规的，且$E\supset K$,则$E\supset K'$.

Theorem 3.12. 本原元（*primtive element*）

设K/k是域的有限扩张，则：K是k的单代数扩张$\Longleftrightarrow$ K/k只有有限个中间域.特别地,域的有限可分扩张必是单代数扩张，此时$K=k(\alpha),\alpha$称为K/k的一个本原元.

证明. (1)"$\Leftarrow$"(充分性)若k是有限域，则由K/k是有限扩张$\Rightarrow$ K是有限域，则K^*是循环群，记$K^*=<\alpha>,\alpha\in K,\alpha\neq\{0\}$,从而推出$K=k(\alpha)$.则$K$为单扩张.

若k是无限域，设K/k只有有限多个中间域，由于K/k是有限扩张，不妨$K=k(\alpha,\beta)$.对任意的$c\in k^*$,有中间域:

$$E_c=k(\alpha+c\beta),$$

由所设K/k只有有限个中间域，但$c\in k^*$是无限的，从而有$c_1,c_2\in k^*,c_1\neq c_2$,使得$k(\alpha+c_1\beta)=k(\alpha+c_2\beta)\overset{\triangle}{=}E$.于是$\alpha+c_1\beta,\alpha+c_2\beta\in E$,从而推出$(c_1-c_2)\beta\in E$.又由于$c_1\neq c_2\Rightarrow c_1-c_2\neq 0\Rightarrow\frac{1}{(c_1-c_2)}(c_1-c_2)\beta\in E$.即$\beta\in E$,进而我们有$\alpha=(\alpha+c_1\beta)-c_1\beta\in E$.即

$$K=k(\alpha,\beta)\subset E\subset K,$$

故$K=E=k(\alpha+c\beta)$.

"$\Rightarrow$"(必要性)设$K=k(\alpha)$是k的一个单代数扩张，设$P_\alpha(x)$为α在k上的极小多项式，记$S=\{$中间域$E:k\subset E\subset K\}$,对每个$E\in S,\alpha$也是E上的代数元，记α在E上的极小多项式为$P_{\alpha,E}(x)$，则显然有$P_{\alpha,E}(x)|P_\alpha(x)$,(因为$P_\alpha(x)$也是$E$上的多项式，且$P_\alpha(\alpha)=0$.)

记$T=\{P_{\alpha,E}(x):E\in S\}$,则$\#T<+\infty$.令：

$$\phi:S\rightarrow T\quad E\mapsto P_{\alpha,E}(x).$$

下证：ϕ是一个单射.

对于$P_{\alpha,E}(x)\in T,(E\in S)$,令$F$为$k$上添加$P_{\alpha,E}(x)$的全部系数所得的扩域，则$k\subset F\subset E$.此时$P_{\alpha,E}(x)\in F(X)$,且为$F$上不可约多项式.

又显然$K=k(\alpha)=E(\alpha)=F(\alpha)\Rightarrow[K:E]=degP_{\alpha,E}(x);[K:F]=degP_{\alpha,E}(x)$,从而推出$[K:E]=[K:F]$,又由于$F\subset E$,即可得到$E=F$.由此可知$\phi$是一个单射.

故有$\#S\leq\#T<+\infty$,即S是一个有限集，从而K/k中的中间域只有有限个. □

（2）下证：域的有限可分扩张必是单代数扩张，$\#k=+\infty$.

证明. 证法一（书上），设$[K:k]=n$,不妨设$K=k(\alpha,\beta),(\alpha,\beta\in K)$,由所设$[K:k]_s=n$,取$k$的代数闭包$k^a$,使得$k^a\subset K$.此时$K$到$k^a$共有$n$个不同的$k$-嵌入$\sigma_1\cdots\sigma_n$.即：

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\sigma_i"] & k^a \\ k \arrow[u] \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$

令$f(x)=\prod_{1\leq i\neq j\leq n}\{(\sigma_i\alpha+x\sigma_i\beta)-(\sigma_j\alpha+x\sigma_j\beta)\}$,则$f(x)\neq 0$.(不是零多项式)

假若不然，则有上述$i,j,i\neq j$,使得$\sigma_i\alpha+x\sigma_i\beta=\sigma_j\alpha+x\sigma_j\beta$,即满足$\sigma_i\alpha=\sigma_j\alpha,\sigma_i\beta=\sigma_j\beta$,从而对于$\sigma_i,\sigma_j:K\rightarrow k^a$,我们得到：$\sigma_i=\sigma_j$,与所设矛盾，故$f(x)\neq 0$.

设$f(x)$在k^a中至多有有限个根（零点），故在k中也只有有限个零点.但$\#k=+\infty$.，从而存在$c\in k^*$,使得$f(c)\neq 0$.于是$(\sigma_i\alpha+c\sigma_i\beta)-(\sigma_j\alpha+c\sigma_j\beta)\neq 0$,也即$\sigma_i\alpha+c\sigma_i\beta\neq\sigma_j\alpha+c\sigma_j\beta,(i\neq j)$.注意到$\sigma_i\alpha+c\sigma_i\beta=\sigma_i(\alpha+c\beta),(i=1\cdots n)$,而$\sigma_i$是$K$到$k^a$的$k$-嵌入，故$\sigma_i(\alpha+c\beta)$均是$\alpha+c\beta$的$k$-共轭元，从而推出$[k(\alpha+c\beta):k]_s\geq n$.

另一方面，$k(\alpha+c\beta)\subset K$,即有：

$$n=[K:k]=[K;k]_s\geq[k(\alpha+c\beta):k]=[k(\alpha+c\beta):k]_s\geq n,$$

故有，$K=k(\alpha+c\beta)$. □

证明. 证法二（构造法）把满足上面条件的c找出

不妨设$K=k(\alpha,\beta)$,取定k的一个代数闭包k^a,使得$k^a\subset K$,分别设α,β在k^a中的全部共轭元为$\alpha=\alpha_1\cdots\alpha_m,\beta=\beta_1\cdots\beta_n$,令

$$S=\{\frac{\alpha_i-\alpha_j}{\beta_l-\beta_k}|1\leq i\neq j\leq m,1\leq l\neq k\leq n\},$$

显然S是一个有限集.

由所设，k是一个无限域，故有$c\in k^*$,使得$c\notin S$,又设$f(x),g(x)\in k[X]$是α,β在k上的极小多项式，记$r=\alpha+c\beta=\alpha_1+c\beta_1\in K$,令$h(x)=f(r-cx)$,则$h(x)\in k[r][X]\subset K[X]$,则$h(\beta_1)=f(r-c\beta_1)=f(\alpha_1)=0$,可以推出$\beta_1$是$h(x)$的一个根，又$\beta_1$也是$g(x)$的一个根，而$h(\beta_j)\neq 0,(j=$

$2\cdots n$),若不然，$h(\beta_j)=0\Rightarrow f(r-c\beta_j)=0$,而$f(x)$的根为$\alpha_1\cdots\alpha_m$,进而有$r-c\beta_j=\alpha_i$,对某个$i=1\cdots m$,即

$$\alpha_1+c\beta_1-c\beta_j=\alpha_i\Rightarrow\alpha_1-\alpha_i=c(\beta_j-\beta_1)\Rightarrow c=\frac{\alpha_1-\alpha_i}{\beta_j-\beta_1}\Rightarrow c\in S,$$

矛盾!

由于$g(x),h(x)\in k[r][X]$,且由上述讨论可知，$g(x),h(x)$的最大公因式为$(x-\beta_1)$,即$(g(x),h(x))=x-\beta_1$,由辗转相除法可知：$x-\beta_1\in k[r][X]\Rightarrow\beta=\beta_1\in k[r]$,又由于$r=\alpha+c\beta\Rightarrow\alpha=r-c\beta\in k[r]\Rightarrow k(\alpha,\beta)=K\subset k[r]\subset K$,故

$$K=k(r)=k(\alpha,\beta).$$

□

Example 3.2. $K=Q(\sqrt{-1},\sqrt{-2})=Q(r)$,求$r$.

解：由于$K=Q(\sqrt{-1})(\sqrt{-2})$,而$\sqrt{-1}$的$Q$-共轭元为$\pm\sqrt{-1}$,$\sqrt{2}$的$Q$-共轭元为$\pm\sqrt{2}$,$[Q(\sqrt{-1}):Q]=2$,$[Q(\sqrt{-1})(\sqrt{-2}):Q(\sqrt{-1})]=2$.(这是由于$\sqrt{-2}\notin Q(\sqrt{-1})$,如若不然$\sqrt{-2}=a+b\sqrt{-1}$,$a,b\in Q\Rightarrow 2=a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}$.左边属于$Q$,右边属于$C$,但不属于$Q$,从而矛盾,故$\sqrt{-2}\notin Q(\sqrt{-1})$,$\Rightarrow[Q(\sqrt{-1})(\sqrt{-2}):Q(\sqrt{-1})]=2$.)故有$[K:Q]=4$.

K/Q是有限可分，故有本原元,从而有：

$$S=\{\pm\frac{\sqrt{-1}-(-\sqrt{-1})}{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}\}=\{\pm\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\}.$$

取$c=1$即满足条件.即有：

$$Q(\sqrt{-1})(\sqrt{-2})=Q(\sqrt{-1}+\sqrt{2}).$$

3.7 有限域

设k是一个有限域，此时k的特征$char(k)=p$,(p为素数)即为p元域，$F_p\subset k$.换言之F_p是k的素子域,显然，k/F_p是有限扩张（即有限域的有限扩张）.

不妨设$[k;F_p]=n,\Rightarrow k=|F_p|^n=p^n$,记$k=F_q,F_q=p^n$.取$k$的一个代数闭包$k^a$,则$G=F_q^*$是一个$q-1$阶循环群，可以推出存在$\alpha\in F_q^*$,有$\alpha^{q-1}=1\Rightarrow\alpha^q=\alpha$(任意$\alpha\in F_q$).即$\alpha$是多项式$x^{q-1}-1$在$k^a$中的一个根.

$k=F_q\subset\{x^q-x$在k^a中的根$\}.\Rightarrow q=\#k\leq\#\{x^q-x$在$k^a$中的根$\}\leq q$,从而有$k=\{x^q-x$在$k^a$中的根$\}$,且$x^q-x$在$k$中是可分的，由于$f(x)=x^q-x\Rightarrow f'(x)=qx^{q-1}-1=-1,(f(x),f'(x))=1$.

设K,k均为有限域，且$k\subset K$,记$char(k)=p$,(p为素数)，由前述讨论可知：$\#k=p^m,\#K=p^n,(m,n\in Z_{\geq1})$.记$[K;k]=r\in Z_{\geq1}$,则$p^n=|K|=|k|^r=(p^m)^r\Rightarrow n=mr\Rightarrow m|n$.即若有限域有包含关系，其指数定有整除关系.

事实上，设K,k均为有限域，且$k\subset K$，则K/k是一个可分的单代数扩张.由于$|k|=p^m,|K|=p^n$. $\Rightarrow k=\{x^{p^m}-x$在$k^a$中的全部根$\}=x^{p^m}-x$在$F_q$上的分裂域,$\Rightarrow k/F_q$也是正规扩张$\Rightarrow K/k$也是正规扩张，即有：

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & k^a \\
k \arrow[u] \arrow[ur, "\sigma"] & \\
F_q \arrow[u] \arrow[uur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

设$char(k)=p$,(p为素数).令：

$$\phi: k\to k \quad \alpha\mapsto\alpha^p,$$

则$\phi\in Aut_{F_p}(k)$是k到自身的一个自同构.

由于任意$\alpha,\beta\in k$,有：

$$\phi(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^p=\alpha^p+\beta^p=\phi(\alpha)+\phi(\beta),$$

且满足：

$$\phi(\alpha\beta)=(\alpha\beta)^p=\alpha^p\beta^p=\phi(\alpha)\phi(\beta),$$

ϕ是一个域同态，又由于其是$x^{p^m}-x$在F_p上的分裂域，ϕ是自同构，即$\phi\in Aut(k)$.

Definition 3.13. 称上述映射$\phi:k\to k$为k上的$Frobenious$自同构，记为$Frob_k$.

事实：ϕ是k到自身的F_p-自同构，任意的$\alpha\in F_p\Rightarrow\phi(\alpha)=\alpha^p=\alpha$.易知$Aut_{F_p}(k)$关于映射的合成是一个群.

首先有$\#Aut_{F_p}(k)=[k:F_p]=m,\phi\in Aut_{F_p}(k)=\{\sigma:\sigma$是$k$到自身的$F_p$-自同构$\}$.任意的$\alpha\in k$,

$$\phi(\alpha)=\alpha^p,$$

$$\phi^2(\alpha)=\phi(\phi(\alpha))=\phi(\alpha^p)=\phi(\alpha)^p=\alpha^{p^2},$$

即有:

$$\phi^r(\alpha)=\alpha^{p^r},$$

特别地，

$$\phi^m(\alpha)=\alpha^{p^m}=\alpha,(\alpha\in k)$$

即$\phi^m=id.\Rightarrow\circ(\phi)|m$.

