PROBABILIDAD I

Segundo del Grado en Matemáticas

Hugo Marquerie
Profesor:
Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid
Segundo cuatrimestre 2023 - 2024

February 1, 2024

1 Tema 1: Sucesos y probabilidades

1.1 Formalizando

Definición 1.1.1 (Espacio muestral). En un experimento aleatorio, el espacio muestral es el conjunto (no vacío) de sus posibles resultados y se denota por Ω. Puede ser:

1. Finito: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$
2. Infinito numerable: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$
3. Infinito no numerable, ej.: $\Omega = [0,1) \vee \Omega = \mathcal{P}([0,1))$

Definición 1.1.2 (Espacio de sucesos por Kolmogórov). Dado el espacio muestral Ω de un experimento aleatorio, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es su espcio de sucesos

$$\iff (\mathcal{F} \neq \phi) \wedge \left(A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}\right) \wedge \left(A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}\right)$$

Observación 1.1.1. De la definición se deduce:

- $\phi \in \mathcal{F} \wedge \Omega \in \mathcal{F}$
- $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$
- $\forall A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

Definición 1.1.3 (Función o medida de probabilidad). Dados espacio muestral (Ω) y de sucesos $(\mathcal{F})$ de un experimento aleatorio, la aplicación $P\colon \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$: es una medida de probabilidad

$$\iff (P(\Omega) = 1) \wedge \left[P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \iff A_i \cap A_j = \phi \text{ cuando } i \neq j\right]$$

Proposición 1.1.1. *De la definición se deduce:*

1. $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$ *2.* $P\left(A^C\right) = 1 - P(A)$ *3.* $P(\phi) = 0$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *5.* $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$

Demostración. (ejercicio) ■

Ejemplo 1.1.1. En un experimento aleatorio con espacio muestral finito, tomamos $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\} \wedge \mathcal{F} = \mathcal{P} \to 2^N$. Asignamos $P(\{\omega_j\}) = p_j \wedge j = 1, \dots, N$ tales que $p_j \geq 0 \wedge \sum_{j=1}^{N} p_j = 1$. Entonces, $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$

Caso particular: $\forall j \in \{1, \dots, N\} : p_j = \dfrac{1}{N} \implies \forall A \in \mathcal{F} : P(A) = \dfrac{|A|}{N} = \dfrac{\text{"Casos favorables"}}{\text{"Total de casos"}}$

1. (Muy tonto) $\Omega \neq \phi$, tomas $A \subset \Omega : A \neq \phi, \Omega$.
   Dato $p \in (0,1)$. $\mathcal{F} = \{\phi, A, A^c, \Omega\}$ con $P(A) = p$.

2. (Bastante general) $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\} \to |\Omega| = N$

   $\mathcal{F} = P(\Omega) \to |\mathcal{F}| = 2^N$. Dato: $p_1, \dots, p_N \geq 0 \implies \sum_{j=1}^{N} p_j = 1$. Asignamos $P(\{\omega_j\}) = p_j$ para cada $j = 1, \dots, N$.
   Defines, para $A \subset \Omega P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.
   Caso particular: $p_j = \frac{1}{N}, j = 1, \dots, N \implies P(A) = \frac{|A|}{N}$

3. Lanzas n veces la moneda.
   Dato: $p \in (0,1)$ $\Omega = \{111\cdots 1, \dots, 000\cdots 0\}, |\Omega| = 2^N$. $\mathcal{F} = P(\Omega)$.
   $P(\omega) = p^{\#\text{unos de } \omega}(1-p)^{\#\text{ceros de } \omega}$
   Comprobamos:

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \#\text{ceros de } \omega = k}} P(\omega) \right) = \sum_{k=0}^{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(|\{\omega \in \Omega : \#\text{ unos de } \omega \text{ en } k\}|\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{k} = (p + 1 - p)^n = 1$$

4. Lanzamos moneda hasta que sale una cara. Dato $p \in (0,1)$.
   $\Omega = \{C, XC, XXC, \dots\} \wedge \mathcal{F} = P(\Omega)$.
   $\implies P(C) = p \wedge P(XC) = p(1-p) \wedge P(XXC) = p(1-p)^2 \wedge \dots$
   Comprobamos: $\sum_{j=1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$

1.2 Probabilidad condicionada y total, independencia y regla de Bayes

Tienes $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y un suceso $A \in \mathcal{F} \to P(A)$. Llega "nueva información": ha ocurrido el suceso $B \in F \to$ ¿Debo reasignar la probabilidad de A?

