
PROBABILIDAD I

Segundo del Grado en Matemáticas

Hugo Marquerie

Profesor: Pablo Fernández Gallardo

Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid

Segundo cuatrimestre 2023 - 2024

1 de Febrero, 2024

Índice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Sucesos y probabilidades | 1 |
| 1.1 | Formalizando | 1 |
| 1.2 | Probabilidad condicionada y total, independencia y Bayes | 2 |
| 1.2.1 | Probabilidad total | 4 |
| 1.2.2 | Continuidad de la probabilidad: detalle técnico | 6 |
| 2 | Variables aleatorias discretas | 7 |
| 2.1 | Funciones transformadoras de variables aleatorias (discretas) | 9 |
| 2.2 | Resúmenes: esperanza, varianza, momentos | 9 |
| 2.2.1 | Esperanza condicionada | 14 |
| 2.3 | Varias variables aleatorias | 15 |
| 2.3.1 | Detalle sobre independencia | 19 |
| 2.4 | Funciones generatrices de probabilidad | 20 |
| 2.4.1 | Series de potencias | 20 |
| 2.4.2 | Funciones generatrices | 21 |
| 3 | Variables aleatorias continuas | 24 |
| 3.1 | Funciones / Transformaciones de v.a.c. | 26 |
| 3.2 | Esperanzas de v.a.c. | 28 |
| 3.2.1 | Calculando con la normal | 30 |
| 3.3 | Modelos multidimensionales (vectores aleatorios) | 31 |
| 3.3.1 | Normal multidimensional | 32 |
| 3.3.2 | Marginales e independencia | 32 |
| 3.4 | Condicionando | 33 |
| 3.5 | Transformaciones / cambio de variables | 34 |
| 3.6 | Convolución | 36 |
| 3.7 | Fuera de menú | 38 |
| 4 | Convergencia de variables aleatorias | 39 |
| 4.1 | Medias y varianzas de las sumas y las medias | 39 |
| 4.2 | Convergencia cuadrática | 40 |
| 4.3 | Convergencia en probabilidad (ley débil) | 41 |
| 4.4 | Cálculo de la distribución de la suma y el promedio | 42 |
| 4.5 | Convergencia en distribución | 43 |
| 4.5.1 | Teorema del límite central / central del límite | 43 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.5.2 | Variaciones del TCL | 45 |
| 4.6 | Funciones generatrices de momentos | 45 |
| 4.6.1 | ¿Por qué ese nombre? | 46 |
| 4.6.2 | La gracia | 47 |
| 4.6.3 | El problema de los momentos | 47 |
| 4.7 | Función característica | 48 |
| 4.7.1 | Función característica para distribución de Cauchy: Variable compleja | 50 |
| 5 | Ejercicios | 52 |
| 5.1 | Hoja 1 | 52 |
| 5.2 | Hoja 2 | 52 |
| 5.3 | Hoja 3 | 53 |
| 5.4 | Hoja 4 | 54 |
| 5.5 | Hoja 5 | 56 |

1 Sucesos y probabilidades

1.1 Formalizando

Definición 1.1 (Espacio muestral). En un experimento aleatorio, el espacio muestral es el conjunto (no vacío) de sus posibles resultados y se denota por Ω . Puede ser:

1. Finito: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$
2. Infinito numerable: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$
3. Infinito no numerable, ej.: $\Omega = [0, 1) \vee \Omega = \mathcal{P}([0, 1))$

Definición 1.2 (Espacio de sucesos por Kolmogórov). Dado el espacio muestral Ω de un experimento aleatorio, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es su espacio de sucesos

$$\iff (\mathcal{F} \neq \emptyset) \wedge (A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}) \wedge \left(A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F} \right)$$

Observación 1.1. De la definición se deduce:

$$\bullet \phi \in \mathcal{F} \wedge \Omega \in \mathcal{F} \quad \bullet A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{F} \quad \bullet \forall A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$$

Definición 1.3 (Función o medida de probabilidad). Dado espacio muestral (Ω) y de sucesos (\mathcal{F}) de un experimento aleatorio, la aplicación $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad

$$\iff (P(\Omega) = 1) \wedge \left[P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \iff A_i \cap A_j = \emptyset \text{ cuando } i \neq j \right]$$

Proposición 1.1. De la definición se deduce:

$$\begin{aligned} 1. P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) &= \sum_{j=1}^n P(A_j) & 2. P(A^C) &= 1 - P(A) & 3. P(\emptyset) &= 0 \\ 4. P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) & 5. A \subseteq B &\implies P(A) \leq P(B) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1. En un experimento aleatorio con espacio muestral finito, tomamos

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\} \wedge \mathcal{F} = \mathcal{P} \rightarrow 2^N$. Asignamos $P(\{\omega_j\}) = p_j \wedge j = 1, \dots, N$ tales que $p_j \geq 0 \wedge \sum_{j=1}^N p_j = 1$. Entonces, $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$

Caso particular: $\forall j \in \mathbb{N}_N : p_j = \frac{1}{N} \implies \forall A \in \mathcal{F} : P(A) = \frac{|A|}{N} = \frac{\text{“Casos favorables”}}{\text{“Total de casos”}}$

Ejemplos varios:

1. (Muy tonto) $\Omega \neq \phi$, tomas $A \subset \Omega : A \neq \phi, \Omega$.
Dato $p \in (0, 1)$. $\mathcal{F} = \{\phi, A, A^c, \Omega\}$ con $P(A) = p$.
2. (Bastante general) $(\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\} \implies |\Omega| = N) \wedge (\mathcal{F} = P(\Omega) \rightarrow |\mathcal{F}| = 2^N)$.
Dato: $p_1, \dots, p_N \geq 0 \implies \sum_{j=1}^N p_j = 1$. Asignamos $\forall j \in \mathbb{N}_N : p_j := P(\{\omega_j\})$.
Definimos $\forall A \subset \Omega : P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.
3. Lanzas n veces una moneda. Dato: $p \in (0, 1)$.
 $\implies \Omega = \{111 \dots 1, \dots, 000 \dots 0\} \wedge |\Omega| = 2^N \wedge$ escogemos $\mathcal{F} = P(\Omega)$
 $\implies \forall \omega \in \Omega : P(\omega) = p^{\#\text{unos de } \omega} (1-p)^{\#\text{ceros de } \omega}$

Comprobamos:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \#\text{0s de } \omega = k}} P(\omega) \right) = \sum_{k=0}^n p^k (1-p)^{n-k} (|\{\omega \in \Omega : \#\text{1s de } \omega = k\}|) \\ &= \sum_{k=0}^n p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{k} = (p + 1 - p)^n = 1 \end{aligned}$$

4. Lanzamos moneda hasta que sale una cara. Dato $p \in (0, 1)$.
 $\implies \Omega = \{C, XC, XXC, \dots\} \wedge$ escogemos $\mathcal{F} = P(\Omega)$
 $P(C) =: p \implies P(XC) = p(1-p) \wedge P(XXC) = p(1-p)^2 \wedge \dots$

Comprobamos: $\sum_{j=1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$

1.2 Probabilidad condicionada y total, independencia y Bayes

Tienes (Ω, \mathcal{F}, P) y un suceso $A \in \mathcal{F} \rightarrow P(A)$. Llega “nueva información”: ha ocurrido el suceso $B \in \mathcal{F} \rightarrow$ ¿Debo reasignar la probabilidad de A ?

Ejemplo 1.2 (Dependencia). Lanzas 10 veces una moneda (regular).

$$A = \{\text{salen 6 caras}\} \implies P(A) = \frac{\binom{10}{6}}{2^{10}} \approx 20.51\%$$

$$B = \{\text{sale C en 1}^{\text{o}}\} \implies P(A) \text{ sube a } \frac{\binom{9}{5}}{2^9}$$

Definición 1.4. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y los sucesos $A, B \in \mathcal{F} : P(B) > 0$, $P(A|B)$ es la probabilidad de A condicionada a B

$$\Longleftrightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observación 1.2. En general, $P(A|B) \neq P(B|A)$

Proposición 1.2 (Cálculo de $P(A|B)$ para cada $A \in \mathcal{F}$). Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $B \in \mathcal{F}$ un suceso con $P(B) > 0$

$\implies (\Omega, \mathcal{F}, Q_B)$, con $Q_B: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] : Q_B(A) = P(A|B)$, es un espacio de probabilidad

Demostración. Basta ver que Q_B es una función de probabilidad.

$$\left(Q_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \in [0, 1] \right) \wedge \left(Q_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \right)$$

Sean $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos.

$$\begin{aligned} \implies Q_B \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) &= P \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \mid B \right) = \frac{P \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap B \right)}{P(B)} \\ &= \frac{1}{P(B)} P \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B) \right) = \frac{1}{P(B)} \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_B(A_j) \end{aligned}$$

■

Definición 1.5 (Independencia). Sean $A, B \in \mathcal{F}$ dos sucesos con $P(A), P(B) \geq 0$ son independientes

$$\Longleftrightarrow P(A|B) = P(A) \wedge P(B|A) = P(B) \text{ (para entender)}$$

$$\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ (la adecuada)}$$

• A, B disjuntos \implies no independientes.

• $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{F}$ independientes $\Longleftrightarrow \forall J \subset \mathbb{N}_N : P \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$

$$\Longleftrightarrow P \left(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_N} \right) = \prod_{i=1}^N P \left(\overline{A_i} \right) \text{ donde } \overline{A_i} = A_i^c, (A_i)^c$$

Ejercicio 1.2.1. Encontrar un espacio de probabilidad en el que haya un conjunto de sucesos independientes dos a dos pero no completamente independientes.

$$\text{SOL: } \Omega = \{1, 2, 3, 4\} \wedge A = \{1, 2\} \wedge B = \{2, 3\} \wedge C = \{1, 3\}$$

Proposición 1.3 (Regla de Bayes). Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $A, B \in \mathcal{F}$ sucesos con $P(A), P(B) > 0$

$$\implies P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

Demostración.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \wedge P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\implies P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) \implies P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

■

07/02/2024

1.2.1 Probabilidad total

Proposición 1.4. Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $\{B_1, B_2, \dots\}$ una partición de $\Omega : (\forall i, j : i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset) \wedge \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \Omega \right)$

$$\implies \forall A \in \mathcal{F} : P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap B_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) \cdot P(B_j)$$

$$\implies \forall A \in \mathcal{F} : \boxed{P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

■

Ejemplo 1.3. Sean $U_1 = \{10b, 3n\} \wedge U_2 = \{5b, 5n\} \wedge U_3 = \{2b, 6n\}$ tres urnas con bolas blancas (b) y negras (n). Procedimiento:

1. Sorteamos una urna $P(U_1) = \frac{1}{4} \wedge P(U_2) = \frac{1}{4} \wedge P(U_3) = \frac{1}{2}$
2. Sacamos bola de la urna seleccionada.

¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

$$P(b) = P(b|U_1)P(U_1) + P(b|U_2)P(U_2) + P(b|U_3)P(U_3)$$

Ejemplo 1.4 (Peso de la evidencia). Sean $U_1 = \{80\% b, 20\% n\} \wedge U_2 = \{20\% b, 80\% n\}$ dos urnas con bolas blancas (b) y negras (n). Procedimiento:

1. Sorteamos la urna con $1/2$ y $1/2$ de probabilidad.
2. Sacamos 10 bolas (con reemplazamiento).

Observamos la evidencia: $bb \dots nb$ ¿qué urna se usó?

$$P(U_1|5b5n) = P(5b5n|U_1) \frac{P(U_1)}{P(5b5n)} = \frac{P(5b5n|U_1)P(U_1)}{P(5b5n|U_1)P(U_1) + P(5b5n|U_2)P(U_2)}$$

$$\implies P(5b5n|U_1) = \binom{10}{5} 0.8^5 0.2^5 = P(5b5n|U_2) \implies P(U_1|5b5n) = \frac{1}{2}$$

Este es el resultado que esperábamos, prestemos atención a otro caso más contraintuitivo.

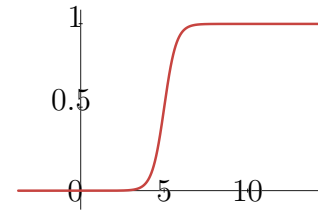
$$P(U_1|6b4n) = \frac{P(6b4n|U_1)P(U_1)}{P(6b4n|U_1)P(U_1) + P(6b4n|U_2)P(U_2)}$$

$$= \frac{\binom{10}{6} 0.8^6 0.2^4 \cdot 1/2}{\binom{10}{6} 0.8^6 0.2^4 \cdot 1/2 + \binom{10}{6} 0.8^4 0.2^6 \cdot 1/2} \approx 90\%$$

Si dibujamos la gráfica de la función

$$f(x) = P(U_1|xb(10-x)n)$$

podemos ver que el cambio es muy brusco. Es decir, una pequeña diferencia en la evidencia puede cambiar mucho la probabilidad de que se haya usado una urna u otra.

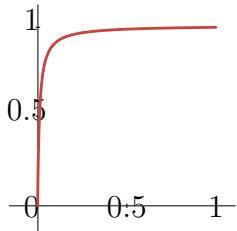


Ejemplo 1.5 (Falsos positivos/negativos). Hay una enfermedad ($E \vee S$) y hay una prueba para detectar ($+ \vee -$). Datos: $P(+|E) = 95\% \wedge P(-|S) = 99\%$.

Te haces la prueba y sale +:

$$P(E|+) = P(+|E) \frac{P(E)}{P(+)} = \frac{P(+|E)P(E)}{P(+|E)P(E) + P(+|S)P(S)}$$

Conozco todas estas probabilidades excepto $p := P(E) \implies P(S) = 1 - p$.



Si definimos $f(p) := P(E|+)$

$$\implies \{f(0.5) = 98.95\% \wedge f(1/100) = 48.97\% \wedge f(1/1000) = 8.68\%\}$$

Es decir, si la incidencia es muy baja, no tiene sentido hacer pruebas masivamente porque la mayoría de positivos serán falsos.

08/02/2024

Ejemplo 1.6 (Sobre independencia). $(\Omega, \mathcal{F}, P) \wedge A_1, \dots, A_n$ sucesos independientes tal

que $\forall j \in \mathbb{N}_n : P(A_j) = \frac{1}{n}$. ¿Qué sabemos sobre $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right)$?

$$\text{En general, sabemos que } \frac{1}{n} \leq P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n P(A_j) \leq 1$$

$$n = 2: P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/4$$

$$n = 3: P(A \cup B \cup C) = \binom{3}{1} \frac{1}{3} - \binom{3}{2} \frac{1}{3^2} + \binom{3}{3} \frac{1}{3^3} = 19/27$$

$$\begin{aligned}
n \text{ general: } P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) &= \sum_{j=1}^n P(A_j) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \cdots \text{ (Inclusión exclusión)} \\
\Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) &= \binom{n}{1} \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \cdots = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} (-1)^{j+1} \\
\Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) &= 1 - \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{-1}{n}\right)^j = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

1.2.2 Continuidad de la probabilidad: detalle técnico

Proposición 1.5. Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidades y $A_1, \dots : A_1 \subset A_2 \subset \dots$ una sucesión creciente de conjuntos

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Demostración. Se trata de describir $\bigcup_{j=1}^n A_j$ como la unión de conjuntos disjuntos.

