

---

# GEOMETRÍA DE CURVAS Y SUPERFICIES

---

Segundo del Grado en Matemáticas

**Hugo Marquerie**

“Profesor”: Adrián Ubis Martínez

Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid

Segundo cuatrimestre 2023 - 2024

1 de Febrero, 2024

# Índice

<b>1 Tema 1: Curvas</b>	<b>1</b>
1.1 Curvas regulares, trazas, velocidades y tangencias . . . . .	1
1.2 Longitud de curvas y reparametrizaciones . . . . .	2
1.2.1 Poligonales . . . . .	2
1.2.2 Definición de longitud de curva . . . . .	2
1.2.3 Teorema de cálculo de longitud . . . . .	2
1.2.4 Reparametrizaciones . . . . .	4
1.2.5 Parametrización por longitud de arco . . . . .	5
1.3 Curvatura y torsión . . . . .	6
1.3.1 Fórmulas de Frenet-Serret . . . . .	9
1.3.2 Cambio de sentido y Triedro de Frenet . . . . .	9
1.3.3 Movimientos rígidos y triedros . . . . .	10
1.3.4 Otros triedros sobre curvas . . . . .	10
1.4 Curvatura y torsión. Complementos . . . . .	11
1.4.1 Curvas no parametrizadas por longitud de arco . . . . .	11
1.4.2 Curvatura de curvas planas . . . . .	12
1.4.3 Forma canónica local . . . . .	14
1.5 Teorema fundamental de la teoría de curvas . . . . .	15
1.6 Desigualdad isoperimétrica. Geometría global de curvas planas . . . . .	15

# 1 Tema 1: Curvas

## 1.1 Curvas regulares, trazas, velocidades y tangencias

**Definición 1.1 (Curva).**  $\gamma$  es una curva  $\iff \gamma: I = (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es  $C^\infty$

- Para casi todo lo que sigue basta con que  $\gamma \in C^2$ . Para contrastar, en alguna discusión posterior, admitiremos curvas que son solo  $C^0 \vee C^1$ .
- El intervalo  $I = (a, b)$  puede ser no acotado en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.2 (Traza).** Sea  $\gamma$  una curva, traza  $(\gamma) = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^3$ . También se dice que  $\gamma$  es parametrización de traza  $(\gamma)$ .

**Observación 1.1.** Dos curvas distintas pueden tener la misma traza y corresponden a parametrizaciones diferentes. De hecho, si  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva y  $g: J \longrightarrow I$  es una función sobreyectiva  $C^\infty$

$$\implies \mu: J \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \mu(u) = \gamma(g(u)) \text{ es una curva de misma traza que } \gamma$$

**Definición 1.3 (Velocidad y rapidez).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva, el vector velocidad (velocidad) de  $\gamma$  en  $t$  es  $\gamma'(t) = \nabla \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ . La norma  $\|\gamma'(t)\|$  se conoce como la rapidez.

**Definición 1.4 (Curva regular).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , es regular  $\iff \forall t \in I : \gamma'(t) \neq 0$

**Ejemplo 1.1.** El conjunto de puntos  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1 \wedge y = |x|\}$  no es traza de ninguna curva regular.

Pongamos que  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  es curva regular con traza  $V$ , y que  $\gamma(0) = (0, 0)$ . Entonces  $y(t)$  tiene un mínimo en  $t = 0$  y  $y'(0) = 0$ . Si fuera  $x'(0) > 0$ , entonces  $x(t) > 0$  para  $t \in (0, \delta)$  y, por tanto,  $x(t) = y(t)$  para  $t \in [0, \delta)$  y, por tanto  $x'(0) = y'(0) = 0$ . Contradicción: la curva  $\gamma$  no es regular. También conduce a contradicción el que  $x'(0) = 0$ .

**Definición 1.5 (Recta tangente a una curva regular).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular y  $t_0 \in I$ ,  $\eta: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es la recta tangente a  $\gamma$  en  $\gamma(t_0)$   $\iff \eta(u) = \gamma(t_0) + u\gamma'(t_0)$

## 1.2 Longitud de curvas y reparametrizaciones

### 1.2.1 Poligonales

Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva (no necesariamente regular) y  $[c, d] \subset I$ . Definimos una poligonal de  $\gamma$  entre  $\gamma(c)$  y  $\gamma(d)$  tomando una partición de  $[c, d]$ :

$$c = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = d$$

La poligonal  $\Pi$  asociada a esa partición es la lista de segmentos:

$$\Pi = ([\gamma(t_0), \gamma(t_1)], [\gamma(t_1), \gamma(t_2)], \dots, [\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)])$$

La longitud de la poligonal  $\Pi$  se denota  $L(\Pi)$  se define entonces de forma natural como:

$$L(\Pi) = \sum_{j=1}^n \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$$

### 1.2.2 Definición de longitud de curva

**Definición 1.6 (Longitud de una curva).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva  $C^0$ ,  $[c, d] \subset I$ , se define la longitud como:

$$L(\gamma; c, d) = \sup \{L(\Pi) : \Pi \text{ poligonal de } \gamma \text{ entre } \gamma(c) \text{ y } \gamma(d)\}$$

En general, para una curva sólo continua este supremo puede ser  $\infty$ . Por ejemplo, para la curva copo de nieve de Von Koch.

