VARIABLE COMPLEJA I

Tercero del Grado en Matemáticas

Hugo Marquerie

Profesor: Eva Tourís
Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid
Segundo cuatrimestre

28 de enero, 2025

Índice

1. Números complejos y funciones

1.1 Números complejos

1.1.1 Introducción

Al considerar la ecuación $x^2 + 1 = 0$, vemos que no tiene solución en los números reales ($\mathbb{R}$). Sin embargo, si definimos un nuevo número i tal que $i^2 = -1$, podemos resolver la ecuación.

Definición 1.1.1 (Números complejos). Sea $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dotado de las operaciones:

- Suma: $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 : (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
- Producto: $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 : (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

La tripleta $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es el cuerpo de los **números complejos**.

Proposición 1.1.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un cuerpo.*

***Demostración*:** Sean $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$.

(i) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad:

(a) $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo abeliano:

i. Asociatividad de la suma:

$$(a,b) + ((c,d) + (e,f)) = (a+c+e, b+d+f) = ((a,b) + (c,d)) + (e,f)$$

ii. Elemento neutro de la suma: $(0,0) + (a,b) = (a,b) = (a,b) + (0,0)$

iii. Elemento opuesto: $(a,b) + (-a,-b) = (a-a, b-b) = (0,0)$

iv. Conmutatividad de la suma:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c,d) + (a,b)$$

(b) Asociatividad del producto:

$$\begin{aligned}(a,b) \cdot ((c,d) \cdot (e,f)) &= (a,b) \cdot (ce - df, cf + de) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \\ &= ((ac - bd, ad + bc)) \cdot (e,f) = ((a,b) \cdot (c,d)) \cdot (e,f)\end{aligned}$$

(c) Leyes distributivas:

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot((c,d)+(e,f)) &= (a,b)\cdot(c+e,d+f)\\ &= (a(c+e)-b(d+f),a(d+f)+b(c+e))\\ &= (ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)\\ &= (ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)\\ &= (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((a,b)\cdot(c,d))+(e,f) &= (a+c,b+d)\cdot(e,f)\\ &= ((a+c)e-(b+d)f,(a+c)f+(b+d)e)\\ &= (ae+ce-bf-df,af+cf+be+de)\\ &= (ae-bf,af+be)+(ce-df,cf+de)\\ &= (a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)\end{aligned}$$

(d) Conmutatividad del producto:

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)=(ca-db,cb+da)=(c,d)\cdot(a,b)$$

(e) Elemento neutro del producto: $(1,0)\cdot(a,b)=(a,b)$

(ii) Elemento inverso: si $(a,b)\neq(0,0)$, entonces

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right) &= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{-b^2}{a^2+b^2},\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{ba}{a^2+b^2}\right)\\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},0\right)=(1,0)\end{aligned}$$

■

Definición 1.1.2 (unidad imaginaria). $i=(0,1)\in\mathbb{C}$ es la unidad imaginaria.

Esta unidad imaginaria cumple que $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)=-1\in\mathbb{R}$ y por tanto es solución de la ecuación $x^2+1=0$.

Definición 1.1.3 (Parte real e imaginaria). Dado $z=(a,b)\in\mathbb{C}$, definimos la parte real de z como $\Re(z)=a\in\mathbb{R}$ y la parte imaginaria de z como $\Im(z)=b\in\mathbb{R}$.

Entonces, $\forall z=(a,b)\in\mathbb{C}: z=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)\cdot(b,0)=\Re(z)+i\Im(z)$. Por tanto, podemos escribir z en **forma binómica** como $z=a+bi$.

Proposición 1.1.2. $\mathbb{C}$ *es una extensión algebraica de* $\mathbb{R}$.

***Demostración*:** Consideramos la aplicación $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\forall a \in \mathbb{R} : \varphi(a) = (a, 0)$.

(i) Compatible con la suma: $\varphi(a+b) = (a+b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \varphi(a) + \varphi(b)$

(ii) Compatible con el producto: $\varphi(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

(iii) Compatible con el neutro multiplicativo: $\varphi(1) = (1, 0) = 1$

Como ϕ cumple las condiciones de la definición, es un morfismo de anillos y, por tanto, $\mathbb{C}$ es una extensión de cuerpos de $\mathbb{R}$. ■

Observación 1.1.4. Se tiene que $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con base canónica $(1, i)$.

Además, podemos ver que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ contiene a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ como subcuerpo si definimos la aplicación $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forma $\forall a \in \mathbb{R} : \varphi(a) = (a, 0)$.

1.1.2 Conjugación y módulo

Definición 1.1.5 (Conjugación). Sea $\bar{\cdot}\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es la conjugación

$$\iff \forall z = a + bi \in \mathbb{C} : \overline{z} = a - bi.$$

Al número $\overline{z}$ se le llama **conjugado** de z.

Definición 1.1.6 (Módulo). El módulo de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Observación 1.1.7. $|\Re(z)|, |\Im(z)| \leq |z| \wedge |\overline{z}| = |z|$.

Proposición 1.1.3 (Propiedades básicas). *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces*

1. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
2. $z \neq 0 \implies z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
3. $\Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \wedge \Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
4. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \wedge \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$

***Demostración*:** Se deja como ejercicio. ■

Ejercicio 1.1.1. ¿Cuándo se da la igualdad en la desigualdad triangular?

