
PROBABILIDAD I

Segundo del Grado en Matemáticas

Hugo Marquerie

Profesor:

Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid

Segundo cuatrimestre 2023 - 2024

February 1, 2024

1 Tema 1: Sucesos y probabilidades

1.1 Formalizando

Definición 1.1.1 (Espacio muestral). En un experimento aleatorio, el espacio muestral es el conjunto (no vacío) de sus posibles resultados y se denota por Ω . Puede ser:

1. Finito: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$
2. Infinito numerable: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$
3. Infinito no numerable, ej.: $\Omega = [0, 1) \vee \Omega = \mathcal{P}([0, 1))$

Definición 1.1.2 (Espacio de sucesos por Kolmogórov). Dado el espacio muestral Ω de un experimento aleatorio, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es su espacio de sucesos

$$\iff (\mathcal{F} \neq \emptyset) \wedge (A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}) \wedge \left(A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F} \right)$$

Observación 1.1.1. De la definición se deduce:

$$\bullet \phi \in \mathcal{F} \wedge \Omega \in \mathcal{F} \quad \bullet A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{F} \quad \bullet \forall A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$$

Definición 1.1.3 (Función o medida de probabilidad). Dado espacio muestral (Ω) y de sucesos (\mathcal{F}) de un experimento aleatorio, la aplicación $P: \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$: es una medida de probabilidad

$$\iff (P(\Omega) = 1) \wedge \left[P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \iff A_i \cap A_j = \emptyset \text{ cuando } i \neq j \right]$$

Proposición 1.1.1. De la definición se deduce:

1. $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$
2. $P(A^C) = 1 - P(A)$
3. $P(\emptyset) = 0$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$

Demostración. (ejercicio) ■

Ejemplo 1.1.1. En un experimento aleatorio con espacio muestral finito, tomamos $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\} \wedge \mathcal{F} = \mathcal{P} \rightarrow 2^N$. Asignamos $P(\{\omega_j\}) = p_j \wedge j = 1, \dots, N$ tales que

$$p_j \geq 0 \wedge \sum_{j=1}^N p_j = 1. \text{ Entonces, } \forall A \in \mathcal{F} : P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

Caso particular: $\forall j \in \{1, \dots, N\} : p_j = \frac{1}{N} \implies \forall A \in \mathcal{F} : P(A) = \frac{|A|}{N} = \frac{\text{"Casos favorables"}}{\text{"Total de casos"}}$

1. (Muy tonto) $\Omega \neq \emptyset$, tomas $A \subset \Omega : A \neq \emptyset, \Omega$.
Dato $p \in (0, 1)$. $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ con $P(A) = p$.

2. (Bastante general) $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\} \rightarrow |\Omega| = N$

$\mathcal{F} = P(\Omega) \rightarrow |\mathcal{F}| = 2^N$. Dato: $p_1, \dots, p_N \geq 0 \implies \sum_{j=1}^N p_j = 1$. Asignamos $P(\{\omega_j\}) = p_j$ para cada $j = 1, \dots, N$.

Defines, para $A \subset \Omega$ $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.

Caso particular: $p_j = \frac{1}{N}, j = 1, \dots, N \implies P(A) = \frac{|A|}{N}$

3. Lanzas n veces la moneda.

Dato: $p \in (0, 1)$ $\Omega = \{111 \dots 1, \dots, 000 \dots 0\}, |\Omega| = 2^n$. $\mathcal{F} = P(\Omega)$.

$P(\omega) = p^{\#\text{unos de } \omega} (1-p)^{\#\text{ceros de } \omega}$

Comprobamos:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \#\text{ceros de } \omega = k}} P(\omega) \right) = \sum_{k=0}^n p^k (1-p)^{n-k} (|\{\omega \in \Omega : \#\text{unos de } \omega \text{ en } k\}|) \\ &= \sum_{k=0}^n p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{k} = (p + 1 - p)^n = 1 \end{aligned}$$

4. Lanzamos moneda hasta que sale una cara. Dato $p \in (0, 1)$.

$\Omega = \{C, XC, XXC, \dots\} \wedge \mathcal{F} = P(\Omega)$.

