

Discussões Projeto 5

1 tarefa A

Utilizando as equações (3) e (5) foi elaborado um programa que resolva numericamente o pêndulo dentro da aproximação harmônica (3), a partir do método de Euler. Com isso, foi elaborado um gráfico utilizando $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $l = 9.8 \text{ m}$, $m = 1 \text{ Kg}$, disposto abaixo:

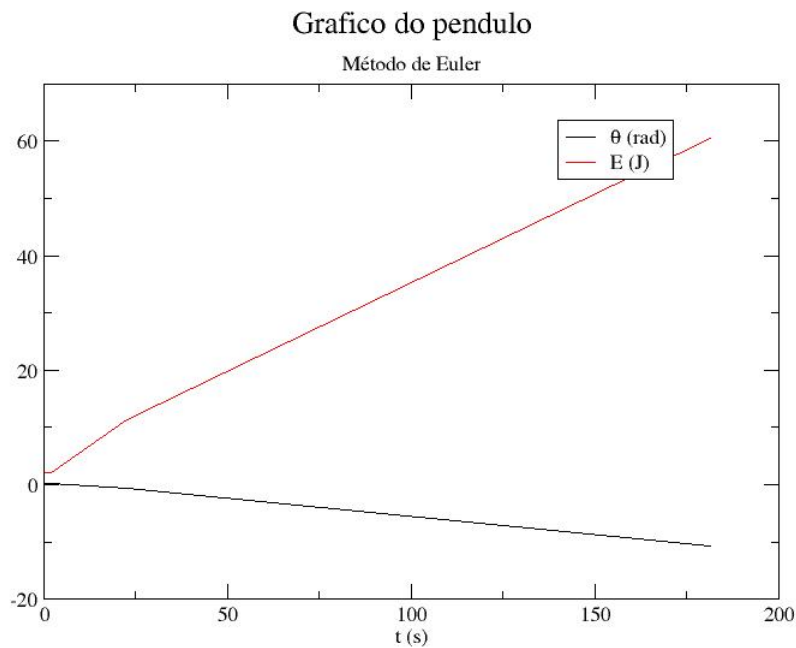


Figura 1: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

Pode-se perceber que a abordagem utilizada está incorreta, pois o sistema está perdendo energia, logo a discretização escolhida (5) não é a adequada. Dessa forma, foi realizada uma modificação no método de Euler (6), resultando no método Euler-Cromer. Após a realização dessa "correção" no programa proposto, obteve-se o seguinte gráfico:

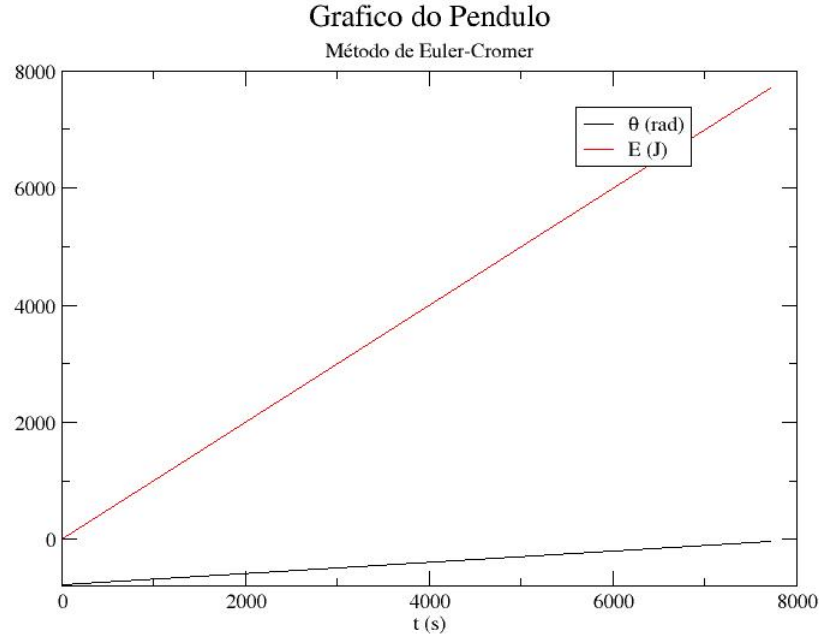


Figura 2: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

2 tarefa B

Adaptando o programa anterior com a equação (7) para que seja considerado os efeitos dissipativos e as ações de forças externas oscilatórias.

2.0.1 B1

Utilizando os mesmos parâmetros que a tarefa A e com $\gamma = F_0 = 0$, foi calculado os períodos utilizando 10 valores aleatórios de $\theta_0 \in [0, 1] \text{ rad}$. Para a obtenção dos resultados fez-se o uso de três métodos diferentes, sendo o primeiro a partir do método iterativo de Euler-Cromer, o segundo calculando de forma iterativa a integral elíptica do período (8), onde foi aplicado o método de Simpson, e por ultimo, usando a equação física obtida a partir da modelagem desse problema físico em específico. Dessa forma, foi comparado os resultados obtidos no gráfico a seguir:

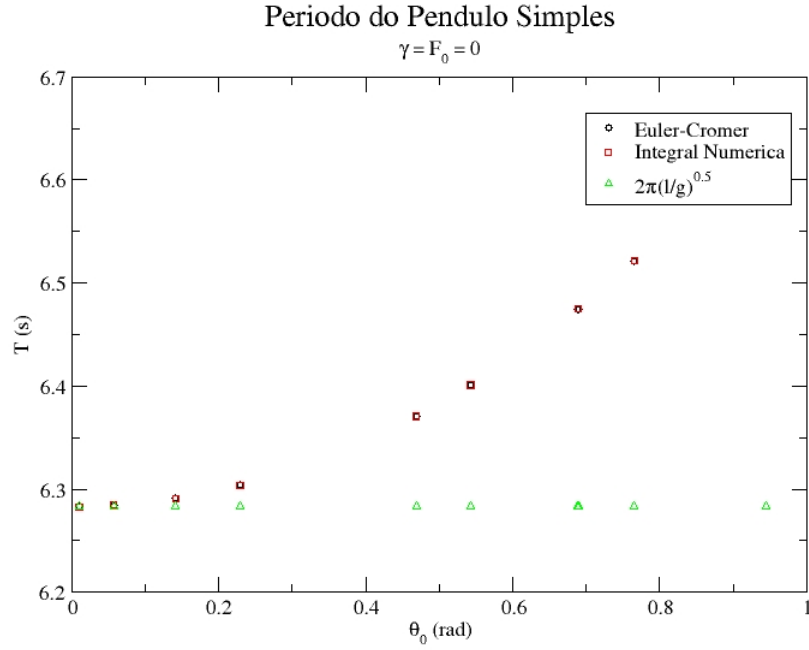


Figura 3: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

É possível observar que o método de Euler-Cromer é uma boa aproximação para modelar esse problema físico, entretanto, para o calculo do período, a equação utilizada desvia do valor quando $\theta > \pi/15$.

2.1 B2

Observando o problema anterior, onde o valor de θ apresentava um desvio, foi elaborado uma nova comparação, repetindo a tarefa proposta em B1, porém agora utilizando a equação do período para θ pequeno (9):

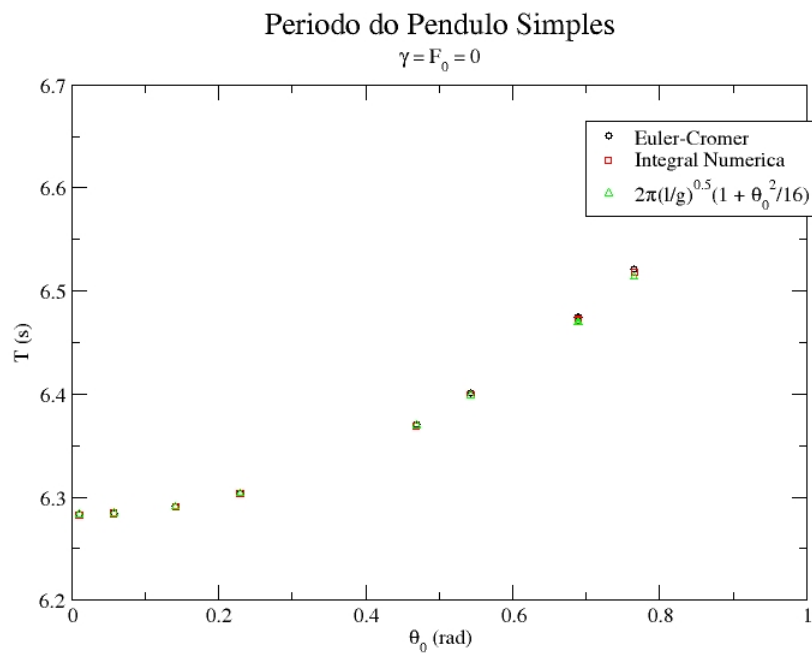


Figura 4: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

2.2 B3

Utilizando a mesma abordagem computacional, contudo, agora para um pendulo amortecido $\gamma = 0.5$, obtêm-se o seguinte gráfico:

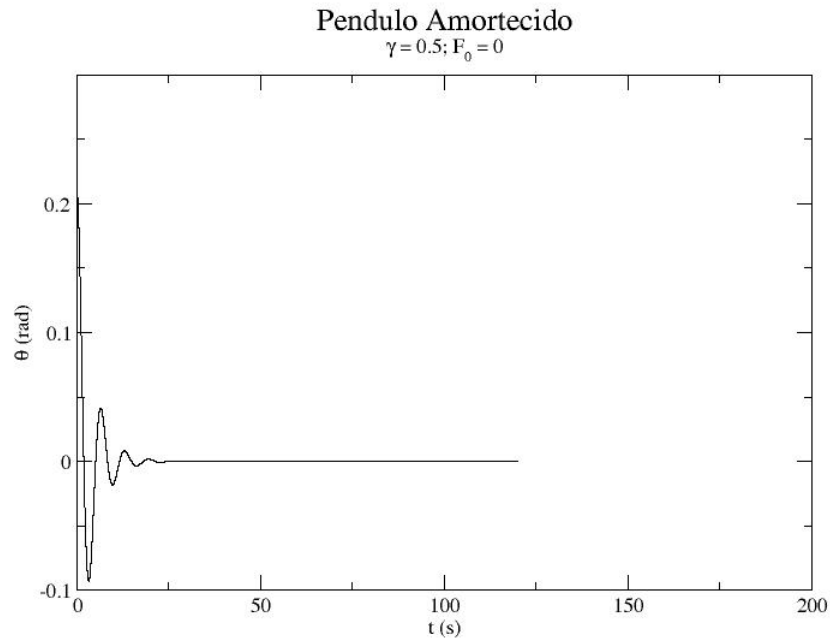


Figura 5: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

A partir do gráfico e da análise dos resultados, podemos concluir que a oscilação obedece à um amortecimento subcrítico, pois $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$, onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