### 1.2.3 Teorema de cálculo de longitud

**Teorema 1.1.** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular y  $[c, d] \subset I$

$$\implies L(\gamma; c, d) = \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt$$

**Demostración.** En la demostración denotamos

- $L := L(\gamma; c, d)$ , que es supremo de las longitudes de las poligonales.
- $J := \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt$

Veamos que  $L \leq J \wedge J \leq L$ :

**Lema 1.1.** Sea  $u: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación y sean  $c, d \in I$ , con  $c < d$ .

$$\implies \left\| \int_c^d u(t) dt \right\| \leq \int_c^d \|u(t)\| dt$$

**Demostración.** Usamos que para cualquier  $v$  se tiene  $\|v\| = \sup\{|v \cdot w| : \|w\| = 1\}$ .

Pongamos  $v = \int_c^d u(t) dt$  y sea  $w$  con  $\|w\| = 1$

$$\implies v \cdot w = \int_c^d (u(t) \cdot w) dt \wedge |v \cdot w| \leq \int_c^d |u(t) \cdot w| dt \leq \int_c^d \|u(t)\| dt$$

Lo anterior es cierto para cualquier  $w$  con  $\|w\| = 1$ . ■

[**L**  $\leq$  **J**] Para una poligonal  $\Pi$  con partición  $t_0 = c < t_1 < \dots < t_n = d$ , se tiene que

$$L(\Pi) = \sum_{j=1}^n \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^n \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right\|$$

Por el Lema 1.1, se tiene

$$L(\Pi) \leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_n} \|\gamma'(t)\| dt = J \implies L \leq J$$

[**L**  $\leq$  **J**] Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Por la continuidad uniforme de  $\gamma' \in C^0$ , tenemos  $\delta > 0$  tal que si  $c \leq t \leq t' \leq d$

$$\bullet \text{ son tales que } |t' - t| \leq \delta \quad \bullet \text{ entonces } \|\gamma(t') - \gamma(t)\| \leq \varepsilon$$

(El  $\delta$  no depende de los puntos  $t$  y  $t'$ , sólo de  $\varepsilon$ ).

Tomamos una partición  $t_0 = c < t_1 < \dots < t_n = d$  para la que cumpla que  $t_j - t_{j-1} < \delta$  para  $j = 1, \dots, n$ .

Sea  $\Pi$  la poligonal dada por esa partición. Entonces:

$$L(\Pi) = \sum_{j=0}^{n-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| = \sum_{j=0}^{n-1} \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma'(t) dt \right\|$$

Sea  $u_j \in [t_{j-1}, t_j]$  tal que  $\|\gamma'(u_j)\| = \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \|\gamma'(t)\|$ .

$$\text{Por un lado, } J = \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{j=1}^n \|\gamma'(u_j)\| (t_j - t_{j-1}) \quad (\star)$$

Por otro lado,

$$\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma'(t) dt = \left( \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\gamma'(t) - \gamma'(u_j)) dt \right) + \gamma'(u_j)(t_{j+1} - t_j)$$

Así que

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| &\geq \|\gamma'(u_j)\| |t_{j+1} - t_j| - \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\gamma'(t) - \gamma'(u_j)) dt \right\| \\ &\geq \|\gamma'(u_j)\| |t_{j+1} - t_j| - \varepsilon(t_{j+1} - t_j) \end{aligned}$$

usando el Lema 1.1 y las condiciones de la partición. Por lo tanto,

$$L(\Pi) = \sum_{j=0}^{n-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| \geq \sum_{j=0}^{n-1} \|\gamma'(u_j)\| (t_{j+1} - t_j) - \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) \geq J - \varepsilon(d - c)$$

donde se ha usado  $(\star)$ . En suma

$$\forall \varepsilon > 0 : J \leq L(\Pi) + \varepsilon(d - c) \geq L + \varepsilon(d - c) \implies J \leq L$$

■

**Ejemplo 1.2 (Longitud gráfica de una función).**  $\forall t \in [c, d] : \gamma(t) = (t, f(t))$  donde  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable.

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + (f'(t))^2} \implies \text{Long gráfica} = \int_c^d \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

## 1.2.4 Reparametrizaciones

Dada una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , queremos recorrer su traza con otra curva.

**Definición 1.7.** Sean  $h : J \rightarrow I$  un difeomorfismo (biyección tal que tanto  $h$  como  $h^{-1}$  son  $C^\infty$ ) y  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva,  $\eta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una reparametrización de  $\gamma$

$$\iff \forall u \in J : \eta(u) = \gamma(h(u))$$

- $\eta$  es curva porque  $\gamma$  lo es y  $h$  es  $C^\infty$ .
- $\eta$  y  $\gamma$  tienen la misma traza ( $\text{traza}(\eta) = \text{traza}(\gamma)$ ).
- $\gamma$  es también reparametrización de  $\eta$ , pues  $\gamma = \eta \circ h^{-1}$ .
- $\eta$  regular  $\iff \gamma$  regular, pues  $\eta(u) = h'(u) \cdot \gamma'(h(u))$ .
- En coordenadas,  $\frac{d}{du}\eta(u) = (x'(h(u))h'(u), y'(h(u))h'(u), z'(h(u))h'(u))$

### Orientación:

- Si  $h$  es función creciente, entonces  $\eta$  recorre la traza en el mismo sentido que  $\gamma$ .
- Si  $h$  es decreciente, entonces  $\eta$  recorre la traza en sentido contrario a como lo hace  $\gamma$ .