又记$\circ(\phi)=r$,则$\phi^r=id$.于是任意的$\alpha\in k$,有$\phi^r=\alpha=id(\alpha)\Rightarrow\alpha^{p^r}=\alpha\Rightarrow k\subset\{x^{p^r}-x$在$k^a$中的全部根$\}$.

进而有$p^m\le p^r\Rightarrow m\le r|m\Rightarrow r=\circ(\phi)=m\Rightarrow Aut_{F_p}(k)=<\phi>=<Frob_{F_p}>$.

故$Aut_{F_p}(k)$是由$Frobenious$元生成的m阶循环群.

一般地，对于有限域扩张K/k,$char(k)=p$,(p为素数)，$Aut_k(K)=<Frob_K>=<\phi_K>$.

$$Frob_K : K \to K \quad \alpha \mapsto \alpha^{p^m} = \alpha^{|k|},$$

且有$\circ(\phi_K) = \#Aut_k(K) = [K : k] = \frac{n}{m}$.

故$Aut_k(K)$是一个$[K : k]$阶循环群.

3.8 不可分扩张

设 $K|k$ 是单代数扩张, $K = k(\alpha)$, α在k上极小多项式为$f(x) \in k[x]$. 设$deg(f) = n$,则$\{1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1}\}$ 是K的一组$k-$基,$K = k(\alpha) = k[\alpha]$.

取定k的代数闭包k^a,设$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$是$f(x)$在$k^a$中的全部互异根，$\alpha_i$的重数记为$r_i$, 则在$k^a$中，有

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} \cdots (x - \alpha_m)^{r_m},$$

其中$m = [K : k]_s$(可分次数)。K到k^a的$k-$嵌入共有m个，分别记为$\sigma_1, \cdots, \sigma_m$,取定$\alpha = \alpha_1$,不妨设$\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$,将$\sigma_i$延拓为$k^a$上的一个$k-$自同构，记之为$\tau_i$,于是有 $\tau_i|_K = \sigma_i$,

$$\tau_i(f(x)) = (x - \tau_i(\alpha_1))^{r_1} \cdots (x - \tau_i(\alpha_m))^{r_m},$$

即

$$\begin{aligned}
&(x - \alpha_1)^{r_1} \cdots (x - \alpha_i)^{r_i} \cdots (x - \alpha_m)^{r_m} \\
&= (x - \alpha_i)^{r_1} \cdots (x - \tau_i(\alpha_m))^{r_m}
\end{aligned}$$

由此可得$r_i = r_1 (i = 1, \cdots, m)$.即极小多项式的所有根在代数闭包$k^a$中有相同的重数。特征为零的域上不可约多项式无重根.因此若f有重根，则$char(k) = p$，其中p为某一素数。同时注意到由于f有重根，故$(f, f^{'}) \neq 1$,但由于f不可约且 $deg(f^{'}) < deg(f)$,$f^{'}$只能为零，这就说明f是形如$f(x) = g(x^p)$的多项式(其中$g(x) \in k[x]$,且由于$f(x)$为$k[x]$中不可约多项式，$g(x)$也是$k[x]$中不可约多项式.). 于是α^p是$g(x)$的一个根。重复上述过程，最终，我们可以找到最小的整数$r \geq 0$，使得α^{p^r}是$k[x]$中一个可分不可约多项式$h(x)$的根，且

$$f(x) = h(x^{p^r}).$$

设$h(x)$在k^a中的分解为$h(x) = (x - \beta_1) \cdots (x - \beta_s)$, 令$\gamma_i \in k^a (i = 1, \cdots, s)$使得$\gamma_i^{p^r} = \beta_i$, 设$t = r_1 = \cdots = r_m$ 则

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x - \alpha_1)^t \cdots (x - \alpha_m)^t \\
&= (x^{p^r} - \gamma_1^{p^r}) \cdots (x^{p^r} - \gamma_s^{p^r}) \\
&= (x - \gamma_1)^{p^r} \cdots (x - \gamma_s)^{p^r}
\end{aligned}$$

由一元多项式分解的唯一性知$m = s, t = p^r$.

于是

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{p^r} \cdots (x - \alpha_s)^{p^r}.$$

由

$$[k(\alpha):k] = deg(f) = s\cdot p^r = [k(\alpha):k]_s\cdot p^r$$

知$[k(\alpha):k]_s|[k(\alpha):k]$,它们的商$\frac{[k(\alpha):k]}{[k(\alpha):k]_s} = p^r$称为$k(\alpha)|k$的**不可分次数**,记之为$[k(\alpha):k]_i$.
令$\beta = \alpha^{p^r}$,则$h(\beta) = h(\alpha^{p^r}) = f(\alpha) = 0$,由于$h(x)$是首一不可约多项式，于是$h(x)$是$\beta$在$k[x]$上的极小多项式.因$h(x)$无重根，$[k(\alpha^{p^r}):k] = [k(\alpha^{p^r}):k]_s = deg(h(x)) = s$. 由域扩张的次数传递公式知$[k(\alpha):k(\alpha^{p^r})] = \frac{n}{[k(\alpha^{p^r}):k]} = \frac{n}{s} = p^r$.同样可得到

$$[k(\alpha):k(\alpha^{p^r})]_s = \frac{[k(\alpha):k]_s}{[k(\alpha^{p^r}):k]_s} = \frac{s}{s} = 1.$$

于是$[k(\alpha):k(\alpha^{p^r})]_i = p^r$. 注意到$k(\alpha) = k(\alpha^{p^r})(\alpha)$,令$a = \alpha^{p^r}\in k(\alpha^{p^r})$, 则$x^{p^r}-a$是$\alpha$在$k(\alpha^{p^r})$上的极小多项式，该极小多项式只有一个根$\alpha$且重数为$p^r$.

Definition 3.14. 设k是域，$char(k) = p > 0$, k^a是k的一个代数闭包，设$\alpha\in k^a$,如果有$r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$使得 $\alpha^{p^r}\in k$,则称α为k上的**一个纯不可分元。**

Proposition 3.9. 设K/k是一个代数扩张，$char(k) = p > 0$,则下列陈述等价:
(i)$[K:k]_s = 1$.
(ii)K中任一元素均是k上纯不可分元。
*(iii)*对$\forall\alpha\in K$, α在k上的极小多项式均形如$x^{p^r}-a, a\in k, r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.
(iv)K是在k上添加若干个纯不可分元生成。
称满足上述命题中等价条件的域扩张K/k为**一个纯不可分扩张。**

证明. $(i)\Rightarrow(ii)$任取$\alpha\in K$,由$[k(\alpha):k]_s|[K:k]_s = 1$知 $[k(\alpha):k]_s = 1$,由此知α在k上极小多项式必形如 $x^{p^r}-a\in k[x]$,由此$\alpha^{p^r}\in k$,即α是k上纯不可分元。
$(ii)\Rightarrow(iii)$设$\alpha\in K$是k上的纯不可分元，即有$\exists r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, x^{p^r}-a\in k[x]$,使得$\alpha^{p^r} = a\in k$,不妨设$r$是满足该条件的最小的非负整数，令$f(x) = Irr(\alpha,k,x)$为$\alpha$在$k$上的不可约多项式(极小多项式)，则$f(x)|x^{p^r}-a$. 由于

$$x^{p^r}-a = x^{p^r}-\alpha^{p^r} = (x-\alpha)^{p^r},$$

$f(x) = (x-\alpha)^m$,其中$m = p^st\leq p^r, s\leq r, p\nmid t$.对$f(x)$进行二项式展开，

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)^{p^st} \\ &= (x^{p^s}-\alpha^{p^s})^t \\ &= x^{p^st} - t\cdot\alpha^{p^s}x^{p^s(t-1)} + \cdots + (-1)^t\alpha^{p^st}\in k[x], \end{aligned}$$

因此$t\cdot\alpha^{p^s}\in k$,由$p\nmid t$,而$char(k) = p$得到t在k中可逆，于是$\alpha^{p^s} = b\in k$.由r的极小性得到$r\leq s$.又由上面知$s\leq r$,因此$r = s, t = 1$.即 $f(x) = x^{p^r}-a$.即$x^{p^r}-a$是α在k上的不可约多项式。
$(iii)\Rightarrow(iv)$显然地.
$(iv)\Rightarrow(i)$任取K到k的某一代数闭包$\bar{F}$的 $k-$嵌入，设K由在k上纯不可分元$\{\alpha_i\}_{i\in I}$生成，则

$$f_i(X) = Irr(\alpha_i,k,X)$$

是α_i在k上的极小多项式，由于α_i是纯不可分元, 存在$r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a \in k$使得$\alpha_i^{p^r} = a_i \in k$，因此$f_i(X)|(X^{p^r} - a_i)$,即$f(X)$只有唯一根$\alpha_i$,任意$K$到$\bar{F}$的$k$嵌入$\tau$把元素映到其共轭元，但任意$\alpha_i$的共轭元只有自身,于是$\tau$是恒等映射,即$[K:k]_s = 1$. □

Proposition 3.10. 设$K|k$是一个代数扩张，K_0为K中所有在k上可分的代数扩张的合，则$K_0|k$是可分扩张，$K|K_0$是纯不可分的。也称K_0为k在K中的可分闭包。

证明. $K|k$的可分子扩张的复合仍是可分扩张，于是$K_0|k$是可分扩张；若$char(k) = 0$,则显然$K_0 = K$,若$char(k) = p$,则任给$\alpha \in K$,存在非负整数n使得α^{p^n}在k上可分的，于是$\alpha^{p^n} \in K_0$,即$K|K_0$是纯不可分扩张。 □

Corollary 3.3. 对于上述命题中$K|k$为有限扩张的情形,有

$$[K:k]_s = [K_0:k],$$
$$[K:k]_i = [K:K_0].$$

证明.

$$\begin{aligned}[K:k]_s &= [K:K_0]_s \cdot [K_0:k]_s \\ &= 1 \cdot [K_0:k]_s \\ &= [K_0:k].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[K:k]_i &= [K:K_0]_i \cdot [K_0:k]_i \\ &= [K:K_0]_i \cdot 1 \\ &= [K:K_0].\end{aligned}$$

□

Corollary 3.4. 设$K|k$是域的正规扩张，K_0是k在K中的可分闭包，则$K_0|k$也是正规扩张。

证明. 设k^a是k的一个代数闭包，任取K_0到k^a的一个$k-$嵌入σ,下面证明$\sigma(K_0) = K_0$,从而$K^0|k$是正规扩张.

σ可延拓到K上，记为$\tau: K \to k^a$.由于$K|k$是正规扩张，$\tau(K) = K$.任取$\alpha \in K_0$, α在k上极小多项式$P_\alpha(X) \in k[X]$无重根,而$\tau(\alpha) = \sigma(\alpha)$在$k$上极小多项式也是$P_\alpha(X)$，于是$\tau(\alpha)$在$k$上也可分，从而$\tau(\alpha) \in K_0$,即$\tau(K_0) \subseteq K_0 \Rightarrow \sigma(K_0) = K_0$. □

Corollary 3.5. 设$E|k$是域的一个有限扩张，$p = char(k) > 0$,若$E^p \cdot k = E$,则$E|k$是可分的。反之，如果$E|k$是可分，则$E^{p^r}k = E(\forall r \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$.

证明. $\Rightarrow$:设E_0是k在E中的极大可分扩张，$E|k$是有限扩张，因此对$\forall \alpha \in E$,存在固定的$m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$使得$\alpha^{p^m} \in E_0$,于是$E^{p^m} \subseteq E_0$.

另一方面，

$$
\begin{aligned}
E^pk &= E \\
&\Rightarrow E^p = (E^pk)^p = E^{p^2}k^p \\
&\Rightarrow E^{p^2}k^{p+1} = E^pk = E \\
&\Rightarrow E^{p^2}k \supseteq E^{p^2}k^{p+1} = E \supseteq E^{p^2}k \\
&\Rightarrow E = E^{p^2}k
\end{aligned}
$$

如此归纳下去便得到$E = E^{p^n}k(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$, 但$E^{p^m}k \subseteq E_0k = E_0$,于是$E \subseteq E_0 \subseteq E$,即$E_0 = E$, $E|k$是可分的。

$\Leftarrow$:设$E|k$可分，则$E|E^pk$是可分.又对任意$\alpha \in E$,有$\alpha^p \in E^p \subseteq E^pk$，于是$E|E^pk$是纯不可分的.故$E = E^pk$.由上面证明可得对任意$r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, E^{p^r} \cdot k = E$. □

Proposition 3.11. 设$K|k$是域的一个正规扩张，令$G = Aut_k(K)$是K到自身的$k-$自同构，又记

$$K^G = \{\alpha \in K|\sigma(\alpha) = \alpha, \forall \sigma \in G\}.$$

则K^G是$K|k$的中间域，且$K^G|k$是纯不可分的，$K|K^G$是可分的。又设K_0是k在K中的可分闭包，则$K_0K^G = K, K_0 \cap K^G = k$.