$\implies P(C) = p \wedge P(XC) = p(1-p) \wedge P(XXC) = p(1-p)^2 \wedge \dots$

Comprobamos: $\sum_{j=1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$

1.2 Probabilidad condicionada y total, independendia y regla de Bayes

Tienes (Ω, \mathcal{F}, P) y un suceso $A \in \mathcal{F} \rightarrow P(A)$. Llega "nueva información": ha ocurrido el suceso $B \in \mathcal{F} \rightarrow$ ¿Debo reasignar la probabilidad de A ?

Ejemplo 1.2.1. Lanzas 10 veces la moneda (regular).

$A = \{\text{salen 6 caras}\} \implies P(A) = \frac{\binom{10}{6}}{2^{10}} \approx 20.51\%$ $B = \{\text{sale C en } 1^{\text{a}}\} \implies P(A) \text{ sube a } \frac{\binom{9}{5}}{2^9}$

Definición 1.2.1. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) , sucesos $A, B \in \mathcal{F}, P(B) > 0$, $P(A|B)$ es la probabilidad de A condicionada a B

$$\iff P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observación 1.2.1. En general, $P(A|B) \neq P(B|A)$

Proposición 1.2.1 (Calculamos $P(A|B)$ para cada $A \in \mathcal{F}$). Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $B \in \mathcal{F}$ un suceso con $P(B) > 0$

$\implies (\Omega, \mathcal{F}, Q_B)$, donde $Q_B: \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1] : Q_B(A) = P(A|B)$, es un espacio de probabilidad

Demostración.

$$\left(Q_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \in [0, 1] \right) \wedge \left(Q_B(\Omega) = P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \right)$$

Sean $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos.

$$\begin{aligned} \implies Q_B \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) &= P \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \middle| B \right) = \frac{P \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap B \right)}{P(B)} \\ &= \frac{1}{P(B)} P \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B) \right) = \frac{1}{P(B)} \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_B(A_j) \end{aligned}$$

■

Definición 1.2.2 (Independencia). Sean $A, B \in \mathcal{F}$ dos sucesos con $P(A), P(B) \geq 0$ son independientes

$$\iff P(A|B) = P(A) \wedge P(B|A) = P(B) \text{ para entender}$$

$$\iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ la adecuada}$$

• A, B disjuntos \implies no independientes.

• $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{F}$ independientes $\iff \forall J \subset \mathbb{N}_N : P \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$

$$\iff P \left(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_N} \right) = \prod_{i=1}^N P \left(\overline{A_i} \right) \text{ donde } \overline{A_i} = A_i, (A_i)^c$$

Ejercicio 1.2.1. Encontrar un espacio de probabilidad en la que haya un conjunto de sucesos independientes dos a dos pero no completamente independientes.

$$\text{SOL: } \Omega = \{1, 2, 3, 4\} \wedge A = \{1, 2\} \wedge B = \{2, 3\} \wedge C = \{1, 3\}$$

Proposición 1.2.2 (Regla de Bayes). Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $A, B \in \mathcal{F}$ sucesos con $P(A), P(B) > 0$

$$\implies P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

Demostración.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \wedge P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\implies P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) \implies P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$



1.2.1 Probabilidad Total

Tenemos una partición de Ω $B_1, B_2, \dots : (B_i \cap B_j = \phi \iff i \neq j) \wedge \left(\bigcup_j B_j = \Omega\right)$

$$\implies P\left(\bigcup_j (A \cap B_j)\right) = \sum_j (A \cap B) = \sum_j P(A|B_j) \cdot P(B_j)$$

Ejemplo 1.2.2. $U_1 = \{10b, 3n\} \wedge U_2 = \{5b, 5n\} \wedge U_3 = \{2b, 6n\}$

Procedimiento:

1. Sorteamos una urna $^{1/4} \rightarrow U_1 \wedge ^{1/4} \rightarrow U_2 \wedge ^{1/2} \rightarrow U_3$
2. Sacamos bola de la urna seleccionada.

¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

$$P(b) = P(b|U_1)P(U_1) + P(b|U_2)P(U_2) + P(b|U_3)P(U_3)$$

Ejemplo 1.2.3 (Peso de la evidencia). $U_1 = \{80\%b, 20\%n\} \wedge U_2 = \{20\%b, 80\%n\}$

Procedimiento:

1. Sorteamos la urna con $^{1/2}$ y $^{1/2}$ de probabilidad.
2. Sacamos 10 bolas (con reemplazamiento).

Observamos la evidencia: $bb \dots nb$ ¿qué urna se usó?

$$P(U_1|5b5n) = P(5b5n|U_1) \frac{P(U_1)}{P(5b5n)} = \frac{P(5b5n|U_1)P(U_1)}{P(5b5n|U_1)P(U_1) + P(5b5n|U_2)P(U_2)}$$

$$P(5b5n|U_1) = \binom{10}{5} 0.8^5 0.2^5 = P(5b5n|U_2) \implies P(U_1|5b5n) = \frac{1}{2}$$

$$P(U_1|6b4n) = \frac{P(6b4n|U_1)P(U_1)}{P(6b4n|U_1)P(U_1) + P(6b4n|U_2)P(U_2)} = \frac{\binom{10}{6} 0.8^6 0.2^4 \cdot ^{1/2}}{\binom{10}{6} 0.8^6 0.2^4 \cdot ^{1/2} + \binom{10}{6} 0.8^4 0.2^6 \cdot ^{1/2}} \approx 90\%$$

Ejemplo 1.2.4 (Falsos positivos/negativos). Hay una enfermedad $\rightarrow E \vee S$ y hay una prueba para detectar $\rightarrow + \vee -$. Datos: $P(+|E) = 95\% \wedge P(-|S) = 99\%$.

Te haces la prueba y sale +:

$$P(E|+) = P(+|E) \frac{P(E)}{P(+)} = \frac{P(+|E)P(E)}{P(+|E)P(E) + P(+|S)P(S)}$$

Conozco todas estas probabilidades excepto $p := P(E) \implies P(S) = 1 - p$.

Si definimos $f(p) := P(E|+)$

$$\implies \{f(0.5) = 98.95\% \wedge f(1/100) = 48.97\% \wedge f(1/1000) = 0.90\%\}$$

Es decir, si la incidencia es muy baja, no tiene sentido hacer pruebas masivamente porque la mayoría de positivos serán falsos.

Ejemplo 1.2.5 (Sobre independencia). $(\Omega, \mathcal{F}, P) \wedge A_1, \dots, A_n$ sucesos independientes tal que $\forall j \in \mathbb{N}_n : P(A_j) = \frac{1}{n}$. ¿Qué sabemos sobre $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right)$?

$$\text{En general, sabemos que } \frac{1}{n} \leq P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n P(A_j) \leq 1$$

$$n = 2: P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/4$$

$$n = 3: P(A \cup B \cup C) = \binom{3}{1} \frac{1}{3} - \binom{3}{2} \frac{1}{3^2} + \binom{3}{3} \frac{1}{3^3} = 19/27$$

$$n \text{ general: } P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \dots \text{ (Inclusión exclusión)}$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \binom{n}{1} \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} (-1)^{j+1}$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = 1 - \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{-1}{n}\right)^j = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{e}$$

1.2.2 Continuidad de la probabilidad: detalle técnico

Proposición 1.2.3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P) \wedge A_1, \dots : A_1 \subset A_2 \subset \dots$ una sucesión creciente de conjuntos

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Demostración. Se trata de describir $\bigcup_{j=1}^n A_j$ como la unión de conjuntos disjuntos.

