

---

# ECUACIONES DIFERENCIALES

---

Segundo del Grado en Matemáticas

**Hugo Marquerie**

Profesor: Salvador López Martínez

Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid

Segundo cuatrimestre 2023 - 2024

1 de Febrero, 2024

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Conceptos básicos . . . . .	1
1.2	Algunos métodos de resolución de EDO . . . . .	2
1.2.1	Ecuaciones tipo primitiva . . . . .	2
1.2.2	Ecuaciones de variables separadas (o separables) . . . . .	3
1.2.3	Ecuaciones exactas . . . . .	4
1.2.4	Comodín: cambios de variable . . . . .	5
1.3	Modelización . . . . .	7
1.3.1	Crecimiento Malthusiano . . . . .	7
1.3.2	Decrecimiento radiactivo . . . . .	7
1.3.3	Ley de enfriamiento de Newton . . . . .	7
1.3.4	Crecimiento logístico . . . . .	7
1.3.5	Depredador / presa . . . . .	8
1.3.6	Catenaria . . . . .	8
1.3.7	Familias de curvas ortogonales . . . . .	9
1.4	Análisis cualitativo y campos de pendientes . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas</b>	<b>14</b>
2.1	Propiedades básicas . . . . .	14
2.2	Teorema de existencia de soluciones . . . . .	14
2.3	Teorema de unicidad local de soluciones . . . . .	15
2.4	Teorema de existencia global/asíntotas de soluciones . . . . .	18
2.5	Estabilidad de soluciones . . . . .	19
2.6	Bifurcación . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Teoremas fundamentales</b>	<b>22</b>
3.1	Introducción . . . . .	22
3.2	Conceptos de análisis . . . . .	23
3.2.1	Convergencia puntual y uniforme . . . . .	23
3.2.2	Espacios normados y contracciones . . . . .	25
3.2.3	Funciones Lipschitz . . . . .	27
3.3	Existencia y unicidad de soluciones . . . . .	28
3.4	Prolongabilidad . . . . .	31
3.5	Dependencia continua . . . . .	34

<b>4</b>	<b>Sistemas lineales de primer orden</b>	<b>36</b>
4.1	El problema homogéneo . . . . .	37
4.2	Sistema no homogéneo . . . . .	39
4.3	Sistemas lineales de coeficientes constantes . . . . .	40
4.3.1	El caso diagonalizable . . . . .	40
4.3.2	El caso no diagonalizable . . . . .	43
4.4	Apéndice: EDOs escalares lineales de orden superior . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Comportamiento cualitativo de sistemas autónomos en el plano</b>	<b>47</b>
5.1	Comportamiento cualitativo de sistemas autónomos lineales en el plano . . .	47
5.2	El caso general (sistemas no lineales) . . . . .	49
5.3	Sistemas hamiltonianos . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Ejercicios</b>	<b>54</b>
6.1	Hoja 1 . . . . .	54
6.1.1	Conceptos básicos . . . . .	54
6.1.2	Algunos métodos de resolución de EDOs . . . . .	54
6.1.3	Modelización . . . . .	55
6.1.4	Análisis cualitativo y campos de pendientes . . . . .	55
6.2	Hoja 2 . . . . .	56
6.3	Hoja 3 . . . . .	58
6.4	Hoja 4 . . . . .	64
6.4.1	Sistemas lineales de primer orden . . . . .	64
6.4.2	EDO lineales de orden superior . . . . .	65

# 1 Introducción

## 1.1 Conceptos básicos

**Definición 1.1 (Tipos de ecuaciones diferenciales).**

1. Según el número de variables

(a) E. D. Ordinarias: Una variable  $y: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(b) E. D. Parciales: Varias variables  $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

2. Según las derivadas de mayor orden.

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  es de orden  $n \iff F$  es no constante en su variable  $n + 1$ .

3. Según si la derivada de mayor orden se puede despejar o no.

(a) En forma normal  $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ .

$\iff$  por reducción de orden: 
$$\begin{cases} y'_j = y^{(j)}, j = 1, \dots, n-1 \\ y'_n = f(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

**Definición 1.2 (Solución de una EDO).** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $y$  es solución de la EDO  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  en  $I$

$\iff \exists$  las derivadas de  $y$  hasta orden  $n \wedge \forall x \in I : F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

**Ejemplo 1.1.** La familia de funciones  $y(x) = Ce^x$  con  $C \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R} (= I)$  cumple la ecuación  $y' = y$ . Si además de la EDO, imponemos un dato inicial  $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$

$$\implies y(x_0) = y_0 = Ce^{x_0} \implies C = e^{-x_0}y_0$$

¿Existe alguna otra solución de  $\{y' = y \wedge y(x_0) = y_0\}$ ? Para comprobarlo, basta con derivar:

$$\frac{d}{dx} (y(x)e^{-x}) = (y'(x) - y(x))e^{-x}$$

$$\text{Si } y' = y \text{ en } \mathbb{R} \implies \forall x \in \mathbb{R} : \frac{d}{dx} (y(x)e^{-x}) = 0 \implies \forall x \in \mathbb{R} : y(x)e^{-x} = C$$

$$\implies y(x) = Ce^x \implies y(x) = (e^{-x_0}y_0)e^x \text{ es la única solución al sistema.}$$

**Ejemplo 1.2.**  $\left\{ y' = \frac{e^{-y^2}}{1+x^2} \wedge y(0) = 0 \right\}$  Supongamos que  $\exists y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable solución del problema de valores iniciales (PVI). Veamos que podemos decir de  $y$ :

$$1. \text{ Como sabemos } y(0) = 0 \implies y'(0) = \frac{e^{-(y(0))^2}}{1+0^2} = 1$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R} : y'(x) > 0 \implies y \text{ es estrictamente creciente} \implies y \text{ es inyectiva.}$$

$$y(0) = 0 \implies \forall x > 0 : y(x) < 0 \wedge \forall x < 0 : y(x) > 0$$

$$3. y'' = \frac{(-2yy'2(1+x^2) - 2x)e^{-y^2}}{(1+x^2)^2} = \frac{-2e^{-y^2}(ye^{-y^2} + x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{Si } x > 0 \implies y''(x) < 0 \text{ y si } x < 0 \implies y''(x) > 0$$

$$\implies y \text{ es convexa en } (-\infty, 0) \text{ y cóncava en } (0, +\infty)$$

$$4. y' \leq \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{Si } x > 0 \implies y(x) = \int_0^x y'(s) ds \leq \int_0^x \frac{1}{1+s^2} ds = \arctan x$$

$$\text{Si } x < 0 \implies -y(x) = \int_x^0 y'(s) ds \leq \int_x^0 \frac{1}{1+s^2} ds = -\arctan x$$

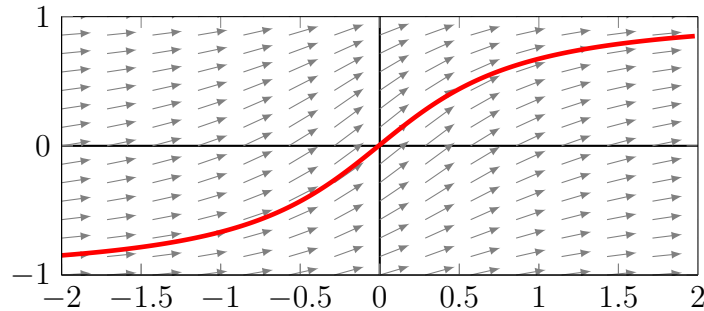
$$\implies |y(x)| \leq |\arctan x| \leq \frac{\pi}{2} \implies y \text{ es constante.}$$

$$\text{Como } y \text{ es creciente y acotada} \implies \exists \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) \wedge \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x).$$

5. Si  $y(x)$  es solución, entonces  $z(x) = -y(-x)$  también lo es, porque:

$$z'(x) = y'(-x) = \frac{e^{-(y(-x))^2}}{1+(-x)^2} = \frac{e^{-(z(x))^2}}{1+x^2} \wedge z(0) = 0$$

6. Si hay solo una solución, entonces  $y(x) = z(x) = -y(-x) \iff y(x)$  es impar.



## 1.2 Algunos métodos de resolución de EDO

### 1.2.1 Ecuaciones tipo primitiva

Son del tipo  $y'(x) = f(x)$  y se resuelven integrando a ambos lados:  $\int_{x_0}^x y'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s) ds$

$$\iff y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(s) ds \iff \boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s) ds}$$

### 1.2.2 Ecuaciones de variables separadas (o separables)

**Definición 1.3.** Sea una EDO de primer orden, es de variables separadas

$$\Longleftrightarrow \text{ es de la forma } \boxed{h(y)y' = f(x)}$$

**Proposición 1.1.** Si  $H, F$  son primitivas de  $h, f$  respectivamente, entonces la familia de funciones, definida implícitamente por  $H(y(x)) - F(x) = C$ , es solución de la EDO.

**Demostración.**

$$H(y(x)) - F(x) = C \Longleftrightarrow (H(y(x)) - F(x))' = 0 \Longleftrightarrow h(y(x))y'(x) - f(x) = 0$$

■

**Ejemplo 1.3.**  $y' = \frac{1+x^4}{1+y^2} \implies (1+y^2)y' = 1+x^4$

$$\left( h(y) = 1+y^2 \implies H(y) = y + \frac{y^3}{3} \right) \wedge \left( f(x) = 1+x^4 \implies F(x) = x + \frac{x^5}{5} \right)$$

$$H(y(x)) - F(x) = C \Longleftrightarrow y + \frac{y^3}{3} - x - \frac{x^5}{5} = C$$

Determinamos unos datos iniciales  $\begin{cases} y' = \frac{1+x^4}{1+y^2}, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  definimos  $\Psi(x, y) = y + \frac{y^3}{3} - x - \frac{x^5}{5} - C$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x_0, y_0) = 1 + y_0^2 > 0 \xrightarrow{TFIm} \exists \text{ un entorno } I \text{ de } x_0 \text{ tal que } y: I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es solución}$$

**Observación 1.1.**

1. Las ecuaciones autónomas  $y' = f(y)$  son un tipo especial de ecuaciones separables donde  $h(y) = \frac{1}{f(y)}$
2. En las ecuaciones separables, hay una cantidad que se conserva (a lo largo del tiempo).

05/02/2024

En general, si se conserva una cantidad de la forma  $F(x, y(x))$ , ¿qué ecuación satisface  $y$ ?

$$\forall x \in I : g(x) := F(x, y(x)) = c$$

$$\forall x \in I : g'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = 0$$

### 1.2.3 Ecuaciones exactas

**Definición 1.4 (EDO exacta).** Sea  $M(x, y(x)) + N(x, y(x))y' = 0$  una EDO, es exacta

$$\iff \exists F(x, y) : \nabla F = (M, N) \iff \frac{\partial F}{\partial x} = M \wedge \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

**Observación 1.2.**

1.  $y$  solución de EDO exacta  $\implies F(x, y(x)) = C$
2. Un caso particular de EDO exactas son las de variables separadas.

**Proposición 1.2.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto y  $M, N \in C^1(\Omega)$

$$\exists F \in C^2(\Omega) : \nabla F = (M, N) \iff \forall (x, y) \in \Omega : \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$$

**Demostración.**  $[ \implies ]$  Suponemos que  $\exists F \in C^2(\Omega) : \nabla F = (M, N)$

$$\implies \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ porque } F \in C^2(\Omega)$$

$[ \impliedby ]$  Supongamos que  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ . Fijados  $x_0, y_0 \in \Omega$ , definimos

$$\forall (x, y) \in \Omega : F(x, y) := \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \int_{y_0}^y N(x_0, s) ds$$

Por un lado,  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$

$$\begin{aligned} \text{Por otro lado, } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(s, y) ds + N(x_0, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y}(s, y) ds + N(x_0, y) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x}(s, y) ds + N(x_0, y) = N(x, y) - N(x_0, y) + N(x_0, y) = N(x, y) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 1.4** ( $y + 2xy' = 0$ ).

$$\implies M(x, y) = y \wedge N(x, y) = 2x \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq 2 = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{no es exacta.}$$

Multiplicando por  $xy^3$ , obtenemos  $xy^4 + 2x^2y^3y' = 0$

$$\implies M(x, y) = xy^4 \wedge N(x, y) = 2x^2y^3 \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy^3 = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \text{esta sí es exacta.}$$

Y resolvemos:

$$\begin{aligned} F(x, y) &:= \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \int_{y_0}^y N(x_0, s) ds = \int_{x_0}^x sy^4 ds + \int_{y_0}^y 2x_0^2 s^3 ds = \\ &= \left[ \frac{s^2}{2} y^4 \right]_{s=x_0}^{s=x} + \left[ 2x_0^2 \frac{s^4}{4} \right]_{s=y_0}^{s=y} = \frac{x^2 y^4}{2} - \frac{x_0^2 y^4}{2} + \frac{x_0^2 y^4}{2} - \frac{x_0^2 y_0^4}{2} = \frac{x^2 y^4}{2} - \frac{x_0^2 y_0^4}{2} \\ &\{F(x, y) = C \wedge F(x_0, y_0) = 0\} \implies x^2 y^2 = x_0^2 y_0^4 \end{aligned}$$

Por ejemplo, si  $x_0 > 0, y_0 > 0$ , entonces, como  $y$  es continua, existe un entorno  $I$  de  $x_0$  tal

que  $I \subset (0, \infty)$ ,  $y(x) > 0$  en  $I$ . Con lo cual:

$$\forall x \in I : \sqrt{x}y(x) = \sqrt{x_0}y_0 \implies \boxed{y(x) = \frac{\sqrt{x_0}y_0}{\sqrt{x}}}$$

**Definición 1.5 (Factor integrante).** Sea  $p(x, y) + q(x, y)y' = 0$  una EDO y  $\mu(x, y)$  una función,  $\mu$  es un factor integrante de la EDO

$$\iff \mu(x, y)p(x, y) + \mu(x, y)q(x, y)y' = 0 \text{ es exacta}$$

**Definición 1.6 (EDO lineales de primer orden).** Una EDO se denomina lineal de primer orden  $\iff$  es de la forma  $y' = a(x)y + f(x)$ .

En realidad, las soluciones de esta EDO formarían un espacio afín, pero se le sigue llamando "lineal".

#### 1.2.4 Comodín: cambios de variable

**Definición 1.7 (Ecuaciones homogéneas).** Sea una EDO de la forma  $y' = f(x, y)$  con  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$  abierto, es homogénea

$$\iff \forall (x, y) \in \Omega : \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda x, \lambda y) \in \Omega : f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

**Proposición 1.3.** Sea  $y' = f(x, y)$  una EDO homogénea

$\implies$  el cambio de variable  $u(x) = \frac{y(x)}{x}$  la transforma en una de variables separadas.

**Demostración.**

$$\begin{aligned} xu(x) = y(x) &\implies u(x) + xu'(x) = y'(x) = f(x, y(x)) = f(x, xu(x)) \\ \implies xu'(x) &= f(1, u(x)) - u(x) \implies \frac{u'(x)}{f(1, u(x)) - u(x)} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

■

**Ejemplo 1.5** ( $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$ ). Hacemos el cambio de variable  $u(x) = \frac{y(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \implies y' &= \frac{3y - 4x}{2y - 3x} = f(x, y) \implies f(1, u) = \frac{3u - 4}{2u - 3} \\ \implies f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{3\lambda x - 4\lambda y}{2\lambda y - 3\lambda x} = \frac{3y - 4x}{2y - 3x} = f(x, y) \implies \text{es homogénea} \\ \implies \frac{u'}{\frac{3u-4}{2u-3} - u} &= \frac{1}{x} \implies \frac{2u - 3}{-4 - 2u^2 + 6u} u' = \frac{1}{x} \\ \implies -\frac{1}{2} \log |u^2 - 3u + 2| - \log |x| &= C_1 \implies |u^2 - 3u + 2| = \frac{C_2}{x^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \implies \frac{(y(x))^2}{x} - \frac{3y(x)}{x} + 2 &= \frac{C_2}{x^2} \implies |(y(x))^2 - 3y(x)x + 2x^2| = C_2 \\ \implies y(x) &= \frac{3x \pm \sqrt{9x^2 - 8x}}{2} \end{aligned}$$

**Teorema 1.1** (Ejercicio 2.3). Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto y sean  $a, f: I \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas y  $x_0 \in I$   $y_0 \in \mathbb{R}$

$$\implies \text{El PVI } \begin{cases} y' = a(x)y + f(x), x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \text{ admite una \u00fanica soluci\u00f3n:}$$

$$y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + \int_{x_0}^x f(s)e^{\int_s^x a(t) dt} ds$$

**Demostraci\u00f3n.**  $\forall x: f(x) = 0$ , la EDO es lineal porque, si  $y, z$  son soluciones, entonces  $\alpha y + \beta z$  es soluci\u00f3n con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$(\alpha y + \beta z)' = \alpha y' + \beta z' = \alpha a(x)y + \beta a(x)z = a(x)(\alpha y + \beta z)$$

Adem\u00e1s podemos encontrar un factor integrante:

$$y' - a(x)y = f(x) \text{ (que es exacta)} \implies (y' - a(x)y)e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} = f(x)e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds}$$

$$\implies \frac{d}{dx} \left( y(x)e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} \right) = f(x)e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds}$$

$$\implies \int_{x_0}^x \frac{d}{ds} \left( y(s)e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} \right) ds = \int_{x_0}^x f(s)e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} ds$$

$$\implies y(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(s)e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} ds$$

$$\implies y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} \int_{x_0}^x f(s)e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} ds$$

$$\implies y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + \int_{x_0}^x f(s)e^{\int_{x_0}^x a(t) dt - \int_{x_0}^s a(t) dt} ds$$

$$\implies y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + \int_{x_0}^x f(s)e^{\int_s^x a(t) dt} ds$$

Adem\u00e1s, es \u00fanica porque si  $y, z$  son soluciones del PVI, consideremos  $\omega = y - z$

$$\implies \forall x \in I: \omega' = y' - z' = (a(x)y + f(x)) - (a(x)z + f(x)) = a(x)(y - z) = a(x)\omega$$

$$\implies \omega' = a(x)\omega = 0 \implies \frac{d}{ds} \left( \omega(x)e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} \right) = (\omega' - \omega(x))e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} = 0$$

$$\forall x \in I: \omega(x)e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} = c \xrightarrow{x=x_0} c = 0 \implies y = z$$

■

## 1.3 Modelización

### 1.3.1 Crecimiento Malthusiano

$x(t) :=$  Población a tiempo  $t$

El modelo asume que el espacio y los recursos son ilimitados, y además, el crecimiento en cada instante es proporcional a la población en ese instante. En términos matemáticos:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = ax(t) + o(1) \text{ donde } o(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$
$$\{x'(t) = ax(t) \wedge x(0) = x_0\} \implies x(t) = x_0 e^{at}$$

### 1.3.2 Decrecimiento radiactivo

$x(t) :=$  El número de núcleos a tiempo  $t$

$$\{x'(t) = -kx(t) \wedge x(0) = x_0 \wedge k > 0\} \implies x(t) = x_0 e^{-kt}$$

### 1.3.3 Ley de enfriamiento de Newton

$$T(t) := \text{Temperatura del objeto a tiempo } t \wedge \begin{cases} T_{ext} := \text{Temperatura exterior} \\ T_0 := \text{Temperatura inicial} \\ k := \text{Constante de proporcionalidad} > 0 \end{cases}$$

El cambio en la temperatura de un cuerpo en un medio a temperatura constante es proporcional a la diferencia de temperatura entre ambos en cada instante.

$$\{T'(t) = -k(T(t) - T_{ext}) \wedge T(0) = T_0\} \implies T(t) = T_0 e^{\int_0^t (-k) ds} + \int_0^t k T_{ext} e^{\int_s^t (-k) dx} ds$$
$$\implies T(t) = T_0 e^{-kt} + \int_0^t k T_{ext} e^{-k(t-s)} ds = T_0 e^{-kt} + T_{ext} e^{-kt} (e^{kt} - 1)$$
$$\implies \boxed{T(t) = T_{ext} + e^{-kt} (T_0 - T_{ext})}$$

### 1.3.4 Crecimiento logístico

Si los recursos son limitados y hay que competir por ellos, el modelo Malthusiano 1.3.1 no parece razonable. Lo adecuado es suponer que la tasa de crecimiento depende de la población en cada instante.

$$x'(t) = a \left(1 - \frac{x(t)}{b}\right) x(t) \text{ con } a, b > 0$$

Soluciones:

$$1. \forall t \in \mathbb{R} : x(t) = 0$$

2.  $\forall t \in \mathbb{R} : x(t) = b$

3. Si hay solución  $\forall t \in I : x(t) \in (0, b)$

$$\begin{aligned}
&\implies \forall t \in I : \left(1 - \frac{x(t)}{b}\right) x(t) > 0 \implies \frac{x'}{\left(1 - \frac{x(t)}{b}\right) x(t)} = a \\
&\implies \frac{x'b}{(b-x)x} = a \implies \frac{x'}{(b-x)} + \frac{x'}{x} = a \implies \int_0^t \left( \frac{x'(s)}{(b-x(s))} + \frac{x'(s)}{x(s)} \right) ds = \int_0^t a ds \\
&\implies \int_0^t \frac{d}{ds} (-\log(b-x(s)) + \log(x(s))) ds = \int_0^t \frac{d}{ds}(as) ds \\
&\implies -\log(b-x(t)) + \log(x(t)) - (-\log(b-x_0) + \log(x_0)) = at \\
&\implies \log\left(\frac{x(t)}{b-x(t)}\right) = \log\left(\frac{x_0}{b-x_0}\right) + at \\
&\implies \frac{x(t)}{b-x(t)} = \frac{x_0}{b-x_0} e^{at} \implies x(t) = \frac{x_0}{b-x_0} b e^{at} - \frac{x_0}{b-x_0} x(t) e^{at} \\
&\implies \left(1 + \frac{x_0}{b-x_0} e^{at}\right) x(t) = \frac{x_0}{b-x_0} b e^{at} \implies x(t) = \frac{\frac{x_0}{b-x_0} b e^{at}}{1 + \frac{x_0}{b-x_0} e^{at}} \\
&\implies \forall t \in \mathbb{R} : \boxed{x(t) = \frac{x_0 \cdot b \cdot e^{at}}{b + x_0(e^{at} - 1)}} \implies x' = a \left(1 - \frac{x}{b}\right) x
\end{aligned}$$

### 1.3.5 Depredador / presa

Hay dos especies (por ejemplo, conejos y zorros), en un espacio muy grande donde hay alimento ilimitado para los conejos, mientras que los zorros solo se alimentan de conejos.

