

---

# ECUACIONES DIFERENCIALES

---

Segundo del Grado en Matemáticas

**Hugo Marquerie**

Profesor: Salvador López Martínez

Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid

Segundo cuatrimestre 2023 - 2024

1 de Febrero, 2024

# 1 Tema 1: Introducción

## 1.1 Conceptos básicos

**Definición 1.1 (Tipos de ecuaciones diferenciales).**

1. Según el número de variables

(a) E. D. Ordinarias: Una variable  $y: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(b) E. D. Parciales: Varias variables  $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

2. Según las derivadas de mayor orden.

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  es de orden  $n \iff F$  es no constante en su variable  $n + 1$ .

3. Según si la derivada de mayor orden se puede despejar o no.

(a) En forma normal  $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ .

$\iff$  por reducción de orden: 
$$\begin{cases} y'_j = y^{(j)}, j = 1, \dots, n-1 \\ y'_n = f(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

**Definición 1.2 (Solución de una EDO).** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $y$  es solución de la EDO  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  en  $I$

$\iff \exists$  las derivadas de  $y$  hasta orden  $n \wedge \forall x \in I : F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

**Ejemplo 1.1.** La familia de funciones  $y(x) = Ce^x$  con  $C \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R} (= I)$  cumple la ecuación  $y' = y$ . Si además de la EDO, imponemos un dato inicial  $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$

$$\implies y(x_0) = y_0 = Ce^{x_0} \implies C = e^{-x_0}y_0$$

¿Existe alguna otra solución de  $\{y' = y \wedge y(x_0) = y_0\}$ ? Para comprobarlo, basta con derivar:

$$\frac{d}{dx} (y(x)e^{-x}) = (y'(x) - y(x))e^{-x}$$

$$\text{Si } y' = y \text{ en } \mathbb{R} \implies \forall x \in \mathbb{R} : \frac{d}{dx} (y(x)e^{-x}) = 0 \implies \forall x \in \mathbb{R} : y(x)e^{-x} = C$$

$$\implies y(x) = Ce^x \implies y(x) = (e^{-x_0}y_0)e^x \text{ es la única solución al sistema.}$$

**Ejemplo 1.2.**  $\left\{ y' = \frac{e^{-y^2}}{1+x^2} \wedge y(0) = 0 \right\}$  Supongamos que  $\exists y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable solución del problema de valores iniciales (PVI). Veamos que podemos decir de  $y$ :

$$1. \text{ Como sabemos } y(0) = 0 \implies y'(0) = \frac{e^{-(y(0))^2}}{1+0^2} = 1$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R} : y'(x) > 0 \implies y \text{ es estrictamente creciente} \implies y \text{ es inyectiva.}$$

$$y(0) = 0 \implies \forall x > 0 : y(x) < 0 \wedge \forall x < 0 : y(x) > 0$$

$$3. y'' = \frac{(-2yy'2(1+x^2) - 2x)e^{-y^2}}{(1+x^2)^2} = \frac{-2e^{-y^2}(ye^{-y^2} + x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{Si } x > 0 \implies y''(x) < 0 \text{ y si } x < 0 \implies y''(x) > 0$$

$$\implies y \text{ es convexa en } (-\infty, 0) \text{ y cóncava en } (0, +\infty)$$

$$4. y' \leq \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{Si } x > 0 \implies y(x) = \int_0^x y'(s) ds \leq \int_0^x \frac{1}{1+s^2} ds = \arctan x$$

$$\text{Si } x < 0 \implies -y(x) = \int_x^0 y'(s) ds \leq \int_x^0 \frac{1}{1+s^2} ds = -\arctan x$$

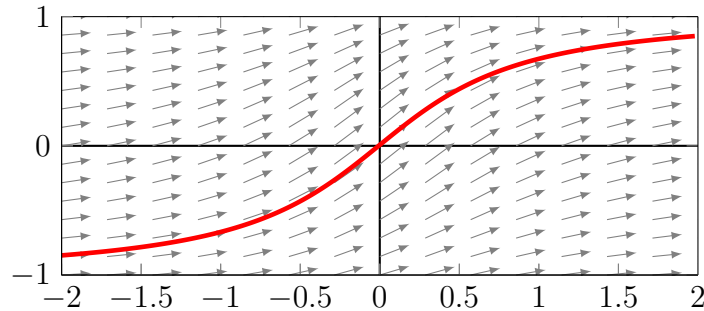
$$\implies |y(x)| \leq |\arctan x| \leq \frac{\pi}{2} \implies y \text{ es constante.}$$

$$\text{Como } y \text{ es creciente y acotada} \implies \exists \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) \wedge \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x).$$

5. Si  $y(x)$  es solución, entonces  $z(x) = -y(-x)$  también lo es, porque:

$$z'(x) = y'(-x) = \frac{e^{-(y(-x))^2}}{1+(-x)^2} = \frac{e^{-(z(x))^2}}{1+x^2} \wedge z(0) = 0$$

6. Si hay solo una solución, entonces  $y(x) = z(x) = -y(-x) \iff y(x)$  es impar.



## 1.2 Algunos métodos de resolución de EDO

### 1.2.1 Ecuaciones tipo primitiva

Son del tipo  $y'(x) = f(x)$  y se resuelven integrando a ambos lados:  $\int_{x_0}^x y'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s) ds$

$$\iff y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(s) ds \iff \boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s) ds}$$

### 1.2.2 Ecuaciones de variables separadas (o separables)

**Definición 1.3.** Sea una EDO de primer orden, es de variables separadas

$$\Longleftrightarrow \text{ es de la forma } \boxed{h(y)y' = f(x)}$$

**Proposición 1.1.** Si  $H, F$  son primitivas de  $h, f$  respectivamente, entonces la familia de funciones, definida implícitamente por  $H(y(x)) - F(x) = C$ , es solución de la EDO.

**Demostración.**

$$H(y(x)) - F(x) = C \Longleftrightarrow (H(y(x)) - F(x))' = 0 \Longleftrightarrow h(y(x))y'(x) - f(x) = 0$$

■

**Ejemplo 1.3.**  $y' = \frac{1+x^4}{1+y^2} \implies (1+y^2)y' = 1+x^4$

$$\left( h(y) = 1+y^2 \implies H(y) = y + \frac{y^3}{3} \right) \wedge \left( f(x) = 1+x^4 \implies F(x) = x + \frac{x^5}{5} \right)$$

$$H(y(x)) - F(x) = C \Longleftrightarrow y + \frac{y^3}{3} - x - \frac{x^5}{5} = C$$

Determinamos unos datos iniciales  $\begin{cases} y' = \frac{1+x^4}{1+y^2}, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  definimos  $\Psi(x, y) = y + \frac{y^3}{3} - x - \frac{x^5}{5} - C$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x_0, y_0) = 1 + y_0^2 > 0 \xrightarrow{TFIm} \exists \text{ un entorno } I \text{ de } x_0 \text{ tal que } y: I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es solución}$$

**Observación 1.1.**

1. Las ecuaciones autónomas  $y' = f(y)$  son un tipo especial de ecuaciones separables donde  $h(y) = \frac{1}{f(y)}$
2. En las ecuaciones separables, hay una cantidad que se conserva (a lo largo del tiempo).

05/02/2024

En general, si se conserva una cantidad de la forma  $F(x, y(x))$ , ¿qué ecuación satisface  $y$ ?

$$\forall x \in I : g(x) := F(x, y(x)) = c$$

$$\forall x \in I : g'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = 0$$

### 1.2.3 Ecuaciones exactas

**Definición 1.4 (EDO exacta).** Sea  $M(x, y(x)) + N(x, y(x))y' = 0$  una EDO, es exacta

$$\iff \exists F(x, y) : \nabla F = (M, N) \iff \frac{\partial F}{\partial x} = M \wedge \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

**Observación 1.2.**

1.  $y$  solución de EDO exacta  $\implies F(x, y(x)) = C$
2. Un caso particular de EDO exactas son las de variables separadas.