2.3 B4

Agora utilizando $\Omega = 2/3$ e $F_0 = \{0, 0.5, 1.2\}$ foram analisados a posição e velocidade angular em função do tempo, disposta nos gráficos a seguir:

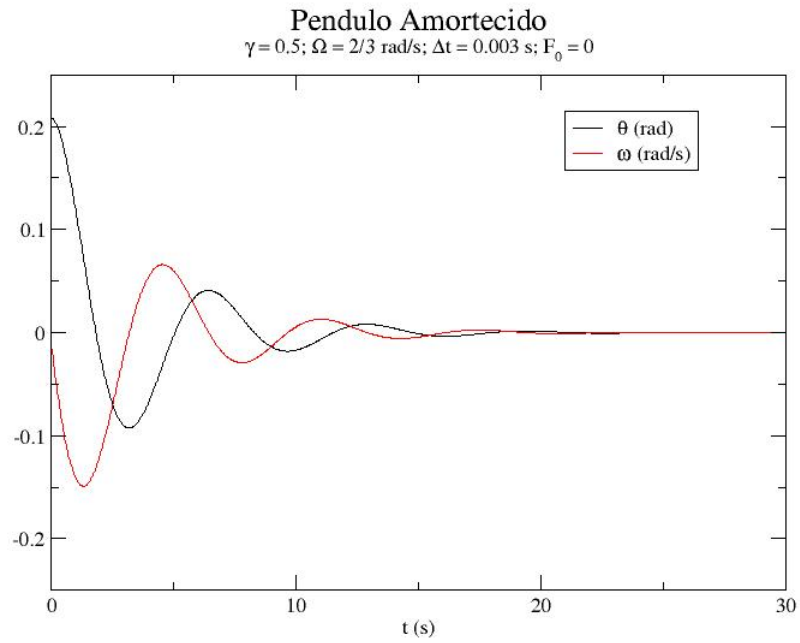


Figura 6: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

Nesse caso, assim como na tarefa B3, o movimento oscilatório corresponde à um movimento amortecido subcrítico, pois como não há ação de nenhuma força externa, $F_0 = 0$, e o fator $\gamma > 0$, a oscilação irá diminuir até parar.

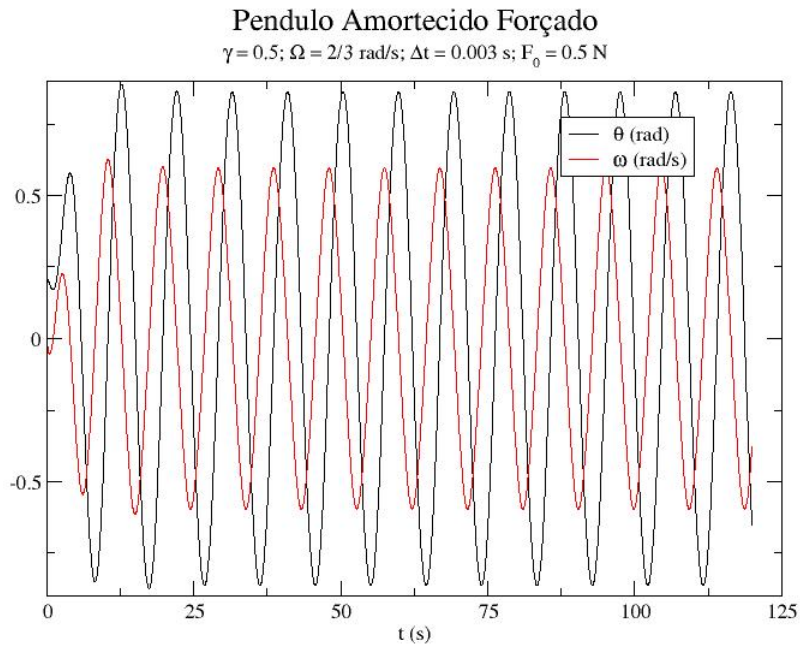


Figura 7: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

Nessas condições, temos um oscilador amortecido forçado, pois as oscilações naturais do oscilador estão parando devido ao amortecimento e, com isso, continuará apenas a oscilação forçada, sendo assim, o período desse pendulo tenderá a ser o mesmo que o período da oscilação da força externa, que nesse caso o valor esperado teórico é dado por: $T = 2\frac{\pi}{\Omega} \approx 9.45$, enquanto o valor obtido calculado pelo método de Euler-Cromer é $T = 9.42$.