Ejemplo 1.2.1. Lanzas 10 veces la moneda (regular).
$A = \{\text{salen 6 caras}\} \implies P(A) = \frac{\binom{10}{6}}{2^10} \approx 20.51\%$ $B = \{\text{sale C en } 1^{\text{o}}\} \implies P(A)$ sube a $\frac{\binom{9}{5}}{2^9}$

Definición 1.2.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sucesos $A, B \in \mathcal{F}, P(B) > 0$, $P(A|B)$ es la probabilidad de A condicionada a B

$$\iff P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observación 1.2.1. En general, $P(A|B) \neq P(B|A)$

Proposición 1.2.1 (Calculamos $P(A|B)$ para cada $A \in \mathcal{F}$)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $B \in \mathcal{F}$ un suceso con $P(B) > 0$*

$\Longrightarrow$ *$(\Omega, \mathcal{F}, Q_B)$, donde $Q_B \colon \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] : Q_B(A) = P(A|B)$, es un espacio de probabilidad*

Demostración.

$$\left(Q_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \in [0,1]\right) \wedge \left(Q_B(\Omega) = P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1\right)$$

Sean $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos.

$$\Longrightarrow Q_B\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \;\middle|\; B\right) = \frac{P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap B\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{1}{P(B)} P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B)\right) = \frac{1}{P(B)} \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_B(A_j)$$

■

Definición 1.2.2 (Independencia). Sean $A, B \in \mathcal{F}$ dos sucesos con $P(A), P(B) \geq 0$ son independientes

$$\Longleftrightarrow P(A|B) = P(A) \; (\wedge \; P(B|A) = P(B)) \text{ para entender}$$

$$\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ la adecuada}$$

- A, B disjuntos $\Longrightarrow$ no independientes.
- $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{F}$ independientes $\Longleftrightarrow \forall J \subset \mathbb{N}_N : P\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$

$\Longleftrightarrow P\left(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_N}\right) = \prod_{i=1}^{N} P\left(\overline{A_i}\right)$ donde $\overline{A_i} = A_i, (A_i)^c$

Ejercicio 1.2.1. Encontrar un espacio de probabilidad en la que haya un conjunto de sucesos independientes dos a dos pero no completamente independientes.

SOL: $\Omega = \{1,2,3,4\} \wedge A = \{1,2\} \wedge B = \{2,3\} \wedge C = \{1,3\}$

Proposición 1.2.2 (Regla de Bayes)**.** *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $A, B \in \mathcal{F}$ sucesos con $P(A), P(B) > 0$*

$$\Longrightarrow P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

Demostración.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \wedge P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Longrightarrow P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) \Longrightarrow P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

$\blacksquare$

1.2.1 Probabilidad Total

Tenemos una partición de $\Omega B_1, B_2, \cdots : (B_i \cap B_j = \phi \iff i \neq j) \wedge \left(\bigcup_j B_j = \Omega\right)$

$$\implies P\left(\bigcup_j (A \cap B_j)\right) = \sum_j (A \cap B) = \sum_j P(A|B_j) \cdot P(B_j)$$

Ejemplo 1.2.2. $U_1 = \{10b, 3n\} \wedge U_2 = \{5b, 5n\} \wedge U_3 = \{2b, 6n\}$
Procedimiento:

1. Sorteamos una urna $1/4 \to U_1 \wedge 1/4 \to U_2 \wedge 1/2 \to U_3$

2. Sacamos bola de la urna seleccionada.

¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

$$P(b) = P(b|U_1)P(U_1) + P(b|U_2)P(U_2) + P(b|U_3)P(U_3)$$

Ejemplo 1.2.3 (Peso de la evidencia). $U_1 = \{80\%b, 20\%n\} \wedge U_2 = \{20\%b, 80\%n\}$
Procedimiento:

1. Sorteamos la urna con $1/2$ y $1/2$ de probabilidad.

2. Sacamos 10 bolas (con reemplazamiento).

Observamos la evidencia: $bb \ldots nb$ ¿qué urna se usó?

$$P(U_1|5b5n) = P(5b5n|U_1)\frac{P(U_1)}{P(5b5n)} = \frac{P(5b5n|U_1)P(U_1)}{P(5b5n|U_1)P(U_1) + P(5b5n|U_2)P(U_2)}$$

$$P(5b5n|U_1) = \binom{10}{5} 0.8^5 0.2^5 = P(5b5n|U_2) \implies P(U_1|5b5n) = \frac{1}{2}$$

$$P(U_1|6b4n) = \frac{P(6b4n|U_1)P(U_1)}{P(6b4n|U_1)P(U_1) + P(6b4n|U_2)P(U_2)} = \frac{\binom{10}{6}0.8^6 0.2^4 \cdot 1/2}{\binom{10}{6}0.8^6 0.2^4 \cdot 1/2 + \binom{10}{6}0.8^4 0.2^6 \cdot 1/2} \approx 90\%$$

Ejemplo 1.2.4 (Falsos positivos/negativos). Hay una enfermedad $\to E \vee S$ y hay una prueba para detectar $\to + \vee -$. Datos: $P(+|E) = 95\% \wedge P(-|S) = 99\%$.
Te haces la prueba y sale $+$:

$$P(E|+) = P(+|E)\frac{P(E)}{P(+)} = \frac{P(+|E)P(E)}{P(+|E)P(E) + P(+|S)P(S)}$$

Conozco todas estas probabilidades excepto $p := P(E) \implies P(S) = 1 - p$.
Si definimos $f(p) := P(E|+)$

$$\implies \{f(0.5) = 98.95\% \wedge f(1/100) = 48.97\% \wedge f(1/1000) = 0.90\%\}$$

Es decir, si la incidencia es muy baja, no tiene sentido hacer pruebas masivamente porque la mayoría de positivos serán falsos.

Ejemplo 1.2.5 (Sobre independencia). $(\Omega, \mathcal{F}, P) \wedge A_1, \ldots, A_n$ sucesos independientes tal que $\forall j \in \mathbb{N}_n : P(A_j) = \frac{1}{n}$. ¿Qué sabemos sobre $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right)$?

$$\text{En general, sabemos que } \frac{1}{n} \leq P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n P(A_j) \leq 1$$

$n = 2$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = {}^3\!/_4$
$n = 3$: $P(A \cup B \cup C) = \binom{3}{1}\frac{1}{3} - \binom{3}{2}\frac{1}{3^2} + \binom{3}{3}\frac{1}{3^3} = {}^{19}\!/_{27}$
n general: $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j) - \sum_{1 \leq i < y \leq n} P(A_i \cap A_j) + \cdots$ (Inclusión exclusión)

$$\implies P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \binom{n}{1}\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j}\frac{1}{n^j}(-1)^{j+1}$$

$$\implies P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = 1 - \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}\left(\frac{-1}{n}\right)^j = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 1 - \frac{1}{e}$$

1.2.2 Continuidad de la probabilidad: detalle técnico

Proposición 1.2.3. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P) \wedge A_1, \cdots : A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ *una sucesión creciente de conjuntos*

$$\implies P\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Demostración. Se trata de describir $\bigcup_{j=1}^n A_j$ como la unión de conjuntos disjuntos.

