# ECUACIONES DIFERENCIALES

## Segundo del Grado en Matemáticas

**Hugo Marquerie**
Profesor: Salvador López Martínez
Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid
Segundo cuatrimestre 2023 - 2024

1 de Febrero, 2024

# Índice

# 1 Introducción

## 1.1 Conceptos básicos

**Definición 1.1 (Tipos de ecuaciones diferenciales).**

1. Según el número de variables
   (a) E. D. Ordinarias: Una variable $y\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   (b) E. D. Parciales: Varias variables $u\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
2. Según las derivadas de mayor orden.
   $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ es de orden $n \iff F$ es no constante en su variable $n+2$.
3. Según si la derivada de mayor orden se puede despejar o no.
   (a) En forma normal $y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$.
   $$\iff \text{ por reducción de orden: } \begin{cases} y_j' = y^{(j)}, j = 1, \ldots, n-1 \\ y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_{n-1}) \end{cases}$$

**Definición 1.2 (Solución de una EDO).** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, $y$ es solución de la EDO $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ en $I$

$$\iff \exists \text{ las derivadas de } y \text{ hasta orden } n \wedge \forall x \in I : F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

**Ejemplo 1.1.** La familia de funciones $y(x) = Ce^x$ con $C \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}(= I)$ cumple la ecuación $y' = y$. Si además de la EDO, imponemos un dato incial $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$

$$\implies y(x_0) = y_0 = Ce^{x_0} \implies C = e^{-x_0} y_0$$

¿Existe alguna otra solución de $\{y' = y \wedge y(x_0) = y_0\}$? Para comprobarlo, basta con derivar:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y(x)e^{-x}\right) = \left(y'(x) - y(x)\right) e^{-x}$$

$$\text{Si } y' = y \text{ en } \mathbb{R} \implies \forall x \in \mathbb{R} : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y(x)e^{-x}\right) = 0 \implies \forall x \in \mathbb{R} : y(x)e^{-x} = C$$

$$\implies y(x) = Ce^x \implies y(x) = \left(e^{-x_0} y_0\right) e^x \text{ es la única solución al sistema.}$$

**Ejemplo 1.2.** $\left\{ y' = \dfrac{e^{-y^2}}{1+x^2} \wedge y(0) = 0 \right\}$ Supongamos que $\exists\, y\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable solución del problema de valores iniciales (PVI). Veamos que podemos decir de $y$:

1. Como sabemos $y(0) = 0 \implies y'(0) = \dfrac{e^{-(y(0))^2}}{1+0^2} = 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : y'(x) > 0 \implies y$ es estrictamente creciente $\implies y$ es inyectiva.

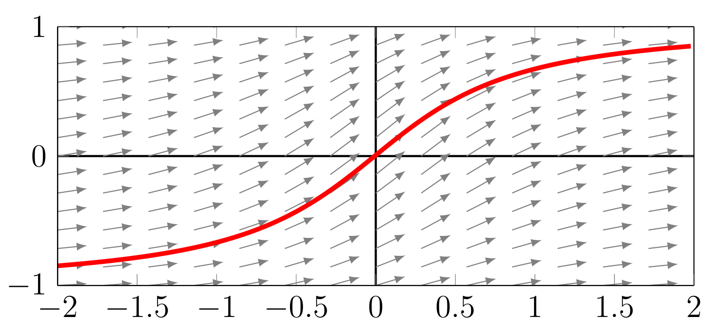
$y(0) = 0 \implies \forall x > 0 : y(x) < 0 \wedge \forall x < 0 : y(x) > 0$

3. $y'' = \dfrac{(-2yy'2(1+x^2) - 2x)e^{-y^2}}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-2e^{-y^2}(ye^{-y^2} + x)}{(1+x^2)^2}$
   Si $x > 0 \implies y''(x) < 0$ y si $x < 0 \implies y''(x) > 0$
   $$\implies y \text{ es convexa en } (-\infty, 0) \text{ y cóncava en } (0, +\infty)$$

4. $y' \leq \dfrac{1}{1+x^2}$
   Si $x > 0 \implies y(x) = \displaystyle\int_0^x y'(s)\,\mathrm{d}s \leq \int_0^x \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \arctan x$
   Si $x < 0 \implies -y(x) = \displaystyle\int_x^0 y'(s)\,\mathrm{d}s \leq \int_x^0 \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = -\arctan x$
   $$\implies |y(x)| \leq |\arctan x| \leq \frac{\pi}{2} \implies y \text{ es constante.}$$
   Como y es creciente y acotada $\implies \exists \lim\limits_{x\to\infty} y(x) \wedge \exists \lim\limits_{x\to-\infty} y(x)$.

5. Si $y(x)$ es solución, entonces $z(x) = -y(-x)$ también lo es, porque:
   $$z'(x) = y'(-x) = \frac{e^{-(y(-x))^2}}{1+(-x)^2} = \frac{e^{-(z(x))^2}}{1+x^2} \wedge z(0) = 0$$

6. Si hay solo una solución, entonces $y(x) = z(x) = -y(-x) \iff y(x)$ es impar.




## 1.2 Algunos métodos de resolución de EDO

### 1.2.1 Ecuaciones tipo primitiva

Son del tipo $y'(x) = f(x)$ y se resuelven integrando a ambos lados: $\displaystyle\int_{x_0}^x y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^x f(s)\,\mathrm{d}s$

$$\iff y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(s)\,\mathrm{d}s \iff \boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s)\,\mathrm{d}s}$$

### 1.2.2 Ecuaciones de variables separadas (o separables)

**Definición 1.3.** Sea una EDO de primer orden, es de variables separadas

$$\iff \text{ es de la forma } \boxed{h(y)y' = f(x)}$$

**Proposición 1.1.** *Si $H, F$ son primitivas de $h, f$ respectivamente, entonces la familia de funciones, definida implícitamente por $H(y(x)) - F(x) = C$, es solución de la EDO.*

***Demostración***.

$$H(y(x)) - F(x) = C \iff (H(y(x)) - F(x))' = 0 \iff h(y(x))y'(x) - f(x) = 0$$

■

**Ejemplo 1.3.** $y' = \dfrac{1+x^4}{1+y^2} \implies (1+y^2)y' = 1 + x^4$

$$\left(h(y) = 1 + y^2 \implies H(y) = y + \frac{y^3}{3}\right) \wedge \left(f(x) = 1 + x^4 \implies F(x) = x + \frac{x^5}{5}\right)$$

$$H(y(x)) - F(x) = C \iff y + \frac{y^3}{3} - x - \frac{x^5}{5} = C$$

Determinamos unos datos iniciales $\begin{cases} y' = \frac{1+x^4}{1+y^2}, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ definimos $\Psi(x,y) = y + \dfrac{y^3}{3} - x - \dfrac{x^5}{5} - C$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x_0, y_0) = 1 + y_0^2 > 0 \xRightarrow{TFIm} \exists \text{ un entorno } I \text{ de } x_0 \text{ tal que } y\colon I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es solución}$$

**Observación 1.1.**

1. Las ecuaciones autónomas $y' = f(y)$ son un tipo especial de ecuaciones separables donde $h(y) = \frac{1}{f(y)}$
2. En las ecuaciones separables, hay una cantidad que se conserva (a lo largo del tiempo).

**05/02/2024**

En general, si se conserva una cantidad de la forma $F(x, y(x))$, ¿qué ecuación satisface $y$?

$$\forall x \in I : g(x) := F(x, y(x)) = c$$

$$\forall x \in I : g'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = 0$$

### 1.2.3 Ecuaciones exactas

**Definición 1.4 (EDO exacta).** Sea $M(x, y(x)) + N(x, y(x))y' = 0$ una EDO, es exacta

$$\iff \exists F(x,y) : \nabla F = (M,N) \iff \frac{\partial F}{\partial x} = M \wedge \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

**Observación 1.2.**

1. $y$ solución de EDO exacta $\implies F(x, y(x)) = C$
2. Un caso particular de EDO exactas son las de variables separadas.

**Proposición 1.2.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $M, N \in C^1(\Omega)$*

$$\exists F \in C^2(\Omega) : \nabla F = (M,N) \iff \forall (x,y) \in \Omega : \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

***Demostración.*** [ $\implies$ ] Suponemos que $\exists F \in C^2(\Omega) : \nabla F = (M,N)$

$$\implies \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ porque } F \in C^2(\Omega)$$

[ $\impliedby$ ] Supongamos que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Fijados $x_0, y_0 \in \Omega$, definimos

$$\forall (x,y) \in \Omega : F(x,y) := \int_{x_0}^{x} M(s,y)\, \mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} N(x_0, s)\, \mathrm{d}s$$

Por un lado, $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$

Por otro lado, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(s,y)\, \mathrm{d}s + N(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(s,y)\, \mathrm{d}s + N(x_0,y)$

$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}(s,y)\, \mathrm{d}s + N(x_0,y) = N(x,y) - N(x_0,y) + N(x_0,y) = N(x,y)$ ■

**Ejemplo 1.4 ($y + 2xy' = 0$).**

$$\implies M(x,y) = y \wedge N(x,y) = 2x \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq 2 = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{no es exacta.}$$

Multiplicando por $xy^3$, obtenemos $xy^4 + 2x^2y^3y' = 0$

$$\implies M(x,y) = xy^4 \wedge N(x,y) = 2x^2y^3 \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy^3 = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{esta sí es exacta.}$$

Y resolvemos:

$$F(x,y) := \int_{x_0}^{x} M(s,y)\, \mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} N(x_0,s)\, \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} sy^4\, \mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} 2x_0^2 s^3\, \mathrm{d}s =$$

$$\left[\frac{s^2}{2}y^4\right]_{s=x_0}^{s=x} + \left[2x_0^2\frac{s^4}{4}\right]_{s=y_0}^{s=y} = \frac{x^2y^4}{2} - \frac{x_0^2y^4}{2} + \frac{x_0^2y^4}{2} - \frac{x_0^2y_0^4}{2} = \frac{x^2y^4}{2} - \frac{x_0^2y_0^4}{2}$$

$$\{F(x,y) = C \wedge F(x_0,y_0) = 0\} \implies x^2y^2 = x_0^2y_0^4$$

Por ejemplo, si $x_0 > 0, y_0 > 0$, entonces, como $y$ es continua, existe un entorno $I$ de $x_0$ tal que $I \subset (0,\infty), y(x) > 0$ en $I$. Con lo cual:

$$\forall x \in I : \sqrt{x}y(x) = \sqrt{x_0}y_0 \implies \boxed{y(x) = \frac{\sqrt{x_0}y_0}{\sqrt{x}}}$$

**Definición 1.5 (Factor integrante).** Sea $p(x,y) + q(x.y)y' = 0$ una EDO y $\mu(x,y)$ una función, $\mu$ es un factor integrante de la EDO

$$\iff \mu(x,y)p(x,y) + \mu(x,y)q(x,y)y' = 0 \text{ es exacta}$$

**Definición 1.6 (EDO lineales de primer orden).** Una EDO se denomina lineal de primer orden $\iff$ es de la forma $y' = a(x)y + f(x)$.
En realidad, las soluciones de esta EDO formarían un espacio afín, pero se le sigue llamando "lineal".

