

---

# GEOMETRÍA DE CURVAS Y SUPERFICIES

---

Segundo del Grado en Matemáticas

**Hugo Marquerie**

“Profesor”: Adrián Ubis Martínez

Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid

Segundo cuatrimestre 2023 - 2024

1 de Febrero, 2024

# Índice

<b>1</b>	<b>Curvas</b>	<b>1</b>
1.1	Curvas regulares, trazas, velocidades y tangencias . . . . .	1
1.2	Longitud de curvas y reparametrizaciones . . . . .	2
1.2.1	Poligonales . . . . .	2
1.2.2	Definición de longitud de curva . . . . .	2
1.2.3	Teorema de cálculo de longitud . . . . .	2
1.2.4	Reparametrizaciones . . . . .	4
1.2.5	Parametrización por longitud de arco . . . . .	4
1.3	Curvatura y torsión . . . . .	5
1.3.1	Fórmulas de Frenet-Serret . . . . .	9
1.3.2	Cambio de sentido y Triedro de Frenet . . . . .	10
1.3.3	Movimientos rígidos y triedros . . . . .	10
1.3.4	Otros triedros sobre curvas . . . . .	11
1.4	Curvatura y torsión. Complementos . . . . .	11
1.4.1	Curvas no parametrizadas por longitud de arco . . . . .	11
1.4.2	Curvatura de curvas planas . . . . .	13
1.4.3	Forma canónica local . . . . .	14
1.5	Teorema fundamental de la teoría de curvas . . . . .	16
1.6	Desigualdad isoperimétrica. Geometría global de curvas planas . . . . .	18
1.6.1	Conceptos varios . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Superficies</b>	<b>20</b>
2.1	Superficies regulares . . . . .	20
2.1.1	Noción de superficie regular . . . . .	20
2.2	Superficies parametrizadas . . . . .	21
2.2.1	Superficies generadas por curvas . . . . .	22
2.3	Complementos . . . . .	22
2.3.1	Las superficies regulares son localmente gráficas . . . . .	22
2.3.2	Los cambios de carta son difeomorfismos . . . . .	23
2.3.3	Sobre la condición de $\mathbb{X}^{-1}$ continua . . . . .	23
2.3.4	Superficies parametrizadas y superficies regulares . . . . .	23
2.4	Vectores y plano tangente . . . . .	23
2.4.1	Vector tangente . . . . .	23
2.4.2	Plano tangente . . . . .	24

<b>3</b>	<b>Primera forma fundamental</b>	<b>25</b>
3.1	Primera forma cuadrática fundamental . . . . .	25
3.2	Longitudes, ángulos, áreas . . . . .	26
3.2.1	Longitudes . . . . .	26
3.2.2	Ángulos . . . . .	26
3.2.3	Áreas . . . . .	27
3.3	Loxodromas . . . . .	27
3.4	Isometrías . . . . .	28
3.4.1	Isometrías con formas . . . . .	31
3.5	Aplicación conformes . . . . .	33
3.5.1	Aplicación conforme al plano . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Curvatura de superficies</b>	<b>36</b>

# 1 Curvas

## 1.1 Curvas regulares, trazas, velocidades y tangencias

**Definición 1.1 (Curva).**  $\gamma$  es una curva  $\iff \gamma: I = (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es  $C^\infty$

- Para casi todo lo que sigue basta con que  $\gamma \in C^2$ . Para contrastar, en alguna discusión posterior, admitiremos curvas que son solo  $C^0 \vee C^1$ .
- El intervalo  $I = (a, b)$  puede ser no acotado en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.2 (Traza).** Sea  $\gamma$  una curva,  $\text{trz}(\gamma) = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^3$ . También se dice que  $\gamma$  es parametrización de  $\text{trz}(\gamma)$ .

**Observación 1.1.** Dos curvas distintas pueden tener la misma traza y corresponden a parametrizaciones diferentes. De hecho, si  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva y  $g: J \longrightarrow I$  es una función sobreyectiva  $C^\infty$

$$\implies \mu: J \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \mu(u) = \gamma(g(u)) \text{ es una curva de misma traza que } \gamma$$

**Definición 1.3 (Velocidad y rapidez).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva, el vector velocidad (**velocidad**) de  $\gamma$  en  $t$  es  $\gamma'(t) = \nabla \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ . La norma  $\|\gamma'(t)\|$  se conoce como la **rapidez**.

**Definición 1.4 (Curva regular).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , es regular  $\iff \forall t \in I : \gamma'(t) \neq 0$

**Ejemplo 1.1.** El conjunto de puntos  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1 \wedge y = |x|\}$  no es traza de ninguna curva regular.

Pongamos que  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  es curva regular con traza  $V$ , y que  $\gamma(0) = (0, 0)$ . Entonces  $y(t)$  tiene un mínimo en  $t = 0$  y  $y'(0) = 0$ . Si fuera  $x'(0) > 0$ , entonces  $x(t) > 0$  para  $t \in (0, \delta)$  y, por tanto,  $x(t) = y(t)$  para  $t \in [0, \delta)$  y, por tanto  $x'(0) = y'(0) = 0$ . Contradicción: la curva  $\gamma$  no es regular. También conduce a contradicción el que  $x'(0) = 0$ .

**Definición 1.5 (Recta tangente a una curva regular).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular y  $t_0 \in I$ ,  $\eta: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es la recta tangente a  $\gamma$  en  $\gamma(t_0)$   $\iff \eta(u) = \gamma(t_0) + u\gamma'(t_0)$

## 1.2 Longitud de curvas y reparametrizaciones

### 1.2.1 Poligonales

Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva (no necesariamente regular) y  $[c, d] \subset I$ . Definimos una poligonal de  $\gamma$  entre  $\gamma(c)$  y  $\gamma(d)$  tomando una partición de  $[c, d]$ :  $c = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = d$ .

La poligonal  $\Pi$  asociada a esa partición es la lista de segmentos:

$$\Pi := ([\gamma(t_0), \gamma(t_1)], [\gamma(t_1), \gamma(t_2)], \dots, [\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)])$$

La longitud de la poligonal  $\Pi$  se denota  $L(\Pi)$  se define entonces de forma natural como:

$$L(\Pi) = \sum_{j=1}^n \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$$

### 1.2.2 Definición de longitud de curva

**Definición 1.6 (Longitud de una curva).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva  $C^0$ ,  $[c, d] \subset I$ , se define la longitud como:

$$L(\gamma; c, d) = \sup \{L(\Pi) : \Pi \text{ poligonal de } \gamma \text{ entre } \gamma(c) \text{ y } \gamma(d)\}$$

En general, para una curva sólo continua este supremo puede ser  $\infty$ . Por ejemplo, para la curva copo de nieve de Von Koch.

### 1.2.3 Teorema de cálculo de longitud

**Teorema 1.1.** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular y  $[c, d] \subset I \implies L(\gamma; c, d) = \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt$ .

**Demostración.** En la demostración denotamos

- $L := L(\gamma; c, d)$ , que es supremo de las longitudes de las poligonales.
- $J := \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt$

Veamos que  $L \leq J \wedge J \leq L$ :

**Lema 1.1.** Sea  $u: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación y sean  $c, d \in I$ , con  $c < d$ .

$$\implies \left\| \int_c^d u(t) dt \right\| \leq \int_c^d \|u(t)\| dt$$

**Demostración.** Usamos que para cualquier  $v$  se tiene  $\|v\| = \sup\{|v \cdot w| : \|w\| = 1\}$ .

Pongamos  $v = \int_c^d u(t) dt$  y sea  $w$  con  $\|w\| = 1$

$$\implies v \cdot w = \int_c^d (u(t) \cdot w) dt \wedge |v \cdot w| \leq \int_c^d |u(t) \cdot w| dt \leq \int_c^d \|u(t)\| dt$$

Lo anterior es cierto para cualquier  $w$  con  $\|w\| = 1$ . ■

[**L**  $\leq$  **J**] Para una poligonal  $\Pi$  con partición  $t_0 = c < t_1 < \dots < t_n = d$ , se tiene que

$$L(\Pi) = \sum_{j=1}^n \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^n \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right\|$$

Por el Lema 1.1, se tiene  $L(\Pi) \leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_n} \|\gamma'(t)\| dt = J \implies L \leq J$ .

[**L**  $\leq$  **J**] Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Por la continuidad uniforme de  $\gamma' \in C^0$ ,  $\exists \delta > 0 : c \leq t \leq t' \leq d$

• son tales que  $|t' - t| \leq \delta$  • entonces  $\|\gamma(t') - \gamma(t)\| \leq \varepsilon$

(El  $\delta$  no depende de los puntos  $t$  y  $t'$ , sólo de  $\varepsilon$ ).

Tomamos una partición  $t_0 = c < t_1 < \dots < t_n = d$  para la que cumpla que  $t_j - t_{j-1} < \delta$  para  $j = 1, \dots, n$ .

Sea  $\Pi$  la poligonal dada por esa partición. Entonces:

$$L(\Pi) = \sum_{j=0}^{n-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| = \sum_{j=0}^{n-1} \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma'(t) dt \right\|$$

Sea  $u_j \in [t_{j-1}, t_j]$  tal que  $\|\gamma'(u_j)\| = \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \|\gamma'(t)\|$ .

Por un lado,  $J = \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{j=1}^n \|\gamma'(u_j)\| (t_j - t_{j-1})$  ( $\star$ )

Por otro lado,

$$\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma'(t) dt = \left( \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\gamma'(t) - \gamma'(u_j)) dt \right) + \gamma'(u_j)(t_{j+1} - t_j)$$

$$\begin{aligned} \implies \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| &\geq \|\gamma'(u_j)\| |t_{j+1} - t_j| - \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\gamma'(t) - \gamma'(u_j)) dt \right\| \\ &\geq \|\gamma'(u_j)\| |t_{j+1} - t_j| - \varepsilon(t_{j+1} - t_j) \end{aligned}$$

usando el Lema 1.1 y las condiciones de la partición. Por lo tanto,

$$L(\Pi) = \sum_{j=0}^{n-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| \geq \sum_{j=0}^{n-1} \|\gamma'(u_j)\| (t_{j+1} - t_j) - \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) \geq J - \varepsilon(d - c)$$

donde se ha usado ( $\star$ ). En suma  $\forall \varepsilon > 0 : J \leq L(\Pi) + \varepsilon(d - c) \geq L + \varepsilon(d - c) \implies J \leq L$ . ■

**Ejemplo 1.2 (Longitud gráfica de una función).**  $\forall t \in [c, d] : \gamma(t) = (t, f(t))$  donde  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable.

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + (f'(t))^2} \implies \text{Long gráfica} = \int_c^d \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

#### 1.2.4 Reparametrizaciones

Dada una curva  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , queremos recorrer su traza con otra curva.

**Definición 1.7.** Sean  $h: J \rightarrow I$  un difeomorfismo (biyección tal que tanto  $h$  como  $h^{-1}$  son  $C^\infty$ ) y  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva,  $\eta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una reparametrización de  $\gamma$

$$\iff \forall u \in J : \eta(u) = \gamma(h(u))$$

- $\eta$  es curva porque  $\gamma$  lo es y  $h$  es  $C^\infty$ .
- $\eta$  y  $\gamma$  tienen la misma traza ( $\text{trz}(\eta) = \text{trz}(\gamma)$ ).
- $\gamma$  es también reparametrización de  $\eta$ , pues  $\gamma = \eta \circ h^{-1}$ .
- $\eta$  regular  $\iff \gamma$  regular, pues  $\eta(u) = h'(u) \cdot \gamma'(h(u))$ .
- En coordenadas,  $\frac{d}{du}\eta(u) = (\gamma'_1(h(u)) \cdot h'(u), \gamma'_2(h(u)) \cdot h'(u), \gamma'_3(h(u)) \cdot h'(u))$

#### Orientación:

- Si  $h$  es función creciente, entonces  $\eta$  recorre la traza en el mismo sentido que  $\gamma$ .
- Si  $h$  es decreciente, entonces  $\eta$  recorre la traza en sentido contrario a como lo hace  $\gamma$ .

Supongamos que  $h$  es creciente. Sean  $[p, q] \subset J$ . Llamamos  $h(p) = c < d = h(q)$ . La curva  $\eta$  recorre de  $p$  a  $q$  la misma traza que  $\gamma$  desde  $c$  a  $d$ . La longitud de esa porción de traza se puede calcular con  $\eta$  o con  $\gamma$ :

$$L(\gamma; c, d) = L(\eta; p, q) \iff \int_c^d \|\gamma'(t)\| dt = \int_p^q h'(u) \|\gamma'(h(u))\| du$$

#### 1.2.5 Parametrización por longitud de arco

**Definición 1.8 (Curva parametrizada por longitud de arco).** Sea  $\eta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular, es parametrizada por longitud de arco

$$\begin{aligned} &\iff \forall s_1, s_2 \in I : s_1 < s_2 : s_2 - s_1 = L(\eta; s_1, s_2) \\ &\iff \forall s_1, s_2 \in I : s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} \|\eta'(s)\| ds \iff \forall s \in I : \|\eta'(s)\| = 1 \end{aligned}$$

**Teorema 1.2.** Toda curva regular se puede reparametrizar por longitud de arco.

**Demostración.** Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular, fijamos  $t_0 \in I$  y definimos:

$$\forall t \in I : g(t) := \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du$$

- ⎧ Para  $t > t_0$ , se tiene que  $g(t)$  es la longitud de la curva  $\gamma$  entre  $\gamma(t_0)$  y  $\gamma(t)$ .
- ⎧ Para  $t < t_0$ , la función  $g(t)$  nos da el negativo de la longitud entre  $\gamma(t_0)$  y  $\gamma(t)$ .