证明. 任取$\sigma \in Aut_k(K), \sigma|_k = id$,于是$k \subseteq K^G$,即$K^G$是$K|k$的中间域。

(1)下证$K^G|k$是纯不可分的。

为此，任取$\alpha \in K^G$,取定k的一个代数闭包k^a，使得$k^a \supseteq k$. 任取$k(\alpha)$到k^a的$k-$嵌入$\sigma : k(\alpha) \to k^a$，将$\sigma$延拓到$K$上，记之为$\tau : K \to k^a$.由所设$K|k$是正规扩张，则$\tau(K) = K$.即$\tau$是一个$K$到自身的$k-$嵌入，于是$\tau \in G$, $\sigma(\alpha) = \tau(\alpha) = \alpha(\forall \alpha \in K^G)$. 这就说明$\sigma = id$,即$k(\alpha)$到自身的$k-$嵌入只有唯一的恒等映射。从而$[k(\alpha) : k]_s = 1$，$\alpha$是$k$上的纯不可分元，令$\alpha$跑遍$K^G$可得$K^G|k$是纯不可分扩张。

(2)证明$K|K^G$是可分的，方法用$Serge\ Lang : Algebra.P_{264}$Artin定理的证明。

(3)若K_0是k在K中的可分闭包，则$K_0|k$是可分的，于是 $K_0 \cap K^G|k$是可分的，又由于$K^G|k$是纯不可分的，于是 $K_0 \cap K^G|k$是纯不可分的.综上，$K_0 \cap K^G = k$.

(4)由$K|K^G$是可分的，$K|(K^G \cdot K_0)$也是可分的，又因 K_0是k在K中的可分闭包，故$K|(K^GK_0)$是纯不可分的，于是 $K = K^GK_0$. □

Example 3.3. *(1)设p是素数，p元域$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$中，任意$\alpha \in \mathbb{F}_p, \alpha^p = \alpha$,于是$\mathbb{F}_p^p = \mathbb{F}_p$.*
(2)$F = \mathbb{F}_p[x]$中，因x不能表示出某个多项式的p 次方,故$F^p \neq F$.

Definition 3.15. 设k是一个域，
(1)当$char(k) = 0$时，称k是一个$perfect$域。
(2)当$char(k) = p > 0$时，如果$k^p = k$,则称k是一个$perfect$域。

Corollary 3.6. 设k是一个$perfect$ 域，则k的任意代数扩张都是可分扩张，k的任意代数扩张都是$perfect$.

证明. 设$K|k$是域的代数扩张，任取$\alpha \in K$,设E是$k(\alpha)|k$在K中的正规闭包，记$G = Aut_k(E)$,则$E^G|k$是纯不可分的.

对于任意$\beta \in E^G$有$\beta^{p^r} \in k$，即$\beta^{p^r} = a \in k$. 由于k是perfect,有$b \in k$使得$a = b^p$,于是$\beta^{p^{r-1}} = b \in k$,继续下去可得到$\beta \in k$,于是$E^G \subseteq k$，但又因 $E^G \supseteq k$,故$E^G = k$。这就得到$E|k$是可分的，α 在k上是可分的，由于α是任意的，于是$K|k$是可分扩张.

□

4 Galois理论

4.1 有限Galois理论

设$K|k$是域的一个代数扩张，令$G = Gal(K|k) = Aut_k(K)$,则G是一个群，称为$K|k$的Galois群。任取$H \leq G$(子群),令

$$K^H = \{\alpha \in K|\sigma(\alpha) = \alpha, \forall \sigma \in H\},$$

结论:$k \subseteq K^H \subseteq K, K^H$是一个域。
证:任取$\alpha, \beta \in K^H$,对任意$\sigma \in H, \sigma(\alpha) = \alpha, \sigma(\beta) = \beta$,于是

$$\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta) = \alpha + \beta \Longrightarrow \alpha + \beta \in K^H$$
$$\sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta) = \alpha\beta \Longrightarrow \alpha\beta \in K^H$$

若$\alpha \in K^H$,设$\beta = \alpha^{-1} \in K$, 由$\alpha\beta = 1$,得$\sigma(\alpha)\sigma(\beta) = \alpha\beta = 1$.于是$\sigma(\beta) = \beta$，即$\beta \in K^H$.综上，$K^H$是一个域。

Definition 4.1. *设$K|k$是一个域的代数扩张，如果$K|k$既是可分的，也同时是正规的，则称$K|k$是一个 Galois扩张。*

设$K|k$是一个n次$Galois$扩张，$n = [K : k]$.则$|Gal(K|k)| = [K : k]_s = [K : k]$.

Theorem 4.1. *（**Artin**）设k是一个域，$G \subseteq Aut(K)$是一个有限子群，令$k = K^G$,则$K|k$是一个$Galois$扩张，且其$Galois$群为$Gal(K|k) = G$.*

证明. 任取$\alpha \in K$,设α的$G-$轨道为

$$G \cdot \alpha = \{\sigma_1\alpha, \sigma_2\alpha, \cdots, \sigma_r\alpha\}.$$

不妨设$\sigma_1 = id$,显然,对任意$\tau \in G, \tau G\alpha = G\alpha$,即

$$\{\tau\sigma_1\alpha, \tau\sigma_2\alpha, \cdots, \tau\sigma_r\alpha\}.$$

令$f(x)=(x-\sigma_1\alpha)\cdots(x-\sigma_r\alpha)$, 则

$$\begin{aligned}f^{\tau}(x)&=(x-\tau\sigma_1\alpha)\cdots(x-\tau\sigma_r\alpha)\\&=f(x)\end{aligned}$$

这就说明$f(x)\in K^G[x]=k[x]$.显然，由于$\sigma_1=id, f(\alpha)=0$. 而$\sigma_1\alpha,\cdots,\sigma_r\alpha$两两不同，故$f(x)$无重根，即可分。从而$\alpha$是$k$上的可分元，由$\alpha$的任意性，$K|k$是可分的。

又设α在k上的极小多项式为$P_\alpha(x)$,则$P_\alpha|f(x)$,于是α的$k-$共轭元必属于$\{\sigma_1\alpha,\cdots,\sigma_r\alpha\}\subseteq K$,于是$\sigma(K)\subseteq K$,即$K|k$是正规扩张.综上，$K|k$是$Galois$扩张.

下证$Gal(K|k)=G$.设$|G|=n$,首先由定义易知$G\subseteq Gal(K|k)$. 又由上述证明可知，对任意$\alpha\in K$,有

$$[k(\alpha):k]=degP_\alpha(x)\leq degf(x)\leq|G|=n,$$

由此下述引理可证得$[K:k]\leq n$.于是$|Gal(K|k)|\leq n$.综上，$Gal(K|k)=G$. □

Lemma 4.1. *设$E|k$是可分代数扩张，若存在固定地正整数n使得对任意 $\alpha\in E,[k(\alpha):k]\leq n$.则$E|k$是有限扩张，且$[E:k]\leq n$.*

证明. 不妨设m是k的单代数扩张的最大次数，即有$\alpha\in K$,使得 $[k(\alpha):k]=m$,且$\forall\beta\in K,[k(\beta):k]\leq m$. 下面说明$K=k(\alpha)$。
若不然，存在$\beta\in K-k(\alpha)$,由本原元定理，存在$\gamma\in K$使得$k(\alpha,\beta)=k(\gamma)$.于是

$$k\subseteq k(\alpha)\subsetneqq k(\alpha)(\beta)=k(\gamma).$$

由$k(\gamma)|k$是单代数扩张，$[k(\gamma):k]\leq m$,这与$k(\alpha)\subsetneqq k(\gamma)$矛盾！故$K=k(\alpha)$,进而$[K:k]=m\leq n$. □

Lemma 4.2. *设$K|k$是Galois扩张，$G=Gal(K|k)$,则$K^G=k$.*

证明. 显然，$k\subseteq K^G$.下证$K^G\subseteq k$.

对任意$\alpha\in K^G$,任取$k(\alpha)$到K的一个$k-$嵌入，则σ可延拓为$k-$嵌入$\tau:K\to K$, 即$\tau\in G,\tau|_{k(\alpha)}=\sigma$.由所设 $\sigma(\alpha)=\tau(\alpha)=\alpha(\forall\alpha)\in K^G$.于是$\sigma=id$.由$k(\alpha)|k$是可分扩张，$[k(\alpha):k]=[k(\alpha):k]_s=1$.即$k(\alpha)=k$,由于$\alpha\in K^G$是任意，故$K^G\subseteq k$.综上，$K^G=k$. □

Theorem 4.2. ***Galois理论基本定理***(有限扩张情形).*设$K|k$是域的n次$Galois$扩张,其$Galois$群为$G=Gal(K|k)$,用S表示所有k和K的中间域组成的集合，J表示G的所有子群组成的集合。令*

$$\begin{aligned}\phi:&S\to J\\&E\mapsto Gal(K|E)\end{aligned}$$

则(1)ϕ是一个双射，特别地，$K^{Gal(K|k)}=k$.
(2)设$k\subseteq E_1\subseteq E_2\subseteq K$,则对应地，有$\phi(E_1)\supseteq\phi(E_2)$.反之，如果 $1\leq H_1\leq H_2\leq G$,则$\phi^{-1}(H_1)\supseteq\phi^{-1}(H_2)$,
(3)对于中间域$E,k\subseteq E\subseteq K$, $E|k$是$Galois$扩张当且仅当$\phi(E)\lhd G$,此时

$$Gal(E|k)\cong G/\phi(E)\cong G/Gal(K|E).$$

*(4)*设有中间域$k\subseteq E_i\subseteq K(i=1,2)$，则

$$\phi(E_1\cap E_2)=<\phi_(E_1)\cup\phi(E_2)>$$
$$\phi(E_1E_2)=\phi(E_1)\cap\phi(E_2)$$

*(5)*设中间域$k\subseteq E_1\subseteq E_2\subseteq K$,则 $E_2|E_1$是$Galois$的当且仅当$\phi(E_2)\lhd\phi(E_1)$.此时有

$$Gal(E_2|E_1)\cong\phi(E_1)/\phi(E_2)=Gal(K|E_1)/Gal(K|E_1).$$

证明. (1)任取$E\in S$,由于$K|k$是Galois扩张，$K|E$是Galois扩张，即$Gal(K|E)\in J$，从而ϕ是良定义的。

下证ϕ是单射。设对于中间域$k\subseteq E_i\subseteq bK(i=1,2)$,若有$\phi(E_1)=\phi(E_2)$,即

$$Gal(K|E_1)=Gal(K|E_2).$$

由上一引理得,$E_1=K^{Gal(K|E_1)}$, $E_2=K^{Gal(K|E_2)}$.由此$E_1=E_2$,即ϕ是单射.

下证ϕ是满射。任取$H\leq G$,令$E=K^H$,此时由$Artin$定理，$K|E$是Galois扩张，且$Gal(K|E)=H$,显然E是中间域，且$\phi(E)=H$.故ϕ是满射.

综上，ϕ是双射。

(2)若$k\subseteq E_1\subseteq E_2\subseteq K$, $\phi(E_1)=Gal(K|E_1),\phi(E_2)=Gal(K|E_2)$. 任取$\sigma\in Gal(K|E_2)$, 则$\sigma|_{E_2}=id$,从而$\sigma|_{E_1}=id$.于是$\sigma\in Gal(K|E_1)$.这便是$\phi(E_1)\supseteq\phi(E_2)$.

同样可得:若$1\leq H_1\leq H_2\leq G$,则$\phi^{-1}(H_1)\supseteq\phi^{-1}(H_2)$.