### 1.2.4 Comodín: cambios de variable

**Definición 1.7 (Ecuaciones homogéneas).** Sea una EDO de la forma $y' = f(x,y)$ con $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, es homogénea

$$\iff \forall (x,y) \in \Omega : \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda x, \lambda y) \in \Omega : f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$$

**Proposición 1.3.** *Sea $y' = f(x,y)$ una EDO homogénea*
$\implies$ *el cambio de variable $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ la transforma en una de variables separadas.*

***Demostración.***

$$xu(x) = y(x) \implies u(x) + xu'(x) = y'(x) = f(x,y(x)) = f(x,xu(x))$$
$$\implies xu'(x) = f(1,u(x)) - u(x) \implies \frac{u'(x)}{f(1,u(s)) - u(x)} = \frac{1}{x}$$

■

**Ejemplo 1.5 ($4x - 3y + y'(2y-3x) = 0$).** Hacemos el cambio de variable $u(x) = \frac{y(x)}{x}$

$$\implies y' = \frac{3y-4x}{2y-3x} = f(x,y) \implies f(1,u) = \frac{3u-4}{2u-3}$$

$$\implies f(\lambda x, \lambda y) = \frac{3\lambda x - 4\lambda y}{2\lambda y - 3\lambda x} = \frac{3y-4x}{2y-3x} = f(x,y) \implies \text{es homogénea}$$

$$\implies \frac{u'}{\frac{3u-4}{2u-3} - u} = \frac{1}{x} \implies \frac{2u-3}{-4-2u^2+6u}u' = \frac{1}{x}$$

$$\implies -\frac{1}{2}\log|u^2 - 3u + 2| - \log|x| = C_1 \implies |u^2-3u+2| = \frac{C_2}{x^2}$$

$$\implies \frac{(y(x))^2}{x} - \frac{3y(x)}{x} + 2 = \frac{C_2}{x^2} \implies \left|(y(x))^2 - 3y(x)x + 2x^2\right| = C_2$$

$$\implies \boxed{y(x) = \frac{3x \pm \sqrt{9x^2 - 8x}}{2}}$$

**Teorema 1.1** (Ejercicio 2.3)**.** *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sean $a, f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y $x_0 \in I \wedge y_0 \in \mathbb{R}$*

$$\implies \textit{El PVI} \begin{cases} y' = a(x)y + f(x), x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \textit{admite una única solución:}$$

$$\boxed{y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t} + \int_{x_0}^{x} f(s)e^{\int_{s}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}s$$

***Demostración***. $\forall x : f(x) = 0$, la EDO es lineal porque, si $y, z$ son soluciones, entonces $\alpha y + \beta z$ es solución con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$(\alpha y + \beta z)' = \alpha y' + \beta z' = \alpha a(x) y + \beta a(x) z = a(x)\left(\alpha y + \beta z\right)$$

Además podemos encontrar un factor integrante:

$$y' - a(x)y = f(x) \text{ (que es exacta)} \implies (y' - a(x)y)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s} = f(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s}$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s}\right) = f(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s}$$

$$\implies \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(y(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s$$

$$\implies y(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t} - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s$$

$$\implies y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t} + e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t}\int_{x_0}^{x} f(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s$$

$$\implies y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t} + \int_{x_0}^{x} f(s)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{s} a(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s$$

$$\implies \boxed{y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t} + \int_{x_0}^{x} f(s)e^{\int_{s}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}s$$

Además, es única porque si $y, z$ son soluciones del PVI, consideremos $\omega = y - z$

$$\implies \forall x \in I : \omega' = y' - z' = (a(x)y + f(x)) - (a(x)z + f(x)) = a(x)(y - z) = a(x)\omega$$

$$\implies \omega' = a(x)\omega = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\omega(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s}\right) = (\omega' - \omega(x))e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s} = 0$$

$$\forall x \in I : \omega(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s} = c \xrightarrow{x = x_0} c = 0 \implies y = z$$

■

## 1.3 Modelización

### 1.3.1 Crecimiento Malthusiano

$$x(t) := \text{Población a tiempo } t$$

El modelo asume que el espacio y loas recursos son ilimitados, y además, el crecimiento en cada instante es proporcional a la población en ese instante. En términos matemáticos:

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = ax(t) + o(1) \text{ donde } o(1) \xrightarrow{h\to 0} 0$$

$$\{x'(t) = ax(t) \wedge x(0) = x_0\} \implies x(t) = x_0 e^{at}$$

### 1.3.2 Decrecimiento radiactivo

$$x(t) := \text{El número de núcleos a tiempo } t$$

$$\{x'(t) = -kx(t) \wedge x(0) = x_0 \wedge k > 0\} \implies x(t) = x_0 e^{-kt}$$

### 1.3.3 Ley de enfriamiento de Newton

$$T(t) := \text{Temperatura del objeto a tiempo } t \wedge \begin{cases} T_{ext} := \text{Temperatura exterior} \\ T_0 := \text{Temperatura inicial} \\ k := \text{Constante de proporcionalidad} > 0 \end{cases}$$

El cambio en la temperatura de un cuerpo en un medio a temperatura constante es proporcional a la diferencia de temperatura entre ambos en cada instante.

$$\{T'(t) = -k(T(t) - T_{ext}) \wedge T(0) = T_0\} \implies T(t) = T_0 e^{\int_0^t (-k)\,\mathrm{d}s} + \int_0^t kT_{ext} e^{\int_s^t (-k)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}s$$

$$\implies T(t) = T_0 e^{-kt} + \int_0^t kT_{ext} e^{-k(t-s)}\,\mathrm{d}s = T_0 e^{-kt} + T_{ext} e^{-kt}(e^{kt} - 1)$$

$$\implies \boxed{T(t) = T_{ext} + e^{-kt}(T_0 - T_{ext})}$$

### 1.3.4 Crecimiento logístico

Si los recursos son limitados y hay que competir por ellos, el modelo Malthusiano 1.3.1 no parece razonable. Lo adecuado es suponer que la tasa de crecimiento depende de la población en cada instante.

$$x'(t) = a\left(1 - \frac{x(t)}{b}\right)x(t) \text{ con } a, b > 0$$

Soluciones:

1. $\forall t \in \mathbb{R} : x(t) = 0$

2. $\forall t \in \mathbb{R} : x(t) = b$

3. Si hay solución $\forall t \in I : x(t) \in (0, b)$

$$\implies \forall t \in I : \left(1 - \frac{x(t)}{b}\right) x(t) > 0 \implies \frac{x'}{\left(1 - \frac{x(t)}{b}\right) x(t)} = a$$

$$\implies \frac{x'b}{(b-x)x} = a \implies \frac{x'}{(b-x)} + \frac{x'}{x} = a \implies \int_0^t \left( \frac{x'(s)}{(b - x(s))} + \frac{x'(s)}{x(s)} \right) \mathrm{d}s = \int_0^t a \, \mathrm{d}s$$

$$\implies \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(-\log\left(b - x(s)\right) + \log\left(x(s)\right)\right) \mathrm{d}s = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(as) \, \mathrm{d}s$$

$$\implies -\log\left(b - x(t)\right) + \log\left(x(t) - \left(-\log\left(b - x_0\right) + \log\left(x_0\right)\right) = at$$

$$\implies \log\left(\frac{x(t)}{b - x(t)}\right) = \log\left(\frac{x_0}{b - x_0}\right) + at$$

$$\implies \frac{x(t)}{b - x(t)} = \frac{x_0}{b - x_0} e^{at} \implies x(t) = \frac{x_0}{b - x_0} b e^{at} - \frac{x_0}{b - x_0} x(t) e^{at}$$

$$\implies \left(1 + \frac{x_0}{b - x_0} e^{at}\right) x(t) = \frac{x_0}{b - x_0} b e^{at} \implies x(t) = \frac{\frac{x_0}{b - x_0} b e^{at}}{1 + \frac{x_0}{b - x_0} e^{at}}$$

$$\implies \forall t \in \mathbb{R} : \boxed{x(t) = \frac{x_0 \cdot b \cdot e^{at}}{b + x_0(e^{at} - 1)}} \implies x' = a\left(1 - \frac{x}{b}\right) x$$

### 1.3.5 Depredador / presa

Hay dos especies (por ejemplo, conejos y zorros), en un espacio muy grande donde hay alimento ilimitado para los conejos, mientras que los zorros solo se alimentan de conejos.

- $C(t)$ es la población de conejos en tiempo t.
- $Z(t)$ es la población de zorros en tiempo t.

Si no hubiera zorros $\implies C'(t) = \alpha C(t)$ con $\alpha > 0$
Si no hubiera conejos $\implies Z'(t) = -\beta Z(t)$ con $\beta < 0$
Si coexisten, los encuentros serían "malos" para los conejos y "buenos" para los zorros:

$$\begin{cases} C'(t) = \alpha C(t) - \gamma C(t) Z(t) \\ Z'(t) = -\beta Z(t) + \delta C(t) Z(t) \end{cases}$$

### 1.3.6 Catenaria

¿Qué forma toma un cable flexible, de densidad constante ($\rho$), fijos sus extremos a la misma altura y sometido a la acción de la gravedad?

Como el cuerpo está en reposo,

$$\vec{T}$$

$$\lambda \int_0^x \sqrt{1+(y'(\tau))^2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\rho g}{T_0} s = \tan\theta = y'(x)$$

$$\implies y''(x) = \lambda\sqrt{1+(y'(x))^2}$$

Reducimos el orden de la EDO mediante el cambio de variable $y' = q \wedge q' = \lambda\sqrt{1+q^2}$ y usando el método de variables separadas obtenemos $q(x) = \sinh(\lambda x + c)$.

$$y'(0) = 0 \implies c = 0 \implies y'(x) = \sinh \lambda x$$

$$\implies y(x) = \int_0^x \sinh \lambda s\,\mathrm{d}s \implies \boxed{y(x) = \lambda\,(\cosh(\lambda x) - 1)}$$

Preguntas pertinentes:

1. ¿Qué sucede si la tensión inicial es muy grande?
2. ¿Es razonable aproximar esta curva como una parábola? (Al menos para cables de longitud pequeña)

### 1.3.7 Familias de curvas ortogonales

Ya hemos visto que es típico que las soluciones de una EDO de primer orden $y' = f(x,y)$ formen una familia uniparamétrica de curvas dadas en forma explícita casi siempre.
Razonando de forma inversa, muchas veces es posible demostrar que la familia de curvas

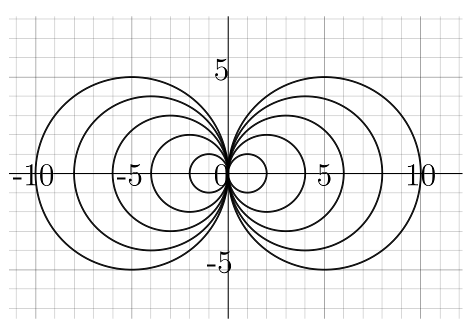
$$\mathcal{F} = \{\Gamma_c\}_{c\in\mathbb{R}} \wedge \Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y,c) = 0\}$$

satisface (localmente) una EDO $y' = f(x,y)$ de primer orden.

**Definición 1.8 (EDO asociada).** Esta EDO se denomina ecuación asociada a $\mathcal{F}$.

**Ejemplo 1.6.** $\mathcal{F} = \{\Gamma_c\}_{c\in\mathbb{R}} \wedge \Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y,c) = 0\}$ y definimos

$$F(x,y,c) = x^2 + y^2 + 2cx = (x+c)^2 + y^2 - c^2$$



Si $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, y su gráfica está contenida en $\mathcal{F}$, entonces $\forall x \in I : x^2 + (y(x))^2 + 2cx = 0 \implies 2x + 2yy' + 2c = 0 \implies 2x^2 + 2xyy' + 2cx = 0$

$$\implies x^2 + 2xyy' - y^2 = 0 \implies y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

**Definición 1.9.** Sean $\mathcal{F} = \{\Gamma_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ y $\mathcal{C} = \{\sim \Gamma_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ dos familias de curvas, son ortogonales $\iff \mathcal{F} \perp \mathcal{C} \iff \forall \left(\Gamma_{c_1}, \widetilde{\Gamma}_{c_2}\right) \in \mathcal{F} \times \mathcal{C} : \Gamma_{c_1} \cap \widetilde{\Gamma}_{c_2} \neq \phi$ : se cortan perpendicularmente.

**Proposición 1.4.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de curvas con EDO asociada $y' = f(x,y)$*

$\implies$ *las soluciones de $z' = -\dfrac{1}{f(x,y)}$ forman una familia $(\mathcal{C})$ de curvas ortogonal a $\mathcal{F}$*

***Demostración.*** Sean $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ conjuntos abiertos con $I_1 \cap I_2 \neq \phi$ y sean $y\colon I_1 \longrightarrow \mathbb{R}, z\colon I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $y(I_1) \in \mathcal{F} \wedge z(I_2) \in \mathcal{C}$.

$$\implies \forall x \in I_1 : y' = f(x,y) \wedge \forall x \in I_2 : z' = -\frac{1}{f(x,y)}$$

Como se cortan, $\exists x_0 \in I_1 \cap I_2 : y(x_0) = z(x_0)$

$$\implies y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, z(x_0)) = -\frac{1}{z'(x_0)}$$

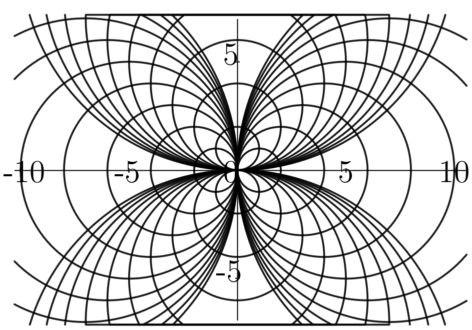
$\implies$ Las rectas tangentes a cada curva se cortan perpendicularmente

∎

**Ejemplo 1.7.** Siguiendo el Ejemplo 1.6, podemos encontrar una familia de curvas ortogonal a $\mathcal{F}$ $(\mathcal{C})$ tomando las soluciones de la EDO:

$$z' = \frac{2xz}{x^2 - z^2} \text{ que es homogénea.}$$

$$\implies \mathcal{C} = \left\{\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : (z-c)^2 + x^2 = c^2\} : c \in \mathbb{R}\right\}$$

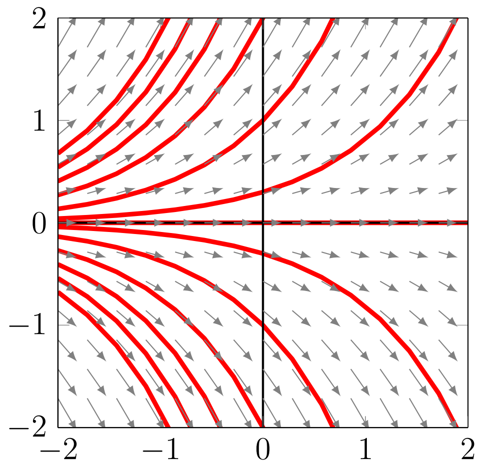



## 1.4 Análisis cualitativo y campos de pendientes

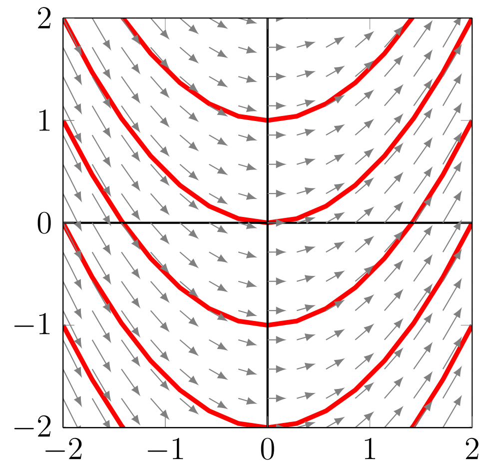
**Definición 1.10 (Campo de pendientes).** Sea una EDO $y' = f(x,y)$, su campo de pendientes es el diagrama que asigna a cada punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ un "pequeño" segmento con pendiente igual a $f(x, y)$. Claramente, si existen soluciones, entonces las curvas solución son tangentes a esos segmentos.