***Solución*:** Se tiene que $|z + w| = |z| + |w| \iff z = \lambda w$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Es decir, cuando los vectores z y w de $\mathbb{R}^2$ son colineales (linealmente dependientes) o alguno de ellos es nulo.

Observación 1.1.8. $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial hermítico con producto interno dado por $\forall z, w \in \mathbb{C} : \langle z, w\rangle = z \cdot \overline{w}$. La norma inducida viene, por tanto, dada por $\forall z = a + bi \in \mathbb{C}$: $\|z\| = \sqrt{\langle z, z\rangle} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|(a, b)\|$ en $\mathbb{R}^2$.

Luego $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es un espacio normado equivalente a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$. En consecuencia, hereda todas sus propiedades métricas y topológicas. Por tanto, $\mathbb{C}$ es un espacio de Hilbert.

Ejercicio 1.1.2. Demuestra por inducción que $\forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} : \overline{z^n} = \overline{z}^n$.

***Solución*:**

Observación 1.1.9 (Ángulo entre dos vectores). Recordamos que la fórmula para el ángulo entre dos vectores u, v en un espacio euclídeo es $\cos(\theta) = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$.

En el caso de los números complejos $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$, se tiene por un lado que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \wedge |w| = \sqrt{c^2 + d^2}$ y por otro que $\langle z, w\rangle = ac + bd = \Re(z\overline{w})$ (interpretando a z y w como vectores de $\mathbb{R}^2$). Así, el ángulo entre z y w viene dado por $\cos\theta = \frac{\Re(z\overline{w})}{|z||w|}$.

1.1.3 Representación polar

Dado que, como hemos definido los números complejos, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, podemos representar un número complejo $z = a+bi = (a, b)$ en coordenadas polares (r, θ), donde $r \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$[1]. Así, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan\theta = \frac{b}{a}$ cuando $a \neq 0$. Se tiene además que

$$\left.\begin{aligned} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \implies z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Definición 1.1.10 (Argumento). Sea $z \in \mathbb{C}$, $\arg z \subset \mathbb{R}$ es el argumento de z

$$\iff \arg z = \left\{\alpha \in \mathbb{R} : z = |z|\, e^{i\alpha}\right\}.$$

Definición 1.1.11 (Argumento principal). Sea $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Arg} z$ es el argumento principal de z

$$\iff \operatorname{Arg} z \in \arg z \wedge \operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi).$$

Ejercicio 1.1.3. Sea $z = 1 + i\sqrt{3}$, calcula $\operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Arg} \overline{z}$, $\operatorname{Arg} -z$.

***Solución*:**

[1] En ocasiones nos será útil considerar $\theta \in (-\pi, \pi]$.

(a) Sea $\theta_z = \operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$.

$$\implies \begin{cases} \cos\theta_z = \frac{1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \tan\theta_z = \sqrt{3}$$

y además z está en el primer cuadrante, por lo que $\theta_z = \frac{\pi}{3}$.

(b) Sea $\theta_{\overline{z}} = \operatorname{Arg} \overline{z} \in [0, 2\pi)$. Como $\overline{z} = 1 - i\sqrt{3}$, $\tan\theta_{\overline{z}} = -\sqrt{3}$ y como $\overline{z}$ está en el cuarto cuadrante, $\theta_{\overline{z}} = \frac{5\pi}{3}$.

(c) De manera similar $\theta_{-z} = \operatorname{Arg}(-z) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Ejercicio 1.1.4. Escribe en forma polar: (a) $1 - i$ (b) $1 + i\sqrt{3}$ (c) $1 - i\sqrt{3}$.

***Solución*:**

(a) Sea $z = 1 - i$, entonces $z = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}e^{7\frac{\pi}{4}i}$.

(b) Sea $z = 1 + i\sqrt{3}$, entonces $z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

(c) Sea $z = 1 - i\sqrt{3}$, entonces $z = 2e^{-\frac{\pi}{3}i} = 2e^{5\frac{\pi}{3}i}$.

1.1.4 Potencias y raíces complejas

Proposición 1.1.4. *Sean $z_1 = r_1e^{i\theta_1}, z_2 = r_2e^{i\theta_2} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ dados en forma polar, entonces*

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ *2.* $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

En general, $\forall j \in \mathbb{N}_n : z_j = r_je^{i\theta_j} \implies z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1r_2 \ldots r_ne^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$.

***Demostración*:** Se deja como ejercicio. ∎

Ejercicio 1.1.5. Usar $z = 1 - i$ y $w = 1 + i\sqrt{3}$ para calcular $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ y $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

***Solución*:** Escribimos z y w en forma polar:

$$z = 1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} \quad \wedge \quad w = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Como $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, debemos multiplicar z y w:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (1 - i)\left(1 + \sqrt{3}\right) = \left(1 + \sqrt{3}\right) + i\left(\sqrt{3} - 1\right) \\ &= 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i} = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\sqrt{2}i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Así, $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ y $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$.

Observación 1.1.12. De la Proposición 1.1.4 se deduce que $\forall z \in \mathbb{C} : z^n = r^n e^{in\theta}$ y, utilizando la fórmula de Euler, $z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$.

Proposición 1.1.5 (Fórmula de Moivre). $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Ejercicio 1.1.6. Dado $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, demuestra que $z^{16} = z$.