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = P\left(A_1 \cup \bigcup_{j=1}^{n-1}(A_{j+1} \setminus A_j)\right) = P(A_1) + \sum_{j=1}^{n-1}(P(A_{j+1}) - P(A_j)) = P(A_n)$$

$$\implies P\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = P(A_1) + \sum_{j=1}^\infty (P(A_{j+1}) - P(A_j)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

∎

Proposición 1.2.4. *Si la sucesión* $A_1, \ldots$ *es decreciente* $\implies P\left(\bigcap_{j=1}^\infty A_j\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Teorema 1.2.1 (Continuidad de la probabilidad)**.** *En* $(\Omega, \mathcal{F}, P) \wedge A_1, A_2, \ldots$ *sucesión* $: \forall j \in$

$\mathbb{N} : A_j \in \mathcal{F}$

$$\implies P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)$$

Demostración. ■

1.3 Variables aleatorias (discretas)

Definición 1.3.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidades, $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria discreta* (v.a.d.)

$$\iff \text{(1) } X(\Omega) \text{ es numerable*} \,_\wedge\, \text{ (2) } \forall x \in \mathbb{R} : \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

En realidad, solo interesa (2) cuando $x = x_j$

Definición 1.3.2. Sea X una v.a.d. en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, p_X es su función de masa

$$\iff p_X\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \,_\wedge\, x \longmapsto p_X(x) = P(X = x) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

Vemos que

$$\sum_{j\geq 1} p_X(x_j) = \sum_{j\geq 1} P(X = x_j) = \sum_{j\geq 1} P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_j\}) = P\left(\bigcup_{j\geq 1}\{x_j\}\right) = P(\Omega) = 1$$

Lo relevante es la lista de posibles valores de X $\{x_1, x_2, \dots\}$ numerable y la lista (también numerable) de probabilidades $p_1, p_2, \dots$ donde $\forall j \geq 1 : p_j = P(x = x_j) \,_\wedge\, p_j \geq 0 \,_\wedge\, \sum_{j\geq 1} p_j = 1$

Teorema 1.3.1. *Sea $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ un conjunto numerable y $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_j \geq 0 \,_\wedge\, \sum_{j\geq 1} \Pi_j = 1$ una lista*

$$\implies \exists(\Omega, \mathcal{F}, P) \,_\wedge\, X \ \textit{v.a.d} \ : \forall x \notin S : p_x(x) = 0 \,_\wedge\, p_x(x_j) = \Pi_j$$

Demostración. Fijamos $\Omega = S$ y $\mathcal{F} = \mathcal{P}(S)$.

$$A \in \mathcal{F} \implies P(A) = \sum_{j:x_j\in A} \Pi_j \,_\wedge\, X(x_j) = x_j$$

■

Ejemplo 1.3.1 (Dados).

1. Uniforme en $\{1, \cdots, N\}, N \geq 2$.

$$S = \{1, \cdots, N\} \,_\wedge\, \Pi_j = {}^1/_N, \dots, {}^1/_N$$

2. X sigue una distribución de Bernoulli ($X \sim \text{BER}\,(p)$) con parámetro p

$$\iff \begin{cases} p_X(x) = 0 \iff x \neq 0, 1 \\ p_X(1) = p \,_\wedge\, p_X(0) = 1 - p \end{cases} \iff \begin{cases} 1, p \\ 0, 1-p \end{cases} \quad \text{donde 1 es éxito y 0 fracaso}$$

3. X sigue una binomial de parámetro $n \geq 1 \wedge p \in (0,1)$ $(X \sim \text{BIN}\,(n,p))$

$$\iff S = \{0,1,\dots,n\} \wedge \forall j \in \{0,1,\dots,n\} : P(x=j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

Sirve para modelizar el número de caras que salen al lanzar n veces una moneda de probabilidad p.