**Ejemplo 1.8.**

1. $y' = y \implies y = Ce^x$




2. $y' = x \implies y = \dfrac{x^2}{2} + C$




**Definición 1.11 (Isoclina).** Sea $y' = f(x, y)$ una EDO, sus isoclinas son los conjuntos de la forma $f(x, y) = c$ con $c \in \mathbb{R}$.

**Ejemplo 1.9 ($x' = x^2 - t^2$).**

1. La función $y = -x(-t)$ también es solución porque
$$\forall t \in \mathbb{R} : y' = x'(-t) = (-x(-t))^2 - (-t)^2 = (y(t))^2 - t^2$$

2. Existe $t \in \mathbb{R} : x(t) > -t$
Razonando por contradicción, supongamos que $\forall t \in \mathbb{R} : x(t) \leq -t$. En particular, $\forall t \geq 0 : x(t) \leq -t$. Entonces, $\forall t \geq 0 : x^2(t) \geq t^2$. Por tanto, $\forall t \geq 0 : x'(t) = x(t)^2 - t^2 \geq 0$. Integrando $x(t) - x(0) \geq 0$ Entonces $\forall t \geq 0 : x(0) \leq x(t) \leq -t$, pero tomando $t \geq -x(0)$, llegamos a una contradicción.

3. Si $x(t_0) = -t_0$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces $x(t) \geq -t$ para todo $t \geq t_0$.

   **Observación 1.3.** Se puede pensar que $b(t) = -t$ actúa como una barrera que no se puede atravesar. De hecho, $b(t)$ es una isoclina (porque $b(t)^2 - t^2 = cte$).
   Estas son candidatas a barreras.

   Definimos $\forall t \geq t_0 : \varphi(t) := x(t) - (-t) = x(t) + t$.

Por un lado, $\varphi(t_0) = x(t_0) - t_0 = 0$

Por otro lado, $\varphi'(t) = x'(t) + 1 = (x(t)^2 - t^2) + 1 \implies \varphi'(t_0) = 1 > 0$
Entonces, existe $\varepsilon > 0 : \forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)\varphi(t) > 0$.

Razonando por contradicción, supongamos que $\exists t_1 > t_0$ tal que $\varphi(t_1) = 0$. Podemos asumir que $t_1$ es el más pequeño que lo cumple y, por tanto, $\forall t \in (t_0, t_1) : \varphi(t) > 0$

$$\implies \varphi'(t_1) = x(t_1)^2 - t_1^2 + 1 = (-t_1)^2 - t_1^2 + 1 = 1 > 0$$

**Ejemplo 1.10** **(**$x' = x^2 \arctan(x)$**).**

1. La fucknión $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $y(t) = -x(t)$ es solución, porque
   $\forall t \in I : y'(t) = -x'(t) = -x^2 \arctan(x(t)) = (-x(t))^2 \arctan(-x(t)) = y(t)^2 \arctan(y(t))$

2. Sean $t_0 \in I, x_0 > 0$, con $x(t_0) = x_0$. Entonces, $\forall t \in (t_0, \infty) \cap I : x(t) > x_0$

   ***Demostración.*** Sea $\varphi(t) = x(t) - x_0, \forall t \in [t_0, \infty) \cap I$.
   Por un lado, $\varphi(t_0) = x(t_0) - x_0 = 0$.
   Por otro lado, $\varphi'(t) = x'(t) = x(t)^2 \arctan(x(t)) > 0 \implies \varphi'(t_0) > 0$.
   Razonando por contradicción, supongamos que $\exists t_1 \in I \cap (t_0, \infty)$ tal que $\varphi(t_1) = 0$.
   Podemos asumir que $t_1$ es el más pequeño que lo cumple y, por tanto, $\varphi'(t_1) \leq 0$, pero $\varphi'(t_1) = x'(t_1) = x(t_1)^2 \arctan(x(t_1)) = x_0^2 \arctan(x_0) > 0$ ■

   **Observación 1.4.** La función $b(t) = x_0 > 0$ cumple que $b'(t) < b(t)^2 \arctan(b(t))$. Es decir, es una *subsolución*.

3. Si $\exists t_0 \in I : x(t_0) = x_0 > 0$, entonces $\forall t \in I : x(t) \geq 0$.

   ***Demostración.*** Supongamos que $\exists t_1 \in I : x(t_1) < 0$, entonces por 2., $t_1 < t_0$. Sea $t_2 \in (t_1, t_0)$ tal que $x(t_2) = 0$ y lo elijo de forma que $\forall t \in (t_1, t_2) : x(t) < 0$.
   Por el TVM, $\exists s \in (t_1, t_2) : x'(s) = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{0 - x(t_1)}{t_2 - t_1} > 0$.
   Sin embargo, $x'(s) = x(s)^2 \arctan(x(s)) < 0$, lo cual es una contradicción. ■

4. Si $x(t_0) = x_0 > 0 \wedge \inf(I) = -\infty$, entonces $\exists \lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = L \wedge L = 0$.

   ***Demostración.*** Como $x$ es creciente y acotada inferiormente, $\exists L$. La ecuación dice que también existe $\lim_{t \to -\infty} x'(t)$ con $\lim_{t \to -\infty} x'(t) = L^2 \arctan(L)$. Por otro lado, vamos a ver que $\lim_{t \to -\infty} x'(t) = 0$. En efecto, por el TVM, $\exists s \in (t, t-1) : x'(s) = \frac{x(t) - x(t-1)}{t-(t-1)} = x(t) - x(t-1)$. Entonces, $\lim_{t \to -\infty} x'(t) = 0 \implies L^2 \arctan(L) = 0 \implies L = 0$. ■

5. $\sup(I) < \infty$

***Demostración***. Si $x(t_0) = x_0 > 0$, entonces $\forall t > t_0 : x(t) > x_0$.
Por tanto, $\forall t > t_0 : x'(t) > x(t)^2 \arctan(x_0) = \lambda x(t)^2$

$$\implies \forall t > t_0 : \frac{x'(t)}{x^2(t)} > \lambda \implies \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)^2} \, \mathrm{d}s > \lambda(t - t_0)$$

$$\implies \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{r^2} \, \mathrm{d}r > \lambda(t - t_0) \implies -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} > \lambda(t - t_0)$$

$$\implies \frac{1}{x_0} > \lambda(t - t_0) \implies t < t_0 + \frac{1}{\lambda x_0}$$

■

# 2 Ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas

## 2.1 Propiedades básicas

**Definición 2.1 (EDO autónoma).** Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden se dice autónoma si no depende explícitamente de la variable independiente. Es decir,

$$\iff \text{es de la forma } y' = f(y)$$

**Proposición 2.1** (Propiedades de EDOs autónomas)**.**

1. ***Isoclinas:*** *Todos los puntos de cada recta horizontal $y = c$ pertenecen a la misma isoclina. ¡Cuidado! A veces una isoclina puede contener más de una recta horizontal.*

   **Ejemplo 2.1** ($y' = y^2$)**.**
   $$\{(x, y) \in \mathbb{R} : y^2 = c\} = \{(x, \sqrt{c}) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -\sqrt{c}) : x \in \mathbb{R}\}$$

2. ***Traslaciones:*** *Si $y$ es solución $\implies \forall c \in \mathbb{R} : w(x) := y(x + c)$ es solución.*

   ***Demostración.*** $w'(x) = y'(x + c) = f(y(x + c)) = f(w(x))$ ■

3. ***Soluciones triviales:*** *Si $\exists\, a \in \mathrm{Dom}(f) : f(a) = 0 \implies y(x) = a$ es solución.*

   ***Demostración.*** $y'(x) = 0 = f(a) = f(y(x))$ ■

## 2.2 Teorema de existencia de soluciones

Sean $a \in [-\infty, \infty) \wedge b \in (-\infty, \infty] \wedge f\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua $\wedge\ y_0 \in (a, b) : f(y_0) \neq 0$

$$\implies \exists\, \varepsilon : (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset (a, b) \quad \wedge \quad \forall z \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) : f(z) \neq 0$$

Sea $y\colon I \longrightarrow (a, b)$ una función derivable con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto tal que

$$\forall x \in I : y'(x) = f(y(x)) \quad \wedge \quad y(x_0) = y_0 \text{ para algún } x_0 \in I$$

Como $y$ es continua, $\exists\, \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : y(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$

$$\implies \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(y(x)) \neq 0$$

Así, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \dfrac{y'(x)}{f(y(x))} = 1 \implies \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{y'(z)}{f(y(z))}\,\mathrm{d}z = x - x_0$

$$\implies \boxed{\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)}\,\mathrm{d}z + x_0 = x}$$

**22/02/2024**

**Teorema 2.1** (Existencia de soluciones).
*Sean* $a \in [-\infty, \infty) \wedge b \in (-\infty, \infty] \wedge f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua*

*Supongamos que* $\forall x \in (a,b) : f(x) \neq 0$ *y que* $\begin{cases} a > -\infty \implies f(a) = 0 \\ b < \infty \implies f(b) = 0 \end{cases}$

*Sea* $x_0 \in (a,b)$ *definimos* $\forall x \in (a,b) : F(x) := \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(s)}\,\mathrm{d}s$

- *Si* $f(x) > 0$ *en* $(a,b)$, $T_- := \lim\limits_{x \to a^+} F(x) \in [-\infty, 0) \wedge T_+ := \lim\limits_{x \to b^-} F(x) \in (0, \infty]$.
- *Si* $f(x) < 0$ *en* $(a,b)$, $T_+ := \lim\limits_{x \to a^+} F(x) \in [-\infty, 0) \wedge T_- := \lim\limits_{x \to b^-} F(x) \in (0, \infty]$.

$$\implies \exists\, x\colon (T_-, T_+) \longrightarrow (a,b) \text{ derivable} : \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

***Demostración***. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\forall x \in (a,b) : f(x) > 0$

$$\implies \forall x \in (a,b) : F'(x) = \frac{1}{f(x)} > 0 \implies F \text{ es estrictamente creciente en } (a,b)$$

$$\implies F \text{ tiene inversa en } (a,b) \implies \exists\, x := F^{-1}\colon (T_-, T_+) \longrightarrow (a,b)$$

$$\implies \begin{array}{ll} \text{Por un lado,} & x'(t) = \left(F^{-1}\right)'(t) = \dfrac{1}{F'(F^{-1}(t))} = \dfrac{1}{F'(x(t))} = f(x(t)) \\ \text{Por otro lado,} & F(x_0) = 0 \implies x_0 = F^{-1}(F(x_0)) = F^{-1}(0) = x(0) \end{array}$$

■

## 2.3 Teorema de unicidad local de soluciones

**Teorema 2.2** (Unicidad local).
*Sean* $a \in [-\infty, \infty) \wedge b \in (-\infty, \infty] \wedge f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua con* $\forall x \in (a,b) : f(x) \neq 0$.
*Sea* $x_0 \in (a,b)$ *y sean* $x\colon I \longrightarrow (a,b) \wedge y\colon I \longrightarrow (a,b)$ *dos funciones* ($I \subset \mathbb{R}$ *abierto* : $0 \in I$) *tales que*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \wedge y'(t) = f(y(t)) \\ x(0) = x_0 = y(0) \end{cases} \implies \forall t \in I : x(t) = y(t)$$