**Proposición 1.2.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto y  $M, N \in C^1(\Omega)$

$$\exists F \in C^2(\Omega) : \nabla F = (M, N) \iff \forall (x, y) \in \Omega : \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$$

**Demostración.**  $[\implies]$  Suponemos que  $\exists F \in C^2(\Omega) : \nabla F = (M, N)$

$$\implies \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ porque } F \in C^2(\Omega)$$

$[\impliedby]$  Supongamos que  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ . Fijados  $x_0, y_0 \in \Omega$ , definimos

$$\forall (x, y) \in \Omega : F(x, y) := \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \int_{y_0}^y N(x_0, s) ds$$

Por un lado,  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$

$$\begin{aligned} \text{Por otro lado, } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(s, y) ds + N(x_0, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y}(s, y) ds + N(x_0, y) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x}(s, y) ds + N(x_0, y) = N(x, y) - N(x_0, y) + N(x_0, y) = N(x, y) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 1.4** ( $y + 2xy' = 0$ ).

$$\implies M(x, y) = y \wedge N(x, y) = 2x \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq 2 = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{no es exacta.}$$

Multiplicando por  $xy^3$ , obtenemos  $xy^4 + 2x^2y^3y' = 0$

$$\implies M(x, y) = xy^4 \wedge N(x, y) = 2x^2y^3 \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy^3 = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{esta sí es exacta.}$$

Y resolvemos:

$$\begin{aligned} F(x, y) &:= \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \int_{y_0}^y N(x_0, s) ds = \int_{x_0}^x sy^4 ds + \int_{y_0}^y 2x_0^2 s^3 ds = \\ &= \left[ \frac{s^2}{2} y^4 \right]_{s=x_0}^{s=x} + \left[ 2x_0^2 \frac{s^4}{4} \right]_{s=y_0}^{s=y} = \frac{x^2 y^4}{2} - \frac{x_0^2 y^4}{2} + \frac{x_0^2 y^4}{2} - \frac{x_0^2 y_0^4}{2} = \frac{x^2 y^4}{2} - \frac{x_0^2 y_0^4}{2} \\ &\{F(x, y) = C \wedge F(x_0, y_0) = 0\} \implies x^2 y^2 = x_0^2 y_0^4 \end{aligned}$$

Por ejemplo, si  $x_0 > 0, y_0 > 0$ , entonces, como  $y$  es continua, existe un entorno  $I$  de  $x_0$  tal

que  $I \subset (0, \infty)$ ,  $y(x) > 0$  en  $I$ . Con lo cual:

$$\forall x \in I : \sqrt{x}y(x) = \sqrt{x_0}y_0 \implies \boxed{y(x) = \frac{\sqrt{x_0}y_0}{\sqrt{x}}}$$

**Definición 1.5 (Factor integrante).** Sea  $p(x, y) + q(x, y)y' = 0$  una EDO y  $\mu(x, y)$  una función,  $\mu$  es un factor integrante de la EDO

$$\iff \mu(x, y)p(x, y) + \mu(x, y)q(x, y)y' = 0 \text{ es exacta}$$

**Definición 1.6 (EDO lineales de primer orden).** Una EDO se denomina lineal de primer orden  $\iff$  es de la forma  $y' = a(x)y + f(x)$ .

En realidad, las soluciones de esta EDO formarían un espacio afín, pero se le sigue llamando "lineal".

#### 1.2.4 Comodín: cambios de variable

**Definición 1.7 (Ecuaciones homogéneas).** Sea una EDO de la forma  $y' = f(x, y)$  con  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$  abierto, es homogénea

$$\iff \forall (x, y) \in \Omega : \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda x, \lambda y) \in \Omega : f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

**Proposición 1.3.** Sea  $y' = f(x, y)$  una EDO homogénea

$\implies$  el cambio de variable  $u(x) = \frac{y(x)}{x}$  la transforma en una de variables separadas.

**Demostración.**

$$\begin{aligned} xu(x) = y(x) &\implies u(x) + xu'(x) = y'(x) = f(x, y(x)) = f(x, xu(x)) \\ \implies xu'(x) &= f(1, u(x)) - u(x) \implies \frac{u'(x)}{f(1, u(x)) - u(x)} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

■

**Ejemplo 1.5** ( $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$ ). Hacemos el cambio de variable  $u(x) = \frac{y(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \implies y' &= \frac{3y - 4x}{2y - 3x} = f(x, y) \implies f(1, u) = \frac{3u - 4}{2u - 3} \\ \implies f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{3\lambda x - 4\lambda y}{2\lambda y - 3\lambda x} = \frac{3y - 4x}{2y - 3x} = f(x, y) \implies \text{es homogénea} \\ \implies \frac{u'}{\frac{3u-4}{2u-3} - u} &= \frac{1}{x} \implies \frac{2u - 3}{-4 - 2u^2 + 6u} u' = \frac{1}{x} \\ \implies -\frac{1}{2} \log |u^2 - 3u + 2| - \log |x| &= C_1 \implies |u^2 - 3u + 2| = \frac{C_2}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{(y(x))^2}{x} - \frac{3y(x)}{x} + 2 &= \frac{C_2}{x^2} \implies |(y(x))^2 - 3y(x)x + 2x^2| = C_2 \\ \implies y(x) &= \frac{3x \pm \sqrt{9x^2 - 8x}}{2} \end{aligned}$$

**Teorema 1.1** (Ejercicio 2.3). Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto y sean  $a, f: I \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas y  $x_0 \in I$  y  $y_0 \in \mathbb{R}$

$$\implies \text{El PVI } \begin{cases} y' = a(x)y + f(x), x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \text{ admite una \u00fanica soluci\u00f3n:}$$

$$y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + \int_{x_0}^x f(s)e^{\int_s^x a(t) dt} ds$$

**Demostraci\u00f3n.**  $\forall x: f(x) = 0$ , la EDO es lineal porque, si  $y, z$  son soluciones, entonces  $\alpha y + \beta z$  es soluci\u00f3n con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$(\alpha y + \beta z)' = \alpha y' + \beta z' = \alpha a(x)y + \beta a(x)z = a(x)(\alpha y + \beta z)$$

Adem\u00e1s podemos encontrar un factor integrante:

$$y' - a(x)y = f(x) \text{ (que es exacta)} \implies (y' - a(x)y)e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} = f(x)e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds}$$

$$\implies \frac{d}{dx} \left( y(x)e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} \right) = f(x)e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds}$$

$$\implies \int_{x_0}^x \frac{d}{ds} \left( y(s)e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} \right) ds = \int_{x_0}^x f(s)e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} ds$$

$$\implies y(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(s)e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} ds$$

$$\implies y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} \int_{x_0}^x f(s)e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} ds$$

$$\implies y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + \int_{x_0}^x f(s)e^{\int_{x_0}^x a(t) dt - \int_{x_0}^s a(t) dt} ds$$

$$\implies y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + \int_{x_0}^x f(s)e^{\int_s^x a(t) dt} ds$$

Adem\u00e1s, es \u00fanica porque si  $y, z$  son soluciones del PVI, consideremos  $\omega = y - z$

$$\implies \forall x \in I: \omega' = y' - z' = (a(x)y + f(x)) - (a(x)z + f(x)) = a(x)(y - z) = a(x)\omega$$

$$\implies \omega' = a(x)\omega = 0 \implies \frac{d}{ds} \left( \omega(x)e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} \right) = (\omega' - \omega(x))e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} = 0$$

$$\forall x \in I: \omega(x)e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} = c \xrightarrow{x=x_0} c = 0 \implies y = z$$

■

## 1.3 Modelización

### 1.3.1 Crecimiento Malthusiano

$x(t) :=$  Población a tiempo  $t$

El modelo asume que el espacio y los recursos son ilimitados, y además, el crecimiento en cada instante es proporcional a la población en ese instante. En términos matemáticos:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = ax(t) + o(1) \text{ donde } o(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$
$$\{x'(t) = ax(t) \wedge x(0) = x_0\} \implies x(t) = x_0 e^{at}$$

### 1.3.2 Decrecimiento radiactivo

$x(t) :=$  El número de núcleos a tiempo  $t$

$$\{x'(t) = -kx(t) \wedge x(0) = x_0 \wedge k > 0\} \implies x(t) = x_0 e^{-kt}$$

### 1.3.3 Ley de enfriamiento de Newton

$$T(t) := \text{Temperatura del objeto a tiempo } t \wedge \begin{cases} T_{ext} := \text{Temperatura exterior} \\ T_0 := \text{Temperatura inicial} \\ k := \text{Constante de proporcionalidad} > 0 \end{cases}$$

El cambio en la temperatura de un cuerpo en un medio a temperatura constante es proporcional a la diferencia de temperatura entre ambos en cada instante.

$$\{T'(t) = -k(T(t) - T_{ext}) \wedge T(0) = T_0\} \implies T(t) = T_0 e^{\int_0^t (-k) ds} + \int_0^t k T_{ext} e^{\int_s^t (-k) dx} ds$$
$$\implies T(t) = T_0 e^{-kt} + \int_0^t k T_{ext} e^{-k(t-s)} ds = T_0 e^{-kt} + T_{ext} e^{-kt} (e^{kt} - 1)$$
$$\implies \boxed{T(t) = T_{ext} + e^{-kt} (T_0 - T_{ext})}$$