(3)若$k\subseteq E\subseteq K$,且$E|k$是正规的，令

$$\psi: Gal(K|k)\to Gal(E|k)$$
$$\sigma\mapsto\sigma|_E,$$

则显然ψ是群同态，下证ψ是满射.任取$\sigma\in Gal(E|k)$,将σ延拓为K到k的代数闭包k^a的$k-$嵌入τ,由于$K|k$是正规扩张，故$\tau(K)=K$,从而$\tau\in Gal(K|k)$,于是$\psi(\tau)=\sigma$,即ψ是满射。

另一方面,

$$ker(\psi)=\{\sigma\in Gal(K|k)|\psi(\sigma)=id\}\subseteq Gal(K|E).$$

又$\forall\sigma\in Gal(K|E)$,则$\psi(\sigma)=\sigma|_E=id$,于是$Gal(K|E)\subseteq Ker\psi$.故$Gal(K|E)=ker\psi$.此时，$Gal(K|E)$是$Gal(K|k)$的正规子群，且由群同态基本定理得

$$Gal(K|k)/Gal(K|E)\cong Gal(E|k).$$

反过来，若$E|k$不是正规扩张，则存在E到K的$k-$嵌入λ使得$\lambda E\neq E$,将λ延拓成K的$k-$子同构,仍记为λ(因$K|k$是正规扩张,$\lambda(K)=K$),于是

$$Gal(K|\lambda E)=\lambda Gal(K|E)\lambda^{-1}.$$

$Gal(K|\lambda E)$与$Gal(K|E)$共轭但不相同(因对应的中间域不同)，这就说明$Gal(K|E)$不是$Gal(K|k)$的正规子群。

(4)若中间域$k \subseteq E_i \subseteq K(i=1,2)$，则

$$\begin{aligned}
&E_1 \supseteq E_1 \cap E_2, E_2 \supseteq E_1 \cap E_2\\
\Rightarrow&\psi(E_1) \subseteq \psi(E_1 \cap E_2), \psi(E_2) \subseteq \psi(E_1 \cap E_2)\\
\Rightarrow& < \psi(E_1) \cup \psi(E_2) > \subseteq \psi(E_1 \cap E_2)
\end{aligned}$$

下证

$$\psi(E_1 \cap E_2) \subseteq \psi(E_1) \cup \psi(E_2) := H_0 = H_1 \cup H_2.$$

由于$H_0 \supseteq H_1, H_0 \supseteq H_2$,

$$\begin{aligned}
&K^{H_0} \subseteq K^{H_1}, K^{H_0} \subseteq K^{H_1}\\
&\Rightarrow H_0 \subseteq K^{H_1} \cap K^{H_2} = E_1 \cap E_2\\
&\Rightarrow H_0 \supseteq Gal(K|E_1 \cap E_2) = \psi(E_1 \cap E_2)\\
&\Rightarrow < \psi(E_1) \cup \psi(E_2) > \supseteq \psi(E_1 \cap E_2)\\
&\Rightarrow \psi(E_1 \cap E_2) = < \psi(E_1) \cup \psi(E_2) >
\end{aligned}$$

(5)这是(3)的直接推论：运用(3)于域扩张$E_1 \subseteq E_2 \subseteq K$. □

4.2 Galois理论的若干应用

4.2.1 关于多项式根式解的Galois定理

Example 4.1. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 7 \in \mathbb{Q}[x]$.
令$t = x^2$, $f(x) = 0 \Rightarrow t = \frac{6\pm\sqrt{8}}{2} = 3 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{2}}$.考虑下列域扩张

$$k := \mathbb{Q} \subseteq k_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq k_2 := \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3+\sqrt{2}}) \subseteq k_3 := \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3+\sqrt{2}})(\sqrt{3-\sqrt{2}})$$

则

$$k_3 = k_2(\sqrt{3-\sqrt{2}}), k_2 = k_2(\sqrt{3+\sqrt{2}}), k_1 = k(\sqrt{2}),$$
$$(\sqrt{3-\sqrt{2}})^2 \in k_2, (\sqrt{3+\sqrt{2}})^2 \in k_1, (\sqrt{2})^2 \in k = \mathbb{Q}.$$

Definition 4.2. 设k是一个域，$f(x) \in k[x]$,称f在k上**可根式解**：如果存在k的扩域序列

$$k \subseteq k_1 \subseteq \cdots \subseteq k_r$$

使得k_r包含f的分裂域，且k_r是k的一个根式扩张，即有

$$k_r = k(\alpha_1, \cdots, \alpha_r), k_i = k_{i-1}(\alpha_i),$$

且$\alpha_i^{n_i} \in k_{i-1}$对某一正整数$n_i$成立.

Definition 4.3. *设$K|k$是一个域扩张.如果有域扩张序列*

$$k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq \cdots \subseteq k_r = K$$

*及$n_1, \cdots, n_r \in \mathbb{Z}_{>0}$使得 $K = k(\alpha_1, \cdots, \alpha_r), k_i = k_{i-1}(\alpha_i)$且$\alpha_i^{n_i} \in k_{i-1}(i = 1, \cdots, r)$,则称$K$是$k$的一个根式扩张。若记$n = n_1 \cdots n_r$,则 $\alpha_i^n \in k_{i-1}$,此时称K是k的$n-$**根式扩张**(n不是唯一的).*

性质:设$K|E$和$E|k$均是根式扩张，则$K|k$也是根式扩张。

证明. 由$K|E$和$E|k$是根式扩张，有

$$k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq \cdots \subseteq k_r = E,$$

满足$k_i = k_{i-1}(\alpha_i), \alpha_i^n \in k_{i-1}$.

$$E = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_s = K,$$

满足$E_i = E_{i-1}(\beta_i), \beta_i^m \in E_{i-1}$.于是

$$k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq \cdots \subseteq k_r = E = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_s = K$$

就满足$K|k$的根式扩张的条件。即$K|k$是根式扩张。 □

Theorem 4.3. *设$K|k$是域的有限扩张，且L是$K|k$的一个正规闭包(选定k的一个代数闭包k^a).如果$K|k$是根式扩张，则$L|k$也是根式扩张.*

证明. 由$K|k$是有限扩张，则设$K = k(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$.对$r$用归纳法。

当$r = 1$时，简记$K = k(\alpha)$,因为L是$K|k$的正规闭包，故$L = k(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$,其中$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$是$\alpha$的全部$k-$共轭元。由所设，$K|k$是一个$n-$根式扩张，于是$\alpha^n = a \in k$(对某个$a \in k$),即$\alpha$是$k$上多项式$x^n - a$的一个根，于是$P_\alpha(x)|(x^n - a)$,故$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$都是$x^n - a$的根，即$\alpha_i^n = a \in k$. $L|k$是$n-$根式扩张。

现对于$K = k(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$,记$E = k(\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1})$,并设$E|k$的正规闭包为$L_1$,则由$E$是$k$的根式扩张，及归纳假设$L_1|k$也是根式扩张，又设$L$是$K|k$的正规闭包，则$L = L_1(\beta_1, \cdots, \beta_s)$,其中$\beta_1 = \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s$是$\alpha_r$的全部$k-$共轭元。

任取β_i,令

$$\sigma_i : k(\alpha_r) \to k^a$$
$$\alpha_r \mapsto \beta_i$$

则σ_i是$k(\alpha_r)$到k^a的一个$k-$嵌入，σ可延拓成L到k^a的一个$k-$嵌入τ_i，由所设$K|k$是根式扩张，而$K = E(\alpha_r)$,于是 $\alpha_r^n = \gamma \in E$对于某一$n \in \mathbb{Z}_{>0}$成立。由于$E \subseteq L_1$，而$L_1$是一正规闭包，故

$$(\tau_i(\alpha_r))^n = \tau_i(\alpha_r^n) = \tau(\gamma) = \tau_i|_{L_1}(\gamma) \in L_1.$$

于是$\beta_i^n \in L_1(i = 1, \cdots, s)$. 即$L|L_1$是根式扩张，又$L_1|k$是根式扩张，故$L|k$是根式扩张。 □

Definition 4.4. 设G是群，若存在G的子群列

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{1\},$$

使得$G_{i+1} \trianglelefteq G_i$,且$G_i/G_{i-1}$是$Abel$群，则称$G$是可解群.

Theorem 4.4. ***(Galois)***设k是一个域，$char(k) = 0, f(x) \in k[x]$，$K$是$f(x)$在$k$上的分裂域。则$f$可根式解当且仅当$Gal(K|k)$是可解群.

证明. $\Rightarrow$)由f可根式解，K包含于某个k的根式扩域E中，又取$E|k$的正规闭包$L|k$,由前述定理可知$L|k$也是根式扩张。
不妨设$L|k, E|k$均是$n-$次根式扩张。即有域的扩张序列

$$k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq \cdots \subseteq k_r = E \subseteq L,$$

其中$k_i = k_{i-1}(\alpha_i), \alpha_i^n \in k_{i-1}(i = 1, \cdots, r), L = E(\alpha), \alpha^n \in E$.
记$G = Gal(L|k)$为$L|k$的Galois群，且记$H_i = Gal(L|k_i)(i = 1, \cdots, r)$,即有子群序列

$$\{1\} \subseteq H_r \subseteq H_{r-1} \subseteq \cdots \subseteq H_1 \subseteq H_0 = G.$$

为简记，设k包含n次本原单位根ξ_n。

考虑扩张k_i/k_{i-1},由于$k_i = k_{i-1}(\alpha_i), \alpha_i^n \in k_{i-1}$,又$\xi_n \in k \in k_{i-1}$. 则由$Kummer$扩张结果可知,$k_i/k_{i-1}$是一个循环扩张(即$Gal(k_i|k_{i-1})$是循环群)。由$Galois$理论知$H_i \triangleleft H_{i-1}$(正规子群),且

$$H_{i-1}/H_i \cong Gal(k_i|k_{i-1})$$

是循环群。即$G = Gal(L|k)$是一个可解群，G的商群$Gal(K|k)$也是可解群($Gal(K|k) \cong G/Gal(L|K)$).

$\Leftarrow$)设$Gal(K|k)$是一个可解群，则有子群序列

$$G = Gal(K|k) = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_r = \{e\}.$$

其中$G_{i+1} \triangleleft G_i$,且$G_i/G_{i+1}(i = 0, \cdots, r-1)$是Abel群. 记$n = [K : k]$,且设$k$包含一个$n$次本原单位根$\xi_n$. 记$k_i = K^{G_i}$,则由$Galois$理论，可得$K$的子群序列

$$k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq \cdots \subseteq k_r = k,$$

且$k_i|k_{i-1}$是Abel扩张(因为$Gal(k_i|k_{i-1}) \cong G_{i-1}/G_i$是Abel群). 又由所设$\sigma^n = id(\forall \sigma \in G)$,故每个$k_i/k_{i-1}$均为指数为$n$的Abel扩张，由Kummer理论可知$k_i|k_{i-1}(i = 1, 2, \cdots, r)$是一个根式扩张,从而$K|k$是根式扩张，即$f$可根式解。 □

Kummer理论：若有根式扩张$k(\sqrt[n]{\alpha})(\alpha \in k)$(Kummer扩张)，且$\xi_n \in k$,则Kummer扩张一定是循环扩张。

4.2.2 古希腊四大数学难题

1.化圆为方。 2.倍立方。 3.三等分角。 4.正多边形的作图问题。

方法：作图工具只有直尺与圆规.

(1)直线相交:l_1与l_2相交，

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

其中$a_i,b_i,c_i\in\mathbb{Q},i=1,2$.若有交点$P$,则$P\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

(2)直线与圆相交:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ x^2+y^2+cx+dy+e=0 \end{cases}$$

其中$a_1,b_1,c_1,c,d,e\in\mathbb{Q}$. 若有交点$P$,则$P=(x_0,y_0)\in\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})\times\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}),0\leq\Delta\in\mathbb{Q}$.

Proposition 4.1. 设$\alpha\in R$,则α可尺规构作当且仅当有域扩张序列

$$\mathbb{Q}=k_0\subseteq k_1\subseteq\cdots\subseteq k_r,$$

使得$[k_i:k_{i-1}]\leq 2(i=1,\cdots,r)$,且$\alpha\in k_r$.特别地,$\alpha\in k_r$且$[k_r:\mathbb{Q}]=2^s(s\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$,即$\alpha$必为代数数。

问题1:化圆为方(π=正方形的面积?)

解：无解.原因:π是超越数。如若不然，则有$\mathbb{Q}$的某个2^s次扩域k,使得$\pi\in k$,由此得到π是代数数，矛盾!

问题2：倍立方(2=正方形的体积?)

解：无解.问题等价于$\sqrt[3]{2}$是否尺规构作.由于$\sqrt[3]{2}$是3次代数数，$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]=3$,而3不是2的幂，从而$\sqrt[3]{2}$不可尺规构作。

问题3：三等分角。

首先，θ可尺规构作当且仅当$cos\theta,sin\theta$均可尺规构作.