***Demostración***.

$$\forall s \in (a,b) : F(s) := \int_{x_0}^{s} \frac{1}{f(r)}\,\mathrm{d}r \implies \forall t \in I : F(x(t)) = t = F(y(t))$$

$$\implies \forall t \in I : F^{-1}(F(x(t))) = F^{-1}(F(y(t))) \implies \forall t \in I : x(t) = y(t)$$

■

**Corolario 2.1.** Con las condiciones del teorema de existencia, supongamos $a \in \mathbb{R}$ y $f(a) := \lim_{x \to a^-} f(x) = 0$. Supongamos que

$$\forall k \in (a,b) : \lim_{x \to a^+} \int_k^x \frac{1}{f(s)} \, \mathrm{d}s = \begin{cases} -\infty \iff f > 0 \text{ en } (a,b) \\ \infty \iff f < 0 \text{ en } (a,b) \end{cases}$$

$$\implies \forall I \subset \mathbb{R} : \begin{cases} I = [0, t_0) \iff f > 0 \text{ en } (a,b) \\ I = (-t_0, 0] \iff f < 0 \text{ en } (a,b) \end{cases} : x \equiv a \text{ es la única solución.}$$

**26/02/2024**

***Demostración.*** Sin pérdida de generalidad, suponemos que $\forall z \in (a,b) : f(z) > 0$. Entonces suponemos que $\lim_{x \to a^+} \int_k^x \frac{1}{f(s)} \, \mathrm{d}s = -\infty$. Procedemos por contradicción asumiendo que $\exists x \colon [0, \varepsilon) \longrightarrow (a,b)$ solución del PVI con $x_0 = a$ que no es constante.

$$\implies \forall t \in [0, \varepsilon) : x'(t) = f(x(t)) \geq 0 \implies x \text{ es creciente en } [0, \varepsilon)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\forall t \in (0, \varepsilon) : x(t) > a$ porque, si no fuese así, entonces $\exists\, t_0 \in (0, \varepsilon) : \forall t \in [0, t_0) : x(t) = a \implies \forall t \in (t_0, \varepsilon) : x(t) > a$. Entonces consideramos $\hat{x}(t) = x(t + t_0)$ que es solución del PVI en $[0, \varepsilon - t_0)$ que además cumple $\forall t \in (0, \varepsilon - t_0) : \hat{x}(t) > a$.

Por tanto, $\forall t \in (0, \varepsilon) : f(x(t)) > 0 \implies \forall t \in (0, \varepsilon) : \dfrac{x'(t)}{f(x(t))} = 1$

$$\implies \forall t \in (0, \varepsilon) : \int_{\varepsilon/2}^t \frac{x'(s)}{f(x(s))} \, \mathrm{d}s = t - \frac{\varepsilon}{2} \implies \int_{x(\varepsilon/2)}^{x(t)} \frac{1}{f(s)} \, \mathrm{d}s = t - \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces, pasando al límite tenemos

$$-\infty = \lim_{t \to 0} \int_{x(\varepsilon/2)}^{x(t)} \frac{1}{f(s)} \, \mathrm{d}s = \lim_{t \to 0} \left( t - \frac{\varepsilon}{2} \right) = -\frac{\varepsilon}{2} \quad \longrightarrow\!\longleftarrow$$

■

**Corolario 2.2.** Con las hipótesis del corolario anterior, si $\lim_{x \to a^+} \int_k^x \frac{1}{f(s)} \, \mathrm{d}s \in \mathbb{R}$

$$\implies \exists\, x \colon [0, \infty) \longrightarrow (a,b) \text{ solución no trivial del PVI con } x(0) = a$$

***Demostración.*** ■

**27/02/2024**

**Ejemplo 2.2 ($y' = \sqrt{1-y^2}$).**

$$f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \wedge f(y) := \sqrt{1-y^2} \wedge \begin{cases} f(y) > 0 \iff y \in (-1,1) \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{cases}$$

Si $y(0) =: y_0 \in (-1,1)$, entonces existe una única solución del PVI. Esa solución está definida en $(T_-, T_+)$, donde

$$T_- = \lim_{y\to -1^+} \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,\mathrm{d}s = \lim_{y\to -1^+} \arcsin(y) - \arcsin(y_0) = -\frac{\pi}{2} - \arcsin(y_0)$$

$$T_+ = \lim_{y\to 1^-} \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2} - \arcsin(y_0)$$

$$\text{Si } y_0 = 1,\ \lim_{y\to 1^-} \int_{k}^{y} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2} - \arcsin(k) \in \mathbb{R} \implies \exists \text{ un solución } \underline{\text{no trivial}} \text{ del PVI}$$

$$\text{Si } y_0 = -1,\ \lim_{y\to -1^+} \int_{k}^{y} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R} \implies \exists \text{ un solución } \underline{\text{no trivial}} \text{ del PVI}$$

Por tanto, la solución general del PVI es

$$y_k(x) = \begin{cases} -1 & \iff x \leq -\frac{\pi}{2} - k \\ \sin(x+k) & \iff x \in \left(-\frac{\pi}{2} - k, \frac{\pi}{2} - k\right) \\ 1 & \iff x \geq \frac{\pi}{2} - k \end{cases}$$

1. La única $y_k$ que satisfface $y_k(0) = 0 \in (-1,1)$ es $y_k(x) = y_0$
2. Las funciones $y_k$ con $k > \dfrac{\pi}{2}$ cumplen $y_k(0) = 1$
3. Las funciones $y_k$ con $k < -\dfrac{\pi}{2}$ cumplen $y_k(0) = -1$

**Observación 2.1.** Sea $a \in \mathbb{R}$, $b \in (-\infty, \infty] : b > a$ y $f\colon [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\forall x \in (a,b) : f(x) \neq 0$ y $f(a) = 0$.
Supongamos que $\exists\, C > 0, \delta \in (0, b-a) : \forall s \in [a, a+\delta) : |f(s)| \leq C(s-a)$
Vamos a comprobar que se cumplen las condiciones de unicidad para el PVI con $x(0) = x_0 = a$ tanto en el caso $f > 0$ como en el caso $f < 0$.

- $\boxed{f > 0}$ Queremos ver si $\displaystyle\lim_{z\to a^+} \int_{a+\delta}^{z} \frac{1}{f(s)}\,\mathrm{d}s = -\infty$

$$\int_{a+\delta}^{z} \frac{1}{f(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{a+\delta}^{z} \frac{1}{|f(s)|}\,\mathrm{d}s = -\int_{z}^{a+\delta} \frac{1}{|f(s)|}\,\mathrm{d}s \leq -\frac{1}{C} \int_{z}^{a+\delta} \frac{1}{s-a}\,\mathrm{d}s$$

$$\implies \int_{a+\delta}^{z} \frac{1}{f(s)}\,\mathrm{d}s \leq -\frac{1}{C}\left(\log(\delta) - \log(z-a)\right)$$

$$\implies \lim_{z\to a^+} \int_{a+\delta}^{z} \frac{1}{f(s)}\,\mathrm{d}s \leq -\infty \implies \text{ Hay unicidad de PVI con } x(0) = a \text{ en } [0, \tilde{t})$$

- $\boxed{f<0}$ De forma análoga $\lim\limits_{z \to a^+} \displaystyle\int_{a+\delta}^{z} \frac{1}{f(s)} \, \mathrm{d}s = \cdots \leq \infty$

Si $f$ derivable con $f'$ acotada

$$\implies \forall s \in [a, a+\delta) : |f(s)| = |f(s) - f(a)| = |f'(r)| \, |s-a| \leq C(s-a)$$

**04/03/2024**

## 2.4 Teorema de existencia global/asíntotas de soluciones

**Teorema 2.3.** *Sean* $a \in [-\infty, \infty) \wedge b \in (-\infty, \infty] \wedge a < b \wedge y_0 \in (a,b) \wedge f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua tal que* $\forall x \in (a,b) : f(x) > 0$. *Si* $b \in \mathbb{R}$, $f(b) = 0$, *si no,* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

*Así tenemos* $T_- = \lim\limits_{x \to a^+} F(x) \wedge T_+ = \lim\limits_{x \to b^-} F(x)$ *con* $F(x) := \displaystyle\int_{y_0}^{x} \frac{1}{f(s)} \, \mathrm{d}s$.

1. $(T_+ = \infty) \vee (T_+ \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}) \implies$ *la única sol del PVI se puede definir en* $(T_-, \infty)$.
2. $T_+ \in \mathbb{R} \wedge b = \infty \implies$ *la única sol del PVI tiene una asíntota en* $T_+$ *con* $\lim\limits_{x \to T_+^-} y(x) = \infty$

***Demostración.***

1. Si $T_+ = \infty$ el resultado es inmediato.

   Si $T_+ \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$, es decir, $\lim\limits_{x \to b^-} \displaystyle\int_{y_0}^{x} \frac{1}{f(s)} \, \mathrm{d}s \in \mathbb{R}$, entonces $y\colon (T_-, T_+) \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede extender de forma diferenciable tomando $\forall x \geq T_+ : y(x) = b$.

   Ahora tenemos que comprobar que cumple las dos condiciones necesarias.

   $$y \text{ es continua: } \lim_{x \to T_+^-} y(x) = b = y(T_+)$$

   $$y \text{ es diferenciable: } \lim_{x \to T_+^-} y'(x) = \lim_{x \to T_+^-} f(y(x)) = f(b) = 0$$

2. Si $T_+ \in \mathbb{R} \wedge b = \infty$, es decir, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) \in \mathbb{R}$, como sabemos que $y\colon (T_-, T_+) \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como $y := F^{-1}$, entonces $\lim\limits_{x \to T_+^-} y(x) = \infty$ dado que $F$ es creciente.

■

**Observación 2.2.** Se cumple para los casos análogos con $\begin{cases} f(y) > 0 \text{ con asíntota en } T_- \\ f(y) < 0 \text{ con asíntota en } T_+ \\ f(y) < 0 \text{ con asíntota en } T_- \end{cases}$

**05/03/2024**

## 2.5 Estabilidad de soluciones

Sea $f\colon (\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, con el PVI $\{y' = f(y) \wedge y(x_0) = y_0\}$.

**Definición 2.2 (Equilibrio).** Sea $y$ una solución del PVI, $y$ es de equilibrio

$$\iff \text{ es de la forma } \forall x \in \mathbb{R} : y(x) = a \in (\alpha,\beta) : f(a) = 0$$

**Definición 2.3 (Estabilidad).** Si $\forall y_0 \in (\alpha,\beta)$ el PVI tiene solución única, la solución $y\colon [x_0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es estable a futuro

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \left( y_0^* \in (\alpha,\beta) : |y_0^* - y_0| < \delta \implies \forall x \geq x_0 : |y(x) - y^*(x)| < \varepsilon \right)$$

donde $y^*\colon [x_0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es cualquier solución del PVI con $y^*(x_0) = y_0^*$.

**Ejemplo 2.3 ($\{y' = 0 \wedge y(x_0) = 1\}$).** Vemos a ojo que la función $y(x) = 1$ es solución de equilibrio. Además, vamos a ver que es estable.

Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ y la única solución de $\{y' = 0 \wedge y(x_0) = y_0^*\}$ con $|y_0^* - 1| < \delta$ que claramente es $y^*(x) = y_0^*$ y cumple las condiciones pedidas de que

$$\forall x \geq x_0 : |y(x) - y^*(x)| = |y_0^* - 1| = \delta < \varepsilon$$

**Definición 2.4 (Estabilidad asintótica).** Sea $y\colon [x_0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una solución del PVI, $y$ es asintóticamente estable (a futuro) $\iff$ $y$ es estable $\wedge \lim\limits_{x\to\infty} |y(x) - y^*(x)| = 0$ donde $y^*\colon [x_0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es cualquier solución del PVI con $y^*(x_0) = y_0^*$.

**Ejemplo 2.4.**

$$\begin{cases} y' = y(1-y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \implies \begin{cases} f(y) := y(1-y) \\ f(y) = 0 \iff y \in \{0,1\} \end{cases} \implies \begin{cases} y \equiv 0 \\ y \equiv 1 \end{cases} \text{ son de equilibrio}$$

$$\xRightarrow{\text{H2: ej. 1}} \big(\forall y < 0 : f(y) < 0\big) \wedge \big(\forall y \in (0,1) : f(y) > 0\big) \wedge \big(\forall y > 1 : f(y) < 0\big)$$

Por tanto, cualquier solución estable es asintóticamente estable (para EDOs autónomas). Además, si una solución tiene límite, entonces ese límite es sol estable.

