## 范畴

## Lhzsl

## 2021年2月8日

范畴的定义

定义:一个范畴 (包含以下结构

- 1.集合 $Ob(\mathfrak{C})$ ,其元素称作 $\mathfrak{C}$ 的对象,
- 2.对于 $\mathfrak{C}$ 中任意两个对象,给定一个集合 $[A,B]_{\mathfrak{C}}$ ,其中元素称为范畴 $\mathfrak{C}$ 内A到B的**态射**,该集合常简记为 $Hom_{\mathfrak{C}}(A,B)$ .集合 $Moc(\mathfrak{C})=\cup_{A.B\in\mathfrak{C}}Hom_{\mathfrak{C}}(A,B)$ 中元素称为 $\mathfrak{C}$ 的态射。
- 3.对每个对象X给定元素 $id_X \in Hom_{\mathfrak{C}}(X,X)$ ,称为X到自身的恒等映射。
- 4.对于任意 $X, Y, Z \in Ob(\mathfrak{C})$ ,给定态射间的**合成映射**

$$\circ: Hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y) \longrightarrow Hom_{\mathfrak{C}}(X,Z)$$
$$(f,g) \mapsto f \circ g,$$

常将  $f \circ g$ 简记为fg.它满足

(i)结合律:对于任意态射 $h, g, f \in Mor(\mathfrak{C})$ ,若合成f(gh)和(fg)h都有定义,则

$$f(gh) = (fg)h.$$

故两边可写成同时fgh。

(ii)对于任意态射 $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ ,有

$$f \circ id_X = f = id_Y \circ f$$
.

设有范畴 $\mathfrak{C},\mathfrak{B}$ .若有 $Ob(\mathfrak{B}) \subseteq Ob(\mathfrak{C})$ ,对于任意 $A, B \in Ob(\mathfrak{B})$ ,  $Hom_{\mathfrak{B}}(A, B) \subseteq Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ 及 $\mathfrak{C},\mathfrak{B}$ 有相同的合成映射,那么称 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{C}$ 的子范畴,再者,如果对于任意 $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$ 有 $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B) = Hom_{\mathfrak{B}}(A, B)$ ,则称 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{C}$ 的全子范畴。

这里仅举一个范畴的例子: 把所有的群都放在一起得到 $\mathfrak{Op}$ .对于任意两个群,所有从A到B的群同态组成 $Hom_{\mathfrak{Op}}(A,B),g\circ f$ 是映射的合成,这样便得到群范畴 $\mathfrak{Op}$ .

设m是范畴 $\mathfrak{C}$ 的态射,如果对于任意 $f,g \in Mor(\mathfrak{C})$ ,从mf = mg得到f = g,则称m为单态射,另一方面如果对于任意 $f,g \in Mor_{\mathfrak{C}}$ ,从fm = gm得到f = g,则称m为满态射。我们称 $f \in [A,B]_{\mathfrak{C}}$ 是同构,如果存在 $g \in [B,A]_{\mathfrak{C}}$ 使得 $gf = 1_A,fg = 1_B$ .

设C、D是两个范畴,由C到D的一个(共变(covariant))函子(functor)F是指:

(i)对于 $\mathfrak{C}$ 中任意对象X,F规定了 $\mathfrak{D}$ 中的相应的对象F(X).

(ii)设X,Y是 $\mathfrak{C}$ 中任意两个对象,对于任 $-f \in [X,Y]_{\mathfrak{C}}$ ,F规定 $[F(X),F(Y)]_{\mathfrak{D}}$ 中的一个元素(态射)F(f),满足:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \forall f \in [X, Y]_{\mathfrak{C}}, g \in [Y, Z]_{\mathfrak{C}}$$