Queremos usar  $s := g(t)$  como etiqueta del punto  $\gamma(t)$ , en otras palabras, queremos despejar  $t$  en términos de  $s$ , es decir, invertir  $g$ .

- Como  $\gamma$  es regular, se tiene  $g'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ . Así que  $g$  es función creciente.
- Supongamos que  $I = (a, b)$ . Llamaremos  $c := \lim_{t \rightarrow a} g(t)$  y  $d := \lim_{t \rightarrow b} g(t)$

$\implies$  La función  $g$  es difeomorfismo entre  $I = (a, b)$  y  $J := (c, d)$

**Lema 1.2.** Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función  $C^\infty : \forall t \in I : \alpha(t) \neq 0 \implies \|\alpha(t)\|$  es  $C^\infty$

**Demostración.** La función  $\|\alpha(t)\|^2 = \alpha(t) \cdot \alpha(t)$  es  $C^\infty$  y  $\|\alpha(t)\|$  es la raíz cuadrada de una función  $C^\infty$  que no se anula, por tanto, es  $C^\infty$ . ■

El lema nos da que  $g'$  es  $C^\infty$ . Tomamos  $h: J \rightarrow I$  dada por  $h(s) := g^{-1}(s)$ , y consideramos la curva  $\forall s \in J : \eta(s) := \gamma(h(s))$ .

Se tiene que  $\eta'(s) = h'(s) \cdot \gamma'(h(s)) = \frac{1}{g'(h(s))} \gamma'(h(s)) = \frac{1}{\|\gamma'(h(s))\|} \gamma'(h(s))$ .

$\implies \forall s \in J : \|\eta'(s)\| = 1 \implies \eta$  está parametrizada por longitud de arco. ■

La relevancia del teorema de reparametrización por longitud de arco radica sobre todo en que nos permite suponer que hay tal reparametrización, no tanto en que sea un procedimiento para conseguirla.

### 1.3 Curvatura y torsión

La curvatura de una curva en un punto mide

- cuán lejana está la curva de ser recta en ese punto.
- cuán rápidamente está cambiando de dirección en ese punto.

La torsión de una curva en un punto mide

- cuán próxima está la curva a ser curva plana en ese punto.
- cuán rápidamente está cambiando su plano “osculador” en ese punto.



**Lema 1.3.** 1. Sea  $u: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación derivable tal que  $\|u(t)\|$  es constante en  $I$ .

$$\implies \forall t \in I : u'(t) \cdot u(t) = 0 \iff \forall t \in I : u'(t) \perp u(t)$$

2. Sean  $u: I \longrightarrow \mathbb{R}^3, v: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  aplicaciones derivables tales que  $u(t) \cdot v(t) = \text{cte}$  en  $I$ .

$$\implies \forall t \in I : u'(t) \cdot v(t) = -u(t) \cdot v'(t)$$

Uso típico:  $\|u(t)\| = 1 \wedge u(t) \cdot v(t) = 0$ .

**Demostración.** La primera parte del lema se deduce de la segunda, más general, tomando  $v = u$ . Como el producto escalar  $u(t) \cdot v(t)$  es constante, derivando se tiene que

$$\forall t \in I : u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t) = 0 \implies \forall t \in I : u'(t) \cdot v(t) = -u(t) \cdot v'(t)$$

■

**Definición 1.9 (Vector tangente).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco ( $\forall s \in I : \|\gamma'(s)\| = 1$ ),  $t(s)$  es el vector tangente a  $\gamma$  en  $s \in I \iff \boxed{t(s) := \gamma'(s)}$

**Definición 1.10 (Curvatura).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco ( $\forall s \in I : \|\gamma'(s)\| = 1$ ),  $\kappa(s)$  es la curvatura de  $\gamma$  en  $s \in I \iff \boxed{\kappa(s) := \|t'(s)\| = \|\gamma''(s)\|}$

**Ejemplo 1.3 (Curvatura nula significa que la traza es (parte de) una recta).**

Tenemos que  $\kappa \equiv 0 \iff t' \equiv 0 \iff t = \gamma' \equiv \text{cte} \iff \gamma(s) = \gamma(0) + s t(0)$

$$\iff \gamma \text{ es parte de una recta.}$$

**Proposición 1.1.** Una curva en el plano de curvatura constante  $M > 0$  está contenida en una circunferencia de radio  $1/M$ .

**Demostración.** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrizada por longitud de arco en el plano con curvatura constante  $M > 0$ . Es decir,  $\forall s \in I : (\|\gamma'(s)\| = 1 \wedge \|\gamma''(s)\| = M)$ .

- Como  $\gamma'(s) \cdot \gamma'(s) \equiv 1$ , se tiene  $(\star) \gamma''(s) \cdot \gamma'(s) \equiv 0$ , es decir,  $\gamma''(s) \perp \gamma'(s)$ .
- Como  $\gamma''(s) \cdot \gamma''(s) \equiv M^2$ , se tiene que  $\gamma''(s) \cdot \gamma'''(s) = 0$ , es decir,  $\gamma''(s) \perp \gamma'''(s)$ .

Como  $\gamma''(s) \neq 0$  (y dado que estamos en el plano), esto significa que  $\gamma'''(s) \parallel \gamma'(s)$ , es decir,  $\gamma'''(s) = \lambda(s)\gamma'(s)$  para alguna función  $\lambda(s)$  (de hecho,  $\lambda(s) = \gamma'''(s) \cdot \gamma'(s)$ ).

Derivamos en  $(\star)$ :  $\gamma'''(s) \cdot \gamma'(s) + \gamma''(s) \cdot \gamma''(s) = 0 \implies \lambda(s) + M^2 = 0$ .

$$\implies \gamma'''(s) + M^2 \gamma'(s) \equiv 0 \implies \frac{1}{M^2} \gamma'''(s) + \gamma'(s) \equiv 0 \implies \left( \gamma(s) + \frac{1}{M^2} \gamma''(s) \right)' \equiv 0$$

De manera que existe un cierto  $p \in \mathbb{R}^2$  tal que para todo  $s \in I$

$$\gamma(s) + \frac{1}{M^2} \gamma''(s) = p \implies \|\gamma(s) - p\| = \frac{1}{M^2} \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{M}$$

Concluimos que todos los puntos de la curva están a distancia  $1/M$  de un cierto punto  $p$ , es decir, la curva está contenida en una circunferencia de radio  $1/M$ . ■

**Definición 1.11 (Curva birregular).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular, es birregular

$$\iff \forall s \in I : \gamma''(s) \neq 0 \iff \forall s \in I : \kappa(s) \neq 0$$

**Proposición 1.2.** Una curva regular  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  (no necesariamente parametrizada por longitud de arco) es birregular  $\iff$  su reparametrización por longitud de arco es birregular.

$$\iff \forall i \in I : \gamma'(t) \text{ y } \gamma''(t) \text{ son linealmente independientes.}$$

**Demostración.** Sea  $\eta(s) = \gamma(h(s))$  una reparametrización de  $\gamma$  por longitud de arco.

$$\implies \eta'(s) = h'(s)\gamma'(h(s)) \wedge \eta''(s) = h'(s)^2\gamma''(h(s)) + h''(s)\gamma'(h(s))$$

Si  $\gamma$  es birregular, entonces  $\eta$  también lo será y, por tanto,  $\eta''(s) \neq 0$ .

Además,  $\eta'(s) \cdot \eta''(s) = 0$ , así que  $\eta'(s)$  y  $\eta''(s)$  son linealmente independientes. Mirando las expresiones de arriba, esto supone que  $\gamma'(h(s))$  y  $\gamma''(h(s))$  son linealmente independientes.

Si  $\gamma'(h(s))$  y  $\gamma''(h(s))$  son linealmente independientes, entonces  $\eta''(s)$  no puede ser el vector nulo, pues en la combinación lineal de arriba  $h'(s) \neq 0$ . ■

**Definición 1.12 (Vector normal).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular parametrizada por longitud de arco,  $n(s)$  es el vector normal a  $\gamma$  en  $s \in I$

$$\iff n(s) := \frac{t'(s)}{\|t'(s)\|} = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)}$$

La aplicación  $n: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es  $C^\infty$ , pues  $\kappa$  es  $C^\infty$  y no se anula.

Como  $\|t\| = 1 \implies t'(s) \perp t(s) \implies \boxed{n(t) \perp t(s)}$

El vector  $n(s)$  es unitario y perpendicular a  $t(s)$ . Hay infinitos vectores en  $\mathbb{R}^3$  (toda una circunferencia) con esa propiedad:  $n(s)$  es uno de ellos, pero canónico.

**Definición 1.13 (Plano osculador).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco, el subespacio afín  $\pi$  es el plano osculador a la curva  $\gamma$  en  $s \in I$

$$\iff \pi = \mathcal{L} \left\{ t(s) = \gamma'(s), n(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)} \right\} + \gamma(s)$$

Para una curva en  $\mathbb{R}^2$ , el plano osculador es  $\mathbb{R}^2$ .

Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular parametrizada por longitud de arco y  $0 \in I$ .

La aproximación de primer orden a  $\gamma$  en  $\gamma(0)$  es la recta tangente a  $\gamma$  en  $\gamma(0)$ :

$$\gamma(s) \approx \gamma(0) + s\gamma'(0) = \gamma(0) + s\mathbf{t}(0)$$

La aproximación de segundo orden a  $\gamma$  en  $\gamma(0)$  se denomina **parábola oscultriz**:

$$\gamma(s) \approx \gamma(0) + s\mathbf{t}(0) + \frac{1}{2}s^2\gamma''(0) = \gamma(0) + s\mathbf{t}(0) + \frac{\kappa(0)}{2}s^2\mathbf{n}(0)$$

Entonces, “hasta orden 2” la curva está contenida en su plano osculador.

**Definición 1.14 (Vector binormal).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular,  $\mathbf{b}(s)$  es el vector binormal a  $\gamma$  en  $s \in I \iff \boxed{\mathbf{b}(s) := \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)}$

Por las propiedades del producto vectorial  $\implies \mathbf{b}(s) \perp \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{b}(s) \perp \mathbf{n}(s) \wedge \|\mathbf{b}(s)\| = 1$ .

Entonces, el vector binormal es vector unitario normal al plano osculador a la curva en  $s$ .

**Definición 1.15 (Triedro de Frenet).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular, el triedro de Frenet en  $s \in I$  es la tripleta  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$

- $\forall s \in I : (\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  es un triedro positivamente orientado.
- $\forall s \in I : \{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .

La torsión de  $\gamma$  en  $s$  va a medir cómo varía el plano osculador a  $\gamma$  en  $s$  y, alternativamente, cuán “plana” es la curva  $\gamma$  en  $s$ .

Como  $\mathbf{b}(s)$  es el vector normal al plano osculador a  $\gamma$  en  $s$ , se trata de estudiar  $\mathbf{b}'(s)$ . Sabiendo que  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ , al derivar obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(s) &= \mathbf{t}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= \kappa(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \end{aligned}$$

Se deduce que  $\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{t}(s)$ . Además, como  $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \equiv 1 \implies \mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{b}(s) \implies \mathbf{b}'(s) \parallel \mathbf{n}(s)$ .

**Definición 1.16 (Torsión).** Sea  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular,  $\tau(s)$  es la torsión de  $\gamma$  en  $s \in I \iff \boxed{\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)} \implies \boxed{\tau(s) = \mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)} \wedge \|\mathbf{b}(s)\| = |\tau(s)|$

Para una curva birregular la curvatura es siempre positiva, pero la torsión en un punto dado puede ser positiva, negativa o 0. El signo de la torsión tiene significado geométrico.

**Proposición 1.3** (Torsión  $\equiv 0$ ). Sea  $\gamma$  una curva birregular,

$$\gamma \text{ está contenida en un plano} \iff \tau \equiv 0$$

**Demostración.** ( $\implies$ ) Si la curva está contenida en un plano, entonces  $b$  es constantemente uno de los dos vectores normales a dicho plano, por lo que  $b' \equiv 0 \implies \tau \equiv 0$ .

( $\impliedby$ ) Si  $\tau \equiv 0$ , entonces  $b' \equiv 0 \implies b$  es constante. Por tanto, si fijamos  $s_0 \in I \implies \forall s \in I : b(s) = b(s_0)$ . Queremos probar ahora que  $\forall s \in I : (\gamma(s) - \gamma(s_0)) \perp b(s_0)$ .

Pero, derivando el producto escalar,

$$\begin{aligned} ((\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot b(s_0))' &= \gamma'(s) \cdot b(s_0) \\ &= t(s) \cdot b(s_0) = t(s) \cdot b(s) = 0, \quad \forall s \in I \end{aligned}$$

Por tanto,  $(\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot b(s_0)$  es una constante cuando  $s$  recorre  $I$ . Como en  $s = s_0$  se anula, se tiene que  $\forall s \in I : (\gamma(s) - \gamma(s_0)) \perp b(s_0)$  y  $\gamma$  está contenida en un plano. ■

**Definición 1.17 (Planos).** Sean  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco y  $(t, n, b)$  su triedro de Frenet. Se definen

Plano osculador, determinado por  $t \wedge n$

Plano normal, determinado por  $n \wedge b$

Plano rectificante, determinado por  $t \wedge b$

### 1.3.1 Fórmulas de Frenet-Serret

Vamos a expresar las derivadas  $t'(s), n'(s), b'(s)$  respecto de la base  $\{t(s), n(s), b(s)\}$ .