$\boxed{y_0 < 0}$ $\qquad \forall y < 0 : F(y) = \displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{1}{s(1-s)}\,\mathrm{d}s \implies \forall y < 0 : F'(y) < 0$

Tomamos $y \in (y_0, 0) \implies F(y) < F(y_0) = 0$

$$\implies s \geq y_0 \implies 0 < 1 - s \leq 1 - y_0 \implies \frac{1}{1-s} \geq \frac{1}{1-y_0} \implies \frac{1}{(1-s)s} \leq \frac{1}{(1-y_0)s}$$

$$\implies F(y) \leq \frac{1}{1-y_0} \int_{y_0}^{y} \frac{1}{s}\, \mathrm{d}s = \frac{\log(-y) - \log(-y_0)}{1-y_0} \implies \boxed{\lim_{y \to 0^-} F(y) = -\infty}$$

1. La única solución tal que $y(x_0) = y_0 < 0$ está definida globalmente hacia el pasado.
2. El equilibrio $y = 0$ es único "por abajo".

$(y \to -\infty)$

$$y < y_0 < 0 \implies 0 \leq F(y) = -\int_{y}^{y_0} \frac{1}{s(1-s)}\, \mathrm{d}s = \int_{y}^{y_0} \frac{1}{s^2 - s}\, \mathrm{d}s \leq \int_{y}^{y_0} \frac{1}{s^2}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}$$

$$\implies 0 \leq F(y) < -\frac{1}{y} \implies \boxed{\lim_{y \to -\infty} F(y) \in \mathbb{R}} \implies \text{Hay una asíntota}$$

$\boxed{y_0 > 1}$ Si $y$ es solución con $y(x_0) = y_0 > 1$, entonces $z(x) = -y(-x) + 1$ también es solución con $z(x_0) = 1 - y_0 < 0$.

**06/03/2024**

## 2.6 Bifurcación

**Definición 2.5 (Puntos de bifurcación).** Sea $f_\mu \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que depende de un parámetro $\mu \in \mathbb{R}$. El comportamiento cualitativo de la EDO $y' = f_\mu(y)$ puede cambiar dependiendo de la $\mu$. Los valores de $\mu$ que dan lugar a un cambio de este tipo* son los puntos de bifurcación.

*Este tipo: de cortar dos veces al equilibrio a cortarlo una o ninguna vez.

**Ejemplo 2.5 ($\{y' = y(1-y) - \mu \wedge y(x_0) = y_0\}$).**

$$f_\mu(y) = y(1-y) - \mu = 0 \iff y^2 - y + \mu = 0 \iff y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\mu}}{2} \wedge \mu \leq \frac{1}{4}$$

Curvas de equilibrios: $\gamma_1(\mu) := \dfrac{1 + \sqrt{1-4\mu}}{2} \wedge \gamma_2(\mu) := \dfrac{1 - \sqrt{1-4\mu}}{2}$

$$\implies \begin{cases} \mu > \frac{1}{4} \text{ no hay equilibrios} \\ \mu < \frac{1}{4} \text{ hay dos equilibrios} \\ \mu = \frac{1}{4} \text{ hay un equilibrio} \end{cases} \implies \mu = \frac{1}{4} \text{ es un punto de bifurcación.}$$

- $\mu > \frac{1}{4} \implies$ la solución $y$ es decreciente porque la derivada nunca toca el eje $X$.
- $\mu = \frac{1}{4} \implies$ las soluciones son siempre decrecientes con un punto de silla ($y' = 0$).

- $\mu < \frac{1}{4} \implies y$ es estrictamente creciente para $y_0 \in \left(\frac{1-\sqrt{1-4\mu}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\mu}}{2}\right)$, constante para $y_0 = \frac{1\pm\sqrt{1-4\mu}}{2}$, y estrictamente decreciente en otro caso.

**07/03/2024**

**Ejemplo 2.6** ($\{y' = y(\mu - y^2) \wedge y(x_0) = y_0\}$)**.**

$$f_\mu(y) := y(\mu - y^2) = 0 \iff y = 0 \vee y = \pm\sqrt{\mu} \implies \forall \mu \leq 0 : \begin{cases} \gamma_1(\mu) := \sqrt{\mu} \\ \gamma_2(\mu) := -\sqrt{\mu} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \mu \leq 0 & \text{hay un equilibrio } (y = 0) \\ \mu > 0 & \text{hay tres equilibrios } (y = 0 \vee y = \pm\sqrt{\mu}) \end{cases}$$

Definimos $F(y) := \displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{1}{s(\mu - s^2)}\,\mathrm{d}s$ y establecemos $\mu < 0$.

- $y_0 < 0 \implies \forall y < 0 : F'(y) = \dfrac{1}{y(\mu - y^2)} > 0 \implies y$ es estrictamente creciente.

  Como $\lim\limits_{y\to-\infty} F(y) \in \mathbb{R}$, entonces hay una asíntota hacia atrás y para abajo.

- $y_0 > 0 \implies \forall y > 0 : F'(y) = \dfrac{1}{y(\mu - y^2)} < 0 \implies y$ es estrictamente decreciente. Como $\lim\limits_{y\to\infty} F(y) \in \mathbb{R}$, entonces hay una asíntota hacia atrás y para arriba.

Si establecemos $\mu > 0$, entonces

- $y_0 \in (-\sqrt{\mu}, 0) \implies \forall y \in (-\sqrt{\mu}, 0) : F'(y) < 0 \implies y$ es estrictamente decreciente.
- $y_0 \in (0, \sqrt{\mu}) \implies \forall y \in (0, \sqrt{\mu}) : F'(y) > 0 \implies y$ es estrictamente creciente.

**Proposición 2.2.** *Sea $y' = f_\mu(y)$ una EDO autónoma con $\mu^* \in \mathbb{R}$ punto de bifurcación*

$$\varepsilon^* := \{y \in \mathbb{R} : f_{\mu^*}(y) = 0\} \neq \phi \implies \exists\, y^* \in \varepsilon^* : f_{\mu^*}(y^*) = 0 \wedge f'_{\mu^*}(y^*) = 0$$

**Ejemplo 2.7** ($y' = e^{-y} - \mu = f_\mu(y)$)**.**

$$f_\mu(y) = 0 \iff y = -\ln\mu \implies \begin{cases} \mu \leq 0 & \text{no hay equilibrios} \\ \mu > 0 & \text{hay un equilibrio} \end{cases} \implies \mu^* = 0 \text{ es de bifurcación}$$

$\implies \varepsilon^* = \{y \in \mathbb{R} : e^{-y} - 0 = 0\} = \phi \implies$ no se puede aplicar la proposición (vaya ejemplo)

**11/03/2024**

# 3 Teoremas fundamentales

## 3.1 Introducción

Sean $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ dos intervalos abiertos y $f\colon I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función continua. Consideramos el PVI $\begin{cases} x' = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(t_0) = \hat{x}, & \hat{x} \in \Omega \end{cases}$. Hasta ahora sabemos trabajar con EDOs autónomas: si $f(t, x) = f(x)$, entonces el PVI tiene siempre solución en un entorno de $t_0$.

Vamos a intentar darle condiciones a la $f$ de ahora para poder comprobar si hay existencia y unicidad, igual que en el tema anterior. Vamos a integrar a ver qué pasa:

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \implies x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$$

Por tanto, si existe solución, esta es de la forma $x(t) = \hat{x} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$.

Definimos el operador $\forall z \in \mathcal{C}(I, \Omega) : T[z] := z + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\,\mathrm{d}s \implies x = T[x]$.

Hemos reducido el problema a encontrar un punto fijo de $T$, procedemos calculando las iteradas de Picard de $T$:

$$x_0 = \hat{x} \wedge x_1 = T[x_0] = \hat{x} + \int_{t_0}^{t} f(s, \hat{x})\,\mathrm{d}s \wedge \cdots \wedge x_{k+1} = T[x_k] = \hat{x} + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s$$

El objetivo es encontrar el límite de esta sucesión y demostrar que es una solución del PVI.

**Ejemplo 3.1.** $\{x' = x \wedge x(0) = 1\} \iff x(t) = 1 + \displaystyle\int_{0}^{t} x(s)\,\mathrm{d}s$

$$\implies x_0 = 1 \wedge x_1 = 1 + t \wedge \cdots \wedge x_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{t^i}{i!} \implies x_k(t) \xrightarrow{k \to \infty} e^t$$

Como es una EDO autónoma y en el dato inicial el lado derecho no se anula, sabemos que la solución es única y podemos afirmar que es la que acabamos de encontrar. Este es un método de encontrar el límite que en este caso ha funcionado.

Pero necesitamos formalizar todo esto.

1. Concepto de límite de series de funciones.

2. ¿Toda sucesión de Cauchy es convergente?

3. $\lim\limits_{k\to\infty}\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s \stackrel{?}{=} \int_{t_0}^{t} \lim_{k\to\infty} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s$

4. $\lim\limits_{k\to\infty} f(s, x_k(s)) \stackrel{?}{=} f\left(s, \lim\limits_{k\to\infty} x_k(s)\right)$

Los dos últimos puntos son equivalentes a $\lim\limits_{k\to\infty} T\left[x_k\right] \stackrel{?}{=} T\left[\lim\limits_{k\to\infty} x_k\right]$

## 3.2 Conceptos de análisis

### 3.2.1 Convergencia puntual y uniforme

**Definición 3.1 (Convergencia puntual).** Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $f_k\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $I \subset \mathbb{R}$ abierto una sucesión de funciones, $(f_k)$ converge puntualmente a $f$

$$\begin{aligned}&\iff \forall t \in I : \lim_{k\to\infty} f_k(t) = f(t)\\ &\iff \forall t \in I : \forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon\end{aligned}$$

**Ejemplo 3.2.** La sucesión de funciones continuas $(f_k)$ definida a continuación converge puntualmente a $f$ que no es continua.

$$\forall t \in \mathbb{R} : f_k(t) := \begin{cases} 0, & t < -\frac{1}{k} \\ k(t + \frac{1}{k}), & -\frac{1}{k} \leq t < 0 \\ k(\frac{1}{k} - t), & 0 \leq t < \frac{1}{k} \\ 0, & t \geq \frac{1}{k} \end{cases} \implies f_k(t) \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

**12/03/2024**

**Ejemplo 3.3.** La sucesión de funciones $(x_k)$ definida a continuación no intercambia el límite con la integral.

$$x_k(t) := \begin{cases} 2k^2 t, & t \in \left[0, \frac{1}{2k}\right) \\ 2k^2\left(\frac{1}{k} - t\right), & t \in \left[\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}\right) \\ 0, & t \in \left[\frac{1}{k}, 1\right) \end{cases} \implies \begin{array}{l} x_k(0) = 0 \wedge x_k(1) = 0 \\ t \in (0,1] \implies x_k(t) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \end{array}$$

$\lim\limits_{k\to\infty}\displaystyle\int_0^1 x_k(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{?}{=} \int_0^1 \lim_{k\to\infty} x_k(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\int_0^1 \lim_{k\to\infty} x_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{k\to\infty}\int_0^1 x_k(t)\,\mathrm{d}t$$

**Definición 3.2 (Convergencia uniforme).** Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $f_k\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $I \subset \mathbb{R}$ abierto una sucesión de funciones, $(f_k)$ converge uniformemente a $f$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : \forall t \in I : |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$$

Es decir, $\forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : \sup_{t \in I} |x_k(t) - x(t)| \leq \varepsilon$

**Observación 3.1.**

- Los dos ejemplos anteriores no convergen uniformemente.
- La convergencia uniforme implica convergencia puntual.