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = P\left(A_1 \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} (A_{j+1} \setminus A_j)\right) = P(A_1) + \sum_{j=1}^{n-1} (P(A_{j+1}) - P(A_j)) = P(A_n)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = P(A_1) + \sum_{j=1}^{\infty} (P(A_{j+1}) - P(A_j)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

■

Proposición 1.2.4. Si la sucesión A_1, \dots es decreciente $\Rightarrow P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$

Teorema 1.2.1 (Continuidad de la probabilidad). En $(\Omega, \mathcal{F}, P) \wedge A_1, A_2, \dots$ sucesión : $\forall j \in$

$\mathbb{N} : A_j \in \mathcal{F}$

$$\implies P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right)$$

Demostración. ■

1.3 Variables aleatorias (discretas)

Definición 1.3.1. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidades, $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria discreta* (v.a.d.)

$$\iff (1) X(\Omega) \text{ es numerable}^* \wedge (2) \forall x \in \mathbb{R} : \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

En realidad, solo interesa (2) cuando $x = x_j$

Definición 1.3.2. Sea X una v.a.d. en (Ω, \mathcal{F}, P) , p_X es su función de masa

$$\iff p_X: \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \wedge x \longmapsto p_X(x) = P(X = x) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

Vemos que

$$\sum_{j \geq 1} p_X(x_j) = \sum_{j \geq 1} P(X = x_j) = \sum_{j \geq 1} P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_j\}) = P\left(\bigcup_{j \geq 1} \{x_j\}\right) = P(\Omega) = 1$$

Lo relevante es la lista de posibles valores de X $\{x_1, x_2, \dots\}$ numerable y la lista (también numerable) de probabilidades p_1, p_2, \dots donde $\forall j \geq 1 : p_j = P(x = x_j) \wedge p_j \geq 0 \wedge \sum_{j \geq 1} p_j = 1$

Teorema 1.3.1. Sea $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ un conjunto numerable y $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_j \geq 0 \wedge \sum_{j \geq 1} \Pi_j = 1$ una lista

$$\implies \exists(\Omega, \mathcal{F}, P) \wedge X \text{ v.a.d.} : \forall x \notin S : p_X(x) = 0 \wedge p_X(x_j) = \Pi_j$$

Demostración. Fijamos $\Omega = S$ y $\mathcal{F} = \mathcal{P}(S)$.

$$A \in \mathcal{F} \implies P(A) = \sum_{j: x_j \in A} \Pi_j \wedge X(x_j) = x_j$$
■

Ejemplo 1.3.1 (Dados). 1. Uniforme en $\{1, \dots, N\}$, $N \geq 2$.

$$S = \{1, \dots, N\} \wedge \Pi_j = 1/N, \dots, 1/N$$

2. X sigue una distribución de Bernoulli ($X \sim \text{BER}(p)$) con parámetro p

$$\iff \begin{cases} p_X(x) = 0 & \iff x \neq 0, 1 \\ p_X(1) = p \wedge p_X(0) = 1 - p \end{cases} \iff \begin{cases} 1, p \\ 0, 1 - p \end{cases} \quad \text{donde 1 es éxito y 0 fracaso}$$

3. X sigue una binomial de parámetro $n \geq 1 \wedge p \in (0, 1)$ ($X \sim \text{BIN}(n, p)$)

$$\iff S = \{0, 1, \dots, n\} \wedge \forall j \in \{0, 1, \dots, n\} : P(x = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

Sirve para modelizar el número de caras que salen al lanzar n veces una moneda de probabilidad p .