Ya tenemos  $t'(s) = \kappa(s) n(s) \wedge b'(s) = \tau(s) n(s)$  de las definiciones 1.10, 1.16 y 1.12.

$$\begin{aligned} b(s) &= t(s) \times n(s) \implies n(s) = b(s) \times t(s) \\ \implies n'(s) &= b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s) = \tau(s) n(s) \times t(s) + \kappa(s) b(s) \times n(s) \\ &= -\tau(s) b(s) - \kappa(s) t(s) \end{aligned}$$

$$\implies \begin{pmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}}_{=:FS} \begin{pmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix}$$

Estas son las ecuaciones de Frenet-Serret donde la matriz escalar  $FS$  es antisimétrica.

Si escribimos los vectores de arriba en coordenadas ( $t = (t_1, t_2, t_3), t' = (t'_1, t'_2, t'_3)$ , etc.), la matriz anterior es de dimensiones  $9 \times 9$ : cada símbolo en la matriz  $FS$  se ha de sustituir por una caja diagonal.

### 1.3.2 Cambio de sentido y Triedro de Frenet

Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Supongamos por comodidad que  $I = (-a, a) \implies 0 \in I$  para  $a > 0$ .

Consideramos la curva  $\bar{\gamma}(s) := \gamma(-s)$ , que recorre la misma traza que  $\gamma$ , pero en sentido contrario. Queremos relacionar el triedro de  $\bar{\gamma}$  y su curvatura  $\bar{\kappa}$  y torsión  $\bar{\tau}$  con los de  $\gamma$  en 0, como  $\bar{\gamma}(0) = \gamma(0)$ :

$$\bar{\mathbf{t}}(0) = -\mathbf{t}(0) \wedge \bar{\mathbf{n}}(0) = \mathbf{n}(0) \wedge \bar{\kappa}(0) = \kappa(0) \wedge \bar{\mathbf{b}}(0) = -\mathbf{b}(0) \wedge \bar{\tau}(0) = -\tau(0)$$

### 1.3.3 Movimientos rígidos y triedros

Los movimientos rígidos de  $\mathbb{R}^3$  se obtienen componiendo traslaciones con rotaciones. Si  $M$  es movimiento rígido de  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $M$  viene dado por un vector  $p$  y una matriz ortogonal  $O$  ( $O^T = O^{-1}$ ) con determinante 1:

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 : M(v) = Ov + p$$

Como  $|O| = 1$ , se tiene que  $u, v \in \mathbb{R}^3 \implies Ou \times Ov = O(u \times v)$ .

1. **Traslaciones:** Sea  $\gamma$  una curva birregular parametrizada por longitud de arco, definimos la curva  $\bar{\gamma}(s) := \gamma(s) + p$ .

Como  $\bar{\gamma}'(s) = \gamma'(s)$ , se tiene que está parametrizada por longitud de arco

$$\implies \forall s \in I : \bar{\mathbf{t}}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \bar{\kappa}(s) = \kappa(s) \wedge \bar{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{n}(s) \wedge \bar{\tau}(s) = \tau(s) \wedge \bar{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{b}(s)$$

2. **Rotaciones:** Consideremos ahora la curva  $\bar{\gamma}(s) = O\gamma(s)$ . Se tiene  $\bar{\gamma}'(s) = O\gamma'(s)$ .

Así que  $\bar{\gamma}$  está parametrizada por longitud de arco y  $\forall s \in I : \bar{\mathbf{t}}(s) = O\mathbf{t}(s)$ .

Además,  $\forall s \in I : \bar{\mathbf{t}}'(s) = O\mathbf{t}'(s) \implies \bar{\kappa}(s) = \kappa(s) \wedge \bar{\mathbf{n}}(s) = O\mathbf{n}(s)$

$$\bar{\mathbf{b}}(s) = \bar{\mathbf{t}}(s) \times \bar{\mathbf{n}}(s) = O\mathbf{t}(s) \times O\mathbf{n}(s) = O(\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)) = O\mathbf{b}(s) \implies \bar{\tau}(s) = \tau(s)$$

Es decir, al trasladar o rotar la curva, sin deformarla, las longitudes se conservan: los triedros van en triedros y sus variaciones  $(\kappa, \tau)$  se conservan.

### 1.3.4 Otros triedros sobre curvas

**Definición 1.18 (Tiedro positivo).** Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco,  $[P(s), Q(s), R(s)]$  es un triedro positivo sobre la curva  $\gamma$ .

$$\iff \begin{cases} P, Q, R: I \rightarrow \mathbb{R}^3 & C^\infty \\ \forall s \in I : \|P(s)\| = \|Q(s)\| = \|R(s)\| = 1 \\ \forall s \in I : P(s) \perp Q(s) \perp R(s) \wedge R(s) \perp P(s) \end{cases}$$

Para cada  $s \in I$  tenemos una base ortonormal  $[P(s), Q(s), R(s)]$  de  $\mathbb{R}^3$  positivamente orientada, i.e.  $\forall s \in I : R(s) = P(s) \times Q(s)$ .

Vamos a expresar la variación de  $[P(s), Q(s), R(s)]$  respecto de sí mismo.

$$\begin{pmatrix} P'(s) \\ Q'(s) \\ R'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(s) \\ Q(s) \\ R(s) \end{pmatrix}$$

Como  $\|P(s)\| \equiv 1$ , tenemos que  $P'(s) \cdot P(s) = 0$ , análogamente para  $Q$  y  $R$ . Así que la matriz tiene ceros en la diagonal.

Por otro lado, como  $P(s) \cdot Q(s) = 0 \implies P'(s) \cdot Q(s) = -Q'(s) \cdot P(s)$  y análogamente para  $P(s) \cdot R(s) = 0$  y  $Q(s) \cdot R(s) = 0$ . Así que la matriz es antisimétrica.

$$\implies \begin{pmatrix} P'(s) \\ Q'(s) \\ R'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A(s) & B(s) \\ -A(s) & 0 & C(s) \\ -B(s) & -C(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(s) \\ Q(s) \\ R(s) \end{pmatrix}$$

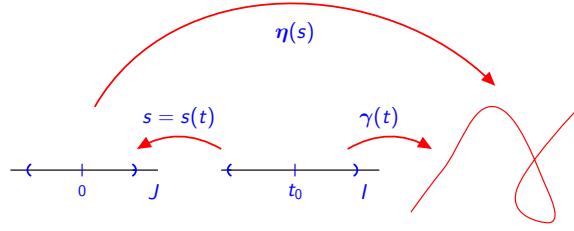
El el triedro de Frenet es un caso especialmente sencillo de tiedro positivo.

## 1.4 Curvatura y torsión. Complementos

### 1.4.1 Curvas no parametrizadas por longitud de arco

Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$  una curva con parámetro natural  $t$  pero que no es longitud de arco. Queremos obtener la curvatura, torsión y el triedro de Frenet de  $\gamma(t)$ .

La parametrización  $\eta$  por longitud de arco viene dada por  $\forall t \in I : \gamma(t) = \eta(s(t))$  donde  $s = s(t)$  es la longitud de arco de  $\gamma$  desde  $\gamma(t_0)$  hasta  $\gamma(t)$ .



Cuando  $t$  recorre el intervalo  $I$ , el parámetro  $s$  recorre un intervalo  $J$ . En notación general de (re)parametrización, la función  $t \rightarrow s(t)$  se denota por  $g(t)$ .

Como  $t, n, b, \kappa, \tau$  se expresan y calculan a través de derivadas de  $\eta$  y queremos hacerlo en términos de  $\gamma$ , aplicamos la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} \forall t \in I : s(t) &= \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\gamma}{dt}(u) \right\| du \implies \forall t \in I : \frac{ds}{dt}(t) = \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\| \\ \frac{d\gamma}{dt}(t) &= \frac{d\eta}{ds}(s(t)) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = \frac{ds}{dt}(t) \cdot t(s(t)) \\ \implies \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) &= \left[ \frac{ds}{dt}(t) \right]^2 \cdot \frac{dt}{ds}(s) + \frac{d^2s}{dt^2}(t) \cdot t(s) = \left[ \frac{ds}{dt}(t) \right]^2 \kappa(s) n(s) + \frac{d^2s}{dt^2}(t) \cdot t(s) \\ \implies \frac{d^3\gamma}{dt^3}(t) &= \kappa(s) \left( \frac{ds}{dt}(t) \right)^3 \frac{dn}{ds}(s) + \text{combinación lineal de } t \text{ y } n \\ &= -\kappa(s) \left( \frac{ds}{dt}(t) \right)^3 \tau(s) b(s) + \text{combinación lineal de } t \text{ y } n \end{aligned}$$

### Fórmula general para la curvatura

$$\left( \frac{d\gamma}{dt}(t) \right) \times \left( \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) \right) = \kappa(s) \left( \frac{ds}{dt}(t) \right)^3 b(s) \implies \boxed{\kappa(s) = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}}$$

Para  $\gamma$  parametrizada por longitud de arco  $\|\gamma'\| = 1 \wedge \gamma' \perp \gamma'' \implies \kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$ .

### Fórmula general para la torsión

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\gamma}{dt}(t) \times \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) \right) \cdot \frac{d^3\gamma}{dt^3}(t) &= \left( \kappa(s) \left( \frac{ds}{dt}(t) \right)^3 b(s) \right) \cdot \left( -\kappa(s) \left( \frac{ds}{dt}(t) \right)^3 \tau(s) b(s) + \dots \right) \\ &= -\kappa^2 \left( \frac{ds}{dt}(t) \right)^6 \tau(s) = -\tau(s) \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \times \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) \right\|^2 \\ \implies \boxed{\tau(s) = -\frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}} \end{aligned}$$

En cuanto a  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ :

$$\boxed{\mathbf{t} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}} \wedge \boxed{\mathbf{b} = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}} \wedge \boxed{\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \times \gamma'}{\|\gamma' \times \gamma''\| \|\gamma'\|}}$$

### 1.4.2 Curvatura de curvas planas

Para curvas planas: podemos darle signo a la curvatura, y darle un significado geométrico.

**Definición 1.19.** Sea  $u \in \mathbb{R}^2$  un vector unitario ( $\|u\| = 1$ ),  $u^\perp$  es el vector que se obtiene al girarlo  $\pi/2$  en sentido positivo (antihorario)  $\iff u = (\cos \theta, \sin \theta) \implies u^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)$ .

Sea  $\gamma$  una curva regular en  $\mathbb{R}^2$  parametrizada por longitud de arco.

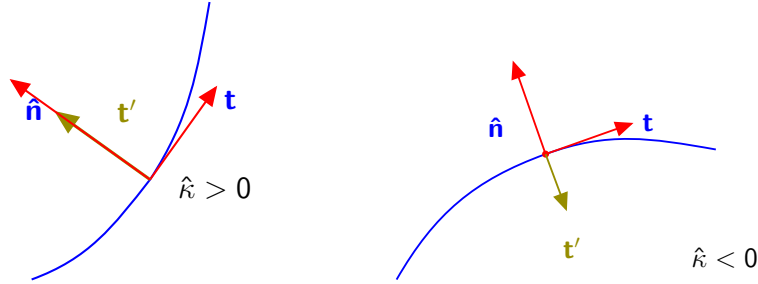
Denotamos con  $\hat{\mathbf{n}}(s) := \mathbf{t}(s)^\perp$ .

$$\implies \hat{\mathbf{n}}: I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad C^\infty \wedge \forall s \in I : (\mathbf{t}(s) \perp \hat{\mathbf{n}}(s)) \wedge (\mathbf{n}(s) = \pm \hat{\mathbf{n}}(s))$$

Como  $\mathbf{t}'(s) \perp \mathbf{t}(s)$ , tenemos que  $\mathbf{t}'(s) \parallel \hat{\mathbf{n}}(s) \implies \mathbf{t}'(s) = \hat{\kappa}(s) \cdot \hat{\mathbf{n}}(s)$ . Donde  $\hat{\kappa}(s)$  es la curvatura con signo de  $\gamma$  en  $s$ . La curvatura con signo solo requiere que la curva sea regular.

$$\implies \boxed{\hat{\kappa}(s) = \mathbf{t}'(s) \cdot \hat{\mathbf{n}}(s)} \wedge |\hat{\kappa}(s)| = \kappa(s)$$

El correspondiente vector binormal sería  $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{t} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{t} \times \mathbf{t}^\perp = (0, 0, 1) \perp \mathbb{R}^2$ .



Para una gráfica en el plano  $t \mapsto (t, f(t))$  que se recorre de izquierda a derecha ( $t$  creciente) la convexidad ( $f'' > 0$ ) corresponde con  $\hat{\kappa} > 0$  y la concavidad corresponde con  $\hat{\kappa} < 0$ .

### Relación entre curvatura y ángulo con eje $OX$

Vamos a describir la relación entre la curvatura  $\hat{\kappa}$  y (la variación de) el ángulo que (el vector tangente de) la curva forma con el eje  $OX$ .

**Lema 1.4.** Sea  $u: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación  $C^\infty : \forall t \in I : \|u(t)\| = 1$ .

$$\implies \exists \theta: I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad C^\infty : \forall t \in I : u(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

La función  $\theta$  es única salvo por adición de un múltiplo entero de  $2\pi$ . Por tanto, la derivada  $\theta'$  está unívocamente determinada.