以及

$$F(1_X) = 1_{F(X)}.$$

如果将上述条件(ii)改成

(ii')对于任一 $f \in [X,Y]_{\mathfrak{C}}$ ,F规定了 $[F(Y),F(X)]_{\mathfrak{D}}$ 中的一个元素(态射)F(f),满足:

$$F(g\circ f)=F(f)\circ F(g), \forall f\in [X,Y], g\in [Y,Z]$$

以及

$$F(1_X) = 1_{F(X)}$$

则称F为C到②的反变函子(contravariant functor)。

对于任何范畴 $\mathfrak{C}$ ,设((sets))是全体集合组成的范畴,任取 $X \in Ob(\mathfrak{C})$ ,若规定 $h_X : \mathfrak{C} \to ((sets)), Y \mapsto Hom_{\mathfrak{C}}(Y,X)$ ,任意态射 $f: Z \to Y$ ,

$$h_X(f): Hom_{\mathfrak{C}}(Y,X) \to Hom_{\mathfrak{C}}(Z,X),$$

$$g \mapsto g \circ f$$

则 $h_X$ (也可写作 $Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot,X)$ )是 $\mathfrak{C}$ 到((sets))的反变函子。

联系两个函子的概念是"函子态射"(或称"自然变换").设 $\mathfrak C$ 和 $\mathfrak D$ 是两个范畴,F和G是 $\mathfrak C$ 到 $\mathfrak D$ 的两个函子。由F到G的函子态射 $\mathfrak D$ 是指:对于 $\mathfrak C$ 的任何一个对象X,给定一个态射 $\mathfrak D_X:F(X)\to G(X)$ ,使得下图交换

$$F(X) \xrightarrow{\Phi_X} G(X)$$

$$F(f) \downarrow \qquad \qquad \downarrow G(f)$$

$$F(Y) \xrightarrow{\Phi_Y} G(Y)$$

其中X,Y是 $\mathfrak{C}$ 中任意两个对象,f是X到Y的任意态射。我们记函子态射 $\Phi$ 为 $\Phi:F\to G$ ,当所有 $\Phi_X:FX\to GX$ 是同构时,称函子同态是函子同构。

称函子 $T: \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 是范畴等价: 若存在函子 $S: \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ 及函子同构

$$\Phi: 1_{\mathfrak{D}} \subseteq TS, \Psi: ST \subseteq 1_{\mathfrak{C}}.$$

称函子 $T: \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 是要满函子: 若对于任意 $Y \in Ob(\mathfrak{D})$ , 存在 $X \in Ob(\mathfrak{C})$ 使得TX与Y同构。 称函子T是忠实的(faithful),如果从任意对象 $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$ 所定的映射

$$T: Hom_{\mathfrak{C}}(A,B) \to Hom_{\mathfrak{D}}(T(A),T(B))$$

$$(A \xrightarrow{f} B) \mapsto (T(A) \xrightarrow{T(f)} T(B))$$

是单射。如果此映射是满射,则说函子T是全忠实函子(fully faithful).

**命题:** 函子 $F: \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_2$ 等价当且仅当F是全忠实要满函子。

证明:( $\Rightarrow$ )设拟逆函子 $G: \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{C}_1$ 和函子同构 $\psi: id_{\mathfrak{C}_1} \approx GF, \phi: id_{\mathfrak{C}_2} \approx FG.$ 对于 $\mathfrak{C}_2$ 中任何对象Z,都有同构 $\phi_Z: F(GZ) \to Z$ ,故F是本质满的。

观察到

$$Hom_{\mathfrak{C}_1}(X,Y) \stackrel{F}{\to} Hom_{\mathfrak{C}_2}(FX,FY) \stackrel{G}{\to} Hom_{\mathfrak{C}_1}(GF(X),GF(Y)) \to Hom_{\mathfrak{C}_1}(X,Y)$$

$$f \longmapsto Ff \longmapsto GF(f) \longmapsto \psi_Y^{-1}GF(f)\psi_X$$

合成是恒等映射, 事实上, 由函子同构 $\psi:id_{\mathfrak{C}_1}\overset{\sim}{\to}GF$ , 有交换图表

$$X \xrightarrow{\psi_X} GF(X)$$

$$f \downarrow \qquad \qquad \downarrow_{GF(f)}$$

$$Y \xrightarrow{\psi_Y} GF(Y)$$

从而 $\psi_Y f = GF(f)\psi_X$ .由于 $\psi_Y$ 是同构,因此 $f = \psi_Y^{-1}GF(f)\psi_X$ .这就说明F有逆映射,从而是单射,同样可得G是忠实的。