- $C(t)$  es la población de conejos en tiempo  $t$ .
- $Z(t)$  es la población de zorros en tiempo  $t$ .

Si no hubiera zorros  $\implies C'(t) = \alpha C(t)$  con  $\alpha > 0$

Si no hubiera conejos  $\implies Z'(t) = -\beta Z(t)$  con  $\beta < 0$

Si coexisten, los encuentros serían "malos" para los conejos y "buenos" para los zorros:

$$\begin{cases} C'(t) = \alpha C(t) - \gamma C(t)Z(t) \\ Z'(t) = -\beta Z(t) + \delta C(t)Z(t) \end{cases}$$

### 1.3.6 Catenaria

¿Qué forma toma un cable flexible, de densidad constante ( $\rho$ ), fijos sus extremos a la misma altura y sometido a la acción de la gravedad?

Como el cuerpo está en reposo,

$$\begin{aligned} \vec{T} \\ \lambda \int_0^x \sqrt{1 + (y'(\tau))^2} d\tau = \frac{\rho g}{T_0} s = \tan \theta = y'(x) \\ \implies y''(x) = \lambda \sqrt{1 + (y'(x))^2} \end{aligned}$$

Reducimos el orden de la EDO mediante el cambio de variable  $y' = q \wedge q' = \lambda \sqrt{1 + q^2}$  y usando el método de variables separadas obtenemos  $q(x) = \sinh(\lambda x + c)$ .

$$\begin{aligned} y'(0) = 0 &\implies c = 0 \implies y'(x) = \sinh \lambda x \\ \implies y(x) &= \int_0^x \sinh \lambda s ds \implies \boxed{y(x) = \lambda (\cosh(\lambda x) - 1)} \end{aligned}$$

Preguntas pertinentes:

1. ¿Qué sucede si la tensión inicial es muy grande?
2. ¿Es razonable aproximar esta curva como una parábola? (Al menos para cables de longitud pequeña)

### 1.3.7 Familias de curvas ortogonales

Ya hemos visto que es típico que las soluciones de una EDO de primer orden  $y' = f(x, y)$  formen una familia uniparamétrica de curvas dadas en forma explícita casi siempre.

Razonando de forma inversa, muchas veces es posible demostrar que la familia de curvas

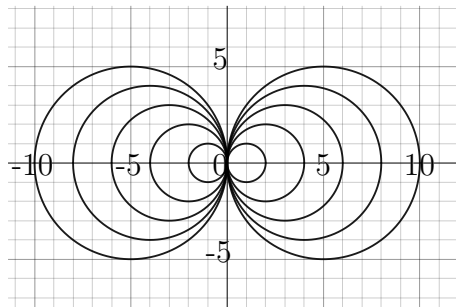
$$\mathcal{F} = \{\Gamma_c\}_{c \in \mathbb{R}} \wedge \Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y, c) = 0\}$$

satisface (localmente) una EDO  $y' = f(x, y)$  de primer orden.

**Definición 1.8 (EDO asociada).** Esta EDO se denomina ecuación asociada a  $\mathcal{F}$ .

**Ejemplo 1.6.**  $\mathcal{F} = \{\Gamma_c\}_{c \in \mathbb{R}} \wedge \Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y, c) = 0\}$  y definimos

$$F(x, y, c) = x^2 + y^2 + 2cx = (x + c)^2 + y^2 - c^2$$



Si  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable, con  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto, y su gráfica está contenida en  $\mathcal{F}$ , entonces  $\forall x \in I : x^2 + (y(x))^2 + 2cx = 0 \implies 2x + 2yy' + 2c = 0 \implies 2x^2 + 2xyy' + 2cx = 0$   
 $\implies x^2 + 2xyy' - y^2 = 0 \implies y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$

**Definición 1.9.** Sean  $\mathcal{F} = \{\Gamma_c\}_{c \in \mathbb{R}}$  y  $\mathcal{C} = \{\sim \Gamma_c\}_{c \in \mathbb{R}}$  dos familias de curvas, son ortogonales  
 $\iff \mathcal{F} \perp \mathcal{C} \iff \forall (\Gamma_{c_1}, \tilde{\Gamma}_{c_2}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{C} : \Gamma_{c_1} \cap \tilde{\Gamma}_{c_2} \neq \emptyset : \text{se cortan perpendicularmente.}$

**Proposición 1.4.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia de curvas con EDO asociada  $y' = f(x, y)$

$\implies$  las soluciones de  $z' = -\frac{1}{f(x, y)}$  forman una familia ( $\mathcal{C}$ ) de curvas ortogonal a  $\mathcal{F}$

**Demostración.** Sean  $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$  conjuntos abiertos con  $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$  y sean  $y: I_1 \rightarrow \mathbb{R}, z: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones tales que  $y(I_1) \in \mathcal{F} \wedge z(I_2) \in \mathcal{C}$ .

$$\implies \forall x \in I_1 : y' = f(x, y) \wedge \forall x \in I_2 : z' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

Como se cortan,  $\exists x_0 \in I_1 \cap I_2 : y(x_0) = z(x_0)$

$$\implies y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, z(x_0)) = -\frac{1}{z'(x_0)}$$

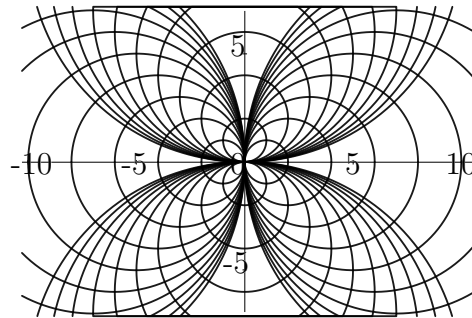
$\implies$  Las rectas tangentes a cada curva se cortan perpendicularmente

■

**Ejemplo 1.7.** Siguiendo el Ejemplo 1.6, podemos encontrar una familia de curvas ortogonal a  $\mathcal{F}(\mathcal{C})$  tomando las soluciones de la EDO:

$$z' = \frac{2xz}{x^2 - z^2} \text{ que es homogénea.}$$

$$\implies \mathcal{C} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (z - c)^2 + x^2 = c^2\} : c \in \mathbb{R}\}$$

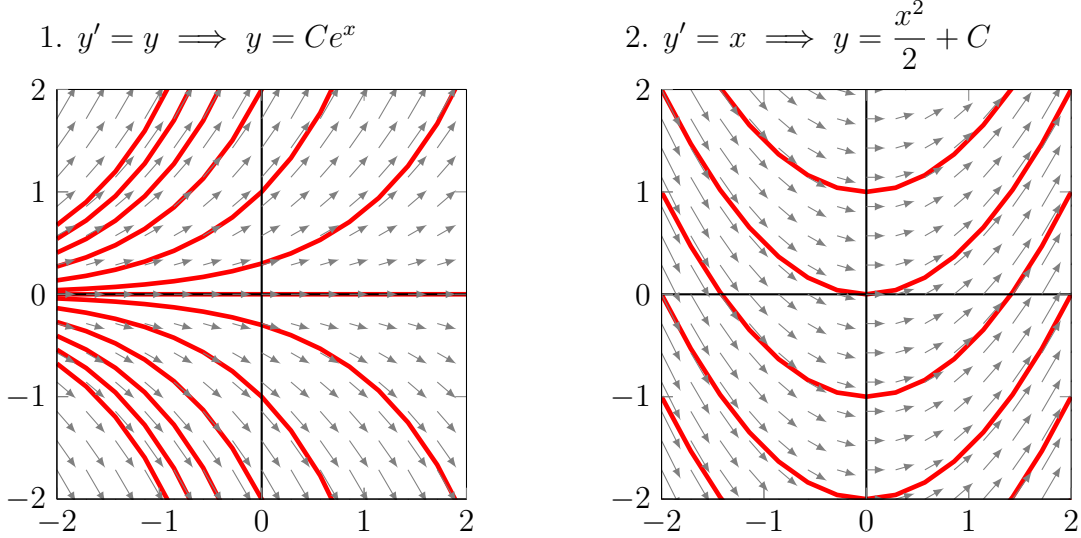


## 1.4 Análisis cualitativo y campos de pendientes

**Definición 1.10 (Campo de pendientes).** Sea una EDO  $y' = f(x, y)$ , su campo de pendientes es el diagrama que asigna a cada punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  un "pequeño" segmento con

pendiente igual a  $f(x, y)$ . Claramente, si existen soluciones, entonces las curvas solución son tangentes a esos segmentos.

**Ejemplo 1.8.**



**Definición 1.11 (Isoclina).** Sea  $y' = f(x, y)$  una EDO, sus isoclinas son los conjuntos de la forma  $f(x, y) = c$  con  $c \in \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 1.9** ( $x' = x^2 - t^2$ ).

1. La función  $y = -x(-t)$  también es solución porque

$$\forall t \in \mathbb{R} : y' = x'(-t) = (-x(-t))^2 - (-t)^2 = (y(t))^2 - t^2$$

2. Existe  $t \in \mathbb{R} : x(t) > -t$

Razonando por contradicción, supongamos que  $\forall t \in \mathbb{R} : x(t) \leq -t$ . En particular,  $\forall t \geq 0 : x(t) \leq -t$ . Entonces,  $\forall t \geq 0 : x^2(t) \geq t^2$ . Por tanto,  $\forall t \geq 0 : x'(t) = x(t)^2 - t^2 \geq 0$ . Integrando  $x(t) - x(0) \geq 0$  Entonces  $\forall t \geq 0 : x(0) \leq x(t) \leq -t$ , pero tomando  $t \geq -x(0)$ , llegamos a una contradicción.

3. Si  $x(t_0) = -t_0$  para algún  $t_0 \in \mathbb{R}$ , entonces  $x(t) \geq -t$  para todo  $t \geq t_0$ .

**Observación 1.3.** Se puede pensar que  $b(t) = -t$  actúa como una barrera que no se puede atravesar. De hecho,  $b(t)$  es una isoclina (porque  $b(t)^2 - t^2 = 0$ ). Estas son candidatas a barreras.

Definimos  $\forall t \geq t_0 : \varphi(t) := x(t) - (-t) = x(t) + t$ .

Por un lado,  $\varphi(t_0) = x(t_0) - t_0 = 0$

Por otro lado,  $\varphi'(t) = x'(t) + 1 = (x(t)^2 - t^2) + 1 \implies \varphi'(t_0) = 1 > 0$

Entonces, existe  $\varepsilon > 0 : \forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon) \varphi(t) > 0$ .

Razonando por contradicción, supongamos que  $\exists t_1 > t_0$  tal que  $\varphi(t_1) = 0$ . Podemos asumir que  $t_1$  es el más pequeño que lo cumple y, por tanto,  $\forall t \in (t_0, t_1) : \varphi(t) > 0$

$$\implies \varphi'(t_1) = x(t_1)^2 - t_1^2 + 1 = (-t_1)^2 - t_1^2 + 1 = 1 > 0$$

**Ejemplo 1.10** ( $x' = x^2 \arctan(x)$ ).

1. La función  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $y(t) = -x(t)$  es solución, porque

$$\forall t \in I : y'(t) = -x'(t) = -x^2 \arctan(x(t)) = (-x(t))^2 \arctan(-x(t)) = y(t)^2 \arctan(y(t))$$

2. Sean  $t_0 \in I, x_0 > 0$ , con  $x(t_0) = x_0$ . Entonces,  $\forall t \in (t_0, \infty) \cap I : x(t) > x_0$

**Demostración.** Sea  $\varphi(t) = x(t) - x_0, \forall t \in [t_0, \infty) \cap I$ .

Por un lado,  $\varphi(t_0) = x(t_0) - x_0 = 0$ .

Por otro lado,  $\varphi'(t) = x'(t) = x(t)^2 \arctan(x(t)) > 0 \implies \varphi'(t_0) > 0$ .

Razonando por contradicción, supongamos que  $\exists t_1 \in I \cap (t_0, \infty)$  tal que  $\varphi(t_1) = 0$ .

Podemos asumir que  $t_1$  es el más pequeño que lo cumple y, por tanto,  $\varphi'(t_1) \leq 0$ , pero  $\varphi'(t_1) = x'(t_1) = x(t_1)^2 \arctan(x(t_1)) = x_0^2 \arctan(x_0) > 0$  ■

**Observación 1.4.** La función  $b(t) = x_0 > 0$  cumple que  $b'(t) < b(t)^2 \arctan(b(t))$ . Es decir, es una *subsolución*.

3. Si  $\exists t_0 \in I : x(t_0) = x_0 > 0$ , entonces  $\forall t \in I : x(t) \geq 0$ .

**Demostración.** Supongamos que  $\exists t_1 \in I : x(t_1) < 0$ , entonces por 2.,  $t_1 < t_0$ . Sea  $t_2 \in (t_1, t_0)$  tal que  $x(t_2) = 0$  y lo elijo de forma que  $\forall t \in (t_1, t_2) : x(t) < 0$ .

Por el TVM,  $\exists s \in (t_1, t_2) : x'(s) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{0 - x(t_1)}{t_2 - t_1} > 0$ .

Sin embargo,  $x'(s) = x(s)^2 \arctan(x(s)) < 0$ , lo cual es una contradicción. ■

4. Si  $x(t_0) = x_0 > 0 \wedge \inf(I) = -\infty$ , entonces  $\exists \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = L \wedge L = 0$ .

**Demostración.** Como  $x$  es creciente y acotada inferiormente,  $\exists L$ . La ecuación dice que también existe  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x'(t)$  con  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x'(t) = L^2 \arctan(L)$ . Por otro lado, vamos a ver que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x'(t) = 0$ . En efecto, por el TVM,  $\exists s \in (t, t-1) : x'(s) = \frac{x(t) - x(t-1)}{t - (t-1)} = x(t) - x(t-1)$ . Entonces,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x'(t) = 0 \implies L^2 \arctan(L) = 0 \implies L = 0$ . ■

5.  $\sup(I) < \infty$

**Demostración.** Si  $x(t_0) = x_0 > 0$ , entonces  $\forall t > t_0 : x(t) > x_0$ .

Por tanto,  $\forall t > t_0 : x'(t) > x(t)^2 \arctan(x_0) = \lambda x(t)^2$

$$\implies \forall t > t_0 : \frac{x'(t)}{x^2(t)} > \lambda \implies \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x(s)^2} ds > \lambda(t - t_0)$$

$$\implies \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{r^2} dr > \lambda(t - t_0) \implies -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} > \lambda(t - t_0)$$

$$\implies \frac{1}{x_0} > \lambda(t - t_0) \implies t < t_0 + \frac{1}{\lambda x_0}$$

■



## 2 Ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas

### 2.1 Propiedades básicas

**Definición 2.1 (EDO autónoma).** Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden se dice autónoma si no depende explícitamente de la variable independiente. Es decir,

$$\Longleftrightarrow \text{ es de la forma } y' = f(y)$$

**Proposición 2.1** (Propiedades de EDOs autónomas).

1. **Isoclinas:** Todos los puntos de cada recta horizontal  $y = c$  pertenecen a la misma isoclina. ¡Cuidado! A veces una isoclina puede contener más de una recta horizontal.

**Ejemplo 2.1** ( $y' = y^2$ ).

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} : y^2 = c\} = \{(x, \sqrt{c}) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -\sqrt{c}) : x \in \mathbb{R}\}$$

2. **Traslaciones:** Si  $y$  es solución  $\implies \forall c \in \mathbb{R} : w(x) := y(x + c)$  es solución.

**Demostración.**  $w'(x) = y'(x + c) = f(y(x + c)) = f(w(x))$  ■

3. **Soluciones triviales:** Si  $\exists a \in \text{Dom}(f) : f(a) = 0 \implies y(x) = a$  es solución.

**Demostración.**  $y'(x) = 0 = f(a) = f(y(x))$  ■

### 2.2 Teorema de existencia de soluciones

Sean  $a \in [-\infty, \infty) \wedge b \in (-\infty, \infty] \wedge f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  continua  $\wedge y_0 \in (a, b) : f(y_0) \neq 0$   
 $\implies \exists \varepsilon : (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset (a, b) \wedge \forall z \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) : f(z) \neq 0$

Sea  $y : I \longrightarrow (a, b)$  una función derivable con  $I \subset \mathbb{R}$  intervalo abierto tal que

$$\forall x \in I : y'(x) = f(y(x)) \quad \wedge \quad y(x_0) = y_0 \text{ para algún } x_0 \in I$$

Como  $y$  es continua,  $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : y(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$

$$\implies \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(y(x)) \neq 0$$

Así,  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \frac{y'(x)}{f(y(x))} = 1 \implies \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \int_{x_0}^x \frac{y'(z)}{f(y(z))} dz = x - x_0$

$$\implies \boxed{\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)} dz + x_0 = x}$$

**Teorema 2.1** (Existencia de soluciones).

Sean  $a \in [-\infty, \infty) \wedge b \in (-\infty, \infty] \wedge f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  continua

Supongamos que  $\forall x \in (a, b) : f(x) \neq 0$  y que  $\begin{cases} a > -\infty \implies f(a) = 0 \\ b < \infty \implies f(b) = 0 \end{cases}$

Sea  $x_0 \in (a, b)$  definimos  $\forall x \in (a, b) : F(x) := \int_{x_0}^x \frac{1}{f(s)} ds$

- Si  $f(x) > 0$  en  $(a, b)$ ,  $T_- := \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \in [-\infty, 0) \wedge T_+ := \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) \in (0, \infty]$ .
- Si  $f(x) < 0$  en  $(a, b)$ ,  $T_+ := \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \in [-\infty, 0) \wedge T_- := \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) \in (0, \infty]$ .

$$\implies \exists x: (T_-, T_+) \longrightarrow (a, b) \text{ derivable: } \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

**Demostración.** Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\forall x \in (a, b) : f(x) > 0$

$$\implies \forall x \in (a, b) : F'(x) = \frac{1}{f(x)} > 0 \implies F \text{ es estrictamente creciente en } (a, b)$$

$$\implies F \text{ tiene inversa en } (a, b) \implies \exists x := F^{-1}: (T_-, T_+) \longrightarrow (a, b)$$

$$\implies \text{Por un lado, } x'(t) = (F^{-1})'(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = \frac{1}{F'(x(t))} = f(x(t))$$

$$\text{Por otro lado, } F(x_0) = 0 \implies x_0 = F^{-1}(F(x_0)) = F^{-1}(0) = x(0)$$

■

## 2.3 Teorema de unicidad local de soluciones

**Teorema 2.2** (Unicidad local).

Sean  $a \in [-\infty, \infty) \wedge b \in (-\infty, \infty] \wedge f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  continua con  $\forall x \in (a, b) : f(x) \neq 0$ .

Sea  $x_0 \in (a, b)$  y sean  $x: I \longrightarrow (a, b) \wedge y: I \longrightarrow (a, b)$  dos funciones ( $I \subset \mathbb{R}$  abierto :  $0 \in I$ ) tales que

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \wedge y'(t) = f(y(t)) \\ x(0) = x_0 = y(0) \end{cases} \implies \forall t \in I : x(t) = y(t)$$

**Demostración.**

$$\forall s \in (a, b) : F(s) := \int_{x_0}^s \frac{1}{f(r)} dr \implies \forall t \in I : F(x(t)) = t = F(y(t))$$

$$\implies \forall t \in I : F^{-1}(F(x(t))) = F^{-1}(F(y(t))) \implies \forall t \in I : x(t) = y(t)$$

■

**Corolario 2.1.** Con las condiciones del teorema de existencia, supongamos  $a \in \mathbb{R}$  y  $f(a) := \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 0$ . Supongamos que

$$\begin{aligned} \forall k \in (a, b) : \lim_{x \rightarrow a^+} \int_k^x \frac{1}{f(s)} ds &= \begin{cases} -\infty & \Longleftrightarrow f > 0 \text{ en } (a, b) \\ \infty & \Longleftrightarrow f < 0 \text{ en } (a, b) \end{cases} \\ \implies \forall I \subset \mathbb{R} : \begin{cases} I = [0, t_0] & \Longleftrightarrow f > 0 \text{ en } (a, b) \\ I = (-t_0, 0] & \Longleftrightarrow f < 0 \text{ en } (a, b) \end{cases} & : x \equiv a \text{ es la \u00fanica soluci\u00f3n.} \end{aligned}$$

26/02/2024

**Demostraci\u00f3n.** Sin p\u00e9rdida de generalidad, suponemos que  $\forall z \in (a, b) : f(z) > 0$ .

Entonces suponemos que  $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_k^x \frac{1}{f(s)} ds = -\infty$ . Procedemos por contradicci\u00f3n asumiendo que  $\exists x : [0, \varepsilon) \rightarrow (a, b)$  soluci\u00f3n del PVI con  $x_0 = a$  que no es constante.

$$\implies \forall t \in [0, \varepsilon) : x'(t) = f(x(t)) \geq 0 \implies x \text{ es creciente en } [0, \varepsilon)$$

Sin p\u00e9rdida de generalidad, podemos suponer que  $\forall t \in (0, \varepsilon) : x(t) > a$  porque, si no fuese as\u00ed, entonces  $\exists t_0 \in (0, \varepsilon) : \forall t \in [0, t_0] : x(t) = a \implies \forall t \in (t_0, \varepsilon) : x(t) > a$ . Entonces consideramos  $\hat{x}(t) = x(t + t_0)$  que es soluci\u00f3n del PVI en  $[0, \varepsilon - t_0)$  que adem\u00e1s cumple  $\forall t \in (0, \varepsilon - t_0) : \hat{x}(t) > a$ .

$$\text{Por tanto, } \forall t \in (0, \varepsilon) : f(x(t)) > 0 \implies \forall t \in (0, \varepsilon) : \frac{x'(t)}{f(x(t))} = 1$$

$$\implies \forall t \in (0, \varepsilon) : \int_{\varepsilon/2}^t \frac{x'(s)}{f(x(s))} ds = t - \frac{\varepsilon}{2} \implies \int_{x(\varepsilon/2)}^{x(t)} \frac{1}{f(s)} ds = t - \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces, pasando al l\u00edmite tenemos

$$-\infty = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{x(\varepsilon/2)}^{x(t)} \frac{1}{f(s)} ds = \lim_{t \rightarrow 0} \left( t - \frac{\varepsilon}{2} \right) = -\frac{\varepsilon}{2} \quad \longrightarrow \longleftarrow$$

■

**Corolario 2.2.** Con las hip\u00f3tesis del corolario anterior, si  $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_k^x \frac{1}{f(s)} ds \in \mathbb{R}$

$$\implies \exists x : [0, \infty) \rightarrow (a, b) \text{ soluci\u00f3n no trivial del PVI con } x(0) = a$$

**Demostraci\u00f3n.**

■

27/02/2024

**Ejemplo 2.2** ( $y' = \sqrt{1 - y^2}$ ).

$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \wedge f(y) := \sqrt{1 - y^2} \wedge \begin{cases} f(y) > 0 & \iff y \in (-1, 1) \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{cases}$$

Si  $y(0) =: y_0 \in (-1, 1)$ , entonces existe una única solución del PVI. Esa solución está definida en  $(T_-, T_+)$ , donde

$$T_- = \lim_{y \rightarrow -1^+} \int_{y_0}^y \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} ds = \lim_{y \rightarrow -1^+} \arcsin(y) - \arcsin(y_0) = -\frac{\pi}{2} - \arcsin(y_0)$$

$$T_+ = \lim_{y \rightarrow 1^-} \int_{y_0}^y \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} ds = \frac{\pi}{2} - \arcsin(y_0)$$

Si  $y_0 = 1$ ,  $\lim_{y \rightarrow 1^-} \int_k^y \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} ds = \frac{\pi}{2} - \arcsin(k) \in \mathbb{R} \implies \exists$  un solución no trivial del PVI

Si  $y_0 = -1$ ,  $\lim_{y \rightarrow -1^+} \int_k^y \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} ds \in \mathbb{R} \implies \exists$  un solución no trivial del PVI

Por tanto, la solución general del PVI es

$$y_k(x) = \begin{cases} -1 & \iff x \leq -\frac{\pi}{2} - k \\ \sin(x + k) & \iff x \in \left(-\frac{\pi}{2} - k, \frac{\pi}{2} - k\right) \\ 1 & \iff x \geq \frac{\pi}{2} - k \end{cases}$$

1. La única  $y_k$  que satisface  $y_k(0) = 0 \in (-1, 1)$  es  $y_k(x) = y_0$
2. Las funciones  $y_k$  con  $k > \frac{\pi}{2}$  cumplen  $y_k(0) = 1$
3. Las funciones  $y_k$  con  $k < -\frac{\pi}{2}$  cumplen  $y_k(0) = -1$

**Observación 2.1.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in (-\infty, \infty] : b > a$  y  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $\forall x \in (a, b) : f(x) \neq 0$  y  $f(a) = 0$ .