### 1.3.4 Crecimiento logístico

Si los recursos son limitados y hay que competir por ellos, el modelo Malthusiano 1.3.1 no parece razonable. Lo adecuado es suponer que la tasa de crecimiento depende de la población en cada instante.

$$x'(t) = a \left( 1 - \frac{x(t)}{b} \right) x(t) \text{ con } a, b > 0$$

Soluciones:

$$1. \forall t \in \mathbb{R} : x(t) = 0$$



2.  $\forall t \in \mathbb{R} : x(t) = b$

3. Si hay solución  $\forall t \in I : x(t) \in (0, b)$

$$\begin{aligned}
&\implies \forall t \in I : \left(1 - \frac{x(t)}{b}\right) x(t) > 0 \implies \frac{x'}{\left(1 - \frac{x(t)}{b}\right) x(t)} = a \\
&\implies \frac{x'b}{(b-x)x} = a \implies \frac{x'}{(b-x)} + \frac{x'}{x} = a \implies \int_0^t \left( \frac{x'(s)}{(b-x(s))} + \frac{x'(s)}{x(s)} \right) ds = \int_0^t a ds \\
&\implies \int_0^t \frac{d}{ds} (-\log(b-x(s)) + \log(x(s))) ds = \int_0^t \frac{d}{ds}(as) ds \\
&\implies -\log(b-x(t)) + \log(x(t)) - (-\log(b-x_0) + \log(x_0)) = at \\
&\implies \log\left(\frac{x(t)}{b-x(t)}\right) = \log\left(\frac{x_0}{b-x_0}\right) + at \\
&\implies \frac{x(t)}{b-x(t)} = \frac{x_0}{b-x_0} e^{at} \implies x(t) = \frac{x_0}{b-x_0} b e^{at} - \frac{x_0}{b-x_0} x(t) e^{at} \\
&\implies \left(1 + \frac{x_0}{b-x_0} e^{at}\right) x(t) = \frac{x_0}{b-x_0} b e^{at} \implies x(t) = \frac{\frac{x_0}{b-x_0} b e^{at}}{1 + \frac{x_0}{b-x_0} e^{at}} \\
&\implies \forall t \in \mathbb{R} : \boxed{x(t) = \frac{x_0 \cdot b \cdot e^{at}}{b + x_0(e^{at} - 1)}} \implies x' = a \left(1 - \frac{x}{b}\right) x
\end{aligned}$$

### 1.3.5 Depredador / presa

Hay dos especies (por ejemplo, conejos y zorros), en un espacio muy grande donde hay alimento ilimitado para los conejos, mientras que los zorros solo se alimentan de conejos.

- $C(t)$  es la población de conejos en tiempo  $t$ .
- $Z(t)$  es la población de zorros en tiempo  $t$ .

Si no hubiera zorros  $\implies C'(t) = \alpha C(t)$  con  $\alpha > 0$

Si no hubiera conejos  $\implies Z'(t) = -\beta Z(t)$  con  $\beta < 0$

Si coexisten, los encuentros serían "malos" para los conejos y "buenos" para los zorros:

$$\begin{cases} C'(t) = \alpha C(t) - \gamma C(t)Z(t) \\ Z'(t) = -\beta Z(t) + \delta C(t)Z(t) \end{cases}$$

### 1.3.6 Catenaria

¿Qué forma toma un cable flexible, de densidad constante ( $\rho$ ), fijos sus extremos a la misma altura y sometido a la acción de la gravedad?

Como el cuerpo está en reposo,

$$\begin{aligned} \vec{T} \\ \lambda \int_0^x \sqrt{1 + (y'(\tau))^2} d\tau = \frac{\rho g}{T_0} s = \tan \theta = y'(x) \\ \implies y''(x) = \lambda \sqrt{1 + (y'(x))^2} \end{aligned}$$

Reducimos el orden de la EDO mediante el cambio de variable  $y' = q \wedge q' = \lambda \sqrt{1 + q^2}$  y usando el método de variables separadas obtenemos  $q(x) = \sinh(\lambda x + c)$ .

$$\begin{aligned} y'(0) = 0 &\implies c = 0 \implies y'(x) = \sinh \lambda x \\ \implies y(x) &= \int_0^x \sinh \lambda s ds \implies \boxed{y(x) = \lambda (\cosh(\lambda x) - 1)} \end{aligned}$$

Preguntas pertinentes:

1. ¿Qué sucede si la tensión inicial es muy grande?
2. ¿Es razonable aproximar esta curva como una parábola? (Al menos para cables de longitud pequeña)

### 1.3.7 Familias de curvas ortogonales

Ya hemos visto que es típico que las soluciones de una EDO de primer orden  $y' = f(x, y)$  formen una familia uniparamétrica de curvas dadas en forma explícita casi siempre.

Razonando de forma inversa, muchas veces es posible demostrar que la familia de curvas

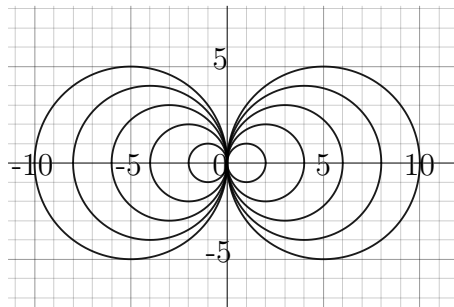
$$\mathcal{F} = \{\Gamma_c\}_{c \in \mathbb{R}} \wedge \Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y, c) = 0\}$$

satisface (localmente) una EDO  $y' = f(x, y)$  de primer orden.

**Definición 1.8 (EDO asociada).** Esta EDO se denomina ecuación asociada a  $\mathcal{F}$ .

**Ejemplo 1.6.**  $\mathcal{F} = \{\Gamma_c\}_{c \in \mathbb{R}} \wedge \Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y, c) = 0\}$  y definimos

$$F(x, y, c) = x^2 + y^2 + 2cx = (x + c)^2 + y^2 - c^2$$



Si  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable, con  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto, y su gráfica está contenida en  $\mathcal{F}$ , entonces  $\forall x \in I : x^2 + (y(x))^2 + 2cx = 0 \implies 2x + 2yy' + 2c = 0 \implies 2x^2 + 2xyy' + 2cx = 0$   
 $\implies x^2 + 2xyy' - y^2 = 0 \implies y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$

**Definición 1.9.** Sean  $\mathcal{F} = \{\Gamma_c\}_{c \in \mathbb{R}}$  y  $\mathcal{C} = \{\sim \Gamma_c\}_{c \in \mathbb{R}}$  dos familias de curvas, son ortogonales  
 $\iff \mathcal{F} \perp \mathcal{C} \iff \forall (\Gamma_{c_1}, \tilde{\Gamma}_{c_2}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{C} : \Gamma_{c_1} \cap \tilde{\Gamma}_{c_2} \neq \emptyset : \text{se cortan perpendicularmente.}$

**Proposición 1.4.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia de curvas con EDO asociada  $y' = f(x, y)$

$\implies$  las soluciones de  $z' = -\frac{1}{f(x, y)}$  forman una familia ( $\mathcal{C}$ ) de curvas ortogonal a  $\mathcal{F}$

**Demostración.** Sean  $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$  conjuntos abiertos con  $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$  y sean  $y: I_1 \rightarrow \mathbb{R}, z: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones tales que  $y(I_1) \in \mathcal{F} \wedge z(I_2) \in \mathcal{C}$ .

$$\implies \forall x \in I_1 : y' = f(x, y) \wedge \forall x \in I_2 : z' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

Como se cortan,  $\exists x_0 \in I_1 \cap I_2 : y(x_0) = z(x_0)$

$$\implies y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, z(x_0)) = -\frac{1}{z'(x_0)}$$

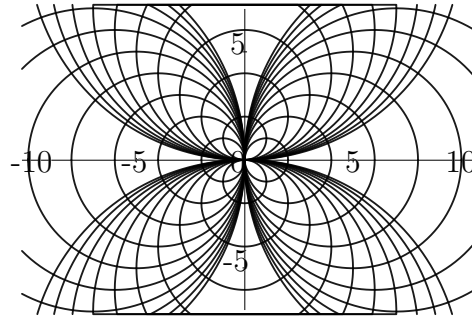
$\implies$  Las rectas tangentes a cada curva se cortan perpendicularmente

■

**Ejemplo 1.7.** Siguiendo el Ejemplo 1.6, podemos encontrar una familia de curvas ortogonal a  $\mathcal{F}(\mathcal{C})$  tomando las soluciones de la EDO:

$$z' = \frac{2xz}{x^2 - z^2} \text{ que es homogénea.}$$

$$\implies \mathcal{C} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (z - c)^2 + x^2 = c^2\} : c \in \mathbb{R}\}$$