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) &= P\left(A_1 \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} (A_{j+1} \setminus A_j)\right) = P(A_1) + \sum_{j=1}^{n-1} (P(A_{j+1}) - P(A_j)) = P(A_n) \\
\Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= P(A_1) + \sum_{j=1}^{\infty} (P(A_{j+1}) - P(A_j)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)
\end{aligned}$$

■

Proposición 1.6. Si la sucesión A_1, \dots es decreciente $\Rightarrow P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$

Teorema 1.1 (Continuidad de la probabilidad). En el espacio de probabilidades (Ω, \mathcal{F}, P) , sea A_1, A_2, \dots una sucesión : $\forall j \in \mathbb{N} : A_j \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right)$$

Demostración. Definimos $B_i := \bigcup_{j=1}^i A_j \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ (B_i) es creciente.

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right)$$

■

2 Variables aleatorias discretas

Definición 2.1. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidades, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria discreta* (v.a.d.)

$$\iff (1) X(\Omega) \text{ es numerable}^* \wedge (2) \forall x \in \mathbb{R} : \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

En realidad, solo interesa (2) cuando $x = x_j$

Definición 2.2. Sea X una v.a.d. en (Ω, \mathcal{F}, P) , $p_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ es su función de masa

$$\iff x \mapsto p_X(x) = P(X = x) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

Vemos que

$$\sum_{j \geq 1} p_X(x_j) = \sum_{j \geq 1} P(X = x_j) = \sum_{j \geq 1} P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_j\}) = P\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) = P(\Omega) = 1$$

Lo relevante es el conjunto de posibles valores de X ($\{x_1, x_2, \dots\}$) numerable y el conjunto (también numerable) de probabilidades $\{p_1, p_2, \dots\}$ donde

$$\left(\forall j \geq 1 : p_j = P(x = x_j) \wedge p_j \geq 0\right) \wedge \sum_{j \geq 1} p_j = 1$$

Teorema 2.1. Sea $S = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$ un conjunto y $(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_j)$ una lista tal que

$$\forall i \leq j : \Pi_i \geq 0 \wedge \sum_{j \geq 1} \Pi_j = 1$$

$$\implies \exists (\Omega, \mathcal{F}, P) \wedge X \text{ v.a.d.} : (\forall x \notin S : p_X(x) = 0) \wedge p_X(x_i) = \Pi_i$$

Demostración. Fijamos $\Omega = S$ y $\mathcal{F} = \mathcal{P}(S)$.

$$A \in \mathcal{F} \implies P(A) = \sum_{j: x_j \in A} \Pi_j \wedge X(x_j) = x_j$$

■

Ejemplo 2.1 (Diferentes modelos de distribución de probabilidad).

1. X sigue una distribución **uniforme** en $\{1, \dots, N\}$, $N \geq 2$ ($X \sim \text{UNIF}(N)$).

$$\iff S = \{1, \dots, N\} \wedge \Pi_j = 1/N, \dots, 1/N$$

Se usa para modelizar un lanzamiento de un dado regular de N caras.

2. X sigue una distribución de **Bernoulli** con parámetro p ($X \sim \text{BER}(p)$)

$$\iff \begin{cases} p_X(x) = 0 \iff x \neq 0, 1 \\ p_X(1) = p \wedge p_X(0) = 1 - p \end{cases} \iff \begin{cases} P(X = 1) = p \\ P(X = 0) = 1 - p \end{cases}$$

donde 1 es éxito y 0 fracaso. Se usa para modelizar el resultado de un experimento con dos posibles resultados, i.e. una moneda no necesariamente regular.

13/02/2024

3. X sigue una distribución **binomial** de parámetros $n \geq 1 \wedge p \in (0, 1)$ ($X \sim \text{BIN}(n, p)$)

$$\iff S = \{0, 1, \dots, n\} \wedge \forall j \in \{0, 1, \dots, n\} : P(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j}$$

Sirve para modelizar el número de caras que salen al lanzar n veces una moneda de probabilidad p .

Podemos estimar cual es la probabilidad de que salgan $n/2$ caras con $p = 1/2$ mediante la fórmula de Stirling:

$$\begin{aligned} n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} &\implies \binom{n}{n/2} \sim \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{(n/2)^{(n/2)} e^{-(n/2)} \sqrt{2\pi(n/2)} (n/2)^{(n/2)} e^{-(n/2)} \sqrt{2\pi(n/2)}} \\ &\implies \frac{n^n \sqrt{n}}{(n/2)^{(n/2)} \sqrt{2\pi(n/2)} (n/2)^{(n/2)} \sqrt{(n/2)}} = \frac{n^n \sqrt{n}}{(n/2)^n \sqrt{2\pi(n/2)}} = \frac{n^n \sqrt{2}}{(n/2)^n \sqrt{\pi n}} = 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \\ &\implies P\left(X = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2} \frac{1}{2^n} \approx 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{1}{2^n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \end{aligned}$$

4. X sigue una distribución **geométrica** de parámetro $p \in (0, 1)$ ($X \sim \text{GEOM}(p)$).

$$\iff S = \{1, 2, \dots\} \wedge \forall j \geq 1 : P(X = j) = p(1 - p)^{j-1}$$

Sirve para modelizar el número de lanzamientos hasta que sale un resultado C en cuestión con $P(X = C) = p$.

Observación 2.1. Cuidado porque existen variables aleatorias que también se dicen de distribución geométrica en las que $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Se habla de cuantas veces has obtenido el resultado complementario a C antes de que halla salido C .

5. X sigue una distribución de **Poisson** con parámetro $\lambda > 0$ ($X \sim \text{POISSON}(\lambda)$)

$$\iff S = \{0, 1, \dots\} \wedge \forall j \geq 0 : P(X = j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}$$

Se usa para modelizar la frecuencia de eventos determinados durante un intervalo de tiempo fijado a partir de la frecuencia media de aparición de dichos eventos.

Proposición 2.1. Sea $X \sim \text{BIN}(n, p)$ una v.a.d.

\implies cuando n es grande, $\text{BIN}(n, p) \sim \text{POISSON}(np)$

Demostración. Fijo $\lambda > 0$ \wedge $p = \frac{\lambda}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = e^{-k} \frac{\lambda^k}{k!}$$

■

Ejemplo 2.2 (¿Hay más ejemplos?).

- Binomial negativa
- Hipergeométrica
- Sea cualquier serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

\implies se puede definir la variable aleatoria $X : S = \{1, 2, \dots\} \wedge P(x = k) = \frac{a_k}{s}$

14/02/2024

2.1 Funciones transformadoras de variables aleatorias (discretas)

Sea X una v.a.d. y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, definimos $Y := g(X)$.

$\implies \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = g(X(\omega)) = y\} \in \mathcal{F} \implies Y$ es una v.a.d

Por otro lado,

$$\forall y \in \mathbb{R} : P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X \in g^{-1}(y)) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} p_X(x)$$

Ejemplo 2.3 ($Y = x^2$).

$$p_Y(y) = P(Y = y) = P(X^2 = y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ P(X = 0) = p_X(0), & y = 0 \\ P(X = \pm\sqrt{y}) = p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y}), & y > 0 \end{cases}$$

2.2 Resúmenes: esperanza, varianza, momentos

Definición 2.3 (Esperanza). Sea X una v.a.d. en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y con función de masa p_X , $E(X)$ es la esperanza de X (también llamada media o *expectatio*)

$$\iff E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x) = \sum_{j \geq 1} x_j \cdot p_X(x_j)$$

Pero ojo, solo si la serie es absolutamente convergente.

- Si x_1, \dots, x_N finito, la suma obviamente converge.
- Si los x_j son positivos, la serie converge si y solo si es acotada. Si no lo es diverge a ∞ .

Ejemplo 2.4 (Cálculo de la esperanza).

- $x_1, \dots, x_N \wedge p_1, \dots, p_N \implies E(X) = \sum_{j=1}^N x_j \cdot p_j$
- $X \sim \text{BER}(p) \implies E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) \implies \boxed{E(X) = p}$
- $X \sim \text{UNIF}(1, \dots, N) \implies E(X) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N n \implies \boxed{E(X) = \frac{N+1}{2}}$
- $X \sim \text{BIN}(n, p) \implies E(X) = \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \implies \boxed{E(X) = np}$

Se obtiene derivando el binomio de Newton $(1+x)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j$

$$\implies \frac{d}{dx}(1+x)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j \cdot x^{j-1} \implies xn(1+x)^{n-1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j x^j$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x = \frac{p}{1-p} \implies \frac{p}{1-p} n \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^{n-1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j \left(\frac{p}{1-p}\right)^j \\ \implies \frac{p}{1-p} n \left(\frac{1}{1-p}\right)^{n-1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j \left(\frac{p}{1-p}\right)^j \\ \implies np = (1-p)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j \left(\frac{p}{1-p}\right)^j &= \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = E(X) \end{aligned}$$

■

- $X \sim \text{GEOM}(p) \implies E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} \implies \boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$

$$\forall x : |x| < 1 : \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \implies \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \implies E(X) = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

■

- $X \sim \text{POISSON}(\lambda) \implies E(X) = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \implies \boxed{E(X) = \lambda}$

$$\implies E(X) = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda$$

■

Ejemplo 2.5. Sea X una v.a.d. con $\forall k \geq 0 : P(X = k) = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2}$

$$\implies E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ que diverge a } \infty$$

Ejemplo 2.6. Sea X una v.a.d. que toma valores en $\{(-1)^{k+1}k : k \geq 1\} = \{1, -2, 3, -4, \dots\}$

$$P(X = (-1)^{k+1}k) = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2} \implies E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ que sabemos que tiende a } \ln 2$$

Sin embargo, la serie no converge absolutamente, por tanto, mediante argumentos de reordenación, se puede argumentar que $E(X)$ toma cualquier valor real. Entonces $E(X)$ no tiene sentido.

Teorema 2.2. Sea X una v.a.d. que toma los valores x_j con probabilidades p_j para $j \geq 1$. Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

$$\implies E(g(X)) = \sum_{j \geq 1} g(x_j) p_j$$

Demostración. Sabemos que $g(X)$ es una v.a.d. que toma valores en $\{g(x_j) : j \geq 1\}$, donde $|\{g(x_j)\}| \leq |\{x_j\}|$ porque g puede no ser inyectiva.

$$\text{Como } P(g(X) = y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x)$$

$$\implies E(g(X)) = \sum_{y \in g(X(\Omega))} y \cdot P(g(X) = y) = \sum_{y \in g(X(\Omega))} y \left(\sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x) \right)$$

Como $\forall y \in g(X(\Omega)) : \exists |g^{-1}(y)|$ cantidad de $i_s \geq 1 : g(x_i) = y$ se tiene

$$E(g(X)) = \sum_{j \geq 1} g(x_j) p_j$$

■

Observación 2.2.

1. Si X es tal que $P(X = a) = 1 \implies E(X) = a$

2. $X \sim \text{UNIF}(\{-1, 0, 1\}) \wedge Y = X^2 \implies E(X) = 0 \wedge E(Y) = 2/3$

3. $E(aX + b) = aE(X) + b$ porque

$$\sum_{j \geq 1} (ax_j + b)p_j = a \sum_{j \geq 1} x_j p_j + b \sum_{j \geq 1} p_j = aE(X) + b$$

4. En general $E(g(X)) \neq g(E(X))$

(Motivo de excomuni3n)

Ejemplo 2.7 ($X \sim \text{POISSON}(\lambda) \implies E(X) = \lambda$). Si $Y = g(X) = e^X$

$$\implies E(Y) = E(e^Y) = \sum_{j=0}^{\infty} e^j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(e\lambda)^j}{j!} = e^{-\lambda} e^{e\lambda} = e^{\lambda(e-1)} \neq e^\lambda$$

21/02/2024

Definición 2.4 (Varianza). Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y X una v.a.d. con función de masa p_X , $V(X)$ es la varianza de X

$$\iff V(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Si X toma valores x_1, x_2, \dots con probabilidades p_1, p_2, \dots y denominamos $\mu := E(X)$

$$\implies V(X) = \sum_{j \geq 1} (x_j - \mu)^2 \cdot p_j = \sum_{j \geq 1} (x_j - \mu)^2 \cdot p_j = \sum_{j \geq 1} (x_j^2 - 2x_j\mu + \mu^2) \cdot p_j$$

$$\implies V(X) = \sum_{j \geq 1} x_j^2 p_j - 2 \sum_{j \geq 1} x_j \mu p_j + \sum_{j \geq 1} \mu^2 p_j = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$\implies \boxed{V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2}$$

Observación 2.3.

1. $V(X)$ es medida de dispersión de X alrededor de $E(X)$.

2. $V(X) \geq 0$

3. $V(X) = 0 \implies P(X = E(X)) = 1$

4. $\boxed{V(aX + b)} = E[(aX + b - E(aX + b))^2] = E[(aX - aE(X))^2] = \boxed{a^2 V(X)}$

5. Las unidades de $V(X)$ son las de X^2

\implies definimos la desviación típica de X como $\boxed{\sigma(X) := \sqrt{V(X)}}$

6. ¿Por qué no $E(|X - E(X)|)$?

Porque el valor absoluto no es diferenciable y no se puede trabajar con él.

Ejemplo 2.8.

1. $X \sim \text{BER}(p) \implies E(X) = p \wedge \boxed{V(X)} = p - p^2 = \boxed{p(1 - p)}$

2. $X \sim \text{UNIF}(\{1, \dots, N\}) \implies E(X) = \frac{N+1}{2} \wedge \boxed{V(X) = \frac{N^2 - 1}{12}}$

$$\implies V(X) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N j^2 = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$$

$$3. X \sim \text{BIN}(n, p) \implies E(X) = np \wedge \boxed{V(X) = np(1-p)}$$

Demostración. ■

$$4. X \sim \text{GEOM}(p) \implies E(X) = \frac{1}{p} \wedge \boxed{V(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Demostración. ■

$$5. X \sim \text{POISSON}(\lambda) \implies E(X) = \lambda \wedge \boxed{V(X) = \lambda}$$

Demostración.