Dada una curva  $\gamma$  regular plana y parametrizada por longitud de arco, podemos escribir  $\mathbf{t}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$  con  $\theta$  función  $C^\infty$ . Así que,  $\hat{\mathbf{n}}(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$  donde  $\theta(s)$  es el ángulo que forma  $\mathbf{t}(s)$  con el eje  $OX$ . El ángulo  $\theta(s)$  determina la dirección de  $\mathbf{t}(s)$ .

$$\implies \mathbf{t}'(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = \theta'(s)\hat{\mathbf{n}}(s) \implies \forall s : \hat{\kappa}(s) = \theta'(s)$$

### Reconstrucción de curva plana a partir de $\hat{\kappa}$

Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva plana parametrizada por longitud de arco y  $M$  un movimiento rígido del plano que conserva orientación, es decir, una traslación compuesta con una rotación.

Consideremos la curva  $\bar{\gamma}$  dada por  $\forall s \in I : \bar{\gamma}(s) = M\gamma(s)$ . Como  $M$  es movimiento rígido, se tiene que  $\bar{\gamma}(s)$  está parametrizada por longitud de arco y  $\forall s \in I : \hat{\kappa}(s) = \hat{\kappa}(s)$ .

Ahora, como  $\hat{\kappa}(s) = \theta'(s)$  y partimos de  $\theta(0) = 0 \implies \mathbf{t}(0) = (1, 0)$ :

$$\implies \theta(s) = \int_0^s \theta'(u) du = \int_0^s \hat{\kappa}(u) du$$

Como  $\gamma'(s) = \mathbf{t}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ , si establecemos  $\gamma(0) = (0, 0)$

$$\implies \gamma(s) = \left( \int_0^s \cos \theta(u) du, \int_0^s \sin \theta(u) du \right) \implies \boxed{\hat{\kappa} \Rightarrow \theta' \Rightarrow \theta \Rightarrow \mathbf{t} \Rightarrow \gamma}$$

En general si conocemos la función  $\hat{\kappa}(s) \implies \theta(s) = \int \hat{\kappa}(s) ds + c_1$  para cierta constante  $c_1$ .

$$\implies \gamma(s) = \left( \int \cos \theta(s) ds, \int \sin \theta(s) ds \right) + (c_2, c_3) \text{ para } c_2, c_3 \text{ constantes.}$$

Los valores de  $c_1, c_2, c_3$  quedan determinados, por ejemplo, por los valores de  $\gamma$  y  $\gamma'$  en un cierto  $s_0 \in I$ .

### 1.4.3 Forma canónica local

Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Analizamos localmente, mediante aproximación de Taylor de tercer orden, la curva  $\gamma$  en un entorno de  $0 \in I$  centrado en 0.

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + \frac{s^3}{6}\gamma'''(0) + E(s), \text{ con } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|E(s)\|}{s^3} = 0$$

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \left(s - \frac{\kappa(0)^2 s^3}{6}\right) \mathbf{t}(0) + \left(\frac{\kappa(0)s^2}{2} + \frac{\kappa'(0)s^3}{6}\right) \mathbf{n}(0) + \left(-\frac{\kappa(0)\tau(0)s^3}{6}\right) \mathbf{b}(0) + E(s)$$

Tras un movimiento rígido o con cambio de sistema de referencia, suponemos que

$$\gamma(0) = 0 \wedge \mathbf{t}(0) = i \wedge \mathbf{n}(0) = j \wedge \mathbf{b}(0) = k$$

Si  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$  y si  $E(s) = (e_x(s), e_y(s), e_z(s))$ , entonces

$$\begin{cases} x(s) &= s - \frac{\kappa(0)^2 s^3}{6} + e_x(s) \\ y(s) &= \frac{\kappa(0)s^2}{2} + \frac{\kappa'(0)s^3}{6} + e_y(s) \\ z(s) &= -\frac{\kappa(0)\tau(0)s^3}{6} + e_z(s) \end{cases}$$

Esta es la forma canónica local de  $\gamma$  cerca de  $s = 0$ .

La torsión  $\tau$  solo aparece en  $z(s)$ :

- Si  $\tau > 0$ , para  $s > 0$  la curva  $\gamma$  tiende a meterse debajo del plano osculador a  $\gamma$  en  $s = 0$ , donde “debajo” = en dirección opuesta a  $b$ .
- Si  $\tau < 0$ , para  $s > 0$  la curva  $\gamma$  tiende a pasar por encima del plano osculador a  $\gamma$  en  $s = 0$ , donde “encima” = en la dirección de  $b$ .

### Forma canónica local. Curvas planas

Sea  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrizada por longitud de arco con  $0 \in I$ .

$$\implies \gamma(s) = \gamma(0) + s \mathbf{t}(0) + \frac{s^2}{2} \hat{\kappa}(0) \hat{\mathbf{n}}(0) + F(s), \text{ con } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|F(s)\|}{s^2} = 0$$

Con  $\gamma(s) = (x(s), y(s)) \wedge \gamma(0) = (0, 0) \wedge \mathbf{t}(0) = (1, 0) \wedge \mathbf{n}(0) = (0, 1)$  se tiene:

$$\begin{cases} x(s) = s - \frac{\kappa(0)s^3}{6} + o(s^3) \\ y(s) = \frac{\kappa(0)}{2}s^2 + o(s^2) \end{cases}$$

### Circunferencia osculatriz

- Centro de curvatura  $\gamma(0) + \frac{1}{\kappa(0)} \mathbf{n}(0)$
- Radio de curvatura  $\frac{1}{\kappa(0)}$

La circunferencia osculatriz aproxima a la curva  $\gamma$  cerca de  $s = 0$ :

$$\left\| \gamma(s) - \left( \gamma(0) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}(0) \right) \right\| = \frac{1}{\kappa(0)} + o(s^2)$$

### Curvatura y comparación arco/cuerda en el plano

Definimos  $D(s)$  como la longitud del segmento (cuerda) que une  $\gamma(s_0)$  con  $\gamma(s)$ :

$$D(s) := \|\gamma(s_0 + s) - \gamma(s_0)\|$$

$$\implies \begin{cases} D(s) \leq [\text{longitud de } \gamma \text{ entre } s_0 \text{ y } s_0 + s] = s \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D(s)}{s} = \|\gamma'(s_0)\| = 1 \end{cases}$$

Poniendo  $s_0 = 0$ , y  $\gamma(0) = (0, 0) \wedge t(0) = (1, 0) \wedge n(0) = (0, 1)$  se tiene

$$D(s)^2 = x(s)^2 + y(s)^2 = s^2 - 2\frac{\kappa^2}{6}s^4 + \frac{\kappa^2}{4}s^4 + o(s^4) = s^2 \left(1 - \frac{1}{12}\kappa^2 s^2 + o(s^2)\right)$$

Así que  $\frac{D(s)^2}{s^2} = 1 - \frac{1}{12}\kappa^2 s^2 + o(s^2)$ . Cuando más grande es  $\kappa$ , más pequeño es  $\frac{D(s)}{s}$

## 1.5 Teorema fundamental de la teoría de curvas

El teorema fundamental de la teoría de curvas afirma:

- **Existencia:** Para cualesquiera posibles curvatura y torsión, hay una curva que las tiene como tales.
- **Unicidad:** La curvatura y la torsión de una curva la definen completamente salvo por la acción de un movimiento rígido.

**Teorema 1.3** (Existencia). *Sea  $I$  un intervalo abierto y sean  $\kappa(s)$  y  $\tau(s)$  dos funciones  $C^\infty$  en  $I$  tales que  $\forall s \in I : \kappa(s) > 0$ .*

*Entonces,  $\exists \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  curva birregular parametrizada por longitud de arco tal que  $\forall s \in I$  la curvatura y torsión de  $\gamma$  en  $s$  son  $\kappa(s)$  y  $\tau(s)$ .*

**Demostración.** Apelaremos al siguiente resultado de ecuaciones diferenciales ordinarias:

**Lema 1.5.** *Sea  $I$  un intervalo abierto y, por comodidad, supongamos  $0 \in I$ . Para cada  $t \in I$ , sea  $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$  una matriz cuadrada de dimensiones  $n \times n$  tal que las entradas  $a_{ij}(t)$  son funciones  $C^\infty$  en  $I$ . Sea  $b_0 = (b_0, \dots, b_n)^T$  un vector  $1 \times n$ .*

*Entonces existe una única solución  $X : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$  del problema de valores iniciales*

$$\{X'(t) = A(t)X(t) \wedge X(0) = b_0\}$$

Por comodidad, suponemos que  $0 \in I$ . Sea  $[P(s), Q(s), R(s)]$  solución del PVI de 9 ecuaciones diferenciales con 9 incógnitas:

$$\begin{pmatrix} P'(s) \\ Q'(s) \\ R'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(s) \\ Q(s) \\ R(s) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P(0) \\ Q(0) \\ R(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \end{pmatrix}$$

Consideramos los seis productos escalares:

$$\begin{pmatrix} (P \cdot Q)' \\ (P \cdot R)' \\ (Q \cdot R)' \\ (P \cdot P)' \\ (Q \cdot Q)' \\ (R \cdot R)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau & 0 & -\kappa & \kappa & 0 \\ \tau & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & 0 & \tau & -\tau \\ 2\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\kappa & 0 & -2\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (P \cdot Q) \\ (P \cdot R) \\ (Q \cdot R) \\ (P \cdot P) \\ (Q \cdot Q) \\ (R \cdot R) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (P \cdot Q)(0) \\ (P \cdot R)(0) \\ (Q \cdot R)(0) \\ (P \cdot P)(0) \\ (Q \cdot Q)(0) \\ (R \cdot R)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por unicidad de este sistema de ecuaciones diferencias, se tiene que

$$(P \cdot Q) = 0 \wedge (P \cdot R) = 0 \wedge (Q \cdot R) = 0 \wedge (P \cdot P) = 1 \wedge (Q \cdot Q) = 1 \wedge (R \cdot R) = 1$$

Por tanto,  $[P(s), Q(s), R(s)]$  es un triedro ortonormal positivo.

Sea ahora  $\gamma$  dada por  $\gamma'(s) = P(s)$  y  $\gamma(0) = 0$ .

Como  $\|P\| \equiv 1$ , se tiene que  $\gamma$  está parametrizada por longitud de arco.

Además, como  $\gamma'' \equiv P \equiv \kappa Q$  y  $\|Q\| \equiv 1$ , se tiene que  $\kappa$  es la curvatura de  $\gamma$  y  $n = Q$ .

Como  $R \equiv P \times Q$ , por ser triedro positivo, se tiene que  $b = R$ .

Por último, como  $b' = R' = \tau n$ , se tiene que  $\tau$  es la torsión de  $\gamma$ . ■

**Teorema 1.4** (Unicidad salvo movimiento rígido). *Sean  $\gamma$  y  $\bar{\gamma}$  dos curvas definidas en  $I$  y parametrizadas por longitud de arco.*

$$\forall s \in I : \kappa(s) = \bar{\kappa}(s) \wedge \tau(s) = \bar{\tau}(s) \iff \exists M \text{ movimiento rígido} : \forall s \in I : \bar{\gamma}(s) = M\gamma(s)$$

**Demostración.** ( $\Leftarrow$ ) Ya se ha visto.

( $\Rightarrow$ ) Suponemos sin pérdida de generalidad y por comodidad que  $0 \in I$ .

Suponemos, además, que  $\gamma(0) = \bar{\gamma}(0)$ ,  $t(0) = \bar{t}(0)$ ,  $n(0) = \bar{n}(0)$  y  $b(0) = \bar{b}(0)$ .

- Tras esta normalización, queremos probar que  $\gamma(s) = \bar{\gamma}(s)$  para todo  $s \in I$ .
- Comprobaremos que  $\forall s \in I : t(s) = \bar{t}'(s)$ . Con esto bastará porque integrando y usando que  $\gamma(0) = \bar{\gamma}(0)$  se tiene que  $\gamma(s) = \bar{\gamma}(s)$ .
- De hecho, probaremos simultáneamente que  $\forall s \in I : n(s) = \bar{n}(s) \wedge b(s) = \bar{b}(s)$ .

Consideramos la función real  $h$  definida en el intervalo  $I$ .

$$h(s) := \frac{1}{2} \left( \|t(s) - \bar{t}(s)\|^2 + \|n(s) - \bar{n}(s)\|^2 + \|b(s) - \bar{b}(s)\|^2 \right)$$

Queremos ver que  $h(s) \equiv 0$ . Como  $h(0) = 0$ , basta probar que  $h'(s) \equiv 0$ .

Derivando y usando las fórmulas de Frenet-Serret y que  $\kappa(s) = \bar{\kappa}(s)$  y  $\tau(s) = \bar{\tau}(s)$ , se

tiene que (obviando el parámetro  $s$ ):

$$\begin{aligned} h' &= (t' - \bar{t}') \cdot (t - \bar{t}) + (n' - \bar{n}') \cdot (n - \bar{n}) + (b' - \bar{b}') \cdot (b - \bar{b}) \\ &= \kappa(n - \bar{n}) \cdot (t - \bar{t}) - \kappa(t - \bar{t}) \cdot (n - \bar{n}) - \tau(b - \bar{b}) \cdot (n - \bar{n}) + \tau(n - \bar{n}) \cdot (b - \bar{b}) \\ &= 0 \implies h' \equiv 0 \end{aligned}$$

■

## 1.6 Desigualdad isoperimétrica. Geometría global de curvas planas

**Problema isoperimétrico:** de entre todas las figuras planas con idéntico perímetro, ¿cuál es la que encierra mayor área?