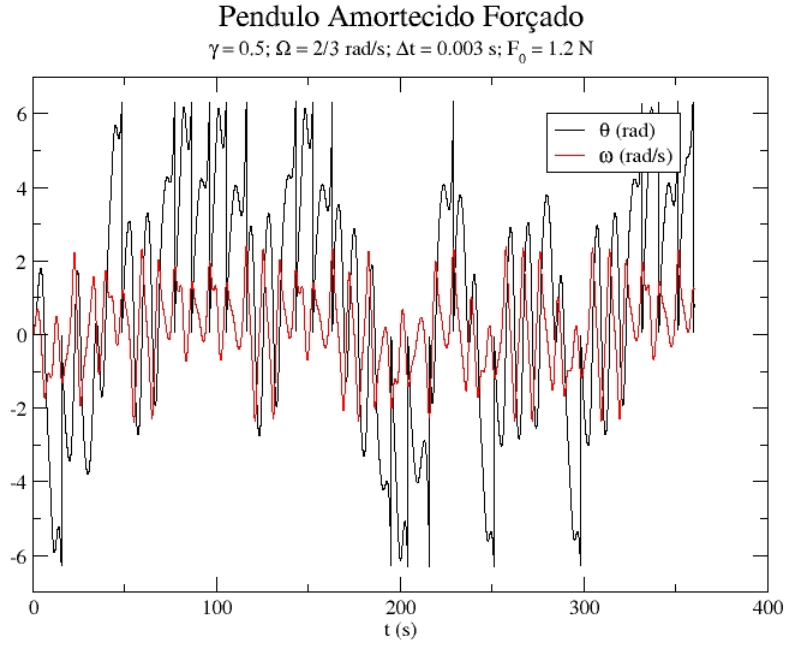


Figura 8: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

Nessa abordagem, obtemos possivelmente um movimento caótico, onde não é possível prever a variação da posição angular em função do tempo.

3 tarefa C

Aplicando a mesma abordagem da tarefa B3, para verificar a existência de um regime caótico, será analisado o expoente de Liapunov. Para isso, será considerado dois ângulos iniciais que diferem de 0.001 rad, $\theta_{01} = \pi/15$ e $\theta_{02} = \pi/15 + 0.001$, onde $\Delta\theta_0 = \theta_{02} - \theta_{01}$ e $\Delta\theta(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t)$, na elaboração dos gráficos:

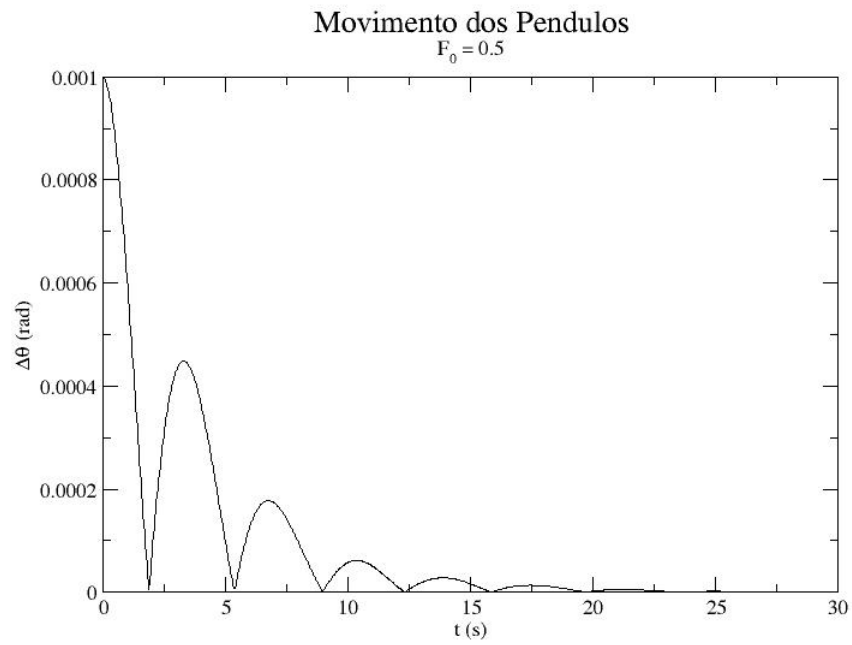


Figura 9: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

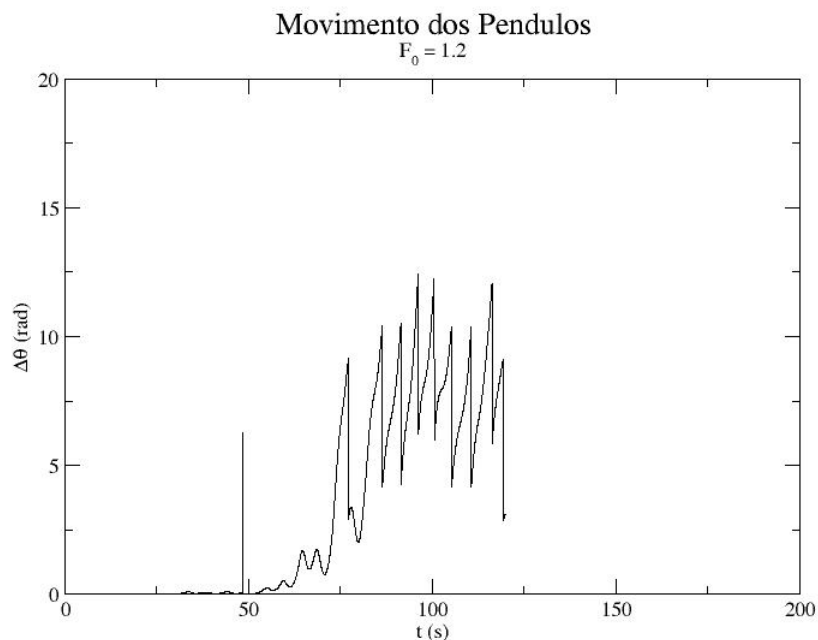


Figura 10: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

É possível perceber que no primeiro caso (figura 9), onde $F_0 = 0.5$, as trajetórias angulares se aproximam exponencialmente caracterizando um sistema não-caótico, enquanto no segundo caso (figura 10), onde $F_0 = 1.2$, as trajetórias se afastam de forma exponencial, o que caracteriza um sistema caótico. Pois, temos que para um sistema caótico o expoente de Liapunov $\lambda > 0$, enquanto um sistema não-caótico $\lambda < 0$, onde $\Delta\theta(t) \approx