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$
■

Definición 2.5 (Momentos de X). Sea X una v.a.d. con función de masa p_X , μ_k es el **k -ésimo momento** de $X \iff \mu_k = E[(X - E(X))^k]$

Observación 2.4. Algunos momentos tienen nombre propio:

1. $\mu_1 = 0$ 2. $\mu_2 = V(X)$ 3. μ_3 es la **asimetría** de X 4. μ_4 es la **curtosis** de X

Teorema 2.3 (Desigualdad de Markov). Sea X una v.a.d. : $P(X < 0) = 0 \wedge E(X) < \infty$
 $\implies \forall t > 0 : P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$

Demostración. Notación: En (Ω, \mathcal{F}, P) , $A \subset \mathcal{F}$ y $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$

Fijamos $t > 0$ y definimos $Y_t(\omega) = t \cdot \mathbb{1}_{\{x \geq t\}}(\omega) = \begin{cases} t & \text{con probabilidad } P(x \geq t) \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - P(x \geq t) \end{cases}$

$$\implies \forall \omega : Y_t(\omega) \leq X(\omega) \implies E(Y_t) = t \cdot P(X \geq t) \leq E(X)$$

Así que $\forall t > 0 : P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$ ■

Teorema 2.4 (Desigualdad de Chebyshev). Sea X una v.a.d. : $E(X), V(X) < \infty$.

$$\implies \forall \lambda > 0 : P(|X - E(X)| \geq \lambda \cdot \sigma(X)) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\iff \forall \alpha > 0 : \boxed{P(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}}$$

Demostración. Definimos $Y = |X - E(X)|^2$ y aplicamos la desigualdad de Markov.

$$\implies \forall t > 0 : P(Y \geq t) \leq \frac{E(Y)}{t} \implies \forall t > 0 : P(|X - E(X)|^2 \geq t) \leq \frac{E(Y)}{t}$$

Como $E(Y) = E(|X - E(X)|^2) = V(X)$ por la def de varianza,

$$\implies \forall t > 0 : P(|X - E(X)| \geq \sqrt{t}) \leq \frac{V(X)}{t}$$

Definimos $\alpha := \sqrt{t} \implies \forall \alpha > 0 : P(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$

y para la desigualdad equivalente definimos $\lambda := \frac{\alpha}{\sigma(X)}$

$$\implies \forall \lambda > 0 : P(|X - E(X)| \geq \lambda \cdot \sigma(X)) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

■

26/02/2024

2.2.1 Esperanza condicionada

Definición 2.6 (Esperanza condicionada). Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad $B \in \mathcal{F}$ un suceso tal que $P(B) > 0$ y X una v.a.d. con esperanza $E(X)$, $E(X|B)$ es la **esperanza de X condicionada a B**

$$\iff E(X|B) := \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x|B) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \frac{P((X = x) \wedge B)}{P(B)}$$

(Siempre que la serie sea absolutamente convergente).

Teorema 2.5 (Esperanza total). En (Ω, \mathcal{F}, P) , sea X una v.a.d. y $\{B_1, B_2, \dots\}$ una partición de Ω

$$\implies E(X) = \sum_{i \geq 1} E(X|B_i) \cdot P(B_i)$$

(Siempre que la serie sea absolutamente convergente).

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} E(X|B_i) \cdot P(B_i) &= \sum_{i \geq 1} \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x|B_i) \cdot P(B_i) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \sum_{i \geq 1} \frac{P((X = x) \wedge B_i)}{P(B_i)} \cdot P(B_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x) \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.9. Lanzamos una moneda con probabilidad p de cara y $1 - p$ de cruz y definimos X como la longitud de la racha inicial, i.e. el número de caras/cruces consecutivas.

$$\begin{aligned} \implies E(X) &= E(X|C) \cdot p + E(X|\times) \cdot (1 - p) \\ \implies E(X) &= \left(\sum_{j \geq 1} j \cdot P(X = j|C) \right) p + \left(\sum_{j \geq 1} j \cdot P(X = j|\times) \right) (1 - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E(X) &= p \sum_{k=1}^{\infty} k p^{k-1} (1-p) + (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} p \\ \Rightarrow E(X) &= \frac{1}{1-p} \cdot p + \frac{1}{p} \cdot (1-p) = \frac{1}{p(1-p)} - 2\end{aligned}$$

También se puede abordar el problema pensando en las variables geométricas:

$$\begin{aligned}E(X) &= E(X|C) \cdot p + E(X|\times) \cdot (1-p) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} = \frac{p^2 + (1-p)^2}{p(1-p)} \\ \Rightarrow E(X) &= \frac{p^2 + 1 - 2p + p^2}{p(1-p)} = \frac{2p(p-1) + 1}{p(1-p)} = \frac{1}{p(1-p)} - 2\end{aligned}$$

27/02/2024

2.3 Varias variables aleatorias

En (Ω, \mathcal{F}, P) , sea $\mathcal{X} = X_1, X_2, \dots, X_n$ una colección de variables aleatorias discretas.

En el caso $n = 2$, tenemos X e Y variables aleatorias discretas, se genera una tabla con las probabilidades conjuntas:

$$p_{X,Y}(x, y) := P(\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y) = P(X = x \wedge Y = y)$$

Definición 2.7 (Función de masa conjunta). En (Ω, \mathcal{F}, P) , sean X e Y v.a.d., $p_{X,Y}$ es su función de masa conjunta

$$\iff p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1] \wedge \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \wedge Y = y)$$

tal que $\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} p_{X,Y}(x, y) = 1$ y $\forall (x, y) \notin X(\Omega) \times Y(\Omega) : p_{X,Y}(x, y) = 0$

Ya tenemos X e Y en (Ω, \mathcal{F}, P) con $P_{X,Y}$

1. ¿Qué sabemos de X e Y por separado?
2. Esperanzas: nos interesa calcular $E(X)$, $E(Y)$, $E(X + Y)$, $E(X \cdot Y)$
3. Independencia

Definición 2.8 (Funciones marginales). En (Ω, \mathcal{F}, P) , sean X e Y v.a.d., p_X, p_Y son sus funciones de masa marginales

$$\iff p_X(x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} p_{X,Y}(x, y) \quad \wedge \quad p_Y(y) = \sum_{x \in X(\Omega)} p_{X,Y}(x, y)$$

Teorema 2.6. En (Ω, \mathcal{F}, P) , sean X e Y v.a.d. y sea $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función

$$\implies E(g(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y)$$

Si converge absolutamente.

Demostración. Si consideramos la variable aleatoria Z que toma valores en $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ con función de masa $p_Z = p_{X,Y}$, entonces $E(g(X, Y)) = E(g(Z))$. Como $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ es numerable, podemos renombrar sus elementos como $\{z_1, z_2, \dots\}$ y entonces del teorema 2.2 obtenemos:

$$E(g(X, Y)) = E(g(Z)) = \sum_{j \geq 1} g(z_j) \cdot p_Z(z_j) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y)$$

■

Observación 2.5. Si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \implies E(g(X)) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x) \cdot p_{X,Y}(x, y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \left(g(x) \sum_{y \in Y(\Omega)} p_{X,Y}(x, y) \right) \\ &\implies E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) p_X(x) \end{aligned}$$

De manera análoga, $E(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} g(y) p_Y(y)$

Ejemplo 2.10 ($E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$).

$$\begin{aligned} E(aX + bY) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} (ax + by) \cdot p_{X,Y}(x, y) \\ \implies E(aX + bY) &= a \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} x \cdot p_{X,Y}(x, y) + b \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} y \cdot p_{X,Y}(x, y) \end{aligned}$$

28/02/2024

Definición 2.9 (Independencia de v.a.d.). En (Ω, \mathcal{F}, P) , sean X e Y v.a.d., X e Y son independientes

$$\iff \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : X = x \text{ y } Y = y \text{ son sucesos independientes.}$$

$$\iff \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : P(X = x \wedge Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Teorema 2.7. En (Ω, \mathcal{F}, P) , sean X e Y v.a.d., X e Y son independientes

$$\iff \exists g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : p_{X,Y}(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

Demostración. (\implies) Trivial: $g(x) = p_X(x) \wedge h(y) = p_Y(y)$.

(\impliedby) Suponemos que $\exists g, h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : p_{X,Y}(x, y) = g(x) \cdot h(y)$, veamos las funciones marginales.

$$\implies p_X(x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} p_{X,Y}(x, y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x) \cdot h(y) = g(x) \sum_{y \in Y(\Omega)} h(y)$$

$$\text{Análogamente } p_Y(y) = h(y) \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)$$

$$\implies p_X(x) \cdot p_Y(y) = \left(g(x) \sum_{z \in Y(\Omega)} h(z) \right) \left(h(y) \sum_{w \in X(\Omega)} g(w) \right)$$

$$\implies p_X(x) \cdot p_Y(y) = g(x) \cdot h(y) \sum_{z \in Y(\Omega)} \sum_{w \in X(\Omega)} g(w) \cdot h(z) = g(x) \cdot h(y) = p_{X,Y}(x, y)$$

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : P(X = x \wedge Y = y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

■

Ejemplo 2.11. Sean X e Y dos v.a.d. tales que

$$p_{X,Y}(x, y) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^x \mu^y}{x!y!} \text{ con } x, y \in \mathbb{Z} \text{ y } \lambda, \mu > 0$$

\implies Se puede interpretar como $X \sim \text{POISSON}(\lambda)$ e $Y \sim \text{POISSON}(\mu)$ independientes.

Observación 2.6. Si X e Y son independientes $\implies E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

Sin embargo, la implicación recíproca no es cierta.

(Motivo de excomuni3n)

Definici3n 2.10 (Covarianza). En (Ω, \mathcal{F}, P) , sean X e Y v.a.d., $\text{cov}(X, Y)$ es la covarianza de X e Y

$$\iff \boxed{\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}$$

29/02/2024

Observaci3n 2.7.

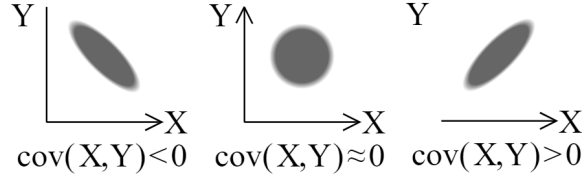
1. Cálculo de la covarianza

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{i,j} x_i y_j P(X = x_i \wedge Y = y_j) - \left(\sum_i x_i P(X = x_i) \right) \left(\sum_j y_j P(Y = y_j) \right)$$

2. Signo de la covarianza (y coeficiente de correlaci3n)

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{i,j} (x_i - E(X))(y_j - E(Y)) P(X = x_i \wedge Y = y_j)$$

Entonces, si la covarianza es positiva, X e Y tienden a crecer juntas. Si es negativa, tienden a decrecer juntas. Si es 0, no hay relación lineal entre X e Y .



3. Cálculo fundamental

$$\begin{aligned}
 V(X + Y) &= E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2 \\
 &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\
 &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X))^2 - 2E(Y)E(X) - (E(Y))^2 \\
 &\implies \boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)}
 \end{aligned}$$

Pero cuidado: $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\text{cov}(X, Y)$

De forma más general:

$$\begin{aligned}
 V(aX + bY) &= V(aX) + V(bY) + 2\text{cov}(aX, bY) \\
 &= a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\text{cov}(X, Y) \\
 &\implies \boxed{V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\text{cov}(X, Y)}
 \end{aligned}$$

4. Si X e Y son independientes $\implies \text{cov}(X, Y) = 0$

Definición 2.11 (coeficiente de correlación). Sean X e Y dos v.a.d., ρ es su coeficiente de correlación $\iff \rho := \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} \implies \rho$ no tiene unidades y $|\rho(X, Y)| \leq 1$.

Proposición 2.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sean X e Y dos v.a.d.

$$\implies E(X \cdot Y)^2 \leq E(X^2) \cdot E(Y^2)$$

La igualdad se da cuando una variable es transformación lineal de la otra, i.e. $Y = aX + b$.

Demostración. Definimos $W = sX + Y$, $W^2 \geq 0$ con probabilidad 1.

$$\begin{aligned}
 \implies 0 &\leq E(W^2) = E((sX + Y)^2) = E(s^2X^2 + Y^2 + 2sXY) \\
 &= s^2E(X^2) + E(Y^2) + 2sE(XY) \\
 &= E(X^2) \cdot s^2 + 2E(XY) \cdot s + E(Y^2)
 \end{aligned}$$

Vemos que el resultado es una parábola si se toma como función de s .

Como $\forall s \in \mathbb{R} : E(X) \geq 0$ y $E(X^2) \geq 0$, sabemos que la parábola o bien toca el eje X una única vez, o no lo hace nunca. Esto es equivalente a pedir que el valor del discriminante

sea menor o igual que 0.

$$4E(XY)^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0 \implies E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

■

Por tanto, $\overline{\text{cov}(X, Y)^2} = E((X - E(X))(Y - E(Y)))^2 \leq \overline{V(X) \cdot V(Y) \cdot \text{cov}(X, Y)}$

Además $\rho(aX + b, cY + d) = \text{sgn}(ac) \cdot \rho(X, Y)$.

04/03/2024

2.3.1 Detalle sobre independencia

Teorema 2.8. Sean X e Y dos v.a.d. en (Ω, \mathcal{F}, P) y $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones

$$X \text{ e } Y \text{ independientes} \iff E(g(X) \cdot h(Y)) = E(g(X)) \cdot E(h(Y))$$

Demostración. (\implies) $E(g(X) \cdot h(Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x) \cdot h(y) \cdot P(X = x \wedge Y = y)$

Como X e Y son independientes, $P(X = x \wedge Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$, entonces

$$E(g(X) \cdot h(Y)) = \left(\sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x) \right) \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} h(y) P(Y = y) \right) = E(g(X)) \cdot E(h(Y))$$

(\impliedby) Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}$, queremos probar que $P(X = \hat{x} \wedge Y = \hat{y}) = P(X = \hat{x}) \cdot P(Y = \hat{y})$

$$\text{Definimos } g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = \hat{x} \\ 0 & \text{si } x \neq \hat{x} \end{cases} \quad \wedge \quad h(y) := \begin{cases} 1 & \text{si } y = \hat{y} \\ 0 & \text{si } y \neq \hat{y} \end{cases}$$

$$\implies E(g(X) \cdot h(Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x) h(y) P(X = \hat{x} \wedge Y = \hat{y}) = P(X = \hat{x} \wedge Y = \hat{y})$$

Como $E(g(X)) = P(X = \hat{x})$ y $E(h(Y)) = P(Y = \hat{y})$ y $E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$

$$\overline{P(X = \hat{x} \wedge Y = \hat{y})} = E(g(X) \cdot h(Y)) = E(g(X)) \cdot E(h(Y)) = \overline{P(X = \hat{x}) \cdot P(Y = \hat{y})}$$

■

¿Qué pasaría con (X_1, \dots, X_n) para $n = 2$?

1. Modelo \rightarrow función de masa conjunta $p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \cdots \sum_{x_n \in X_n(\Omega)} p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = 1 \\ p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \end{cases}$$

2. Marginales $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2 \in X_2(\Omega)} \cdots \sum_{x_n \in X_n(\Omega)} p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$

3. Independencia (la función de masa conjunta se factoriza)

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_n}(x_n) \iff \text{independencia completa}$$

Pero puede haber otras nociones de independencia (ej: 2 a 2).

4. **Matriz varianzas-covarianzas y matriz correlaciones** respectivamente

$$V = \begin{pmatrix} V(X_1) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \cdots & V(X_n) \end{pmatrix} \wedge \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \rho(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(X_n, X_1) & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ambas son simétricas y definidas positivas.

Ejemplo 2.12. Queremos modelizar experimentos del tipo lanzar 18 veces un dado y sumar los resultados obtenidos.