Supongamos que  $\exists C > 0, \delta \in (0, b - a) : \forall s \in [a, a + \delta) : |f(s)| \leq C(s - a)$

Vamos a comprobar que se cumplen las condiciones de unicidad para el PVI con  $x(0) = x_0 = a$  tanto en el caso  $f > 0$  como en el caso  $f < 0$ .

$$\begin{aligned} \bullet \quad \boxed{f > 0} \quad & \text{Queremos ver si } \lim_{z \rightarrow a^+} \int_{a+\delta}^z \frac{1}{f(s)} ds = -\infty \\ & \int_{a+\delta}^z \frac{1}{f(s)} ds = \int_{a+\delta}^z \frac{1}{|f(s)|} ds = - \int_z^{a+\delta} \frac{1}{|f(s)|} ds \leq -\frac{1}{C} \int_z^{a+\delta} \frac{1}{s - a} ds \\ & \implies \int_{a+\delta}^z \frac{1}{f(s)} ds \leq -\frac{1}{C} (\log(\delta) - \log(z - a)) \\ & \implies \lim_{z \rightarrow a^+} \int_{a+\delta}^z \frac{1}{f(s)} ds \leq -\infty \implies \text{Hay unicidad de PVI con } x(0) = a \text{ en } [0, \tilde{t}) \end{aligned}$$

- $\boxed{f < 0}$  De forma análoga  $\lim_{z \rightarrow a^+} \int_{a+\delta}^z \frac{1}{f(s)} ds = \dots \leq \infty$

Si  $f$  derivable con  $f'$  acotada

$$\implies \forall s \in [a, a + \delta) : |f(s)| = |f(s) - f(a)| = |f'(r)| |s - a| \leq C(s - a)$$

04/03/2024

## 2.4 Teorema de existencia global/asíntotas de soluciones

**Teorema 2.3.** Sean  $a \in [-\infty, \infty) \wedge b \in (-\infty, \infty] \wedge a < b \wedge y_0 \in (a, b) \wedge f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $\forall x \in (a, b) : f(x) > 0$ . Si  $b \in \mathbb{R}$ ,  $f(b) = 0$ , si no,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

Así tenemos  $T_- = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \wedge T_+ = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$  con  $F(x) := \int_{y_0}^x \frac{1}{f(s)} ds$ .

1.  $(T_+ = \infty) \vee (T_+ \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}) \implies$  la única sol del PVI se puede definir en  $(T_-, \infty)$ .
2.  $T_+ \in \mathbb{R} \wedge b = \infty \implies$  la única sol del PVI tiene una asíntota en  $T_+$  con  $\lim_{x \rightarrow T_+^-} y(x) = \infty$

**Demostración.**

1. Si  $T_+ = \infty$  el resultado es inmediato.

Si  $T_+ \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$ , es decir,  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_{y_0}^x \frac{1}{f(s)} ds \in \mathbb{R}$ , entonces  $y: (T_-, T_+) \rightarrow \mathbb{R}$  se puede extender de forma diferenciable tomando  $\forall x \geq T_+ : y(x) = b$ .

Ahora tenemos que comprobar que cumple las dos condiciones necesarias.

$$y \text{ es continua: } \lim_{x \rightarrow T_+^-} y(x) = b = y(T_+)$$

$$y \text{ es diferenciable: } \lim_{x \rightarrow T_+^-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow T_+^-} f(y(x)) = f(b) = 0$$

2. Si  $T_+ \in \mathbb{R} \wedge b = \infty$ , es decir,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \in \mathbb{R}$ , como sabemos que  $y: (T_-, T_+) \rightarrow \mathbb{R}$  se define como  $y := F^{-1}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow T_+^-} y(x) = \infty$  dado que  $F$  es creciente.

■

**Observación 2.2.** Se cumple para los casos análogos con  $\begin{cases} f(y) > 0 \text{ con asíntota en } T_- \\ f(y) < 0 \text{ con asíntota en } T_+ \\ f(y) < 0 \text{ con asíntota en } T_- \end{cases}$

## 2.5 Estabilidad de soluciones

Sea  $f: (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$  continua, con el PVI  $\{y' = f(y) \wedge y(x_0) = y_0\}$ .

**Definición 2.2 (Equilibrio).** Sea  $y$  una solución del PVI,  $y$  es de equilibrio

$$\iff \text{es de la forma } \forall x \in \mathbb{R} : y(x) = a \in (\alpha, \beta) : f(a) = 0$$

**Definición 2.3 (Estabilidad).** Si  $\forall y_0 \in (\alpha, \beta)$  el PVI tiene solución única, la solución  $y: [x_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  es estable a futuro

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \left( y_0^* \in (\alpha, \beta) : |y_0^* - y_0| < \delta \implies \forall x \geq x_0 : |y(x) - y^*(x)| < \varepsilon \right)$$

donde  $y^*: [x_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  es cualquier solución del PVI con  $y^*(x_0) = y_0^*$ .

**Ejemplo 2.3** ( $\{y' = 0 \wedge y(x_0) = 1\}$ ). Vemos a ojo que la función  $y(x) = 1$  es solución de equilibrio. Además, vamos a ver que es estable.

Sea  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \varepsilon$  y la única solución de  $\{y' = 0 \wedge y(x_0) = y_0^*\}$  con  $|y_0^* - 1| < \delta$  que claramente es  $y^*(x) = y_0^*$  y cumple las condiciones pedidas de que

$$\forall x \geq x_0 : |y(x) - y^*(x)| = |y_0^* - 1| = \delta < \varepsilon$$

**Definición 2.4 (Estabilidad asintótica).** Sea  $y: [x_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  una solución del PVI,  $y$  es asintóticamente estable (a futuro)  $\iff y$  es estable  $\wedge \lim_{x \rightarrow \infty} |y(x) - y^*(x)| = 0$  donde  $y^*: [x_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  es cualquier solución del PVI con  $y^*(x_0) = y_0^*$ .

**Ejemplo 2.4.**

$$\begin{aligned} \begin{cases} y' = y(1 - y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} &\implies \begin{cases} f(y) := y(1 - y) \\ f(y) = 0 \iff y \in \{0, 1\} \end{cases} \implies \begin{cases} y \equiv 0 \\ y \equiv 1 \end{cases} \quad \text{son de equilibrio} \\ &\xrightarrow{\text{H2: ej. 1}} (\forall y < 0 : f(y) < 0) \wedge (\forall y \in (0, 1) : f(y) > 0) \wedge (\forall y > 1 : f(y) < 0) \end{aligned}$$

Por tanto, cualquier solución estable es asintóticamente estable (para EDOs autónomas). Además, si una solución tiene límite, entonces ese límite es sol estable.

$$\boxed{y_0 < 0} \quad \forall y < 0 : F(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{s(1-s)} ds \implies \forall y < 0 : F'(y) < 0$$

Tomamos  $y \in (y_0, 0) \implies F(y) < F(y_0) = 0$

$$\begin{aligned} \implies s \geq y_0 &\implies 0 < 1 - s \leq 1 - y_0 \implies \frac{1}{1-s} \geq \frac{1}{1-y_0} \implies \frac{1}{(1-s)s} \leq \frac{1}{(1-y_0)s} \\ \implies F(y) &\leq \frac{1}{1-y_0} \int_{y_0}^y \frac{1}{s} ds = \frac{\log(-y) - \log(-y_0)}{1-y_0} \implies \boxed{\lim_{y \rightarrow 0^-} F(y) = -\infty} \end{aligned}$$

1. La única solución tal que  $y(x_0) = y_0 < 0$  está definida globalmente hacia el pasado.
2. El equilibrio  $y = 0$  es único “por abajo”.

$(y \rightarrow -\infty)$

$$\begin{aligned} y < y_0 < 0 &\implies 0 \leq F(y) = - \int_y^{y_0} \frac{1}{s(1-s)} ds = \int_y^{y_0} \frac{1}{s^2 - s} ds \leq \int_y^{y_0} \frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \\ \implies 0 \leq F(y) < -\frac{1}{y} &\implies \boxed{\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) \in \mathbb{R}} \implies \text{Hay una asíntota} \end{aligned}$$

$\boxed{y_0 > 1}$  Si  $y$  es solución con  $y(x_0) = y_0 > 1$ , entonces  $z(x) = -y(-x) + 1$  también es solución con  $z(x_0) = 1 - y_0 < 0$ .

06/03/2024

## 2.6 Bifurcación

**Definición 2.5 (Puntos de bifurcación).** Sea  $f_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que depende de un parámetro  $\mu \in \mathbb{R}$ . El comportamiento cualitativo de la EDO  $y' = f_\mu(y)$  puede cambiar dependiendo de la  $\mu$ . Los valores de  $\mu$  que dan lugar a un cambio de este tipo\* son los puntos de bifurcación.

\*Este tipo: de cortar dos veces al equilibrio a cortarlo una o ninguna vez.

**Ejemplo 2.5** ( $\{y' = y(1-y) - \mu \wedge y(x_0) = y_0\}$ ).

$$f_\mu(y) = y(1-y) - \mu = 0 \iff y^2 - y + \mu = 0 \iff y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\mu}}{2} \wedge \mu \leq \frac{1}{4}$$

Curvas de equilibrios:  $\gamma_1(\mu) := \frac{1 + \sqrt{1-4\mu}}{2} \wedge \gamma_2(\mu) := \frac{1 - \sqrt{1-4\mu}}{2}$

$$\implies \begin{cases} \mu > \frac{1}{4} & \text{no hay equilibrios} \\ \mu < \frac{1}{4} & \text{hay dos equilibrios} \\ \mu = \frac{1}{4} & \text{hay un equilibrio} \end{cases} \implies \mu = \frac{1}{4} \text{ es un punto de bifurcación.}$$

- $\mu > \frac{1}{4} \implies$  la solución  $y$  es decreciente porque la derivada nunca toca el eje  $X$ .
- $\mu = \frac{1}{4} \implies$  las soluciones son siempre decrecientes con un punto de silla ( $y' = 0$ ).

- $\mu < \frac{1}{4} \implies y$  es estrictamente creciente para  $y_0 \in \left(\frac{1-\sqrt{1-4\mu}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\mu}}{2}\right)$ , constante para  $y_0 = \frac{1\pm\sqrt{1-4\mu}}{2}$ , y estrictamente decreciente en otro caso.

07/03/2024

**Ejemplo 2.6** ( $\{y' = y(\mu - y^2) \wedge y(x_0) = y_0\}$ ).

$$f_\mu(y) := y(\mu - y^2) = 0 \iff y = 0 \vee y = \pm\sqrt{\mu} \implies \forall \mu \leq 0 : \begin{cases} \gamma_1(\mu) := \sqrt{\mu} \\ \gamma_2(\mu) := -\sqrt{\mu} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \mu \leq 0 & \text{hay un equilibrio } (y = 0) \\ \mu > 0 & \text{hay tres equilibrios } (y = 0 \vee y = \pm\sqrt{\mu}) \end{cases}$$

Definimos  $F(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{s(\mu - s^2)} ds$  y establecemos  $\mu < 0$ .

- $y_0 < 0 \implies \forall y < 0 : F'(y) = \frac{1}{y(\mu - y^2)} > 0 \implies y$  es estrictamente creciente.

Como  $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) \in \mathbb{R}$ , entonces hay una asíntota hacia atrás y para abajo.

- $y_0 > 0 \implies \forall y > 0 : F'(y) = \frac{1}{y(\mu - y^2)} < 0 \implies y$  es estrictamente decreciente.

Como  $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) \in \mathbb{R}$ , entonces hay una asíntota hacia atrás y para arriba.

Si establecemos  $\mu > 0$ , entonces

- $y_0 \in (-\sqrt{\mu}, 0) \implies \forall y \in (-\sqrt{\mu}, 0) : F'(y) < 0 \implies y$  es estrictamente decreciente.
- $y_0 \in (0, \sqrt{\mu}) \implies \forall y \in (0, \sqrt{\mu}) : F'(y) > 0 \implies y$  es estrictamente creciente.

**Proposición 2.2.** Sea  $y' = f_\mu(y)$  una EDO autónoma con  $\mu^* \in \mathbb{R}$  punto de bifurcación

$$\varepsilon^* := \{y \in \mathbb{R} : f_{\mu^*}(y) = 0\} \neq \emptyset \implies \exists y^* \in \varepsilon^* : f_{\mu^*}(y^*) = 0 \wedge f'_{\mu^*}(y^*) = 0$$

**Ejemplo 2.7** ( $y' = e^{-y} - \mu = f_\mu(y)$ ).

$$f_\mu(y) = 0 \iff y = -\ln \mu \implies \begin{cases} \mu \leq 0 & \text{no hay equilibrios} \\ \mu > 0 & \text{hay un equilibrio} \end{cases} \implies \mu^* = 0 \text{ es de bifurcación}$$

$\implies \varepsilon^* = \{y \in \mathbb{R} : e^{-y} - 0 = 0\} = \emptyset \implies$  no se puede aplicar la proposición (vaya ejemplo)



### 3 Teoremas fundamentales

#### 3.1 Introducción

Sean  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}$  dos intervalos abiertos y  $f: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función continua.

Consideramos el PVI  $\begin{cases} x' = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(t_0) = \hat{x}, & \hat{x} \in \Omega \end{cases}$ . Hasta ahora sabemos trabajar con EDOs autónomas: si  $f(t, x) = f(x)$ , entonces el PVI tiene siempre solución en un entorno de  $t_0$ .

Vamos a intentar darle condiciones a la  $f$  de ahora para poder comprobar si hay existencia y unicidad, igual que en el tema anterior. Vamos a integrar a ver qué pasa:

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \implies x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Por tanto, si existe solución, esta es de la forma  $x(t) = \hat{x} + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ .

Definimos el operador  $\forall z \in \mathcal{C}(I, \Omega) : T[z] := z + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds \implies x = T[x]$ .

Hemos reducido el problema a encontrar un punto fijo de  $T$ , procedemos calculando las iteradas de Picard de  $T$ :

$$x_0 = \hat{x} \wedge x_1 = T[x_0] = \hat{x} + \int_{t_0}^t f(s, \hat{x}) ds \wedge \cdots \wedge x_{k+1} = T[x_k] = \hat{x} + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds$$

El objetivo es encontrar el límite de esta sucesión y demostrar que es una solución del PVI.

**Ejemplo 3.1.**  $\{x' = x \wedge x(0) = 1\} \iff x(t) = 1 + \int_0^t x(s) ds$

$$\implies x_0 = 1 \wedge x_1 = 1 + t \wedge \cdots \wedge x_k = \sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!} \implies x_k(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^t$$

Como es una EDO autónoma y en el dato inicial el lado derecho no se anula, sabemos que la solución es única y podemos afirmar que es la que acabamos de encontrar. Este es un método de encontrar el límite que en este caso ha funcionado.

Pero necesitamos formalizar todo esto.

1. Concepto de límite de series de funciones.
2. ¿Toda sucesión de Cauchy es convergente?

$$3. \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) \, ds \stackrel{?}{=} \int_{t_0}^t \lim_{k \rightarrow \infty} f(s, x_k(s)) \, ds$$

$$4. \lim_{k \rightarrow \infty} f(s, x_k(s)) \stackrel{?}{=} f\left(s, \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(s)\right)$$

Los dos últimos puntos son equivalentes a  $\lim_{k \rightarrow \infty} T[x_k] \stackrel{?}{=} T\left[\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right]$

## 3.2 Conceptos de análisis

### 3.2.1 Convergencia puntual y uniforme

**Definición 3.1 (Convergencia puntual).** Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  con  $f_k: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $I \subset \mathbb{R}$  abierto una sucesión de funciones,  $(f_k)$  converge puntualmente a  $f$

$$\iff \forall t \in I : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = f(t)$$

$$\iff \forall t \in I : \forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$$

**Ejemplo 3.2.** La sucesión de funciones continuas  $(f_k)$  definida a continuación converge puntualmente a  $f$  que no es continua.

$$\forall t \in \mathbb{R} : f_k(t) := \begin{cases} 0, & t < -\frac{1}{k} \\ k(t + \frac{1}{k}), & -\frac{1}{k} \leq t < 0 \\ k(\frac{1}{k} - t), & 0 \leq t < \frac{1}{k} \\ 0, & t \geq \frac{1}{k} \end{cases} \implies f_k(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

12/03/2024

**Ejemplo 3.3.** La sucesión de funciones  $(x_k)$  definida a continuación no intercambia el límite con la integral.

$$x_k(t) := \begin{cases} 2k^2 t, & t \in [0, \frac{1}{2k}) \\ 2k^2 (\frac{1}{k} - t), & t \in [\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}) \\ 0, & t \in [\frac{1}{k}, 1) \end{cases} \implies \begin{aligned} & x_k(0) = 0 \wedge x_k(1) = 0 \\ & t \in (0, 1] \implies x_k(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 x_k(t) \, dt \stackrel{?}{=} \int_0^1 \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) \, dt:$$

$$\int_0^1 \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) \, dt = \int_0^1 0 \, dt = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 x_k(t) \, dt$$

**Definición 3.2 (Convergencia uniforme).** Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  con  $f_k: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $I \subset \mathbb{R}$  abierto

una sucesión de funciones,  $(f_k)$  converge uniformemente a  $f$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : \forall t \in I : |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$$

Es decir,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : \sup_{t \in I} |x_k(t) - x(t)| \leq \varepsilon$

**Observación 3.1.** • Los dos ejemplos anteriores no convergen uniformemente.

• La convergencia uniforme implica convergencia puntual.

**Proposición 3.1.** Sea  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones uniformemente convergente a  $x$ .

$\implies x$  es continua

**Demostración.** Sean  $\varepsilon > 0 \wedge t_0 \in I$ . Buscamos  $\delta > 0$  tal que, dado  $t \in I$

$$|t - t_0| < \delta \implies |x(t) - x(t_0)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{Para cada } k \in \mathbb{N}, |x(t) - x_k(t) + x_k(t) - x_k(t_0) + x_k(t_0) - x(t_0)| &\leq \\ &\leq |x(t) - x_k(t)| + |x_k(t) - x_k(t_0)| + |x_k(t_0) - x(t_0)| \end{aligned}$$

Como  $(x_k)$  converge uniformemente a  $x$ ,  $\kappa = \kappa(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : \forall t \in I : |x_k(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Entonces, para  $k = \kappa$ , se tiene

$$\begin{aligned} |x(t) - x(t_0)| &\leq |x(t) - x(t_0)| + |x(t) - x_\kappa(t_0)| + |x_\kappa(t_0) - x(t_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + |x_\kappa(t) - x_\kappa(t_0)| + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Como  $x_\kappa$  es continua,  $\exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \implies |x_\kappa(t) - x_\kappa(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\implies |x(t) - x(t_0)| < \varepsilon$$

■

**Proposición 3.2.** Sea  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones continuas  $x_i : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  que converge uniformemente a  $x : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  donde  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  está acotado.

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b x_k(t) dt = \int_a^b x(t) dt$$

**Demostración.** Sea  $\varepsilon > 0$ . La convergencia uniforme nos asegura que

$$\exists \kappa_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : \forall t \in (a, b) : |x_k(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

$$\begin{aligned} \implies \forall k \geq \kappa_\varepsilon : \left| \int_a^b x_k(t) dt - \int_a^b x(t) dt \right| &= \left| \int_a^b (x_k(t) - x(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |x_k(t) - x(t)| dt < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dt = \varepsilon \end{aligned}$$

■

**Ejemplo 3.4.** Consideramos la sucesión  $x_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } t \leq k \\ 0 & \text{si } t > k \end{cases}$

$$\implies \int_0^\infty x_k(t) dt = \int_0^k \frac{1}{k} dt = 1 \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = 0$$

### 3.2.2 Espacios normados y contracciones

Sea  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \mathcal{C}([a, b]) := \{x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \text{ continua}\}$  el espacio vectorial de funciones continuas.

con la norma  $\forall x \in \mathcal{C}([a, b]) : \|x\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$  es un espacio vectorial normado

$\implies (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  también es métrico con  $d(x, y) := \|x - y\|_\infty$

$d(x_k, x) = \|x_k - x\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |x_k(t) - x(t)| \rightarrow 0 \iff x_k \rightarrow x$  uniformemente

**Teorema 3.1.** Sean  $a, b \in \mathbb{R} : a < b \implies (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio completo.