Supongamos que  $h$  es creciente. Sean  $[p, q] \subset J$ . Llamamos  $h(p) = c < d = h(q)$ . La curva  $\eta$  recorre de  $p$  a  $q$  la misma traza que  $\gamma$  desde  $c$  a  $d$ . La longitud de esa porción de traza se puede calcular con  $\eta$  o con  $\gamma$ :

$$L(\gamma; c, d) = L(\eta; p, q) \iff \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt = \int_p^q h'(u) \|\gamma'(h(u))\| du$$

### 1.2.5 Parametrización por longitud de arco

**Definición 1.8 (Curva parametrizada por longitud de arco).** Sea  $\eta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular, es parametrizada por longitud de arco

$$\begin{aligned} &\iff \forall s_1, s_2 \in I : s_1 < s_2 : s_2 - s_1 = L(\eta; s_1, s_2) \\ &\iff \forall s_1, s_2 \in I : s_1 < s_2 : s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} \|\eta'(d)\| ds \iff \forall s \in I : \|\eta'(s)\| = 1 \end{aligned}$$

**Teorema 1.2.** Toda curva regular se puede reparametrizar por longitud de arco.

**Demostración.** Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular, fijamos  $t_0 \in I$  y definimos:

$$\forall t \in I : g(t) := \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du$$

- ⎧ Para  $t > t_0$ , se tiene que  $g(t)$  es la longitud de la curva  $\gamma$  entre  $\gamma(t_0)$  y  $\gamma(t)$ .
- ⎧ Para  $t < t_0$ , la función  $g(t)$  nos da el negativo de la longitud entre  $\gamma(t_0)$  y  $\gamma(t)$ .

Queremos usar  $s := g(t)$  como etiqueta del punto  $\gamma(t)$ , en otras palabras, queremos despejar  $t$  en términos de  $s$ , es decir, invertir  $g$ .

- Como  $\gamma$  es regular, se tiene  $g'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ . Así que  $g$  es función creciente.
  - Supongamos que  $I = (a, b)$ . Llamaremos  $c := \lim_{t \rightarrow a} g(t)$  y  $d := \lim_{t \rightarrow b} g(t)$
- $\implies$  La función  $g$  es difeomorfismo entre  $I = (a, b)$  y  $J := (c, d)$

**Lema 1.2.** Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función  $C^\infty : \forall t \in I : \alpha(t) \neq 0 \implies \|\alpha(t)\|$  es  $C^\infty$

**Demostración.** La función  $\|\alpha(t)\|^2 = \alpha(t) \cdot \alpha(t)$  es  $C^\infty$  y  $\|\alpha(t)\|$  es la raíz cuadrada de una función  $C^\infty$  que no se anula, por tanto, es  $C^\infty$ . ■

El lema nos da que  $g'$  es  $C^\infty$ . Tomamos  $h: J \rightarrow I$  dada por  $h(s) := g^{-1}(s)$ , y consideramos la curva  $\forall s \in J : \eta(s) := \gamma(h(s))$ .

Se tiene que  $\eta'(s) = h'(s) \cdot \gamma'(h(s)) = \frac{1}{g'(h(s))} \gamma'(h(s)) = \frac{1}{\|\gamma'(h(s))\|} \gamma'(h(s))$ .

$\implies \forall s \in J : \|\eta'(s)\| = 1 \implies \eta$  está parametrizada por longitud de arco. ■

La relevancia del teorema de reparametrización por longitud de arco radica sobre todo en que nos permite suponer que hay tal reparametrización, no tanto en que sea un procedimiento para conseguirla.

### 1.3 Curvatura y torsión

La curvatura de una curva en un punto mide

- cuán lejana está la curva de ser recta en ese punto.
- cuán rápidamente está cambiando de dirección en ese punto.

La torsión de una curva en un punto mide

- cuán próxima está la curva a ser curva plana en ese punto.
- cuán rápidamente está cambiando su plano “osculador” en ese punto.

**Lema 1.3.**

1. Sea  $u: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación derivable tal que  $\|u(t)\|$  es constante en  $I$ .

$$\implies \forall t \in I : u'(t) \cdot u(t) = 0 \iff \forall t \in I : u'(t) \perp u(t)$$

2. Sean  $u: I \longrightarrow \mathbb{R}^3, v: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  aplicaciones derivables tales que  $u(t) \cdot v(t) = \text{cte}$  en  $I$ .

$$\implies \forall t \in I : u'(t) \cdot v(t) = -u(t) \cdot v'(t)$$

Uso típico:  $\|u(t)\| = 1 \wedge u(t) \cdot v(t) = 0$ .