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \implies \begin{cases} E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(X_i, X_j) \end{cases}$$

Si suponemos las X_i independientes e idénticas $\implies \forall i \in \mathbb{N}_n : E(X_i) =: \mu \wedge V(X_i) =: \sigma^2$

$$\implies E(S_n) = n\mu \wedge V(S_n) = n\sigma^2$$

Si definimos $Z_n := \frac{1}{n}S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \implies E(Z_n) = \mu \wedge V(Z_n) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $\implies Z_n$ no es aleatoria si $n \rightarrow \infty$ (ley de los grandes números)

05/03/2024

2.4 Funciones generatrices de probabilidad

2.4.1 Series de potencias

Sea $(a_n)_{n=0}^\infty$ una sucesión y $f(x) := \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ una función, ¿en qué valores de x está definida?

Sabemos que existe $R \in [0, \infty)$ radio de convergencia tal que

$$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n \rightarrow \begin{cases} \text{converge} & \text{si } |x| < R \\ \text{diverge} & \text{si } |x| > R \end{cases} \iff \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

Ejemplo 2.13.

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \wedge \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad \wedge \quad \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m$$

2.4.2 Funciones generatrices

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \longleftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \implies \begin{cases} x \cdot f(x) \longleftrightarrow (0, a_0, \dots) \\ x \cdot f'(x) \longleftrightarrow (0a_0, 1a_1, 2a_2, \dots) \end{cases}$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

Definición 2.12 (Función generatriz de probabilidad). Sea X una variable aleatoria discreta que toma valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$ donde $\forall j \geq 0 : p_j = P(X = j)$, $G_X(s)$ es su función

generatriz de probabilidad $\iff \boxed{G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n}$

Ejemplo 2.14.

1. $X \sim \text{BER}(p) \implies G_X(s) = (1-p) + ps$

2. $X \sim \text{BIN}(n, p) \implies G_X(s) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (1-p)^{n-j} (ps)^j = (1-p + ps)^n$

3. $X \sim \text{GEOM}(p) \implies G_X(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{j-1} ps^j = \frac{ps}{1 - (1-p)s}$

Demostración.

$$G_X(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{j-1} ps^j = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k s^{k+1} = ps \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)s)^k = \frac{ps}{1 - (1-p)s}$$

■

4. $X \sim \text{POISSON}(\lambda) \implies G_X(s) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} s^j = e^{\lambda(s-1)}$

Demostración. $G_X(s) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} s^j = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^j}{j!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$

■

¿Para qué?

1. Cálculo de momentos con $(p_n)_{n=0}^{\infty}$

$$G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n \implies G'_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1} \implies G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = E(X)$$

Si seguimos derivando, obtenemos

$$\implies G''_X(s) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) p_n s^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 p_n s^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n p_n s^{n-2}$$

$$\begin{aligned} \implies G_X''(1) &= \sum_{n=2}^{\infty} n^2 p_n - \sum_{n=2}^{\infty} n p_n = E(X^2) - E(X) \\ \implies V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = G_X''(1) + G_X'(1)(1 - G_X'(1)) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.15.

$$\begin{aligned} \text{(a) } X \sim \text{BER}(p) &\implies G_X(s) = (1 - p) + ps \\ &\implies G_X'(s) = p = E(X) \wedge G_X''(s) = 0 \implies V(X) = p(1 - p) \\ \text{(b) } X \sim \text{BIN}(n, p) &\implies G_X(s) = (1 - p + ps)^n \\ &\implies G_X'(s) = n(1 - p + ps)^{n-1}p \implies G_X'(1) = np = E(X) \\ &\implies G_X''(s) = n(n-1)(\dots)^{n-2}p^2 \implies G_X''(1) = n(n-1)p^2 \\ &\implies V(X) = n(n-1)p^2 + np(1 - np) = np(1 - p) \end{aligned}$$

2. Suma de independientes

Teorema 2.9. Sean X, Y dos v.a.d. independientes con valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$ y con funciones generatrices de probabilidad $G_X(s), G_Y(s)$ respectivamente

$$\implies G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$$

Demostración.

$$G_{X+Y}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X + Y = n) s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n P(X = k \wedge Y = n - k) \right) s^n$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} G_X(s) \cdot G_Y(s) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(Y = n) s^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n P(X = k) P(Y = n - k) \right) s^n \implies G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s) \end{aligned}$$

■

Otra manera:

$$G_X(s) = E(s^X) \wedge G_{X+Y}(s) = E(s^{X+Y}) = E(s^X \cdot s^Y) = E(s^X) \cdot E(s^Y) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$$

■

Corolario 2.1. Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a.d. independientes con valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$ y con

funciones generatrices de probabilidad $G_{X_1}(s), G_{X_2}(s), \dots, G_{X_n}(s)$ respectivamente

$$\implies G_{X_1+X_2+\dots+X_n}(s) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(s)$$

Si las X_i son “idénticas” $\implies G_{X_1+X_2+\dots+X_n}(s) = (G_{X_1}(s))^n$

06/03/2024

Teorema 2.10 (Unicidad). Sean X, Y dos v.a.d. con valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$ y con funciones generatrices de probabilidad $G_X(s), G_Y(s)$ respectivamente

$$\implies G_X(s) = G_Y(s) \iff \forall n \geq 0 : P(X = n) = P(Y = n)$$

Ejemplo 2.16. Sean $X \sim \text{POISSON}(\lambda) \wedge Y \sim \text{POISSON}(\mu)$ independientes con $\lambda, \mu > 0$. Definimos $Z = X + Y$.

$$\implies \forall x \geq 0 : P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_{j=0}^k P(X = j \wedge Y = k - j) = \dots$$

Pero, a través de funciones generatrices obtenemos:

$$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)} \wedge G_Y(s) = e^{\mu(s-1)} \implies G_Z(s) = e^{(\lambda+\mu)(s-1)} \implies Z \sim \text{POISSON}(\lambda + \mu)$$

Ejemplo 2.17.

1. Sean I_1, I_2, \dots, I_n v.a.d. independientes con $\forall k \in \mathbb{N}_n : I_k \sim \text{BER}(p)$ y definimos $Z = I_1 + I_2 + \dots + I_n$.

$$\implies G_Z(s) = [(1-p) + ps]^n \implies Z \sim \text{BIN}(n, p)$$

2. Sean $X \sim \text{BIN}(n, p) \wedge Y \sim \text{POISSON}(\lambda)$ independientes y definimos $Z = X + Y$.

$$\implies G_Z(s) = ((1-p) + ps)^n \cdot e^{\lambda(s-1)}$$

3 Variables aleatorias continuas

Hasta ahora en (Ω, \mathcal{F}, P) , una variable aleatoria X discreta era una función $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\exists N \subseteq \mathbb{N} : |X(\Omega)| = |N|$ y $P(X = k) = P(X^{-1}(k))$.

Definición 3.1 (Variable aleatoria). Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, la función $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria $\iff \forall x \in \mathbb{R} : \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$

Proposición 3.1. X es v.a.d. $\implies X$ es variable aleatoria.

Demostración. Puedo describir el suceso $\{X \leq x\}$ como unión numerable de sucesos

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \bigcup_{y \in X(\Omega)} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = y\}$$

Como la unión numerable de sucesos es un suceso, $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$. ■

Definición 3.2 (Función de distribución). Sea X una variable aleatoria, $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ es su función de distribución $\iff \forall x \in X(\Omega) : \boxed{F_X(x) = P(X \leq x)}$

Sea X una v.a.d. que toma los valores x_1, x_2, \dots con probabilidades p_1, p_2, \dots y con función de masa $p_X \implies F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$. Es decir, es la función de masa acumulada.

Lema 3.1. En (Ω, \mathcal{F}, P) , sea X una variable aleatoria con función de distribución F_X .

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
- \implies 2. F_X es no decreciente
3. F_X es continua por la derecha

Demostración.

1. Definimos $A_n := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq n\}$ que es creciente según $n \rightarrow \infty$.

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\Omega) = 1$$

2. $x < y \implies \{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\} \implies F_X(x) \leq F_X(y)$.

3. Definimos $A_h := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x + h\}$.

$$\implies \lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x + h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} P(A_h) = P\left(\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h\right) = P(A_0) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

■

Teorema 3.1. Sea $F: U \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ una función que cumpla los puntos del lema anterior.

$$\implies \exists! X \text{ variable aleatoria : } F_X = F$$

Demostración. Suponemos que $\exists X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. tales que $F_X = F = F_Y$.

$$\implies \forall x \in X(\Omega) = U = Y(\Omega) : P(X \leq x) = F_X(x) = F(x) = F_Y(x) = P(Y \leq x)$$

Por tanto, $\forall x \in U : P(X \leq x) = P(Y \leq x) \implies X = Y$. ■

Moraleja: Una variable aleatoria queda determinada por su función de distribución.

13/03/2024

Sea X una variable aleatoria con función de distribución F_X y $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\implies P(a < X \leq b) = P(\{x \leq b\} \setminus \{x \leq a\}) = P(x \leq b) - P(x \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Definición 3.3 (Variable aleatoria continua). Sea X una variable aleatoria con función de distribución F_X , X es continua (v.a.c.)

$$\iff \exists f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \geq 0 : \left(F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy \right) \wedge \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y) dy = 1 \right)$$

f_X se denomina la **función de densidad** de X .

Observación 3.1.

$$1. \forall a \in \mathbb{R} : P(X = a) = 0$$

Demostración. Por continuidad de la probabilidad:

$$\begin{aligned} \overline{P(X = a)} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} P(a - h < X \leq a + h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(a + h) - F_X(a - h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^a f_X(y) dy - \int_{-\infty}^{a-h} f_X(y) dy \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{a-h}^{a+h} f_X(y) dy = \overline{0} \end{aligned}$$
■

$$2. \text{ Cálculo de probabilidades: } \forall a \leq b : P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(y) dy$$

$$3. \forall x \in \mathbb{R} : f_X(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx} F_X(x), & \text{si } F_X \text{ es derivable en } x \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 3.1.

$$1. \text{ Para cualquier } f \geq 0 \text{ tal que } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c \in \mathbb{R} \text{ tenemos una v.a.c.}$$

$$2. X \sim U(0, 1) \iff f_X(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u \in [0, 1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \implies F_X(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u < 0 \\ u, & \text{si } u \in [0, 1] \\ 1, & \text{si } u > 1 \end{cases}$$

$$3. X \sim \text{EXP}(\lambda) \iff f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}(x) \\ \implies \forall x > 0 : F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy = [-e^{-\lambda y}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

$$4. X \sim N(\mu, \sigma^2) \iff f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{La guay es } X \sim N(0, 1) \iff \phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \text{ Veamos que } \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} I &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \implies I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) \\ \implies I^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{\infty} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 1 \end{aligned}$$

■

18/03/2024

3.1 Funciones / Transformaciones de v.a.c.

Sea X una v.a.c. con función de densidad f_X y $g: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una función real y $Y := g(X)$:

- Y es variable aleatoria $\iff \forall y \in \mathbb{R} : \{\omega \in \Omega : g(X(\omega)) \leq y\} \in \mathcal{F}$.
Esto es cierto para las g “habituales” (continuas, monótonas, etc.), para más detalle, hay que esperar a teoría de la medida.
- ¡Cuidado! Y puede no ser continua.
- Y v.a. $\implies Y$ tiene función de distribución $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = ???$

Ejemplo 3.2. $g(x) = ax + b$ con $a \neq 0 \wedge b \in \mathbb{R}$.

$$\implies F_Y(y) = P(aX + b \leq y) = \begin{cases} P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right), & \text{si } a > 0 \\ P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) = 1 - P\left(X < \frac{y-b}{a}\right), & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Para } X \text{ v.a. continua, } F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{si } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

$$\implies f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{si } a > 0 \\ -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{si } a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Teorema 3.2. En (Ω, \mathcal{F}, P) , sea X una v.a.c. con función de densidad f_X y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y estrictamente creciente.

$$\implies f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}$$

De manera similar, si g es estrictamente decreciente $\implies f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}$

Demostración.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}$$

En el caso de g decreciente tenemos:

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - P(X \leq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = -\frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) = -f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = -f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}$$

■

20/03/2024

Ejercicio 3.1.1. Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x)$ y $Y = g(X)$ con $g(x) = x^2$. ¿Cuál es la función de densidad de Y ?

$$F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = \begin{cases} y < 0 \implies 0 \\ y \geq 0 \implies P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{cases}$$

$$\implies f_Y(y) = \begin{cases} y \leq 0 \implies 0 \\ y > 0 \implies \frac{d}{dy} F_X(\sqrt{y}) - \frac{d}{dy} F_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) \end{cases}$$

Ejemplo 3.3. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies \forall x \in \mathbb{R} : f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ e $Y = e^X$ (se denomina lognormal). Calculamos la derivada y la inversa de $g(x) = e^x$.

$$\implies g'(x) = e^x \quad \wedge \quad g^{-1}(y) = \ln y \quad \wedge \quad \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{1}{y}$$

Como g es estrictamente creciente, aplicamos el teorema anterior:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{y} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3.4. Sea $X \sim \text{EXP}(\lambda)$, $\lambda > 0$ y $Y = 3X + 2$. Calculamos la función de densidad de Y .

$$g'(x) = 3 \quad \wedge \quad \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{y-2}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

Como g es estrictamente creciente, aplicamos el teorema anterior:

$$f_Y(y) = f_X \left(\frac{y-2}{3} \right) \cdot \frac{1}{3} = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 2 \\ \frac{1}{3} \lambda e^{-\lambda \frac{y-2}{3}}, & \text{si } y \geq 2 \end{cases}$$

3.2 Esperanzas de v.a.c.

Definición 3.4 (Esperanza). Sea X una v.a.c. con función de densidad f_X . $E(X)$ es la esperanza de $X \iff \boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx}$

Siempre que haya convergencia absoluta $\left(\iff \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x) dx < \infty \right)$.

Teorema 3.3. Sea X una v.a.c. con función de densidad f_X y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y estrictamente creciente $\implies E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$

Demostración.

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} dy$$

Por el cambio de variable $y = g(x) \implies g^{-1}(y) = x \wedge dy = g'(x) dx$.

$$\implies E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \frac{1}{g'(x)} \cdot g'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

■

Ejemplo 3.5.