Es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente. El recíproco también es cierto, toda sucesión convergente es de Cauchy.

**Demostración.** Sea  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset ([a, b])$  una sucesión de Cauchy. Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa \in \mathbb{N} : (k, l \geq \kappa \implies \|x_k - x_l\|_\infty < \varepsilon)$$

Recordemos que  $\|x_k - x_l\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |x_k(t) - x_l(t)|$

Fijamos  $\varepsilon > 0$  y  $t \in [a, b] \implies \forall k, l \geq \kappa : |x_k(t) - x_l(t)| \leq \|x_k - x_l\|_\infty < \varepsilon$

Esto demuestra que la sucesión de números reales  $(x_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.

Como  $\mathbb{R}$  es completo,  $\exists x(t) \in \mathbb{R} : x_k(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x(t)$ .

Veamos que el límite es uniforme: En efecto, sean  $k \geq \kappa, l \geq 1, k, l \in \mathbb{N}$ .

$\implies \forall t \in [a, b] : |x_k(t) - x_{k+l}(t)| \leq \|x_k - x_{k+l}\| < \varepsilon$  porque  $(x_k)$  es de Cauchy

Haciendo tender  $l \rightarrow \infty$ , tenemos  $\forall t \in [a, b] : \forall k \geq \kappa : |x_k(t) - x(t)| \leq \varepsilon$

Recordemos que  $x \in \mathcal{C}([a, b])$  por ser límite de funciones continuas.

Para el recíproco:

$$\|x_k - x_l\|_\infty \leq \|x_k - x + x - x_l\|_\infty \leq \|x_k - x\|_\infty + \|x_l - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

**Definición 3.3 (Punto fijo).** Sea  $T: \mathcal{C}([a, b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a, b])$  un operador,  $x: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  es un punto fijo de  $T \iff T[x] = x$ .

**Definición 3.4 (Contracción).** Sea  $C \subset X \wedge C \neq \emptyset$  donde  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio vectorial normado y  $T: C \longrightarrow C$  una aplicación,  $T$  es una contracción en  $C$

$$\iff \exists \alpha \in (0, 1) : \forall x, y \in C : \|T[x] - T[y]\| \leq \alpha \|x - y\|$$

**Observación 3.2.** Claramente, toda contracción es continua (con respecto a la norma correspondiente). En efecto, si  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C : x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in C$

$$\implies \|T[x_k] - T[x]\| \leq \alpha \|x_k - x\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

**Teorema 3.2 (Punto fijo de Banach).** Sea  $C \subset X \wedge C \neq \emptyset$  cerrado donde  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio normado completo y sea  $T: C \longrightarrow C$  una contracción  $\implies \exists! x \in C : T[x] = x$

14/03/2024

**Demostración.** Sea  $x_0 \in C$ . Definimos la sucesión  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n := T[x_{n-1}]$ .

$$\implies \|x_{n+1} - x_n\| = \|T[x_n] - T[x_{n-1}]\| \leq \alpha \|x_n - x_{n-1}\| \leq \dots \leq \alpha^n \|x_1 - x_0\|$$

Sean  $n, m \in \mathbb{N} \wedge n > m$ .

$$\begin{aligned} \implies \|x_n - x_m\| &= \|(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m)\| \\ &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \dots + \|x_{m+1} - x_m\| \\ &\leq (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \dots + \alpha^m) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \alpha^{n-1} (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n+1}) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \alpha^m \left( \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \right) \|x_1 - x_0\| = \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \kappa = \kappa(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (n > m \geq \kappa(\varepsilon) \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon) \implies \text{es de Cauchy}$$

Por tanto,  $(x_n)$  tiene límite, es decir,  $\exists x \in X : x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Como  $x_n \in C \wedge C$  es cerrado  $\implies x \in C$ .

Hay que ver que  $x$  es punto fijo de  $T$ . En efecto, tomando límites en  $x_{n+1} = T[x_n]$  y usando que  $T$  es continua por ser contractiva, se tiene

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} T[x_n] = T[x]$$

Falta probar la unicidad. Para ello, sean  $x, y \in C$  puntos fijos. Se tiene

$$\|x - y\| = \|T[x] - T[y]\| \leq \alpha \|x - y\| \implies (1 - \alpha) \|x - y\| \leq 0 \implies \|x - y\| = 0 \implies x = y$$

■

Para poder aplicar el teorema de punto fijo a nuestra aplicación  $T[x]$ , hay que ver que ésta es contractiva:

$$\begin{aligned}
\|T[x] - T[y]\|_\infty &= \max_{t \in [a, b]} \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \right| \\
&\leq \max_{t \in [a, b]} \left( \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \, ds \right) \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \max_{t \in [a, b]} \int_{t_0}^t L |x(s) - y(s)| \, ds \leq L \|x - y\|_\infty \left( \max_{t \in [a, b]} \int_{t_0}^t ds \right) = \\
&= L \|x - y\|_\infty \max_{t \in [a, b]} (t - t_0) = L(b - t_0) \|x - y\|_\infty \leq L(b - a) \|x - y\|_\infty
\end{aligned}$$

$$(*) \iff t > t_0 \wedge |f(s, x) - f(s, y)| \leq L|x - y|$$

( $f$  es Lipschitz con respecto a la segunda variable y es uniforme con respecto a la primera)

Así concluimos que  $\frac{(b-a)}{L} < 1 \implies T$  es una contracción.

■

18/03/2024

### 3.2.3 Funciones Lipschitz

**Definición 3.5 (Función Lipschitz).** Sea  $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  una función con  $\Omega \subset \mathbb{R}$  abierto, es Lipschitz en  $\Omega$

$$\iff \exists L \in \mathbb{R} : \forall x, \hat{x} \in \Omega : |f(x) - f(\hat{x})| \leq L |x - \hat{x}|$$

**Interpretación geométrica:** Si  $f$  es Lipschitz en  $\Omega$ , suponiendo que  $x > \hat{x}$ :

$$\begin{aligned}
|f(\hat{x}) - f(x)| \leq L(x - \hat{x}) &\implies -L(x - \hat{x}) \leq f(\hat{x}) - f(x) \leq L(x - \hat{x}) \\
&\implies f(\hat{x}) - L(x - \hat{x}) \leq f(x) \leq f(\hat{x}) + L(x - \hat{x})
\end{aligned}$$

Es como si en cada punto  $(x, f(x))$  de la gráfica se abriese un “cono” (dos rectas de pendientes  $L$  y  $-L$ ) que contiene el resto de la gráfica para  $\hat{x} > x$ .

### Observación 3.3.

1. Si  $f$  es Lipschitz en  $\Omega$ , entonces  $f$  es uniformemente continua en  $\Omega$ .  
(Sale al tomar  $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$  en la definición de continuidad uniforme).
2. A la constante  $L$  se le llama constante Lipschitz de  $f$  en  $\Omega$ .
3. Funciones con derivada no acotada no pueden ser Lipschitz.

### Ejemplo 3.5.

1. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin x$  y  $x, \hat{x} \in \mathbb{R}$ ,  $x < \hat{x}$ . Por el TVM  
 $\exists y \in (x, \hat{x}) : |f(x) - f(\hat{x})| = f'(y) |x - \hat{x}| \implies |f(x) - f(\hat{x})| = \cos(y) |x - \hat{x}| \leq |x - \hat{x}|$   
 Por tanto  $f(x) = \sin x$  es Lipschitz en  $\mathbb{R}$  con constante  $L = 1$ .
2. En realidad, si  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable con  $\forall x \in I : |f'(x)| \leq L \implies f$  es Lipschitz en  $I$  con constante  $L$ .

**Proposición 3.3.**

1. Sean  $f, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  dos funciones Lipschitz con constantes de Lipschitz  $L_f, L_g$  y sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha f + \beta g$  es Lipschitz.
2. Sean  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  y  $g: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^d$  dos funciones Lipschitz con constantes de Lipschitz  $L_f, L_g \implies g \circ f$  es Lipschitz con constante  $L_f L_g$ .

**Demostración.**

1. Sean  $x, \hat{x} \in \Omega$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} |\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha f(\hat{x}) + \beta g(\hat{x}))| &= |\alpha (f(x) - f(\hat{x})) + \beta (g(x) - g(\hat{x}))| \\ &\leq |\alpha| |f(x) - f(\hat{x})| + |\beta| |g(x) - g(\hat{x})| \\ &\leq (|\alpha| L_f + |\beta| L_g) |x - \hat{x}| \end{aligned}$$

2. Sean  $x, \hat{x} \in \Omega$ :

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\hat{x})| = |g(f(x)) - g(f(\hat{x}))| \leq L_g |f(x) - f(\hat{x})| \leq L_g L_f |x - \hat{x}|$$

■

**Definición 3.6 (Función Lipschitz en la segunda variable).**

Sea  $f: (a, b) \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función,  $f$  es Lipschitz respecto a su segunda variable, y uniforme con respecto a la primera

$$\iff \exists L \in \mathbb{R} : \forall x, \hat{x} \in \Omega : |f(t, x) - f(t, \hat{x})| \leq L |x - \hat{x}|$$

### 3.3 Existencia y unicidad de soluciones

**Teorema 3.3** (Existencia y unicidad global de soluciones). Sea  $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $a, b \in \mathbb{R}$   $\wedge$   $a < b$  una función continua y Lipschitz en la segunda variable y uniforme en la primera

$$\implies \forall t_0 \in [a, b] : \forall x \in \mathbb{R} : \exists! x \in \mathcal{C}^1([a, b]) : \begin{cases} \forall t \in [a, b] : x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = \hat{x} \end{cases}$$

**Demostración.** Estamos buscando un punto fijo de  $T[x] = \hat{x} + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ .

Sea  $L$  la constante Lipschitz de  $f$  en la segunda variable. Dividimos  $[t_0, b]$  en subintervalos cerrados de longitud  $< 1/L$ :

$$[t_0, b] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{N-1}, t_N = b]$$

Queremos encontrar una solución en  $[t_0, t_1]$ , para ello definimos  $T_1: \mathcal{C}([t_0, t_1]) \rightarrow \mathcal{C}([t_0, t_1])$

$$\forall x \in \mathcal{C}([t_0, t_1]) : \forall t \in [t_0, t_1] : T_1[x](t) := \hat{x} + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

$$\begin{aligned} \implies |T_1[x](t) - T_1[y](t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, y(s)) ds \right| \leq L \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds \\ &\leq L(t - t_0) \|x - y\|_\infty \leq L(t_1 - t_0) \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

$$\implies \forall x, y \in \mathcal{C}([a, b]) \|T_1[x] - T_1[y]\|_\infty \leq L(t_1 - t_0) \|x - y\|_\infty$$

Por tanto,  $T_1$  es una contracción con  $\alpha = L(t_1 - t_0) < 1$  en  $\mathcal{C}([t_0, t_1])$  y por el teorema de punto fijo de Banach,  $\exists! x_1 \in \mathcal{C}([t_0, t_1]) : T_1[x_1] = x_1$ . Por tanto, existe una solución única al PVI en  $[t_0, t_1]$ .

Ahora queremos encontrar una solución en  $[t_1, t_2]$  que “empiece donde acaba  $x_1$ ”. Definimos  $T_2: \mathcal{C}([t_1, t_2]) \rightarrow \mathcal{C}([t_1, t_2])$  como  $T_2[x](t) := x_1(t_1) + \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds$  y procedemos igual que antes para obtener  $x_2$ , la solución única en  $[t_1, t_2]$ .

Repetimos este proceso (sacando  $(x_j)_{j=1}^N$ ) hasta llegar a  $b$  y obtenemos una única función  $x \in \mathcal{C}^1([a, b])$  continua y derivable por construcción que es solución del PVI.

$$\forall j \in \mathbb{N}_N : \forall t \in [t_{j-1}, t_j] : x(t) = x_j(t)$$

■

**Corolario 3.1.** Sea  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función continua y Lipschitz en la segunda variable y uniforme en la primera

$$implies \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^d : \forall t_0 \in \mathbb{R} : \exists! x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} : x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = \hat{x} \end{cases}$$

**Demostración.** Podemos dividir  $\mathbb{R}$  en intervalos cerrados de longitud  $< 1/L$  y aplicar el teorema anterior. ■

**Definición 3.7 (Lipschitz local).** Sea  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función,  $f$  es localmente Lipschitz  $\iff \forall K \subset \Omega : f|_K$  es Lipschitz.



**Definición 3.8.** Sea  $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función,  $f$  es localmente Lipschitz en la segunda variable y uniforme en la primera

$$\iff \forall K \subset \Omega : \exists L_K \in \mathbb{R} : \forall (t, x), (\hat{t}, \hat{x}) \in K : |f(t, x) - f(\hat{t}, \hat{x})| \leq L_K |x - \hat{x}|$$

**Teorema 3.4** (Picard-Lindelöf). Sea  $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función continua y localmente Lipschitz en la segunda variable y uniforme en la primera

$$\implies \forall (t_0, \bar{x}) \in \Omega : \exists \varepsilon > 0 : \exists ! x \in \mathcal{C}^1([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]) : \begin{cases} \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] : x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = \bar{x} \end{cases}$$

**Demostración.** Como  $\Omega$  es abierto,  $\exists \rho, \delta > 0 : \mathcal{R}_{\rho, \delta} := (t_0 - \rho, t_0 + \rho) \times B_\delta(\bar{x}) \subset \Omega$ .

Como  $f$  es continua,  $\implies |f(t, x)| \leq \max_{(t, x) \in \mathcal{R}_{\rho, \delta}} |f(t, x)| =: C_{\rho, \delta}$ .

Como  $f$  es localmente Lipschitz en la segunda variable,

$$\implies \exists L_{\rho, \delta} \in \mathbb{R} : \forall (t, x), (\hat{t}, \hat{x}) \in \mathcal{R}_{\rho, \delta} : |f(t, x) - f(\hat{t}, \hat{x})| \leq L_{\rho, \delta} |x - \hat{x}|$$

Para cada  $\varepsilon \in (0, \rho]$  consideramos el conjunto

$$\mathcal{X}_{\rho, \delta} := \{x \in \mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]) : \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] : x(t) \in B_\delta(\bar{x})\}$$

Definimos  $T: \mathcal{X}_{\rho, \delta} \rightarrow \mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon])$  como

$$\forall x \in \mathcal{X}_{\rho, \delta} : \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] : T[x](t) := \bar{x} + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds$$

Queremos un  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño para que  $T$  sea una contracción en  $\mathcal{X}_{\rho, \delta}$ .

1.  $\mathcal{X}_{\rho, \delta} \neq \emptyset$  porque  $\bar{x} \in \mathcal{X}_{\rho, \delta}$

2. Sea  $(x_k) \subset \mathcal{X}_{\rho, \delta}$  una sucesión :  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in \mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon])$

$$\implies \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] : |x_k(t) - \bar{x}| \leq \delta \implies \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] : |x(t) - \bar{x}| \leq \delta$$

$$\implies \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] : x(t) \in B_\delta(\bar{x}) \implies x \in \mathcal{X}_{\rho, \delta}$$

3. Hay que ver que  $T[\mathcal{X}_{\rho, \delta}] \subset \mathcal{X}_{\rho, \delta}$ . Como  $\forall x \in \mathcal{X}_{\rho, \delta} : \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] :$

$$\begin{aligned} |T[x](t) - \bar{x}| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \right| \leq \int_{\min\{t_0, t_1\}}^{\max\{t_0, t_1\}} |f(s, x(s))| \, ds \\ &\leq \int_{t_0}^t C_{\rho, \delta} \, ds = C_{\rho, \delta} |t - t_0| \leq \varepsilon C_{\rho, \delta} \leq \delta \iff \varepsilon \leq \frac{\delta}{C_{\rho, \delta}} \end{aligned}$$

4. Veamos que  $T$  es una contracción en  $\mathcal{X}_{\rho, \delta}$ :

$$\begin{aligned} |T[x](t) - T[\hat{x}](t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, \hat{x}(s)) \, ds \right| \leq L_{\rho, \delta} |t - t_0| \leq \varepsilon L_{\rho, \delta} |x - \hat{x}| \\ &\leq |x - \hat{x}| \iff \varepsilon < \frac{1}{L_{\rho, \delta}} \end{aligned}$$

Por tanto,  $T$  es contractiva en  $\mathcal{X}_{\rho,\delta}$  y por el teorema de punto fijo de Banach,

$$\exists! x \in \mathcal{X}_{\rho,\delta} : x \text{ es solución del PVI.}$$

■

02/04/2024

**Corolario 3.2.** Bajo las condiciones del teorema Picard-Lindelöf, dos soluciones distintas de la EDO  $x' = f(t, x)$  no pueden cruzarse.

**Teorema 3.5** (Cauchy-Peano). Sea  $(t_0, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  y sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función continua en un entorno  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  de  $(t_0, x)$

$$\implies \exists x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d : \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] : \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x \end{cases}$$

### 3.4 Prolongabilidad

Bajo las condiciones del teorema Picard-Lindelöf,  $\forall (t_0, x) \in \Omega : \exists \varepsilon > 0 : \exists$  una única solución  $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon])$  del PVI. Entonces, podemos definir

$$T_+(t_0, x) = \sup\{T > t_0 : \text{el PVI tiene sol única definida en } [t_0, T]\}$$

$$T_-(t_0, x) = \inf\{T < t_0 : \text{el PVI tiene sol única definida en } (T, t_0]\}$$

**Teorema 3.6.** Bajo las condiciones del teorema Picard-Lindelöf, existe una única solución maximal del PVI definida en el intervalo maximal  $I = (T_-(t_0, x), T_+(t_0, x))$ .

04/04/2024

Sea  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función continua localmente Lipstchiz en  $x$  uniformemente en  $t$  con  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  abierto. Definimos

$$a \leq T_-(t_0, x_0) := \inf\{T < t_0 : \text{existe solución definida en } (T, t_0]\}$$

$$b \geq T_+(t_0, x_0) := \sup\{T > t_0 : \text{existe solución definida en } [t_0, T]\}$$

$$I := (T_-(t_0, x_0), T_+(t_0, x_0)) \cap \Omega = (a, b) \times U \cap U \subset \mathbb{R}^d \text{ abierto}$$

**Teorema 3.7** (Escape de compactos). Sea  $(a, b) \times U =: \Omega$ , con  $U \subset \mathbb{R}^d$  abierto, sea  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  con las hipótesis del teorema de Picard-Lindelöf, sea  $(t_0, x) \in \Omega$

$$\implies \begin{cases} T_+ < b \implies \forall K \subset U \text{ compacto} : \exists t_+ \in (t_0, T_+) : \forall t \in (t_+, T_+) : x(t) \notin K \\ T_- > a \implies \forall K \subset U \text{ compacto} : \exists t_- \in (T_-, t_0) : \forall t \in (T_-, t_-) : x(t) \notin K \end{cases}$$

**Demostración.** Suponemos por contradicción que existe un  $K \subset U$  compacto y que

existe  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (t_0, T_+)$  tal que  $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_+$  y  $\forall k \in \mathbb{N} : x(t_k) \in K$ . Entonces, existe una subsucesión (que denoto igual) tal que  $x(t_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{x} \in K$ .

Veamos que  $\lim_{t \rightarrow T_+} x(t) = \bar{x}$ . Fijamos  $\delta > 0 : V = [T_+ - \delta, T_+] \times \overline{B_\delta(\bar{x})} \subset \Omega = (a, b) \times U$ . Claramente, existe  $M := \max_{(t,x) \in V} |f(t, x)|$ .

Si no es cierto que  $\lim_{t \rightarrow T_+} x(t) = \bar{x}$ , entonces existen  $\gamma \in (0, \delta)$  y  $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (t_0, T_+)$  tales que  $\tau_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_+$  y  $|x(\tau_k) - \bar{x}| \geq \gamma$ .

Se puede elegir  $\tau_k$  de forma que  $|x(\tau_k) - \bar{x}| = \gamma \wedge \forall t \in [\min\{t_k, \tau_k\}, \max\{t_k, \tau_k\}] : |x(\tau_k) - \bar{x}| \leq \gamma < \delta$

$$\begin{aligned} 0 < \gamma &\leq |x(\tau_k) - \bar{x}| \leq |x(\tau_k) - x(t_k)| + |x(t_k) - \bar{x}| \\ \xi_k \in (\min\{\tau_k, t_k\}, \max\{\tau_k, t_k\}) &\implies = |x'(\xi_k)| |\tau_k - t_k| + |x(t_k) - \bar{x}| \\ &= |f(\xi_k, x(\xi_k))| |\tau_k - t_k| + |x(t_k) - \bar{x}| \leq M |\tau_k - t_k| + |x(t_k) - \bar{x}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que efectivamente  $\lim_{t \rightarrow T_+} x(t) = \bar{x} \in K$ .

Paso 3: Hemos probado que  $x$  se extiende de manera continua a  $(T_-, T_+]$ . Ahora consideramos el problema  $\{x' = f(t, x) \wedge x(T_+) = \bar{x}\}$ . Por el teorema de Picard-Lindelöf, existe una solución  $y : (T_+ - \varepsilon, T_+ + \varepsilon) \rightarrow U$ . Por unicidad local,  $\forall t \in (T_+ - \varepsilon, T_+ + \varepsilon) : y(t) = x(t)$ .

Como  $x$  e  $y$  se “pegan” bien, hemos construido una solución de  $\{x' = f(t, x) \wedge x(t_0) = x_0\}$  definida en  $(T_-, T_+ + \varepsilon)$ . Esto contradice la maximalidad de  $(T_-, T_+)$ . ■

**Corolario 3.3.** Bajo las condiciones del teorema de escape de compactos, si  $\Omega = (a, b) \times \mathbb{R}^d$

$$\implies \begin{cases} T_+ < b \implies |x(t)| \xrightarrow{t \rightarrow T_+} \infty \\ T_- > a \implies |x(t)| \xrightarrow{t \rightarrow T_+} \infty \end{cases}$$

08/04/2024

**Demostración.** Para cada  $M > 0$ , definimos  $K_M := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq M\} = \overline{B_M(0)}$ .