**Demostración.** La primera parte del lema se deduce de la segunda, más general, tomando  $v = u$ . Como el producto escalar  $u(t) \cdot v(t)$  es constante, derivando se tiene que

$$\forall t \in I : u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t) = 0 \implies \forall t \in I : u'(t) \cdot v(t) = -u(t) \cdot v'(t)$$

■

**Definición 1.9 (Vector tangente).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco ( $\forall s \in I : \|\gamma'(s)\| = 1$ ),  $t(s)$  es el vector tangente a  $\gamma$  en  $s \in I \iff \boxed{t(s) := \gamma'(s)}$

**Definición 1.10 (Curvatura).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco ( $\forall s \in I : \|\gamma'(s)\| = 1$ ),  $\kappa(s)$  es la curvatura de  $\gamma$  en  $s \in I \iff \boxed{\kappa(s) := \|t'(s)\| = \|\gamma''(s)\|}$

**Ejemplo 1.3 (Curvatura nula significa que la traza es (parte de) una recta).**

**Proposición 1.1.** Una curva en el plano de curvatura constante  $M > 0$  está contenida en una circunferencia de radio  $1/M$



**Definición 1.11 (Curva birregular).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular, es birregular

$$\iff \forall s \in I : \gamma''(s) \neq 0 \iff \forall s \in I : \kappa(s) \neq 0$$

**Proposición 1.2.** Una curva regular  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  (no necesariamente parametrizada por longitud de arco) es birregular

$\iff$  su reparametrización por longitud de arco es birregular.

$\iff \forall i \in I : \gamma'(t)$  y  $\gamma''(t)$  son linealmente independientes.

**Demostración.** ■

**Definición 1.12 (Vector normal).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular parametrizada por longitud de arco,  $\mathbf{n}(s)$  es el vector normal a  $\gamma$  en  $s \in I$

$$\iff \mathbf{n}(s) := \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)}$$

La aplicación  $\mathbf{n}: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es  $C^\infty$ , pues  $\kappa$  es  $C^\infty$  y no se anula.

Como  $\|\mathbf{t}\| = 1 \implies \mathbf{t}'(s) \perp \mathbf{t}(s) \implies \boxed{\mathbf{n}(t) \perp \mathbf{t}(s)}$

El vector  $\mathbf{n}(s)$  es unitario y perpendicular a  $\mathbf{t}(s)$ . Hay infinitos vectores en  $\mathbb{R}^3$  (toda una circunferencia) con esa propiedad:  $\mathbf{n}(s)$  es uno de ellos, pero canónico.

**Definición 1.13 (Plano osculador).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco, el subespacio afín  $\pi$  es el plano osculador a la curva  $\gamma$  en  $s \in I$

$$\iff \pi = \mathcal{L} \left\{ \mathbf{t}(s) = \gamma'(s), \mathbf{n}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)} \right\} + \gamma(s)$$

Para una curva en  $\mathbb{R}^2$ , el plano osculador es  $\mathbb{R}^2$ .

Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular parametrizada por longitud de arco y supongamos  $0 \in I$ .

La aproximación de primer orden a  $\gamma$  en  $\gamma(0)$  es la recta tangente a  $\gamma$  en  $\gamma(0)$ :

$$\gamma(s) \approx \gamma(0) + s\gamma'(0) = \gamma(0) + s\mathbf{t}(0)$$

La aproximación de segundo orden a  $\gamma$  en  $\gamma(0)$  se denomina **parábola osculatriz**:

$$\gamma(s) \approx \gamma(0) + s\mathbf{t}(0) + \frac{1}{2}s^2\gamma''(0) = \gamma(0) + s\mathbf{t}(0) + \frac{\kappa(0)}{2}s^2\mathbf{n}(0)$$

Entonces, “hasta orden 2” la curva está contenida en su plano osculador.

**Definición 1.14 (Vector binormal).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular,  $\mathbf{b}(s)$  es el

vector binormal a  $\gamma$  en  $s \in I \iff \boxed{b(s) := t(s) \times n(s)}$

Por las propiedades del producto vectorial  $\implies b(s) \perp t(s) \wedge b(s) \perp n(s) \wedge \|b(s)\| = 1$

Entonces, el vector binormal es vector unitario normal al plano osculador a la curva en  $s$ .

**Definición 1.15 (Triedro de Frenet).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular, el triedro de Frenet en  $s \in I$  es la tripleta  $(t(s), n(s), b(s))$

- $\forall s \in I : (t(s), n(s), b(s))$  es un triedro positivamente orientado.
- $\forall s \in I : \{t(s), n(s), b(s)\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .

La torsión de  $\gamma$  en  $s$  va a medir cómo varía el plano osculador a  $\gamma$  en  $s$  y, alternativamente, cuán “plana” es la curva  $\gamma$  en  $s$ .

Como  $b(s)$  es el vector normal al plano osculador a  $\gamma$  en  $s$ , se trata de estudiar  $b'(s)$ . Sabiendo que  $b(s) = t(s) \times n(s)$ , al derivar obtenemos:

$$\begin{aligned} b'(s) &= t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) \\ &= \kappa(s) n(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) = t(s) \times n'(s) \end{aligned}$$

Se deduce que  $b'(s) \perp t(s)$ . Además, como  $b(s) \cdot b(s) \equiv 1 \implies b'(s) \perp b(s) \implies b'(s) \parallel n(s)$ .

**Definición 1.16 (Torsión).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular,  $\tau(s)$  es la torsión de  $\gamma$  en  $s \in I \iff \boxed{b'(s) = \tau(s) n(s)} \implies \boxed{\tau(s) = b'(s) \cdot n(s)} \wedge \|b(s)\| = |\tau(s)|$

Para una curva birregular la curvatura es siempre positiva, pero la torsión en un punto dado puede ser positiva, negativa o 0. El signo de la torsión tiene significado geométrico.