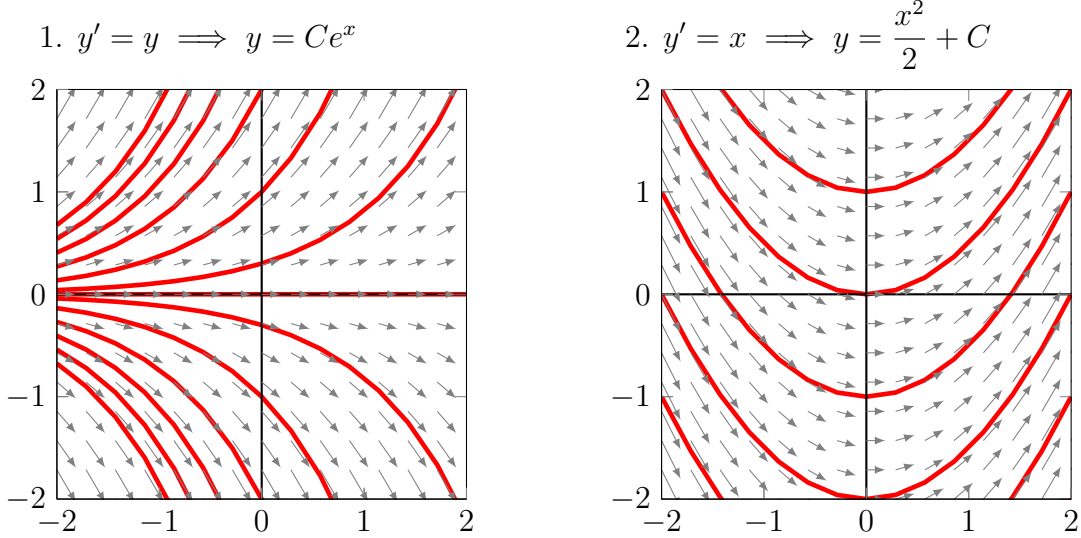


## 1.4 Análisis cualitativo y campos de pendientes

**Definición 1.10 (Campo de pendientes).** Sea una EDO  $y' = f(x, y)$ , su campo de pendientes es el diagrama que asigna a cada punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  un "pequeño" segmento con

pendiente igual a  $f(x, y)$ . Claramente, si existen soluciones, entonces las curvas solución son tangentes a esos segmentos.

**Ejemplo 1.8.**



**Definición 1.11 (Isoclina).** Sea  $y' = f(x, y)$  una EDO, sus isoclinas son los conjuntos de la forma  $f(x, y) = c$  con  $c \in \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 1.9** ( $x' = x^2 - t^2$ ).

1. La función  $y = -x(-t)$  también es solución porque

$$\forall t \in \mathbb{R} : y' = x'(-t) = (-x(-t))^2 - (-t)^2 = (y(t))^2 - t^2$$

2. Existe  $t \in \mathbb{R} : x(t) > -t$

Razonando por contradicción, supongamos que  $\forall t \in \mathbb{R} : x(t) \leq -t$ . En particular,  $\forall t \geq 0 : x(t) \leq -t$ . Entonces,  $\forall t \geq 0 : x^2(t) \geq t^2$ . Por tanto,  $\forall t \geq 0 : x'(t) = x(t)^2 - t^2 \geq 0$ . Integrando  $x(t) - x(0) \geq 0$  Entonces  $\forall t \geq 0 : x(0) \leq x(t) \leq -t$ , pero tomando  $t \geq -x(0)$ , llegamos a una contradicción.

3. Si  $x(t_0) = -t_0$  para algún  $t_0 \in \mathbb{R}$ , entonces  $x(t) \geq -t$  para todo  $t \geq t_0$ .

**Observación 1.3.** Se puede pensar que  $b(t) = -t$  actúa como una barrera que no se puede atravesar. De hecho,  $b(t)$  es una isoclina (porque  $b(t)^2 - t^2 = 0$ ). Estas son candidatas a barreras.

Definimos  $\forall t \geq t_0 : \varphi(t) := x(t) - (-t) = x(t) + t$ .

Por un lado,  $\varphi(t_0) = x(t_0) - t_0 = 0$

Por otro lado,  $\varphi'(t) = x'(t) + 1 = (x(t)^2 - t^2) + 1 \implies \varphi'(t_0) = 1 > 0$

Entonces, existe  $\varepsilon > 0 : \forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon) \varphi(t) > 0$ .

Razonando por contradicción, supongamos que  $\exists t_1 > t_0$  tal que  $\varphi(t_1) = 0$ . Podemos asumir que  $t_1$  es el más pequeño que lo cumple y, por tanto,  $\forall t \in (t_0, t_1) : \varphi(t) > 0$

$$\implies \varphi'(t_1) = x(t_1)^2 - t_1^2 + 1 = (-t_1)^2 - t_1^2 + 1 = 1 > 0$$

**Ejemplo 1.10** ( $x' = x^2 \arctan(x)$ ).

1. La función  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $y(t) = -x(t)$  es solución, porque

$$\forall t \in I : y'(t) = -x'(t) = -x^2 \arctan(x(t)) = (-x(t))^2 \arctan(-x(t)) = y(t)^2 \arctan(y(t))$$

2. Sean  $t_0 \in I, x_0 > 0$ , con  $x(t_0) = x_0$ . Entonces,  $\forall t \in (t_0, \infty) \cap I : x(t) > x_0$

**Demostración.** Sea  $\varphi(t) = x(t) - x_0, \forall t \in [t_0, \infty) \cap I$ .

Por un lado,  $\varphi(t_0) = x(t_0) - x_0 = 0$ .

Por otro lado,  $\varphi'(t) = x'(t) = x(t)^2 \arctan(x(t)) > 0 \implies \varphi'(t_0) > 0$ .

Razonando por contradicción, supongamos que  $\exists t_1 \in I \cap (t_0, \infty)$  tal que  $\varphi(t_1) = 0$ .

Podemos asumir que  $t_1$  es el más pequeño que lo cumple y, por tanto,  $\varphi'(t_1) \leq 0$ , pero  $\varphi'(t_1) = x'(t_1) = x(t_1)^2 \arctan(x(t_1)) = x_0^2 \arctan(x_0) > 0$  ■

**Observación 1.4.** La función  $b(t) = x_0 > 0$  cumple que  $b'(t) < b(t)^2 \arctan(b(t))$ . Es decir, es una *subsolución*.

3. Si  $\exists t_0 \in I : x(t_0) = x_0 > 0$ , entonces  $\forall t \in I : x(t) \geq 0$ .

**Demostración.** Supongamos que  $\exists t_1 \in I : x(t_1) < 0$ , entonces por 2.,  $t_1 < t_0$ . Sea  $t_2 \in (t_1, t_0)$  tal que  $x(t_2) = 0$  y lo elijo de forma que  $\forall t \in (t_1, t_2) : x(t) < 0$ .

Por el TVM,  $\exists s \in (t_1, t_2) : x'(s) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{0 - x(t_1)}{t_2 - t_1} > 0$ .

Sin embargo,  $x'(s) = x(s)^2 \arctan(x(s)) < 0$ , lo cual es una contradicción. ■

4. Si  $x(t_0) = x_0 > 0 \wedge \inf(I) = -\infty$ , entonces  $\exists \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = L \wedge L = 0$ .

**Demostración.** Como  $x$  es creciente y acotada inferiormente,  $\exists L$ . La ecuación dice que también existe  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x'(t)$  con  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x'(t) = L^2 \arctan(L)$ . Por otro lado, vamos a ver que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x'(t) = 0$ . En efecto, por el TVM,  $\exists s \in (t, t-1) : x'(s) = \frac{x(t) - x(t-1)}{t - (t-1)} = x(t) - x(t-1)$ . Entonces,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x'(t) = 0 \implies L^2 \arctan(L) = 0 \implies L = 0$ . ■

5.  $\sup(I) < \infty$

**Demostración.** Si  $x(t_0) = x_0 > 0$ , entonces  $\forall t > t_0 : x(t) > x_0$ .

Por tanto,  $\forall t > t_0 : x'(t) > x(t)^2 \arctan(x_0) = \lambda x(t)^2$

$$\implies \forall t > t_0 : \frac{x'(t)}{x^2(t)} > \lambda \implies \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x(s)^2} ds > \lambda(t - t_0)$$

$$\implies \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{r^2} dr > \lambda(t - t_0) \implies -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} > \lambda(t - t_0)$$

$$\implies \frac{1}{x_0} > \lambda(t - t_0) \implies t < t_0 + \frac{1}{\lambda x_0}$$

■

## 2 EDOs autónomas

**Definición 2.1.** Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden se dice autónoma si no depende explícitamente de la variable independiente. Es decir,

$$\Longleftrightarrow \text{ es de la forma } y' = f(y)$$

**Proposición 2.1** (Propiedades de EDOs autónomas).

1. (Isoclinas) Todos los puntos de cada recta horizontal  $y = c$  pertenecen a la misma isoclina. ¡Cuidado! A veces una isoclina puede contener más de una recta horizontal.