Si  $T_+ < b$ , el teorema de escape de compactos dice que

$$\exists t_+ \in (t_0, T_+) : \forall t \in (t_+, T_+) : x(t) \notin K_M$$

Esto es lo mismo que decir que  $\forall t \in (t_+, T_+) : |x(t)| > M$ .

Como  $M$  es arbitraria, se concluye el primer apartado (el segundo es análogo). ■

**Ejemplo 3.6.** Sea  $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\forall (t, x) \in \Omega : f(t, x) := \frac{x^2}{t}$ .

Comprobamos que  $f$  satisface las condiciones del Teorema de Picard-Lindelöf. En efecto, sea  $K \subset \Omega$  compacto; entonces:

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, \tilde{x})| &= \left| \frac{x^2 - \tilde{x}^2}{t} \right| = \left| \frac{|x + \tilde{x}| \cdot |x - \tilde{x}|}{t} \right| \\ &\leq \frac{|x| + |\tilde{x}| + |x - \tilde{x}|}{t} \leq \max_{(s, y) \in K} \left[ \frac{|y| - |\tilde{y}|}{s} \right] |x - \tilde{x}| \end{aligned}$$

Por el Teorema de Picard-Lindelöf

$$\forall (t_0, x_0) \in \Omega : \exists! \text{ solución local del PVI } \begin{cases} x' = \frac{x^2}{t} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \text{ para } t \in (T_-, T_+)$$

En realidad, la única solución es explícita:  $x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \log\left(\frac{t}{t_0}\right)}$ ,  $(t_0, x_0) \in \Omega, t > 0$ .

- $T_- = 0 = a$  por lo que el corolario no nos dice nada. En nuestro caso,  $\lim_{t \rightarrow T_-^+} |x(t)| = 0$ .
- $T_+ = t_0 e^{1/x_0} < +\infty = b$ , dice que  $\lim_{t \rightarrow T_-^-} |x(t)| = +\infty$  también en la expresión explícita.

**Ejemplo 3.7.** Sea  $\Omega = \mathbb{R} \times (-1, 1)$  y  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\forall (t, x) \in \Omega : f(t, x) := \sqrt{1 - x^2}$ .

Veamos de nuevo que se cumplen las condiciones del Teorema de Picard-Lindelöf:

$$\forall (t, x) \in \Omega : \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Sea  $K \subset \Omega$ . Obviamente,  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \max_{(x, y) \in K} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|$ . Teniendo esto, en cuenta

$$\implies \forall (t, x), (t, \tilde{x}) \in K : |f(t, x) - f(t, \tilde{x})| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| |x - \tilde{x}| \leq L_K |x - \tilde{x}|$$

$$\implies \forall (t_0, x_0) \in \Omega : \exists! \text{ solución local del PVI } \begin{cases} x' = \sqrt{1 - x^2} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \text{ ara } t \in (T_-, T_+)$$

De hecho, en este caso, la única solución es explícita:  $x(t) = \sin t, t \in (T_-, T_+) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Aquí, en lugar de explosión cuando  $t \rightarrow T_-$  ó  $t \rightarrow T_+$ , lo que sucede es que  $(t, x(t)) \rightarrow \partial\Omega$ , y por tanto puede perderse (y de hecho se pierde) la unicidad local.

**Ejemplo 3.8.** Sea  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  y sea  $f(t, x) := -\frac{1}{2x}$ .

Claramente se cumplen las condiciones de Picard-Lindelöf. Entonces, hay existencia y unicidad local de solución del PVI  $\{x' = f(t, x(t)) \wedge x(t_0) = x_0\}, t \in (T_-, t_+)$ .

De hecho, para  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , se tiene que  $\forall t \in (-\infty, x_0^2 + t_0) : x(t) = \sqrt{(x_0^2 + t_0) - t}$ .

Cuando la  $t \rightarrow T_+$  no hay ni explosión ni pérdida de unicidad, sino que no puedo extender la solución porque no existe.

09/04/2024

**Corolario 3.4.** En las condiciones del teorema de escape de compactos, sea  $\Omega = (a, b) \times \mathbb{R}^d$  y sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que  $a \leq \alpha < \beta \leq b$ . Sea  $v: (\alpha, \beta) \rightarrow [0, \infty)$  continua, y sea  $(t_0, x_0) \in (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^d$  de forma que  $|x_0| \leq v(t_0)$ .

Supongamos que la solución de  $\{x' = f(t, x) \wedge x(t_0) < x_0\}$  cumple que

$$\forall t \in (\alpha, \beta) \cap (T_-(t_0, x_0), T_+(t_0, x_0)) : |x(t)| \leq v(t) \implies (\alpha, \beta) \subset (T_-, T_+)$$

**Demostración.** Si  $\beta \geq T_+$ , entonces  $(\alpha, \beta) \cap (T_-, T_+) = (\max\{\alpha, T_-\}, T_+)$ .

Sea  $c \in (\max\{\alpha, T_-\}, T_+)$ . Claramente,  $[c, T_+] \subset (\alpha, \beta)$ .

Entonces,  $v$  es acotada en  $[c, T_+]$  y, en particular, en  $(x, T_+)$ .

En consecuencia,  $x$  está acotada en  $(c, T_+)$ . Sin embargo,  $\lim_{t \rightarrow T_+} |x(t)| = \infty \rightarrow \leftarrow$  ■

### 3.5 Dependencia continua

Sea  $x' = f(t, x)$  una EDO. Supongamos que  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  con  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  abierto y  $f$  Lipschitz con constante  $L$  en  $x$  uniformemente en  $t$ .

Consideramos los PVI  $\{x' = f(t, x) \wedge x(t_0) = x_0\}$  y  $\{x' = f(t, x) \wedge x(t_0) = \hat{x}_0\}$  con  $(t_0, x_0), (t_0, \hat{x}_0) \in \Omega$ . Supongamos que las soluciones son  $x$  y  $\hat{x}$  respectivamente.

$$\begin{aligned} |x(t) - \hat{x}(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds - \hat{x}_0 - \int_{t_0}^t f(s, \hat{x}(s)) ds \right| \\ &\stackrel{t \geq t_0}{\leq} |x_0 - \hat{x}_0| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, \hat{x}(s))| ds \\ &\leq |x_0 - \hat{x}_0| + L \int_{t_0}^t |x(s) - \hat{x}(s)| ds =: y(t) \end{aligned}$$

- $\forall (s, y), (s, \hat{y}) \in K \subset \Omega : |f(s, y) - f(s, \hat{y})| \leq L |y - \hat{y}|$
- $\forall t \in [t_0, t_0 + T] : (s, x(s)), (s, \hat{x}(s)) \in K$

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \leq g(t) \implies g'(t) = L |x(t) - \hat{x}(t)| \implies g(t) \implies e^{-Lt} g'(t) \leq e^{-Lt} L g(t)$$

$$\iff \frac{d}{dt} (e^{-Lt} g(t)) \leq 0 \implies e^{-Lt} g(t) - e^{-Lt_0} g(t_0) \leq 0$$

$$\implies |x(t) - \hat{x}(t)| \leq g(t) \leq e^{L(t-t_0)} |x_0 - \hat{x}_0|$$

$$\begin{aligned}
t \in [t_0 - T, t_0] &\implies |x(t) - \hat{x}(t)| \leq e^{L(t_0-t)} |x_0 - \hat{x}_0| \\
\implies \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] : &\boxed{|x(t) - \hat{x}(t)| \leq e^{L|t-t_0|} |x_0 - \hat{x}_0|}
\end{aligned}$$

En efecto, en el intervalo  $[t_0 - T, t_0 + T]$

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \leq e^{LT} |x_0 - \hat{x}_0| < e^{LT} \delta = \varepsilon$$

**Ejemplo 3.9.**  $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 : f(t, x) = \frac{2}{1+t^2} \arctan(x)$ ,  $h(x) = \arctan x$ .

$$\begin{aligned}
\implies 0 \leq h'(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1 &\implies |f(t, x) - f(t, \hat{x})| = \left| \frac{2}{1+t^2} (\arctan x - \arctan \hat{x}) \right| \leq 2 |x - \hat{x}| \\
&\implies \forall t \in \mathbb{R} : |x(t) - \hat{x}(t)| \leq e^{2|t-t_0|} |x_0 - \hat{x}_0|
\end{aligned}$$

Si  $t \in [t_0 - T, t_0 + T] \implies |x(t) - \hat{x}(t)| \leq e^{2T} |x_0 - \hat{x}_0|$

## 4 Sistemas lineales de primer orden

Sea  $\forall t \in (a, b) : X'(t) = A(t)X(t) + g(t)$ , con  $a_j^i, g_j^i \in C((a, b))$  y  $d \in \mathbb{N} \wedge d > 1$ .

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1d}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(t) & \cdots & a_{dd}(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} X^1(t) \\ \vdots \\ X^d(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} g^1(t) \\ \vdots \\ g^d(t) \end{pmatrix}$$

Recordamos que  $\begin{cases} x' = a(t)x + g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \implies x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t g(s) e^{\int_s^t a(u) du} ds.$

**Teorema 4.1.** Sean  $t_0 \in (a, b)$  y  $X_0 \in \mathbb{R}^d$ .

$\implies$  El PVI  $\{X' = A(t)X + g(t) \wedge X(t_0) = X_0\}$  tiene solución única en  $(a, b)$

**Demostración.** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : a < \alpha < \beta < b$  i.e.  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ . Vamos a demostrar existencia y unicidad global en  $[\alpha, \beta]$ . En efecto, denotamos

$$\forall t \in (a, b) : \forall X \in \mathbb{R}^d : f(t, X) := A(t)X + g(t) = \begin{pmatrix} f^1(t, X) \\ \vdots \\ f^d(t, X) \end{pmatrix}$$

Por otra parte, sea  $M := \max_{\substack{1 \leq i \wedge j \leq d \\ t \in [\alpha, \beta]}} |a_j^i(t)|$ .

$$\begin{aligned} \implies |f^i(t, X) - f^i(t, Y)| &= |A(t)(X - Y)| = \left| \sum_{j=1}^d a_j^i(t)(X^j - Y^j) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^d |a_j^i(t)| |X^j - Y^j| \leq M \sum_{j=1}^d |X^j - Y^j| \\ &\leq M \sqrt{d} \sqrt{\sum_{j=1}^d |X^j - Y^j|^2} = M \sqrt{d} |X - Y| \end{aligned}$$

$$|f(t, X) - f(t, Y)| \leq \left( \sum_{i=1}^d |f^i(t, X) - f^i(t, Y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{i=1}^d M^2 d |X - Y|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = Md |X - Y|$$

$$\implies \forall X, Y \in \mathbb{R}^d : \forall t \in [\alpha, \beta] : |f(t, X) - f(t, Y)| \leq Md |X - Y|$$

Por el teorema de existencia y unicidad global,  $\exists$  una única solución definida en  $[\alpha, \beta]$ .

Como  $\alpha, \beta$  son arbitrarios, la solución es única en  $(a, b) = \bigcup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)} [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ .

Definimos  $X : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^d$  como: si  $t \in (a, b)$ , tomamos  $\varepsilon > 0$  tal que  $t \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ ,  $X(t)$  es la única solución en  $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ . ■

## 4.1 El problema homogéneo

Sea  $X' = A(t)X$  un sistema lineal homogéneo (SLH). Sean  $X(t)$  y  $Y(t)$  soluciones del SLH y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Vemos que las soluciones forman un espacio vectorial (de funciones).

$$(\alpha X + \beta Y)' = \alpha X' + \beta Y' = \alpha A(t)X + \beta A(t)Y = A(t)(\alpha X + \beta Y)$$

**Definición 4.1 (Independencia lineal de funciones).** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_k: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d$  funciones, son linealmente independientes

$$\iff \left( \forall t \in (a, b) : \sum_{j=1}^k \alpha_j X_j(t) = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0 \right)$$

Si  $X_1(\bar{t}), \dots, X_k(\bar{t})$  para algún  $\bar{t} \in (a, b)$ , tenemos que las funciones son linealmente independientes:

$$\forall t \in (a, b) : \sum_{i=1}^k \alpha_i X_i(t) = 0 \implies \sum_{i=1}^k \alpha_i X_i(\bar{t}) = 0 \implies \forall i \implies X_i : \forall i : \alpha_i = 0 \text{ linealmente independiente}$$

15/04/2024

**Proposición 4.1.** Sean  $A(t) = (a_j^i(t)) \wedge a_j^i \in \mathcal{C}((a, b)) \wedge i, j = 1, \dots, d$   
 $\implies \dim \{X: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d : X' = A(t)X\} = d$

**Demostración.** Para cada  $j = 1, \dots, d$ , sea  $\Pi_j(t; t_0)$  la solución (única) de

$$\forall t \in (a, b) : X' = A(t)X \wedge X(t_0) = e_j$$

donde  $e_j$  es el vector  $j$ -ésimo de la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ . Sabemos que  $\{\Pi_j(t_0; t_0)\}_{j=1}^d$  (\*) es linealmente independiente. Por tanto,  $\{\Pi_j\}_{j=1}^d$  es linealmente independiente.

(\*) Se denominan soluciones principales del SLH.

Veamos ahora que  $\{\Pi_j\}_{j=1}^d$  es un sistema generador de las soluciones del SLH. Sea  $X(t)$  una solución del SLH. Denotamos  $X_0 = X(t_0) \in \mathbb{R}^d$ . Escribimos  $X_0$  como combinación

$$\text{lineal de la base canónica de } \mathbb{R}^d: X_0 = \sum_{j=1}^d X_0^j e_j.$$

Definimos la función  $\forall t \in (a, b) : Y(t) := \sum_{j=1}^d X_0^j \cdot \Pi_j(t; t_0)$ . Observamos que

- $Y$  es combinación lineal de soluciones del SLH, luego también es solución del SLH.
- $Y(t_0) = \sum_{j=1}^d X_0^j e_j = X_0$

Por unicidad,  $X = Y = \sum_{j=1}^d X_0^j \Pi_j(t; t_0)$ . ■



Supongamos que tenemos un conjunto  $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$  de soluciones del SLH. ¿Cómo sabemos si son linealmente independientes?

$$\exists(\bar{t}) \in (a, b) : \det(\phi_1, \dots, \phi_d) \neq 0 \iff \{\phi_j(\bar{t})\}_{j=1}^d \text{ son vectores l.i.}$$

**Definición 4.2 (Wronskiano).** Sean  $X_j : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^d, j = 1, \dots, d$  funciones  $W[X_1, \dots, X_d]$  es su wronskiano

$$\iff \forall t \in (a, b) : W[X_1, \dots, X_d](t) = \det(X_1(t), \dots, X_d(t))$$

Ya sabemos que si  $W[X_1, \dots, X_d](\bar{t}) \neq 0$  para algún  $\bar{t} \in (a, b)$  entonces  $\{X_1, \dots, X_d\}$  son l.i. Sin embargo, si  $W[X_1, \dots, X_d](t)$  se anula en algún punto (o en todos), no podemos afirmar que sean linealmente dependientes.

**Ejemplo 4.1.** Sea  $X_1 = \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \wedge X_2 = \begin{cases} \begin{pmatrix} -t^3 \\ -3t^2 \end{pmatrix} & t \in (-1, 0] \\ \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix} & t \in [0, 1) \end{cases} \implies X_1, X_2 \in \mathcal{C}((-1, 1), \mathbb{R}^2).$

$$\forall t \in (-1, 0] : W[X_1, X_2](t) = \det \begin{pmatrix} t^3 & -t^3 \\ 3t^2 & -3t^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\forall t \in [0, 1) : W[X_1, X_2](t) = \det \begin{pmatrix} t^3 & t^3 \\ 3t^2 & 3t^2 \end{pmatrix} = 0$$

Sin embargo, veamos que  $X_1, X_2$  son l.i. como funciones.

Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que  $\forall t \in (-1, 1) : \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) = 0$ . Si  $t \in (-1, 0)$ , entonces  $\alpha X_1(t) + \beta X_2(t) = 0 \implies (\alpha - \beta)X_1(t) = 0 \implies \alpha = \beta$ . Si  $t \in [0, 1)$ , entonces  $\alpha X_1(t) + \beta X_2(t) = 0 \implies (\alpha + \beta)X_1(t) = 0 \implies \alpha = -\beta$ . Por tanto,  $\alpha = \beta = 0$ .

**Lema 4.1.** Sean  $X_j, j = 1, \dots, k$  soluciones del SLH.

$$\exists \bar{t} \in (a, b) : \{X_j(\bar{t}) : j \in \mathbb{N}_k\} \text{ l.i.} \implies \{X_j : j \in \mathbb{N}_k\} \text{ l.i.}$$

**Demostración.** Sabemos que  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  no todos nulos :  $\sum_{j=1}^k \alpha_j X_j(\bar{t}) = 0$ .

Definimos  $\forall t \in (a, b) : Y(t) := \sum_{j=1}^k \alpha_j X_j(t)$ . Esta función es solución del SLH y  $Y(\bar{t}) = 0$ .

Por tanto,  $Y$  es solución del PVI  $\{X' = A(t)X \wedge X(\bar{t}) = 0\}$ .

Como la solución es única  $\forall t \in (a, b) : Y(t) = 0 \implies \forall t \in (a, b) : \sum_{j=1}^k \alpha_j X_j(t) = 0$ .

Por definición,  $\{X_j : j \in \mathbb{N}_k\}$  son l.d. ■

**Proposición 4.2.** Sean  $X_1, \dots, X_d$  soluciones del SLH.

$$\implies \left( \forall t \in (a, b) : W[X_1, \dots, X_d](t) = 0 \not\iff \forall t \in (a, b) : W[X_1, \dots, X_d](t) \neq 0 \right)$$

16/04/2024

**Definición 4.3 (Sistema fundamental).** Sean  $X' = A(t)X$  un SLH,  $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$  es un sistema fundamental de soluciones  $\iff \phi_1, \dots, \phi_d$  son soluciones del SLH l.i.

Un sistema fundamental define una matriz solución fundamental:  $\Phi(t) := \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \cdots & \phi_d(t) \end{pmatrix}$ .

A partir de  $\Phi$  podemos encontrar cualquier solución de  $\{X' = A(t)X \wedge X(t_0) = X_0\}$ :

$$X = \Phi c = \begin{pmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^d c_j \phi_j \text{ con } c \in \mathbb{R}^d \wedge X(t_0) = \Phi(t_0) = c = X_0$$

$$\implies c = (\Phi(t_0))^{-1} X_0 \implies \boxed{X(t) = \Phi(t) (\Phi(t_0))^{-1} X_0}$$

## 4.2 Sistema no homogéneo

**Proposición 4.3.** Sea  $\forall t \in (a, b) \subset \mathbb{R} : X' = A(t)X + g(t)$  un sistema lineal (SL).

Sea  $X_p$  una sol. particular del SL y sea  $\{X_1, \dots, X_d\}$  una base del espacio de sol. del SLH.

$$\implies X \text{ sol. del SL} \iff \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^d \subset \mathbb{R} : \forall t \in (a, b) : X(t) = X_p(t) + \sum_{i=1}^d \alpha_i X_i(t)$$

**Demostración.** El cambio de variable  $Y = X - X_p$  transforma el SL en un SLH. Es decir, el conjunto de soluciones del SL se caracteriza mediante el del SLH. ■

### ¿Cómo encontrar una solución particular $X_p$ del SL?

Si  $\Phi$  es una matriz solución fundamental del SLH, buscamos  $X_p$  de la forma  $X_p = \Phi(t)\alpha(t)$ , donde  $\alpha(t) = (\alpha^1(t), \dots, \alpha^d(t))$

$$\begin{aligned} \implies X'_p &= \Phi'(t)\alpha(t) + \Phi(t)\alpha'(t) = A(t)\Phi(t)\alpha(t) + \Phi(t)\alpha'(t) = A(t)X_p + g(t) \\ &= A(t)\Phi(t)\alpha(t) + g(t) \implies \Phi(t)\alpha'(t) = g(t) \implies \alpha'(t) = (\Phi(t))^{-1} g(t) \end{aligned}$$

Por tanto,  $\alpha(t) = \int_{t_0}^t (\Phi(s))^{-1} g(s) ds$ . En definitiva,  $X_p(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t (\Phi(s))^{-1} g(s) ds$

Como toda solución del SL es de la forma  $X(t) = X_p(t) + \sum_{i=1}^d \alpha_i X_i(t)$ , podemos escribir

$$X(t) = \Phi(t) \left( c + \int_{t_0}^t (\Phi(s))^{-1} g(s) ds \right) \text{ con } c \in \mathbb{R}^d$$

Para resolver el PVI, basta con calcular  $c$  tal que  $X(t_0) = X_0$ .

$$X_0 = X(t_0) = \Phi(t_0) \left( c + \int_{t_0}^{t_0} (\Phi(s))^{-1} g(s) ds \right) = \Phi(t_0)c \implies c = (\Phi(t_0))^{-1} X_0$$

$$\implies \forall t \in (a, b) : \boxed{X(t) = \Phi(t) \left( (\Phi(t_0))^{-1} X_0 + \int_{t_0}^t (\Phi(s))^{-1} g(s) ds \right)}$$

17/04/2024

### 4.3 Sistemas lineales de coeficientes constantes

Sea  $\forall t \in \mathbb{R} : X' = AX + g(t)$ , con  $A = (a_i^j)_{i,j=1}^d$  con  $a_i^j \in \mathbb{R}$  constantes y  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ .

Nos reducimos al caso  $g \equiv 0$ .

#### 4.3.1 El caso diagonalizable

##### Diagonalizable con autovalores reales

Si  $d = 1$ , entonces  $A = a \in \mathbb{R}$  y  $X' = aX \implies X(t) = ce^{at}, c \in \mathbb{R}$ .

Si  $d > 1$ , entonces  $X(t) = \xi e^{\lambda t}$  con  $t \in \mathbb{R}$  y  $\xi \neq 0 \in \mathbb{R}^d$ ?

