ECUACIONES DIFERENCIALES

Segundo del Grado en Matemáticas

Hugo Marquerie
Profesor: Salvador López Martínez
Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid
Segundo cuatrimestre 2023 - 2024

1 de Febrero, 2024

1 EDOs autónomas

Definición 1.1. Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden se dice autónoma si no depende explícitamente de la variable independiente. Es decir,

$$\iff \text{es de la forma } y' = f(y)$$

Proposición 1.1 (Propiedades de EDOs autónomas)**.**

1. *(Isoclinas) Todos los puntos de cada recta horizontal $y = c$ pertenecen a la misma isoclina. ¡Cuidado! A veces una isoclina puede contener más de una recta horizontal.*

   Ejemplo 1.1 **($y' = y^2$).**
   $$\{(x, y) \in \mathbb{R} : y^2 = c\} = \{(x, \sqrt{c}) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -\sqrt{c}) : x \in \mathbb{R}\}$$

2. *(Traslaciones) Si y es solución $\implies \forall c \in \mathbb{R} : w(x) := y(x + c)$ es solución.*

3. *(Soluciones triviales) Si $\exists a \in \mathrm{Dom}(f) : f(a) = 0 \implies y(x) = a$ es solución.*

   Demostración. $y'(x) = 0 = f(a) = f(y(x))$ ■

22/02/2024

Teorema 1.1 (Existencia de soluciones)**.** *Sean $a \in [-\infty, \infty) \wedge b \in (-\infty, \infty] \wedge f\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua*

Supongamos que $\forall x \in (a, b) : f(x) \neq 0$ y que $\begin{cases} a > -\infty \implies f(a) = 0 \\ b < \infty \implies f(b) = 0 \end{cases}$

Sea $x_0 \in (a, b)$ definimos $\forall x \in (a, b) : F(x) := \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(s)}\,\mathrm{d}s$

Si $f(x) > 0$ en (a, b), definimos

$$T_- := \lim_{x \to a^+} F(x) \in [-\infty, 0) \wedge T_+ := \lim_{x \to b^-} F(x) \in (0, \infty]$$

Si $f(x) < 0$ en (a, b), intercambiamos T_- por T_+.

$$\implies \exists x\colon (T_-, T_+) \longrightarrow (a, b) \text{ derivable} : \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\forall x \in (a, b) : f(x) > 0$

$$\implies \forall x \in (a, b) : F'(x) = \frac{1}{f(x)} > 0 \implies F \text{ es creciente en } (a, b)$$

$$\implies F \text{ tiene inversa en } (a, b) \implies \exists x := F^{-1}\colon (T_-, T_+) \longrightarrow (a, b)$$

$$\text{Por un lado,} \quad x'(t) = (F^{-1})'(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = \frac{1}{F'(x(t))}$$

$$\text{Por otro lado,} \quad F(x_0) = 0 \implies x_0 = F^{-1}(F(x_0)) = F^{-1}(0) = x(0)$$

■

Teorema 1.2 (Unicidad local). *Sean $a \in [-\infty, \infty) \wedge b \in (-\infty, \infty] \wedge f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Supongamos que $f(x) \neq 0$ en (a,b). Sea $x_0 \in (a,b)$, sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto tal que $0 \in I$ y sean $x\colon I \longrightarrow (a,b) \wedge y\colon I \longrightarrow (a,b)$ cumpliendo*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ y'(t) = f(y(t)) \\ x(0) = x_0 = y(0) \end{cases} \implies \forall t \in I : x(t) = y(t)$$

Demostración.

$$\forall s \in (a,b) : F(s) = \int_{x_0}^{s} \frac{1}{f(r)}\,\mathrm{d}r \implies \forall t \in I : F(x(t)) = t = F(y(t))$$

$$\implies \forall t \in I : F^{-1}(F(x(t))) = F^{-1}(F(y(t))) \implies \implies \forall t \in I : x(t) = y(t)$$