**Ejemplo 2.1** ( $y' = y^2$ ).

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} : y^2 = c\} = \{(x, \sqrt{c}) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -\sqrt{c}) : x \in \mathbb{R}\}$$

2. (Traslaciones) Si  $y$  es solución  $\implies \forall c \in \mathbb{R} : w(x) := y(x + c)$  es solución.
3. (Soluciones triviales) Si  $\exists a \in \text{Dom}(f) : f(a) = 0 \implies y(x) = a$  es solución.

**Demostración.**  $y'(x) = 0 = f(a) = f(y(x))$  ■

22/02/2024

**Teorema 2.1** (Existencia de soluciones). Sean  $a \in [-\infty, \infty) \wedge b \in (-\infty, \infty] \wedge f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  continua

Supongamos que  $\forall x \in (a, b) : f(x) \neq 0$  y que 
$$\begin{cases} a > -\infty \implies f(a) = 0 \\ b < \infty \implies f(b) = 0 \end{cases}$$

Sea  $x_0 \in (a, b)$  definimos  $\forall x \in (a, b) : F(x) := \int_{x_0}^x \frac{1}{f(s)} ds$

Si  $f(x) > 0$  en  $(a, b)$ , definimos

$$T_- := \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \in [-\infty, 0) \wedge T_+ := \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) \in (0, \infty]$$

Si  $f(x) < 0$  en  $(a, b)$ , intercambiamos  $T_-$  por  $T_+$ .

$$\implies \exists x : (T_-, T_+) \longrightarrow (a, b) \text{ derivable : } \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

**Demostración.** Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\forall x \in (a, b) : f(x) > 0$

$$\implies \forall x \in (a, b) : F'(x) = \frac{1}{f(x)} > 0 \implies F \text{ es creciente en } (a, b)$$

$$\implies F \text{ tiene inversa en } (a, b) \implies \exists x := F^{-1} : (T_-, T_+) \longrightarrow (a, b)$$

$$\text{Por un lado, } x'(t) = (F^{-1})'(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = \frac{1}{F'(x(t))}$$

Por otro lado,  $F(x_0) = 0 \implies x_0 = F^{-1}(F(x_0)) = F^{-1}(0) = x(0)$

■

**Teorema 2.2** (Unicidad local). Sean  $a \in [-\infty, \infty) \wedge b \in (-\infty, \infty] \wedge f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  continua. Supongamos que  $f(x) \neq 0$  en  $(a, b)$ . Sea  $x_0 \in (a, b)$ , sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto tal que  $0 \in I$  y sean  $x: I \longrightarrow (a, b) \wedge y: I \longrightarrow (a, b)$  cumpliendo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ y'(t) = f(y(t)) \\ x(0) = x_0 = y(0) \end{cases} \implies \forall t \in I : x(t) = y(t)$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \forall s \in (a, b) : F(s) = \int_{x_0}^s \frac{1}{f(r)} dr &\implies \forall t \in I : F(x(t)) = t = F(y(t)) \\ \implies \forall t \in I : F^{-1}(F(x(t))) = F^{-1}(F(y(t))) &\implies \implies \forall t \in I : x(t) = y(t) \end{aligned}$$

■

**Corolario 2.1.** En las condiciones del teorema de unicidad local, sea  $a \in \mathbb{R} : f(a) := \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 0$ . Supongamos que

$$\forall k \in (a, b) : \lim_{x \rightarrow a^+} \int_k^x \frac{1}{f(s)} ds = \begin{cases} -\infty & \iff f > 0 \text{ en } (a, b) \\ \infty & \iff f < 0 \text{ en } (a, b) \end{cases}$$

$$\implies \text{Para cada intervalo } \begin{cases} I = [0, t_0) & \iff f > 0 \text{ en } (a, b) \\ I = (-t_0, 0] & \iff f < 0 \text{ en } (a, b) \end{cases} \quad x = a \text{ es la \u00fanica soluci\u00f3n.}$$

26/02/2024

27/02/2024

**Ejemplo 2.2** ( $y' = \sqrt{1 - y^2}$ ).

$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \wedge f(y) := \sqrt{1 - y^2} \wedge \begin{cases} f(y) > 0 & \iff y \in (-1, 1) \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{cases}$$

Si  $y(0) =: y_0 \in (-1, 1)$ , entonces existe una \u00fanica soluci\u00f3n del PVI. Esa soluci\u00f3n est\u00e1 definida en  $(T_-, T_+)$ , donde

$$\begin{aligned} T_- &= \lim_{y \rightarrow -1^+} \int_{y_0}^y \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} ds = \lim_{y \rightarrow -1^+} \arcsin(y) - \arcsin(y_0) = -\frac{\pi}{2} - \arcsin(y_0) \\ T_+ &= \lim_{y \rightarrow 1^-} \int_{y_0}^y \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} ds = \frac{\pi}{2} - \arcsin(y_0) \end{aligned}$$



Si  $y_0 = 1$ ,  $\lim_{y \rightarrow 1^-} \int_k^y \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds = \frac{\pi}{2} - \arcsin(k) \in \mathbb{R} \implies \exists$  un solución no trivial del PVI

Si  $y_0 = -1$ ,  $\lim_{y \rightarrow -1^+} \int_k^y \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds \in \mathbb{R} \implies \exists$  un solución no trivial del PVI

Por tanto, la solución general del PVI es

$$y_k(x) = \begin{cases} -1 & \iff x \leq -\frac{\pi}{2} - k \\ \sin(x+k) & \iff x \in (-\frac{\pi}{2} - k, \frac{\pi}{2} - k) \\ 1 & \iff x \geq \frac{\pi}{2} - k \end{cases}$$

1. La única  $y_k$  que satisface  $y_k(0) = 0 \in (-1, 1)$  es  $y_k(x) = y_0$
2. Las funciones  $y_k$  con  $k > \frac{\pi}{2}$  cumplen  $y_k(0) = 1$
3. Las funciones  $y_k$  con  $k < -\frac{\pi}{2}$  cumplen  $y_k(0) = -1$

**Observación 2.1.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in (-\infty, \infty] : b > a$  y  $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $\forall x \in (a, b) : f(x) \neq 0$  y  $f(a) = 0$ .

Supongamos que  $\exists c > 0, \delta \in (0, b-a) : \forall s \in [a, a+\delta) : |f(s)| \leq C(s-a)$

Vamos a comprobar que se cumplen las condiciones de unicidad para el PVI con  $x(0) = x_0 = a$  tanto en el caso  $f > 0$  como en el caso  $f < 0$ .

- $\boxed{f > 0}$  Queremos ver que  $\lim_{z \rightarrow a^+} \int_{a+\delta}^z \frac{1}{f(s)} ds = -\infty$ 

$$\int_{a+\delta}^z \frac{1}{f(s)} ds = \int_{a+\delta}^z \frac{1}{|f(s)|} ds = - \int_z^{a+\delta} \frac{1}{|f(s)|} ds \leq -\frac{1}{C} \int_z^{a+\delta} \frac{1}{s-a} ds$$

$$\implies \int_{a+\delta}^z \frac{1}{f(s)} ds \leq -\frac{1}{C} (\log(\delta) - \log(z-a))$$

$$\implies \lim_{z \rightarrow a^+} \int_{a+\delta}^z \frac{1}{f(s)} ds \leq -\infty \implies \text{Hay unicidad de PVI con } x(0) = a \text{ en } [0, \tilde{t})$$

- $\boxed{f < 0}$  De forma análoga  $\lim_{z \rightarrow a^+} \int_{a+\delta}^z \frac{1}{f(s)} ds = \dots = \infty$

Si  $f$  derivable con  $f'$  acotada

$$\implies \forall s \in [a, a+\delta) : |f(s)| = |f(s) - f(a)| = |f'(r)| |s-a| \leq C(s-a)$$

04/03/2024

05/03/2024

**Definición 2.2 (Estabilidad).** Sea  $y$  una solución de un PVI,  $y$  es estable

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : y : [x_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : y_0^* \in (\alpha, \beta) : |y_0^* - y_0| < \delta \implies \forall x \geq x_0 : |y(x) - y^*(x)| < \varepsilon$$

donde  $y^* : [x_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  es cualquier solución del PVI con  $y^*(x_0) = y_0^*$ .