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \implies \binom{n}{n/2} \sim \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{(n/2)^{(n/2)} e^{-(n/2)}\sqrt{2\pi(n/2)}(n/2)^{(n/2)} e^{-(n/2)}\sqrt{2\pi(n/2)}}$$

$$\implies \frac{n^n\sqrt{n}}{(n/2)^{(n/2)}\sqrt{2\pi(n/2)}(n/2)^{(n/2)}\sqrt{(n/2)}} = \frac{n^n\sqrt{n}}{(n/2)^n\sqrt{2\pi}(n/2)} = \frac{n^n\sqrt{2}}{(n/2)^n\sqrt{\pi n}} = 2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

4. La variable X sigue una distribución geométrica de parámetro $p \in (0,1)$ $(X \sim \text{GEOM}\,(p))$.

$$\iff S = \{1,2,\dots\} \wedge \forall j \geq 1 : P(x=j) = p(1-p)^{j-1}$$

Sirve para modelizar el número de lanzamientos hasta que sale un resultado C en cuestión.

Observación 1.3.1. Cuidado porque existen variables aleatorias que también se dicen de distribución geométrica en las que $S = \{0,1,2,\dots\}$. Se habla de cuantas veces has obtenido el resultado complementario a C antes de que halla salido C.

5. La variable X sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ $(X \sim \text{POISSON}\,(\lambda))$

$$\iff S = \{0,1,\dots\} \wedge \forall j \geq 0 : P(x=j) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}$$

Proposición 1.3.1. *Sea $X \sim \text{BIN}\,(n,p)$ una v.a.d.*

$$\implies \textit{cuando } n \textit{ es grande, } \text{BIN}\,(n,p) \sim \text{POISSON}\,(np)$$

Demostración. Fijo $\lambda > 0 \wedge p = \dfrac{\lambda}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = e^{-k}\frac{\lambda^k}{k!}$$

∎

Ejemplo 1.3.2 (¿Hay más ejemplos?).

- Binomial negativa
- Hipergeométrica
- Dada cualquier serie convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, se puede definir la variable aleatoria X tal que $S = \{1,2,\dots\} \wedge P(x=k) = \dfrac{a_k}{s}$

1.3.1 Funciones transformadoras de variables aleatorias (discretas)

Sea X una v.a.d. y $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, definimos $Y := g(X)$.

$$\implies \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = g(X(\omega)) = y\} \in \mathcal{F}Y \text{ es una v.a.d}$$

Por otro lado,

$$\implies \forall y \in \mathbb{R} : P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X \in g^{-1}(y)) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x)$$

2 Ejercicios

2.1 Hoja 1

14.* Dos jugadores de tenis, A y B, tienen probabilidades p y $1-p$ de ganar un punto cuando sirve A.

1. Halla la probabilidad de que A gane un juego en el que sirve y que en este momento está en situación de deuce.

2. Halla la probabilidad de que A gane un juego en el que sirve.

21. Urna de Pólya

$$\Omega = \text{Listas infinitas de 0s y 1s} \wedge B_n = \text{suceso "blanca" en } n$$

- $P(B_1) = \dfrac{b}{a+b}$

- $P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|A_1)P(A_1) = P(B_2|B_1)\dfrac{b}{a+b} + P(B_2|A_1)\dfrac{a}{a+b}$

  $$\implies P(B_2) = \frac{b+1}{a+b+1}\frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b+1}\frac{a}{a+b} = \frac{b(b+1)+ba}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{b}{a+b}$$

  Demostración. Veamos por inducción que $\forall n \in \mathbb{N} : P(B_n) = \dfrac{b}{a+b}$

  Suponemos que $\forall a, b \in \mathbb{N} : \forall k \in \{1, \ldots, n\} : P(B_k) = P(B_1) = \dfrac{b}{a+b}$

  $$\begin{aligned}\implies P(B_{n+1}) &= P(B_{n+1}|B_1)P(B_1) + P(B_{n+1}|A_1)P(A_1) \\ &= P(B_{n+1}|B_1)\frac{b}{a+b} + P(B_{n+1}|A_1)\frac{a}{a+b}\end{aligned}$$

  Por tanto, por hipótesis de inducción:

  $$\implies P(B_{n+1}) = \frac{b+1}{a+b+1} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b+1} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$$

  ■