***Solución*:** Escribimos z en forma polar: $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Así $z^{16} = e^{i\frac{32\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = z$. ■

Observación 1.1.13. Como $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado (por el TFA), tenemos que $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N} : \exists n$ raíces n-ésimas distintas de w.

En efecto, si escribimos w en forma polar $w = re^{i\theta}$, entonces

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r}\sqrt[n]{e^{i(\theta+2k\pi)}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}.$$

Sin embargo, $\forall j \in \mathbb{N} : \frac{\theta+2(k+jn)\pi}{n} = \frac{\theta+2k\pi}{n} + 2j\pi$, por lo que los senos y cosenos toman de nuevo los mismos valores y solo hay n raíces n-ésimas distintas: las que corresponden a $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Además, las raíces de w son los vértices de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ y centro en el origen.

1.1.5 Lugares geométricos en $\mathbb{C}$

Definición 1.1.14 (Circunferencia). En $\mathbb{R}^2$, dado un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la circunferencia centrada en él con radio $r > 0$ se define como

$$C((a, b), r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

En $\mathbb{C}$, si $c = a + ib$, se tiene que

$$C_{\mathbb{C}}(c, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| = r\} = \left\{x + iy \in \mathbb{C} : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\right\}$$

Definición 1.1.15 (Disco abierto). El disco abierto centrado en el punto c se define como

$$D(c, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < r\}$$

Definición 1.1.16 (Disco cerrado). El disco cerrado (círculo) centrado en el punto c se define como

$$\overline{D(c, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| \leq r\}$$

Definición 1.1.17. En $\mathbb{R}^2$, la ecuación general de una recta está dada por la expresión

$ax + by + c = 0$ con $a^2 + b^2 \neq 0$.

Hay varios enfoques en $\mathbb{C}$:

- Primer enfoque: $ax + by + c = 0 \implies a\dfrac{z+\overline{z}}{2} + b\dfrac{z-\overline{z}}{2i} + c = 0$.

$$\implies \left(\frac{a-ib}{2}\right)z + \left(\frac{a+ib}{2}\right)\overline{z} + c = 0 \implies (a-ib)z + (a+ib)\overline{z} + 2c = 0$$

  De modo que la ecuación de la recta queda: $\boxed{\overline{A}z + A\overline{z} + B = 0}$ $\quad A = a + ib,\ B = 2c$.

- Segundo enfoque: $ax + by + c = 0 \iff a\Re(z) + b\Re(-iz) + c = 0$

$$\iff \Re((a-ib)z) + c = 0 \iff \boxed{\Re(\alpha z) + c = 0} \quad \alpha = a - ib \in \mathbb{C}$$

Semiplanos: El más habitual va a ser $\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \Im(z) = y > 0\}$.

1.1.6 Topología del plano complejo

Como $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es un espacio normado, $(\mathbb{C}, d)$ con $\forall z, w \in \mathbb{C} : d(z,w) = |z - w|$ es un espacio métrico, también es un espacio topológico cuya topología coincide con la usual de $\mathbb{R}^2$.

Recordamos las siguientes definiciones topológicas:

Definición 1.1.18 (Separación). Sea $(X, \mathcal{T})$ un esp topológico,

$$(U, V) \text{ es una separación de } X \iff U, V \in \mathcal{T} \wedge U \cap V = \varnothing \wedge U \cup V = X.$$

Definición 1.1.19 (Conexión). Sea $(X, \mathcal{T})$ un esp topológico, X es conexo

$$\iff X \text{ no admite ninguna separación.}$$

Definición 1.1.20 (Dominio). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico,

$$D \subset X \text{ es un dominio en } X \iff D \text{ es abierto } (D \in \mathcal{T}) \text{ y conexo.}$$

Definición 1.1.21 (Punto de acumulación). Sea $(X, \mathcal{T})$ un esp topológico, $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subset X$

$$\iff \forall U \in \mathcal{V}(x) : (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

Definición 1.1.22 (Conjunto acotado). Sea (X, d) un esp. métrico, $A \subset X$ es acotado

$$\iff \exists x \in X, r \in \mathbb{R} : A \subset B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

Definición 1.1.23 (Cubrimiento). Sea $X \neq \varnothing$ y $K \subset X$,

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \text{ es un cubrimiento de } K \iff K \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Definición 1.1.24 (Compacidad). Sea $(X, \mathcal{T})$ un esp topológico, $K \subset X$ es compacto

$$\iff \forall \mathcal{A} \subset \mathcal{T} : \mathcal{A} \text{ cubrimiento de } K : \exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \text{ subcubrimiento finito de } K.$$

Definición 1.1.25 (Convergencia). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión y $x \in X$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x

$$\iff x_n \xrightarrow{n \to \infty} x \iff \forall U \in \mathcal{V}(x) : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \in U.$$

Definición 1.1.26 (Sucesión de Cauchy). Sea (X, d) un espacio métrico, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es de Cauchy

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Teorema 1.1.6. *Sea* $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ *y* $z \in \mathbb{C}$, *entonces*

1. *Si* $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge a* z, *ese límite es único.*
2. *Si* $\forall n \in \mathbb{N} : z_n = x_n + iy_n \wedge z = x + iy$, *entonces*
$$z_n \xrightarrow{n \to \infty} z \iff \left(x_n \xrightarrow{n \to \infty} x \right) \wedge \left(y_n \xrightarrow{n \to \infty} y \right).$$
3. $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es de Cauchy en* $\mathbb{C} \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *son de Cauchy en* $\mathbb{R}$.