**Proposición 3.1.** *Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones uniformemente convergente a $x$.*

$$\implies x \text{ es continua}$$

***Demostración.*** Sean $\varepsilon > 0 \wedge t_0 \in I$. Buscamos $\delta > 0$ tal que, dado $t \in I$

$$|t - t_0| < \delta \implies |x(t) - x(t)| < \varepsilon$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $|x(t) - x_k(t) + x_k(t) - x_k(t_0) + x_k(t_0) - x_k(t_0)| \leq$

$$\leq |x(t) - x_k(t)| + |x_k(t) - x_k(t_0)| + |x_k(t_0) - x(t_0)|$$

Como $(x_k)$ converge uniformemente a $x$, $\kappa = \kappa(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : \forall t \in I : |x_k(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Entonces, para $k = \kappa$, se tiene

$$\begin{aligned} |x(t) - x(t_0)| &\leq |x(t) - x(t_0)| + |x(t) - x_\kappa(t_0)| + |x_\kappa(t_0) - x(t_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + |x_\kappa(t) - x_\kappa(t_0)| + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Como $x_\kappa$ es continua, $\exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \implies |x_\kappa(t) - x_\kappa(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\implies |x(t) - x(t_0)| < \varepsilon$$

∎

**Proposición 3.2.** *Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas $x_i \colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $x \colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $(a, b) \subset \mathbb{R}$ está acotado.*

$$\implies \lim_{k\to\infty} \int_a^b x_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t$$

***Demostración.*** Sea $\varepsilon > 0$. La convergencia uniforme nos asegura que

$$\exists \kappa_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : \forall t \in (a, b) : |x_k(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

$$\begin{aligned} \implies \forall k \geq \kappa_\varepsilon : \left| \int_a^b x_k(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t \right| &= \left| \int_a^b (x_k(t) - x(t))\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_a^b |x_k(t) - x(t)|\,\mathrm{d}t < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a}\,\mathrm{d}t = \varepsilon \end{aligned}$$

∎

**13/03/2024**

**Ejemplo 3.4.** Consideramos la sucesión $x_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } t \leq k \\ 0 & \text{si } t > k \end{cases}$

$$\implies \int_0^\infty x_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^k \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = 1 \wedge \lim_{k\to\infty} x_k(t) = 0$$

### 3.2.2 Espacios normados y contracciones

Sea $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) = \mathcal{C}([a,b]) := \{x\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \text{ continua}\}$ el espacio vectorial de funciones continuas.

$$\text{con la norma } \forall x \in \mathcal{C}([a,b]) : \|x\|_\infty := \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \text{ es un espacio vectorial normado}$$

$$\implies \big(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty\big) \text{ también es métrico con } \mathrm{d}(x,y) := \|x-y\|_\infty$$

$$\mathrm{d}(x_k,x) = \|x_k - x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x_k(t) - x(t)| \to 0 \iff x_k \to x \text{ uniformemente}$$

**Teorema 3.1.** *Sean* $a,b \in \mathbb{R} : a < b \implies \left(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty\right)$ *es un espacio completo.*
*Es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente. El recíproco también es cierto, toda sucesión convergente es de Cauchy.*

***Demostración*.** Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset ([a,b])$ una sucesión de Cauchy. Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \big(k,l \geq \kappa \implies \|x_k - x_l\|_\infty < \varepsilon\big)$$

Recordemos que $\|x_k - x_l\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x_k(t) - x_l(t)|$
Fijamos $\varepsilon > 0$ y $t \in [a,b] \implies \forall k,l \geq \kappa : |x_k(t) - x_l(t)| \leq \|x_k - x_l\|_\infty < \varepsilon$

Esto demuestra que la sucesión de números reales $(x_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.
Como $\mathbb{R}$ es completo, $\exists x(t) \in \mathbb{R} : x_k(t) \xrightarrow{k\to\infty} x(t)$.

Veamos que el límite es uniforme: En efecto, sean $k \geq \kappa, l \geq 1, k, l \in \mathbb{N}$.

$$\implies \forall t \in [a,b] : |x_k(t) - x_{k+l}(t)| \leq \|x_k - x_{k+l}\| < \varepsilon \text{ porque } (x_k) \text{ es de Cauchy}$$

Haciendo tender $l \to \infty$, tenemos $\forall t \in [a,b] : \forall k \geq \kappa : |x_k(t) - x(t)| \leq \varepsilon$

Recordemos que $x \in \mathcal{C}([a,b])$ por ser límite de funciones continuas.

Para el recíproco:

$$\|x_k - x_l\|_\infty \leq \|x_k - x + x - x_l\|_\infty \leq \|x_k - x\|_\infty + \|x_l - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

**Definición 3.3 (Punto fijo).** Sea $T\colon \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b])$ un operador, $x\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es un punto fijo de $T \iff T[x] = x$.

**Definición 3.4 (Contracción).** Sea $C \subset X \wedge C \neq \phi$ donde $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado y $T\colon C \longrightarrow C$ una aplicación, $T$ es una contracción en $C$

$$\iff \exists\, \alpha \in (0,1) : \forall x, y \in C : \|T[x] - T[y]\| \leq \alpha \, \|x - y\|$$

**Observación 3.2.** Claramente, toda contracción es continua (con respecto a la norma correspondiente). En efecto, si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C : x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \in C$

$$\implies \|T[x_k] - T[x]\| \leq \alpha \, \|x_k - x\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

**Teorema 3.2** (Punto fijo de Banach)**.** *Sea $C \subset X \wedge C \neq \phi$ cerrado donde $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado completo y sea $T\colon C \longrightarrow C$ una contracción $\implies \exists!\, x \in C : T[x] = x$*

**14/03/2024**

***Demostración***. Sea $x_0 \in C$. Definimos la sucesión $\forall n \in \mathbb{N} : x_n := T\left[x_{n-1}\right]$.

$$\implies \|x_{n+1} - x_n\| = \|T[x_n] + T[x_{n-1}]\| \leq \alpha \, \|x_n - x_{n-1}\| \leq \cdots \leq \alpha^n \, \|x_1 - x_0\|$$

Sean $n, m \in \mathbb{N} \wedge n > m$.

$$\begin{aligned}
\implies \boxed{\|x_n - x_m\|} &= \|(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_{m+1} - x_m)\| \\
&\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \cdots + \|x_{m+1} - x_m\| \\
&\leq \left(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha^m\right) \|x_1 - x_0\| \\
&\leq \alpha^{n-1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n+1})\|x_1 - x_0\| \\
&\leq \alpha^m \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i\right) \|x_1 - x_0\| = \boxed{\frac{\alpha^m}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|}
\end{aligned}$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa = \kappa(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \big(n > m \geq \kappa(\varepsilon) \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon\big) \implies \text{es de Cauchy}$$

Por tanto, $(x_n)$ tiene límite, es decir, $\exists x \in X : x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Como $x_n \in C \wedge C$ es cerrado $\implies x \in C$.

Hay que ver que $x$ es punto fijo de $T$. En efecto, tomando límites en $x_{n+1} = T[x_n]$ y usando que $T$ es continua por ser contractiva, se tiene

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} T[x_n] = T[x]$$

Falta probar la unicidad. Para ello, sean $x, y \in C$ puntos fijos. Se tiene

$\|x - y\| = \|T[x] - T[y]\| \leq \alpha\|x - y\| \implies (1-\alpha)\|x - y\| \leq 0 \implies \|x - y\| = 0 \implies x = y$

■

Para poder aplicar el teorema de punto fijo a nuestra aplicación $T[x]$, hay que ver que ésta es contractiva:

$$\begin{aligned}
\|T[x]-T[y]\|_\infty &= \max_{t\in[a,b]}\left|\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \max_{t\in[a,b]}\left(\int_{t_0}^{t} |f(s,x(s))-f(s,y(s))|\,\mathrm{d}s\right) \\
&\overset{(*)}{\leq} \max_{t\in[a,b]}\int_{t_0}^{t} L\,|x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s \leq L\|x-y\|_\infty\left(\max_{t\in[a,b]}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}s\right) = \\
&= L\|x-y\|_\infty \max_{t\in[a,b]}(t-t_0) = L(b-t_0)\|x-y\|_\infty \leq L(b-a)\|x-y\|_\infty
\end{aligned}$$

$(*) \iff t > t_0 \wedge |f(s,x)-f(s,y)| \leq L|x-y|$
($f$ es Lipschitz con respecto a la segunda variable y es uniforme con respecto a la primera)

Así concluimos que $\dfrac{(b-a)}{L} < 1 \implies$ T es una contracción.

■

**18/03/2024**

### 3.2.3 Funciones Lipschitz

**Definición 3.5 (Función Lipschitz).** Sea $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con $\Omega \subset \mathbb{R}$ abierto, es Lipschitz en $\Omega$

$$\iff \exists L \in \mathbb{R} : \forall x, \hat{x} \in \Omega : |f(x)-f(\hat{x})| \leq L\,|x-\hat{x}|$$

**Interpretación geométrica:** Si $f$ es Lipschitz en $\Omega$, suponiendo que $x > \hat{x}$:

$$|f(\hat{x})-f(x)| \leq L(x-\hat{x}) \implies -L(x-\hat{x}) \leq f(\hat{x})-f(x) \leq L(x-\hat{x})$$
$$\implies f(\hat{x})-L(x-\hat{x}) \leq f(x) \leq f(\hat{x})+L(x-\hat{x})$$

Es como si en cada punto $(x, f(x))$ de la gráfica se abriese un "cono" (dos rectas de pendientes $L$ y $-L$) que contiene el resto de la gráfica para $\hat{x} > x$.

**Observación 3.3.**

1. Si $f$ es Lipschitz en $\Omega$, entonces $f$ es uniformemente continua en $\Omega$.
   (Sale al tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$ en la definición de continuidad uniforme).
2. A la constante $L$ se le llama constante Lipschitz de $f$ en $\Omega$.
3. Funciones con derivada no acotada no pueden ser Lipschitz.

**Ejemplo 3.5.**

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin x$ y $x, \hat{x} \in \mathbb{R}$, $x < \hat{x}$. Por el TVM
$$\exists y \in (x, \hat{x}) : |f(x) - f(\hat{x})| = f'(y)\,|x - \hat{x}| \implies |f(x) - f(\hat{x})| = \cos(y)\,|x - \hat{x}| \leq |x - \hat{x}|$$
Por tanto $f(x) = \sin x$ es Lipschitz en $\mathbb{R}$ con constante $L = 1$.

2. En realidad, si $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable con $\forall x \in I : |f'(x)| \leq L \implies f$ es Lipschitz en $I$ con constante $L$.

**Proposición 3.3.**

1. *Sean $f, g\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^d$ dos funciones Lipschitz con constantes de Lipschitz $L_f, L_g$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha f + \beta g$ es Lipschitz.*

2. *Sean $f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ y $f\colon \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^d$ dos funciones Lipschitz con constantes de Lipschitz $L_f, L_g \implies g \circ f$ es Lipschitz con constante $L_f L_g$.*

***Demostración.***

1. Sean $x, \hat{x} \in \Omega$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} |\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha f(\hat{x}) - \beta g(\hat{x}))| &= |\alpha\,(f(x) - f(\hat{x})) + \beta\,(g(x) - g(\hat{x}))| \\ &\leq |\alpha|\,|f(x) - f(\hat{x})| + |\beta|\,|g(x) - g(\hat{x})| \\ &\leq (|\alpha|\,L_f + |\beta|\,L_g)\,|x - \hat{x}| \end{aligned}$$

2. Sean $x, \hat{x} \in \Omega$:
$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\hat{x})| = |g(f(x)) - g(f(\hat{x}))| \leq L_g\,|f(x) - f(\hat{x})| \leq L_g L_f\,|x - \hat{x}|$$

■

**Definición 3.6 (Función Lipschitz en la segunda variable).**
Sea $f\colon (a,b) \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ una función, $f$ es Lipschitz respecto a su segunda variable, y uniforme con respecto a la primera
$$\iff \exists L \in \mathbb{R} : \forall x, \hat{x} \in \Omega : |f(t,x) - f(t,\hat{x})| \leq L|x - \hat{x}|$$

## 3.3 Existencia y unicidad de soluciones

**Teorema 3.3** (Existencia y unicidad global de soluciones)**.** *Sea $f\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b$ una función continua y Lipschitz en la segunda variable y uniforme en la primera*
$$\implies \forall t_0 \in [a,b] : \forall x \in \mathbb{R} : \exists!\, x \in \mathcal{C}^1([a,b]) : \begin{cases} \forall t \in [a,b] : x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = \hat{x} \end{cases}$$

***Demostración.*** Estamos buscando un punto fijo de $T[x] = \hat{x} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$.

Sea $L$ la constante Lipschitz de $f$ en la segunda variable. Dividimos $[t_0, b]$ en subintervalos cerrados de longitud $< {}^1\!/\!_L$:

$$[t_0, b] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \cdots \cup [t_{N-1}, t_N = b]$$

Queremos encontrar una solución en $[t_0, t_1]$, para ello definimos $T_1 \colon \mathcal{C}([t_0, t_1]) \longrightarrow \mathcal{C}([t_0, t_1])$

$$\forall x \in \mathcal{C}([t_0, t_1]) : \forall t \in [t_0, t_1] : T_1[x](t) := \hat{x} + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned} \implies |T_1[x](t) - T_1[y](t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \right| \leq L \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\leq L(t - t_0)\, \|x - y\|_\infty \leq L(t_1 - t_0)\, \|x - y\|_\infty \\ \implies \forall x, y \in \mathcal{C}([a, b])\, &\|T_1[x] - T_1[y]\|_\infty \leq L(t_1 - t_0)\, \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

Por tanto, $T_1$ es una contracción con $\alpha = L(t_1 - t_0) < 1$ en $\mathcal{C}([t_0, t_1])$ y por el teorema de punto fijo de Banach, $\exists!\, x_1 \in \mathcal{C}([t_0, t_1]) : T_1[x_1] = x_1$. Por tanto, existe una solución única al PVI en $[t_0, t_1]$.

Ahora queremos encontrar una solución en $[t_1, t_2]$ que "empiece donde acaba $x_1$". Definimos $T_2 \colon \mathcal{C}([t_1, t_2]) \longrightarrow \mathcal{C}([t_1, t_2])$ como $T_2[x](t) := x_1(t_1) + \displaystyle\int_{t_1}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$ y procedemos igual que antes para obtener $x_2$, la solución única en $[t_1, t_2]$.