La desigualdad afirma que dada la longitud  $L$  de una curva simple cerrada  $\gamma$ , hay una cota superior  $\varphi(L) = \frac{\pi}{4}L^2$  para el área  $A$  encerrada por  $\gamma$ .

Pero no queremos una cota, queremos la mejor cota posible.

$\Phi(L) := \sup\{A : A \text{ es el área encerrada por una curva simple cerrada de longitud } L\}$

- Cota superior para  $\Phi$ : ya sabemos que  $\Phi \leq \varphi$ .
- Cota inferior para  $\Phi$ : pongamos que  $\gamma$  es una circunferencia de radio  $R$ . En este caso,  $L = 2\pi R$  y  $A = \pi R^2$ . Así que  $\Phi(L) \geq \frac{1}{4\pi}L^2$ .

$$\implies \frac{1}{4\pi}L^2 \leq \Phi(L) \leq \frac{\pi}{4}L^2$$

Vamos a comprobar que la función  $\Phi$  tiene que ser  $\Phi(L) = CL^2$  para alguna constante  $C$ .

Una homotecia de razón  $r > 0$  lleva la curva  $\gamma$  en la curva  $r\gamma$  y el área encerrada y la longitud de la curva se transforman como  $r^2$  y  $r$  respectivamente. Así que:

$$r^2A \leq \Phi(rL) \implies r^2\Phi(L) \leq \Phi(rL) \implies \frac{1}{r^2}\Phi(rL) \leq \Phi(L) \implies r^2\Phi(L) \geq \Phi(rL)$$

Con  $r = 1/L$  se tiene que  $\Phi(1) \leq \frac{1}{L}\Phi(L) \leq \Phi(1) \implies \Phi(L) = \Phi(1)L^2$ .

### 1.6.1 Conceptos varios

1. Una **curva simple cerrada plana**  $\gamma$  de periodo  $a > 0$  es una curva

$$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \iff \frac{t_1 - t_2}{a} \in \mathbb{Z}.$$

- La traza de  $\gamma$  es  $\gamma(\mathbb{R}) = \gamma([0, a))$ .
- La aplicación  $\gamma$  es inyectiva en el intervalo  $[u, u + a)$  sea cual sea  $u$ .

- La longitud  $L$  de  $\gamma$  es  $\int_0^a \|\gamma'(t)\| dt$ .
- Si  $\gamma$  es regular y está parametrizada por longitud de arco, entonces  $a = L$ .

## 2. Región encerrada: El teorema de la curva de Jordan:

La traza de una curva simple cerrada plana  $\gamma$  separa el plano en exactamente dos componentes conexas. Una de ellas es acotada y la otra no.

## 3. Área encerrada. Fórmula de Green:

La fórmula de Green nos dice que si  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  recorrida en sentido positivo encierra la región  $\mathcal{I}$ , entonces

$$\iint_{\mathcal{I}} (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\gamma} (P dx + Q dy)$$

Recordamos aquí que si  $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in (a, b)$  entonces

$$\int_{\gamma} (P dx + Q dy) = \int_a^b (P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)) dt$$

Si tomamos  $Q(x, y) = x \wedge P \equiv 0 \implies \text{Área}(\mathcal{I}) = \int_{\gamma} x dy = \int_a^b x(t)y'(t) dt$ .

Si tomamos  $p(x, y) - y \wedge Q \equiv 0 \implies \text{Área}(\mathcal{I}) = - \int_{\gamma} y dx = - \int_a^b y(t)x'(t) dt$ .

$$\implies \text{Área}(\mathcal{I}) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt$$

## 2 Superficies

### 2.1 Superficies regulares

#### 2.1.1 Noción de superficie regular

**Definición 2.1.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto de puntos, es una superficie regular  $\iff \forall p \in S$

$\exists U \subset \mathbb{R}^2 \wedge \exists W \subset \mathbb{R}^3$  abiertos  $\wedge \exists \mathbb{X}: U \longrightarrow \mathbb{R}^3: \mathbb{X}(U) = W \cap S$  de manera que

1. (diferenciabilidad)  $\mathbb{X}$  es  $C^\infty$ .
2. (regularidad)  $\forall (u, v) \in U: \left( \frac{d\mathbb{X}}{du} \times \frac{d\mathbb{X}}{dv} \right) (u, v) \neq 0$ . Es decir,  $d\mathbb{X}$  es de rango 2.
3. (homeomorfismo)  $\mathbb{X}$  es inyectiva y  $\mathbb{X}^{-1}$  es continua.

A tales  $\mathbb{X}$  se les llama cartas, parametrizaciones, mapas, o sistema (local) de coordenadas.

Si  $\mathbb{X}$  es carta de  $S$  y  $\mathbb{X}(U) = S$  (es decir, la carta  $\mathbb{X}$  cubre todo  $S$ ), se dice que  $\mathbb{X}$  es carta global o parametrización global de  $S$ .

#### Coordenadas y curvas coordenadas

Si  $q \in X(U)$ , entonces  $q$  se escribe (de manera única)  $q = \mathbb{X}(u_0, v_0)$  con  $(u_0, v_0) \in U$ .

A  $(u_0, v_0)$  se les llama las  $\mathbb{X}$ -coordenadas de  $q$ .

Las curvas que describe  $\mathbb{X}$  cuando  $v$  se deja constante y cuando  $u$  se deja constante son las curvas coordenadas: son  $u$ -curvas y  $v$ -curvas, respectivamente y denotamos:

- $\mathbb{X}_u(u_0, v_0)$  por el vector velocidad de la  $u$ -curva en  $\mathbb{X}(u_0, v_0)$ .
- $\mathbb{X}_v(u_0, v_0)$  por el vector velocidad de la  $v$ -curva en  $\mathbb{X}(u_0, v_0)$ .

#### Sobre las condiciones de superficie regular

1. Sobre la condición de diferenciabilidad, podemos escribir  $\mathbb{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  y entonces las funciones coordenadas de  $\mathbb{X}$ , es decir,  $x, y, z$  son  $C^\infty$ .
2. Sobre la condición de regularidad, escribiendo  $\mathbb{X}_u = (x_u, y_u, z_u)$  y  $\mathbb{X}_v = (x_v, y_v, z_v)$ , son equivalentes:
  - $\forall (u, v) \in U: \text{la matriz } d\mathbb{X}(u, v) \text{ es inyectiva.}$
  - $\forall (u, v) \in U: \mathbb{X}_u(u, v) \text{ y } \mathbb{X}_v(u, v) \text{ son linealmente independientes.}$
  - $\forall (u, v) \in U: \mathbb{X}_u(u, v) \times \mathbb{X}_v(u, v) \neq 0.$

$$\bullet \forall (u, v) \in U : \left( \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \right| \neq 0 \vee \left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}(u, v) \right| \neq 0 \vee \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(u, v) \right| \neq 0 \right).$$

3. Sobre la condición de homeomorfismo, la inyectividad de  $\mathbb{X}$  permite ubicar sin ambigüedad los puntos de  $\mathbb{X}(U) = W \cap S$  cercanos a  $p$  con parámetros  $(u, v)$ .

Que  $\mathbb{X}^{-1}$  sea continua es una condición laboriosa de verificar, pero si ya sabemos que  $S$  es superficie regular y tenemos un candidato a carta  $\mathbb{X}$  que cumple las condiciones anteriores, entonces  $\mathbb{X}^{-1}$  es continua automáticamente.

Por tanto, para comprobar que un conjunto  $S$  es una superficie regular, hay que encontrar una carta  $\mathbb{X}$  que cumpla las condiciones de superficie regular.

1. Encontrar una aplicación  $\mathbb{X}$  de tipo  $C^\infty$  cuya imagen de un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  sea (una parte de)  $S$ .
2. Comprobar que  $\forall (u, v) \in U : \mathbb{X}_u(u, v)$  y  $\mathbb{X}_v(u, v)$  son linealmente independientes.
3. Comprobar que  $\mathbb{X}$  es inyectiva.
4. Comprobar que  $\mathbb{X}(u_n, v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{X}(u, v) \implies (u_n, v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (u, v)$ .

Usando el teorema de la función implícita, podemos demostrar que el conjunto de puntos que satisfacen una ecuación de la forma  $F(x, y, z) = a$  (con  $F \in C^\infty$ ) es una superficie regular si  $\nabla F \neq 0$  en los puntos de la superficie.

$$\forall (x, y, z) \in F^{-1}(a) : F_z(x, y, z) \neq 0 \implies \exists f \text{ de tipo } C^\infty : F(x, y, f(x, y)) = a$$

Entonces definimos  $\mathbb{X}(u, v) = (u, v, f(u, v))$  que cumple las condiciones de carta.

## 2.2 Superficies parametrizadas

La noción de superficie parametrizada es más general que la que hemos manejado de superficie regular. Es extensión directa de la noción de curva regular. Deberíamos quizás adjetivar superficie parametrizada regular, pero no.

**Definición 2.2.** Sea  $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$  con  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto,  $(\mathbb{X}, U)$  es una superficie parametrizada

$$\iff (\forall (u, v) \in U : (\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v)(u, v) \neq 0) \wedge (\mathbb{X} \text{ es de tipo } C^\infty)$$

**Observación 2.1.**  $\bullet$  La traza de la superficie es  $\mathbb{X}(U)$ .

- $\bullet$  Solo hay una carta  $\mathbb{X}$  para la superficie y no hay condiciones de homeomorfismo, solo de diferenciabilidad y regularidad.



- $\mathbb{X}$  puede no ser inyectiva y  $\mathbb{X}^{-1}$  puede no ser continua. De esta manera, incluimos superficies con auto-intersecciones y con “bordes”.

### 2.2.1 Superficies generadas por curvas

1. **Cilindros:** Sea  $\forall t \in I : \alpha(t) = (a(t), b(t))$  una curva en  $\mathbb{R}^2$ .

Definimos un cilindro parametrizado mediante  $\forall t \in I, u \in \mathbb{R} : \mathbb{X}(t, u) = (a(t), b(t), u)$ .

La aplicación es de tipo  $C^\infty$  y se tiene que  $\mathbb{X}_t = (a', b', 0)$  y  $\mathbb{X}_u = (0, 0, 1)$ , que son linealmente independientes. Por tanto,  $(\mathbb{X}, I \times \mathbb{R})$  es una superficie parametrizada.

2. **Superficie de tangentes:** Sea  $\gamma(s)$  una curva birregular p.p.a. definida en  $s \in I$ .

Definimos la superficie de tangentes mediante  $\forall s \in I, u > 0 : \mathbb{X}(s, u) = \gamma(s) + u\gamma'(s)$ .

Observamos que  $\forall s \in \mathbb{R} : \alpha(t) := \mathbb{X}(s, t)$  es una (semir)recta tangente a  $\gamma$  en  $\gamma(s)$ .

La aplicación es de tipo  $C^\infty$  y se tiene que  $\mathbb{X}_s = \gamma'(s) + u\gamma''(s)$  y  $\mathbb{X}_u = \gamma'(s)$ .

$$\implies \|(X_s \times X_u)(u, v)\| = u \|\gamma''(s) \times \gamma'(s)\| = u\kappa(s) \neq 0 \text{ por ser } \gamma \text{ birregular}$$

Por tanto,  $(\mathbb{X}, I \times \mathbb{R}_{>0})$  es una superficie parametrizada.

3. **Superficie de revolución:** Sea  $\alpha(t) = (a(t), b(t))$  con  $a(t) > 0$  una curva regular en  $\mathbb{R}^2$  definida para  $t \in I$ .

Definimos la superficie de revolución mediante  $\mathbb{X}(\theta, t) = (a(t) \cos \theta, a(t) \sin \theta, b(t))$  en  $(\theta, t) \in [-\pi, \pi) \times I$ .

La aplicación es de tipo  $C^\infty$  y se tiene que

$$\mathbb{X}_\theta(\theta, t) = (-a(t) \sin \theta, a(t) \cos \theta, 0) \wedge \mathbb{X}_t(\theta, t) = (a'(t) \cos \theta, a'(t) \sin \theta, b'(t))$$

$$\implies \|\mathbb{X}_\theta \times \mathbb{X}_t\| = \|(-a(t)b'(t) \cos \theta, b(t)a'(t) \sin \theta, a(t)a'(t))\| = a(t) \|\alpha'(t)\| \neq 0$$

Por tanto, como  $\alpha$  es una curva regular,  $(\mathbb{X}, [-\pi, \pi) \times I)$  es una superficie parametrizada.

## 2.3 Complementos

### 2.3.1 Las superficies regulares son localmente gráficas

Sea  $S$  una superficie regular y sea  $p$  un punto de  $S$ .

Entonces, existe un abierto  $W$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  de manera que  $W \cap S$  es la gráfica de una función de tipo  $C^\infty$  de una de las tres formas siguientes:  $z = f(x, y)$ ,  $y = f(x, z)$  o  $x = f(y, z)$ .

Esto se debe, nuevamente, al teorema de la función implícita.

### 2.3.2 Los cambios de carta son difeomorfismos

Sean  $\mathbb{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{Y}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  cartas en un punto  $p$  de una superficie regular  $S$ .

Denotamos  $A = \mathbb{X}(U) \cap \mathbb{Y}(V)$  y sean  $\bar{U} = \mathbb{X}^{-1}(A)$  y  $\bar{V} = \mathbb{Y}^{-1}(A)$ .