解：一般情况下无解。例$\beta=60^0,\theta=\frac{\beta}{3}=20^0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&=cos60^0=cos(3\theta)=cos(2\theta+\theta)\\&=cos2\theta cos\theta-sin2\theta sin\theta\\&=(2cos^2\theta-1)cos\theta-2sin^2\theta cos\theta\\&=2cos^3\theta-cos\theta-2cos\theta+2cos^3\theta\\&=4cos^3\theta-3cos(\theta)\end{aligned}$$

即$cos\theta$是多项式$f(x)=8x^3-3x-1$的根，而$f(x)$在$\mathbb{Q}$上不可约，于是$[\mathbb{Q}(cos\theta):\mathbb{Q}]=3$,但3不是2的方幂，故$cos\theta$不可尺规作出。

问题4：正多边形作图问题。

解:正n边形可尺规作出当且仅当$\frac{2\pi}{n}$可尺规作出，又等价于 $cos\frac{2\pi}{n}, sin\frac{2\pi}{n}$可尺规作出。

令$\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}} = cos\frac{2\pi}{n} + isin\frac{2\pi}{n}(n > 2)$,则$\xi_n^{-1} = cos\frac{2\pi}{n} - isin\frac{2\pi}{n}$.于是

$$cos\frac{2\pi}{n} = \frac{\xi_n + \xi_n^{-1}}{2} \in \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1}) \subseteq R.$$

由$\xi_n \notin \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})$得$\mathbb{Q}(\xi_n) \supsetneqq \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})$,于是

$$[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})] \geq 2.$$

又因ξ_n是多项式$f(x) = x^2 - (\xi_n + \xi_n^{-1})x + 1 \in \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})[x]$的根，故

$$[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})] \leq 2.$$

综上，

$$[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})] = 2.$$

Theorem 4.5. *正n边形可尺规构作当且仅当$\phi(n)$(欧拉函数)是2的幂。*

证明. 正n边形可尺规构作$\Leftrightarrow\frac{2\pi}{n}$可尺规作出$\Leftrightarrow$ $cos\frac{2\pi}{n}, sin\frac{2\pi}{n}$可尺规作出 $\Leftrightarrow$ $[\mathbb{Q}(cos\frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}]$是2的幂。而

$$\begin{aligned}\phi(n) &= [\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}] \\ &= [\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}(cos\frac{2\pi}{n})][\mathbb{Q}(cos\frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}] \\ &= 2[\mathbb{Q}(cos\frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}].\end{aligned}$$

由此即知命题成立。 □

4.3 域的无限Galois扩张

设$K|k$是无限Galois扩张，一般我们就取K是k的代数闭包。记$G = Gal(K|k)$,对于中间域$k \subset E \subset K$记$H_E = Gal(K|E)$.定义集合 $\mathcal{I} = \{E : E$是$K|k$的中间域，且$E|k$是有限Galois扩张$\}$. $\mathcal{N} = \{H : H = Gal(K|E), E \in \mathcal{I}\}$.

Proposition 4.2. (1) $\cap_{H\in\mathcal{N}} H = \{e\}$.(2) $\cap_{H\in\mathcal{N}} \sigma H = \{\sigma\}(\forall\sigma \in G)$.

证明. (1)任取$\sigma \in \cap_{H\in\mathcal{N}}H$,对任意$\alpha \in K$，设$E$是$k(\alpha)|k$在$K|k$中的正规闭包，则$E \in \mathcal{I}, H_E = Gal(K|E) \in \mathcal{N}$,特别地$\sigma \in H_E$,对$\alpha \in E, \sigma(\alpha) = \alpha$,由$\alpha$的任意性，$\sigma = id$,即$\sigma$在$K$是恒等映射.
(2)

$$\begin{aligned}\forall\tau \in \cap_{H\in\mathcal{N}}\sigma H &\Rightarrow \tau \in \sigma H(\forall H \in \mathcal{N}) \\ &\Rightarrow \sigma^{-1}\tau \in H(\forall H \in \mathcal{N}) \\ &\Rightarrow \sigma^{-1}\tau \in \cap_{H\in\mathcal{N}} = e \\ &\Rightarrow \sigma = \tau \\ &\Rightarrow \cap_{H\in\mathcal{N}}\sigma H = \{\sigma\}(\forall\sigma \in G).\end{aligned}$$

□

Proposition 4.3. 设$H_1, H_2 \in \mathcal{N}$,则$H_1 \cap H_2 \in \mathcal{N}$.

证明. 由$\mathcal{N}$的定义，存在$E_1, E_2 \in \mathcal{I}$使得$H_1 = Gal(K|E_1), H_2 = Gal(K|E_2)$.由于$E_1E_2|k$是有限Galois扩张$E_1E_2 \in \mathcal{I}$.由Galois理论知$H_1 \cap H_2 = Gal(K|E_1E_2)$于是$H_1 \cap H_2 \in \mathcal{N}$.
定义G上的$Krull$拓扑：规定$\{\sigma H : \sigma \in G, H \in \mathcal{N}\}$为$G$上的一个拓扑基。即$G$中子集$H'$为开集当且仅当$H'$为上述拓扑基元素之并。 □

Theorem 4.6. *G在上述拓扑基下为$Hausdorff$,紧致且完全不连通的拓扑群。*

证明. (i)完全不连通(能写成两个非空开子集的不交并，连通子集只有单点集)。
设$X \subset G$,且$|X| \geq 2$,取$\sigma, \tau \in X$,且$\sigma \neq \tau$. 由$\cap_{H \in \mathcal{N}} \sigma H = \{\sigma\}$知$\tau \notin \cap_{H \in \mathcal{N}} \sigma H$,从而$\exists H_0 \in \mathcal{N}$使得$\tau \notin \sigma H_0$,即 $\tau \in G - \sigma H_0$ 注意到

$$X = X \cap G = X \cap (\sigma H_0 \cup (G - \sigma H_0)) = (X \cap \sigma H_0) \cup (X \cap (G - \sigma H_0))$$

G关于子群H有陪集分解$G = \cup_{i \in I} \sigma_i H$,由此知若$H$是开集，由于$G$是拓扑群，对任意$\sigma \in G$,$\sigma H$为开集，从而$H$为其所有非平凡陪集的补集，为闭集。注意到$\sigma \in X \cap \sigma H_0, \tau \in X \cap (G - \sigma H_0)$,且$\sigma H_0, G - \sigma H_0$均为开集，这就得到$X$是完全不连通的。特别地，$G$是完全不连通的，此处还可以看出, G是hausdorff空间。

□

另证:若$\sigma, \tau \in G$且$\sigma \neq \tau$,则存在有限Galois子扩张$E|k$使得$\sigma|_E \neq \tau|_E$(注意到任取$x \in K$,必存在包含x的$K|k$的有限Galois子扩张$E|k$,例如E取$k(x)|k$在$K|k$中的代数闭包。若对任意有限Galois子扩张$E|k$有$\sigma|_E = \tau|_E$,则对任意$x \in K, \sigma(x) = \tau(x)$.矛盾！)因此$\sigma Gal(K|E) \neq \tau Gal(K|E)$,因此$\sigma Gal(K|E) \cap \tau Gal(K|E) = \emptyset$.
对于G的紧性,这里先省略证明。

注:设G关于闭子群H有陪集分解$G = \cup_{i \in I} \sigma_i H$，则由$G$的紧致性,$H$是$G$的开子集当且仅当$(G : H)$有限。

Theorem 4.7. *设$H \leq G$,记$H' = Gal(K|K^H)$,则$H' = \bar{H}$(H在G中的闭包.)*

证明. 显然，$H \leq H'$.下证H'为G中的闭集,只需证$G - H'$为开集.

任取$\sigma \in G - H'$,必有$\alpha \in K^H$使得$\sigma(\alpha) \neq \alpha$.对于$\alpha \in K$,有$E \in \mathcal{I}$使得$\alpha \in E$,于是取$H_0 = Gal(K|E) \in \mathcal{N}$.对于$\forall \tau \in H_0$,有$\tau\alpha = \alpha$,于是$\sigma(\tau\alpha) = \sigma\alpha \neq \alpha$,即

$$\sigma\tau(\alpha) \neq \alpha \Rightarrow \sigma\tau \in G - H' \Rightarrow \sigma H_0 \in G - H' \Rightarrow G - H \quad is \quad open \Rightarrow H' is \quad closed.$$

下证$\bar{H} = H'$.需证$\forall \sigma \in H', N \in \mathcal{N}$.都有$\sigma N \cap H \neq \emptyset$.
由定义，取$E \in \mathcal{I}$使得$N = Gal(K|E)$,令$H_0 = \{\rho|_E : \rho \in H\}$,于是$K^{H_0} = K^H \cap E$,由有限Galois基本定理到$H_0 = Gal(E|K^H \cap E)$,由$\sigma \in H', \sigma|_{K^H} = id$,因此$\sigma|_E \in H_0$.存在$\rho \in H$使得$\rho|_E = \sigma|_E$.于是$\sigma^{-1}\rho \in Gal(K|E) = N$，即$\rho \in \sigma N \cap H$.$\sigma N \cap H \neq \emptyset$. □

Proposition 4.4. 设$K|k$是无限$Galois$扩张，任取$K|k$的一个中间域，则$H_E = Gal(K|E)$是G的一个闭子群。

证明. $H_E \leq G$,则$K^{Gal(K|E)} = E \Rightarrow H_E = Gal(K|E) = Gal(K|K^{H_E}) = \bar{H}_E$. □

Theorem 4.8. ***无限Galois扩张基本定理:***设$K|k$是无限$Galois$扩张，令$G = Gal(K|k)$, $\mathcal{I}_0 = \{E : E是K|k的中间域\}$, $\mathcal{N}_0 = \{H|H是G的子群\}$.定义映射

$$\begin{aligned}\varphi :&\mathcal{I}_0 \to \mathcal{N}_0\\ &E \mapsto Gal(K|E)\end{aligned}$$

则φ是一个双射。
(1)$E|k$是$Galois$$\Leftrightarrow$ $H_E = Gal(K|E) \lhd G$.
*(2)*对于$E \in \mathcal{I}_0, [E : k] \leq +\infty \Leftrightarrow H_E = Gal(K|E)$是$G$的开子群。*(*若$H$是开子群，则任意$\sigma \in G$,$\sigma H$也是开子群，从而由陪集分解 $G = \cup_{i\in I}\sigma_i H$,知$H$也是闭子群.此时再由$G$的紧致性知$[G : H] \leq +\infty$.反之，若已知$H$是闭集，则由$[G : H] \leq +\infty$知$H$是开集*)*。

4.4 例题

例F_p(p是素数)。

Example 4.2. 分圆域$K = Q(\zeta_n)$,其中$\zeta_n = e^{2i\pi/n} = \cos 2\pi/n + i \sin 2\pi/n \in C$. ζ_n是n次本原单位根，也是代数元. 问：K/Q是否为$Galois$扩张？

答：由$char(Q) = 0$知,K/Q是可分的。ζ_n是$x^n - 1$的根. 事实上，K是$x^n - 1$在Q上的分裂域，即K/Q是正规的，因此K/Q是$Galois$扩张。记其$Galois$群为$G = Gal(K/Q)$。

(1)设ζ_n在Q上的极小多项式为$f(x)$，则$f(x) \mid x^n - 1$。
任取$\sigma \in G$，$\sigma(\zeta_n)$⇒是ζ_n的一个共轭元。且$\sigma(\zeta_n)$=$(\zeta_n)^k$, 对某个$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

$$\sigma(\zeta_n)\text{的阶} = r \Rightarrow \sigma(\zeta_n) = 1 \Rightarrow \sigma(\zeta_n^r) = 1 \Rightarrow \zeta_n^r = \sigma(1) = 1 \Rightarrow r = n.$$

注：ζ 是n次本原单位根$\Leftrightarrow$ ζ的阶是n,即$\zeta \in \mathbb{C}^*$且是$\mathbb{C}^*$中的一个阶为n的数，比如上述ζ_n.

$$\circ(\sigma(\zeta_n)) = \circ(\zeta_n^k) = \frac{n}{(n,k)} = n \Leftrightarrow (n,k) = 1.$$

即对$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$,$\zeta_n^k$是$n$次本原单位根$\Leftrightarrow$$(n,k) = 1$. 于是，$f(x) = \prod\limits_{k=1,(n,k)=1}^{n} (x - \zeta_n^k)$
显然，$deg(f(x)) = \phi(n)$(Euler函数)称上述$f(x)$为n次分圆多项式，常记之为$f(x) \doteq \phi_n(x)$, 特别地，当$n = p$是一个素数时，

$$\phi_p(x) = \prod_{k=1,(k,p)=1}^{p} (x - \zeta_p^k) = \prod_{k=1}^{p-1}(x - \zeta_p^k) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \ldots + x + 1.$$

$\#Gal(K/Q) = [K:Q] = deg(\phi_n(x)) = \phi_n(x)$.(比如$n = p$素数时，$[Q(\zeta_p):Q] = p-1$).

(2)计算$Gal(K/Q)$.

$\forall \sigma \in Gal(K/Q)$, $\sigma : K = Q(\zeta_n) \longrightarrow Q(\zeta_n)$. 事实：$\sigma(\zeta_n)$必是$n$次本原单位根，故$\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^k, k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. 而$\sigma \longrightarrow \overline{k}$建立了Gal(K/Q)到$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$的映射.
结论：$K = Q(\zeta_n), G$同上，有$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \backsimeq G = Gal(K/Q)$.