下面证明是满射: 首先对任意的 $v \in Hom_{\mathfrak{C}_2}(FX, FY)$ ,令 $f = (\psi_Y)^{-1}G(v)(\psi_X)$ .对于该映射,上交换图依然交换,于是GF(f) = G(v),由于G是忠实的,得到F(f) = v,从而是满射。

(秦)首先对于 $\mathfrak{C}_2$ 中每一对象M, $\mathfrak{C}_1$ 中存在对象 $A_M$ (可能有多个,选取其中一个)及同构 $v_M:M\to F(A_M)$ .

定义函子 $G:\mathfrak{C}_2\to\mathfrak{C}_1$ 如下: 若 $M\in\mathfrak{C}_2$ ,设 $G(M)=A_M$ .若 $w:M\to N$ ,利用 $v_M$ 是同构得到 $w':FA\to FB$ 使有交换图表:

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{v_M} FA_M \\
\downarrow^{w'} & \downarrow^{w'} \\
N & \xrightarrow{v_N} FA_N
\end{array}$$

由于F是全忠实函子,故有 $w_1: A \to B$ 使得 $F(w_1) = w'$ .设 $G(w) = w_1$ .

取 $A \in \mathfrak{C}_1$ ,设B = GFA,于是有同构 $v_{FA} : FA \to FB$ .因为F是全忠实函子,有唯一 $\psi_A : A \to B = GFA$ 使得 $F\psi_A = v_{FA}$ .注意由于 $v_{FA}$ 是同构,F是全忠实函子,得到 $\psi_A : A \to GFA$ 是同构,这就决定函子同构 $\psi : 1 \to GF$ .

取 $M \in \mathfrak{C}_2$ ,设A = GM.则同构 $v_M : M \to FA = FGM$ 决定函子同构 $\phi : 1 \to FG$ ,即有 $\phi_M = v_M$ . 下面验证函子态射的交换性。

首先验证

$$M \xrightarrow{\phi_M = v} FG(M)$$

$$\downarrow W \qquad \qquad \downarrow FG(w)$$

$$N \xrightarrow{\phi_N = v_N} FG(N)$$

这只需注意到FG(w) = w',由上一个交换图表即得。

下面验证 $\mathfrak{C}_1$ 中函子态射交换性,任意态射  $f: A \to Y$ ,在 $\mathfrak{C}_2$ 中有下交换图表

$$FA \xrightarrow{v_{FA}} FG(FA)$$

$$F(f) \downarrow \qquad \qquad \downarrow FG(F(f))$$

$$FY \xrightarrow{v_{FY}} FG(F(Y))$$

从而 $F(GF(f)) = v_{FY} \circ F(f) \circ (v_{FA})^{-1}$ .再注意到 $F\psi_A = v_{FA}$ .于是 $F(\psi_Y \circ f \circ \psi_A^{-1}) = v_{FY} \circ F(f) \circ (v_{FA})^{-1}$ .由于F是忠实的,得到 $GF(f) = \psi_Y \circ f \circ \psi_A^{-1}$ .从而有交换图

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\psi_A} GF(A) \\
f & & \downarrow GF(f) \\
Y & \xrightarrow{\psi_Y} GF(Y)
\end{array}$$