**Proposición 1.3** (Torsión  $\equiv 0$ ). Sea  $\gamma$  una curva birregular,

$$\gamma \text{ está contenida en un plano} \iff \tau \equiv 0$$

**Demostración.** ( $\implies$ ) Si la curva está contenida en un plano, entonces  $b$  es constantemente uno de los dos vectores normales a dicho plano, por lo que  $b' \equiv 0 \implies \tau \equiv 0$ .

( $\impliedby$ ) Si  $\tau \equiv 0$ , entonces  $b' \equiv 0 \implies b$  es constante. Por tanto, si fijamos  $s_0 \in I \implies \forall s \in I : b(s) = b(s_0)$ . Queremos probar ahora que  $\forall s \in I : (\gamma(s) - \gamma(s_0)) \perp b(s_0)$ .

Pero derivando el producto escalar,

$$\begin{aligned} ((\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot b(s_0))' &= \gamma'(s) \cdot b(s_0) \\ &= t(s) \cdot b(s_0) = t(s) \cdot b(s) = 0, \quad \forall s \in I \end{aligned}$$

Por tanto,  $(\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot b(s_0)$  es una constante cuando  $s$  recorre  $I$ . Como en  $s = s_0$  se anula, se tiene que  $\forall s \in I : (\gamma(s) - \gamma(s_0)) \perp b(s_0)$  y  $\gamma$  está contenida en un plano. ■

**Definición 1.17 (Planos).** Sean  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco y  $(t, n, b)$  su triedro de Frenet. Se definen

Plano osculador, determinado por  $t \wedge n$

Plano normal, determinado por  $n \wedge b$

Plano rectificante, determinado por  $t \wedge b$

### 1.3.1 Fórmulas de Frenet-Serret

Vamos a expresar las derivadas  $t'(s), n'(s), b'(s)$  respecto de la base ortonormal  $\beta = \{t(s), n(s), b(s)\}$ .

Ya tenemos  $t'(s) = \kappa(s) n(s) \wedge b'(s) = \tau(s) n(s)$  de las definiciones 1.10, 1.16 y 1.12.

$$\begin{aligned} b(s) &= t(s) \times n(s) \implies n(s) = b(s) \times t(s) \\ \implies n'(s) &= b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s) = \tau(s) n(s) \times t(s) + \kappa(s) b(s) \times n(s) \\ \implies n'(s) &= -\tau(s) b(s) - \kappa(s) t(s) \\ \implies \begin{pmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}}_{=:FS} \begin{pmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Estas son las ecuaciones de Frenet-Serret donde la matriz escalar  $FS$  es antisimétrica.

Si escribimos los vectores de arriba en coordenadas ( $t = (t_1, t_2, t_3), t' = (t'_1, t'_2, t'_3)$ , etc.), la matriz anterior es de dimensiones  $9 \times 9$ : cada símbolo en la matriz  $FS$  se ha de sustituir por una caja diagonal.

### 1.3.2 Cambio de sentido y Triedro de Frenet

Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Supongamos por comodidad que  $I = (-a, a) \implies 0 \in I$  para  $a > 0$ .

Consideramos la curva  $\bar{\gamma}(s) := \gamma(-s)$ , que recorre la misma traza que  $\gamma$ , pero en sentido contrario. Queremos relacionar el triedro de  $\bar{\gamma}$  y su curvatura  $\bar{\kappa}$  y torsión  $\bar{\tau}$  con los de  $\gamma$  en 0, como  $\bar{\gamma}(0) = \gamma(0)$ :

$$\bar{t}(0) = -t(0) \wedge \bar{n}(0) = n(0) \wedge \bar{\kappa}(0) = \kappa(0) \wedge \bar{b}(0) = b(0) \wedge \bar{\tau}(0) = -\tau(0)$$

### 1.3.3 Movimientos rígidos y triedros

Los movimientos rígidos de  $\mathbb{R}^3$  se obtienen componiendo traslaciones con rotaciones. Si  $M$  es movimiento rígido de  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $M$  viene dado por un vector  $p$  y una matriz ortogonal  $O$  ( $O^T = O^{-1}$ ) con determinante 1:

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 : M(v) = Ov + p$$

Como  $|O| = 1$ , se tiene que  $u, v \in \mathbb{R}^3 \implies Ou \times Ov = O(u \times v)$ .

#### 1. Traslaciones

Sea  $\gamma$  una curva birregular parametrizada por longitud de arco y  $\bar{\gamma}$  la curva  $\bar{\gamma}(s) := \gamma(s) + p$ .

Como  $\bar{\gamma}'(s) = \gamma'(s)$ , se tiene que  $\bar{\gamma}$  está parametrizada por longitud de arco y que  $\forall s \in I : \bar{t}(s) = t(s) \implies \forall s \in I : \bar{\kappa}(s) = \kappa(s) \wedge \bar{n}(s) = n(s) \wedge \bar{\tau}(s) = \tau(s) \wedge \bar{b}(s) = b(s)$

#### 2. Rotaciones

Consideremos ahora la curva  $\bar{\gamma}(s) = O\gamma(s)$ .

Se tiene  $\forall s \in I : \bar{\gamma}'(s) = O\gamma'(s)$ . Así que  $\bar{\gamma}$  está parametrizada por longitud de arco y  $\forall s \in I : \bar{t}(s) = Ot(s)$ .