■

Corolario 1.1. En las condiciones del teorema de unicidad local, sea $a \in \mathbb{R} : f(a) := \lim_{x \to a^-} f(x) = 0$. Supongamos que

$$\forall k \in (a,b) : \lim_{x \to a^+} \int_k^x \frac{1}{f(s)}\,\mathrm{d}s = \begin{cases} -\infty \iff f > 0 \text{ en } (a,b) \\ \infty \iff f < 0 \text{ en } (a,b) \end{cases}$$

$$\implies \text{Para cada intervalo} \begin{cases} I = [0, t_0) \iff f > 0 \text{ en } (a,b) \\ I = (-t_0, 0] \iff f < 0 \text{ en } (a,b) \end{cases} \quad x = a \text{ es la única solución.}$$

26/02/2024

27/02/2024

Ejemplo 1.2 ($y' = \sqrt{1-y^2}$).

$$f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \wedge f(y) := \sqrt{1-y^2} \wedge \begin{cases} f(y) > 0 \iff y \in (-1,1) \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{cases}$$

Si $y(0) =: y_0 \in (-1,1)$, entonces existe una única solución del PVI. Esa solución está definida en (T_-, T_+), donde

$$T_- = \lim_{y \to -1^+} \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \,\mathrm{d}s = \lim_{y \to -1^+} \arcsin(y) - \arcsin(y_0) = -\frac{\pi}{2} - \arcsin(y_0)$$

$$T_+ = \lim_{y \to 1^-} \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2} - \arcsin(y_0)$$

Si $y_0 = 1$, $\displaystyle\lim_{y \to 1^-} \int_{k}^{y} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2} - \arcsin(k) \in \mathbb{R} \implies \exists$ un solución <u>no trivial</u> del PVI

Si $y_0 = -1$, $\displaystyle\lim_{y \to -1^+} \int_{k}^{y} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \,\mathrm{d}s \in \mathbb{R} \implies \exists$ un solución <u>no trivial</u> del PVI

Por tanto, la solución general del PVI es

$$y_k(x) = \begin{cases} -1 & \iff x \leq -\frac{\pi}{2} - k \\ \sin(x+k) & \iff x \in \left(-\frac{\pi}{2} - k, \frac{\pi}{2} - k\right) \\ 1 & \iff x \geq \frac{\pi}{2} - k \end{cases}$$

1. La única y_k que satisface $y_k(0) = 0 \in (-1,1)$ es $y_k(x) = y_0$
2. Las funciones y_k con $k > \dfrac{\pi}{2}$ cumplen $y_k(0) = 1$
3. Las funciones y_k con $k < -\dfrac{\pi}{2}$ cumplen $y_k(0) = -1$

Observación 1.1. Sea $a \in \mathbb{R}$, $b \in (-\infty, \infty]$: $b > a$ y $f \colon [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\forall x \in (a,b) : f(x) \neq 0$ y $f(a) = 0$.
Supongamos que $\exists\, c > 0, \delta \in (0, b-a) : \forall s \in [a, a+\delta) : |f(s)| \leq C(s-a)$
Vamos a comprobar que se cumplen las condiciones de unicidad para el PVI con $x(0) = x_0 = a$ tanto en el caso $f > 0$ como en el caso $f < 0$.

- $\boxed{f > 0}$ Queremos ver que $\displaystyle\lim_{z \to a^+} \int_{a+\delta}^{z} \frac{1}{f(s)} \,\mathrm{d}s = -\infty$

$$\int_{a+\delta}^{z} \frac{1}{f(s)} \,\mathrm{d}s = \int_{a+\delta}^{z} \frac{1}{|f(s)|} \,\mathrm{d}s = -\int_{z}^{a+\delta} \frac{1}{|f(s)|} \,\mathrm{d}s \leq -\frac{1}{C} \int_{z}^{a+\delta} \frac{1}{s-a} \,\mathrm{d}s$$

$$\implies \int_{a+\delta}^{z} \frac{1}{f(s)} \,\mathrm{d}s \leq -\frac{1}{C} \left(\log(\delta) - \log(z-a)\right)$$

$$\implies \lim_{z \to a^+} \int_{a+\delta}^{z} \frac{1}{f(s)} \,\mathrm{d}s \leq -\infty \implies \text{ Hay unicidad de PVI con } x(0) = a \text{ en } [0, \tilde{t})$$