Los puntos de  $A$  se pueden describir mediante  $\mathbb{X}$ -coordenadas en  $\bar{U}$  o  $\mathbb{Y}$ -coordenadas en  $\bar{V}$ .

La función  $\Phi: \bar{U} \rightarrow \bar{V}$  definida por  $\Phi = \mathbb{Y} \circ \mathbb{X}^{-1}$  es el difeomorfismo **cambio de carta**.

- $\mathbb{X}$  y  $\mathbb{Y}$  son funciones inyectivas  $\implies$  son biyectivas en sus imágenes  $\implies \Phi$  es biyectiva.
- $\mathbb{X}$  y  $\mathbb{Y}$  de tipo  $C^\infty \implies \Phi$  y  $\Phi^{-1}$  son de tipo  $C^\infty$ .

### 2.3.3 Sobre la condición de $\mathbb{X}^{-1}$ continua

Sea  $S$  una superficie regular y sea  $\mathbb{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación tal que  $\mathbb{X}(U) = W \cap S$ . Suponemos que  $\mathbb{X}$

- Cumple la condición de diferenciabilidad (es de tipo  $C^\infty$ ).
- Cumple la condición de regularidad (el rango de  $d\mathbb{X}$  es 2).
- Es inyectiva.

Se concluye que  $\mathbb{X}^{-1}$  es continua, y por tanto,  $\mathbb{X}$  es una carta de  $S$ .

### 2.3.4 Superficies parametrizadas y superficies regulares

Sea  $\mathbb{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada y sea  $(u_0, v_0) \in U$ . Entonces se puede tomar  $V$  entorno de  $(u_0, v_0)$  tal que  $(u_0, v_0) \in V \subset U$  de manera que  $S = \mathbb{X}(V)$  es una superficie regular.

Es más,  $\mathbb{X}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  es parametrización global de  $S$ .

## 2.4 Vectores y plano tangente

### 2.4.1 Vector tangente

**Definición 2.3.** Sea  $S$  una superficie regular y sea  $p \in S$ . Un vector  $v \in \mathbb{R}^3$  es tangente a  $S$  en  $p \iff \left( \exists \alpha: I \ni 0 \rightarrow S \text{ curva} : \alpha(0) = p \wedge \alpha(I) \subset S \right) \wedge v = \alpha'(0)$ .

Es decir, el que  $v$  sea un vector tangente a la superficie regular  $S$  en el punto  $p$  significa que  $v$  es vector tangente (velocidad) a una curva por  $p$  con traza en  $S$ .

Sea  $\mathbb{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una carta de una superficie regular  $S$  y sea  $p = \mathbb{X}(u_0, v_0)$ .

Sea  $v$  un vector tangente a  $S$  en  $p$  y sea  $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$  la curva con traza contenida en  $S$  y tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$ .

$$\implies v = \alpha'(0) = u'(0) \cdot \mathbb{X}_u(u_0, v_0) + v'(0) \cdot \mathbb{X}_v(u_0, v_0) \implies v \in \mathcal{L}\{\mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\}$$

Recíprocamente, dada una combinación lineal de  $\{\mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\}$ , consideramos la curva  $\alpha(t) = \mathbb{X}(u_0 + ta, v_0 + tb)$ , entonces:

$$\alpha'(t) = a\mathbb{X}_u(u_0 + ta, v_0 + tb) + b\mathbb{X}_v(u_0 + ta, v_0 + tb) \implies \alpha'(0) = a\mathbb{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbb{X}_v(u_0, v_0) = v$$

Es decir,  $v$  es vector tangente a  $S$  en  $p \iff v \in \mathcal{L}\{\mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\}$ .

### 2.4.2 Plano tangente

**Definición 2.4.** Sea  $S$  una superficie regular y sea  $\mathbb{X}$  una carta con  $p = \mathbb{X}(u_0, v_0)$ ,  $T_p S$  es el plano tangente a  $S$  en  $p \iff T_p S = p + \mathcal{L}\{\mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\}$ .

#### Vector normal a $T_p S$

El vector  $\mathbb{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbb{X}_v(u_0, v_0)$  es no nulo y perpendicular a  $T_p S$ , así que  $T_p S$  es el plano que pasa por  $p$  y tiene como vector normal a  $\mathbb{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbb{X}_v(u_0, v_0)$ .

**Definición 2.5 (Vector normal unitario).** Sea  $S$  una superficie regular y sea  $p \in S$ .

Definimos  $N := \frac{\mathbb{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbb{X}_v(u_0, v_0)}{\|\mathbb{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\|}$  como el vector normal unitario a  $S$  en  $p$ .

### 3 Primera forma fundamental

#### 3.1 Primera forma cuadrática fundamental

**Definición 3.1.** Sea  $S$  una superficie regular y  $p \in S$ , la aplicación  $I_p$  es la forma cuadrática (cuadrática fundamental) en el plano tangente  $T_p S \iff \forall v \in T_p S : I_p(v) = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$ .

**Observación 3.1.**  $\forall p \in S : I_p$  es una forma cuadrática definida positiva.

$I_p$  es la forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica  $(u, v) \in T_p S \times T_p S \mapsto \langle u, v \rangle$ .

Sea  $\mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  carta de  $S$  en  $p = \mathbb{X}(u_0, v_0)$ . Vamos a expresar la primera forma fundamental  $I_p$  de  $S$  en  $p$  en coordenadas con respecto a la base natural  $\beta = \{\mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0)\}$  de  $T_p S$  cuyos vectores son las velocidades de las curvas coordenadas en  $p$ .

Para todo  $(u, v) \in U$  definimos:

$$\begin{aligned} E(u, v) &:= \langle \mathbb{X}_u(u, v), \mathbb{X}_u(u, v) \rangle = \|\mathbb{X}_u(u, v)\|^2 \\ F(u, v) &:= \langle \mathbb{X}_u(u, v), \mathbb{X}_v(u, v) \rangle = \langle \mathbb{X}_v(u, v), \mathbb{X}_u(u, v) \rangle \\ G(u, v) &:= \langle \mathbb{X}_v(u, v), \mathbb{X}_v(u, v) \rangle = \|\mathbb{X}_v(u, v)\|^2 \end{aligned}$$

Las funciones  $E, F, G$  son  $C^\infty$  en  $U$ .

- $E(u_0, v_0)$  es el cuadrado de la rapidez de la curva coordenada  $\mathbb{X}(u, v_0)$  en  $\mathbb{X}(u_0, v_0)$ , cuyo vector velocidad es  $\mathbb{X}_u(u_0, v_0)$ .
- $G(u_0, v_0)$  es el cuadrado de la rapidez de la curva coordenada  $\mathbb{X}(u_0, v)$  en  $\mathbb{X}(u_0, v_0)$ , cuyo vector velocidad es  $\mathbb{X}_v(u_0, v_0)$ .
- Si se tiene  $F \equiv 0$ , entonces las curvas coordenadas se cortan perpendicularmente en cada intersección.

Se tiene que  $\forall v \in T_p S : \exists a, b \in \mathbb{R} : v = a\mathbb{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbb{X}_v(u_0, v_0)$ , y entonces:

$$\begin{aligned} I_p(v) &= \langle v, v \rangle = \langle a\mathbb{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbb{X}_v(u_0, v_0), a\mathbb{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbb{X}_v(u_0, v_0) \rangle \\ &= a^2 \langle \mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_u(u_0, v_0) \rangle + 2ab \langle \mathbb{X}_u(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0) \rangle + b^2 \langle \mathbb{X}_v(u_0, v_0), \mathbb{X}_v(u_0, v_0) \rangle \\ &= a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0) \end{aligned}$$

Por tanto, en forma matricial:  $I_p(v) = \begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  con  $v = (a, b)_\beta$ .

Esta matriz simétrica es la matriz de la forma cuadrática  $I_p$  respecto de la base  $\beta$ .

$$I_p \text{ def. positiva} \implies \det \begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix} = E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F^2(u_0, v_0) > 0$$

## 3.2 Longitudes, ángulos, áreas

### 3.2.1 Longitudes

Sea  $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva y  $a, b \in I, a < b$ , se tiene que la longitud de la traza de  $\alpha$  entre  $\alpha(a)$  y  $\alpha(b)$  es longitud  $= L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$ .

Si la traza de  $\alpha$  está contenida en una superficie regular  $S$ , de hecho, en  $\mathbb{X}(U)$ , entonces:

$$\forall t \in I : \alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t)) \implies \alpha'(t) = u'(t)\mathbb{X}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\mathbb{X}_v(u(t), v(t))$$

$$I_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \|\alpha'(t)\|^2 = [u'(t)]^2 E(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)F(u(t), v(t)) + [v'(t)]^2 G(u(t), v(t))$$

Por tanto, la longitud de  $\alpha$  se escribe, obviando la variable  $t$ :

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(u')^2 E(u, v) + 2u'v'F(u, v) + (v')^2 G(u, v)} dt$$

Con cierto abuso de notación se escribe  $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$  y se le llama primera forma fundamental.

**Definición 3.2 (Primera forma fundamental).** Sea  $\alpha: I \longrightarrow S$  una curva regular en una superficie regular  $S$  y sea  $\mathbb{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una carta de  $S$  tal que  $\alpha(I) \subset \mathbb{X}(U)$  y  $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ .

La primera forma fundamental de  $S$  en  $\alpha(t)$  es la forma cuadrática  $I_{\alpha(t)}$  evaluada en  $\alpha'(t)$  y se denota por  $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ .

### 3.2.2 Ángulos

Sean  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  dos curvas regulares en una superficie regular  $S$  tales que  $\alpha_1(t_1) = p = \alpha_2(t_2)$ .

Se tiene que el ángulo  $\omega$  entre  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en  $p$  cumple  $\cos \omega = \frac{\langle \alpha'_1(t_1), \alpha'_2(t_2) \rangle}{\|\alpha'_1(t_1)\| \|\alpha'_2(t_2)\|}$ .

$$\begin{aligned} \text{Sea } \mathbb{X}(u, v) \text{ una carta de } S \text{ en } p, \text{ tenemos } & \begin{cases} \alpha_1(t) = \mathbb{X}(u_1(t), v_1(t)) \\ \alpha_2(t) = \mathbb{X}(u_2(t), v_2(t)) \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} \alpha'_1(t) = u'_1(t)\mathbb{X}_u(u_1(t), v_1(t)) + v'_1(t)\mathbb{X}_v(u_1(t), v_1(t)) \\ \alpha'_2(t) = u'_2(t)\mathbb{X}_u(u_2(t), v_2(t)) + v'_2(t)\mathbb{X}_v(u_2(t), v_2(t)) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u_1(t_1), v_1(t_1)) = (u_0, v_0) = (u_2(t_2), v_2(t_2)) &\implies \begin{cases} \alpha'_1(t_1) = u'_1(t_1)\mathbb{X}_u(u_0, v_0) + v'_1(t_1)\mathbb{X}_v(u_0, v_0) \\ \alpha'_2(t_2) = u'_2(t_2)\mathbb{X}_u(u_0, v_0) + v'_2(t_2)\mathbb{X}_v(u_0, v_0) \end{cases} \\
\implies \langle \alpha'_1(t_1), \alpha'_2(t_2) \rangle &= \begin{aligned} &u'_1(t_1)u'_2(t_2)E(u_0, v_0) + (u'_1(t_1)v'_2(t_2) + v'_1(t_1)u'_2(t_2))F(u_0, v_0) \\ &+ v'_1(t_1)v'_2(t_2)G(u_0, v_0) \end{aligned}
\end{aligned}$$

Por tanto, obviando las variables  $t_1, t_2$ :

$$\cos \omega = \frac{Eu'_1u'_2 + F(u'_1v'_2 + v'_1u'_2) + Gv'_1v'_2}{\sqrt{(u'_1)^2E + 2u'_1v'_1F + (v'_1)^2G}\sqrt{(u'_2)^2E + 2u'_2v'_2F + (v'_2)^2G}}$$

Las funciones  $E$ ,  $F$  y  $G$  se evalúan en  $(u_0, v_0) = (u_1(t_1), v_1(t_1)) = (u_2(t_2), v_2(t_2))$ .

Las derivadas  $u'_1$  y  $v'_1$  se evalúan en  $t_1$ , mientras que las derivadas  $u'_2$  y  $v'_2$  se evalúan en  $t_2$ .

### 3.2.3 Áreas

Sea  $S$  una superficie regular con  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset S$  carta de  $S$ .

$$\implies \text{Área de } \mathbb{X}(U) = \iint_U \|\mathbb{X}_u(u, v) \times \mathbb{X}_v(u, v)\| \, du \, dv$$

Como se tiene que  $\forall v, w \in \mathbb{R}^3 : \|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$ , se deduce que

$$\|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\| = \sqrt{EG - F^2} \implies \text{Área}(\mathbb{X}(U)) = \iint_U \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} \, du \, dv$$

## 3.3 Loxodromas

**Definición 3.3 (Loxodroma).** Sea  $\alpha: I \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva contenida en una esfera,  $\alpha$  es un loxodroma  $\iff$  corta a los meridianos de la esfera con ángulo  $\beta$  fijo.

Si consideramos la parametrización de la esfera  $S$  de radio  $R$  en coordenadas esféricas dada por  $\mathbb{X}(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi)$  con  $\theta \in (0, 2\pi)$  y  $\varphi \in (0, \pi)$ , tenemos que la primera forma fundamental viene dada por:  $E(\theta, \varphi) = R^2 \sin^2 \varphi$ ,  $F(\theta, \varphi) = 0$  y  $G(\theta, \varphi) = R^2$ .