证明. 令

$$\begin{aligned} \psi : (Z/nZ)^* &\longrightarrow Gal(K/Q) \\ \overline{k} &\longmapsto \sigma_k : \zeta_n \longmapsto \zeta_n^k. \end{aligned}$$

群同态：即证明$\psi(\overline{kl}) = \psi(\overline{kl}) = \sigma_k\sigma_l$.

$$\sigma_{kl}(\zeta_n) = \zeta_n^{kl} = (\zeta_n^l)^k = \sigma_k(\sigma_l(\zeta_n)) = (\sigma_k \circ \sigma_l)(\zeta_n).$$

即$\sigma_{kl} = \sigma_k \circ \sigma_l$. 也即$\psi(\overline{kl}) = \psi(\overline{k}) \circ \psi(\overline{l})$
ψ是单的：阶数一样，故证明是双射只需证单。
设$\overrightarrow{k} \in ker\psi$,则$\psi(\overline{k}) = \sigma_k = id$. 即

$$\sigma_k(\zeta_n) = \zeta_n^k = \zeta_n \Rightarrow \zeta_n^{k-1} = 1 \Rightarrow n|(k-1) \Rightarrow k \equiv 1 \pmod n,$$

即$\overline{k} = \overline{1}. \Rightarrow ker(\psi) = \{\overline{1}\}$.
又$\#Gal(K/Q) = \phi(n) = \#(Z/nZ)^*$,故$\phi$也是满的，从而有$G = Gal(K/Q) \backsimeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. □

$O_k = Z[\zeta_n] \to PID$?

Example 4.3. $K = Q(\sqrt{-1}, \sqrt{2})|Q$是$Galois$扩张？

(1)K/Q是否均$Galois$扩张？
$charQ = 0 \Rightarrow K/Q$可分。
$\alpha = \sqrt{-1}, \beta = \sqrt{2}$。它们在$Q$上的极小多项式分别是:$P_\alpha(x) = x^2+1$, 根为：$\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$;$P_\beta(x) = x^2-2$,根为：$\sqrt{2}, -\sqrt{2}$. $K = Q(\pm\sqrt{-1}, \pm\sqrt{2})$是$\{P_\alpha, P_\beta\}$在Q上的分裂域.$\Rightarrow$ K/Q是正规的,从而K/Q是Galois的，记$G = Gal(K/Q)$. 于是$\#G = [K:Q] = 4, Q \subset Q(\sqrt{-1}) \subset Q(\sqrt{-1}, \sqrt{2}) = K$
(2)计算Galois群
$\forall \sigma \in G, K = Q(\alpha, \beta), \sigma(\alpha) \in \{\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\}, \sigma(\beta) \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.
确定：$\sigma : (\alpha, \beta) \longmapsto (\sigma(\alpha), \sigma(\beta))$, $\sigma : (\sqrt{-1}, \sqrt{2}) \longmapsto (\sigma(\sqrt{-1}), \sigma(\sqrt{2}))$.有下列四种情形：

$$a : \sqrt{-1} \longmapsto \sqrt{-1}, \sqrt{2} \longmapsto \sqrt{2}, \text{此时}\sigma = id;$$

$$b : \sqrt{-1} \longmapsto \sqrt{-1}, \sqrt{2} \longmapsto -\sqrt{2}, \text{记为}\sigma_1;$$

$$c : \sqrt{-1} \longmapsto -\sqrt{-1}, \sqrt{2} \longmapsto \sqrt{2}, \text{记为}\sigma_2;$$

$$d : \sqrt{-1} \longmapsto -\sqrt{-1}, \sqrt{2} \longmapsto -\sqrt{2}, \text{记为}\sigma_3;$$

于是$G=\{1,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\},\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=id,\sigma_3=\sigma_1\sigma_2$,可知

$$G=<\sigma_1,\sigma_2>=<\sigma_1>\times<\sigma_2>\backsimeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

G的子群为：$\{1\},<\sigma_1>,<\sigma_2>,<\sigma_1\sigma_2>=<\sigma_3>$, G对应的中间域为K.

$$K^{<\sigma_1>}=K^{\sigma_1}=Q(\sqrt{-1}),K^{\sigma_2}=Q(\sqrt{2}),K_3^{\sigma}=Q(\sqrt{-2}).$$

5 环与模的链条件

5.1 环与模的链条件

Theorem 5.1. *设A是一个含幺交换环，M是一个A-模，则下列陈述等价：*
(1)(ACC)(升链条件)：对M中的任意子模升链（可数链） $M_1\subset M_2\subset\ldots\subset M_n\subset\ldots$ 则(*)式是稳定的，即存在$n\in Z_{\geq 1},\ddot{} M_n=M_{n+1}=\ldots$
(2)(极大条件)任意一个由M的子模构成的非空集合均有极大元。(集合的包含关系)
(3)(有限生成条件)M的任一子模均是有限生成A-模。

Definition 5.1. 对于$M\in A$-模，如果M满足上述定理的条件，则称M是一个$Noether$ A-模。

证明. (1)⇒(2)设$\mathscr{M}$是M的一个子模非空集簇，要证$\mathscr{M}$中含极大元。(反证)假若不然，任取$M_1\in\mathscr{M}$,则M_1不是$\mathscr{M}$中极大元，故有$M_2\in\mathscr{M}\Rightarrow M_1\subsetneqq M_2$.同理，$M_2$也不是$\mathscr{M}$中极大元，故有$M_3\in\mathscr{M}\Rightarrow M_2\subsetneqq M_3$.以此类推即可得到M中一个无限长子模链。$M_1\subsetneqq M_2\subset M_3\subsetneqq\ldots$与所设矛盾！
(2)⇒(3) 任取子模N≤ M,不妨设N≠ 0，下证N是有限生成的。为此，令 $\mathscr{M}$=$\{L:L\leq N,$且L是有限生成的$\}$.显然，$0\in\mathscr{M}$,故，$\mathscr{M}\neq\Phi$, 由所设，$\mathscr{M}$中含极大元，设其一为N_0. 只需证$N_0=N$。假若$N_0\neq N$，即$N_0\subsetneqq N$。于是有$\alpha\in N\setminus N_0$,令$L_0=<N_0,\alpha>=N_0+A\alpha$则，$L_0\leq N$,且$L_0$是有限生成的，故$L_0\in\mathscr{M}$.但$N_0\subsetneqq L_0$，这与$N_0$的极大性矛盾！因此，$N=N_0$是有限生成的。
(3)⇒(1),任取M的一个可数子模升链，$M_1\subset M_2\subset\ldots$,令$N=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}M_i$,则$N\leq M$,有所设，N是有限生成A-模，即$N=<\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m>=A\alpha_1+\ldots+A\alpha_m,(\alpha_1,\ldots\alpha_m\in N)$由$\alpha_1,\ldots\alpha_m\in N=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}M_i$,故有$r\in Z_{\geq 1}\Rightarrow\alpha_1,\ldots\alpha_m\in M_r\Rightarrow N=<\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m>\subset M_R\subset N\Rightarrow N=M_r\Rightarrow M_r\subset M_{r+k}\subset N=M_r\Rightarrow M_{r+k}=M_r(\forall k\in Z_{\geq 0})$ □

对偶地，有Artin 模

Theorem 5.2. *设A是一个含1交换环，M是一个A-模，则下列条件等价：*
(1)(DCC)M的任一个可数子模降链均稳定的，即对任一个子模链, $M_1\subset M_2\subset\ldots$则有$n\in Z_{\geq 1}$,使得$M_n=M_{n+1}=\ldots$
(2)(极大条件).有M的子模构成的任一非空集簇均有极小元。

Noether 模，Artin 模

Definition 5.2. 设A是一个含*1*交换环，如果A是一个$Noether\ A-$模，则称A是$Noether$ 环。

等价地，A是$Noether$环$\Leftrightarrow$ A的理想均是有限生成的。
对偶地，A是$Artin$环$\Leftrightarrow$ A作为A模是一个Artin模。

Example 5.1. 整数环$\mathbb{Z}Noether$环 *(1)*满足acc,$I_1 \subset I_2 \subset \ldots I_i = (a_i), (a_1) \subset (a_2) \subset \ldots, (a_1) \subset (a_2) \Leftrightarrow (a_2|a_1), (p) \subset (p), <1> = \mathbb{Z}.$
*(2)*不满足dcc. 例：$(2) \supset (2^2) \supset (2^3) \supset \ldots$ 可无限下去*(*倍*)* 结论：$\mathbb{Z}$是$Noether$环，但不是$Artin$环。

Example 5.2. $G = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$,*(*注：$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{tor}$*)*.

$(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{R}, +), \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1)$(作为集合)$\simeq (S^1, \cdot)$单位圆.
$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)_{tors} = \overline{a} : a \in \mathbb{R}, \circ(a) < \infty.$
设p是一个素数，G的$Sylow - p$子群

$$G(p) = \{a \in G : \circ(a)\text{是}p\text{的幂}\} = p^{-1}Z/Z \cup p^{-2}Z/Z \cup \ldots = \bigcup_{n=0}^{\infty} p^{-n}Z/Z,$$

$p^{-n}Z/Z \subset p^{-(n+1)}Z/Z, p^{-1}Z/Z \subsetneqq p^{-2}Z/Z \subsetneqq \ldots$(无限升链)
$\Rightarrow Q/Z$不是$NoetherZ-$模。

Example 5.3. $A = k[x]$*(*k域*)*A是$PID \Rightarrow$ A是$Noether$的，但A不是$Artin$的,$(x) \supsetneqq (x^2) \supsetneqq \ldots$

Example 5.4. $A = k[x_1, x_2, \ldots]$
A不是$Artin$环,$(x_1) \supsetneqq (x_1^2) \supsetneqq \ldots$; A也不是$Noether$ 环,$(x_1) \subsetneqq (x_1, x_2) \subsetneqq \ldots$
注：A是整环，设F是它的分式域，即$F = FracA$，F是$Noether$的*(*域中的理想只有*0*和本身*)*, $A \subset F$,A不是$Noether$ 的.

(环)Noether性质对子结构不封闭
(模)但M是$NoetherA-$模，$N \subseteq M$，则N也是$NoetherA-$模.原因：子模的子模是子模，N的子模是M的子模$\Rightarrow$有限生成.
$MNoetherA-$模，$N \leq M, NNoether!$
$L \leq N \Rightarrow L \leq M$子模的子模是子模
$M/N, A \times M/N \longrightarrow M/N, (a, \overline{m}) \longmapsto \overline{am}$
$\overline{M} = M/N, \overline{M_1} \leq \overline{M_2} \leq \ldots, N \leq M_i \leq M, \overline{M_i} = M_i/N$
$\Rightarrow M_1 \leq M_2 \leq \ldots$
验证：$\forall \alpha \in M_1, \overline{\alpha} \in \overline{M_1} \subset \overline{M_2} \Rightarrow \overline{\alpha} = \overline{\beta}$ 对某个$\beta \in M_2$.即$\alpha - \beta \in N, \alpha - \beta = \gamma \in N \subset M_2 \Rightarrow \alpha = \beta + \gamma \in M_2$
$\exists n \in Z_{\geq} 1$使得$M_n = M_{n+1} = \ldots \Rightarrow \overline{M_n} = \overline{M_n + 1} = \ldots \Rightarrow \overline{M} = M/N$是Noether的.

Theorem 5.3. 设A是交换环,L,N,$M$$\in$ A-Mod.且有正合列$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$,则$M$是$Noether$模
L与N均是$Noether$ A-模。$Artin$仍成立。

证明. $\Rightarrow$ 任取$L_1 \leq L_2$,则$L_1 \leq M$，由所设，知L_1是有限生成的，故是Noether模。任取N的一个子模升链$N_1 \leq N_2 \leq \ldots$则有M的子模升链$f(L) \subset g^{-1}(N_1) \leq g^{-}1(N_2) \leq \ldots$ 由所设，$\exists m \in Z_{\geq}1$,使得$g^{-1}(N_m) = g^{-1}(N_m + 1) = \ldots \Rightarrow N_m = g(g^{-1}(N_m)) = g(g^{-1}(N_m + 1)) = N_{m+1} = \ldots \Rightarrow$ N是个Noether A-模。
$\Leftarrow$ 任取M的一个可数子模升链$M_1 \leq M_2 \leq \ldots$ 于是有L中的子模升链$f^{-1}(M_1) \leq f^{-1}(M_2) \leq \ldots$ 及N中的子模升链$g(M_1) \leq g(M_2) \leq \ldots$ 由所设，存在k使得$f^{-1}(M_k) = f^{-1}(M_k + 1) = \ldots$ 且$g(M_k) = g(M_k + 1) = \ldots$
下证$M_k = M_{k+1} = \ldots$,只需证$M_{k+1} \subset M_k$.
为此，任取$\alpha \in M_{k+1}$则$g(\alpha) \in g(M_k + 1) = g(M_k)$即$g(\alpha) = g(\beta)$,对某个$\beta \in M_k$. 也即$g(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta \in ker(g) = im(f) = f(L)$即有$\gamma \in L$,使得 $alpha - \beta = f(\gamma)$,又$alpha - \beta \in M_{k+1}$,故$\gamma \in f^{-1}(M_k + 1) = f^{-1}(M_k) \Rightarrow f(\gamma) \in M_k \Rightarrow \alpha = \beta + f(\gamma) \in M_k \Rightarrow M_{k+1} \subset m_k$.从而有$M_{k+1} = M_k$ 同理可证$M_{k+1} = M_{k+2} = \ldots$ 因此，M是Noether A-模。 □

Corollary 5.1. *M是Noether模$\Rightarrow M \bigoplus M$是Noether的。*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \bigoplus M \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$
$$\alpha \longmapsto (\alpha, 0),$$
$$(\alpha, \beta) \longmapsto \beta.$$

Corollary 5.2. *设$M_i(1 \leq i \leq r)$是Noether A-模，则$\bigoplus_{i=1}^{r} M_i$也是Noether模。*

证明. 归纳法：

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$
$$a_1 \longmapsto (a_1, 0),$$
$$(a_1, a_2) \longmapsto a_2.$$

$\Rightarrow M_1 \oplus M_2$是Noether的。
$0 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$
一般地.

