問1. ラグランジュ未定乗数法の解の十分性

ラグランジュ未定乗数法で得られた解は、最適解として十分ではない可能性がある。

(問)

どのような場合に、ラグランジュ未定乗数法の解は最適解にならないか。
また、十分性を確認するためには、どのような方法があるか。

ヒント

ヘッセ行列

問2. 中心極限定理

$X_1, \dots, X_n$は、$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$で、互いに独立な **ランダム標本** であるとする。
このとき、標本から算出される **統計量** $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$(標本平均)は、以下を満たす。

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \to N(0, 1)$$

これを **中心極限定理** という。

ただし、$\sim p$とは、ある確率変数X_iの確率関数または確率密度関数がpであることを意味する。
また、 **標本** は確率論で用いられる標本とは異なり、統計的推測で用いられる観測されるデータを表す確率変数列のことである。 用語の詳細は、「統計モデルと推測」の2章を確認すると良い。 **標本** などについては、p38, **中心極限定理** については、p50に記載されている。

(問)

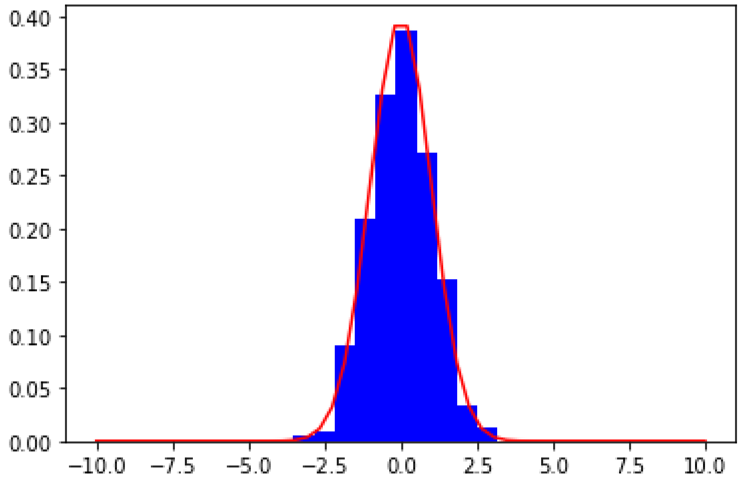
$n = 10000$にした際の、統計量$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$の度数分布と、標準正規分布を可視化して中心極限定理が成立することを確認せよ。
ただし、標本が従う確率密度関数は、$N(3, 5)$とする。

In [1]:

```
%matplotlib inline
from matplotlib import pyplot as plt
from scipy.stats import norm
import numpy as np

MU = 3
SIGMA = 5
# 統計量の分布
n = 10000
try_num = 1000
X = SIGMA * np.random.randn(try_num, n) + MU  # 一様分布のサンプルを生成
X_bar = X.mean(axis=1)
Z = np.sqrt(n) * (X_bar - MU) / SIGMA
plt.hist(Z, color='b', density=True)

# 標準正規分布
span = np.linspace(-10, 10)
plt.plot(span, norm.pdf(span, loc=0, scale=1), color='r')
plt.show()
```



問3. 無相関と独立

一般に、「確率変数X, Yが独立であれば無相関」であるが、その逆「確率変数X, Yが無相関であれば、独立」は必ずしも成り立たない。

(問)

しかし、正規分布においては無相関であることと独立であることは一致する。 多変量正規分布において、無相関と独立が同値であることを確認せよ。

ヒント

[https://manabitimes.jp/math/934 (https://manabitimes.jp/math/934)](https://manabitimes.jp/math/934)
また、多変量正規分布は「統計モデルと推測」1章p33に記載されている。

問4. 正規分布の再生性

ある確率変数X_1, X_2がそれぞれ、密度関数$f_1(x), f_2(x)$を持っているとする。
このとき、これらの和で表される確率変数$Y = X_1 + X_2$は、以下のような密度関数を持つ。

$$g(x) = f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-u) f_2(x) du$$

ここで、$*$は畳み込み演算と呼ばれる。

(問)

ところで、ともに独立な確率変数$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$があるとする。
このとき、これらの和で表される確率変数$Y = X_1 + X_2$の密度関数を求めよ。
ただし、$N(\mu, \sigma^2)$は以下で表される1次元正規分布の密度関数である。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

ヒント

情報通信数学I?のテキストのp11に載っている。滝根先生のやつ。たぶん。