$$\begin{aligned} n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} &\implies \binom{n}{n/2} \sim \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{(n/2)^{(n/2)} e^{-(n/2)} \sqrt{2\pi(n/2)} (n/2)^{(n/2)} e^{-(n/2)} \sqrt{2\pi(n/2)}} \\ &\implies \frac{n^n \sqrt{n}}{(n/2)^{(n/2)} \sqrt{2\pi(n/2)} (n/2)^{(n/2)} \sqrt{(n/2)}} = \frac{n^n \sqrt{n}}{(n/2)^n \sqrt{2\pi(n/2)}} = \frac{n^n \sqrt{2}}{(n/2)^n \sqrt{\pi n}} = 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \end{aligned}$$

4. La variable X sigue una distribución geométrica de parámetro $p \in (0, 1)$ ($X \sim \text{GEOM}(p)$).

$$\iff S = \{1, 2, \dots\} \wedge \forall j \geq 1 : P(x = j) = p(1-p)^{j-1}$$

Sirve para modelizar el número de lanzamientos hasta que sale un resultado C en cuestión.

Observación 1.3.1. Cuidado porque existen variables aleatorias que también se dicen de distribución geométrica en las que $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Se habla de cuantas veces has obtenido el resultado complementario a C antes de que halla salido C .

5. La variable X sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ ($X \sim \text{POISSON}(\lambda)$)

$$\iff S = \{0, 1, \dots\} \wedge \forall j \geq 0 : P(x = j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}$$

Proposición 1.3.1. Sea $X \sim \text{BIN}(n, p)$ una v.a.d.

$$\implies \text{cuando } n \text{ es grande, } \text{BIN}(n, p) \sim \text{POISSON}(np)$$

Demostración. Fijo $\lambda > 0 \wedge p = \frac{\lambda}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

■

Ejemplo 1.3.2 (¿Hay más ejemplos?).

- Binomial negativa
- Hipergeométrica

- Dada cualquier serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, se puede definir la variable aleatoria X tal que $S = \{1, 2, \dots\} \wedge P(x = k) = \frac{a_k}{s}$

1.3.1 Funciones transformadoras de variables aleatorias (discretas)

Sea X una v.a.d. y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, definimos $Y := g(X)$.

$$\implies \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = g(X(\omega)) = y\} \in \mathcal{F}_Y \text{ es una v.a.d}$$

Por otro lado,

$$\implies \forall y \in \mathbb{R} : P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X \in g^{-1}(y)) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x)$$

2 Ejercicios

2.1 Hoja 1

14.* Dos jugadores de tenis, A y B , tienen probabilidades p y $1 - p$ de ganar un punto cuando sirve A .

1. Halla la probabilidad de que A gane un juego en el que sirve y que en este momento está en situación de deuce.
2. Halla la probabilidad de que A gane un juego en el que sirve.

21. Urna de Pólya

$\Omega =$ Listas infinitas de 0s y 1s $\wedge B_n =$ suceso "blanca" en n

$$\bullet P(B_1) = \frac{b}{a+b}$$

$$\bullet P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|A_1)P(A_1) = P(B_2|B_1)\frac{b}{a+b} + P(B_2|A_1)\frac{a}{a+b}$$
$$\implies P(B_2) = \frac{b+1}{a+b+1}\frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b+1}\frac{a}{a+b} = \frac{b(b+1) + ba}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{b}{a+b}$$

Demostración. Veamos por inducción que $\forall n \in \mathbb{N} : P(B_n) = \frac{b}{a+b}$

Suponemos que $\forall a, b \in \mathbb{N} : \forall k \in \{1, \dots, n\} : P(B_k) = P(B_1) = \frac{b}{a+b}$

$$\implies P(B_{n+1}) = P(B_{n+1}|B_1)P(B_1) + P(B_{n+1}|A_1)P(A_1)$$
$$= P(B_{n+1}|B_1)\frac{b}{a+b} + P(B_{n+1}|A_1)\frac{a}{a+b}$$

Por tanto, por hipótesis de inducción:

$$\implies P(B_{n+1}) = \frac{b+1}{a+b+1} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b+1} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$$

■