证毕。

$$y: Tran(Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot, X), F) \to F(X).$$

$$y: \bar{\xi} \mapsto \bar{\xi}_X(id_X)$$

证明: 设 $\xi \in F(X)$ .对于 $\mathfrak C$ 中态射 $f:A\to X,$ 令 $\bar\xi_A(f)=F(f)(\xi)$ .下面验证 $\bar\xi$ 是自然变换。在 $\mathfrak C$ 中 $g:A\to B$ 为态射,须验证下图交换

$$Hom_{\mathfrak{C}}(A,X) \xrightarrow{\bar{\xi}_{A}} F(A)$$

$$\downarrow^{Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot,X)(g)} \qquad \qquad \downarrow^{F(g)}$$

$$Hom_{\mathfrak{C}}(B,X) \xrightarrow{\bar{\xi}_{B}} F(B)$$

任意 $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A,X), F(g)\bar{\xi}_A(f) = F(g)F(f)(\xi) = F(f \circ g)(\xi)$ (注意F是反变函子),  $\bar{\xi}_B(Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot,X)(g))(f) = \bar{\xi}_B(f \circ g) = F(f \circ g)(\xi)$ ,这就是上图交换,于是 $\bar{\xi}$ 是自然变换,且 $\bar{\xi}_X(id_X) = F(id_X)(\xi) = \xi$ .即该映射是满射。

下证单射:  $\bar{\xi} \in Tran(Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot, X), F)$ 是自然变换,于是对于 $\mathfrak{C}$ 中态射 $f: A \to X$ ,有下交换图

$$Hom_{\mathfrak{C}}(X,X) \xrightarrow{\bar{\xi}_{X}} F(X)$$

$$Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot,X)(f) \downarrow \qquad \qquad \downarrow^{F(f)}$$

$$Hom_{\mathfrak{C}}(A,X) \xrightarrow{\bar{\xi}_{A}} F(A)$$

于是 $\bar{\xi}_A(f) = \bar{\xi}_A(f)(id_X) = F(f)\circ\bar{\xi}_X(id_X)$ .若有另外自然变换 $\sigma \in Tran(Hom_{\mathfrak{C}}(\cdot,X))$ ,使得 $\sigma_X(id_X) = \bar{\xi}_X(id_X)$ ,则 $\bar{\xi}_A(f) = \sigma_A(f)$ ,于是 $\bar{\xi}_B = \sigma_B$ 对任意 $B \in Ob(\mathfrak{C})$ 成立,即 $\bar{\xi} = \sigma$ .此即单射。 • Abel 范畴有拉回和推出.详细的说,

(1)设A是加法范畴.则A有拉回当且仅当其有核.

设A有核 $,b:B\longrightarrow D$ 和 $q:C\longrightarrow D$ .考虑 $(b,q):B\oplus C\longrightarrow D$ 的核Ker(b,q)及合成

$$f: Ker(b,g) \hookrightarrow B \oplus C \xrightarrow{(1,0)} B$$

和

$$-a: Ker(b,g) \hookrightarrow B \oplus C \xrightarrow{(0,1)} C.$$

则(a, f, Ker(b, g))是(b, g)的拉回.

证明: 若A有核,则直接验证上述构造是拉回.

即有拉回

$$Ker(f,g) \xrightarrow{a} C$$

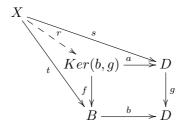
$$\downarrow g$$

为此,需验证(1)bf=ga.注意到Ker(f,g)是映射 $(b,g):B\oplus C\longrightarrow D$ 的核,记 $h:Ker(b,g)\longrightarrow B\oplus C$ ,于是有(b,g)h=0,展开得到(b(1,0)+g(0,1))h=0,即bf-ga=0.

(2)设另有(t,s,X)使得下图交换



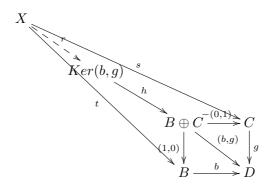
需证明存在态射 $r: X \longrightarrow Ker(b,g)$ 使得下图交换



注意到Ker(f,g)是映射 $(b,g): B\oplus C\longrightarrow D$ 的核,我们可构造一个映射 $k: X\longrightarrow B\oplus C$ 使得(b,g)k=0.这样利用核的性质,我们便能得到一个映射 $r: X\longrightarrow Ker(b,g)$ .这一映射或许就是我们要找的映射。余积 $B\oplus C$ 连同的态射记为 $e_1: B\longrightarrow B\oplus C, e_2: C\longrightarrow B\oplus C$ .