**Ejemplo 2.3.**

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

**Definición 2.3 (Estabilidad asintótica).** Sea  $y$  una solución de un PVI,  $y$  es asintóticamente estable

$$\iff y \text{ es estable } \wedge \lim_{x \rightarrow \infty} |y(x) - y^*(x)| = 0$$

donde  $y^* : [x_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  es cualquier solución del PVI con  $y^*(x_0) = y_0^*$ .

**Ejemplo 2.4.**

$$\begin{aligned} \begin{cases} y' = y(1-y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} &\implies \begin{cases} f(y) := y(1-y) \\ f(y) = 0 \iff y \in \{0, 1\} \end{cases} && \text{soluciones de equilibrio} \\ &\implies \forall y < 0 : f(y) < 0 \wedge \forall y \in (0, 1) : f(y) > 0 \wedge \forall y > 1 : f(y) < 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{y_0 < 0}$$

$$\implies \forall y < 0 : F(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{s(1-s)} ds \implies \forall y < 0 : F'(y) < 0$$

Tomamos  $y \in (y_0, 0) \implies F(y) < F(y_0) = 0$

$$\implies s \geq y_0 \implies 0 < 1-s \leq 1-y_0 \implies \frac{1}{1-s} \geq \frac{1}{1-y_0} \implies \frac{1}{(1-s)s} \leq \frac{1}{(1-y_0)s}$$

$$\implies F(y) \leq \frac{1}{1-y_0} \int_{y_0}^y \frac{1}{s} ds = \frac{\log(-y) - \log(-y_0)}{1-y_0} \implies \boxed{\lim_{y \rightarrow 0^-} F(y) = -\infty}$$

1. La única solución tal que  $y(x_0) = y_0 < 0$  está definida globalmente hacia el pasado.
2. El equilibrio  $y = 0$  es único “por abajo”.

$(y \rightarrow -\infty)$

$$y < y_0 < 0 \implies 0 \leq F(y) = - \int_y^{y_0} \frac{1}{s(1-s)} ds = \int_y^{y_0} \frac{1}{s^2 - s} ds \leq \int_y^{y_0} \frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}$$

$$\implies 0 \leq F(y) < -\frac{1}{y} \implies \boxed{\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) \in \mathbb{R}} \implies \text{Hay una asíntota}$$

$\boxed{y_0 > 1}$  Si  $y$  es solución con  $y(x_0) = y_0 > 1$ , entonces  $z(x) = -y(-x) + 1$  también es solución con  $z(x_0) = 1 - y_0 < 0$ .

**Definición 2.4 (Bifurcación).** Sea  $f_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que depende de un parámetro  $\mu \in \mathbb{R}$ . El comportamiento cualitativo de la EDO  $y' = f_\mu(y)$  puede cambiar dependiendo de la  $\mu$ . Los valores de  $\mu$  que dan lugar a un cambio de este tipo son los puntos de bifurcación.

**Ejemplo 2.5** ( $y' = y(1 - y) - \mu$ ).

$$f_\mu(y) = y(1 - y) - \mu = 0 \iff y^2 - y + \mu = 0 \iff y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\mu}}{2}, \mu \leq \frac{1}{4}$$

Curvas de equilibrios:  $\gamma_1(\mu) := \frac{1 + \sqrt{1 - 4\mu}}{2} \wedge \gamma_2(\mu) := \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu}}{2}, \mu \leq \frac{1}{4}$

$$\implies \begin{cases} \mu > \frac{1}{4} & \text{no hay equilibrios} \\ \mu < \frac{1}{4} & \text{hay dos equilibrios} \\ \mu = \frac{1}{4} & \text{es un punto de equilibrio} \end{cases}$$

### 3 Tema 3: Teoremas fundamentales

#### 3.1 Introducción

Sean  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}$  dos intervalos abiertos y  $f: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función continua.

Consideramos el PVI  $\begin{cases} x' = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(t_0) = \hat{x}, & \hat{x} \in \Omega \end{cases}$ . Recordamos que si  $f(t, x) = f(x)$ , entonces

el PVI tiene solución en un entorno de  $t_0$ :  $x(t) = \hat{x} + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ .

Definimos el operador  $\forall x \in \mathcal{C}(I, \Omega) : T[x] := x + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \implies x = T[x]$ .

$$x_0 = \hat{x} \wedge x_1 = T[x_0] = \hat{x} + \int_{t_0}^t f(s, \hat{x}) ds \wedge \cdots \wedge x_{k+1} = T[x_k] = \hat{x} + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds$$

**Ejemplo 3.1.**  $\{x' = x \wedge x(0) = 1\} \iff x(t) = 1 + \int_0^t x(s) ds$

$$\implies x_0 = 1 \wedge x_1 = 1 + t \wedge \cdots \wedge x_k = \sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!} \implies x_k(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^t$$

Pero necesitamos formalizar todo esto.

1. Concepto de límite de series de funciones.
2. ¿Toda sucesión de Cauchy es convergente?
3.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds \stackrel{?}{=} \int_{t_0}^t \lim_{k \rightarrow \infty} f(s, x_k(s)) ds$
4.  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(s, x_k(s)) \stackrel{?}{=} f\left(s, \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(s)\right)$

#### 3.2 Conceptos de análisis

##### 3.2.1 Convergencia puntual y uniforme

**Definición 3.1 (Convergencia puntual).** Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones  $f_k: I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I \subset \mathbb{R}$  abierto,  $(f_k)$  converge puntualmente a  $f$

$$\iff \forall t \in I : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = f(t)$$

Es decir,  $\forall \varepsilon > 0 : \forall t \in I : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$ .

**Ejemplo 3.2.** La sucesión  $(f_k)$  definida a continuación converge puntualmente a  $f$  pero su límite es una función no continua.

$$\forall t \in \mathbb{R} : f_k(t) := \begin{cases} 0, & t < -\frac{1}{k} \\ k(t + \frac{1}{k}), & -\frac{1}{k} \leq t < 0 \\ k(\frac{1}{k} - t), & 0 \leq t < \frac{1}{k} \\ 0, & t \geq \frac{1}{k} \end{cases} \implies f_k(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

12/03/2024

**Ejemplo 3.3.**

$$x_k(t) := \begin{cases} 2k^2 t, & t \in [0, \frac{1}{2k}) \\ 2k^2 (\frac{1}{k} - t), & t \in [\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}) \\ 0, & t \in [\frac{1}{k}, 1) \end{cases} \implies \begin{aligned} & x_k(0) = 0 \wedge x_k(1) = 0 \\ & t \in (0, 1] \implies x_k(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 x_k(t) dt \stackrel{?}{=} \int_0^1 \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) dt:$$

$$\int_0^1 \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 x_k(t) dt$$

**Definición 3.2 (Convergencia uniforme).** Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I \subset \mathbb{R}$  abierto,  $(f_k)$  converge uniformemente a  $f$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : \forall t \in I : |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$$

Es decir,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : \sup_{t \in I} |x_k(t) - x(t)| \leq \varepsilon$

**Observación 3.1.** • Los dos ejemplos anteriores no convergen uniformemente.

• La convergencia uniforme implica convergencia puntual.

**Proposición 3.1.** Sea  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones uniformemente convergente a  $x$ .

$$\implies x \text{ continua}$$

**Demostración.** Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $t_0 \in I$ . Buscamos  $\delta > 0$  tal que, dado  $t \in I$

$$|t - t_0| < \delta \implies |x(t) - x(t_0)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{Para cada } k \in \mathbb{N}, |x(t) - x_k(t) + x_k(t) - x_k(t_0) + x_k(t_0) - x(t_0)| &\leq \\ &\leq |x(t) - x_k(t)| + |x_k(t) - x_k(t_0)| + |x_k(t_0) - x(t_0)| \end{aligned}$$

Como  $(x_k)$  converge uniformemente a  $x$ ,  $\kappa = \kappa(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : \forall t \in I : |x_k(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Entonces, para  $k = \kappa$ , se tiene

$$\begin{aligned} |x(t) - x(t_0)| &\leq |x(t) - x(t_0)| + |x(t) - x_\kappa(t_0)| + |x_\kappa(t_0) - x(t_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + |x_\kappa(t) - x_\kappa(t_0)| + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Como  $x_\kappa$  es continua,  $\exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \implies |x_\kappa(t) - x_\kappa(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Entonces,  $|x(t) - x(t_0)| < \varepsilon$ . ■

**Proposición 3.2.** Sea  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones continuas  $x_i : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  que converge uniformemente a  $x : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  donde  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  está acotado.