e^{\lambda t}$. Para o cálculo do valor estimado do parâmetro será estudado os gráficos semi-log dispostos abaixo:

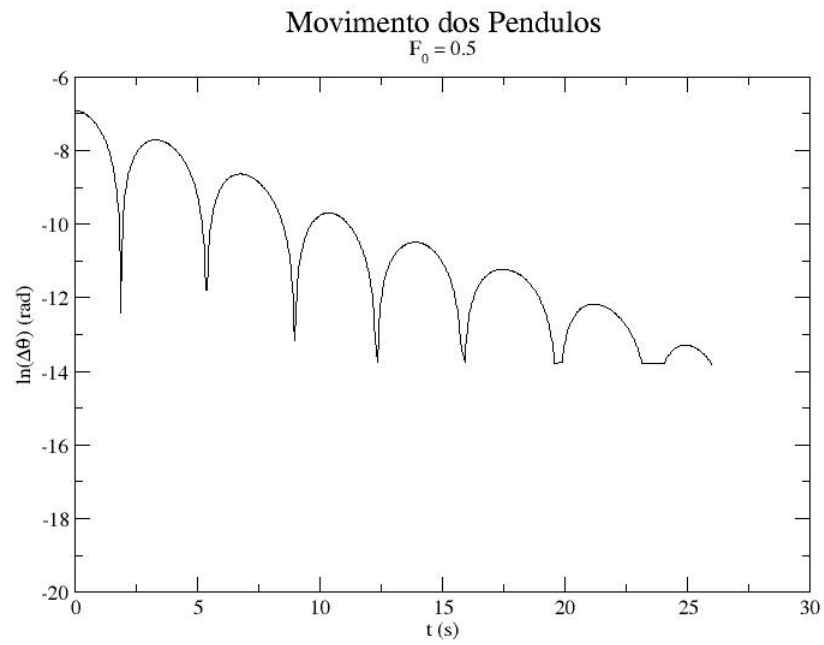


Figura 11: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

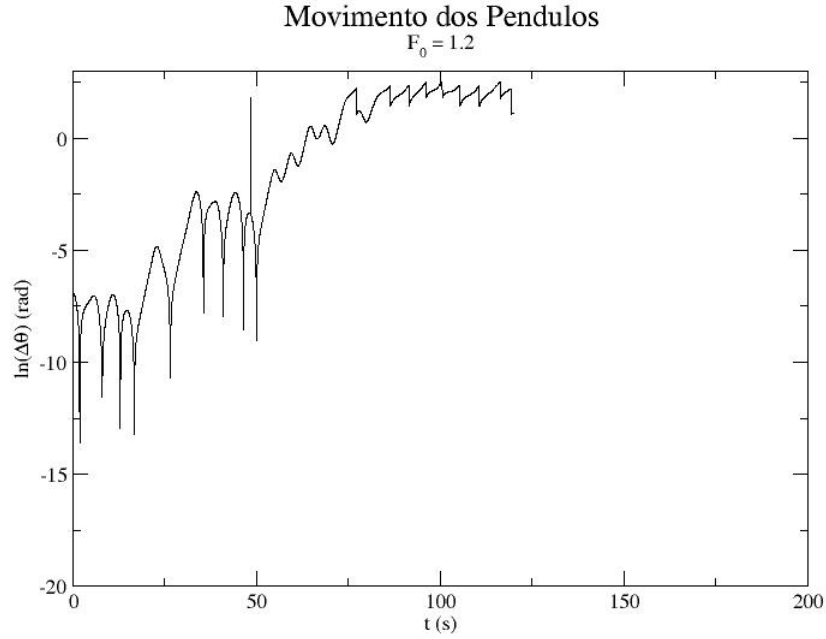


Figura 12: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

Utilizando o método dos mínimos quadrados para realizar o fitting das expressão logarítmica, obtemos para a figura (11), $F_0 = 0.5$, o valor $\lambda \approx -0.251135$, o que verifica a sua natureza não-caótica. Enquanto que para a figura (12), $F_0 = 1.2$, o valor $\lambda \approx 0.103552$, o qual também verifica a sua natureza caótica.