 $(b,g)e_1t = bt, (b,g)(-e_2)s = -gs.$ 从而 $(b,g)(e_1t - e_2s) = 0.$ 于是存在映射 $r: X \longrightarrow Ker(b,g)$ 使

得 $hr = e_1t - e_2s$ .下面验证: ar = -(0,1)hr = s, fr = (1,0)hr = t.满足交换性。



设A是有零对象的范畴,考虑下图



其中 $B^{'}\longrightarrow B$ 是某个态射 $B\longrightarrow B^{''}$ 的核.则该图能扩展成交换图当且仅当 $A^{'}\longrightarrow A$ 是复合态射 $A\longrightarrow B\longrightarrow B^{''}$ 的核.

证明:设 $A' \longrightarrow A$ 是复合态射 $A \longrightarrow B \longrightarrow B''$ 的核,则存在唯一的态射 $A' \longrightarrow B'$ 使得上图交换。若有X使得 $X \longrightarrow A \longrightarrow B = X \longrightarrow B' \longrightarrow B$ ,则 $X \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B'' = X \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B''$ .由于 $A' \longrightarrow A$ 是复合态射 $A \longrightarrow B \longrightarrow B''$ 的核,因此存在唯一态射 $X \longrightarrow A'$ 使得 $X \longrightarrow A' \longrightarrow A = X \longrightarrow A$ .并且

$$X \longrightarrow A^{'} \longrightarrow B^{'} \longrightarrow B = X \longrightarrow A^{'} \longrightarrow A \longrightarrow B = X \longrightarrow A \longrightarrow B = X \longrightarrow B^{'} \longrightarrow B.$$

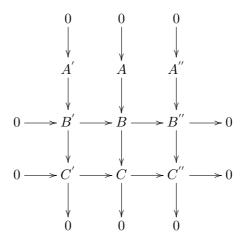
由于 $B' \to B$ 是单射, $X \to A' \to B' = X \to B'$ .

反之, 若有拉回



则 $A' \longrightarrow A$ 是复合态射 $A \longrightarrow B \longrightarrow B''$ 的核。事实上,若 $X \to A \longrightarrow B \longrightarrow B'' = 0$ 由于 $B' \to B$ 是 $B \to B''$ 的核,于是存在态射 $X \to B'$ 使得 $X \to A \to B = X \to B' \to B$ .再根据拉回性质,存在态射 $X \to A'$ 使得 $X \to A' \to A = X \to A$ .

(9 lemma) 如下是范畴中的一个交换图, 所有行和列是正合列.



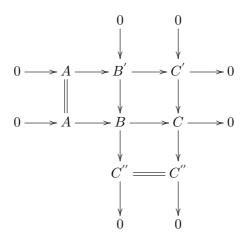
存在态射 $A^{'}\to A$ 和 $A\to A^{''}$ 使得图交换,并且 $0\to A^{'}\to A\to A^{''}\to 0$ 是正合列。下图是一拉回

$$B' \longrightarrow C'$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

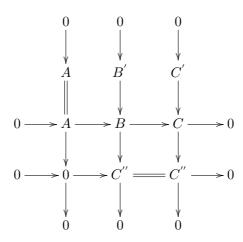
$$B \longrightarrow C$$

其中 $B \to C$ 是满射, $C' \to C$ 是单射,则能扩充为下面交换图.



证明:令 $C \to C''$ 是 $C' \to C$ 的余核, $A \to B$ 是 $B \to C$ 的核。由上面命题知 $B' \to B$ 是 $B \to C \to C$ 

 $C^{''}$ 的核,于是便能得到中间一列的正合性。接下来对下图应用"9引理"便得到结果。



这里注意到存在唯一地态射 $B' \to C'$ 使得



交换,于是由"9引理"得到的态射 $B' \to C'$ 核原来是一致的。