Demostración **(Idea):**

1. Se tiene que

$$\max \{ |x_n - x|, |y_n - y| \} \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|.$$

■

Ejemplos 1.1.7 (de convergencia de sucesiones en $\mathbb{C}$).

$\boxed{1}$ $z_n = \left(6 + \frac{1}{n}\right)^2 + i\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} 36 + ie^{-1}$.

$\boxed{2}$ $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $z_n = i^n$ no converge en $\mathbb{C}$ ya que para $n \in \mathbb{N}$:

$$\left.\begin{aligned} z_{4n} &= i^{4n} = \left(i^4\right)^n = 1^n = 1 \\ z_{4n+1} &= i^{4n+1} = i \end{aligned}\right\} \implies |z_{4n} - z_{4n+1}| = |1 - i| = \sqrt{2} \not< \varepsilon.$$

$\boxed{3}$ $z_n = \dfrac{e^{in!}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ya que $|z_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Definición 1.1.27 (Divergencia a ∞ en $\mathbb{C}$). Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión

$$\begin{aligned} z_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty &\iff \forall R > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |z_n| > R \\ &\iff |z_n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.8. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, demuestra que

(a) $|z| < 1 \implies z^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(b) $z = 1 \implies z^n \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

(c) $|z| > 1 \implies z^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

(d) $|z| = 1 \wedge z \neq 1 \implies z^n$ no converge.

***Solución*:**

1. $|z^n| = |z|^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ya que $|z| < 1$.
2. $z = 1 \implies \forall n \in \mathbb{N} : z^n = 1$. Así, $z^n \xrightarrow{n\to\infty} 1$.
3. $|z^n| = |z|^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ ya que $|z| > 1$.
4. Probamos el contrarecíproco: si $z^n \xrightarrow{n\to\infty} z_0 \in \mathbb{C}$ y $|z| = 1$, entonces $z = 1$.

Ejercicio 1.1.9. Sea $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Demuestra que

(a) $z \in \overline{\mathbb{D}} \implies \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n} = 0$.

(b) $z \in \overline{\mathbb{D}}^c \implies \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n} = \infty$.

1.1.7 El plano complejo extendido. La esfera de Riemann

Se tiene que el plano complejo no es topológicamente compacto ($(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ no lo es ya que, por ejemplo, cualquier subcubrimiento del cubrimiento por abiertos $\{(n-1, n+1) \times \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}\}$ dejaría puntos de $\mathbb{R}^2$ al descubierto).

Definición 1.1.28 (Plano complejo extendido).

Llamamos plano complejo extendido al conjunto $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ donde $\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos y ∞ es un punto adicional que representa el infinito.

Formalmente, la representación de $\widehat{\mathbb{C}}$ la dio Riemann usando la esfera:

$$\mathbb{S}^2 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

y la proyección estereográfica de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P\colon \widehat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ \forall z \in \mathbb{C} : z &\longmapsto \mathbb{P}^{-1}(z) = (x_1, x_2, x_3) \\ \infty &\longmapsto (0,0,1) \end{aligned}$$

donde (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas en la esfera y $\mathbb{P}$ es la proyección estereográfica.

Podemos hallar estas coordenadas a partir de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ intersecando la recta que pasa por $(x, y, 0)$ y $(0, 0, 1)$ con la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$:

$$r = \{(0,0,1) + \lambda(x, y, -1) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda x, \lambda y, 1-\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} \cap \mathbb{S}^2.$$

$$(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (1-\lambda)^2 = 1 \iff \lambda^2\left(x^2 + y^2 + 1\right) - 2\lambda = 0 \iff \lambda = 0 \vee \lambda = \frac{2}{|z|^2+1}.$$

Luego $\forall z \in \mathbb{C} : \mathbb{P}^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) = \left(\frac{2\Re(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\Im(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right).$

Ejercicio 1.1.10. Comprobar que $P^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right) = \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3}.$

Observación 1.1.29. Sea $P\colon \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{S}^2$ definida como antes, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{D}) &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 : x_3 < 0\right\} \\ \mathbb{P}(\partial\mathbb{D}) &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 : x_3 = 0\right\} \\ \mathbb{P}\left(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}\right) &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 : x_3 > 0\right\} \end{aligned}$$

Toda recta del plano se proyecta en una circunferencia en $\mathbb{S}^2$ que pasa por $(0, 0, 1)$ y toda circunferencia en el plano se proyecta en una circunferencia en $\mathbb{S}^2$ que no pasa por $(0, 0, 1)$.

Podemos extender la topología de $\mathbb{C}$ a $\widehat{\mathbb{C}}$ haciendo que P sea un homeomorfismo.

Definición 1.1.30 (Métrica de cordal). Sea $\widehat{\mathbb{C}}$ el plano complejo extendido, $\hat{d}$ es la métrica de cordal

$$\iff \begin{aligned} \hat{d}\colon \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} &\longrightarrow [0, \infty) \\ (z, w) &\longmapsto \hat{d}(z, w) = \|P(z) - P(w)\|_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

Proposición 1.1.7. *La métrica de cordal es una métrica en* $\widehat{\mathbb{C}}$.