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b x_k(t) dt = \int_a^b x(t) dt$$

13/03/2024

**Ejemplo 3.4.** Consideramos la sucesión  $x_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } t \leq k \\ 0 & \text{si } t > k \end{cases}$

$$\implies \int_0^\infty x_k(t) dt = \int_0^k \frac{1}{k} dt = 1 \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = 0$$

Sea  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \mathcal{C}([a, b]) := \{x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \text{ continua}\}$  el espacio vectorial de funciones continuas.

$$\forall x \in \mathcal{C}([a, b]) : \|x\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$$

$$\implies (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \text{ es un espacio vectorial normado}$$

$$\implies \text{también es métrico con } d(x, y) := \|x - y\|_\infty$$

$$d(x_k, x) = \|x_k - x\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |x_k(t) - x(t)| \rightarrow 0 \iff x_k \rightarrow x \text{ unif.}$$

**Teorema 3.1.** Sean  $a, b \in \mathbb{R} : a < b \implies \left( \mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty \right)$  es un espacio completo. Es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente.

**Demostración.** Sea  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a, b])$  una sucesión de Cauchy. Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : (k, l \geq \kappa \implies \|x_k - x_l\|_\infty < \varepsilon)$$

Recordemos que  $\|x_k - x_l\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |x_k(t) - x_l(t)|$

Fijamos  $\varepsilon > 0$  y  $t \in [a, b]$

$$\implies \forall k, l \geq \kappa : |x_k(t) - x_l(t)| \leq \|x_k - x_l\|_\infty < \varepsilon$$

Esto demuestra que la sucesión de números reales  $(x_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. Como  $\mathbb{R}$  es completo,  $\exists x(t) \in \mathbb{R} : x_k(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x(t)$ .

Veamos que el límite es uniforme: En efecto, sean  $k \geq \kappa, l \geq 1, k, l \in \mathbb{N}$ .

$$\implies \forall t \in [a, b] : |x_k(t) - x_{k+l}(t)| \leq \|x_k - x_{k+l}\| < \varepsilon \text{ porque } (x_k) \text{ es de Cauchy}$$

Haciendo tender  $l \rightarrow \infty$

$$\implies \forall t \in [a, b] : \forall k \geq \kappa : |x_k(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

Recordemos que  $x \in \mathcal{C}([a, b])$  por ser límite de funciones continuas. ■

**Definición 3.3 (Punto fijo).** Sea  $T: \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$  un operador,  $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es un punto fijo de  $T \iff T[x] = x$ .

**Definición 3.4 (Contracción).** Sea  $C \subset X \wedge C \neq \emptyset$  donde  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio vectorial normado y  $T: C \rightarrow C$  una aplicación,  $T$  es una contracción en  $C$

$$\iff \exists \alpha \in (0, 1) : \forall x, y \in C : \|T[x] - T[y]\| \leq \alpha \|x - y\|$$

**Teorema 3.2.** Sea  $C \subset X \wedge C \neq \emptyset$  cerrado donde  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio normado completo y  $T: C \rightarrow C$  una contracción  $\implies \exists! x \in C : T[x] = x$

*Demostración.* ■

**Observación 3.2.** Claramente, toda contracción es continua (con respecto a la norma correspondiente). En efecto, si  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C : x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in C$

$$\implies \|T[x_k] - T[x]\| \leq \alpha \|x_k - x\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

14/03/2024

18/03/2024

### 3.2.2 Funciones Lipschitz

**Definición 3.5 (Función Lipschitz).** Sea  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función con  $\Omega \subset \mathbb{R}$  abierto, es Lipschitz en  $\Omega$

$$\iff \exists L \in \mathbb{R} : \forall x, \hat{x} \in \Omega : |f(x) - f(\hat{x})| \leq L |x - \hat{x}|$$

Si  $f$  es Lipschitz en  $\Omega$ , suponiendo que  $x > \hat{x}$ :

$$|f(\hat{x}) - f(x)| \leq L(x - \hat{x}) \implies -L(x - \hat{x}) \leq f(\hat{x}) - f(x) \leq L(x - \hat{x})$$

$$\implies f(\hat{x}) - L(x - \hat{x}) \leq f(x) \leq f(\hat{x}) + L(x - \hat{x})$$

**Observación 3.3.**

1. Si  $f$  es Lipschitz en  $\Omega$ , entonces  $f$  es uniformemente continua en  $\Omega$ . (Sale al tomar  $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$  en la definición de continuidad uniforme).
2. A la constante  $L$  se le llama constante Lipschitz de  $f$  en  $\Omega$ .

### Ejemplo 3.5.

1. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin x$  y  $x, \hat{x} \in \mathbb{R}$ ,  $x < \hat{x}$ . Por el TVM  
 $\exists y \in (x, \hat{x}) : |f(x) - f(\hat{x})| = f'(y) |x - \hat{x}| \implies |f(x) - f(\hat{x})| = \cos(y) |x - \hat{x}| \leq |x - \hat{x}|$   
 Por tanto  $f(x) = \sin x$  es Lipschitz en  $\mathbb{R}$  con constante  $L = 1$ .
2. En realidad, si  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable con  $\forall x \in I : |f'(x)| \leq L \implies f$  es Lipschitz en  $I$  con constante  $L$ .

### Proposición 3.3.

1. Sean  $f, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  dos funciones Lipschitz con constantes de Lipschitz  $L_f, L_g$  y sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha f + \beta g$  es Lipschitz.
2. Sean  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  y  $g: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^d$  dos funciones Lipschitz con constantes de Lipschitz  $L_f, L_g \implies g \circ f$  es Lipschitz con constante  $L_f L_g$ .

### Demostración.

1. Sean  $x, \hat{x} \in \Omega$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} |\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha f(\hat{x}) + \beta g(\hat{x}))| &= |\alpha (f(x) - f(\hat{x})) + \beta (g(x) - g(\hat{x}))| \\ &\leq |\alpha| |f(x) - f(\hat{x})| + |\beta| |g(x) - g(\hat{x})| \\ &\leq (|\alpha| L_f + |\beta| L_g) |x - \hat{x}| \end{aligned}$$

2. Sean  $x, \hat{x} \in \Omega$ :

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\hat{x})| = |g(f(x)) - g(f(\hat{x}))| \leq L_g |f(x) - f(\hat{x})| \leq L_g L_f |x - \hat{x}|$$

■



## 4 Ejercicios

### 4.1 Hoja 1

#### 4.1.1 Conceptos básicos

#### 4.1.2 Algunos métodos de resolución de EDOs

#### 2.18

1.  $yy'' + (y')^2 = 0$

Resulta razonable buscar soluciones en forma de polinomios  $y(x) = x^\alpha$  porque:

$$\begin{aligned} \implies y' &= \alpha x^{(\alpha-1)} \wedge y'' = \alpha(\alpha-1)x^{(\alpha-2)} \\ \implies x^\alpha \alpha(\alpha-1)x^{(\alpha-2)} + \alpha^2 x^{2(\alpha-1)} &= 0 \implies (2\alpha^2 - \alpha)x^\alpha = 0 \\ \implies 2\alpha^2 - \alpha &= 0 \implies \alpha(2\alpha - 1) = 0 \implies \alpha = 0 \vee \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Opción 1: Integramos la EDO:

$$\begin{aligned} \int_0^t y(s)y''(s) \, ds + \int_0^t (y'(s))^2 \, ds &= 0 \\ - \int_0^t (y'(s))^2 \, ds + [y(s)y'(s)]_{s=0}^t + \int_0^t (y'(s))^2 \, ds \\ \implies y(t)y'(t) - y(0)y'(0) &= 0 \implies y(t)y'(t) = y(0)y'(0) =: C \\ \implies \int_0^t y(s)y'(s) \, ds = Ct \implies \frac{(y(t))^2}{2} - \frac{(y(0))^2}{2} &= Ct \\ \implies y(t) &= \sqrt{2Ct + (y(0))^2} \end{aligned}$$

2.  $xy'' = y' + (y')^2$

No depende de  $y \implies$  Hacemos un cambio de variable  $x = y'$ :

$$\implies xz' = z + z^3 \text{ que es de variables separadas.}$$

3.  $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$

Nuevamente hacemos un cambio de variable  $z = y' \implies x^2z' = 2xz + z^2$

$$\forall x \neq 0 : z' = 2\frac{z}{x} + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \implies \text{mediante el cambio de variables } \omega = \frac{z}{x}$$

Obtenemos una EDO de variables separadas en  $\omega$ .