Además,  $\forall s \in I : \bar{t}'(s) = Ot'(s) \implies \bar{\kappa}(s) = \kappa(s) \wedge \bar{n}(s) = On(s)$

$$\bar{b}(s) = \bar{t}(s) \times \bar{n}(s) = Ot(s) \times On(s) = O(t(s) \times n(s)) = Ob(s) \implies \bar{\tau}(s) = \tau(s)$$

Es decir, al trasladar o rotar la curva, sin deformarla, las longitudes se conservan: los triedros van en triedros y sus variaciones  $(\kappa, \tau)$  se conservan.

### 1.3.4 Otros triedros sobre curvas

Sea  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco. Sea  $[P(s), Q(s), R(s)]$  un triedro positivo sobre la curva  $\gamma$ .

$$\iff \begin{cases} P, Q, R : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad C^\infty \\ \forall s \in I : \|P(s)\| = \|Q(s)\| = \|R(s)\| = 1 \\ \forall s \in I : P(s) \perp Q(s) \perp R(s) \wedge P(s) \perp P(s) \end{cases}$$

Para cada  $s \in I$  tenemos una base ortonormal  $[P(s), Q(s), R(s)]$  de  $\mathbb{R}^3$  positivamente orientada, i.e.  $\forall s \in I : R(s) = P(s) \times Q(s)$ .

Vamos a expresar la variación de  $[P(s), Q(s), R(s)]$  respecto de sí mismo.

$$\begin{pmatrix} P'(s) \\ Q'(s) \\ R'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(s) \\ Q(s) \\ R(s) \end{pmatrix}$$

Como  $\|P(s)\| \equiv 1$ , tenemos que  $P'(s) \cdot P(s) = 0$ , análogamente para  $Q$  y  $R$ . Así que la matriz tiene ceros en la diagonal.

Por otro lado, como  $P(s) \cdot Q(s) = 0 \implies P'(s) \cdot Q(s) = -Q'(s) \cdot P(s)$  y análogamente para  $P(s) \cdot R(s) = 0$  y  $Q(s) \cdot R(s) = 0$ . Así que la matriz es antisimétrica.

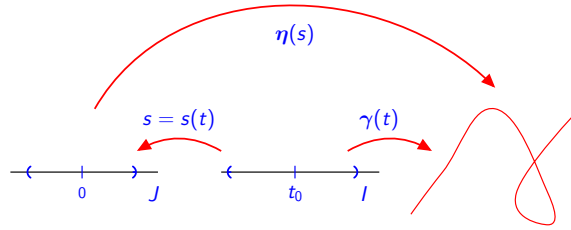
$$\implies \begin{pmatrix} P'(s) \\ Q'(s) \\ R'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A(s) & B(s) \\ -A(s) & 0 & C(s) \\ -B(s) & -C(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(s) \\ Q(s) \\ R(s) \end{pmatrix}$$

## 1.4 Curvatura y torsión. Complementos

### 1.4.1 Curvas no parametrizadas por longitud de arco

Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}$  una curva con parámetro natural  $t$  pero que no es longitud de arco. Queremos obtener la curvatura, torsión y el triedro de Frenet de  $\gamma(t)$ .

La parametrización  $\eta$  por longitud de arco viene dada por  $\forall t \in I : \gamma(t) = \eta(s(t))$  donde  $s = s(t)$  es la longitud de arco de  $\gamma$  desde  $\gamma(t_0)$  hasta  $\gamma(t)$ .



Cuando  $t$  recorre el intervalo  $I$ , el parámetro  $s$  recorre un intervalo  $J$ . En notación general de (re)parametrización, la función  $t \rightarrow s(t)$  se denota por  $g(t)$ .

Como  $t, n, b, \kappa, \tau$  se expresan y calculan a través de derivadas de  $\eta$  y queremos hacerlo en términos de  $\gamma$ , aplicamos la regla de la cadena.

$$\forall t \in I : s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\gamma}{dt}(u) \right\| du \implies \forall t \in I : \frac{ds}{dt}(t) = \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\|$$

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \frac{d\eta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}(t) = \frac{ds}{dt} \cdot t(s)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) &= \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}(s) + \frac{d^2s}{dt^2} \cdot t(s) = \kappa(s) \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 n(s) + \frac{d^2s}{dt^2} \cdot t(s) \\
\Rightarrow \frac{d^3\gamma}{dt^3}(t) &= \kappa(s) \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \frac{dn}{ds}(s) + \text{combinación lineal de } t \text{ y } n \\
&= -\kappa(s) \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \tau(s) b(s) + \text{combinación lineal de } t \text{ y } n
\end{aligned}$$

### Fórmula general para la curvatura

$$\left( \frac{d\gamma}{dt} \right) \times \left( \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right) = \kappa(s) \left( \frac{ds}{dt} \right) b(s) \Rightarrow \boxed{\kappa(s) = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma'\|^3}}$$

Para  $\gamma$  parametrizada por longitud de arco  $\Rightarrow \|\gamma'\| = 1 \wedge \gamma' \perp \gamma'' \Rightarrow \kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$ .

### Fórmula general para la torsión

$$\begin{aligned}
\left( \frac{d\gamma}{dt} \times \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right) \cdot \frac{d^3\gamma}{dt^3} &= \left( \kappa(s) \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 b(s) \right) \cdot \left( -\kappa(s) \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \tau(s) b(s) + \text{combinación lineal de } t \text{ y } n \right) \\
&= -\kappa^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^6 \tau = -\tau \left\| \frac{d\gamma}{dt} \times \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right\|^2 \\
&\Rightarrow \boxed{\tau(s) = -\frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}}
\end{aligned}$$

En cuanto a  $t$ ,  $n$ ,  $b$ :

$$\boxed{t = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}} \wedge \boxed{b = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}} \wedge \boxed{n = b \times t = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \times \gamma'}{\|\gamma' \times \gamma''\|} \|\gamma'\|}$$

### 1.4.2 Curvatura de curvas planas

Para curvas planas: podemos darle signo a la curvatura, y darle a ese signo un significado geométrico.