Proposición 1.1.8. *El espacio* $\widehat{\mathbb{C}}$ *es metrizable y una de las métricas que origina su topología* *es la métrica de cordal:*

$$\forall z, w \in \mathbb{C} : \ \hat{d}\,(z,w) = \frac{2\,|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} \ \wedge \ \hat{d}(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \ \wedge \ \hat{d}(\infty,\infty)$$

Observación 1.1.31. Como $\forall z, w \in \mathbb{C} : |z|\,, |w| \geq 0 \implies \hat{d}(z,w) \leq 2\,|z-w|$.

Además, $\mathbb{P}(z), \mathbb{P}(w) \in \mathbb{S}^2 \implies \hat{d}(z,w) \leq 2$.

$$\implies \hat{d}(z,w) \leq 2\min\{1, |z-w|\} \text{ luego la distancia está acotada.}$$

$$D(\infty,\varepsilon) = \{\infty\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} < \varepsilon \right\} = \{\infty\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \right\}$$

$$= \{\infty\} \cup D(0,R)^c \text{ con } R = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

1.2 Funciones complejas

1.2.1 Definiciones básicas

Definición 1.2.1 (Función compleja). Sea $f \colon \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, es una función compleja

$$\iff \exists u, v \colon \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : \forall z \in \mathbb{C} : f(z) = u(z) + iv(z).$$

Es decir, $u = \Re(f) \wedge v = \Im(f)$.

Observación 1.2.2. Como $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ como conjunto, f se puede ver como una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ donde $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ con u, v funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 1.2.1. Halla las funciones u, v de las siguientes funciones complejas:

(a) $f(z) = |z|^2 + 3z + i\overline{z}$.

(b) $f(z) = e^z$.

***Solución*:**

(a) $f(x+iy) = (x^2+y^2) + 3(x+iy) + i(x-iy) = (x^2+y^2+3x+y) + i\,(x+3y)$.

(b) $f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\,(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$.

Ejercicio 1.2.2. Halla las soluciones de la ecuación $e^z = i$.

***Solución*:** $e^z = i \iff e^z = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} \iff z = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 1.2.3. Dada $f(z) = z^2$ y $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z), \Im(z) > 0\}$, halla $f(\Omega)$.

***Solución*:** Tenemos $f\left(re^{i\theta}\right) = r^2 e^{2i\theta}$ y como $re^{i\theta} \in \Omega \iff \theta \in \left(0, \pi/2\right) \wedge r > 0$, entonces $2\theta \in (0, \pi)$ y $r^2 > 0$. Por tanto,

$$f(\Omega) = \left\{re^{i\theta} : \theta \in (0, \pi) \wedge r > 0\right\} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\} = \mathbb{H}.$$

Ejercicio 1.2.4. Sea $f(z) = \arg(z)^2$.

1.2.2 Límites y continuidad

Recordamos las siguientes definiciones y propiedades básicas:

Definición 1.2.3 (Límite de una función). Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una función, f tiene límite en $x_0 \in X$ igual a $y_0 \in Y$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X : d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Proposición 1.2.1 (Propiedades básicas de límites). *Sean $f, g\colon \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, tales que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w \wedge \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = w'$, entonces*

1. $\lim\limits_{z \to z_0} (f \pm g)(z) = w \pm w'$.
2. $\lim\limits_{z \to z_0} (f \cdot g)(z) = w \cdot w'$.
3. $w' \neq 0 \implies \lim\limits_{z \to z_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(z) = \dfrac{w}{w'}$.

Definición 1.2.4 (Continuidad en un punto). Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos, una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua en $x_0 \in X$

$$\iff \forall V \in \mathcal{V}(f(x)) : \exists U \in \mathcal{V}(x) : f(U) \subset V.$$

Definición 1.2.5 (Continuidad). Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos, una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua $\iff \forall U \in \mathcal{V}(Y) : f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(X)$.

Proposición 1.2.2 (Propiedades básicas de continuidad). *Sean $f, g\colon \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas en $z_0 \in \Omega$, entonces*

1. *$(f \pm g)(z)$ continua en z_0.*
2. *$(f \cdot g)(z)$ continua en z_0.*

[2] Realmente no sería una función $\mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ sino $\mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ pero se suele llamar función multivaluada a este tipo de funciones.

3. $g(z_0) \neq 0 \implies \left(\dfrac{f}{g}\right)(z)$ *continua en* z_0.

4. g *continua en* $f(z_0) \implies g \circ f$ *continua en* z_0.

Definición 1.2.6 (Límite al infinito). Sea $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $z_0, w \in \mathbb{C}$, entonces

(i) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

(ii) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = w \iff \forall\varepsilon > 0 : \exists N > 0 : |z| > N \implies |f(z) - w| < \varepsilon$.

Ejemplos 1.2.5 (de límites en $\mathbb{C}$).

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2+1}{z-i} = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{(z+i)\cancel{(z-i)}}{\cancel{z-i}} = 2i$.

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{z\to 1/2} \dfrac{z}{2z-1} = \infty$ ya que $\left|\dfrac{z}{2z-1}\right| \xrightarrow{z\to 1/2} \infty$.

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$ no existe ya que $\lim\limits_{x+0i\to 0} \dfrac{\overline{x+0i}}{x+0y} = 1$ y $\lim\limits_{0+yi\to 0} \dfrac{\overline{0+yi}}{0+y} = -1$.