1. Sea $X \sim \text{UNIF}(a, b)$, entonces $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$.

$$\implies \boxed{E(X)} = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \boxed{\frac{a+b}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{V(X)} &= E(X^2) - E(X)^2 = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\
&= \frac{4b^2 - 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \overline{\frac{(b-a)^2}{12}}
\end{aligned}$$

2. Sea $X \sim \text{EXP}(\lambda)$, $\lambda > 0$, entonces $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{E(X)} &= \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = [-x e^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \overline{\frac{1}{\lambda}} \\
\Rightarrow \overline{V(X)} &= E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \overline{\frac{1}{\lambda^2}} \text{ porque} \\
&\int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^\infty + 2 \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = 0 + 2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

3. Sea $X \sim N(0, 1)$, entonces $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\begin{aligned}
\overline{E(X)} &= \int_{-\infty}^\infty x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \overline{0} \text{ (integrando impar en regi3n centrada en el origen).} \\
\overline{V(X)} &= E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^\infty x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^\infty + \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (0 + \sqrt{2\pi}) = \overline{1}
\end{aligned}$$

4. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^\infty x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty x \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Con el cambio de variable $t = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma t + \mu \wedge dx = \sigma dt$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{E(X)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty (\sigma t + \mu) e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty (\sigma t + \mu) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sigma \int_{-\infty}^\infty t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (0 + \mu \sqrt{2\pi}) = \overline{\mu} \\
\Rightarrow V(X) &= E[(X - E(X))^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty (x - \mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx
\end{aligned}$$

Con el cambio de variable $t = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma t + \mu \wedge dx = \sigma dt$.

$$V(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty (\sigma t)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt$$

Consideramos $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ y el cambio de variable $t^2 = u \implies 2t dt = du$.

$$\begin{aligned} \implies \overline{V(X)} &= \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u e^{-u} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{\frac{3}{2}-1} e^{-u} du = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sigma^2}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \cdot \cancel{\sqrt{\pi}} = \overline{\sigma^2} \end{aligned}$$

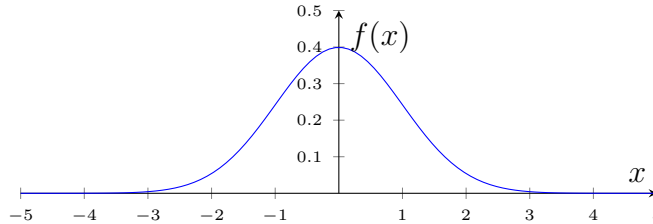
21/03/2024

3.2.1 Calculando con la normal

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$

$$\implies f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \wedge \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

El caso particular de $N(0, 1)$ se denota por $\phi(x) := f(x)$ y $\Phi(x) := F(x)$.



¡Basta con $N(0, 1)$!

$$X \sim N(0, 1) \implies Y := \sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \implies X := \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Podemos tipificar cualquier v.a.c. X con esperanza $E(X)$ y varianza $V(X)$.

$$Y := \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \implies E(Y) = 0 \wedge V(Y) = 1$$

¿Qué cálculos queremos hacer con $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$?

$$E(Y) = E(\mu + \sigma X) = \mu + \sigma E(X) = \mu \quad \wedge \quad V(Y) = V(\mu + \sigma X) = \sigma^2 V(X) = \sigma^2$$

$$E(Y^7) = E((\mu + \sigma X)^7) = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} \mu^7 \sigma^{7-k} E(X^{7-k})$$

$$\text{Caso particular de } X \sim N(0, 1) \implies E(X^k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ es impar} \\ \frac{1}{2^{k/2}} \frac{k!}{(k/2)!} = \frac{(k-1)!!}{k!!}, & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

¿Cómo calculamos las probabilidades de $X \sim N(0, 1)$?

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) \text{ (se calcula numéricamente)}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : P(|X| \leq a) = P(-a \leq X \leq a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = 2\Phi(a) - 1$$

¿Qué hago si me dan $P(X \leq a)$ y me piden a ?

$\Phi(a) = P(X \leq a) \implies a = \Phi^{-1}(P(X \leq a))$ que también se hace numericamente.

Observación 3.2. $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^x e^{-y^2} dy \implies \text{erf}(x) = 2\Phi(\sqrt{2}x) - 1$

Para $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se tiene $P(Y \leq a) = P(\mu + \sigma X \leq a) = P\left(X \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$.

Un famoso resultado: El percentil 95

$$P(|X| \leq a) = \frac{95}{100} \implies 2\Phi(a) - 1 = \frac{95}{100} \implies a = \Phi\left(\frac{1 + 0.95}{2}\right) \approx 1.96$$

02/04/2024

3.3 Modelos multidimensionales (vectores aleatorios)

Definición 3.5 (Función de distribución conjunta). Sean X e Y dos variables aleatorias, $F_{X,Y}$ es su función de distribución conjunta

$$\iff \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y)$$

Observación 3.3. $\bullet \lim_{x, y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = 1 \quad \bullet \forall \hat{x} \leq x, \hat{y} \leq y : F_{X,Y}(\hat{x}, \hat{y}) \leq F_{X,Y}(x, y)$

Funciones de densidad marginales: $\forall x \in \mathbb{R} : F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y)$

¿Independencia de X e Y ? X, Y independientes $\iff F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

Definición 3.6 (Función de densidad conjunta). Sean X e Y dos variables aleatorias, $f_{X,Y}$ es su función de densidad conjunta

$$\iff \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) du dv$$

Observación 3.4. $\bullet \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x, y) \geq 0 \quad \bullet \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) du dv = 1$

Cálculo de probabilidades: $\forall A \subset \mathbb{R}^2 : P((X, Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x, y) dx dy$

Si $F_{X,Y}(x, y)$ es el dato, $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y) & \text{si la derivada existe} \\ 0 & \text{si no existe} \end{cases}$

Ejemplo 3.6. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $(X, Y) \sim \text{UNIF}(\mathcal{R} := [0, a] \times [0, b])$

$$\begin{aligned} \implies f_{X,Y} &= \begin{cases} 0, & \text{si } (x, y) \notin \mathcal{R} \\ \frac{1}{ab}, & \text{si } (x, y) \in \mathcal{R} \end{cases} \\ \implies \forall A \subset \mathcal{R} : P((x, y) \in A) &= \iint_A \frac{1}{ab} dx dy = \frac{1}{ab} \text{Área}(A) \end{aligned}$$

03/04/2024

Ejemplo 3.7 (Normal bidimensional). Sean X, Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta dependiente de cinco parámetros: $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\rho \in (-1, 1)$; (X, Y) siguen una distribución normal bidimensional

$$\iff f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}$$

Para $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ se tiene la normal bidimensional estándar (dependiente de ρ)

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)}$$

Notación matricial

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \Sigma := \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \implies \Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \\ \implies f_{\mathbb{X}}(\vec{x}) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})} \end{aligned}$$

3.3.1 Normal multidimensional

$\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ Σ simétrica definida positiva $n \times n$

$$\implies f_{\mathbb{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})}$$

3.3.2 Marginales e independencia

$$\forall x \in \mathbb{R} : f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \quad \wedge \quad \forall y \in \mathbb{R} : f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

Teorema 3.4. Sean X, Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{X,Y}$
 X e Y independientes $\iff \exists h, g : \forall (x, y) \in \mathbb{R} : f_{X,Y}(x, y) = h(x) \cdot g(y)$

Ejemplo 3.8. 1. $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{si } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \implies f(x, y) = e^{-x-y} \cdot \mathbb{1}_{\{x>0 \wedge y>0\}}(x, y)$
 $\implies f(x, y) = (e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}(x)) \cdot (e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}}(y)) \implies$ son independientes

2. $f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-y} & \text{si } 0 < x < y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \implies f(x, y) = 2e^{-x-y} \cdot \mathbb{1}_{\{0 < x < y\}}(x, y)$

Por tanto, no son independientes porque si lo fueran, tendríamos

$$P(c < X < d \wedge b < Y < a) = P(c < X < d) \cdot P(b < Y < a)$$

04/04/2024

3.4 Condicionando

Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{X,Y}$ y $f_X(x)$.

En general $\forall A, B \subset \mathbb{R}^2 : P((X, Y) \in A | (X, Y) \in B) = \frac{P((X, Y) \in A \wedge (X, Y) \in B)}{P((X, Y) \in B)}$ con $P((X, Y) \in B) > 0$. Sin embargo a veces la información “nueva” $((X, Y) \in B)$ es muy precisa, por ejemplo $X = 3$, entonces la fórmula no vale porque $P(X = 3) = 0$.

Definición 3.7 (Función de densidad condicionada). Sean X, Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{X,Y}$ y funciones de densidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

- $f_{Y|X}(y|x) = f_{Y|X=x}(y)$ es la función de densidad de Y condicionada a $X = x$

$$\iff f_{Y|X=x}(y) := \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} \quad (\text{allá donde } f_X(x) > 0)$$

- $f_{X|Y}(x|y) = f_{X|Y=y}(x)$ es la función de densidad de X condicionada a $Y = y$

$$\iff f_{X|Y=y}(x) := \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad (\text{allá donde } f_Y(y) > 0)$$

Una comprobación necesaria es que $\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=x}(y) dy = 1$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y=y}(x) dx = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=x}(y) dy = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \frac{1}{f_X(x)} f_X(x) = 1$$

Ejemplo 3.9. $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-y} & \text{si } 0 < x < y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \implies \forall x > 0 : f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_x^{\infty} 2e^{-x}e^{-y} dy = 2e^{-x} \int_x^{\infty} e^{-y} dy \\ &= 2e^{-x}e^{-x} = 2e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\forall y > 0 : \overline{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_0^y 2e^{-x}e^{-y} dx = 2e^{-y} \int_0^y e^{-x} dx = \overline{2e^{-y}(1 - e^{-y})}$$

$$f_{Y|X=3}(y) = \frac{f_{X,Y}(3, y)}{f_X(3)} = \frac{2e^{-3}e^{-y}}{2e^{-6}} = e^{3-y} \cdot \mathbb{1}_{\{y>3\}}(y)$$

$$\implies f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{2e^{-x}e^{-y}}{2e^{-y}(1 - e^{-y})} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-y}} \cdot \mathbb{1}_{\{0 < x < y\}}(x)$$

¡Cuidado! No se nos puede olvidar el soporte.

(Motivo de excomuni3n)

Nota sobre independencia: X, Y indep. $\implies f_{X|Y=y}(x) = f_X(x) \wedge f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$

3.5 Transformaciones / cambio de variables

Sean X, Y dos v.a. con funci3n de densidad conjunta $f_{X,Y} \wedge T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (u(x, y), v(x, y))$

Definimos las variables aleatorias $U := u(X, Y)$ y $V := v(X, Y)$.

Por ejemplo, si tenemos T lineal con matriz asociada $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} U = aX + cY \\ V = bX + dY \end{cases}$
pero tambi3n hay transformaciones no lineales como $U = X + Y \wedge V = \frac{X}{X+Y}$.

Definimos $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x, y) > 0\}$ y sea $B \subset T(D)$.

$$\begin{aligned} \implies P((U, V) \in B) &= \iint_B f_{U,V}(u, v) du dv = \iint_{T^{-1}(B)} f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \iint_B f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv \end{aligned}$$

Teorema 3.5. Sean X, Y dos variables aleatorias con funci3n de densidad conjunta $f_{X,Y}$ y sea $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto T(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ una biyecci3n de D en $T(D)$ de clase C^1 con inversa de clase C^1 .

$$\implies f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| & \text{si } (u, v) \in T(D) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

09/04/2024

Ejemplo 3.10. Sean X, Y v.a. con $\forall x, y > 0 : f_{X,Y}(x, y) := \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x+y)}$.

Sea $T(x, y) = \left(\frac{x-2}{2}, y\right)$. Definimos $(U, V) := T(X, Y)$.

$$\implies \forall x, y > 0 : T(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 2u + 2 \\ y = v \end{cases}$$

$$\implies T^{-1}(u, v) = (2u + 2, v) \wedge J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\implies f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} 2\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}[2u+v+v]} = \frac{1}{2}e^{-(u+v)} & \text{si } v > 0 \wedge u > -\frac{v}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 3.11. Sean X, Y v.a. con $\forall x, y > 0 : f_{X,Y}(x, y) := e^{-x-y}$.

Sea $T(x, y) = \left(x + y, \frac{x}{x + y}\right)$. Definimos $(U, V) := T(X, Y)$.

$$\implies T^{-1}(u, v) = (u \cdot v, u(1 - v)) \wedge J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1 - v & -u \end{vmatrix} = -u$$

$$\implies f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} |-u| e^{-u \cdot v - u(1-v)} = ue^{-u} & \text{si } u > 0 \wedge 0 < v < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\implies \forall v \in (0, 1) : f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) du = \int_0^{\infty} ue^{-u} du = [-e^{-u}(u + 1)]_0^{\infty} = 1$$

$$\implies V \sim \text{UNIF}(0, 1)$$

10/04/2024

Sean X, Y dos variables con función de densidad conjunta $f_{X,Y}$, consideramos una función $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ “razonable”^(*) y definimos $Z := g(X, Y)$. Queremos calcular $E(Z), V(Z)$.

(*) g cumple que $\forall z \in \mathbb{R} : \{\omega \in \Omega : g(X(\omega), Y(\omega)) \leq z\} \in \mathcal{F}$

Teorema 3.6. Sean X, Y dos variables aleatorias con $f_{X,Y}$ y $Z := g(X, Y)$ con $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\implies E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f_Z(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Observación 3.5. 1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$

$$2. E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y) \quad \wedge \quad \rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

$$\implies X, Y \text{ indep} \not\iff \rho(X, Y) = 0$$

3. X, Y indep. $\iff f_{X,Y}$ se factoriza

$$\implies X, Y \text{ indep.} \iff \forall g, h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$$

4. Esperanza condicionada y total

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X=x}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} dy$$

$$\implies E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|X = x) \cdot f_X(x) dx$$

¿Y qué hay de $f_Z(z)$? Definimos $A_g(z) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq z\}$

$$\forall z \in \mathbb{R} : F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(X, Y) \leq z) = P((X, Y) \in A_g(z)) = \iint_{A_g(z)} f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$$\implies \forall z \in \mathbb{R} : f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} F_Z(z) & \text{si la derivada existe} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 3.12 (El caso de la suma). Sean X, Y dos v.a. con $f_{X,Y}$ y $Z := X + Y$. Entonces $A_+(z) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq z\}$.

$$\implies \forall z \in \mathbb{R} : F_Z(z) = \iint_{A_+(z)} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x, y) dy dx$$

Mediante el cambio de variables $u = x \wedge v = x + y$ se tiene

$$T(x, y) = (x, x + y) \implies T^{-1}(u, v) = (u, v - u) \implies J(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\implies F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v-u) du dv \implies \boxed{f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, z-u) du}$$

Caso particular: Si X, Y independientes $\implies f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$$\implies \forall z \in \mathbb{R} : \boxed{f_{X+Y}(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \cdot f_Y(z-u) du =: \boxed{(f_X * f_Y)(z)}$$

11/04/2024

3.6 Convolución

Sean X e Y dos v.a.d. indep. que toman valores en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sea $Z = X + Y$.

$$\implies P(Z = k) = \sum_{j=0}^k P(X = j \wedge Y = k-j) = \sum_{j=0}^k P(X = j) \cdot P(Y = k-j)$$

Ahora, sean X e Y dos v.a.c. indep. con funciones de densidad f_X y f_Y respectivamente.

$$\implies \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx = (f_X * f_Y)(z)$$

Ejemplo 3.13. Sean $X, Y \sim N(0, 1)$ independientes. Queremos f_Z con $Z := X + Y$.