**Definición 1.18.** Sea  $u \in \mathbb{R}^2$  un vector unitario ( $\|u\| = 1$ ),  $u^\perp$  es el vector que se obtiene al girarlo  $\pi/2$  en sentido positivo (antihorario)

$$\iff u = (\cos \theta, \sin \theta) \Rightarrow u^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

Sea  $\gamma$  una curva regular en  $\mathbb{R}^2$  parametrizada por longitud de arco.

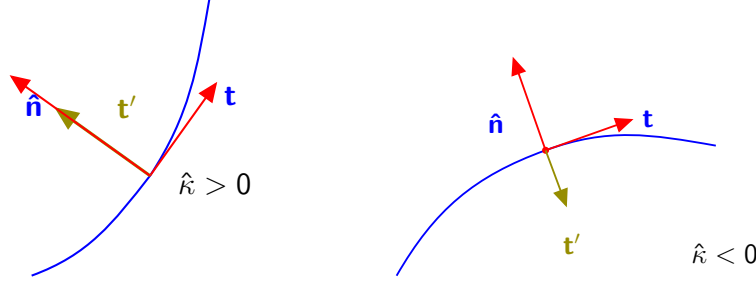
Denotamos con  $\hat{n}(s) := t(s)^\perp$ .

$$\Rightarrow \hat{n}: I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad C^\infty \wedge \forall s \in I : (t(s) \perp \hat{n}(s)) \wedge (n(s) = \pm \hat{n}(s))$$

Como  $t'(s) \perp t(s)$ , tenemos que  $t'(s) \parallel \hat{n}(s) \implies t'(s) = \hat{\kappa}(s) \cdot \hat{n}(s)$ . Donde  $\hat{\kappa}(s)$  es la curvatura con signo de  $\gamma$  en  $s$ . La curvatura con signo solo requiere que la curva sea regular.

$$\implies \boxed{\hat{\kappa}(s) = t'(s) \cdot \hat{n}(s)} \wedge |\hat{\kappa}(s)| = \kappa(s)$$

El correspondiente vector binormal sería  $\hat{b} = t \times \hat{n} = t \times t^\perp = (0, 0, 1) \perp \mathbb{R}^2$ .



Para una gráfica en el plano  $t \mapsto (t, f(t))$  que se recorre de izquierda a derecha ( $t$  creciente) la convexidad ( $f'' > 0$ ) corresponde con  $\hat{\kappa} > 0$  y la concavidad corresponde con  $\hat{\kappa} < 0$ .

### Relación entre curvatura y ángulo con eje $OX$

Vamos a describir la relación entre la curvatura  $\hat{\kappa}$  y (la variación de) el ángulo que (el vector tangente de) la curva con el eje  $OX$ .

**Lema 1.4.** Sea  $I: \mathbb{R} \longrightarrow$  una aplicación  $C^\infty: \forall t \in I: \|u(t)\| = 1$ .

$$\implies \exists \theta: I \longrightarrow \mathbb{R} \quad C^\infty: \forall t \in I: u(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

La función  $\theta$  es única salvo por adición de un múltiplo entero de  $2\pi$ . Por tanto, la derivada  $\theta'$  está unívocamente determinada.

Dada una curva  $\gamma$  regular plana y parametrizada por longitud de arco, podemos escribir  $t(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$  con  $\theta$  función  $C^\infty$ . Así que,  $\hat{n}(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$  donde  $\theta(s)$  es el ángulo que forma  $t(s)$  con el eje  $OX$ . El ángulo  $\theta(s)$  determina la dirección de  $t(s)$ .

$$\implies t'(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = \theta'(s)\hat{n}(s) \implies \forall s: \hat{\kappa}(s) = \theta'(s)$$

### Reconstrucción de curva plana a partir de $\hat{\kappa}$

Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$  una curva plana parametrizada por longitud de arco y  $M$  un movimiento rígido del plano que conserva orientación, es decir, una traslación compuesta con una rotación.

Consideremos la curva  $\bar{\gamma}$  dada por  $\forall s \in I: \bar{\gamma}(s) = M\gamma(s)$ . Como  $M$  es movimiento rígido, se tiene que  $\bar{\gamma}(s)$  está parametrizada por longitud de arco y  $\forall s \in I: \hat{\kappa}(s) = \hat{\kappa}(s)$ .