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{z\to\infty} (a_0 + \cdots + a_n z^n) = \infty$ si $a_n \neq 0$ porque

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| \overset{\substack{\triangledown\\ \downarrow}}{\geq} |a_n z^n| - \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \geq |a_n|\,|z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|z|^k$$

Veamos que $I = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|z|^k \leq \dfrac{|a_n|}{2}\,|z|^n$. Como $|z| \to \infty$, podemos tomar $N > 0$ tal que $|z| > N$ y elegimos

$$N = \max\left\{1, \frac{2}{|a_n|}\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right\} \implies |z| > 1 \implies 1 < |z| < \cdots < |z|^{n-1} < |z|^n.$$

$$\implies I = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|z|^k \leq |z|^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \leq \frac{|z|^{n-1}\,|a_n|\,N}{2} \leq \frac{|z|^{n-1}\,|a_n|\,|z|}{2} \leq \frac{|a_n|}{2}\,|z|^n.$$

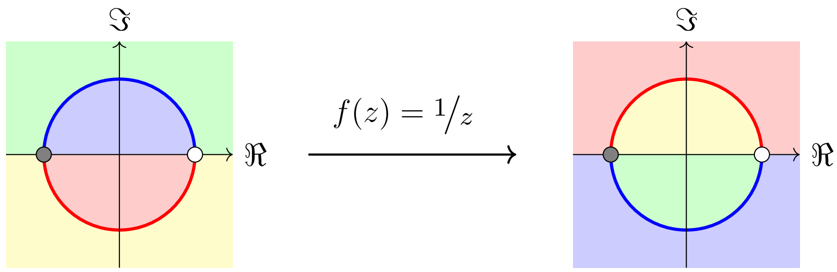
Por tanto, $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k\right| \geq \dfrac{|a_n|}{2}\,|z|^n \xrightarrow{z\to\infty} \infty$.

Ejercicio 1.2.6. Estudia la continuidad de $f(z) = 1/z$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

***Solución*:** Sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\varepsilon > 0$, entonces tomamos $\delta < \min\left\{|z_0|^2/2, |z_0|^2/2\varepsilon\right\}$

$$|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| = \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| = \frac{|z_0 - z|}{|z \cdot z_0|} < \frac{2\,|z - z_0|}{|z_0|^2} < \varepsilon.$$

Podemos visualizar el efecto de esta función dividiendo el plano complejo en regiones:



El exterior de la circunferencia de radio 1 se mapea en el interior y viceversa, los semiplanos se mapean en el semiplano opuesto y, por tanto, los únicos puntos fijos son 1 y -1.

En la esfera de Riemman, esta función equivale a una rotación de 180° en el eje real.

Ejercicio 1.2.7. Estudia la continuidad de la función $\operatorname{Arg}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow (-\pi, \pi]$.

***Solución*:**

2. Funciones holomorfas

2.1 Derivada compleja

Definición 2.1.1 ($\mathbb{C}$-derivabilidad en un punto). Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-derivable en $z_0 \in \Omega$

$$\iff \exists \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} =: f'(z_0).$$

Definición 2.1.2 (Función holomorfa). Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa

$$\iff \forall z_0 \in \Omega : f \text{ es } \mathbb{C}\text{-derivable en } z_0 \iff f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Definición 2.1.3 (Función holomorfa en un punto). Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en $z_0 \in \Omega \iff \exists r > 0 : f\big|_{D(x_0,r)} \in \mathcal{H}(D(x_0,r))$.

Definición 2.1.4 (Función entera). Sea $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, f es entera

$$\iff f \text{ es holomorfa en todo } \mathbb{C} \iff f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

Proposición 2.1.1 (Propiedades de la $\mathbb{C}$-derivabilidad).
Sean $f, g\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dos funciones, entonces

1. *f $\mathbb{C}$-derivable en $z_0 \in \mathbb{C} \implies f$ es continua en z_0.*
2. *f, g $\mathbb{C}$-derivables en $z_0 \in \mathbb{C} \implies f \pm g, f \cdot g, {}^{f}\!/_{g}$ $(g(z_0) \neq 0)$ son $\mathbb{C}$-derivables en z_0:*
   (a) $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$.
   (b) $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.
   (c) $\left({}^{f}\!/_{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$.
3. *Regla de la cadena: f $\mathbb{C}$-derivable en $z_0 \in \mathbb{C}$, g $\mathbb{C}$-derivable en $f(z_0) \implies g \circ f$ es $\mathbb{C}$-derivable en z_0 y $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$.*

Ejercicio 2.1.1. Utilizando la definición, estudia la $\mathbb{C}$-derivabilidad de las siguientes funciones:

(a) $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = c$ con $c \in \mathbb{C}$.

(b) $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = z^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = \overline{z}$.

***Solución*:**

(a) $f(z) = c \implies f'(z) = 0$ ya que $\forall z \in \mathbb{C} : \lim_{h\to 0} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{c-c}{h} = 0.$

(b) $f(z) = z^n \implies f'(z) = nz^{n-1}$ ya que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k - z^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} = nz^{n-1}.$$

(c) $f(z) = \overline{z} \implies f$ no es $\mathbb{C}$-derivable en ningún punto ya que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z} + \overline{h} - \overline{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$$

y este límite no existe (ejemplo 3 de los Ejemplos 1.2.5).