Repetimos este proceso $\Big($sacando $(x_j)_{j=1}^{N}\Big)$ hasta llegar a $b$ y obtenemos una única función $x \in \mathcal{C}^1([a, b])$ continua y derivable por construcción que es solución del PVI.

$$\forall j \in \mathbb{N}_N : \forall t \in [t_{j-1}, t_j] : x(t) = x_j(t)$$

■

**Corolario 3.1.** Sea $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ una función continua y Lipschitz en la segunda variable y uniforme en la primera

$$implies \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^d : \forall t_0 \in \mathbb{R} : \exists!\, x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} : x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = \hat{x} \end{cases}$$

***Demostración.*** Podemos dividir $\mathbb{R}$ en intervalos cerrados de longitud $< {}^1\!/\!_L$ y aplicar el teorema anterior. ■

**Definición 3.7 (Lipschitz local).** Sea $f \colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^d$ una función, $f$ es localmente Lipschitz $\iff \forall K \subset \Omega : f\big|_K$ es Lipschitz.

**Definición 3.8.** Sea $f\colon \Omega \text{ abto } \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^d$ una función, $f$ es localmente Lipschitz en la segunda variable y uniforme en la primera

$$\iff \forall K \subset \Omega : \exists L_K \in \mathbb{R} : \forall (t,x),(\hat{t},\hat{x}) \in K : \left|f(t,x) - f(\hat{t},\hat{x})\right| \leq L_K \left|x-\hat{x}\right|$$

**Teorema 3.4** (Picard-Lindelöf)**.** *Sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ una función continua y localmente Lipschitz en la segunda variable y uniforme en la primera*

$$\implies \forall (t_0,\hat{x}) \in \Omega : \exists \varepsilon > 0 : \exists !\, x \in \mathcal{C}^1([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]) : \begin{cases} \forall t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] : x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = \bar{x} \end{cases}$$

***Demostración.*** Como $\Omega$ es abierto, $\exists \rho, \delta > 0 : \mathcal{R}_{\rho,\delta} := (t_0-\rho, t_0+\rho) \times B_\delta(\bar{x}) \subset \Omega$.

Como $f$ es continua, $\implies |f(t,x)| \leq \max\limits_{(t,x)\in\mathcal{R}_{\rho,\delta}} |f(t,x)| =: C_{\rho,\delta}$.

Como $f$ es localmente Lipschitz en la segunda variable,

$$\implies \exists L_{\rho,\delta} \in \mathbb{R} : \forall (t,x),(\hat{t},\hat{x}) \in \mathcal{R}_{\rho,\delta} : \left|f(t,x) - f(\hat{t},\hat{x})\right| \leq L_{\rho,\delta} \left|x-\hat{x}\right|$$

Para cada $\varepsilon \in (0,\rho]$ consideramos el conjunto

$$\mathcal{X}_{\rho,\delta} := \left\{ x \in \mathcal{C}([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]) : \forall t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] : x(t) \in B_\delta(\bar{x}) \right\}$$

Definimos $T\colon \mathcal{X}_{\rho,\delta} \longrightarrow \mathcal{C}([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon])$ como

$$\forall x \in \mathcal{X}_{\rho,\delta} : \forall t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] : T[x](t) := \bar{x} + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,\mathrm{d}s$$

Queremos un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que $T$ sea una contracción en $\mathcal{X}_{\rho,\delta}$.

1. $\mathcal{X}_{\rho,\delta} \neq \phi$ porque $\bar{x} \in \mathcal{X}_{\rho,\delta}$
2. Sea $(x_k) \subset \mathcal{X}_{\rho,\delta}$ una sucesión : $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \in \mathcal{C}([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon])$
$$\implies \forall t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] : |x_k(t) - \bar{x}| \leq \delta \implies \forall t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] : |x(t) - \bar{x}| \leq \delta$$
$$\implies \forall t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] : x(t) \in B_\delta(\bar{x}) \implies x \in \mathcal{X}_{\rho,\delta}$$
3. Hay que ver que $T[\mathcal{X}_{\rho,\delta}] \subset \mathcal{X}_{\rho,\delta}$. Como $\forall x \in \mathcal{X}_{\rho,\delta} : \forall t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ :
$$|T[x](t) - \bar{x}| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,\mathrm{d}s\right| \leq \int_{\min\{t_0,t_1\}}^{\max\{t_0,t_1\}} |f(s,x(s))|\,\mathrm{d}s$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} C_{\rho,\delta}\,\mathrm{d}s = C_{\rho,\delta}\,|t-t_0| \leq \varepsilon C_{\rho,\delta} \leq \delta \iff \varepsilon \leq \frac{\delta}{C_{\rho,\delta}}$$
4. Veamos que $T$ es una contracción en $\mathcal{X}_{\rho,\delta}$:
$$|T[x](t) - T[\hat{x}](t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,x(s)) - f(s,\hat{x}(s))\,\mathrm{d}s\right| \leq L_{\rho,\delta}\,|t-t_0| \leq \varepsilon L_{\rho,\delta}\,|x-\hat{x}|$$
$$\leq |x-\hat{x}| \iff \varepsilon < \frac{1}{L_{\rho,\delta}}$$

Por tanto, $T$ es contractiva en $\mathcal{X}_{\rho,\delta}$ y por el teorema de punto fijo de Banach,

$$\exists!\, x \in \mathcal{X}_{\rho,\delta} : x \text{ es solución del PVI.}$$

■

**02/04/2024**

**Corolario 3.2.** Bajo las condiciones del teorema Picard-Lindelöf, dos soluciones distintas de la EDO $x' = f(t,x)$ no pueden cruzarse.

**Teorema 3.5** (Cauchy-Peano)**.** *Sea* $(t_0, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *y sea* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en un entorno* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *de* $(t_0, x)$

$$\Longrightarrow \ \exists x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 - \varepsilon] : \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x \end{cases}$$

## 3.4 Prolongabilidad

Bajo las condiciones del teorema Picard-Lindelöf, $\forall (t_0, x) \in \Omega : \exists \varepsilon > 0 : \exists$ una única solución $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon])$ del PVI. Entonces, podemos definir

$$T_+(t_0, x) = \sup\{T > t_0 : \text{ el PVI tiene sol única definida en } [t_0, T)\}$$

$$T_-(t_0, x) = \inf\{T < t_0 : \text{ el PVI tiene sol única definida en } (T, t_0]\}$$

**Teorema 3.6.** *Bajo las condiciones del teorema Picard-Lindelöf, existe una única solución maximal del PVI definida en el intervalo maximal* $I = (T_-(t_0,x), T_+(t_0,x))$.

**04/04/2024**

Sea $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ una función continua localmente Lipstchiz en $x$ uniformemente en $t$ con $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ abierto. Definimos

$$a \leq T_-(t_0, x_0) := \inf\{T < t_0 : \text{existe solución definida en } (T, t_0]\}$$

$$b \geq T_+(t_0, x_0) := \sup\{T > t_0 : \text{existe solución definida en } [t_0, T]\}$$

$$I := (T_-(t_0, x_0), T_+(t_0, x_0)) \wedge \Omega = (a,b) \times U \wedge U \subset \mathbb{R}^d \text{ abierto}$$

**Teorema 3.7** (Escape de compactos)**.** *Sea* $(a,b) \times U =: \Omega$*, con* $U \subset \mathbb{R}^d$ *abierto, sea* $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *con las hipótesis del teorema de Picard-Lindelöf, sea* $(t_0, x) \in \Omega$

$$\Longrightarrow \begin{cases} T_+ < b \implies \forall K \subset U \text{ compacto} : \exists t_+ \in (t_0, T_+) : \forall t \in (t_+, T_+) : x(t) \notin K \\ T_- > ab \implies \forall K \subset U \text{ compacto} : \exists t_- \in (T_-, t_0) : \forall t \in (T_-, t_-) : x(t) \notin K \end{cases}$$

***Demostración.*** Suponemos por contradicción que existe un $K \subset U$ compacto y que existe $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (t_0, T_+)$ tal que $t_k \xrightarrow{k\to\infty} T_+$ y $\forall k \in \mathbb{N} : x(t_k) \in K$. Entonces, existe una subsucesión (que denoto igual) tal que $x(t_k) \xrightarrow{k\to\infty} \bar{x} \in K$.

Veamos que $\lim\limits_{t\to T_+} x(t) = \bar{x}$. Fijamos $\delta > 0 : V = [T_+ - \delta, T_+] \times \overline{B_\delta(\bar{x})} \subset \Omega = (a,b) \times U$. Claramente, existe $M := \max\limits_{(t,x)\in V} |f(t,x)|$.

Si no es cierto que $\lim\limits_{t\to T_+} x(t) = \bar{x}$, entonces existen $\gamma \in (0,\delta)$ y $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (t_0, T_+)$ tales que $\tau_k \xrightarrow{k\to\infty} T_+$ y $|x(\tau_k) - \bar{x}| \geq \gamma$.

Se puede elegir $\tau_k$ de forma que $|x(\tau_k) - \bar{x}| = \gamma \wedge \forall t \in [\min\{t_k, \tau_k\}, \max t_k, \tau_k] : |x(\tau_k) - \bar{x}| \leq \gamma < \delta$

$$\begin{aligned} & 0 < \gamma \leq |x(\tau_k) - \bar{x}| \leq |x(\tau_k) - x(t_k)| + |x(t_k) - \bar{x}| \\ \xi_k \in (\min\{\tau_k, t_k\}, \max\{t_k, \tau_k\}) \implies & = |x'(\xi_k)|\,|\tau_k - t_k| + |x(t_k) - \bar{x}| \\ & = |f(\xi_k, x(\xi_k))|\,|\tau_k - t_k| + |x(t_k) - \bar{x}| \leq M\,|\tau_k - t_k| + |x(t_k) - \bar{x}| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que efectivamente $\lim\limits_{t\to T_+} x(t) = \bar{x} \in K$.

Paso 3: Hemos probado que $x$ se extiende de manera continua a $(T_-, T_+]$. Ahora consideramos el problema $\{x' = f(t,x) \wedge x(T_+) = \bar{x}\}$. Por el teorema de Picard-Lindelöf, existe una solución $y\colon (T_+ - \varepsilon, T_+ + \varepsilon) \longrightarrow U$. Por unicidad local, $\forall t \in (T_+ - \varepsilon, T_+ + \varepsilon) : y(t) = x(t)$.

Como $x$ e $y$ se "pegan" bien, hemos construido una solución de $\{x' = f(t,x) \wedge x(t_0) = x_0\}$ definida en $(T_-, T_+ + \varepsilon)$. Esto contradice la maximalidad de $(T_-, T_+)$. ■

**Corolario 3.3.** Bajo las condiciones del teorema de escape de compactos, si $\Omega = (a,b) \times \mathbb{R}^d$

$$\implies \begin{cases} T_+ < b \implies |x(t)| \xrightarrow{t\to T_+} \infty \\ T_- > a \implies |x(t)| \xrightarrow{t\to T_+} \infty \end{cases}$$

# 4 Ejercicios

## 4.1 Hoja 1

### 4.1.1 Conceptos básicos

### 4.1.2 Algunos métodos de resolución de EDOs

**2.18**

1. $yy'' + (y')^2 = 0$

   Resulta razonable buscar soluciones en forma de polinomios $y(x) = x^\alpha$ porque:

$$\implies y' = \alpha x^{(\alpha-1)} \wedge y'' = \alpha(\alpha-1)x^{(\alpha-2)}$$

$$\implies x^\alpha \alpha(\alpha-1)x^{(\alpha-2)} + \alpha^2 x^{2(\alpha-1)} = 0 \implies (2\alpha^2 - \alpha)x^\alpha = 0$$

$$\implies 2\alpha^2 - \alpha = 0 \implies \alpha(2\alpha-1) = 0 \implies \alpha = 0 \vee \alpha = \frac{1}{2}$$

   Opción 1: Integramos la EDO:

$$\int_0^t y(s)y''(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (y'(s))^2\,\mathrm{d}s = 0$$

$$-\int_0^t (y'(s))^2\,\mathrm{d}s + [y(s)y'(s)]_{s=0}^t + \int_0^t (y'(s))^2\,\mathrm{d}s$$

$$\implies y(t)y'(t) - y(0)y'(0) = 0 \implies y(t)y'(t) = y(0)y'(0) =: C$$

$$\implies \int_0^t y(s)y'(s)\,\mathrm{d}s = Ct \implies \frac{(y(t))^2}{2} - \frac{(y(0))^2}{2} = Ct$$

$$\implies y(t) = \sqrt{2Ct + (y(0))^2}$$

2. $xy'' = y' + (y')^2$

   No depende de $y \implies$ Hacemos un cambio de variable $x = y'$:

$$\implies xz' = z + z^3 \text{ que es de variables separadas.}$$

3. $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$

   Nuevamente hacemos un cambio de variable $z = y' \implies x^2z' = 2xz + z^2$

$$\forall x \neq 0 : z' = 2\frac{z}{x} + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \implies \text{ mediante el cambio de variables } \omega = \frac{z}{x}$$

   Obtenemos una EDO de variables separadas en $\omega$.