Fijamos un  $\beta \in [0, \pi/2)$  y un punto  $p = \mathbb{X}(\theta_0, \varphi_0)$  en la esfera. Sea  $\gamma(t) = \mathbb{X}(\theta_0, t)$  el meridiano que pasa por  $p$  y  $\omega = \mathbb{X}(\theta(t), \varphi(t))$  una loxodroma que corta a  $\gamma$  con ángulo  $\beta$  y que  $\omega(t_0) = p$ .

Dado que  $\frac{d}{dt}\theta_0 = 0 \wedge \frac{d}{dt}t = 1 \wedge \frac{d}{dt}\theta(t) = \theta'(t) \wedge \frac{d}{dt}\varphi(t) = \varphi'(t)$ , se tiene que:

$$\implies \langle \omega'(t), \gamma'(t) \rangle = R^2 \sin^2 \varphi \cdot 0 \cdot \theta'(t) + 0 \cdot (0 \cdot \varphi'(t) + 1 \cdot \theta'(t)) + R^2 \cdot 1 \cdot \varphi'(t) = R^2 \varphi'(t)$$

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{0^2 \cdot R^2 \sin^2 \varphi_0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1^2 \cdot R^2} = R$$

$$\|\omega'(t)\| = \sqrt{(\theta'(t))^2 R^2 \sin^2 \varphi_0 + 2\theta'(t)\varphi'(t) \cdot 0 + (\varphi'(t))^2 R^2} = R\sqrt{(\theta'(t))^2 \sin^2 \varphi_0 + (\varphi'(t))^2}$$

$$\implies \cos \beta = \frac{R^2 \varphi'(t)}{R^2 \sqrt{(\theta'(t))^2 \sin^2 \varphi_0 + (\varphi'(t))^2}} = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\theta'(t))^2 \sin^2 \varphi_0 + (\varphi'(t))^2}}$$

Pero queremos que  $\omega$  corte a todos los meridianos con el mismo ángulo  $\beta$ . Observando que, en la fórmula anterior  $\varphi_0 = \varphi(t_0)$ , concluimos que las funciones  $\theta(t)$  y  $\varphi(t)$  que determinan la curva  $\omega$  deben cumplir la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \forall t : \quad & \boxed{\cos \beta = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\theta'(t))^2 \sin^2(\varphi(t)) + (\varphi'(t))^2}}} \\ \implies \quad & \frac{(\varphi'(t))^2}{\cos^2 \beta} = \sin^2(\varphi(t))(\theta'(t))^2 + (\varphi'(t))^2 \implies \varphi'(t) \left( \frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 \right) = \sin^2(\varphi(t))(\theta'(t))^2 \\ \implies \quad & (\varphi'(t))^2 \tan^2 \beta = \sin^2(\varphi(t))(\theta'(t))^2 \implies \frac{(\varphi'(t))^2}{\sin^2(\varphi(t))} = \frac{(\theta'(t))^2}{\tan^2 \beta} \implies \frac{\varphi'(t)}{\sin(\varphi(t))} = \pm \frac{\theta'(t)}{\tan \beta} \\ \implies \quad & \boxed{\tan \beta \cdot \ln \left( \tan \left( \frac{\varphi(t)}{2} \right) \right) = \pm \theta(t) + C} \end{aligned}$$

### 3.4 Isometrías

**Definición 3.4.** Sea  $S$  una superficie regular,  $S_*$  es una trozo de  $S \iff S_* \subset S$  y  $S_*$  es una superficie regular.

**Nota:** La intersección de un abierto de  $\mathbb{R}^3$  con una superficie regular es un trozo de la superficie.

**Definición 3.5.** Sean  $S$  y  $S_*$  dos superficies regulares,  $f: S \longrightarrow S_*$  es una isometría

$$\iff \begin{cases} f \text{ es un difeomorfismo, i.e. } f \text{ es suave, biyectiva y con inversa suave} \\ f \text{ preserva longitudes } \forall C \subset S \text{ curva regular : } L(f(C)) = L(C) \end{cases}$$

**Teorema 3.1.** No existe una isometría entre un trozo de una esfera y un trozo de un plano.

**Demostración.** Asumimos que una isometría preserva también ángulos y áreas. Por contradicción, asumimos que existe una isometría  $f$  entre un trozo de una esfera y un trozo de un plano.

Tomamos un triángulo  $T$  de vértices  $A, B, C$  dentro del trozo de un plano y su imagen  $T'$  de vértices  $A', B', C'$  en el trozo de la esfera. Los segmentos que conforman los lados del triángulo son las curvas de longitud mínima entre los vértices. En el caso del plano, rectas, y en el caso de la esfera, circunferencias máximas.

Esto quiere decir que los lados del triángulo deben transformarse en trozos de circunferencias máximas en la esfera. Como se conservan los ángulos tenemos que

$$\pi = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = \pi + \frac{\text{Área}(T')}{R^2} > \pi \longrightarrow \leftarrow$$

Aquí se ha usado el teorema Girard (la suma de los ángulos de un triángulo en la esfera unidad es  $\pi + \text{Área del triángulo}$ ). ■

**Lema 3.1.** Sean  $S$  y  $S_*$  dos superficies regulares y  $f: S \longrightarrow S_*$  una aplicación de tipo  $C^\infty$ .

$f$  preserva longitudes  $\iff f$  preserva la primera forma fundamental

**Demostración.** ( $\Leftarrow$ ) Sea  $\mathbb{X}: U \longrightarrow S$  una carta de  $S$  tal que  $\mathbb{X}(U) = S$  y sea  $\alpha: I \longrightarrow S$  una curva regular en  $S$  tal que  $\forall t \in (a, b) : \alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ .

Como se conserva la primera forma fundamental, se tiene que

$$\begin{aligned} I_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) &= [u'(t)]^2 E(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)F(u(t), v(t)) + [v'(t)]^2 G(u(t), v(t)) \\ &= [u'(t)]^2 E^*(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)F^*(u(t), v(t)) + [v'(t)]^2 G^*(u(t), v(t)) \\ &= I_{(f \circ \alpha)(t)}^*((f \circ \alpha)'(t)) \end{aligned}$$

Donde  $E^*, F^*, G^*$  componen la primera forma fundamental de  $S_*$  con la carta  $f \circ \mathbb{X}$ .

Dado que  $\|\alpha'(t)\|^2 = I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$ , se tiene que

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} dt = \int_a^b \sqrt{I_{(f \circ \alpha)(t)}^*((f \circ \alpha)'(t))} dt = L(f \circ \alpha)$$

Es decir,  $f$  preserva longitudes.

( $\Rightarrow$ ) Sea  $\mathbb{X}: U \longrightarrow S$  una carta de  $S$  y  $\alpha: I \longrightarrow S$  una curva regular en  $S$  tal que  $\forall t \in (a, b) : \alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ . Supongamos que  $f$  preserva longitudes y, por contradicción, que alguno de los coeficientes de la primera forma fundamental es distinto en  $I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$  y  $I_{(f \circ \alpha)(t)}^*((f \circ \alpha)'(t))$ .

Asumimos primero que  $E(u_0, v_0) < E^*(u_0, v_0)$ . Por continuidad, existe una bola  $B_\varepsilon \subset U$  con  $(u_0, v_0) \in B_\varepsilon$  tal que  $\forall (u, v) \in B_\varepsilon : E(u, v) < E^*(u, v)$ . Tomamos

$$C := \{\alpha(t) := \mathbb{X}(u_0 + t, v_0) : -\varepsilon < t < \varepsilon\} \subset S$$

$$\implies \|\alpha'(t)\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial u}(u_0 + t, v_0) \right\|^2 = E(u_0 + t, v_0) < E^*(u_0 + t, v_0) = \|(f \circ \alpha)'(t)\|^2$$

Por tanto, al considerar longitudes, se tiene que  $L(\alpha) < L(f \circ \alpha)$ .

$$L(C) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|\alpha'(t)\| dt < \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|(f \circ \alpha)'(t)\| dt = L(f \circ C) \longrightarrow \leftarrow$$



Si  $G(u_0, v_0) \neq G^*(u_0, v_0)$ , se toma  $C := \{\alpha(t) := \mathbb{X}(u_0, v_0 + t) : -\varepsilon < t < \varepsilon\}$  y se llega a una contradicción análoga.

Finalmente, si  $E(u_0, v_0) = E^*(u_0, v_0)$  y  $G(u_0, v_0) = G^*(u_0, v_0)$  pero  $F(u_0, v_0) < F^*(u_0, v_0)$ , se toma  $C := \{\alpha(t) := \mathbb{X}(u_0 + t, v_0 + t) : -\varepsilon < t < \varepsilon\}$ .

$$\alpha' = \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial v} = \mathbb{X}_u + \mathbb{X}_v \implies \|\alpha'\|^2 = E + 2F + G < E^* + 2F^* + G^* = \|(f \circ \alpha)'\|^2$$

Por tanto y de manera análoga,  $L(\alpha) < L(f \circ \alpha) \implies L(C) < L(f \circ C) \longrightarrow \longleftarrow$ . ■

**Corolario 3.1.** Sea  $S$  una superficie regular y  $f: S \longrightarrow S^*$  una isometría.

- $f$  preserva longitudes en  $S$  independientemente de la carta que se tome.
- $f$  preserva ángulos y áreas.

**Lema 3.2.** Sea  $S$  una superficie regular y  $f: S \longrightarrow S^*$  una aplicación de tipo  $C^\infty$  que preserva la primera forma fundamental.

$$\implies \forall p \in S : \exists S_1 \ni p \text{ trozo de } S : f|_{S_1} \text{ es una isometría}$$

**Demostración.** Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} p \in S & \xrightarrow{f} & S^* \ni f(p) \\ \mathbb{X} \uparrow & & \uparrow \mathbb{Y} \\ \mathbb{X}^{-1}(p) \in U & \xrightarrow{g} & V \ni \mathbb{Y}^{-1}(f(p)) \end{array}$$

$$\text{Se tiene que } \left\| \frac{\partial(f \circ \mathbb{X})}{\partial u} \times \frac{\partial(f \circ \mathbb{X})}{\partial v} \right\|^2 = E^*G^* - F^* = EG - F = \|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\|^2 > 0$$

Por tanto, la matriz diferencial de  $f \circ \mathbb{X}$  en  $\mathbb{X}^{-1}(p)$  y la matriz diferencial de  $\mathbb{Y}$  en  $\mathbb{Y}^{-1}(f(p))$  tienen rango 2.

Entonces, la matriz diferencial de  $g := \mathbb{Y}^{-1} \circ f \circ \mathbb{X}$  en  $\mathbb{X}^{-1}(p)$  tiene rango 2. Por el teorema de la función inversa,  $g$  es un difeomorfismo local en un entorno de  $\mathbb{X}^{-1}(p)$ .

Por tanto,  $\exists S_1 \ni f(p) : \forall q \in S^* : (f|_{S_1})^{-1}(q) = (\mathbb{X} \circ g^{-1} \circ \mathbb{Y}^{-1})(q)$  que es de clase  $C^\infty$ . Entonces,  $f|_{S_1}$  es una isometría. ■

**Definición 3.6.** Sea  $S$  una superficie regular,  $f: S \longrightarrow S^*$  es una isometría local

$$\iff f \text{ es de clase } C^\infty \text{ y preserva la primera forma fundamental}$$

**Lema 3.3.** Sean  $f$  y  $g$  dos isometrías, entonces  $f \circ g$  es una isometría.

**Demostración.** Trivialote. ■

**Definición 3.7.** Sean  $S$  y  $S^*$  dos superficies regulares.

- $S$  y  $S^*$  son isométricas  $\iff \exists f: S \longrightarrow S^*$  isometría.
- $S$  y  $S^*$  son localmente isométricas

$$\iff \forall p \in S : \exists S_1 \ni p \text{ trozo de } S \text{ isométrico a algún trozo de } S^* \\ \wedge \forall q \in S^* : \exists S_2 \ni q \text{ trozo de } S^* \text{ isométrico a algún trozo de } S$$

**Observación 3.2.** Tanto ser isométricas como ser localmente isométricas es una relación de equivalencia dentro del conjunto de superficies regulares.

### 3.4.1 Isometrías con formas

¿Cómo saber si dos superficies regulares son (localmente) isométricas o no? Veamos un resultado general.

**Lema 3.4.** Sean  $S$  y  $S^*$  dos superficies regulares y sean  $\mathbb{X}: U \longrightarrow S$  y  $\mathbb{Y}: A \longrightarrow S^*$  sus respectivas cartas.

$$\exists f: S \longrightarrow S^* \text{ isometría} \iff \exists g: U \longrightarrow A \text{ difeomorfismo tal que}$$

La primera forma fundamental de  $\mathbb{X}$  ( $E, F, G$ ) es la misma que la de  $\mathbb{Y} \circ g$  ( $E_1, F_1, G_1$ ).