4.  $2yy'' - (y')^2 = 1$

Otra vez resulta razonable buscar soluciones de la forma  $y(x) = Ax^2 + Bx + C$

### 4.1.3 Modelización

3.4  $C(t)$  = “Cantidad de sal” en el tanque en el tiempo  $t$ .

$$\begin{aligned} C'(t) &= 10 - \frac{1}{10}C(t) \implies \int_{C(0)}^{C(t)} \frac{1}{100-y} dy = \int_0^t \frac{1}{10} dt \\ \implies \log(100 - C(t)) - \log(100 - C(0)) &= -\frac{1}{10}t \implies \log \frac{100 - C(t)}{100} = -\frac{t}{10} \\ \implies \frac{100 - C(t)}{100} &= e^{-\frac{t}{10}} \implies C(t) = 100(1 - e^{-\frac{t}{10}}) \\ \implies C(1) &= 100(1 - e^{-\frac{1}{10}}) \wedge \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 100 \end{aligned}$$

### 4.1.4 Análisis cualitativo y campos de pendientes

$$4.6 \forall t > \frac{5}{4} : \forall x \left( \frac{5}{4} \right) \in \left( -\sqrt{\frac{5}{4}}, -\frac{1}{2} \right) : x' = x^2 - t \implies -\sqrt{t} < x(t) < -\sqrt{t-1}$$

$$f_1(t) := -\sqrt{t} \wedge f_2 := -\sqrt{t-1} \implies f\left(\frac{5}{4}\right) = -\sqrt{\frac{5}{4}} \wedge f_2\left(\frac{5}{4} - 1\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Sabemos que } \tilde{t} = \frac{5}{4} \implies -\sqrt{\tilde{t}} < x(\tilde{t}) < -\sqrt{\tilde{t}-1}$$

$\implies$  Por contunuidad, al menos en un tiempo, estas cotas se siguen manteniendo.

Atendiendo a las isoclinas de este ejercicio ( $\{x^2 - t = C : C \in \mathbb{R}\}$ ), observamos que:

- $C = 0 \implies x^2 = t \implies x = \pm\sqrt{t}$  que es precisamente la cota inferior que buscábamos.
- $C = -1 \implies x^2 - t = -1 \implies x = \pm\sqrt{t-1}$  que es la cota superior.

Inicialmente  $x(t) > -\sqrt{t}$  “durante un rato”.

1. Supongamos que  $\exists t^* : x(t^*) = -\sqrt{t^*}$ .

2. Por un lado, la isoclina nos dice que  $x'(t^*) = 0$ .

3. Por otro lado,  $x'(t^*) \leq \left[ \frac{d}{dt}(-\sqrt{t}) \right]_{t=t^*} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t^*}} < 0$ .

$$4.7 \begin{cases} x' = x^2 + t^2, t > 0 \\ x(0) > 0 \end{cases} \quad \text{Sea } x : [0, T) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ derivable.}$$

1. Queremos ver si  $\forall t \in [0, T) : x(t) > \frac{t^3}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Como } x' \geq t^2 &\implies \int_0^t x'(s) \, ds \geq \int_0^t s^2 \, ds \implies x(t) - x(0) \geq \frac{t^3}{3} \\ &\implies \boxed{\forall t \in [0, T) : x(t) > \frac{t^3}{3}} \end{aligned}$$

2. Queremos ver si  $\forall t \in (\sqrt{3}, T), T > \sqrt{3} : x(t) > \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{3}} - t}$

$$\begin{aligned} \text{Como } x' \geq x^2 &\implies x^{-2}x' \geq 1 \implies \int_{\sqrt{3}}^t \frac{x'(s)}{x(s)^2} \, ds \geq t - \sqrt{3} \\ &\implies -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(\sqrt{3})} \geq t - \sqrt{3} \implies t \leq \sqrt{3} + \frac{1}{x(\sqrt{3})} - \frac{1}{x(t)} \\ &\implies t < \sqrt{3} + \frac{3}{(\sqrt{3})^3} - \frac{1}{x(t)} = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x(t)} = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x(t)} \\ &\implies t < \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x(t)} \implies \frac{1}{x(t)} < \frac{4}{\sqrt{3}} - t \implies \boxed{\forall t > \sqrt{3} : x(t) > \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{3}} - t}} \end{aligned}$$

## 4.2 Hoja 2

$$1.1 \begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{tiene sol única.}$$

1. Toda solución que no sea constante es estrictamente monótona.

**Demostración.** Por contrarecíproco, veamos que

$$\exists t^* : x'(t) = 0 \implies x(t) \equiv C := x(t^*)$$

Definimos  $\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = x(t^*)$ . Por hipótesis,  $f(C) = f(x(t^*)) = x'(t) = 0$

$$\implies y'(t) = \frac{d}{dt}(C) = 0 = f(C) = f(y(t)) \implies y \text{ es solución}$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(t^*) = C \end{cases} \implies \text{Por unicidad, } x(t) = y(t) \equiv C$$

■

2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = C_0 \implies u(t) \equiv C$  es solución.

**Demostración.** (a)  $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)\right) = f(C_0)$

(b) Veamos que  $f(C_0) = 0$ . Por contradicción, supongamos que  $f(C_0) = A > 0$

$$\implies \lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = A \implies \exists \tilde{t} : \forall t \geq \tilde{t} : x'(t) > \frac{A}{2}$$

$$\begin{aligned} \implies \int_{\tilde{t}}^t x'(\tau) d\tau &> \int_{\tilde{t}}^t \frac{A}{2} d\tau \implies x(t) - x(\tilde{t}) > \frac{A}{2}(t - \tilde{t}) \\ \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( x \left( \tilde{t} + \frac{A}{2}(t - \tilde{t}) \right) \right) = \infty \longrightarrow \leftarrow \end{aligned}$$

$$(c) \ u'(t) = \frac{d}{dt}(C_0) = 0 = f(C_0) = f(u(t)) \implies u \text{ es solución.}$$

■

**1.2**  $x' = f(x)$  La unicidad solo se puede perder cuando  $f(x) = 0$

$$1. \ f(x) := x' = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

**Observación 4.1.**

(a)  $x \equiv 0$  es solución ( $f(0) = 0$ ) y solo puede haber problemas de unicidad en  $x = 0$ .

(b)  $x(t)$  es estrictamente creciente si  $x(t) \neq 0$

No habría unicidad en  $x = 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{x_0} \frac{1}{f(\tau)} d\tau \in \mathbb{R}$  con  $x_0 > x$

En nuestro caso,  $\int_x^{x_0} \frac{1}{\tau^2} d\tau = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty \implies$  hay unicidad por arriba.

Para la unicidad por abajo,  $\int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{-\tau}} d\tau = -2(\sqrt{-x} - \sqrt{-x_0}) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 2\sqrt{x_0} \in \mathbb{R}$   
 $\implies$  No hay unicidad por abajo.

Por tanto, podemos encontrar una solución de la siguiente forma:

$$y(t) := \begin{cases} -\frac{t^2}{4} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \implies y'(t) = \begin{cases} -\frac{t}{2} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Es solución porque:

$$f(y(t)) = \begin{cases} f(-\frac{t^2}{4}) & t < 0 \\ f(0) & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{-(-\frac{t^2}{4})} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{t}{2} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} = y'(t)$$

Por un lado,  $x(t_0) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  por la unicidad por arriba.

Por otro lado, si  $x(t_0) < 0$  sabemos que

- $x(t)$  no decrece.
- $x(t)$  está acotada por arriba por 0.

$$\implies \exists \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq 0$$

Supongamos que  $\exists A > 0 : \lim_{x(t)} = -A$ .

Como  $x(t)$  no decrece,

$$\begin{aligned} \implies x(t) \leq -A &\implies x'(t) = \sqrt{-x(t)} \geq \sqrt{A} \implies x(t) \geq x(c) + \sqrt{A}t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \longrightarrow \leftarrow \\ &\implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \end{aligned}$$

2.

**1.3**  $x' = f(t, x) \wedge x$  es solución.

$f$  no depende de  $t \iff \forall b \in \mathbb{R} : y(t) := x(t + b)$  es sol.

**Demostración.** ( $\implies$ ) Supongamos que  $f$  no depende de  $t$ .

$$\begin{aligned} \implies x' = f(x) &\implies y(t) = x(t + b) \implies y'(t) = \frac{d}{dt}(x(t + b)) = x'(t + b) \\ &\implies y'(t) = f(x(t + b)) = f(y(t)) \end{aligned}$$

( $\impliedby$ ) Supongamos que  $\forall b \in \mathbb{R} : y(t) := x(t + b)$  es sol.

$x' = f(t, x(t)) \implies y(t) = x(t + b)$  también es solución

$$x'(t + b) = f(t, x(t + b)) \implies x'(t) = f(t - b, x(t))$$

$$\implies \forall b \in \mathbb{R} : f(t - b, x(t)) = f(t, x(t))$$

En particular,  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \implies \forall b \in \mathbb{R} : \forall x_0 \in \mathbb{R} : f(-b, x_0) = f(0, x_0)$

$\implies f$  no depende de su primera variable

■