4 tarefa D

Para fins de melhor estudo sobre esses movimentos, foram elaborados com os mesmos parâmetros anteriores ($F_0 = \{0.5, 1.2\}$; $\theta_0 = \{\pi/15, \pi/15 + 0.001\}$) os gráficos da velocidade angular em função da posição angular:

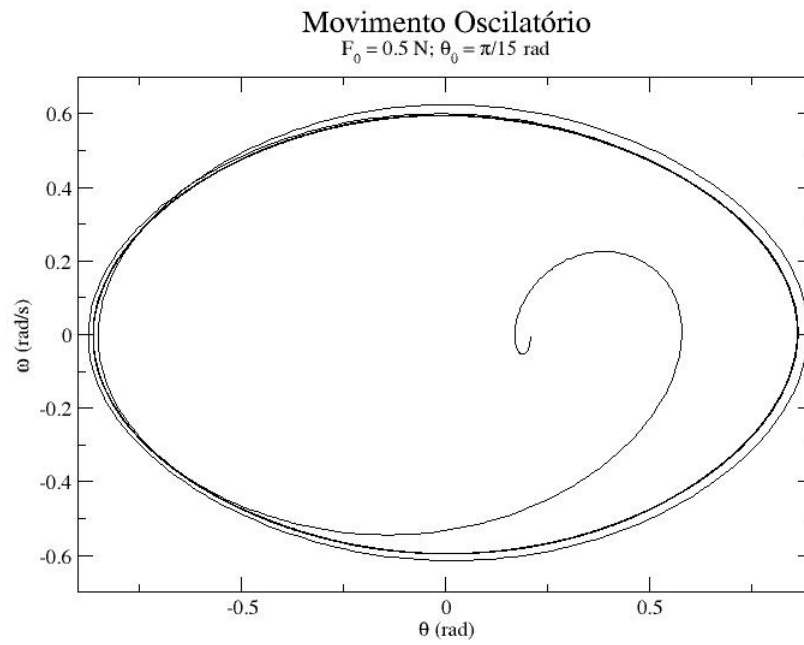


Figura 13: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

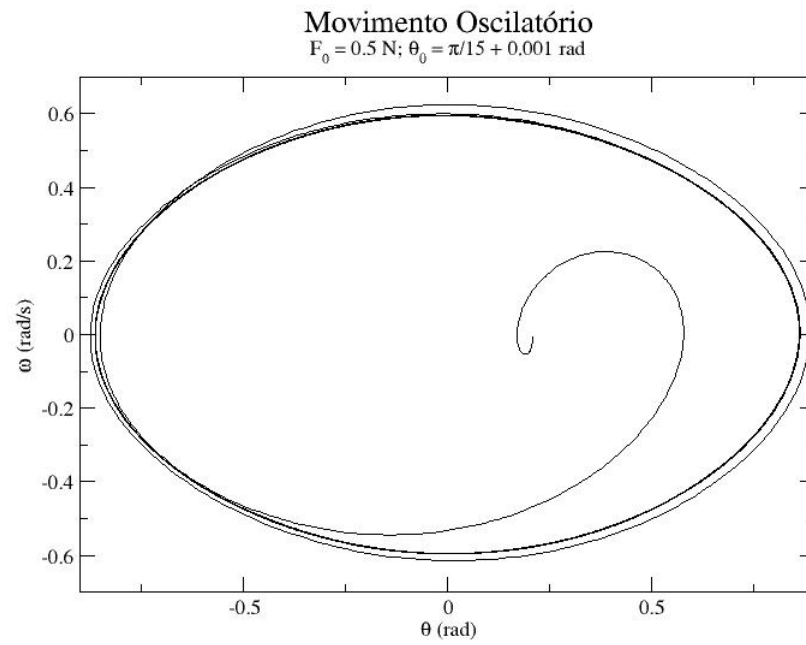


Figura 14: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

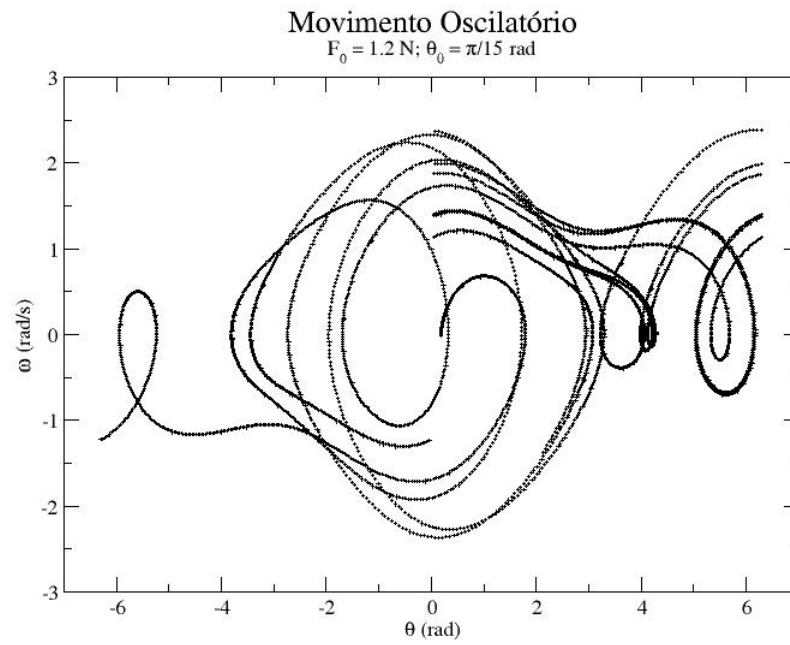


Figura 15: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

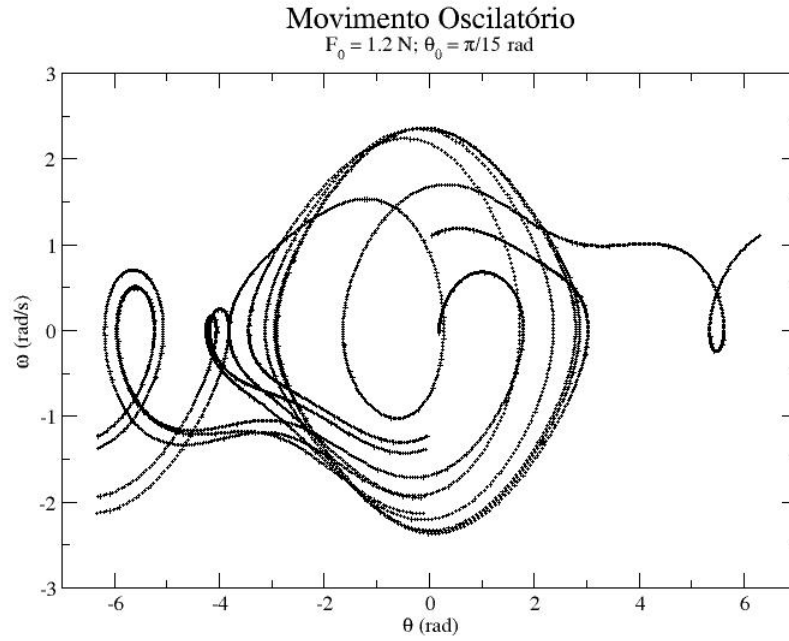


Figura 16: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

Com isso, percebe-se que os resultados do movimento caótico, figuras 15 e 16, não são completamente desordenados ao comparar com os movimentos não-caóticos, figuras 13 e 14.

5 tarefa E

Procurando aprofundar-se no estudo dos movimentos caóticos e entender a sua "estrutura", será analisado o gráfico de $\omega(\theta)$ na secção de Poincaré $\Omega t = n\pi$, que nesse problema é dado por: $|t - n\pi/\Omega| < \Delta t/2$