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{R} : f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \cdot f_Y(z-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-u)^2}{2}} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[z^2+2u^2-2uz]} du \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}u - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} du \end{aligned}$$

$$(*) \text{ porque } -\frac{1}{2}(z^2 + 2u^2 - 2uz) = -\frac{1}{2}\left(2u^2 - 2uz + \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}u - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{z^2}{2}\right].$$

Por el cambio de variables $w = \sqrt{2}u - \frac{z}{\sqrt{2}} \implies dw = \sqrt{2} du$, se tiene

$$\forall z \in \mathbb{R} : f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw \stackrel{1}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \implies Z \sim N\left(0, (\sqrt{2})^2\right)$$

Moraleja: la suma de normales independientes es una normal.

Ejemplo 3.14 (Normal bidimensional). Sean X, Y dos variables aleatorias con función

de densidad conjunta $\forall x, y \in \mathbb{R} : f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)}$.

$$\implies f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)} dy$$

Por tanto, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ y $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ (ambas normales estándar).

Ahora veamos que $\rho(X, Y) := \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \rho$.

$$E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)} dx dy$$

Usando esperanza total, $E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} E(g(X, Y)|X = x) \cdot f_X(x) dx$

$$E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X \cdot Y|X = x) \cdot f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot E(Y|X = x) \cdot f_X(x) dx$$

Necesitamos calcular $E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X=x}(y) dy$.

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2}$$

Es decir, $Y|X = x \sim N(\rho x, 1 - \rho^2)$.

$$\begin{aligned} \implies E(Y|X = x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2} dy = \rho x \\ \implies \overline{E(X \cdot Y)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \rho x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \rho \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx}_{E(X^2)} = \overline{\rho} \end{aligned}$$

17/04/2024

3.7 Fuera de menú

Tenemos X_1, X_2 siguiendo una distribución normal bidimensional con $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ conocidos.

$$\implies f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}$$

Podemos escribir X_1 y X_2 como transformaciones de $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 Z_1 \\ \sigma_2(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2) \end{pmatrix}$$

Esta transformación facilita muchos cálculos como $E(X_1 \cdot X_2)$.

Tenemos $\mathbb{X}^T = (X_1, \dots, X_n)$ normal n -dimensional con $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ y \mathbb{V} matriz de covarianzas definida positiva.

$$\implies f_{\mathbb{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \mathbb{V}}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T \mathbb{V}^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})}$$

Si ahora tenemos en cuenta que A definida positiva $\iff \exists R$ tal que $A = R^T R$ con B no singular, podemos escribir $\mathbb{V} = U^T U$.

Teorema 3.7 (de representación). $\mathbb{X} \sim N(\vec{\mu}, \mathbb{V}) \iff \mathbb{X} = \vec{\mu} + U \cdot \mathbb{Z}$ con $\mathbb{Z} \sim N(\vec{0}, I)$

4 Convergencia de variables aleatorias

Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , queremos estudiar las series

$$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} := \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \wedge \quad (Z_n)_{n \in \mathbb{N}} := \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Interesan, específicamente, los límites cuando $n \rightarrow \infty$ de estas series.

1. Sabemos que significa $\lim_{n \rightarrow \infty} E(S_n)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} V(S_n)$ pero, ¿qué significa $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$?
Requerimos de técnicas más avanzadas que se denominan **modos de convergencia**.
2. Asumiremos que $\{X_n\}$ son **independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.)**.
 - Todas las X_i tienen la misma distribución. Por tanto, es habitual definir una **X de referencia** que tenga la misma distribución que todas las X_i .
 - Las X_i son **completamente independientes**, es decir, para todo subconjunto finito $I \subset \mathbb{N}$, $\{X_i\}_{i \in I}$ son independientes.
3. Descubriremos que, para n grande y X de referencia, Z_n se comporta como $E(X)$.
Además, veremos el teorema central del límite, que nos dice que $\frac{Z_n - E(X)}{\sigma(Z_n)/\sqrt{n}} \approx N(0, 1)$.

4.1 Medias y varianzas de las sumas y las medias

Las medias de S_n y Z_n resultan sencillas de calcular.

$$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \stackrel{(*)}{=} nE(X)$$

$$E(Z_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \stackrel{(*)}{=} E(X)$$

(*) Si X_i tienen la misma media.

Nótese que, en la mayoría de casos, $E(S_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ mientras que $E(Z_n)$ tenderá a al promedio de las medias de las X_i .

Las varianzas de S_n y Z_n son más intrincadas de calcular y debemos tener en cuenta, no solo el caso de que las X_i tengan la misma varianza, sino también si son incorreladas.

$$\begin{aligned}
V(S_n) &= V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = V(X_1) + V\left(\sum_{i=2}^n X_i\right) + 2 \operatorname{cov}\left(X_1, \sum_{i=2}^n X_i\right) \\
&= V(X_1) + 2 \sum_{i=2}^n \operatorname{cov}(X_1, X_i) + V\left(\sum_{i=2}^n X_i\right) \\
&= V(X_1) + 2 \sum_{i=2}^n \operatorname{cov}(X_1, X_i) + V(X_2) + 2 \sum_{i=3}^n \operatorname{cov}(X_2, X_i) + V\left(\sum_{i=3}^n X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{cov}(X_i, X_j) \stackrel{(*)_1}{=} \sum_{i=1}^n V(X_i) \stackrel{(*)_2}{=} n(\sigma(X))^2 \\
V(Z_n) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{(*)_1}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \stackrel{(*)_2}{=} \frac{(\sigma(X))^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

$(*)_1$ Si X_i incorreladas, $(*)_2$ Si (además) X_i tienen la misma varianza.

De forma similar a como ocurre con las medias, (en la mayoría de casos) la varianza de S_n tiende a infinito mientras que la de Z_n tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

4.2 Convergencia cuadrática

Definición 4.1 (Convergencia cuadrática). Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. y X v.a. en el mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , $\boxed{X_n \xrightarrow{\text{cuad.}} X \iff E(|X_n - X|^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$

Teorema 4.1. Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. i.i.d. con X v.a. de referencia $\implies Z_n \xrightarrow{\text{cuad.}} E(X)$

Demostración. Si denominamos $\mu = E(X) \wedge V(X) = \sigma^2$, entonces

$$E(|Z_n - \mu|^2) = E(|Z_n - E(Z_n)|^2) = V(Z_n) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

■

Basta con que sean incorreladas y tengan la misma media y varianza porque es lo único que se ha usado en la demostración. Podemos incluso ofrecer un teorema más general que no requiera que tengan la misma media y varianza.

Teorema 4.2. Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. en (Ω, \mathcal{F}, P) con $E(X_i) = \mu_i$ y $V(X_i) = \sigma_i^2$. Suponemos que $\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \in \mathbb{R}$ y $V(Z_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \rightarrow 0 \implies Z_n \xrightarrow{\text{cuad.}} \mu$

Demostración. (Buen ejercicio de examen)

$$\begin{aligned}
 E(|Z_n - \mu|^2) &= E(|Z_n - \mu_n + \mu_n - \mu|^2) \\
 &= E(|Z_n - \mu_n|^2 + |\mu_n - \mu|^2 + 2(Z_n - \mu_n)(\mu_n - \mu)) \\
 &= E((Z_n - \mu_n)^2) + (\mu_n - \mu)^2 + 2(\mu_n - \mu) \cancel{E(Z_n - \mu_n)} \xrightarrow{0} \\
 &= E((Z_n - \mu_n)^2) + (\mu_n - \mu)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

■

Es decir, si el promedio de las medias tiende a un número finito y la varianza del promedio tiende a 0, entonces el promedio tiende al límite del promedio de las medias.

23/04/2024

4.3 Convergencia en probabilidad (ley débil)

J. Bernoulli (1713) *Ars Conjectandi*: Si tienes un dado regular, cuantas más veces lo lances, más se aproximará la frecuencia relativa de un número a su probabilidad.

Definición 4.2 (Convergencia en probabilidad). Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. y X v.a. en el mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) ,

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Teorema 4.3 (Ley débil de los grandes números). Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. i.i.d. en (Ω, \mathcal{F}, P) con X v.a. de referencia tal que $\mu := E(X) < \infty \wedge \sigma^2 := V(X) < \infty \implies Z_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{P} \mu$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por la desigualdad de Chebyshev

$$P(|Z_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

■

Observación 4.1. 1. Hay una ley fuerte de los grandes números.

2. Hipótesis: No hace falta que sean independientes, basta con que sean incorreladas. Tampoco hace falta que sean idénticas, basta con que tengan la misma media y varianza.
3. Se podría incluso hacer una variante del teorema para variables aleatorias que no tengan la misma media y varianza.
4. Existe la posibilidad de adaptar el teorema para que no haga falta que sean incorreladas, solo que tengan una correlación “pequeña”.

Teorema 4.4. Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. incorreladas en (Ω, \mathcal{F}, P) con $E(X_i) = \mu_i$ y $V(X_i) = \sigma_i^2$.

Suponemos $V(Z_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies Z_n \xrightarrow{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i$

Demostración. Por la desigualdad de Chebyshev

$$P \left(\left| Z_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

■

Es decir, si la varianza del promedio tiende a 0, entonces el promedio tiende al promedio de las medias.

Usos en estadística: Sean X_1, \dots, X_n v.a. i.i.d. con $X \sim \text{BER}(p)$ de referencia. Queremos estimar p (desconocido), ¿cuánto de grande tiene que ser n para estar razonablemente seguros

que el estimador $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ está cerca de p ?

$$P(|\bar{X}_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq \delta \implies n \geq \frac{1}{4\varepsilon^2\delta}$$

Es decir, si queremos estar δ seguros de que el estimador está a una distancia menor que ε de p , necesitamos que n sea mayor que $\frac{1}{4\varepsilon^2\delta}$.

4.4 Cálculo de la distribución de la suma y el promedio

Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. i.i.d. en (Ω, \mathcal{F}, P) con X v.a. de referencia.

1. $X \sim \text{BER}(p) \implies S_n \sim \text{BIN}(n, p)$ y $Z_n \in \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ con las mismas probabilidades que una $\text{BIN}(n, p)$.
2. $X \sim \text{POISSON}(\lambda) \implies S_n \sim \text{POISSON}(n\lambda)$. Ya vimos que la suma de dos poisson es poisson. Ahora, por inducción asumimos que se cumple para $n-1$.

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right) = \sum_{i=0}^k P\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i = k-i \wedge X_n = i\right) \\ &= \sum_{i=0}^k P\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i = k-i\right) P(X_n = i) = \sum_{i=0}^k \frac{(n-1)^{k-i} \lambda^{k-i}}{(k-i)!} e^{-(n-1)\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-n\lambda} \lambda^k \sum_{i=0}^k \frac{(n-1)^{k-i}}{(k-i)! i!} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-n\lambda} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n-1)^{k-i} = \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} \end{aligned}$$

3. $X \sim \text{GEOM}(p) \implies S_n \sim \text{binomialnegativa}(n, p)$.
4. $X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2) \implies S_n \sim \text{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

5. $X \sim \mathbf{EXP}(\lambda) \implies S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$.

Técnicas generales (Funciones generatrices)

24/04/2024

4.5 Convergencia en distribución

Definición 4.3 (Convergencia en distribución). Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. y X v.a. en el mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) ,

$$\left(X_n \xrightarrow{d} X\right) \iff \forall t \in \mathbb{R}^{(*)} : P(X_n \leq t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(t) := P(X \leq t)$$

(*) F_X debe ser continua en t .

4.5.1 Teorema del límite central / central del límite

Vamos a tipificar $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ y $Z_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ con $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i.i.d. con X de referencia.

$$W_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad \wedge \quad V_n := \frac{Z_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Teorema 4.5 (del límite central). Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. i.i.d. en (Ω, \mathcal{F}, P) con X de referencia.

$$\implies \forall t \in \mathbb{R} : P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Es decir, este teorema nos dice que $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} U$ donde $U \sim N(0, 1)$

Ejemplo 4.1. Sea $X \sim \text{BER}(p)$ la v.a. de referencia de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i.i.d., entonces $S_n \sim \text{BIN}(n, p)$ y $Z_n \in \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ con las mismas probabilidades que una $\text{BIN}(n, p)$.

Si $p = 1/2$ y $n = 1000$ (lanzamos una moneda regular 1000 veces) y nos piden:

$$P(480 \leq S_{1000} \leq 530) = \sum_{j=480}^{530} \binom{1000}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \approx 87.578\%$$

Pero podemos aproximar la respuesta usando la normal por el teorema del límite central:

$$\begin{aligned} P(480 \leq S_{1000} \leq 530) &= P\left(\frac{480 - 500}{\sqrt{250}} \leq \frac{S_{1000} - 500}{\sqrt{250}} \leq \frac{530 - 500}{\sqrt{250}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{30}{\sqrt{250}}\right) - \Phi\left(\frac{-20}{\sqrt{250}}\right) \approx 86.816\% \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2. Lanzamos un dado 10000 veces y nos piden $P(3400 \leq S \leq 3500)$.

Tenemos $X \sim \text{UNIF}(1, 6) \implies E(X) = \frac{7}{2} \wedge V(X) = \frac{35}{12}$ y,

por tanto, $S = \sum_{i=1}^{1000} X_i \implies E(S) = 3500 \wedge V(S) = 1000 \frac{35}{12}$.

$$\begin{aligned} P(3400 \leq S \leq 3500) &= P\left(\frac{-100}{\sqrt{1000 \cdot \frac{35}{12}}} \leq \frac{S - 3500}{\sqrt{1000 \cdot \frac{35}{12}}} \leq 0\right) \\ &\approx \Phi(0) - \Phi\left(\frac{-100}{\sqrt{1000 \cdot \frac{35}{12}}}\right) \approx 46.79\% \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3 (Intervalo de confianza). Sea $X \sim \text{BER}(p)$ de referencia con p desconocido de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i.i.d. y \bar{X}_n el promedio de las X_i .

Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$ “pequeño” y definimos $z_{\alpha/2} := \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} &\implies P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha \\ &= P\left(-\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_n - p \leq \frac{z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\bar{X}_n - \frac{z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq \bar{X}_n + \frac{z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Tenemos confianza $1 - \alpha$ de que p está en el intervalo $\left(\bar{x}_n - \frac{z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + \frac{z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$ donde \bar{x}_n es el valor observado de \bar{X}_n . Sin embargo, este intervalo depende de p , pero podemos acotarlo por $\left(\bar{x}_n - \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}, \bar{x}_n + \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right)$.

Por tanto, el error sería $\frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}$. Si queremos que sea menor que ε , necesitamos que $n \geq \frac{(z_{\alpha/2})^2}{4\varepsilon^2}$.

25/04/2024

Ejercicio 4.5.1 (4 b del examen). Sea $(X, Y) \sim 2\text{-dim N}(0, 1)$ con correlación ρ .