**Demostración.** Analicemos la primera forma fundamental de  $\mathbb{Y} \circ g$  suponiendo que  $\forall (u, v) \in U : g(u, v) = (a(u, v), b(u, v))$ :

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\| \frac{\partial(\mathbb{Y} \circ g)}{\partial u} \right\|^2 = a_u^2 \|\mathbb{Y}_a(a, b)\|^2 + 2a_u b_u \langle \mathbb{Y}_a(a, b), \mathbb{Y}_b(a, b) \rangle + b_u^2 \|\mathbb{Y}_b(a, b)\|^2 \\ &= a_u^2 E^*(a, b) + 2a_u b_u F^*(a, b) + b_u^2 G^*(a, b) \\ F_1 &= \left\langle \frac{\partial(\mathbb{Y} \circ g)}{\partial u}, \frac{\partial(\mathbb{Y} \circ g)}{\partial v} \right\rangle = \langle a_u \mathbb{Y}_a(a, b) + b_u \mathbb{Y}_b(a, b), a_v \mathbb{Y}_a(a, b) + b_v \mathbb{Y}_b(a, b) \rangle \\ &= a_u a_v \|\mathbb{Y}_a(a, b)\|^2 + (a_u b_v + b_u a_v) \langle \mathbb{Y}_a(a, b), \mathbb{Y}_b(a, b) \rangle + b_u b_v \|\mathbb{Y}_b(a, b)\|^2 \\ &= a_u a_v E^*(a, b) + (a_u b_v + b_u a_v) F^*(a, b) + b_u b_v G^*(a, b) \\ G_1 &= \left\| \frac{\partial(\mathbb{Y} \circ g)}{\partial v} \right\|^2 = a_v^2 \|\mathbb{Y}_a(a, b)\|^2 + 2a_v b_v \langle \mathbb{Y}_a(a, b), \mathbb{Y}_b(a, b) \rangle + b_v^2 \|\mathbb{Y}_b(a, b)\|^2 \\ &= a_v^2 E^*(a, b) + 2a_v b_v F^*(a, b) + b_v^2 G^*(a, b) \end{aligned}$$

Donde  $(E^*, F^*, G^*)$  componen la primera forma fundamental de  $\mathbb{Y}$ .

$$\implies \begin{cases} E = E_1 \\ F = F_1 \\ G = G_1 \end{cases} \iff \begin{cases} E = a_u^2 E^*(a, b) + 2a_u b_u F^*(a, b) + b_u^2 G^*(a, b) \\ F = a_u a_v E^*(a, b) + (a_u b_v + b_u a_v) F^*(a, b) + b_u b_v G^*(a, b) \\ G = a_v^2 E^*(a, b) + 2a_v b_v F^*(a, b) + b_v^2 G^*(a, b) \end{cases}$$

Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & S^* \\ \mathbb{X} \uparrow & & \uparrow \mathbb{Y} \\ (u, v) \in U & \xrightarrow{g} & A \ni (a, b) \end{array}$$

$(\implies)$  Como  $f$  es una isometría y  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$  son cartas, en particular son difeomorfismos.

Por tanto,  $g = \mathbb{Y}^{-1} \circ f \circ \mathbb{X}$  es un difeomorfismo.

Además, se tiene que  $f \circ \mathbb{X} = \mathbb{Y} \circ g$  y como  $f$  es una isometría, la primera forma fundamental de  $S^*$  por la carta  $f \circ \mathbb{X}$  es la misma que la de  $S$  por la carta  $\mathbb{X}$ . Por tanto, la primera forma fundamental de  $\mathbb{Y} \circ g$  es la misma que la de  $\mathbb{X}$ .

$(\impliedby)$  Suponemos que  $g$  es difeomorfismo tal que se cumple el sistema de arriba. Entonces, tenemos que  $f = \mathbb{Y} \circ g \circ \mathbb{X}^{-1}$  es un difeomorfismo por ser composición de ellos.

Además, se vuelve a cumplir que  $f \circ \mathbb{X} = \mathbb{Y} \circ g$  y como la primera forma fundamental de  $S^*$  por la carta  $\mathbb{Y} \circ g$  es la misma que la de  $S$  por la carta  $\mathbb{X}$ , se concluye que  $f$  preserva la primera forma fundamental. Por tanto,  $f$  preserva también longitudes.

Como  $f$  es un difeomorfismo que preserva longitudes,  $f$  es una isometría. ■

Es decir, para demostrar que dos superficies regulares son isométricas, basta con encontrar un “cambio de carta” que mantenga la primera forma fundamental.

El sistema de ecuaciones del lema también puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_u & a_v \\ b_u & b_v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E^*(a, b) & F^*(a, b) \\ F^*(a, b) & G^*(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_u & a_v \\ b_u & b_v \end{pmatrix} = (\mathrm{D}g)^T \begin{pmatrix} E^*(g) & F^*(g) \\ F^*(g) & G^*(g) \end{pmatrix} \mathrm{D}g$$

Que proviene del cambio de carta:

$$\begin{pmatrix} da \\ db \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_u & a_v \\ b_u & b_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_u & a_v \\ b_u & b_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} da \\ db \end{pmatrix}$$

**Teorema 3.2** (Janet 1926 - Cartan 1927). Sean  $E, F, G: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $C^\infty$  con  $U$  abierto tales que  $E > 0$  y  $EG - F^2 > 0$  en  $U$ .

$$\implies \forall (u_0, v_0) \in U : \exists V \subset U : \begin{cases} (u_0, v_0) \in V \text{ abierto de } \mathbb{R}^2 \\ \exists \mathbb{X}: V \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ carta de } S = \mathbb{X}(V) \text{ superficie regular con} \\ E = \|\mathbb{X}_u\|^2 \wedge F = \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle \wedge G = \|\mathbb{X}_v\|^2 \end{cases}$$

### 3.5 Aplicación conformes

Ya hemos visto que no podemos encontrar una isometría de un trozo de una esfera en un trozo de un plano. Sin embargo, ¿podemos encontrar una aplicación que haga que un dibujo en la esfera se vea de forma “similar” en el plano?

**Definición 3.8.** Sea  $f: S \longrightarrow S^*$  un difeomorfismo, es conforme  $\iff f$  preserva ángulos entre cualquier pareja de curvas regulares.

**Lema 3.5.** Sea  $f: S \longrightarrow S^*$  una aplicación de tipo  $C^\infty$  entre dos superficies  $S$  y  $S^*$ .

$$f \text{ es conforme} \iff \exists \lambda: U \longrightarrow \mathbb{R} : ds_*^2 = \lambda^2 ds^2 \text{ donde}$$

$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$  y  $ds_*^2 = E^* du^2 + 2F^* du dv + G^* dv^2$  son las primeras formas fundamentales de  $S$  y  $S^*$  respectivamente.

**Demostración.** ( $\Leftarrow$ ) Trivial, ya que el coseno del ángulo entre dos curvas era:

$$\cos \omega = \frac{Eu'_1u'_2 + F(u'_1v'_2 + v'_1u'_2) + Gv'_1v'_2}{\sqrt{(u'_1)^2E + 2u'_1v'_1F + (v'_1)^2G} \sqrt{(u'_2)^2E + 2u'_2v'_2F + (v'_2)^2G}}$$

con  $(u'_1, v'_1)$  y  $(u'_2, v'_2)$  los vectores tangentes a las curvas en  $U$ . Por tanto, si sustituimos  $u'_1 = \lambda u_1$  y  $v'_1 = \lambda v_1$  y  $u'_2 = \lambda u_2$  y  $v'_2 = \lambda v_2$ , se cancela el factor  $\lambda$  y el coseno del ángulo se mantiene.

$$(\implies) \text{ Podemos escribir } \begin{cases} t_1 = \tan w_1 = v'_1/u'_1 \\ t_2 = \tan w_2 = v'_2/u'_2 \end{cases} \text{ con } w_1 \text{ y } w_2 \text{ los ángulos que forman las}$$

curvas con respecto al eje  $u$  en el plano  $uv$ . Entonces (si  $u'_1 > 0$  y  $u'_2 > 0$ ):

$$\cos \omega = \frac{E + F(t_1 + t_2) + Gt_1t_2}{\sqrt{E + 2Ft_1 + Gt_1^2} \sqrt{E + 2Ft_2 + Gt_2^2}}$$

Si miramos cuándo las curvas son ortogonales en  $S$  queda:

$$\cos \omega = 0 \iff E + F(t_1 + t_2) + Gt_1t_2 = 0 \iff \tan w_2 = \frac{-E/G - F/G \tan w_1}{F/G + \tan w_1}$$

Como  $f$  preserva los ángulos, las imágenes de las curvas también son ortogonales en  $S^*$ :

$$\frac{-E^*/G^* - F^*/G^* \tan w_1}{F^*/G^* + \tan w_1} = \frac{-E/G - F/G \tan w_1}{F/G + \tan w_1} \implies \frac{E^*}{G^*} = \frac{E}{G}$$

■

**Definición 3.9.** Sea  $f: S \rightarrow S^*$  una aplicación conforme,  $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$  es el factor de dilatación de  $f \iff ds_*^2 = \lambda^2 ds^2$  donde  $ds^2$  y  $ds_*^2$  son las primeras formas fundamentales de  $S$  y  $S^*$  respectivamente.

Las distancias en  $S^*$  cerca del punto correspondiente a  $p \in S$  aumentan por un factor  $\lambda(p)$ .

### 3.5.1 Aplicación conforme al plano

Ahora queremos encontrar una aplicación conforme de  $S$  en un plano. Es decir, queremos encontrar  $a(u, v)$  y  $b(u, v)$  tales que

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = \lambda^2 [da^2 + db^2] = \lambda^2 ds_*^2$$

para cierto  $\lambda$ . Vemos que si se cumple esto, entonces  $ds^2 = 0 \iff ds_*^2 = 0$ .

$$ds_*^2 = 0 \iff da^2 + db^2 = 0 \iff (da + i db)(da - i db) = 0 \iff dz d\bar{z} = 0$$

donde  $z = a + ib$  y  $\bar{z} = a - ib$  es su conjugado. Si hacemos lo mismo con  $ds^2$  obtenemos:

$$ds^2 = 0 \iff E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = 0 \iff E \left( \frac{du}{dv} \right)^2 + 2F \frac{du}{dv} + G = 0$$

Por tanto, obtenemos  $ds^2 = 0 \iff \boxed{\frac{du}{dv} = -\frac{F}{E} \pm i \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E}} \quad (*), (EG - F^2 > 0).$

Además, podemos escribir

$$\begin{aligned} ds^2 &= E^2 dv^2 \left[ \frac{du}{dv} - \left( \frac{-F}{E} + i \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E} \right) \right] \left[ \frac{du}{dv} - \left( \frac{-F}{E} - i \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E} \right) \right] \\ &= E^2 \left[ du - \left( \frac{-F}{E} + i \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E} \right) dv \right] \left[ du - \left( \frac{-F}{E} - i \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E} \right) dv \right] \\ &= E^2 \left[ du + \frac{F}{E} dv + i \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E} dv \right] \left[ du + \frac{F}{E} dv - i \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E} dv \right] \end{aligned}$$

Podemos resolver (\*) en ciertos casos por separación de variables y, en general, poniendo  $u = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots$  con  $a_j \in \mathbb{C}$  y agrupando por grados (si  $E, F, G$  están definidas con series de Taylor).

Supongamos que las soluciones son  $u = g_{\pm}(v) + \text{cte} = g_1(v) \pm i g_2(v) + \text{cte}$ , entonces

$$\begin{aligned} u - g_{\pm}(v) &= \text{cte} \implies d(u - g_{\pm}(v)) = du - g'_{\pm}(v) dv = du + \frac{F}{E} dv \pm i \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E} dv \\ &\implies ds^2 = E^2 d(u + g_1(v) + i g_2(v)) d(u - g_1(v) - i g_2(v)) \end{aligned}$$

Por lo que al hacer el cambio  $\begin{cases} U = u - g_1(v) + ig_2(v) \\ V = u - g_1(v) - ig_2(v) \end{cases} \implies \boxed{ds^2 = E^2 dU dV}$ .

Ahora, como tenemos que  $ds_*^2 = da^2 + db^2 = dz d\bar{z}$ , si ponemos  $U = z$  y  $V = \bar{z}$ , obtenemos  $ds^2 = E^2 ds_*^2$ . Por tanto, hemos encontrado una aplicación conforme de  $S$  en un plano con  $a(u, v) = u - g_1(v)$  y  $b(u, v) = g_2(v)$ .

En realidad, tenemos muchas más aplicaciones conformes de una superficie en un plano y quedan (todas) dadas por:

$$\begin{cases} A = f(U) \\ B = f_*(V) \end{cases} \implies ds_*^2 = \frac{|f'(u - g_1(v) + ig_2(v))|^2}{E^2(u, v)} ds^2$$

con  $f$  dada por su serie de Taylor y  $f_*$  dada por la misma serie con coeficientes conjugados.

**Observación 3.3.** Podemos componer aplicaciones conformes entre superficies y el plano para obtener aplicaciones conformes entre superficies generales.

## 4 Curvatura de superficies

Vamos a buscar máximos y mínimos de  $z = f(x, y)$ . Si  $\nabla f = 0$ , podemos estar ante un máximo, mínimo, punto de silla o punto singular. Para estudiar la curvatura, miro la curva que contenga al seccionar la superficie por cada plano perpendicular al tangente.

(Ojo: la curvatura de una de esas curvas no tiene por qué dar información sobre la curvatura de la superficie).

- Queremos estudiar todas las curvaturas a la vez e interesa ver si son positivas (sentido de  $\vec{n}$ ) o negativas al coger siempre la misma normal.
- En general, vamos a rotar la superficie para obtener una gráfica con plano tangente horizontal. Ahí se calcula la curvatura escalar porque se ha convertido un punto  $p$  cualquiera en un crítico. ¡Los giros no afectan a la curvatura!