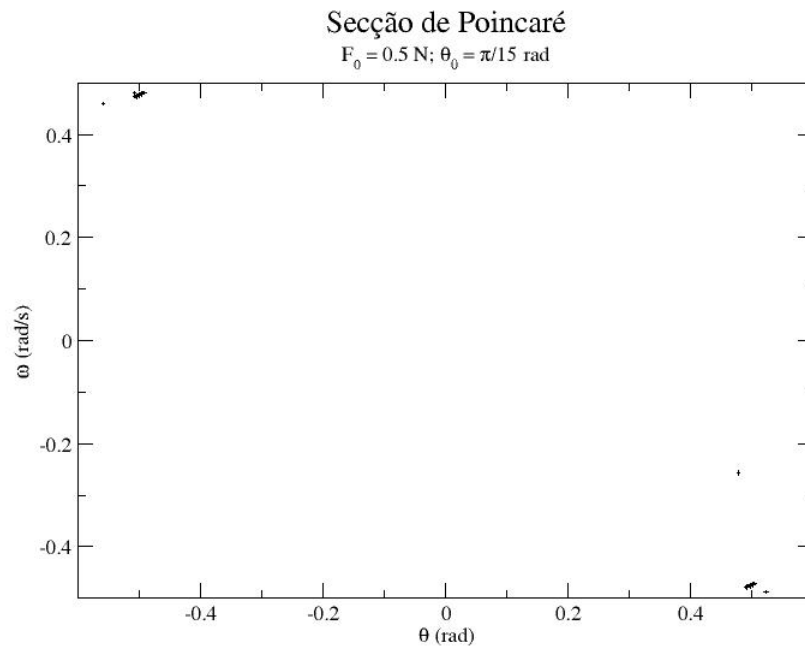


Figura 17: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

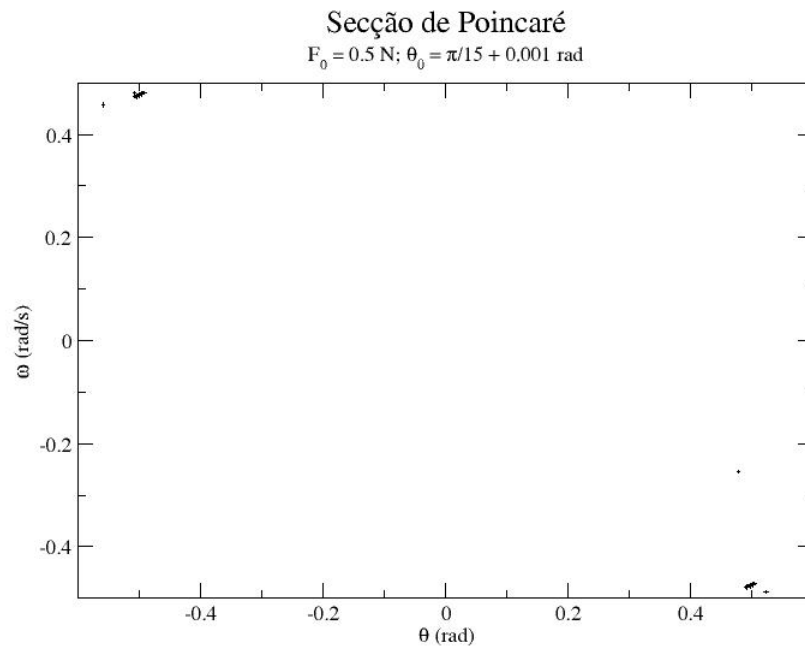


Figura 18: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

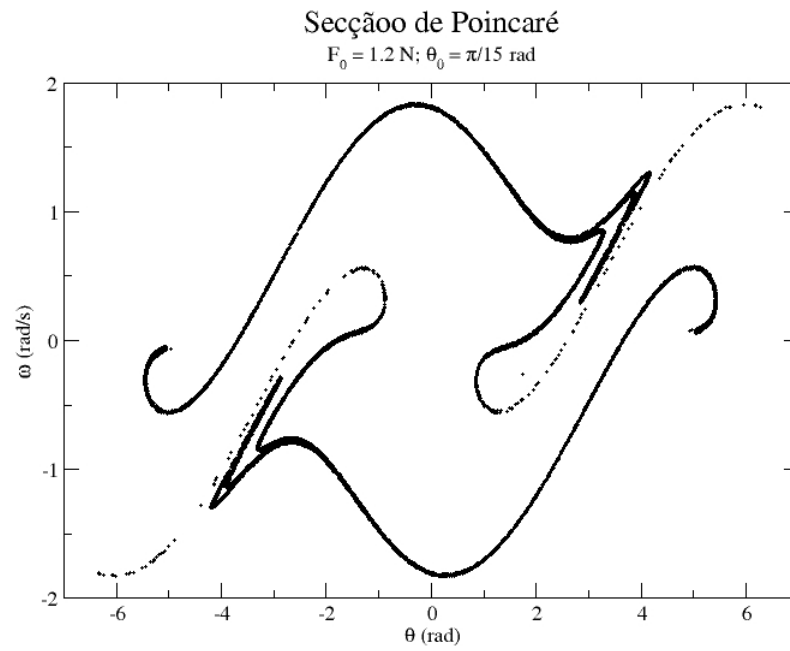


Figura 19: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

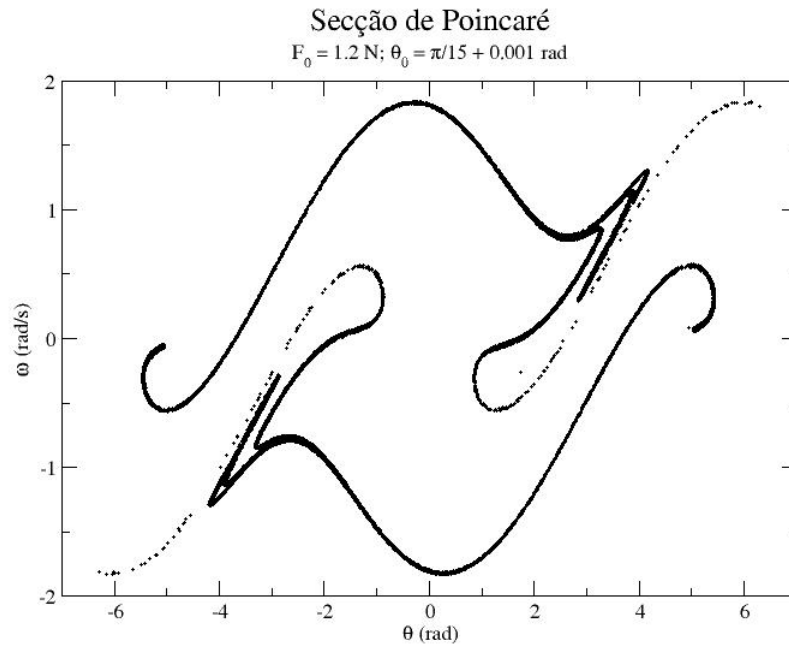


Figura 20: Resultados do calculo a partir do programa proposto.

A partir da análise dos graficos acima, pode-se verificar que as figuras obtidas para os movimentos caóticos, figuras 19 e 20, não são continuas e definem fractais, onde são classificadas de "atrator estranho" e não variam mesmo alterando os valores de θ_0 o que mostra a generalização do caos obtido. Enquanto que as afiguras 17 e 18, nos quais, são casos determinísticos o atrator estranho é um ponto.