Calcula la varianza de $X \cdot Y$. Tenemos que

$$V(X \cdot Y) = E(X^2 \cdot Y^2) - E(X \cdot Y)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 y^2 \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)} dx dy - \rho^2$$

porque $E(X \cdot Y) = \rho$. Completando cuadrados, obtenemos

$$\begin{aligned} V(X \cdot Y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2} dy \right) dx - \rho^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} y^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2} dy \right) dx - \rho^2 \end{aligned}$$

El término entre paréntesis es $E(W^2)$ donde $W \sim N(\rho x, 1 - \rho^2)$ y como $V(W) = E(W^2) - E(W)^2 = 1 - \rho^2$, tenemos $E(W^2) = V(W) + E(W)^2 = 1 - \rho^2 + (\rho x)^2$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{V(X \cdot Y)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - \rho^2 + \rho^2 x^2) dx - \rho^2 \\ &= (1 - \rho^2) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \rho^2 \\ &= (1 - \rho^2) + \rho^2 E((N(0, 1))^4) - \rho^2 = 1 - \rho^2 + \rho^2 (0^4 + 6 \cdot 0^2 1^2 + 3(1^4)) - \rho^2 \\ &= 1 - \rho^2 + 3\rho^2 - \rho^2 = \overline{1 + \rho^2} \end{aligned}$$

29/06/2024

4.5.2 Variaciones del TCL

Si consideramos $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. independientes no idénticas con $E(X_i) = \mu_i$ y $V(X_i) = \sigma_i^2$

$$\Rightarrow \text{La suma tipificada es } T_n := \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}$$

Ahora, según las condiciones de Lyapunov, definimos $S_n^\alpha := \sum_{i=1}^n \sigma_i^\alpha$, entonces

$$\exists \delta > 0 : \frac{1}{S_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n E(|X_i - \mu_i|^{2+\delta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow T_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Teorema 4.6 (Cota de Berry-Esseen). Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. i.i.d. con $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2 < \infty$ y $E(|X|^3) < \infty$.

$$\Rightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) - \Phi(t) \right| \leq C \frac{E(|X|^3)}{\sigma^3} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ con } C \text{ constante universal}$$

4.6 Funciones generatrices de momentos

Recordamos: Sea X v.a. que toma valores en $\{0, 1, \dots\}$ con probabilidades p_0, p_1, \dots , entonces la función generatriz de probabilidad de X es $G_X(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$.

Definición 4.4. Sea X v.a., su función generatriz de momentos es $M_X(t) := E(e^{tX})$.

Observación 4.2. • Si X toma valores en $\{0, 1, \dots\}$, entonces $M_X(t) = G_X(e^t)$.

$$\text{porque } M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (e^t)^n = G_X(e^t)$$

• Si X es discreta $\implies E(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} P(X = x)$.

Si X es continua $\implies E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx$.

Ejemplo 4.4. • $X \sim \text{EXP}(\lambda) \implies M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda-t} & \text{si } t < \lambda \\ \infty & \text{si } t \geq \lambda \end{cases}$
 porque $E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)x} dx = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda-t} & \text{si } t < \lambda \\ \infty & \text{si } t \geq \lambda \end{cases}$

• $X \sim N(0, 1) \implies M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx - \frac{x^2}{2}} dx$
 $\implies M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} e^{\frac{t^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx = e^{\frac{t^2}{2}}$

30/04/2024

Ejemplo 4.5. X sigue una distribución de Cauchy $\iff \forall x \in \mathbb{R} : f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$.

$\implies M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx$ que solo converge cuando $t = 0$

Es decir, muchas veces M_X genera problemas porque e^{tX} se hace grande.

Por tanto, se define la transformada de Fourier de X como $\hat{f}_X(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx$. En este caso, $\forall t, x \in \mathbb{R} : |e^{itx}| = 1$.

4.6.1 ¿Por qué ese nombre?

Si tenemos en cuenta el desarrollo de Taylor de $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, entonces

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} : M_X(t) &= E(e^{tX}) = E\left(1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2} + \frac{t^3 x^3}{3!} + \dots\right) \\ &= 1 + tE(X) + \frac{t^2 E(X^2)}{2} + \frac{t^3 E(X^3)}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E(X^n) t^n}{n!} \end{aligned}$$

Es decir, $M_X(t)$ es función generatriz (exponencial) de la sucesión de momentos.

Teorema 4.7. Sea X v.a. con función generatriz de momentos $M_X(t)$.

$M_X(t)$ converge en $|t| < \delta$ para cierto $\delta \implies \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : E(X^k) = M_X^{(k)}(0)$

Ejemplo 4.6. Sea $X \sim N(0, 1) \implies M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

$$M'_X(t) = te^{\frac{t^2}{2}} \implies M'_X(0) = 0$$

$$M''_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{\frac{t^2}{2}} \implies M''_X(0) = 1$$

$$M'''_X(t) = 2te^{\frac{t^2}{2}} + t^3 e^{\frac{t^2}{2}} \implies M'''_X(0) = 0$$

$$M^{(4)}_X(t) = 3e^{\frac{t^2}{2}} + 3t^2 e^{\frac{t^2}{2}} + t^4 e^{\frac{t^2}{2}} \implies M^{(4)}_X(0) = 3$$

4.6.2 La gracia

- Sea X v.a. con función generatriz de momentos $M_X(t)$. Definimos $Y := aX + b$ con $a, b \in \mathbb{R} \implies M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(aX+b)}) = e^{tb} E(e^{(at)X}) = e^{tb} M_X(at)$.

- Sean X e Y v.a. independientes con funciones generatrices de momentos $M_X(t)$ y $M_Y(t) \implies M_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX} e^{tY}) = E(e^{tX}) E(e^{tY}) = M_X(t) M_Y(t)$.

Si, en su lugar, tenemos X_1, \dots, X_n v.a. independientes con funciones generatrices de momentos $M_{X_i}(t)$, entonces $M_{X_1+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$.

4.6.3 El problema de los momentos

Supongamos que para X v.a. tenemos todos sus momentos, ¿podemos recuperar X ?

La respuesta es que no. Por ejemplo, si X sigue una distribución dada por la función de densidad $\forall x > 0 : f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\ln^2(x)}$.

Entonces, la familia de variables aleatorias $\{X_a : a \in (-1, 1)\}$ dada por la familia de funciones de densidad $\{f_{X_a}(x) = (1 + a \sin(2\pi \ln x)) f_X(x) : a \in (-1, 1)\}$ tiene los mismos momentos.

Teorema 4.8. (Unicidad) Sea $M_X(t) = E(e^{tX}) < \infty$ para $|t| < \delta$ para cierto $\delta > 0$.

$\implies \exists! X$ v.a. con función generatriz de momentos M_X

En este caso, además, $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : E(X^k) < \infty$ y $\forall t : |t| < \delta : M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k) t^k}{k!}$.

Ejemplo 4.7. Sean $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ v.a. independientes.

$$\implies M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) = e^{\mu_1 t + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2} e^{\mu_2 t + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2} = e^{(\mu_1 + \mu_2)t + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}$$

$$\implies X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, definimos $Z := aX_1 + bX_2$.

$$\begin{aligned} \implies M_Z(t) &= M_{aX_1+bX_2}(t) = M_{X_1}(at)M_{X_2}(bt) = e^{a\mu_1 t + \frac{1}{2}a^2\sigma_1^2 t^2} e^{b\mu_2 t + \frac{1}{2}b^2\sigma_2^2 t^2} \\ &= e^{(a\mu_1+b\mu_2)t + \frac{1}{2}(a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)t^2} \\ \implies Z &\sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2) \end{aligned}$$

06/05/2024

Demostración (del TCL). Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. i.i.d. con X de referencia y $E(X) = \mu \wedge V(X) = \sigma^2$.

Suponemos, además, que $M_X(t)$ está bien definida en $|t| < \delta$ para cierto $\delta > 0$. (esto no estaba entre las hipótesis del teorema).

Definimos $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como $\forall n \in \mathbb{N} : U_n := X_n - \mu \implies E(U_n) = 0 \wedge V(U_n) = \sigma^2$ y son i.i.d.

Definimos $S_n := \sum_{i=1}^n X_i \implies E(S_n) = n\mu \wedge V(S_n) = n\sigma^2$

$$\implies \tilde{S}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n U_i \implies E(\tilde{S}_n) = 0 \wedge V(\tilde{S}_n) = 1$$

$$\implies M_{\tilde{S}_n}(t) = E\left(e^{t\tilde{S}_n}\right) = E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n U_i}\right) = E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} U_1} \dots e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} U_n}\right) = \left(M_U\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

$$M_U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(U^k)}{k!} x^k = 1 + \cancel{E(U)}x + \frac{E(U^2)}{2} x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{\sigma^2}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\implies \forall t \in \mathbb{R} : M_{\tilde{S}_n}(t) = \left(1 + \frac{\cancel{\sigma^2}}{2} \frac{t^2}{\cancel{\sigma^2} n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{t^2/2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\frac{t^2}{2}}$$

Como $e^{\frac{t^2}{2}}$ es la función generatriz de momentos de una $N(0, 1)$, entonces $\tilde{S}_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$. ■

Para que la demostración anterior fuese válida, habría que primero haber demostrado el siguiente teorema.

Teorema 4.9. Sean Z_1, Z_2, \dots v.a. con funciones generatrices de momentos $M_{Z_i}(t)$ definidas entorno al origen. Si $\forall t \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = M(t)$, entonces exists Z v.a. con función generatriz de momentos $M(t) : Z_n \xrightarrow{d} Z$

4.7 Función característica

Definición 4.5 (Función característica). Sea X v.a., $\forall t \in \mathbb{R} : \phi_X(t) := E(e^{itX})$.

¿Cómo se calcula? Suponemos que X tiene función de densidad $f_X(x)$.

$$\implies E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx \text{ que es una función de } \mathbb{R} \text{ a } \mathbb{C}$$

Ejemplo 4.8. Sea $X \sim \text{BER}(p)$ con $p \in (0, 1)$.

$$\implies \phi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{it \cdot 0}(1-p) + e^{it \cdot 1}p = (1-p) + pe^{it}$$

¿Por qué esto mola?

$$1. \forall t \in \mathbb{R} : |\phi_X(t)| \leq 1.$$

2. Siempre está bien definida.

3. Sean X e Y v.a. independientes con funciones características $\phi_X(t)$ y $\phi_Y(t)$.

$$\implies \phi_{aX+b}(t) = E(e^{it(aX+b)}) = e^{itb} E(e^{iatX}) = e^{itb} \phi_X(at)$$

$$\implies \phi_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX} e^{itY}) = E(e^{itX}) E(e^{itY}) = \phi_X(t) \phi_Y(t)$$

4. (Unicidad) Sean X e Y con funciones características $\phi_X(t)$ y $\phi_Y(t)$.

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi_X(t) = \phi_Y(t) \iff X \text{ e } Y \text{ tienen la misma distribución}$$

5. (Continuidad) Sean $(Z_n)_{n \geq 1}$ v.a. con funciones características $\phi_{Z_n}(t)$.

$$z_n \xrightarrow{d} Z \iff \forall t \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{Z_n}(t) = \phi_Z(t)$$

Ejemplo 4.9. • $X \sim \text{EXP}(\lambda) \implies \phi_X(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$

• $X \sim N(0, 1) \implies \phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}$

07/05/2024

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) f_X(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) f_X(x) dx$$

Teorema 4.10. Sea X v.a. con función generatriz de momentos $M_X(t)$ definida en un entorno del origen $\implies \phi_X(t) = M_X(it)$.

Por ejemplo, $X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies \phi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

Demostración (del TCL). Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. i.i.d. con X de referencia y $E(X) =$

$$\mu \wedge V(X) = \sigma^2.$$

$$\phi_{Z_n}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \phi_X\left(\frac{t}{n}\right)^n$$

Desarrollando por Taylor tenemos: $\phi_X(w) = 1 + itE(X) + o(w)$.

$$\implies \phi_{Z_n}(t) = \left(1 + \frac{it\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{it\mu}$$

Si X es una v.a. constante ($X = \mu$) $\implies \phi_X(t) = e^{it\mu}$. Por tanto, $Z_n \xrightarrow{d} \mu$.

Ahora, podemos demostrar la ley débil de los grandes números.

Basta ver que $Z_n \xrightarrow{d} \mu \implies Z_n \xrightarrow{P} \mu$ cuando μ es constante (ejs 7 y 9 de la hoja 5).

Definimos $U_n := X_n - \mu \implies E(U_n) = 0 \wedge V(U_n) = \sigma^2$ y son i.i.d. Estudiemos

$$\tilde{S}_n := \frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n U_j \implies \phi_{\tilde{S}_n}(t) = \left(\phi_U\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Por Taylor tenemos $\phi_U(w) = 1 + iwE(U) + \frac{(iw)^2}{2!}E(U^2) + o(w^2)$.

$$\implies \phi_{\tilde{S}_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

■

4.7.1 Función característica para distribución de Cauchy: Variable compleja

Sea $X \sim \text{Cauchy} \iff \forall x \in \mathbb{R} : f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$. Queremos calcular su función característica.

$$\implies \phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx = \dots = e^{-|t|}$$

Veamos una técnica de variable compleja para calcular la integral. Consideramos $t > 0$.

Definimos $\forall z \in \mathbb{C} : g(z) := \frac{e^{itz}}{1+z^2}$ con un $t \in \mathbb{R}_{>0}$ fijo. Esta función tiene dos polos en i y $-i$ y hay un teorema en variable compleja que dice que si f es holomorfa en un entorno de un camino cerrado γ y f no tiene polos en el interior de γ , entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Si, en su defecto, f tiene un polo en z_0

$$\implies \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_0) \text{ donde } \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

Definimos $\Gamma_R \subset \mathbb{C}$ como el camino (orientado) que va de $-R$ a R por la recta real y luego vuelve a $-R$ por la semicircunferencia superior de radio R en \mathbb{C} donde $R \in \mathbb{R}_{>1}$. Podemos separar este camino en dos partes: $\Gamma_R = \Gamma_R^1 \cup \Gamma_R^2$ donde Γ_R^1 es la parte de la recta real y Γ_R^2 es la semicircunferencia superior y se cumple que:

$$\int_{\Gamma_R} g(z) dz = \int_{\Gamma_R^1} g(z) dz + \int_{\Gamma_R^2} g(z) dz = 2\pi i \text{Res}(g, i)$$

Tenemos $\text{Res}(g, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{itz}}{(z + i)(z - i)} = \frac{e^{-t}}{2i} \implies \int_{\Gamma_R} g(z) dz = 2\pi i \frac{e^{-t}}{2i} = \pi e^{-t}$.