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t} \xi \implies AX(t) = e^{\lambda t} A\xi$$

Para que  $X$  sea solución,  $\lambda e^{\lambda t} \xi = e^{\lambda t} A\xi \implies e^{\lambda t} (A\xi - \lambda \xi I) = 0 \implies A\xi = \lambda \xi I$ .

Si los autovalores de  $A$   $\lambda_i$  son reales y existe una base de autovectores asociados  $\xi_i \in \mathbb{R}^d$ , entonces las funciones  $\{X_i(t) = \xi_i e^{\lambda_i t}\}_{i=1}^d$  forman un sistema fundamental de soluciones del SLH (porque  $\{X_i(0)\}_{i=1}^d$  son independientes).

Por tanto, la solución general del SLH es 
$$X(t) = \sum_{i=1}^d c_i X_i(t) = \sum_{i=1}^d c_i \xi_i e^{\lambda_i t}.$$

**Ejemplo 4.2.** Sea 
$$\begin{cases} (X^1)' = X^1 + 2X^2 \\ (X^2)' = 2X^1 + X^2 \end{cases} \iff X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X.$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \implies \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1 \implies \Lambda = \{-1, 3\}$$

- $\lambda_1 = 3 : \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$
- $\lambda_2 = -1 : \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$

Como  $\{X_1(0), X_2(0)\}$  son l.i.,  $\{X_1, X_2\}$  es un sistema fundamental de soluciones del SLH.

Por tanto, la solución general del SLH es

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Dado el PVI  $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = (1, 0) =: e_1 \end{cases}$  queremos calcular  $c_1, c_2$  tal que  $X(0) = \Phi(0)c = c$ .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

**Ejemplo 4.3.** Sea el SL  $X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} X(t) &= X_p + \Phi(t)c \wedge X_p(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t (\Phi(s))^{-1} g(s) ds \\ \Rightarrow X_p &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-3s} & e^{3s} \\ e^s & -e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ e^s \end{pmatrix} ds = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} se^{-3s} + e^{-2s} \\ se^s - e^{2s} \end{pmatrix} ds \\ \Rightarrow X_p &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^t se^{-3s} + e^{-2s} ds \\ \int_0^t se^s - e^{2s} ds \end{pmatrix} = \dots = c_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

18/04/2024

## Diagonalizable con autovalores complejos

Partimos de una base de autovectores en  $C^d$ . A partir de ella, construimos una en  $\mathbb{R}^d$ .

Sea  $\lambda = \alpha + \beta i$  autovalor de  $A$  y  $\xi = u + iv$ , con  $u, v \in \mathbb{R}^d$ , autovector asociado. Observamos que  $A\xi = \lambda\xi \Rightarrow A\bar{\xi} = \bar{\lambda}\bar{\xi}$ .

Podemos definir dos soluciones complejas del SLH linealmente independientes:

$$X_1(t) = e^{\lambda t} \xi \wedge X_2(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{\xi} = \overline{X_1(t)}$$

Ahora, tomamos las combinaciones lineales  $X_R(t) = \frac{X_1(t) + X_2(t)}{2}$  y  $X_I(t) = \frac{X_1(t) - X_2(t)}{2i}$ , que son soluciones (por ser combinaciones lineales de soluciones) reales del SLH.

Veamos que son independientes: Sean  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $\forall t \in \mathbb{R} : c_1 X_R(t) + c_2 X_I(t) = 0$ .

$$\frac{c_1}{2} (X_1 + X_2) + \frac{c_2}{2i} (X_1 - X_2) = 0 \implies \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2i}\right) X_1 + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2i}\right) X_2 = 0$$

Como  $X_1$  y  $X_2$  son l.i.,  $\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2i} = 0 = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2i} \implies c_1 = c_2 = 0$ .

**Ejemplo 4.4.** Sea el SLH  $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = AX$ .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \Lambda = \{1, i, -i\}$$

$$\bullet \lambda_1 = 1 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \\ \xi_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t.$$

$$\bullet \lambda_2 = i : \begin{pmatrix} 1 - i & 0 & -1 \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2^1 \\ \xi_2^2 \\ \xi_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \xi_2 = (i, 1, 1 + i) \\ \bar{\xi}_1 = (-i, 1, 1 - i) \end{cases}.$$

$$\implies \begin{cases} X_2(t) = \xi_2 e^{it} = (i, 1, 1 + i) e^{it} \\ X_3(t) = \bar{\xi}_2 e^{-it} = (-i, 1, 1 - i) e^{-it} \end{cases}$$

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} \wedge X_3(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

Definimos  $X_R(t) = \frac{X_2(t) + X_3(t)}{2}$  y  $X_I(t) = \frac{X_2(t) - X_3(t)}{2i}$ .

$$\implies X_R(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} \wedge X_I(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución general del SLH es

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

### 4.3.2 El caso no diagonalizable

Sea el PVI  $\{X' = AX \wedge X(0) = 0\}$  con  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  y  $A$  no diagonalizable. Definimos las iteraciones de Picard:

$$X_0(t) = X_0$$

$$X_1(t) = X_0 + \int_0^t AX_0 ds = X_0 + AX_0 t = (I + At)X_0$$

$$X_2(t) = X_0 + \int_0^t AX_1(s) ds = X_0 + \int_0^t AX_0 + A^2 X_0 s ds = X_0 + AX_0 t + \frac{1}{2} A^2 X_0 t^2 = (I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2) X_0$$

$$\text{Como vemos } X_k(t) = \left( \sum_{j=0}^k A^j \frac{t^j}{j!} \right) X_0 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} A^j \frac{t^j}{j!} \right) X_0.$$

**Definición 4.4 (Exponencial de una matriz).** Sea  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ ,  $e^A$  es su exponencial

$$\Longleftrightarrow e^A := \sum_{j=0}^{\infty} A^j \frac{t^j}{j!}$$

22/04/2024

**Observación 4.1.** Usando las iteradas de Picard, se comprueba que  $X(t) = e^{At} X_0$  es la única solución de  $X' = AX \wedge X(0) = X_0$ .

**Propiedades del exponencial de una matriz:** Sean  $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  matrices cuadradas.

1. Si  $AB = BA$ , entonces  $e^{A+B} = e^A e^B$ .
2. Si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces  $e^{(\alpha+\beta)A} = e^{\alpha A} e^{\beta A}$ .
3.  $\lambda \in \mathbb{R}$  autovalor de  $A \iff e^\lambda \in \mathbb{R}$  autovalor de  $e^A$ .
4.  $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$  (Junto con  $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_d$  y  $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_d$ ).
5.  $e^A$  es invertible con  $e^{-A} = (e^A)^{-1}$ .
6. Si  $C$  es una matriz invertible tal que  $A = CJC^{-1}$ , entonces  $e^A = Ce^J C^{-1}$ .
7. Si en 6.,  $J$  es una matriz por bloques, entonces  $e^J$  es también una matriz por bloques.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_k \end{pmatrix} \implies e^J = \begin{pmatrix} e^{J_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{J_k} \end{pmatrix}$$

**Definición 4.5 (Volumen).** Sea  $E \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto “medible”,  $\text{vol } E := \int_E 1 dx$ .

**Corolario 4.1 (Liouville).** Sea  $E \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto medible y  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ .

$$\implies \forall t \in \mathbb{R} : \text{vol } e^{tA}(E) = e^{t \text{tr}(A)} \text{vol } E$$

En particular, si  $\text{tr}(A) = 0$  y, por tanto,  $\text{tr}(tA) = 0$ , entonces  $\forall t \in \mathbb{R} : \text{vol } e^{tA}(E) = \text{vol } E$ .

En palabras, la evolución mantiene el volumen.

**Demostración.** Definimos  $\Phi: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  como  $\Phi(\xi) = e^{tA}\xi$ .

$$\begin{aligned} \implies \text{vol}(e^{tA}(E)) &= \int_{e^{tA}(E)} 1 \, dx = \int_{\Phi(E)} 1 \, dx = \int_E |\det J_\Phi(y)| \, dy \\ &= \int_E |\det e^{tA}| \, dy = |\det e^{tA}| \int_E 1 \, dy = |e^{t \text{tr}(A)}| \text{vol } E = e^{t \text{tr}(A)} \text{vol}(E) \end{aligned}$$

■

**Teorema 4.2** (Forma canónica de Jordan). Sea  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ , entonces  $\exists$  un cambio lineal de coordenadas  $C$  tal que  $A$  se transforma en una matriz por bloques:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_k \end{pmatrix} \text{ con } J_i = \alpha_i I + N_i$$

donde  $\alpha_i$  son los autovalores de  $A$  y  $N_i$  es una matriz cuadrada con unos en la diagonal por encima de la principal, y lo demás son ceros.

23/04/2024

Puesto que la solución general es de la forma  $X(t) = e^{At}X_0$ , nos interesa calcular  $e^{At}$ . Para  $A$  no diagonalizable, nos interesa primero estudiar  $e^J$  con  $J$  matriz de la forma canónica de Jordan de  $A$ .

Como vimos,  $e^J$  es también una matriz por bloques de la forma  $e^{J_i}$  donde  $J_i$  son los bloques de  $J$  de la forma  $J_i = \alpha_i I + N_i$ .

$$\implies e^{J_i} = e^{\alpha_i I + N_i} = e^{\alpha_i} e^{N_i} \text{ porque } e^{\lambda I} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} I = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right) I = e^{\lambda} I$$

Además  $N_i^k = 0$  para algún  $k \in \mathbb{N}$  (nilpotentes). Por tanto,  $e^{N_i} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{N_i^j}{j!} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{N_i^j}{j!}$

$$\implies e^{J_i} = e^{\alpha_i} e^{N_i} = e^{\alpha_i} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{N_i^j}{j!} = e^{\alpha_i} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(k-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, lo que nos interesa es  $e^{tA} = Ce^JC^{-1} = C \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{tJ_k} \end{pmatrix} C^{-1}$

donde  $e^{tJ_i} = e^{t\alpha_i} e^{tN_i} = e^{t\alpha_i} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} N_i^j = e^{t\alpha_i} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

En definitiva, la solución general del SLH  $X' = AX$  es

$$X(t) = (Ce^{tJ}C^{-1})X_0 \text{ con } X_0 \in \mathbb{R}^d \text{ y } e^{tJ} \text{ matriz por bloques } e^{tJ_i} \text{ como arriba}$$

**Ejemplo 4.5.** Sea el SLH  $X' = AX$  con  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . El único autovalor de  $A$ , que no es diagonalizable, es  $\lambda = 1$ . Se propone la forma de Jordan dada por:

$$\begin{aligned} A &= CJC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \implies e^{tJ} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \implies X(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X_0, \text{ con } X_0 \in \mathbb{R}^d \\ \implies X(t) &= e^t \begin{pmatrix} 2t+1 & -4t \\ t & 1-2t \end{pmatrix} X_0 \implies \begin{cases} X^1(t) = (2t+1)e^t X_0^1 - 4te^t X_0^2 \\ X^2(t) = te^t X_0^1 + (1-2t)e^t X_0^2 \end{cases} \end{aligned}$$

#### 4.4 Apéndice: EDOs escalares lineales de orden superior

Sea  $x^{(d)} = a_1(t)x + a_2(t)x' + \dots + a_d(t)x^{(d-1)}$ , con  $a_1, \dots, a_{n-1}: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  continuas, una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden  $d \in \mathbb{R}$ .

Mediante el cambio de variables  $y^1 = x, y^2 = x', \dots, y^d = x^{(d-1)}$ , podemos reescribir la EDO como un sistema de EDOs de primer orden:

$$\begin{cases} (y^1)' = y^2 \\ (y^2)' = y^3 \\ \vdots \\ (y^d)' = a_1(t)y^1 + \dots + a_d(t)y^d \end{cases} \iff Y'(t) = A(t)Y, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & \dots & a_d(t) \end{pmatrix}$$

24/04/2024

Si  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ , entonces la EDO es de coeficientes constantes. En este caso, hay un par



de “trucos” para encontrar una base de soluciones explícitas.

1. El polinomio característico de  $A$  es  $p(\lambda) = \lambda^d - a_d\lambda^{d-1} - \dots - a_2\lambda - a_1 = 0$ .
2. Como  $Y = e^{At}Y_0$ , y solo me interesa encontrar la primera componente (porque  $Y^1 = x$ , y las demás son derivadas de  $x$ ), basta con calcular la primera fila de  $e^{At}$ . De hecho, por lo visto con formas de Jordan, todos los elementos de la primera fila son de la forma  $Y_0 t^k e^{\lambda t}$  con  $\lambda \in \mathbb{C}$  autovalor de  $A$ .

Como buscamos soluciones reales, solo pueden ser de la forma

$$Y_0 t^k e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \cos(\operatorname{Im}(\lambda)t), \quad Y_0 t^k e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \sin(\operatorname{Im}(\lambda)t)$$

Por “prueba y error”, buscamos  $d$  soluciones linealmente independientes con esa forma.

**Ejemplo 4.6.** Sea la EDO  $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0$ . Definimos  $y^1 = x, y^2 = x', y^3 = x''$ .

Entonces, el SLH asociado es  $Y'(t) = AY$  donde la matriz asociada es  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\implies p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \implies p(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \text{ (triple)}$$

$$\implies \text{Las soluciones son de la forma } X(t) = t^k e^t$$

Por tanto, tenemos  $X_1(t) = e^t, X_2(t) = te^t, X_3(t) = t^2 e^t$  soluciones l.i. y como el espacio de soluciones es de  $\dim = 3$ ,  $\{X_1, X_2, X_3\}$  forman una base.

$$\implies \text{La solución general es } X(t) = (c_1 + tc_2 + t^2 c_3) e^t$$

## 5 Comportamiento cualitativo de sistemas autónomos en el plano

Estudiamos sistemas de la forma  $\boxed{X' = F(X)}$  donde  $X: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  y  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   $\mathcal{C}^1$  con  $\Omega$  abierto.

Para cada  $X_0 \in \Omega$ , el sistema con dato inicial  $X(0) = X_0$  tiene solución única definida en un intervalo maximal.

De cada solución  $X = (x_1, x_2)$  podemos representar:

1. La gráfica de cada componente, es decir,  $x_1$  frente a  $t$  y  $x_2$  frente a  $t$ .
2. La traza de la curva en  $\mathbb{R}^2$ , es decir, el conjunto imagen  $\Gamma = \{(x_1(t), x_2(t)) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ .

El conjunto  $\Gamma$  se llama **órbita** o **trayectoria** de  $X$ . El espacio donde vive  $\Gamma$  se llama **espacio de fases** (o plano de fases si  $\dim = 2$ ).

### 5.1 Comportamiento cualitativo de sistemas autónomos lineales en el plano

Consideramos el sistema  $\boxed{X' = AX}$  con  $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ,  $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Queremos esbozar las órbitas de las soluciones dependiendo de cómo sean los autovalores de  $A$ .

Suponemos que 0 no es autovalor de  $A$  (si lo fuera, el sistema sería degenerado). Por tanto, el único equilibrio es el origen.

Consideramos primero  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  autovalores distintos de  $A$ .

- **Caso 1:  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \implies$**  la solución general es  $X(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t}) \xi_1 + (c_2 e^{\lambda_2 t}) \xi_2$  donde  $\xi_1, \xi_2$  son los autovectores asociados a  $\lambda_1, \lambda_2$  respectivamente.

1. Si  $X(0) = c_1 \xi_1 \implies c_2 = 0 \implies \forall t \in \mathbb{R} : X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_1$ .
2. Si  $X(0) = c_2 \xi_2 \implies c_1 = 0 \implies \forall t \in \mathbb{R} : X(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \xi_2$ .
3. Si  $X(0)$  no está en ninguna de las dos rectas de los casos anteriores

$$|X(t) - c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_1| = |c_2| e^{\lambda_2 t} |\xi_2| \longrightarrow \begin{cases} 0, t \rightarrow \infty \\ \infty, t \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$|X(t) - c_2 e^{\lambda_2 t} \xi_2| = |c_1| e^{\lambda_1 t} |\xi_1| \longrightarrow \begin{cases} 0, t \rightarrow -\infty \\ \infty, t \rightarrow \infty \end{cases}$$

El equilibrio 0 es un punto de silla (inestable).

- **Caso 2:**  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0 \implies |X(t)| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$  y

$$|X(t)| = e^{\lambda_1 t} |c_1 \xi_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \xi_2| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

El equilibrio 0 es un nodo inestable (o fuente). Es asintóticamente estable a pasado.

- **Caso 3:**  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 \implies |X(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  y  $|X(t)| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ .

El 0 es un nodo estable (o sumidero).

29/04/2024

En el caso de que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ , la solución general es

$$X(t) = c_1 e^{\lambda t} \xi_1 + c_2 e^{\lambda t} \xi_2 = e^{\lambda t} (c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2)$$

- **Caso 1:**  $\lambda < 0 \implies |X(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . El origen es asintóticamente estable.

- **Caso 2:**  $\lambda > 0 \implies |X(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ . El origen es inestable.

Si  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha \pm \beta i$ , la solución general es

$$X(t) = c_1 \operatorname{Re} (e^{(\alpha + \beta i)t} \xi) + c_2 \operatorname{Im} (e^{(\alpha + \beta i)t} \xi)$$

donde  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  es un autovector asociado a  $\alpha + \beta i$ . Denominamos  $v_1 = \operatorname{Re}(\xi) \in \mathbb{R}^2$  y  $v_2 = \operatorname{Im}(\xi) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \implies e^{(\alpha + \beta i)t} \xi &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) (v_1 + i v_2) \\ &= e^{\alpha t} [(\cos(\beta t) v_1 - \sin(\beta t) v_2) + i (\sin(\beta t) v_1 + \cos(\beta t) v_2)] \\ \implies X(t) &= c_1 e^{\alpha t} (\cos(\beta t) v_1 - \sin(\beta t) v_2) + c_2 e^{\alpha t} (\sin(\beta t) v_1 + \cos(\beta t) v_2) \\ &= e^{\alpha t} (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) v_1 + e^{\alpha t} (-c_1 \sin(\beta t) + c_2 \cos(\beta t)) v_2 \\ &=: y_1(t) v_1 + y_2(t) v_2 \end{aligned}$$

Entonces  $y_1(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))$ . Si  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ , lo escribo como  $(c_1, c_2) =: r(\cos(\theta), \sin(\theta)) \implies y_1(t) = e^{\alpha t} r (\cos(\theta) \cos(\beta t) + \sin(\theta) \sin(\beta t)) = e^{\alpha t} r \cos(\theta - \beta t)$ .

De manera similar,  $y_2(t) = e^{\alpha t} r \sin(\theta - \beta t) \implies X(t) = e^{\alpha t} r (\cos(\theta - \beta t) v_1 + \sin(\theta - \beta t) v_2)$

- **Caso 1:**  $\alpha < 0 \implies |X(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . El origen es asintóticamente estable.

- **Caso 2:**  $\alpha > 0 \implies |X(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ . El origen es inestable (asintóticamente estable a pasado).

30/04/2024

## 5.2 El caso general (sistemas no lineales)

Sea  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mathcal{C}^1$  con  $\Omega$  abierto. Consideramos el sistema  $\boxed{X' = F(X)}$ .

Empezamos con una propiedad general de las órbitas: o nunca se cruzan, o son idénticas.

**Proposición 5.1.** Sean  $X_1: I_1 \longrightarrow \Omega$ ,  $X_2: I_2 \longrightarrow \Omega$  soluciones de  $X' = F(X)$  con  $I_1, I_2$  intervalos maximales. Entonces solo puede darse una de las siguientes alternativas:

1.  $\{X_1(t) : t \in I_1\} \cap \{X_2(t) : t \in I_2\} = \phi$ .
2.  $\{X_1(t) : t \in I_1\} = \{X_2(t) : t \in I_2\}$ .

**Demostración.** Supongamos que no se cumple (1).

Entonces  $\exists t_1 \in I_1, t_2 \in I_2 : X_1(t_1) = X_2(t_2)$ . Sea  $\forall t \in (I_2 + t_1 - t_2) : \tilde{X}(t) = X_2(t - t_1 + t_2)$ .

Claramente,  $\tilde{X}$  y  $X_1$  son soluciones de  $X' = F(X)$  y  $X(t_1) = X_0$ .

Por unicidad,  $\forall t \in (I_2 + t_1 - t_2) \cap I_1 : \tilde{X}(t) = X_1(t)$ .

Como los intervalos son maximales, necesariamente  $I_1 = I_2 + t_1 - t_2$  y

$\forall t \in I_1 = I_2 + t_1 - t_2 : X_1(t) = \tilde{X}(t) = X_2(t - t_1 + t_2)$ . Por tanto,  $X_1(I_1) = X_2(I_2)$ . ■

Queremos estudiar la estabilidad de los equilibrios, es decir, los  $X_0 \in \Omega : F(X_0) = 0$ .

Empezamos observando que solo se puede llegar a (o a partir de) un equilibrio en tiempo infinito.

**Proposición 5.2.** Sea  $X: I \longrightarrow \Omega$  solución de  $X' = F(X)$  con  $I$  intervalo maximal.

1. Si  $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} X_0 \in \Omega$  y  $X \not\equiv X_0$ , entonces  $F(X_0) \neq 0$ .
2. Si  $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} X_0 \in \Omega$ , entonces  $F(X_0) = 0$ .

**Demostración.** 1. Supongamos por contradicción que  $F(X_0) = 0$ .

Como  $X(t_0) = X_0$ , se tiene que  $X$  es solución de  $X' = F(X) \wedge X(t_0) = X_0$ .

Como también  $X_0$  es solución de ese PVI, por unicidad,  $X \equiv X_0 \longrightarrow \longleftarrow$

2. Vamos a demostrarlo en el caso  $t \rightarrow \infty$  (el otro es análogo).

Sea  $t \in I$ . Por el teorema de valor medio, para  $k = 1, 2 : \exists \sigma_k(t) \in (t, t + 1)$  tales que

$$X(t + 1) - X(t) = \begin{pmatrix} (X^1)'(\sigma_1(t)) \\ (X^2)'(\sigma_2(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1(X(\sigma_1(t))) \\ F^2(X(\sigma_2(t))) \end{pmatrix}$$

Por un lado,  $X(t + 1) - X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} X_0 - X_0 = 0$ .

Por otro lado,  $\sigma_k(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ . Así,  $F^k(X(\sigma_k(t))) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} F^k(X_0)$ .

Por unicidad del límite en  $\mathbb{R}^2$ ,  $F(X_0) = 0$ .