Observación 2.1.5. Los polinomios $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ son enteros.

2.1.1 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Dado que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ como conjuntos, podemos interpretar una función compleja f como dos funciones reales u y v:

$$\begin{aligned} f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (u(x,y), v(x,y)) \end{aligned} \qquad \text{donde} \quad u, v\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Observación 2.1.6. El apartado (c) del Ejercicio 2.1.1 muestra que la $\mathbb{R}$-derivabilidad de f como función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ no implica su $\mathbb{C}$-derivabilidad.

El siguiente teorema permite caracterizar la derivada de las funciones complejas en términos de ciertas ecuaciones diferenciales.

Teorema 2.1.2 (de Cauchy-Riemann). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, definimos $u, v\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dados por $u(x,y) = \Re(f(x+iy))$ y $v(x,y) = \Im(f(x+iy))$, entonces f es $\mathbb{C}$-derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C} \iff$*

1. *u, v son $\mathbb{R}$-diferenciables en (x_0, y_0).*

2. *Se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0):*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \wedge \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \tag{2.1}$$

***Demostración*:**

$\boxed{\Rightarrow}$ Tenemos que f es $\mathbb{C}$-derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, entonces

$$\exists f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \tag{2.2}$$

o, equivalentemente

$$\exists f'(z_0) : \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{h} = 0. \tag{2.3}$$

Paso 1: Veamos que $\exists u_x(x_0, y_0), u_y(x_0, y_0), v_x(x_0, y_0), v_y(x_0, y_0)$ y que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (2.1). Comenzamos estudiando (2.2) para $h = h_1 + 0i \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + h_1) - f(x_0 + iy_0)}{h_1} \\ &= \lim_{h_1 \to 0} \left[\frac{u(x_0 + h_1, y_0) - u(x_0, y_0)}{h_1} + i \frac{v(x_0 + h_1, y_0) - v(x_0, y_0)}{h_1} \right] \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) =: f_x(z_0). \end{aligned}$$

Repetimos el proceso para $h = 0 + ih_2 \in i\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + ih_2) - f(x_0 + iy_0)}{ih_2} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{h_2 \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0)}{h_2} + i \frac{v(x_0, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0)}{h_2} \right]. \\ &= \frac{1}{i} \left[u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0) \right] =: \frac{1}{i} f_y(z_0) = -if_y(z_0). \end{aligned}$$

Por tanto, $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$. Luego se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \wedge v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0).$$

Paso 2: Veamos ahora que las funciones u y v son $\mathbb{R}$-diferenciables. Usando (2.3) y que $h/|h|$ es una función de h acotada, tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{h} \cdot \frac{h}{|h|} = 0.$$

Como $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ y usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann (2.1),

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - h \cdot f'(z_0)}{|h|} &= \frac{u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) - \big(u_x(x_0, y_0)h_1 - v_x(x_0, y_0)h_2\big)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &\quad + i \frac{v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0) - \big(v_x(x_0, y_0)h_1 + u_x(x_0, y_0)h_2\big)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)-h\cdot f'(z_0)}{|h|}=\frac{u(x_0+h_1,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)-\big(u_x(x_0,y_0)h_1+u_y(x_0,y_0)h_2\big)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$
$$+\,i\frac{v(x_0+h_1,y_0+h_2)-v(x_0,y_0)-\big(v_x(x_0,y_0)h_1+v_y(x_0,y_0)h_2\big)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Si tomamos el límite cuando $h\to 0$, las partes real e imaginaria de esta expresión tienen que tender a 0. Y esto quiere decir exactamente que u y v son diferenciables en (x_0,y_0).

$\boxed{\Leftarrow}$ Como u y v son $\mathbb{R}$-diferenciables en (x_0,y_0), para $(h_1,h_2)\to(0,0)$ se tiene que:

$$u(x_0+h_1,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)=u_x(x_0,y_0)h_1+u_y(x_0,y_0)h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right),$$

$$v(x_0+h_1,y_0+h_2)-v(x_0,y_0)=v_x(x_0,y_0)h_1+v_y(x_0,y_0)h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right).$$

Por tanto

$$\begin{aligned}f(z_0+h)-f(z_0)&=u(x_0+h_1,y_0+h_2)+iv(x_0+h_1,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)\\&=[u(x_0+h_1,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)]+i\big[v(x_0+h_1,y_0+h_2)-v(x_0,y_0)\big].\end{aligned}$$

Sustituyendo, agrupando términos y usando las ecuaciones de C-R para expresar todas las derivadas en términos de x (reescribiendo $-v_x(x_0,y_0)=i^2v_x(x_0,y_0)$):

$$\begin{aligned}f(z_0+h)-f(z_0)&=\left[u_x(x_0,y_0)h_1+\underbrace{u_y(x_0,y_0)}_{i^2v_x(x_0,y_0)}h_2\right]+i\left[v_x(x_0,y_0)h_1+\underbrace{v_y(x_0,y_0)}_{u_x(x_0,y_0)}h_2\right]+o(|h|)\\&=[u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)]\,h_1+\big[i^2v_x(x_0,y_0)+iu_x(x_0,y_0)\big]\,h_2+o(|h|)\\&=(u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0))\,(h_1+ih_2)+o(|h|)\end{aligned}$$

Por tanto $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$ y existe $f'(z_0)$.