Observamos que, claramente, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^1} g(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi \cdot \phi_X(t)$. Ahora

$$\left| \int_{\Gamma_R^2} g(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma_R^2} |g(z)| dz \leq \pi R \max_{z \in \Gamma_R^2} |g(z)| = \pi R \max_{z \in \Gamma_R^2} \left| \frac{e^{itz}}{1+z^2} \right|$$

Como $z \in \Gamma_R^2 \implies |z| = R$, entonces $|e^{itz}| \leq |e^{itRe^{i\theta}}| = |e^{itR \cos \theta} e^{-tR \sin \theta}|$, y como $t > 0$

$$-tR \sin \theta \leq 0 \implies \left| \frac{e^{itz}}{1+z^2} \right| \leq \frac{|e^{itR \cos \theta}|}{|1+z^2|} \leq \frac{1}{|1+z^2|}$$

Ahora, dado que $|1+z^2| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1$, tenemos $\left| \frac{e^{itz}}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2 - 1}$.

$$\implies \left| \int_{\Gamma_R^2} g(z) dz \right| \leq \pi R \max_{z \in \Gamma_R^2} \left| \frac{e^{itz}}{1+z^2} \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \implies \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^2} g(z) dz = 0$$

Concluimos que para todo t positivo, $\phi_X(t) = e^{-t}$:

$$\pi e^{-t} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} g(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\Gamma_R^1} g(z) dz + \int_{\Gamma_R^2} g(z) dz \right] = \pi \phi_X(t) + 0 \implies \phi_X(t) = e^{-t}$$

Para $t < 0$ se puede hacer un razonamiento análogo con un Γ que vaya por la semicircunferencia inferior y luego vuelva por la recta real. Finalmente llegamos a

$$\forall t > 0 : \phi(t) = e^{-t} \quad \wedge \quad \forall t < 0 : \phi(t) = e^t \implies \boxed{\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t) = e^{-|t|}}$$

Como además, tenemos $\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx + i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx)}{1+x^2} dx$

$$\implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx = \pi e^{-|t|} \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx)}{1+x^2} dx = 0$$

5 Ejercicios

5.1 Hoja 1

5.2 Hoja 2

7. b $X \sim \text{GEOM}(p) \iff P(X > n+m | X > m) = P(X > n)$

Solución: Lo que nos está diciendo la caracterización es que una distribución geométrica no tiene memoria, la probabilidad de no tener éxito en los próximos n intentos no depende de los intentos anteriores.

Demostración. (\implies) Suponemos que $X \sim \text{GEOM}(p)$

$$\implies P(X > n+m | X > m) = \frac{P(X > n+m \wedge X > m)}{P(X > m)} = \frac{P(X > n+m)}{P(X > m)}$$

Como $P(X > m) = (1-p)^m$ (por eso se llama geométrica), obtenemos

$$\boxed{P(X > n+m | X > m) = \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^m} = (1-p)^n = \boxed{P(X > n)}}$$

(\impliedby) Suponemos que $P(X > n+m | X > m) = P(X > n)$

$$\implies \frac{P(X > n+m \wedge X > m)}{P(X > m)} = \frac{P(X > n)}{P(X > m)}$$

$$\implies P(X > n+m \wedge X > m) = P(X > n) \cdot P(X > m)$$

■

12. Sea X una v.a.d, $X \sim \text{BINNEG}(n, p) \iff P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

Esto significa que X es la suma de n v.a.d. independientes, con distribución $\text{GEOM}(p)$.

Comprobemos que $\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} = 1$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+n-1}{n-1} p^n (1-p)^l = p^n \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+n-1}{n-1} (1-p)^l$$

Como sabemos que $\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+m}{m} x^l$, podemos tomar $x = 1-p$ y $m = n-1$:

$$\implies \sum_{k=n}^{\infty} P(X = k) = \frac{p^n}{(1-(1-p))^{n-1+1}} = \frac{p^n}{p^n} = \boxed{1}$$

20. Cada día compramos 1 cromo de n totales que hay, con reposición. ¿Cuántos días esperamos hasta tener todos los cromos?

Solución: Sea T una v.a.d. igual a la cantidad de días hasta que terminamos la colección, queremos calcular $E(T)$. Se puede utilizar el modelo de distribución geométrica.

Si definimos T_i como la cantidad de días que esperamos hasta tener el cromo i -ésimo nuevo

sabiendo que tienes los $i - 1$ anteriores, entonces:

$$\begin{aligned} \implies T_1 = 1 \wedge T_2 &\sim \text{GEOM} \left(\frac{n-1}{n} \right) \wedge T_3 \sim \text{GEOM} \left(\frac{n-2}{n} \right) \wedge \dots \\ \implies \forall i \in \mathbb{N}_n : T_i &\sim \text{GEOM} \left(1 - \frac{i-1}{n} \right) \implies E(T_i) = \frac{n}{n-i} \end{aligned}$$

Además, $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$. Por linealidad de la esperanza:

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{i=1}^n E(T_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n-i} = n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n-i} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = nH_n \sim \ln n - \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \implies E(T) &= nH_n \approx n \ln n \end{aligned}$$

5.3 Hoja 3

8. Sea $X \sim N(0, 1)$. Definimos $Y := e^X$. $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ es la función de densidad de X .

Queremos calcular $E(Y)$ y $V(Y)$.

$$\begin{aligned} \implies E(Y) &= E(e^X) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \phi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2x+1}{2}+1} dx \\ &= e^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx \right) \xrightarrow{\text{cambio de variable}} e^{\frac{1}{2}} \\ \implies V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 = E(e^{2X}) - e = e^2 - e = e(e-1) \end{aligned}$$

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ en su lugar y $Z \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned} \implies E(e^X) &= E(e^{\mu+\sigma Z}) = e^\mu E(e^{\sigma Z}) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\ \implies V(e^X) &= E(e^{2X}) - E(e^X)^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \end{aligned}$$

11. Sea X una v.a. con función de distribución F_X no decreciente con inversa. Definimos $Y := F_X(X)$. Queremos ver que $Y \sim \text{UNIF}([0, 1])$.

$$\forall y \in (0, 1) : P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = P(X \leq F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$

12. Sea F una función de distribución y $U \sim \text{UNIF}([0, 1])$. Definimos $X := F^{-1}(U)$ y queremos ver que $X \sim F$.

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$$

Lo que nos dice este resultado es que cualquier variable aleatoria es una transformación de una variable aleatoria uniforme (Método de inversión).

13. Sea $X \sim N(0, 1)$.

$$\implies \text{a) } \Phi(1.25) \wedge \text{b) } 1 - \Phi(-0.4) = \Phi(0.4) \wedge \text{c) } 2\Phi(1.35) - 1$$

14. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 100 \wedge \sigma = 15$. Si definimos $Z \sim N(0, 1)$:

$$P(X > 120) = P(\mu + \sigma Z > 120) = P\left(Z > \frac{120 - 100}{15}\right) = P\left(Z > \frac{4}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right)$$

15. Sea $X \sim N(0, 1)$. Queremos a tal que $P(|X| > a) = 0.95$.

$$P(|X| > a) = 2P(X > a) = 2\Phi(a) - 1 = 0.95 \iff \Phi(a) = 0.975 \iff a = \Phi^{-1}(0.975)$$

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ en su lugar:

$$\begin{aligned} P(|X| > a) &= P(-a < X < a) = P(-a < \mu + \sigma Z < a) \\ &= P\left(-\frac{a + \mu}{\sigma} < Z < \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{a + \mu}{\sigma}\right) = 0.95 \end{aligned}$$

19. Sea $T \sim \text{lognormal}(\mu, \sigma^2)$ una variable aleatoria que mide la longitud de una conferencia (en minutos).

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0.60 = P(T > 40) = P(e^{\mu + \sigma Z} > 40) = P\left(Z > \frac{\ln 40 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln 40 - \mu}{\sigma}\right) \\ 0.55 = P(T > 50) = P(e^{\mu + \sigma Z} > 50) = P\left(Z > \frac{\ln 50 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln 50 - \mu}{\sigma}\right) \end{cases} \\ \implies \begin{cases} \frac{\ln 40 - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.40) \implies \mu = \ln 40 - \Phi^{-1}(0.40)\sigma \\ \frac{\ln 50 - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.45) \implies \mu = \ln 50 - \Phi^{-1}(0.45)\sigma \end{cases} \\ \implies \sigma = \frac{\ln 50 - \ln 40}{\Phi^{-1}(0.45) - \Phi^{-1}(0.40)} \end{aligned}$$

5.4 Hoja 4

4. Sean X, Y dos variables aleatorias independientes idénticas ($f := f_X \equiv f_Y$).

Definimos $M := \max X, Y \wedge m := \min X, Y$.

$$\begin{aligned} F_m(z) &= P(\min X, Y \leq z) = 1 - P(\min X, Y > z) = 1 - P(X > z \wedge Y > z) \\ &= 1 - P(X > z) \cdot P(Y > z) = 1 - P(X > z)^2 = 1 - (1 - F(z))^2 \\ \implies f_M(z) &= \frac{d}{dz} F_M(z) = 2(1 - F(z))f(z) \end{aligned}$$

Análogamente $F_m(z) = F(z)^2 \implies f_m(z) = 2F(z)f(z)$

Si ahora tenemos X_1, \dots, X_n independientes con F_i, f_i , $M := \max\{X_1, \dots, X_n\}$:
 $m := \min\{X_1, \dots, X_n\}$

$$\implies F_m(z) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(z)) \wedge F_M(z) = \prod_{i=1}^n F_i(z)$$

6. Sean $X, Y \sim \text{EXP}(\lambda)$ independientes $\implies P(\max\{X, Y\} \leq aX) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq 1 \\ \frac{a}{1+a} & \text{si } a > 1 \end{cases}$

Demostración.

$$\implies \forall x, y > 0 : f_{X,Y}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}$$

■

7. Sean X, Y con función de densidad conjunta $f_{X,Y}$ y $Z := \frac{Y}{X}$

$$\implies f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{X,Y}(x, z-x) dx$$

Demostración.

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{Y}{X} \leq z\right) = \begin{cases} P(Y \leq zX) & \text{si } X > 0 \\ P(Y \geq zX) & \text{si } X < 0 \end{cases}$$

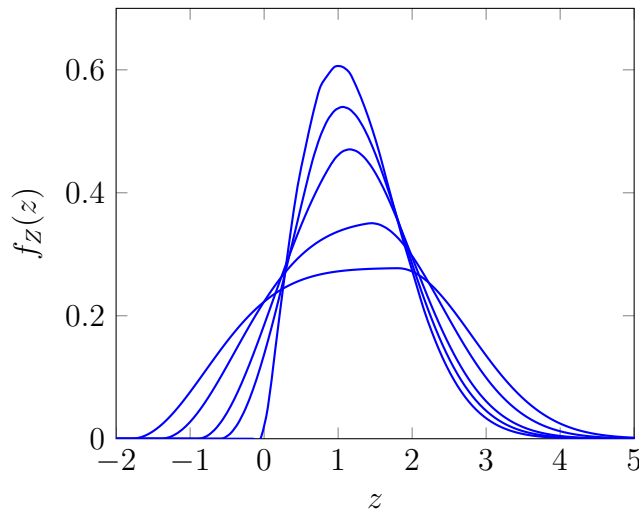
■

8. Sean X e Y dos v.a. indep. con $f_X = xe^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \mathbb{1}_{\{x>0\}}(x)$ e $Y \sim \text{UNIF}([- \varepsilon, \varepsilon])$

$$\implies f_Y(y) = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \mathbb{1}_{\{-\varepsilon < y < \varepsilon\}}(y). \text{ Definimos } Z := X + Y.$$

Nota: En un escenario de la vida real, Y representa un error.

$$\begin{aligned} \forall z \geq -\varepsilon : f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(z-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \mathbb{1}_{\{u>0\}}(u) \cdot \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \mathbb{1}_{\{-\varepsilon < z-u < \varepsilon\}}(u) du \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \mathbb{1}_{\{0 < u < z+\varepsilon\}}(u) du & z < \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \mathbb{1}_{\{z-\varepsilon < u < z+\varepsilon\}}(u) du & z \geq \varepsilon \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{z+\varepsilon} ue^{-\frac{u^2}{2}} du & z < \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} ue^{-\frac{u^2}{2}} du & z \geq \varepsilon \end{cases} \\ \implies \forall z \geq -\varepsilon : f_Z(z) &= \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} \left[-e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_0^{z+\varepsilon} & z < \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} \left[-e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} & z \geq \varepsilon \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{(z+\varepsilon)^2}{2}} \right) & z < \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} \left(e^{-\frac{(z-\varepsilon)^2}{2}} - e^{-\frac{(z+\varepsilon)^2}{2}} \right) & z \geq \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$



5.5 Hoja 5

9. Sean $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. y quiero probar que $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{cuad}} Z \implies Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} Z$.

Demostración. Por la desigualdad de Markov:

$$P(|Z_n - Z| > \varepsilon) = P(|Z_n - Z|^2 > \varepsilon^2) \leq \frac{E(|Z_n - Z|^2)}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

■

Ahora queremos demostrar que $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} Z \implies Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z$.

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$ un punto de continuidad de F_Z :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 : P(Z_n \leq t) &= P(Z_n \leq t \wedge Z \leq t + \varepsilon) + P(Z_n \leq t \wedge Z > t + \varepsilon) \\ &\leq P(Z \leq t + \varepsilon) + P(|Z_n - Z| > \varepsilon) \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 : P(Z \leq t - \varepsilon) &= P(Z \leq t - \varepsilon \wedge Z_n \leq t) + P(Z \leq t - \varepsilon \wedge Z_n > t) \\ &\leq P(Z_n \leq t) + P(|Z_n - Z| > \varepsilon) \end{aligned}$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$ punto de continuidad de F_Z y para todo $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} P(Z \leq t - \varepsilon) + P(|Z_n - Z| > \varepsilon) &\leq P(Z_n \leq t) \leq P(Z \leq t + \varepsilon) + P(|Z_n - Z| > \varepsilon) \\ \implies F_Z(t - \varepsilon) &= P(Z \leq t - \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq t) \leq P(Z \leq t + \varepsilon) = F_Z(t + \varepsilon) \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(t) &= F_Z(t) \implies Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z \text{ porque } F_Z \text{ es continua en } t \end{aligned}$$

■

11. Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de v.a. tales que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{cuad}} X \wedge Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{cuad}} Y$.

Queremos ver que $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{cuad}} X + Y$.

Demostración.

$$E(|X_n + Y_n - X - Y|^2) = E(|X_n - X|^2) + E(|Y_n - Y|^2) + 2E((X_n - X)(Y_n - Y))$$

Ahora, por Cauchy-Schwarz:

$$2E((X_n - X)(Y_n - Y)) \leq \sqrt{E(|X_n - X|^2) E(|Y_n - Y|^2)}$$

■

Ahora queremos demostrar que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \wedge Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} Y \implies X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X + Y$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 : P(|X_n + Y_n - X - Y| > \varepsilon) &= P(|X_n - X + Y_n - Y| > \varepsilon) \\ &\leq P(\{|X_n - X| > \varepsilon/2\} \cup \{|Y_n - Y| > \varepsilon/2\}) \\ &\leq P(|X_n - X| > \varepsilon/2) + P(|Y_n - Y| > \varepsilon/2) \end{aligned}$$

Como $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$ \wedge $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} Y$:

■

17. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. independientes con $E(X_i) = m_i$ \wedge $V(X_i) = \sigma_i^2 < R \in \mathbb{R}$. Definimos $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$ y queremos ver que

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - M_n \right| < \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Por la desigualdad de Chebyshev:

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - M_n \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{V \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{R}{n^2} \frac{n}{\varepsilon^2} = \frac{R}{n \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$