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} M_i \longrightarrow M_r \longrightarrow 0$$

特别地，当M是一个Noether模时，$M^n = M^{\oplus n}$是Noether的。
$M \oplus \ldots \oplus M = M \times \ldots \times M$ □

例.X是紧的Hausdorff拓扑空间，且$\#X = +\infty.C(X) = \{f : f$是$X$上的实值函数$\}, f : X \longrightarrow R$连续，显然，$(C(X), +, \cdot)$是一个含幺交换环，令$B_1 \supsetneqq B_2 \supsetneqq \ldots$ 是X中一个严格闭子集降链，又令$I_n \lhd C(X)$,且$I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq I_3 \subsetneqq \ldots$(理想的无限升链)$\Rightarrow C(X)$不是Noether环。

Proposition 5.1. *Noether环上的有限生成模必是Noether模。*

证明. 设A是Noether环，M是一个有限生成A-模，即$M=A\alpha_1+A\alpha_2+\ldots+A\alpha_r,\alpha_1,\ldots$ fi$\alpha_r\in M$. 显然有A-模满同态$\Phi:A^r\longrightarrow M,(a_1,\ldots,a_r)\longmapsto a_1\alpha_1+\ldots+a_r\alpha_r$.由所设，A是Noether环，故A也是一个Noether A-模，于是A^r也是Noether A-模，从而M是Noether的。 □

设M∈ A-Mod，设有子模降链：$M=M_0\supset M_1\supset\ldots\supset M_r=\{0\}(*)$,且$M_i/M_{i+1}$ 是单模，$(i=0,1,\ldots,r-1)$此时称$(*)$是M的一个合成列，称r为M的长度，记为r=L(M)，这样的M就成为是一个有限长模.(Jordan-Holder 定理)

Theorem 5.4. *设A是一个交换环，$M\in$ A-Mod,则M是有限长模$\Leftrightarrow$ M既是Noether模，也是Artin模。*

证明. $\Rightarrow$ 显然，M是有限长模则不可能有无限升链，也不可能有无限降链。$\Leftarrow M\neq 0$.令$\mathscr{N}$={N:N≤ M且N≠ $M\}\neq\varnothing$.则$0\in\mathscr{N}$，由于M 是Noether模，故$\mathscr{N}$中含极大元，取其中一个为M_1，则M/M_1是单模，且M_1 也是Noether的。当M_1=0 时，已证;当$M_1\neq 0$时，则对M_1用上述讨论可得$M_2\leq M_1,M_2\neq M_1$,且M_1/M_2是单的，以此类推，可得M的子模的严格降链：$M=M_0\supsetneqq M_1\supsetneqq M_2\supsetneqq\ldots(*)$
由所设，M是Artin的，故$(*)$必是稳定的，从而由上述讨论可知，$\exists r\in Z_{\geq}1$,使得M_r=0.因此得M的合成列：$M=M_0\supset M_1\supset\ldots\supset M_r=\{0\}$ □

Theorem 5.5. *(Hilbert基本定理) Noether环上的多项式环必是Noether环。具体言之，设A是一个Noether环，$x_1,\ldots,x_n$是n个未定元，则A 上的多项式环$A[x_1,\ldots,x_n]$是Noether环。*

证明. 只需证$A[x]$是$Noether$环，其中x是未定元。为此任取$A[x]$中一个非零理想$\mathscr{A}$，令$I=\{a\in A:\exists f\in\mathscr{A}$, 使得$a$是$f$的首项系数$\}$则$I\lhd A$.事实上，显然$0\in I$,设$a,b\in I$,则有$f,g\in\mathscr{A}$.使得$a,b$分别是$f,g$的首项系数。不妨设

$$f(x)=ax^m+\ldots,$$

$$g(x)=bx^n+\ldots.$$

且设$m\geqslant n$，则$f(x)+g(x)x^{m-n}\in\mathscr{A}$且其首项系数均为$a+b.I\lhd A$. 由所设，$A$是$Noether$环，故$I$是有限生成的，即$I=<a_1,\ldots,a_s>$,其中$a_1,\ldots,a_s\in A$. 由所设，对每个$a_i,\exists f_i\in\mathscr{A}$,使得$a_i$是$f_i$的首项系数。记$m_i=deg(f_i),m=max\{m_i:i=1,\ldots,s\}$(规定$deg0=\infty$)记$\mathscr{A}'=<f_1,\ldots,f_s>$(在$A[x]$中生成)，显然$\mathscr{A}=\mathscr{A}'$. 又记$\mathscr{B}=A+Ax+\ldots+Ax^{m-1}$是由$\{1,x,\ldots,x^{m-1}\}$生成的$A-$模. 任取$f\in\mathscr{A}$,如果$deg(f)<m$,则$f\in b$.如果$deg(f)=n\geq m$.此时设$f$的首项系数为$a$.则$a\in I$, 于是有$a=c_1a_1+\ldots+c_sa_s$, 其中$c_1,\ldots,c_s\in A$.令$g(x)=f(x)-\sum\limits_{i=1}^{s}c_ix^{n-mi}f_i$.则$g(x)\in\mathscr{A}$,但此时$deg(g(x))<n$.以此类推，有限步后，可得$f(x)=h(x)+l(x)$,其中$h(x)\in\mathscr{A}',l(x)\in\mathscr{A}\cap\mathscr{B}$,(因为$f,h\in\mathscr{A}\Rightarrow l\in\mathscr{A}$) 即$f(x)\in\mathscr{A}'+(\mathscr{A}\cap\mathscr{B})\Rightarrow\mathscr{A}\subset\mathscr{A}'+(\mathscr{A}\cap\mathscr{B})\Rightarrow\mathscr{A}=\mathscr{A}'+(\mathscr{A}\cap\mathscr{B})$ 注意到A是Noether环，$\mathscr{B}$是有限生成$A-$模，故$\mathscr{B}$是Noether $A-$模$\Rightarrow\mathscr{A}\cap\mathscr{B}$也是$Noether A-$模，故有$g_1,\ldots,g_t\in\mathscr{A}\cap\mathscr{B}$,使得 $\mathscr{A}\cap\mathscr{B}=Ag_1+\ldots+Ag_t\Rightarrow\mathscr{A}=\mathscr{A}'+Ag_1+\ldots+Ag_t\subset\mathscr{A}'+A[x]_{g_1}+\ldots+A[x]_g\subset\mathscr{A}.\Rightarrow\mathscr{A}=<f_1,\ldots,f_s,g_1,\ldots,g_t>$. □

Hilbert基定理

设A是Noether环，则A上的多项式环$A[x_1,\dots,x_n]$也是Noether环。

Proposition 5.2. *A与B是交换环，$A\subset B$，设A是Noether环，B是有限生成$A-$模，则B是一个Noether环。*

证明. 任取$I\lhd B$ (理想)，由所设，B是有限生成$A-$模，另一方面，显然I是B的一个$A-$子模，$(A\subset B)$.从而I 使有限生成A模，即有$I=A\alpha_1+\ldots+A\alpha_m$.其中$\alpha_1,\dots,\alpha_m\in I\subset B$.于是$I=A\alpha_1+\ldots+A\alpha_m\subset B\alpha_1+\ldots+B\alpha_m\subset I\Rightarrow I=B\alpha_1+\ldots+B\alpha_m$即$I$是$B$中有限生成理想，因此$B$是一个Noether环。 □

Proposition 5.3. *设A是一个交换环，S是A的一个乘法闭子集，如果A是一个Noether环，则分式环$S^{-1}A$也是Noether环。*

证明. 任取$S^{-1}A$中理想J，则$J=S^{-1}I$,其中$I\lhd A$。由所设，I是有限生成的，即$I=A\alpha_1+\ldots+A\alpha_m$,其中$\alpha_1,\dots,\alpha_m\in A.\Rightarrow J=S^{-1}I,=S^{-1}A\alpha_1+\ldots+S^{-1}A\alpha_m$.即$J$是$S^{-1}A$的有限生成理想$\Rightarrow$ $S^{-1}A$ 是Noether环。特别地，任取$P\in Spec(A)$(A的素理想集)，$A_p=S^{-1}A$,其中$A=A\setminus P$. □

Corollary 5.3. *A是Noether环，则A_p是Noether环。*

多项式及多项式组的零点(system)

1.一个变量

$f(x)\in R[x].f(x)=x^2-2x+1,y=ax^2+bx+c(a>0)$.$R$不是代数封闭域

$y=f(x),2\nmid deg(f)$,图像一定过x轴,$x\to+\infty,2\nmid n$. 2.两个变量的情形

$f(x,y)=ax+by+c.(a,b,c\in R,a,b$不同时为0) $f(x,y)=0,f(p)=0,f(x,y)=x^2+y^2-r^2$,

$f(x,y)=x^2+y^2+1.$

设k是一个代数封闭域，考虑k上的多项式环，$A=k[x_1,\dots,x_n].f\in A,k^n$为$k$上$n$维仿射空间。记$Z(f)=\{p=(a_1,\dots,a_n)\in k^n:f(p)=0\}$.同样地，任取$I\subset A,Z(I)=\{p\in k^n:f(p)=0,(\forall f\in I)\}$,称$Z(f)$为$f$在$k$上的零点集。显然，$Z(1)=Z(c)=\varnothing(c\in k^*),Z(0)=k^n$.

$f\in A$,令$I=I(f)=<f>=Af$,为f在A中生成的理想。$Z(f)=Z(<f>)=Z(Af),p\in Z(f)\Rightarrow f(p)=0\Rightarrow p\in Z(<f>)=Z(Af),\forall g\in<f>$,有$g=fh,h\in A.g(p)=f(p)h(p)=0$.

事实上:(1)$Z(f)=Z(<f>)$.(2)任取$S\subset A,S\neq\varnothing$,有$Z(S)=Z(<S>)$.

对$\forall a\lhd A,Z(a)$.

Proposition 5.4. *对A中的任一真理想a，有$Z(a)\neq\varnothing$.*

Theorem 5.6 (Hilbert零点定理(Hilbert's Nullstellensatz))**.** *设k是一个代数封闭域，$A=k[x_1,\dots,x_n]$是k上的多项式环，$a\lhd A$是A的一个真理想。$f\in A\setminus 0$,如果$Z(f)\subset Z(a)$,即$f(p)=0(\forall p\in Z(a))$.则存在$r\in Z_{\geqslant}1$, 使得$f^r\in A$.(即$f\in\sqrt{a}=rad(a)-a$的根理想)。*

证明. 引入一个变量y，令$B=k[x_1,\dots,x_n,y]$,为方便记，简记$X=[x_1,\dots,x_n]$,在B中考虑由a与$(1-fy)$生成的理想a'，即$a'=<a\cup(1-fy)>$(在B中)。断言：$a'=<1>$.假若不然，则a'为B中的真

理想，于是$Z[a'] \neq \varnothing$.特别地，有$P = (a_1, \ldots, a_n, b) \in k^n \times k$,且$(1 - fy)(P_0) = 1 - f(p_0)b = 0(*)$
但另一方面，有所设，$P_0 \in Z(a) \subset Z(f)$,故有$f(P_0) = 0$,与$(*)$矛盾！因此，$a' =< 1 >$.于是

$$1 = g_1h_1 + \ldots + g_sh_s + (1 - fg)h.(**)$$

其中$g_i = g_i(x) = g_i(x_1, \ldots, x_n) \in a, h_i = h_i[x, y] \in B, h = h(x, y) \in B, X = (x_1, \ldots, x_n)$.在$(**)$中取$y = \frac{1}{f}$,得

$$1 = g_1(x)h_1(x, \frac{1}{f}) + \ldots + g_s(x)h_s(x, \frac{1}{f}) = \frac{1}{f^r}(g_1(x)f_1(x) + \ldots + g_s(x)f_s(x)),$$

$\Rightarrow f^r = g_1(x)f_1(x) + \ldots + g_s(x)f_s(x) \in a.$ □

5.2 域的Galois扩张例子选讲

Example 5.5. *(三次扩域)*

设$f(x) = x^3 + ax + b \in \mathbb{Q}[x]$,是$\mathbb{Q}$上不可约多项式，设$\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \alpha_3$为$f(x)$在$C$中的全部根，令$k = \mathbb{Q}(\alpha)$,则$[K : \mathbb{Q}] = deg(f) = 3$.又记$K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$为$f$在$\mathbb{Q}$上的分裂域。$K/\mathbb{Q}$是$Galois$的$\Leftrightarrow k = K$.
(1)$K/\mathbb{Q}$是$Galois$的记$G = Gal(K/\mathbb{Q})$,任取$\sigma \in G : \alpha_1 \longmapsto \sigma(\alpha_1), \alpha_2 \longmapsto \sigma(\alpha_2), \alpha_3 \longmapsto \sigma(\alpha_3)$.