4. $2yy'' - (y')^2 = 1$

   Otra vez resulta razonable buscar soluciones de la forma $y(x) = Ax^2 + Bx + C$

### 4.1.3 Modelización

**3.4** $C(t)$ = "Cantidad de sal" en el tanque en el tiempo $t$.

$$C'(t) = 10 - \frac{1}{10}C(t) \implies \int_{C(0)}^{C(t)} \frac{1}{100-y}\,\mathrm{d}y = \int_0^t \frac{1}{10}\,\mathrm{d}t$$

$$\implies \log(100 - C(t)) - \log(100 - C(0)) = -\frac{1}{10} \implies \log\frac{100 - C(t)}{100} = -\frac{t}{10}$$

$$\implies \frac{100 - C(t)}{100} = e^{-\frac{t}{10}} \implies C(t) = 100(1 - e^{-\frac{t}{10}})$$

$$\implies C(1) = 100(1 - e^{-\frac{1}{10}}) \wedge \lim_{t\to\infty} C(t) = 100$$

### 4.1.4 Análisis cualitativo y campos de pendientes

**4.6** $\forall t > \frac{5}{4} : \forall x\left(\frac{5}{4}\right) \in \left(-\sqrt{\frac{5}{4}}, -\frac{1}{2}\right) : x' = x^2 - t \implies -\sqrt{t} < x(t) < -\sqrt{t-1}$

$$f_1(t) := -\sqrt{t} \wedge f_2 := -\sqrt{t-1} \implies f\left(\frac{5}{4}\right) = -\sqrt{\frac{5}{4}} \wedge f_2\left(\frac{5}{4} - 1\right) = -\frac{1}{2}$$

Sabemos que $\tilde{t} = \frac{5}{4} \implies -\sqrt{\tilde{t}} < x(\tilde{t}) < -\sqrt{\tilde{t} - 1}$

$\implies$ Por contunuidad, al menos en un tiempo, estas cotas se siguen manteniendo.

Atendiendo a las isoclinas de este ejercicio ($\{x^2 - t = C : C \in \mathbb{R}\}$), observamos que:

- $C = 0 \implies x^2 = t \implies x = \pm\sqrt{t}$ que es precisamente la cota inferior que buscábamos.
- $C = -1 \implies x^2 - t = -1 \implies x = \pm\sqrt{t-1}$ que es la cota superior.

Inicialmente $x(t) > -\sqrt{t}$ "durante un rato".

1. Supongamos que $\exists t^* : x(t^*) = -\sqrt{t^*}$.
2. Por un lado, la isoclina nos dice que $x'(t^*) = 0$.
3. Por otro lado, $x'(t^*) \leq \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\sqrt{t})\right]_{t=t^*} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t^*}} < 0$.

**4.7** $\begin{cases} x' = x^2 + t^2, t > 0 \\ x(0) > 0 \end{cases}$ Sea $x\colon [0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable.

1. Queremos ver si $\forall t \in [0, T) : x(t) > \frac{t^3}{3}$

Como $x' \geq t^2 \implies \int_0^t x'(s)\,\mathrm{d}s \geq \int_0^t s^2\,\mathrm{d}s \implies x(t) - x(0) \geq \frac{t^3}{3}$

$$\implies \boxed{\forall t \in [0,T) : x(t) > \frac{t^3}{3}}$$

2. Queremos ver si $\forall t \in \left(\sqrt{3}, T\right), T > \sqrt{3} : x(t) > \dfrac{1}{\frac{4}{\sqrt{3}} - t}$

Como $x' \geq x^2 \implies x^{-2}x' \geq 1 \implies \int_{\sqrt{3}}^t \frac{x'(s)}{x(s)^2}\,\mathrm{d}s \geq t - \sqrt{3}$

$$\implies -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(\sqrt{3})} \geq t - \sqrt{3} \implies t \leq \sqrt{3} + \frac{1}{x(\sqrt{3})} - \frac{1}{x(t)}$$

$$\implies t < \sqrt{3} + \frac{3}{\left(\sqrt{3}\right)^3} - \frac{1}{x(t)} = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x(t)} = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x(t)}$$

$$\implies t < \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x(t)} \implies \frac{1}{x(t)} < \frac{4}{\sqrt{3}} - t \implies \boxed{\forall t > \sqrt{3} : x(t) > \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{3}} - t}}$$

## 4.2 Hoja 2

**1.1** $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ tiene sol única.

1. Toda solución que no sea constante es estrictamente monótona.

***Demostración.*** Por contrarecíproco, veamos que

$$\exists t^* : x'(t^*) = 0 \implies \forall t : x(t) \equiv C := x(t^*)$$

Definimos $\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = x(t^*)$. Por hipótesis, $f(C) = f(x(t^*)) = x'(t) = 0$

$$\implies y'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C) = 0 = f(C) = f(y(t)) \implies y \text{ es solución}$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(t^*) = C \end{cases} \implies \text{Por unicidad, } x(t) = y(t) \equiv C$$

■

2. $\lim_{t\to\infty} x(t) = C_0 \implies u(t) \equiv C_0$ es solución.

***Demostración.*** (a) $\lim_{t\to\infty} x'(t) = \lim_{t\to\infty} f(x(t)) = f\left(\lim_{t\to\infty} x(t)\right) = f(C_0)$

(b) Veamos que $f(C_0) = 0$. Por contradicción, supongamos que $f(C_0) = A > 0$

$$\implies \lim_{t\to\infty} x'(t) = A \implies \exists\, \tilde{t} : \forall t \geq \tilde{t} : x'(t) > \frac{A}{2}$$

$$\implies \int_{\tilde t}^{t} x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau > \int_{\tilde t}^{t} \frac{A}{2}\,\mathrm{d}\tau \implies x(t) - x\left(\tilde t\right) > \frac{A}{2}(t-\tilde t)$$

$$\implies \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(x\left(\tilde t\right) + \frac{A}{2}\left(t-\tilde t\right)\right) = \infty \longrightarrow\!\longleftarrow$$

(c) $u'(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C_0) = 0 = f(C_0) = f(u(t)) \implies u$ es solución.

$\blacksquare$

**1.2** $x' = f(x)$ La unicidad solo se puede perder cuando $f(x) = 0$

1. $f(x) := x' = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

**Observación 4.1.**

(a) $x \equiv 0$ es solución ($f(0) = 0$) y solo puede haber problemas de unicidad en $x = 0$.

(b) $x(t)$ es estrictamente creciente si $x(t) \neq 0$

No habría unicidad en $x = 0 \iff \lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_{x}^{x_0} \frac{1}{f(\tau)}\,\mathrm{d}\tau \in \mathbb{R}$ con $x_0 > x$

En nuestro caso, $\displaystyle\int_{x}^{x_0} \frac{1}{\tau^2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to 0^+} -\infty \implies$ hay unicidad por arriba.

Para la unicidad por abajo, $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{-\tau}}\,\mathrm{d}\tau = -2\left(\sqrt{-x} - \sqrt{-x_0}\right) \xrightarrow{x\to 0^-} 2\sqrt{x_0} \in \mathbb{R}$

$\implies$ No hay unicidad por abajo.

Por tanto, podemos encontrar una solución de la siguiente forma:

$$y(t) := \begin{cases} -\frac{t^2}{4} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \implies y'(t) = \begin{cases} -\frac{t}{2} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Es solución porque:

$$f(y(t)) = \begin{cases} f(-\frac{t^2}{4}) & t < 0 \\ f(0) & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{-\left(-\frac{t^2}{4}\right)} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{t}{2} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} = y'(t)$$

Por un lado, $x(t_0) = 0 \implies \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ por la unicidad por arriba.

Por otro lado, si $x(t_0) < 0$ sabemos que

- $x(t)$ no decrece.
- $x(t)$ está acotada por arriba por 0.

$$\implies \exists \lim_{t\to\infty} x(t) \leq 0$$

Supongamos que $\exists A > 0 : \lim_{x(t)} = -A$.

Como $x(t)$ no decrece,

$$\implies x(t) \leq -A \implies x'(t) = \sqrt{-x(t)} \geq \sqrt{A} \implies x(t) \geq x(c) + \sqrt{A}t \xrightarrow{t\to\infty} \infty \longrightarrow\!\longleftarrow$$

$$\implies \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

2.

**1.3** $x' = f(t,x) \wedge x$ es solución.

$$f \text{ no depende de } t \iff \forall b \in \mathbb{R} : y(t) := x(t+b) \text{ es sol.}$$

***Demostración.*** ($\implies$) Supongamos que $f$ no depende de $t$.

$$\implies x' = f(x) \implies y(t) = x(t+b) \implies y'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t+b)) = x'(t+b)$$

$$\implies y'(t) = f(x(t+b)) = f(y(t))$$

($\impliedby$) Supongamos que $\forall b \in \mathbb{R} : y(t) := x(t+b)$ es sol.

$$x' = f(t, x(t)) \implies y(t) = x(t+b) \text{ también es solución}$$

$$x'(t+b) = f(t, x(t+b)) \implies x'(t) = f(t-b, x(t))$$

$$\implies \forall b \in \mathbb{R} : f(t-b, x(t)) = f(t, x(t))$$

En particular, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \implies \forall b \in \mathbb{R} : \forall x_0 \in \mathbb{R} : f(-b, x_0) = f(0, x_0)$

$$\implies f \text{ no depende de su primera variable}$$

■

## 4.3 Hoja 3

**1.3**

$$\begin{cases} x' = t + x \\ x(0) = 1 \end{cases} \iff x(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s =: T[x](t)$$

Definimos la sucesión de funciones $x_{n+1}(t) = T[x_n](t) \wedge x_1(t) = x(0) = 1$ y tenemos:

$$x_2(t) = T[x_1](t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \int_0^t 1\,\mathrm{d}s = 1 + \frac{t^2}{2} + t$$

$$x_3(t) = T[x_2](t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \int_0^t \left(1 + \frac{s^2}{2} + s\right)\mathrm{d}s = 1 + \frac{t^2}{2} + t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$x_n(t) = 1 + t + 2\sum_{j=2}^{n-1} \frac{t^j}{j!} + \frac{t^n}{n!} = -1 - t + 2\sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} - \frac{t^n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} -1 - t + 2e^t + 0$$

$$\implies \boxed{x(t) = -1 - t + 2e^t}$$

**2.1**

1. $f_n(x) = x^{1/n}$ en $x \in [0,1]$
$$f_n(0) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0 \quad \wedge \quad x_0 \in (0,1] \implies \lim_{n\to\infty} x_0^{1/n} = 1$$
$$\implies f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \text{ puntualmente en } [0,1] \text{ con } f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0,1] \end{cases}$$
¿Converge uniformemente? Sabemos $\forall n : f_n$ cont. $\wedge$ $f_n \to f$ unif. $\implies f$ cont.
Como $f$ no es continua $\implies f_n$ no converge uniformemente.

2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ en $x \in [0, \infty)$
$$f_n(0) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0 \quad \wedge \quad \forall x_0 > 0 : \lim_{n\to\infty} \frac{nx_0}{1+nx_0} = 0$$

**Observación 4.2.**

1. $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ puntualmente en $\Omega \iff \forall x \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
$$\iff \forall x \in \Omega : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(x) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0(x) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

2. $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ uniformemente en $\Omega \iff \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \forall x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**2.2** Estudiamos la sucesión de funciones en $f_n(x) = n^2 x e^{-nx^2}$ en $x \in [0,1]$

1. Convergencia puntual: $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(0) \implies \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$
$$x_0 \in (0,1] \implies \lim_{n\to\infty} n^2 x_0 e^{-nx_0^2} = 0 \implies f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 = f \text{ puntualmente en } [0,1]$$

2. Convergencia uniforme: $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} n^2 x e^{-nx^2}$
$$f_n'(x) = n^2 e^{-nx^2} - 2n^3 x^2 e^{-nx^2} = n^2 e^{-nx^2}(1 - 2nx^2) \implies f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2n}} \in [0,1] \implies \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{n^{5/2}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$
Por tanto, $f$ no converge uniformemente.

3. **Nota:** Cuando falla la convergencia uniforme, el límite de la integral no es necesariamente igual a la integral del límite.
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \infty \neq 0 = \lim_{n\to\infty} 0 = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Observación 4.3.**

1. $f$ es Lipschitz en $\Omega \iff \exists L \geq 0 : \forall x, y \in \Omega : |f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$

2. $f$ es localmente Lipschitz en $\Omega \iff \forall K \subset \Omega$ compacto : $f$ es Lipschitz en $K$