■

Intuitivamente, si  $X_0 \in \Omega$  es un equilibrio, entonces en un entorno de  $X_0$

$$F(X) \approx \cancel{F(X_0)} + J_F(X_0)(X - X_0)$$

Si llamamos  $Y := X - X_0$ , entonces  $Y' = (X - X_0)' = F(X) \approx J_F(X_0)Y$  en un entorno de 0.

**Teorema 5.1** (Estabilidad lineal). *Sea  $X_0 \in \Omega$  un equilibrio de  $X' = F(X)$  y  $J_F(X_0)$  la matriz jacobiana de  $F$  en  $X_0$ . Si  $J_F(X_0)$  no tiene autovalores con parte real nula, el diagrama de fases del sistema en un entorno de  $X_0$  es una “deformación diferenciable” del diagrama de fases de  $Y' = J_F(X_0)Y$  cerca del 0.*

*Esto significa que hay una biyección de clase  $\mathcal{C}^1$ , con inversa de clase  $\mathcal{C}^1$ , entre un entorno de  $X_0$  y un entorno de 0, que lleva órbitas de  $X' = F(X)$  en órbitas de  $Y' = J_F(X_0)Y$  conservando la orientación.*

06/05/2024

**Ejemplo 5.1.**  $u'' - \mu(u^2 - 1)u' + u = 0$  con  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $u: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \mu(u^2 - 1)v - u \end{cases} \implies f_1(u, v) := v \wedge f_2(u, v) := \mu(u^2 - 1)v - u$$

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \wedge F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v)) = (v, \mu(u^2 - 1)v - u)$$

Vemos que  $F(X) = 0 \iff v = 0 = u$ , por tanto, el único equilibrio es el origen.

$$J_F(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\mu uv - 1 & \mu(u^2 - 1) \end{pmatrix} \implies J_F(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =: A$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \mu\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = \frac{-\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}$$

- $\mu > 2 \implies \lambda_- < \lambda_+ < 0 \implies$  el origen es un nodo estable.
- $\mu = 2 \implies \lambda_- = \lambda_+ = -1 < 0 \implies$  el origen es un equilibrio asintóticamente estable (caso no diagonalizable).
- $\mu < -2 \implies 0 < \lambda_+ < \lambda_- \implies$  el origen es un nodo inestable.
- $\mu = -2 \implies \lambda_+ = \lambda_- = 1 > 0 \implies$  el origen es un equilibrio inestable (caso no diagonalizable).

- $\mu \in (0, 2) \implies \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{C}$  con parte real negativa  $\implies$  el origen es una espiral asintóticamente estable.
- $\mu \in (-2, 0) \implies \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{C}$  con parte real positiva  $\implies$  el origen es una espiral inestable.
- $\mu = 0 \implies \lambda_+ = i \wedge \lambda_- = -i \implies$  el teorema no es aplicable. Sin embargo, con  $\mu = 0$  el sistema es lineal y se puede resolver explícitamente.

$$u(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t \wedge v(t) = c_1 \cos t - c_2 \sin t \implies \text{el origen es un centro}$$

La solución  $u(t)$  es una circunferencia en el plano  $U - V$ . Hay que ver en qué sentido gira:  $(u, v) = (1, 1) \implies u' = 1 > 0 \implies v' = -1 < 0 \implies$  gira en sentido horario.

07/05/2024

**Ejemplo 5.2.** En el primer cuadrante, queremos estudiar el comportamiento cualitativo de

$$\begin{cases} x' = x(60 - 4x - 3y) \\ y' = y(42 - 3x - 2y) \end{cases} \iff X' = \begin{pmatrix} x(60 - 4x - 3y) \\ y(42 - 3x - 2y) \end{pmatrix} X$$

$$\implies \left( f_1(x, y) = 0 \iff x = 0 \vee y = 20 - \frac{4}{3}x \right) \wedge \left( f_2(x, y) = 0 \iff y = 0 \vee y = 21 - \frac{3}{2}x \right)$$

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 60 - 8x - 3y & -3x \\ -3y & 42 - 3x - 4y \end{pmatrix}$$

- $J_F(0, 0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 60 > \lambda_2 = 42 > 0 \implies$  el origen es un nodo inestable.
- $J_F(0, 21) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -63 & -42 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = -42 < \lambda_2 = -3 < 0 \implies$  el  $(0, 21)$  es un nodo estable.
- $J_F(15, 0) = \begin{pmatrix} -60 & -45 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = -60 < \lambda_2 = -3 < 0 \implies$  el  $(15, 0)$  es un nodo estable.
- $J_F(6, 12) = \begin{pmatrix} -24 & -18 \\ -36 & -24 \end{pmatrix} \implies \text{tr}(J_F(6, 12)) = -48 \wedge \det J_F(6, 12) = -72.$

Por la gráfica traza-determinante, tenemos que el  $(6, 12)$  es un punto de silla estable.

08/05/2024

### 5.3 Sistemas hamiltonianos

**Definición 5.1.** Sea  $H: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable parcialmente en sus dos variables,  $H$  es una integral primera (o cantidad conservada) del sistema  $\{x' = f_1(x, y) \wedge y' = f_2(x, y)\}$  si se conserva a lo largo de la evaluación. Es decir,

$$\iff \forall (x, y): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ solución del sistema : } \forall t \in I : (x(t), y(t)) \in \Omega : \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = 0$$

**Observación 5.1.** Si  $H$  es una integral primera para el sistema,  $\forall (x, y): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  solución del sistema  $\exists c \in \mathbb{R} : \forall t \in I : H(x(t), y(t)) = c$ .

Así las órbitas están contenidas en los conjuntos de nivel de  $H$ . Recíprocamente, todo conjunto de nivel contiene alguna órbita. En definitiva, sabremos “dibujar” el diagrama de fases si sabemos “dibujar” los conjuntos de nivel.

**Definición 5.2 (Sistema hamiltoniano).** Un sistema del tipo  $\{x' = f_1(x, y) \wedge y' = f_2(x, y)\}$  es hamiltoniano si existe una función  $H: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  derivable parcialmente en sus dos variables tal que  $f_1 = \frac{\partial H}{\partial y}$  y  $f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x}$ .

**Observación 5.2.** Los sistemas hamiltonianos admiten una integral primera, que es  $H$ .

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x} x' + \frac{\partial H}{\partial y} y' = -f_2 f_1 + f_1 f_2 = 0$$

Esta integral primera se llama **hamiltoniano** del sistema.

**Definición 5.3 (Sistema conservativo).** Un sistema (“físico”) es conservativo si se rige por una EDO (escalar) del tipo  $x'' + U'(x) = 0$ .

**Observación 5.3.** Transformando la EDO de segundo orden en un sistema de dos EDOs de primer orden, obtenemos un sistema hamiltoniano.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -U'(x) \end{cases} \implies H(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x) \text{ es un hamiltoniano para el sistema.}$$

En efecto,  $\frac{\partial H}{\partial y} = y = x'$  y  $\frac{\partial H}{\partial x} = U'(x) = -y'$ . En este contexto físico,  $H$  es la **energía**.

De hecho,  $\frac{y^2}{2}$  es la llamada energía cinética y  $U(x)$  es la energía potencial.

Los equilibrios son los puntos de la forma  $(x_0, 0)$  con  $x_0$  punto crítico de  $U$ .

**Observación 5.4.**  $\nabla H(x, y) = (U'(x), y) \neq (0, 0)$  si  $(x, y)$  no es punto de equilibrio. En particular, los conjuntos de nivel que no contengan equilibrios son curvas suaves.

## Trucos para dibujar el diagrama de fases

1. Si una trayectoria pasa por algún punto de la forma  $(\bar{x}, 0)$ , entonces  $\exists c \in \mathbb{R}$  :

$$\forall t \in I : c = U(\bar{x}) = H(\bar{x}, 0) = H(x(t), y(t)) = \frac{y(t)^2}{2} + U(x(t)) \geq U(x(t))$$

Es decir, en todo instante, la solución permanece en el *pozo de potencial*  $U(x(t)) \leq U(\bar{x})$ .

2. Puede haber trayectorias que no corten al eje  $X$ . Esto sucede cuando  $U$  es acotada por arriba. En efecto, sea  $M = \sup U$ , Sea  $c > M$  y sea  $(x, y)$  una solución con energía  $c$ , es decir,  $U(x(t)) + \frac{y(t)^2}{2} = H(x(t), y(t)) = c$ .

Claramente,  $y \neq 0$  porque, si no, en algún instante  $U(x(t)) = c > M \longrightarrow \leftarrow$ .

3. A medida que  $|y|$  crece,  $U(x)$  decrece y viceversa (para que  $H$  se mantenga constante).
4. Por la paridad de  $H$  en  $y$ , los conjuntos de nivel son simétricos respecto al eje  $X$ .



## 6 Ejercicios

### 6.1 Hoja 1

#### 6.1.1 Conceptos básicos

#### 6.1.2 Algunos métodos de resolución de EDOs

#### 2.18

1.  $yy'' + (y')^2 = 0$

Resulta razonable buscar soluciones en forma de polinomios  $y(x) = x^\alpha$  porque:

$$\begin{aligned} \implies y' &= \alpha x^{(\alpha-1)} \wedge y'' = \alpha(\alpha-1)x^{(\alpha-2)} \\ \implies x^\alpha \alpha(\alpha-1)x^{(\alpha-2)} + \alpha^2 x^{2(\alpha-1)} &= 0 \implies (2\alpha^2 - \alpha)x^\alpha = 0 \\ \implies 2\alpha^2 - \alpha &= 0 \implies \alpha(2\alpha - 1) = 0 \implies \alpha = 0 \vee \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Opción 1: Integramos la EDO:

$$\begin{aligned} \int_0^t y(s)y''(s) \, ds + \int_0^t (y'(s))^2 \, ds &= 0 \\ - \int_0^t (y'(s))^2 \, ds + [y(s)y'(s)]_{s=0}^t + \int_0^t (y'(s))^2 \, ds \\ \implies y(t)y'(t) - y(0)y'(0) &= 0 \implies y(t)y'(t) = y(0)y'(0) =: C \\ \implies \int_0^t y(s)y'(s) \, ds = Ct \implies \frac{(y(t))^2}{2} - \frac{(y(0))^2}{2} &= Ct \\ \implies y(t) &= \sqrt{2Ct + (y(0))^2} \end{aligned}$$

2.  $xy'' = y' + (y')^2$

No depende de  $y \implies$  Hacemos un cambio de variable  $x = y'$ :

$$\implies xz' = z + z^3 \text{ que es de variables separadas.}$$

3.  $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$

Nuevamente hacemos un cambio de variable  $z = y' \implies x^2z' = 2xz + z^2$

$$\forall x \neq 0 : z' = 2\frac{z}{x} + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \implies \text{mediante el cambio de variables } \omega = \frac{z}{x}$$

Obtenemos una EDO de variables separadas en  $\omega$ .

4.  $2yy'' - (y')^2 = 1$

Otra vez resulta razonable buscar soluciones de la forma  $y(x) = Ax^2 + Bx + C$

### 6.1.3 Modelización

3.4  $C(t)$  = “Cantidad de sal” en el tanque en el tiempo  $t$ .

$$\begin{aligned} C'(t) = 10 - \frac{1}{10}C(t) &\implies \int_{C(0)}^{C(t)} \frac{1}{100-y} dy = \int_0^t \frac{1}{10} dt \\ \implies \log(100 - C(t)) - \log(100 - C(0)) &= -\frac{1}{10}t \implies \log \frac{100 - C(t)}{100} = -\frac{t}{10} \\ \implies \frac{100 - C(t)}{100} &= e^{-\frac{t}{10}} \implies C(t) = 100(1 - e^{-\frac{t}{10}}) \\ \implies C(1) &= 100(1 - e^{-\frac{1}{10}}) \wedge \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 100 \end{aligned}$$

### 6.1.4 Análisis cualitativo y campos de pendientes

$$4.6 \forall t > \frac{5}{4} : \forall x \left( \frac{5}{4} \right) \in \left( -\sqrt{\frac{5}{4}}, -\frac{1}{2} \right) : x' = x^2 - t \implies -\sqrt{t} < x(t) < -\sqrt{t-1}$$

$$f_1(t) := -\sqrt{t} \wedge f_2 := -\sqrt{t-1} \implies f\left(\frac{5}{4}\right) = -\sqrt{\frac{5}{4}} \wedge f_2\left(\frac{5}{4} - 1\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Sabemos que } \tilde{t} = \frac{5}{4} \implies -\sqrt{\tilde{t}} < x(\tilde{t}) < -\sqrt{\tilde{t}-1}$$

$\implies$  Por contunuidad, al menos en un tiempo, estas cotas se siguen manteniendo.

Atendiendo a las isoclinas de este ejercicio ( $\{x^2 - t = C : C \in \mathbb{R}\}$ ), observamos que:

- $C = 0 \implies x^2 = t \implies x = \pm\sqrt{t}$  que es precisamente la cota inferior que buscábamos.
- $C = -1 \implies x^2 - t = -1 \implies x = \pm\sqrt{t-1}$  que es la cota superior.

Inicialmente  $x(t) > -\sqrt{t}$  “durante un rato”.

1. Supongamos que  $\exists t^* : x(t^*) = -\sqrt{t^*}$ .

2. Por un lado, la isoclina nos dice que  $x'(t^*) = 0$ .

3. Por otro lado,  $x'(t^*) \leq \left[ \frac{d}{dt}(-\sqrt{t}) \right]_{t=t^*} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t^*}} < 0$ .

$$4.7 \begin{cases} x' = x^2 + t^2, t > 0 \\ x(0) > 0 \end{cases} \quad \text{Sea } x : [0, T) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ derivable.}$$

1. Queremos ver si  $\forall t \in [0, T) : x(t) > \frac{t^3}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Como } x' \geq t^2 &\implies \int_0^t x'(s) \, ds \geq \int_0^t s^2 \, ds \implies x(t) - x(0) \geq \frac{t^3}{3} \\ &\implies \boxed{\forall t \in [0, T) : x(t) > \frac{t^3}{3}} \end{aligned}$$

2. Queremos ver si  $\forall t \in \left(\sqrt{3}, T\right), T > \sqrt{3} : x(t) > \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{3}} - t}$

$$\begin{aligned} \text{Como } x' \geq x^2 &\implies x^{-2}x' \geq 1 \implies \int_{\sqrt{3}}^t \frac{x'(s)}{x(s)^2} \, ds \geq t - \sqrt{3} \\ &\implies -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(\sqrt{3})} \geq t - \sqrt{3} \implies t \leq \sqrt{3} + \frac{1}{x(\sqrt{3})} - \frac{1}{x(t)} \\ &\implies t < \sqrt{3} + \frac{3}{(\sqrt{3})^3} - \frac{1}{x(t)} = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x(t)} = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x(t)} \\ &\implies t < \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x(t)} \implies \frac{1}{x(t)} < \frac{4}{\sqrt{3}} - t \implies \boxed{\forall t > \sqrt{3} : x(t) > \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{3}} - t}} \end{aligned}$$

## 6.2 Hoja 2

$$1.1 \begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{tiene sol única.}$$

1. Toda solución que no sea constante es estrictamente monótona.

**Demostración.** Por contrarecíproco, veamos que

$$\exists t^* : x'(t^*) = 0 \implies \forall t : x(t) \equiv C := x(t^*)$$

Definimos  $\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = x(t^*)$ . Por hipótesis,  $f(C) = f(x(t^*)) = x'(t) = 0$

$$\implies y'(t) = \frac{d}{dt}(C) = 0 = f(C) = f(y(t)) \implies y \text{ es solución}$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(t^*) = C \end{cases} \implies \text{Por unicidad, } x(t) = y(t) \equiv C$$

■

2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = C_0 \implies u(t) \equiv C_0$  es solución.

**Demostración.** (a)  $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)\right) = f(C_0)$

(b) Veamos que  $f(C_0) = 0$ . Por contradicción, supongamos que  $f(C_0) = A > 0$

$$\implies \lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = A \implies \exists \tilde{t} : \forall t \geq \tilde{t} : x'(t) > \frac{A}{2}$$

$$\begin{aligned} \implies \int_{\tilde{t}}^t x'(\tau) d\tau &> \int_{\tilde{t}}^t \frac{A}{2} d\tau \implies x(t) - x(\tilde{t}) > \frac{A}{2}(t - \tilde{t}) \\ \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( x(\tilde{t}) + \frac{A}{2}(t - \tilde{t}) \right) = \infty \longrightarrow \leftarrow \end{aligned}$$

$$(c) \ u'(t) = \frac{d}{dt}(C_0) = 0 = f(C_0) = f(u(t)) \implies u \text{ es solución.}$$

■

**1.2**  $x' = f(x)$  La unicidad solo se puede perder cuando  $f(x) = 0$

$$1. \ f(x) := x' = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

**Observación 6.1.**

(a)  $x \equiv 0$  es solución ( $f(0) = 0$ ) y solo puede haber problemas de unicidad en  $x = 0$ .

(b)  $x(t)$  es estrictamente creciente si  $x(t) \neq 0$

No habría unicidad en  $x = 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{x_0} \frac{1}{f(\tau)} d\tau \in \mathbb{R}$  con  $x_0 > x$

En nuestro caso,  $\int_x^{x_0} \frac{1}{\tau^2} d\tau = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty \implies$  hay unicidad por arriba.

Para la unicidad por abajo,  $\int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{-\tau}} d\tau = -2(\sqrt{-x} - \sqrt{-x_0}) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 2\sqrt{x_0} \in \mathbb{R}$   
 $\implies$  No hay unicidad por abajo.

Por tanto, podemos encontrar una solución de la siguiente forma:

$$y(t) := \begin{cases} -\frac{t^2}{4} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \implies y'(t) = \begin{cases} -\frac{t}{2} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Es solución porque:

$$f(y(t)) = \begin{cases} f(-\frac{t^2}{4}) & t < 0 \\ f(0) & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{-(-\frac{t^2}{4})} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{t}{2} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} = y'(t)$$

Por un lado,  $x(t_0) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  por la unicidad por arriba.

Por otro lado, si  $x(t_0) < 0$  sabemos que

- $x(t)$  no decrece.
- $x(t)$  está acotada por arriba por 0.

$$\implies \exists \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq 0$$

Supongamos que  $\exists A > 0 : \lim_{x(t)} = -A$ .

Como  $x(t)$  no decrece,

$$\begin{aligned} \implies x(t) \leq -A &\implies x'(t) = \sqrt{-x(t)} \geq \sqrt{A} \implies x(t) \geq x(c) + \sqrt{A}t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \longrightarrow \leftarrow \\ &\implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \end{aligned}$$

2.

**1.3**  $x' = f(t, x) \wedge x$  es solución.

$f$  no depende de  $t \iff \forall b \in \mathbb{R} : y(t) := x(t+b)$  es sol.

**Demostración.** ( $\implies$ ) Supongamos que  $f$  no depende de  $t$ .

$$\begin{aligned} \implies x' = f(x) &\implies y(t) = x(t+b) \implies y'(t) = \frac{d}{dt}(x(t+b)) = x'(t+b) \\ &\implies y'(t) = f(x(t+b)) = f(y(t)) \end{aligned}$$

( $\impliedby$ ) Supongamos que  $\forall b \in \mathbb{R} : y(t) := x(t+b)$  es sol.

$x' = f(t, x(t)) \implies y(t) = x(t+b)$  también es solución

$$x'(t+b) = f(t, x(t+b)) \implies x'(t) = f(t-b, x(t))$$

$$\implies \forall b \in \mathbb{R} : f(t-b, x(t)) = f(t, x(t))$$

En particular,  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \implies \forall b \in \mathbb{R} : \forall x_0 \in \mathbb{R} : f(-b, x_0) = f(0, x_0)$

$\implies f$  no depende de su primera variable

■

## 6.3 Hoja 3

**1.3**

$$\begin{cases} x' = t + x \\ x(0) = 1 \end{cases} \iff x(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \int_0^t x(s) ds =: T[x](t)$$

Definimos la sucesión de funciones  $x_{n+1}(t) = T[x_n](t) \wedge x_1(t) = x(0) = 1$  y tenemos:

$$x_2(t) = T[x_1](t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \int_0^t 1 ds = 1 + \frac{t^2}{2} + t$$

$$x_3(t) = T[x_2](t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \int_0^t \left(1 + \frac{s^2}{2} + s\right) ds = 1 + \frac{t^2}{2} + t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}$$

$\vdots$

$$x_n(t) = 1 + t + 2 \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t^j}{j!} + \frac{t^n}{n!} = -1 - t + 2 \sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!} - \frac{t^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 - t + 2e^t + 0$$

$$\implies \boxed{x(t) = -1 - t + 2e^t}$$

## 2.1

$$1. f_n(x) = x^{1/n} \text{ en } x \in [0, 1]$$

$$f_n(0) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0 \quad \wedge \quad x_0 \in (0, 1] \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_0^{1/n} = 1$$

$$\implies f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ puntualmente en } [0, 1] \text{ con } f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0, 1] \end{cases}$$

¿Converge uniformemente? Sabemos  $\forall n : f_n \text{ cont.} \wedge f_n \rightarrow f \text{ unif.} \implies f \text{ cont.}$

Como  $f$  no es continua  $\implies f_n$  no converge uniformemente.

$$2. f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \text{ en } x \in [0, \infty)$$

$$f_n(0) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0 \quad \wedge \quad \forall x_0 > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_0}{1+nx_0} = 0$$

## Observación 6.2.

$$1. f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ puntualmente en } \Omega \iff \forall x \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \\ \iff \forall x \in \Omega : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(x) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0(x) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$2. f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ uniformemente en } \Omega \iff \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \forall x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

## 2.2 Estudiamos la sucesión de funciones en $f_n(x) = n^2 x e^{-nx^2}$ en $x \in [0, 1]$

$$1. \text{ Convergencia puntual: } \forall n \in \mathbb{N} : f_n(0) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$$

$$x_0 \in (0, 1] \implies \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x_0 e^{-nx_0^2} = 0 \implies f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = f \text{ puntualmente en } [0, 1]$$

$$2. \text{ Convergencia uniforme: } \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0, 1]} n^2 x e^{-nx^2}$$

$$f'_n(x) = n^2 e^{-nx^2} - 2n^3 x^2 e^{-nx^2} = n^2 e^{-nx^2} (1 - 2nx^2) \implies f'_n(x) = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} \in [0, 1] \implies \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{n^{5/2}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Por tanto,  $f$  no converge uniformemente.