- $\boxed{f < 0}$ De forma análoga $\displaystyle\lim_{z \to a^+} \int_{a+\delta}^{z} \frac{1}{f(s)} \,\mathrm{d}s = \cdots = \infty$

Si f derivable con f' acotada

$$\implies \forall s \in [a, a+\delta) : |f(s)| = |f(s) - f(a)| = |f'(r)|\,|s-a| \leq C(s-a)$$

04/03/2024

05/03/2024

Definición 1.2 (Estabilidad). Sea y una solución de un PVI, y es estable

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : y \colon [x_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : y_0^* \in (\alpha, \beta) : |y_0^* - y_0| < \delta \implies \forall x \geq x_0 : |y(x) - y^*(x)| < \varepsilon$$

donde $y^* \colon [x_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es cualquier solución del PVI con $y^*(x_0) = y_0^*$.

Ejemplo 1.3.

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Definición 1.3 (Estabilidad asintótica). Sea y una solución de un PVI, y es asintóticamente estable

$$\iff y \text{ es estable } \wedge \lim_{x \to \infty} |y(x) - y^*(x)| = 0$$

donde $y^* \colon [x_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es cualquier solución del PVI con $y^*(x_0) = y_0^*$.

Ejemplo 1.4.

$$\begin{cases} y' = y(1-y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \implies \begin{cases} f(y) := y(1-y) \\ f(y) = 0 \iff y \in \{0, 1\} \end{cases} \quad \text{soluciones de equilibrio}$$

$$\implies \forall y < 0 : f(y) < 0 \wedge \forall y \in (0,1) : f(y) > 0 \wedge \forall y > 1 : f(y) < 0$$

$\boxed{y_0 < 0}$

$$\implies \forall y < 0 : F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{s(1-s)}\,\mathrm{d}s \implies \forall y < 0 : F'(y) < 0$$

Tomamos $y \in (y_0, 0) \implies F(y) < F(y_0) = 0$

$$\implies s \geq y_0 \implies 0 < 1 - s \leq 1 - y_0 \implies \frac{1}{1-s} \geq \frac{1}{1-y_0} \implies \frac{1}{(1-s)s} \leq \frac{1}{(1-y_0)s}$$

$$\implies F(y) \leq \frac{1}{1-y_0} \int_{y_0}^{y} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \frac{\log(-y) - \log(-y_0)}{1-y_0} \implies \boxed{\lim_{y \to 0^-} F(y) = -\infty}$$

1. La única solución tal que $y(x_0) = y_0 < 0$ está definida globalmente hacia el pasado.

2. El equilibrio $y = 0$ es único "por abajo".

$(y \to -\infty)$

$$y < y_0 < 0 \implies 0 \leq F(y) = -\int_y^{y_0} \frac{1}{s(1-s)}\,\mathrm{d}s = \int_y^{y_0} \frac{1}{s^2 - s}\,\mathrm{d}s \leq \int_y^{y_0} \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}$$

$$\implies 0 \leq F(y) < -\frac{1}{y} \implies \boxed{\lim_{y \to -\infty} F(y) \in \mathbb{R}} \implies \text{Hay una asíntota}$$

$\boxed{y_0 > 1}$ Si y es solución con $y(x_0) = y_0 > 1$, entonces $z(x) = -y(-x) + 1$ también es solución con $z(x_0) = 1 - y_0 < 0$.

06/05/2024