ECUACIONES DIFERENCIALES

Segundo del Grado en Matemáticas

Hugo Marquerie
Profesor: Salvador López Martínez
Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid
Segundo cuatrimestre 2023 - 2024

1 de Febrero, 2024

11/03/2024

1 Tema 3: Teoremas fundamentales

1.1 Introducción

Sean $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ dos intervalos abiertos y $f\colon I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función continua. Consideramos el PVI $\begin{cases} x' = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(t_0) = \hat{x}, & \hat{x} \in \Omega \end{cases}$. Recordamos que si $f(t,x) = f(x)$, entonces el PVI tiene solución en un entorno de t_0: $x(t) = \hat{x} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$.

Definimos el operador $\forall x \in \mathcal{C}(I, \Omega) : T[x] := x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \implies x = T[x]$.

$$x_0 = \hat{x} \wedge x_1 = T[x_0] = \hat{x} + \int_{t_0}^{t} f(s, \hat{x})\,\mathrm{d}s \wedge \cdots \wedge x_{k+1} = T[x_k] = \hat{x} + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s$$

Ejemplo 1.1. $\{x' = x \wedge x(0) = 1\} \iff x(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s$

$$\implies x_0 = 1 \wedge x_1 = 1 + t \wedge \cdots x_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{t^i}{i!} \implies x_k(t) \xrightarrow{k \to \infty} e^t$$

Pero necesitamos formalizar todo esto.

1. Concepto de límite de series de funciones.
2. ¿Toda sucesión de Cauchy es convergente?
3. $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s \stackrel{?}{=} \int_{t_0}^{t} \lim_{k\to\infty} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s$
4. $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f(s, x_k(s)) \stackrel{?}{=} f\left(s, \lim_{k\to\infty} x_k(s)\right)$

1.2 Conceptos de análisis

1.2.1 Convergencia puntual y uniforme

Definición 1.1 (Convergencia puntual). Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_k\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$ abierto, $\{f_k\}$ converge puntualmente a f

$$\iff \forall t \in I : \lim_{k\to\infty} f_k(t) = f(t)$$

Es decir, $\forall\varepsilon > 0 : \forall t \in I : \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall k \geq \kappa : |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$.

Ejemplo 1.2.

$$f_k(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{1}{k} \\ k(t + \frac{1}{k}), & -\frac{1}{k} \leq t < 0 \\ k(\frac{1}{k} - t), & 0 \leq t < \frac{1}{k} \\ 0, & t \geq \frac{1}{k} \end{cases} \implies f_k(t) \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$