Ahora, como  $\hat{\kappa}(s) = \theta'(s)$  y partimos de  $\theta(0) = 0$ :

$$\implies \theta(s) = \int_0^s \theta'(u) du = \int_0^s \hat{\kappa}(u) du$$

Como  $\gamma'(s) = \mathbf{t}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ , si establecemos  $\gamma(0) = (0, 0)$

$$\implies \gamma(s) = \left( \int_0^s \cos \theta(u) du, \int_0^s \sin \theta(u) du \right) \implies \boxed{\hat{\kappa} \Rightarrow \theta' \Rightarrow \theta \Rightarrow \mathbf{t} \Rightarrow \gamma}$$

En general si conocemos la función  $\hat{\kappa}(s) \implies \theta(s) = \int \hat{\kappa}(s) ds + c_1$  para cierta constante  $c_1$ .

$$\implies \gamma(s) = \left( \int \cos \theta(s) ds, \int \sin \theta(s) ds \right) + (c_2, c_3) \text{ para } c_2, c_3 \text{ constantes.}$$

Los valores de  $c_1, c_2, c_3$  quedan determinados, por ejemplo, por los valores de  $\gamma$  y  $\gamma'$  es un cierto  $s_0 \in I$ .

### 1.4.3 Forma canónica local

Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Analizamos localmente, mediante aproximación de Taylor de tercer orden, la curva  $\gamma$  en un entorno de  $0 \in I$  centrada en 0.

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + \frac{s^3}{6}\gamma'''(0) + E(s), \text{ con } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|E(s)\|}{s^3} = 0$$

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \left(s - \frac{\kappa(0)^2 s^3}{6}\right) \mathbf{t}(0) + \left(\frac{\kappa(0)s^2}{2} + \frac{\kappa'(0)s^3}{6}\right) \mathbf{n}(0) + \left(-\frac{\kappa(0)\tau(0)s^3}{6}\right) \mathbf{b}(0) + E(s)$$

Tras un movimiento rígido o con cambio de sistema de referencia, suponemos que

$$\gamma(0) = 0 \wedge \mathbf{t}(0) = i \wedge \mathbf{n}(0) = j \wedge \mathbf{b}(0) = k$$

Si  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$  y si  $E(s) = (e_x(s), e_y(s), e_z(s))$ , entonces

$$\begin{cases} x(s) &= s - \frac{\kappa(0)^2 s^3}{6} + e_x(s) \\ y(s) &= \frac{\kappa(0)s^2}{2} + \frac{\kappa'(0)s^3}{6} + e_y(s) \\ z(s) &= -\frac{\kappa(0)\tau(0)s^3}{6} + e_z(s) \end{cases}$$

Esta es la forma canónica local de  $\gamma$  cerca de  $s = 0$ .

La torsión  $\tau$  solo aparece en  $z(s)$ :

- Si  $\tau > 0$ , para  $s > 0$  la curva  $\gamma$  tiende a meterse debajo del plano osculador a  $\gamma$  en  $s = 0$ , donde “debajo” = en dirección opuesta a  $\mathbf{b}$ .
- Si  $\tau < 0$ , para  $s > 0$  la curva  $\gamma$  tiende a pasar por encima del plano osculador a  $\gamma$  en



$s = 0$ , donde “encima” = en la dirección de  $\mathbf{b}$ .

### Forma canónica local. Curvas planas

Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrizada por longitud de arco con  $0 \in I$ .

$$\implies \gamma(s) = \gamma(0) + s \mathbf{t}(0) + \frac{s^2}{2} \hat{\kappa}(0) \hat{\mathbf{n}}(0) + F(s), \text{ con } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|F(s)\|}{s^2} = 0$$

Con  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$   $\wedge$   $\gamma(0) = (0, 0)$   $\wedge$   $\mathbf{t}(0) = (1, 0)$   $\wedge$   $\mathbf{n}(0) = (0, 1)$  se tiene:

$$\begin{cases} x(s) = s - \frac{\kappa(0)s^3}{6} + o(s^3) \\ y(s) = \frac{\kappa(0)}{2}s^2 + o(s^2) \end{cases}$$

### Circunferencia osculatriz

- Centro de curvatura  $\gamma(0) + \frac{1}{\kappa(0)} \mathbf{n}(0)$
- Radio de curvatura  $\frac{1}{\kappa(0)}$

La circunferencia osculatriz aproxima a la curva  $\gamma$  cerca de  $s = 0$ :

$$\left\| \gamma(s) - \left( \gamma(0) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}(0) \right) \right\| = \frac{1}{\kappa(0)} + o(s^2)$$

### Curvatura y comparación arco/cuerda en el plano

$$D(s) = \|\gamma(s_0 + s) - \gamma(s_0)\|$$

$$\implies \begin{cases} D(s) \leq \text{longitud de } \gamma \text{ entre } s_0 \text{ y } s_0 + s = s \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D(s)}{s} = \|\gamma'(s_0)\| = 1 \end{cases}$$

Poniendo  $s_0 = 0$ , y  $\gamma(0) = (0, 0)$   $\wedge$   $\mathbf{t}(0) = (1, 0)$   $\wedge$   $\mathbf{n}(0) = (0, 1)$  se tiene

$$\begin{aligned} D(s)^2 = x(s)^2 + y(s)^2 &= s^2 - 2\frac{\kappa^2}{6}s^4 + \frac{\kappa^2}{4}s^4 + o(s^4) \\ &= s^2 \left( 1 - \frac{1}{12}\kappa^2 s^2 + o(s^2) \right) \end{aligned}$$

Así que  $\frac{D(s)^2}{s^2} = 1 - \frac{1}{12}\kappa^2 s^2 + o(s^2)$ . Cuando más grande es  $\kappa$ , más pequeño es  $\frac{D(s)}{s}$

## 1.5 Teorema fundamental de la teoría de curvas

## 1.6 Desigualdad isoperimétrica. Geometría global de curvas planas