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 + ax + b$$

$$f(x) = \sigma(f(x)) = (x - \sigma(\alpha_1))(x - \sigma(\alpha_2))(x - \sigma(\alpha_3)).$$

σ 只作用在系数上。
$\Rightarrow (\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \sigma(\alpha_3))$是$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$的一个置换，于是有映射

$$G \longrightarrow S_3, \sigma \longmapsto (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)).$$

且显然是单一群同态.像相同原像相同.$\Rightarrow \#G||S_3| = 6 \Rightarrow |G| = 3$或6.
令$S = (\alpha_1 - \alpha_2), (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)$, f的判别式即是$\Delta = S^2$,(注：一般地，对于多项式$f(x) = a\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$,则$\sigma(f) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$
如：$f(x) = x - \alpha$,

$$f(x) = x^2 + ax + b = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2).\Delta = a^2 - 4b,$$

$$\Delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = (-a)^2 - 4b = a^2 - 4b.$$

$\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1), \sigma(\delta) = (\sigma(\alpha_1) - \sigma(\alpha_2))(\sigma(\alpha_2) - \sigma(\alpha_3))(\sigma(\alpha_3) - \sigma(\alpha_1)) = \delta$ 或$-\delta$
且$\sigma(\delta) = \delta \Leftrightarrow \sigma \in A_3$(偶置换),
$sigma(\Delta) = \sigma(\delta^2) = \Delta(\Delta \in \mathbb{Q})$多项式系数在哪里，$\Delta$ 就在哪里。
$\sigma(\Delta) = \Delta(\forall \sigma \in G) \Rightarrow \Delta \in K^G = \mathbb{Q}$
由上述讨论可知

$$\delta \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \delta \in K^G \Leftrightarrow \sigma(\delta) = \delta(\forall \sigma \in G) \Leftrightarrow G = A_3.$$

又$\delta \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \Delta = \delta^2 \in \mathbb{Q}^2$
结论：对于上述$k = \mathbb{Q}(\alpha), K/\mathbb{Q}$是Galois扩张$\Leftrightarrow k = K \Leftrightarrow G = Gal(K/\mathbb{Q}) = A_3 \Leftrightarrow \Delta \in \mathbb{Q}^2$(即$\delta \in \mathbb{Q}$).
对于上述$f(x) = x^3 + ax + b, \Delta(f) = -4a^3 - 27b^2$.
例如，(1)取$f(x) = x^3 - x - 1, f(\alpha) = 0.\Delta(f) = -4(-1)^3 - 27 = 4 - 27 = -23$不属于$\mathbb{Q}^2$。故$\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$不是Galois 扩张。对于$f$在$\mathbb{Q}$上的分裂域$K$，有$Gal(K/Q), \simeq S_3$.
(2)$f(x) = x^3 - 3x + 1, \Delta(f) = -4(-3)^3 - 27 = 81 = 9^2 \in \mathbb{Q}^2.\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$是Galois的且$Gal(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) = A_3$.

Example 5.6. 设$f(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
则$f(x)$在$\mathbb{Q}$上不可约*(爱森斯坦判别法，$p = 2$)*，记$\alpha = \sqrt[4]{2}$,则f在C中的所有根为 $\alpha, i\alpha, i^2\alpha, i^3\alpha (i = \sqrt{-1})$,于是$f$在$\mathbb{Q}$上的分裂域为$K = \mathbb{Q}(\alpha, i\alpha, i^2\alpha, i^3\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha, i) = \mathbb{Q}(\beta)$.
$K/\mathbb{Q}$是*Galois*扩张且$[K : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2 \times 4 = 8, K = \mathbb{Q}(\alpha, i) = \mathbb{Q}(\alpha)(i)$.
记$G = Gal(K/\mathbb{Q})$,下面计算G，任取$\sigma' \in G$

$$\sigma' : K \longrightarrow K, \sigma'(\alpha, i) \longmapsto (\sigma'(\alpha), \sigma'(i)),$$
$$\sigma'(\alpha) = \{\alpha, i\alpha, i^2\alpha, i^3\alpha\}, \sigma'(i) = \{i, -i\}.$$

令

$$\tau : i \longmapsto -i, \alpha \longmapsto \alpha,$$
$$\sigma : i \longmapsto i, \alpha \longmapsto i\alpha.$$

于是$\tau, \sigma \in G = Gal(K/Q)$且$\tau^2 = id$

$$\sigma(i) = \sigma^2(i) = \sigma^3(i) = \ldots = i;$$
$$\sigma^2(\alpha) = \sigma(i\alpha) = \sigma(i)\sigma(\alpha) = i(i\alpha) = -\alpha = i^2\alpha;$$
$$\sigma^3(\alpha) = \sigma(\sigma^2(\alpha)) = \sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha) = -i\alpha = i^3\alpha;$$
$$\sigma^4(\alpha) = \sigma(\sigma^3(\alpha)) = \sigma(-i\alpha) = -i\sigma(\alpha) = \alpha.$$

即$\sigma^4 = id$.故在G中，阶$\circ(\tau) = 2, \circ(\sigma) = 4$,事实：$G =< \sigma, \tau >$,且$\# G = 8$*(由扩张次数即知)*
$G \supset < \sigma, \tau >, G \supset < \sigma >$,但$\tau$ 不属于$< \sigma >$,故 $\# < \sigma, \tau >> 4. \Rightarrow \# < \sigma, \tau > \geqslant 8$
G中的二阶元:$\circ(\tau) = 2, \circ(\sigma^2) = 2, \circ(\tau\sigma^2) = 2, \circ(\sigma^2\tau) = 2, \circ(\sigma\tau) = 2$.
关系：

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} = \sigma^3.$$

G共有五个二阶子群，分别为：

$$< \tau >, < \sigma^2\tau >, < \sigma^2 >, < \sigma\tau >, < \sigma^3\tau >$$

所对应的中间域分别为：

$$Q(\alpha), Q(i\alpha), Q(\alpha^2 + i), Q((i + 1)\alpha), Q((i - 1)\alpha).$$

G共有三个四阶子群，分别为：

$$<\tau,\sigma^2>,<\sigma>,<\sigma^2,\tau\sigma>,$$

所对应的中间域分别为：

$$Q(\sqrt{2}),Q(i),Q(\sqrt{-2}).$$

Example 5.7. 设k是一个域，$t_1,\ldots,t_n$是n个在k上代数无关的元,*(未定元)*考虑域$K=k(t_1,\ldots,t_n)$,显然，n次对称群S_n可作用于集合$\{t_1,\ldots,t_n\}$上，即对$\forall\sigma\in S_n$,令 $\sigma(t_1,\ldots,t_n)=(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(n)})$由此导出，$K$到自身的一个$k-$自同构，仍记为$\sigma$.即$\sigma\in Aut_k(K)$,事实上，得到单一群同态$S_n\hookrightarrow Aut_k(K)$于是，可把$S_n$ 看作$Aut_k(K)$的子群.令$E=K^{S_n}$,则由$Artin$定理可知，K/E是$Galois$的.且$Gal(K$
S_n.

$f\in E\Leftrightarrow\sigma(f)=f(\forall\sigma\in S_n)$其中 $\sigma(f(t_1,\ldots,t_n))=f(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(n)})$即$f$是关于$t_1,\ldots,t_n$的对称多项式$\Rightarrow$ $f=g(s_1,\ldots,s_n)$,其中$g\in K,s_1,\ldots,s_n$是关于$t_1,\ldots,t_n$的全部初等对称多项式$\Rightarrow$ $E=k(s_1,\ldots,s_n)$.

另一方面，对$\forall h\in k(s_1,\ldots,s_n)$,显然有$\sigma(h)=h(\forall\sigma\in S_n)\Rightarrow k(s_1,\ldots,s_n)\subset E$,因此$E=k(s_1,\ldots,s_n)$，即

$$K^{S_n}=k(t_1,\ldots,t_n)^{S_n}=k(s_1,\ldots,s_n),$$

又，令$f(x)=(x-t_1)\ldots(x-t_n)$,则$K=k(t_1,\ldots,t_n)$是$f$在$k$上的分裂域，$f$可分，$f(x)\in F[x]$,其中$E=k(s_1,\ldots,s_n)\Rightarrow K/E$ 是$Galois$扩张，且$Gal(K/E)=S_n$.
(Galois逆问题).任给一个有限群H，是否有有理数域$\mathbb{Q}$的$Galois$扩张K，使得$Gal(K/\mathbb{Q})=H$?

Example 5.8. 复数域$\mathbb{C}$是一个代数封闭域.*(代数基本定理)*

证明. 3个事实:(0)任意非负实数均是某个实数的平方.$\alpha\in R_{\geqslant 0},\alpha=\beta^2$
(1)奇次数实系数多项式必有实数根.(用连续性)
(2)$R(i)$中任意元素在$R(i)$中均有一个平方根.(假设不知是$\mathbb{C}$)即$\forall\alpha=a+bi\in R(i)(a,b\in R)$都有$\alpha=(c+di)^2$,其中$c^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2},d^2=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$
下证$R(i)$是代数封闭的.

为此，任取$R(i)$中一个有限扩域K，则K/R是有限扩张，设L是K/R的一个正规闭包，记$G=Gal(L/R)$，显然,$2=[R(i):R]|[L:R]$.即$2|\#G$.令H为G的$Sylow-2$子群，记E为L对R的对应于H的中间域，则$2\nmid[E:R]$,即E为R 的奇数次扩张，又由本原元素定理，$E=R[\alpha]$,对某个$\alpha\in E$,设α 在R上的极小多项式为$P_\alpha(x)$. 则$P_\alpha(x)\in R[x],2\nmid deg(P_\alpha(x))$,且$P_\alpha(x)$在$R$上不可约，于是由前面的事实(1)可知，$deg(P_\alpha(x))=1$,即$\alpha\in R\Rightarrow E=R\Rightarrow G=H$,即$G$是一个$2-$群，记$\#G=2^r$,下证$r=1$.
为此，记$G_0=Gal(L/R(i))$,则$\#G_0=2^{r-1}$.假若$r-1>0$,则G_0由一个2^{r-2}阶子群H_0,且令$E_0=L^{H_0}$,则$[E:R(i)]=[G_0:H_0]=2$,即E_0是$R(i)$的二次扩域，与事实(2)矛盾.$\Rightarrow r=1\Rightarrow L=R(i)\Rightarrow K=R(i)$,即$R(i)$是代数封闭的。 □

Example 5.9. 设p是一个素数，$f(x)\in\mathbb{Q}$是$\mathbb{Q}$上的p次不可约多项式，如果f恰有两个非实的复根，则f在$\mathbb{Q}$上的分裂域的$Galois$群即是S_p*(p次对称群)*。

证明. 用到如下事实：S_p可由p-循环$(12\ldots p)$与任一个对换生成.$(S_P =< 12\ldots p, tau > \tau = (mn)$是个对换),记$K$为$f$在$\mathbb{Q}$上的分裂域，且设$\alpha$为$f$在$\overline{\mathbb{Q}}$中的一个根，并记$F = \mathbb{Q}(\alpha)$,则$[F : \mathbb{Q}] = degf = p \Rightarrow p|[K : \mathbb{Q}] = \#G$,其中$G = Gal(K/\mathbb{Q})$,即$G$中含有$p$阶元，又$G \leqslant S_p$,由置换群的性质可知，$S_p$中的$p$阶元必与$p$轮换$(12\ldots p)$共轭，又由所设，$f(x)$有$p-2$个实根 $\alpha_1, \ldots \alpha_{p-2}$, 及一对共轭复根$\beta, \overline{\beta}$.
令

$$\tau : K \longrightarrow K$$

$$\alpha_i \longmapsto \alpha_i$$

$$\beta \longmapsto \overline{\beta}$$

$$\overline{\beta} \longmapsto \beta$$

则$\tau \in S_n$,是一个对换$\Rightarrow G = S_p$. □

如$f(x) = x^5 - 4x + 2$,则f在$\mathbb{Q}$上的分裂域K的Galois群即为S_5.
$f'(x) = 5x^4 - 4, x = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$.
$f''(x) = 20x^3, f''(-\sqrt[4]{\frac{4}{5}}) < 0$极大值点，$f''(\sqrt[4]{\frac{4}{5}}) > 0$极小值点。