3. **Nota:** Cuando falla la convergencia uniforme, el límite de la integral no es necesariamente igual a la integral del límite.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \infty \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \int_0^1 0 dx = \int_0^1 f(x) dx$$

**Observación 6.3.**

1.  $f$  es Lipschitz en  $\Omega \iff \exists L \geq 0 : \forall x, y \in \Omega : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$
2.  $f$  es localmente Lipschitz en  $\Omega \iff \forall K \subset \Omega$  compacto :  $f$  es Lipschitz en  $K$

**05/04/2024**

**Prolongabilidad de soluciones:** Si hay existencia y unicidad local para  $(x_0, y_0) \in D$ , entonces la solución solo puede dejar de existir si “explota” en  $D$ . Por ejemplo:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{P-L}} \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists! \text{ solución en un entorno de } (x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned} \text{4.1 a) } y' &= \frac{xy + y^2}{x^2 + y^2 + 2} =: f(x, y) \\ f &\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \implies \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : \exists! \text{ solución local} \end{aligned}$$

$$y(x) = 0 \text{ es solución de la EDO} \implies \begin{cases} y_0 > 0 \implies \forall x \in \mathbb{R} : y(x) > 0 \\ y_0 = 0 \implies \forall x \in \mathbb{R} : y(x) = 0 \\ y_0 < 0 \implies \forall x \in \mathbb{R} : y(x) < 0 \end{cases}$$

Queremos una función  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y(x) \leq g(x)$ .

- Supongamos por un momento que  $|f(x, y)| \leq K$ .

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) \, ds \implies |y(x)| \leq |y(x_0)| + \int |f(s, y(s))| \, ds \\ &\leq |y(x_0)| + K|x - x_0| \\ \implies \forall x \in \mathbb{R} : 0 < y(x) &\leq |y(x_0)| + K|x - x_0| =: g(x) \end{aligned}$$

$$\exists K \in \mathbb{R} : |f(x, y)| \leq K \implies y(x) \text{ existe para (y desde) siempre}$$

- Por tanto, basta ver que  $f(x, y) \leq 2$

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x||y| + y^2}{x^2 + y^2 + 2} \leq \frac{x^2 + y^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 2} \leq \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 2} \leq 2$$

$$\text{b) } \left\{ x' = \frac{x^2 + t^4}{\sqrt{1 + x^2 + t^2}} \wedge x(t_0) = x_0 \right\} f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \implies \forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2 : \exists! \text{ solución local}$$

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 : f(t, x) \geq 0 \implies x'(t) \geq 0 \implies \begin{cases} \forall t \geq t_0 : x(t) \geq x_0 \\ \forall t \leq t_0 : x(t) \leq x_0 \end{cases}$$

$$|f(t, x)| = f(t, x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+t^2}} + \frac{t^4}{\sqrt{1+x^2+t^2}} \leq \frac{x^2}{|x|} + \frac{t^4}{|t|} \leq |x| + |t^3|$$

Tomamos  $T > 0$  arbitrario y demuestro que la solución existe para todo  $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ .

Usamos la forma integral para acotar:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \leq |x(t_0)| + \int_{m:=\min\{t, t_0\}}^{M:=\max\{t, t_0\}} |f(s, x(s))| ds \\ &\leq |x(t_0)| + \int_m^M |x(s)| + |s^3| ds \\ &= |x(t_0)| + (\max\{|t_0 - T|, |t_0 + T|\})^3 |t - t_0| + \int_m^M |x(s)| ds \\ &\leq C(x_0, t_0, T) + \int_m^M |x(s)| ds \xrightarrow{\text{Gronwall}} |x(t)| \leq Ce^{t-t_0} \end{aligned}$$

**Lema 6.1** (Gronwall). Sea  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $C \geq 0$  tal que

$$\forall t \in [a, b] : g(t) \leq C + \int_a^b g(s) ds \implies \forall t \in (a, b) : g(t) \leq Ce^{b-a}$$

**Demostración.** Definimos  $G(t) := C + \int_a^b g(s) ds \implies G(t_0) = C \wedge G'(t) = g(t)$

$$\implies \begin{cases} G'(t) \leq G(t) \\ G(t_0) = C \end{cases} \implies G(t) \leq Ce^{t-t_0} \implies g(t) \leq Ce^{t-t_0}$$

■

$$4.3 \quad x' = x^5 + \frac{tx^2}{1+x^2} =: f(t, x)$$

$$a) \quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \implies \forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2 : \exists! \text{ solución local}$$

$$b) \quad x(0) = x_0 > 0 \implies \forall t \leq 0 : \text{La solución se puede definir}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} : \underline{x}(t) := 0 \text{ es solución} \implies \forall t \in \mathbb{R} : x(t) > 0 \text{ (mientras exista)}$$

Quiero acotar  $|f(t, x)|$  por debajo de  $x$ .

$$x' = x^5 + \frac{tx^2}{1+x^2} \geq t \frac{x^2}{1+x^2} \geq t \implies \int_t^0 x'(s) ds \geq \int_t^0 s ds \implies x(t) \leq x(0) + \frac{t^2}{2}$$

$$c) \quad x(0) = x_0 > 0 \implies \text{La solución no existe despues de un } T_+$$

$$x' = x^5 + \frac{tx^2}{1+x^2} \geq x^5 \implies \dots \implies 4(x(t))^4 \geq \frac{1}{\frac{1}{4x_0^4} - t} \implies T_+ = \frac{1}{4x_0^4}$$



$$4.4 \quad \lambda > 0 \wedge \begin{cases} y' = y^4 + \lambda \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$a) \quad \begin{cases} y' \geq y^4 \\ y(c) = c \end{cases} \implies \cancel{T_+ = \frac{1}{3x_0}}$$

$$5.3 \text{ (Variado)} \quad \left\{ x' = \frac{2}{1+t^2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \wedge x_1(0) = a \wedge x_2(0) = b \right\} \text{ con } 0 < a < b.$$

1.  $x \equiv 0$  es solución de la EDO.
2.  $f$  es Lipschitz en  $x$ , uniformemente en  $t \implies \forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2 : \exists!$  solución global
3.  $x_1(0) = a \wedge x_2(0) = b \implies \forall t \in \mathbb{R} : x_1(t), x_2(t) > 0$ .
4.  $0 < a < b < \pi \implies \bar{x}(t) = \pi$  es solución  $\implies 0 < x_1(t), x_2(t) < \pi$ .
5. Como no se pueden cortar porque se perdería unicidad,  $\forall t \in \mathbb{R} : x_1(t) < x_2(t)$ .

$$i = 1, 2 : x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t \frac{2}{1+s^2} \cos\left(x_i(s) + \frac{\pi}{2}\right) ds$$

$$\implies x_2(t) - x_1(t) = x_2(0) - x_1(0) + \int_0^t \frac{2}{1+s^2} \left( \cos\left(x_2(s) + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x_1(s) + \frac{\pi}{2}\right) \right) ds$$

$$\implies |x_1(t) - x_2(t)| \leq |a - b| + \underbrace{\int_0^t \frac{2}{1+s^2} ds}_{\leq 2} \underbrace{\left| \cos\left(x_2(s) + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x_1(s) + \frac{\pi}{2}\right) \right|}_{\leq |x_1(s) - x_2(s)|} ds$$

$$z(t) := |x_1(t) - x_2(t)| \implies z(t) \leq (b - a) + 2 \int_0^t z(s) ds =: G(t)$$

$$\implies G'(t) = 2z(t) \leq 2G(t) \implies \begin{cases} G'(t) \leq 2G(t) \\ G(0) = b - a \end{cases} \implies G'(t) - 2G(t) \leq 0$$

$$(G'(t) - 2G(t)) e^{-2t} = (G(t) e^{-2t})' \leq 0 \implies G(t) e^{-2t} - G(0) e^{-2 \cdot 0} \leq 0$$

$$\implies G(t) \leq (b - a) e^{2t} \implies z(t) \leq (b - a) e^{2t} \implies \forall t > 0 : |x_1(t) - x_2(t)| \leq (b - a) e^{2t}$$

Sea  $(a_k) : a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b$  y definimos  $x_k$  la solución del PVI cuando  $x_k(0) = a_k$ .

Entonces, la sucesión de funciones  $(x_k)$  converge uniformemente a  $x_2$ .

**5.2**  $x' = x + \sin(tx) \wedge y' = \sin(ty) \wedge x(0) = y(0) = 1$  (Cae siempre en el examen).

1.  $\exists!$  solución global para ambas
2.  $x(t), y(t) > 0$  (0 es solución de ambas EDOs).

3.  $\forall t > 0 : x(t) > y(t)$

**Demostración.** Vemos que  $x(0) = y(0) = 1 \wedge x'(0) = 1 \wedge y'(0) = 0$ .

Suponemos que  $\exists t^* : x(t^*) = y(t^*)$ , sabemos que  $x(t) > y(t)$  para  $t \in (0, t^*)$

$$\implies y'(t^*) \geq x'(t^*)$$

Por otro lado,  $x'(t^*) = x(t^*) + \sin(t^* x(t^*)) > \sin(t^* y(t^*)) = y'(t^*) \longrightarrow \leftarrow$  ■

Escribimos las soluciones integrales, las restamos y aplicamos la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned} \implies x(t) - y(t) &= \cancel{x(0)} - \cancel{y(0)} + \int_0^t (\sin(sx(s)) - \sin(sy(s))) ds + \int_0^t x(s) ds \\ \implies |x(t) - y(t)| &\leq \int_0^t s |x(s) - y(s)| ds + \int_0^t |x(s)| ds \end{aligned}$$

Queremos encontrar una barrera para  $x$ , i.e. una función  $f$  tal que  $x(t) \leq f(t)$ .

$$\forall a \in \mathbb{R} : \sin a \leq a \implies x'(t) = x(t) + \sin(tx) \leq x(t) + tx = (1+t)x(t)$$

$$\implies x' - (1+t)x \leq 0 \implies e^{-t-\frac{t^2}{2}} (x' - (1+t)x) = \left( x(t) e^{-t-\frac{t^2}{2}} \right)' \leq 0$$

$$\implies x(t) e^{-t-\frac{t^2}{2}} - 1 \leq 0 \implies 0 \leq x(t) \leq e^{t+\frac{t^2}{2}} =: f(t)$$

$$z(t) := |x(t) - y(t)| \implies z(t) \leq \int_0^t sz(s) ds + \int_0^t f(s) ds =: G(t)$$

$$\implies G'(t) = tz(t) + f(t) \leq tG(t) + f(t) \implies \begin{cases} G'(t) \leq tG(t) + f(t) \\ G(0) = 0 \end{cases}$$

$$\implies e^{-\frac{t^2}{2}} (G'(t) - tG(t)) \leq f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} \implies \left( G(t) e^{-\frac{t^2}{2}} \right)' \leq e^t$$

$$\implies \dots \implies \forall t > 0 : z(t) \leq G(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}} (e^t - 1)$$

¿Y para tiempos negativos ( $t < 0$ )? Definimos  $\bar{x}(t) := x(-t) \wedge \bar{y}(t) := y(-t)$ .

$$\mathbf{6.4} \quad x' = \left( \sin \left( \frac{\sqrt{x-t^2}}{t} \right) \right)^2 = f(t, x)$$

a) Existencia y unicidad. Sea  $\mathcal{A} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x \geq t^2 \wedge t \neq 0\}$ . ¿Es Lipschitz?

$$t > 0 \implies |f(t, x) - f(t, y)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi) \right| |x - y|$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 2 \sin \left( \frac{\sqrt{x-t^2}}{t} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{x-t^2}}{t} \right) \frac{1}{2t\sqrt{x-t^2}}$$

$$\implies \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq 2 \frac{\sqrt{x-t^2}}{t} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2t\sqrt{x-t^2}} = \frac{1}{t^2}$$

Por tanto, hay existencia y unicidad local en  $\mathcal{A}$ .

b) Definimos el problema de valores iniciales con  $x(1) = 3$ .

1.  $x(t) \geq 3$  porque  $x'(t) \geq 0 \implies x(t) \geq x(1) = 3$ .

2.  $x(t) \leq 2 + t$  porque  $|x(t)| \leq |x(1)| + \int_1^t \underbrace{|f(s, x(s))|}_{\leq 1} ds \leq 3 + (t - 1) = t + 2$ .

## 6.4 Hoja 4

### 6.4.1 Sistemas lineales de primer orden

$$1.1 \quad \vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}(t) \wedge \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Supongamos que tenemos  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 : A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ , definimos  $\vec{u} := e^{\lambda t}\vec{v}$ .

$\implies \vec{u}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\vec{v} = e^{\lambda t}(\lambda\vec{v}) = e^{\lambda t}(A\vec{v}) = Ae^{\lambda t}\vec{v} = A\vec{u}(t) \implies \vec{u}$  es una solución del SLH

1. Por tanto, encontrar autovalores y autovectores de  $A \implies$  encontrar soluciones.

2. El espacio vectorial de soluciones es de dimensión 2.

3. Dos soluciones linealmente independientes generan todas las soluciones.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \implies \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \implies \lambda_1 = 4 \wedge \lambda_2 = -2$$

$$\bullet \lambda_1 = 4 \implies \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1^1 = v_1^2 \implies \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \lambda_2 = -2 \implies \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_2^1 = -v_2^2 \implies \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \text{la solución general del SLH es } \vec{X}(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{X}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} c_1 + c_2 = 5 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \implies c_1 = 3 \wedge c_2 = 2$$

$$\implies \text{la solución del PVI es } \vec{X}(t) = 3e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.5 b) Vemos que  $W(f_1(t), f_2(t)) = 0$ . Viendo las implicaciones anteriores, concluimos que  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  no son soluciones de una EDO con unicidad.

### 6.4.2 EDO lineales de orden superior

**2.11** Sea  $y'' + y = 0$  una EDO de segundo orden. Definimos  $z := y' \implies z' = y'' = -y$ .

Por tanto, tenemos el sistema de EDOs de primer orden:

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \implies \text{autovalores } \lambda = \pm i$$

Veamos que  $\mathcal{B} = \{b_1(x) = \cos(x) - \sin(x), b_2(x) = 2\sin(x)\}$  es una base de soluciones.

Como  $\cos x, \sin x$  son soluciones de la ecuación y  $b_1, b_2$  son combinaciones lineales de  $\cos x, \sin x$ , entonces son soluciones. Una manera:

$$\forall x \in \mathbb{R} : a_1(\cos(x) - \sin(x)) + a_2 2\sin(x) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \implies a_1 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \implies a_2 = 0 \end{cases} \implies \text{l.i.}$$

Otra manera:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} a_1 b_1(x) + a_2 b_2(x) = 0 \\ a_1 b_1'(x) + a_2 b_2'(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1' & b_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

Si  $\exists x \in \mathbb{R} : \det \neq 0 \implies a_1 = a_2 = 0$  es la única solución.

$$\begin{vmatrix} \cos(x) - \sin(x) & 2\sin(x) \\ -\sin(x) - \cos(x) & 2\cos(x) \end{vmatrix} = \dots = 2\cos^2(x) + 2\sin^2(x) = 2 \neq 0 \implies \text{l.i.}$$

**Obs:** no sólo  $\exists x \in \mathbb{R} : \det \neq 0$  sino que  $\forall x \in \mathbb{R} : \det \neq 0$ . ¿Coincidencia? NO.

**Importante:** Sean  $b_1, b_2$  soluciones de la EDO con unicidad.

$$\exists x \in \mathbb{R} : W(b_1(x), b_2(x)) \neq 0 \iff \forall x \in \mathbb{R} : W(b_1(x), b_2(x)) \neq 0 \iff b_1, b_2 \text{ l.i.}$$

Sea  $x^2 y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0$  una EDO de segundo orden. Si además  $y(0) = y'(0) = 0$  tenemos que  $y_1(x) = x^2 \sin x \wedge y_2(x) = 0$  son soluciones de la EDO. Definimos  $z := y' \implies z' = y'' = \frac{4z}{x} - \frac{6y}{x^2}$ .

Como la función no es continua en  $x = 0$ , no podemos aplicar el teorema de Picard-Lindelöf.

26/04/2024

### Caracterización de soluciones de sistemas de EDOs autónomas de dimensión 2

Sea  $X'(t) = AX(t)$  con  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Si  $\lambda \in \mathbb{C}$  y  $\vec{v} \in \mathbb{C}^2 : A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ , entonces  $X_1(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$  es solución del sistema porque:

$$X_1'(t) = \lambda e^{\lambda t}\vec{v} = e^{\lambda t} A\vec{v} = e^{\lambda t} \lambda\vec{v} = A e^{\lambda t}\vec{v} = AX_1(t)$$

Si tienes dos soluciones linealmente independientes  $X_1, X_2$ , entonces generan todas las solu-

ciones que son de la forma  $X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$ .

Calculamos los autovalores de  $A$ :

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

$$\implies \text{Los autovalores son: } \lambda_{\pm} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

Definimos  $T := \text{tr}(A)$  y  $D := \det(A)$ .

- **Caso 1:**  $T^2 - 4D > 0 \implies \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R} \wedge \lambda_+ > \lambda_-$ .

Sean  $\vec{v}_+, \vec{v}_-$  autovectores asociados a  $\lambda_+, \lambda_-$  respectivamente. Por tanto, la solución general del sistema es:  $\vec{X}(t) = c_1 e^{\lambda_+ t} \vec{v}_+ + c_2 e^{\lambda_- t} \vec{v}_-$  con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

1. Consideramos  $T, D > 0$

$$\implies \sqrt{T^2 - 4D} < \sqrt{T^2} = T \implies \lambda_{\pm} > 0$$

Esto implica que cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\vec{X}(t)$  se “parece” cada vez más a  $\vec{v}_+$  en dirección. Análogamente, cuando  $t \rightarrow -\infty$ ,  $\vec{X}(t)$  se “parece” cada vez más a  $\vec{v}_-$  en dirección.

2. Consideramos  $T < 0 \wedge D > 0 \implies \lambda_- < \lambda_+ < 0$ .

Esto implica que cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\vec{X}(t) \rightarrow \vec{0}$ , con un diagrama de fases idéntico al caso anterior pero con todas las flechas apuntando hacia el origen.

3. Consideramos  $D < 0 \implies \sqrt{T^2 - 4D} > \sqrt{T^2} = |T|$ .

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{2} > \frac{T + |T|}{2} \\ \lambda_- &= \frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2} < \frac{T - |T|}{2} \end{aligned} \implies \lambda_+ > 0 > \lambda_-$$

4. Consideramos  $D = 0$

(a)  $T > 0 \implies \lambda_+ = T \wedge \lambda_- = 0$ . Es decir, hay soluciones estacionarias en la dirección de  $\vec{v}_-$  y todo el movimiento ocurre en la dirección de  $\vec{v}_+$ .

(b)  $T < 0 \implies \lambda_+ = 0 \wedge \lambda_- = T$ . Es decir, hay soluciones estacionarias en la dirección de  $\vec{v}_+$  y todo el movimiento ocurre en la dirección de  $\vec{v}_-$ .

- **Caso 2:**  $T^2 - 4D = 0 \implies \lambda_+ = \lambda_- = \frac{T}{2}$ . Veamos un ejemplo concreto:

**Ejemplo 6.1** ( $y'' - dy - cy = 0$ ). En forma de sistema queda:  $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$

$$\implies T = d \wedge D = -c = \frac{T^2}{4} \implies c = -\frac{d^2}{4}$$

Por tanto, una solución es  $y(t) = e^{\frac{d}{2}t}$  y  $z(t) = \frac{d}{2}e^{\frac{d}{2}t} \implies \vec{X}_1(t) = e^{\frac{d}{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix}$ .

Otra solución es  $y(t) = te^{\frac{d}{2}t} \implies \vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} te^{\frac{d}{2}t} \\ e^{\frac{d}{2}t} + \frac{d}{2}te^{\frac{d}{2}t} \end{pmatrix} = e^{\frac{d}{2}t} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} \right]$ .

Por tanto, la solución general es:  $\vec{X}(t) = c_1 e^{\frac{d}{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} + c_2 e^{\frac{d}{2}t} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} \right]$

• **Caso 3:**  $T^2 - 4D < 0 \implies \lambda_{\pm} = \frac{T}{2} \pm i \frac{\sqrt{4D - T^2}}{2} =: \alpha \pm \beta i$  cuyos autovectores son:

$$\begin{pmatrix} a - \lambda_+ & b \\ c & d - \lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_+^1 \\ v_+^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies (a - \lambda_+)v_+^1 + bv_+^2 = 0 \implies \vec{v}_+ = \begin{pmatrix} b \\ (\alpha - a) + \beta i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a - \lambda_- & b \\ c & d - \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_-^1 \\ v_-^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies (a - \lambda_-)v_-^1 + bv_-^2 = 0 \implies \vec{v}_- = \begin{pmatrix} b \\ (\alpha - a) - \beta i \end{pmatrix}$$

Vemos que, tanto  $\lambda_+$  y  $\lambda_-$ , como  $\vec{v}_+$  y  $\vec{v}_-$  son conjugados.

Por tanto, hemos encontrado dos soluciones complejas  $\begin{cases} \tilde{X}_1(t) = e^{(\alpha + \beta i)t} \vec{v}_+ \\ \tilde{X}_2(t) = e^{(\alpha - \beta i)t} \vec{v}_- \end{cases}$

que, nuevamente, son conjugadas entre sí.

Como consecuencia, podemos encontrar soluciones reales de la forma:

$$\begin{aligned} \begin{cases} X_1(t) = \operatorname{Re}(\tilde{X}_1(t)) = \frac{\tilde{X}_1(t) + \tilde{X}_2(t)}{2} \\ X_2(t) = \operatorname{Im}(\tilde{X}_1(t)) = \frac{\tilde{X}_1(t) - \tilde{X}_2(t)}{2i} \end{cases} \\ \implies \tilde{X}_1(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) \begin{pmatrix} b \\ (\alpha - a) + \beta i \end{pmatrix} \\ = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} b \cos \beta t \\ (\alpha - a) \cos \beta t - \beta b \sin \beta t \end{pmatrix} + i e^{\alpha t} \begin{pmatrix} b \sin \beta t \\ \beta \cos \beta t + (\alpha - a) \sin \beta t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