■

Ejercicio 2.1.2. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, comprueba la $\mathbb{C}$-derivabilidad de las funciones (a) $f(z)=\overline{z}$ y (b) $f(z)=e^z$.

***Solución*:**

(a) $f(x+iy)=x-iy \implies u(x,y)=x\ \wedge\ v(x,y)=-y$ que son $\mathbb{R}$-diferenciables. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son

$$\forall z+iy\in\mathbb{C}: u_x(x,y)=1\neq -1=v_y(x,y)\ \wedge\ u_y(x,y)=0=0=-v_x(x,y).$$

Por tanto, $\overline{z}$ no es $\mathbb{C}$-diferenciable en ningún punto.

(b) $f(x+iy) = e^x \cos y + ie^x \sin y \implies u(x,y) = e^x \cos y \wedge v(x,y) = e^x \sin y$ que son $\mathbb{R}$-diferenciables. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son $\forall z + iy \in \mathbb{C}$:

$$u_x(x,y) = e^x \cos y = e^x \sin y = v_y(x,y) \wedge u_y(x,y) = -e^x \sin y = e^x \sin y = -v_x(x,y).$$

Luego e^z es $\mathbb{C}$-diferenciable en todo $\mathbb{C}$ (es decir, es entera).

Ejercicio 2.1.3. Halla todas las $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ que sean holomorfas en Ω.

***Solución*:** Tenemos que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $v(x,y) = 0$ y $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann nos dan

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) = 0 \implies u(x,y) = \text{cte} \implies f(x+iy) = \text{cte}.$$

Es decir, las únicas funciones holomorfas que solo toman valores reales son las constantes.

Observación 2.1.7. Por el **??**, funciones como $\Im(z)$, $\Re(z)$, $\operatorname{Arg}(z)$ y $|z|$ no pueden ser holomorfas ya que solo toman valores reales y no son constantes.

2.1.2 Funciones armónicas

Definición 2.1.8 (Laplaciano). Sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en $\mathcal{C}^2$, Δf es el Laplaciano de f

$$\iff \forall x \in \Omega : \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \in \mathbb{R}^m.$$

Definición 2.1.9 (Función armónica). Sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en $\mathcal{C}^2(\Omega)$, f es armónica

$$\iff \forall x \in \Omega : \Delta f(x) = 0.$$

Teorema 2.1.3 (Conjugada armónica). *Sea $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$*

$$\implies u, v \text{ son funciones armónicas en } \Omega.$$

*En este caso, v es la **conjugada armónica** de u.*

***Demostración*:** Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos que

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x \wedge u_{yy} = (u_y)_y = (-v_x)_y \underset{\substack{\uparrow \\ v \in \mathcal{C}^2(\Omega)}}{\implies} u_{xx} = -u_{yy}.$$

Análogamente, $v_{xx} = -v_{yy}$, luego u, v son armónicas. ■

Ejercicio 2.1.4. Halla la conjugada armónica de $u(x,y) = x \cdot y$.

***Solución*:** Observamos que u es armónica ya que $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. Por Cauchy-

Riemann, $u_x = y = v_y \wedge u_y = x = -v_x$. Luego $v(x,y) = \frac{v^2}{2} + \varphi(x)$

$$\implies v_x = \varphi'(x) = -x \implies \varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + c \implies v(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{2} + c.$$

Por tanto concluimos que $f(x+iy) = x \cdot y + i\frac{y^2-x^2}{2} + c \implies f(z) = -i\frac{z^2}{2} + c.$

Proposición 2.1.4 (Consecuencias de las ecuaciones de Cauchy-Riemann).
Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces

1. $\forall z \in \Omega : f'(z) = 0 \implies f$ *es constante en* Ω.

2. $\forall z \in \Omega : \big(\Re\left(f(z)\right) = \text{cte}\big) \vee \big(\Im\left(f(z)\right) = \text{cte}\big) \implies f$ *es constante en* Ω.

3. $|f(z)|$ *es constante en* $\Omega \implies f$ *es constante en* Ω.

***Demostración*:** Consideramos $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = u(z) + iv(z)$ con $u, v \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Sea $z_0 \in \Omega$, como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f es $\mathbb{C}$-derivable en z_0 con $f'(z_0) = 0$. Entonces, por el Teorema de Cauchy-Riemann, u, v son $\mathbb{R}$-diferenciables en z_0 con
$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = 0 \implies u_x = v_x = 0 \implies v_y = u_y = 0.$$
Luego u y v son constantes en Ω y, por tanto, f también lo es.

2. Si $\forall z \in \Omega : \Re f(z) = 0 \implies \forall z \in \Omega u(z) = 0 \implies u_x = 0 \wedge u_y = 0$. Entonces, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $v_y = u_x = 0 \wedge v_x = -u_y = 0$, luego u y v son constantes en Ω y, por tanto, f también lo es.

3. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\forall z \in \Omega : |f(z)| = c \in \mathbb{R}$, entonces si $c = 0$ inmediatamente $f \equiv 0$. Supongamos que $c \neq 0$, entonces $|f|^2 = u^2 + v^2$ es constante en Ω.
$$\begin{cases} 2uu_x + 2vv_x = 0 & \text{(I)} \\ 2uu_y + 2vv_y = 0 & \text{(II)} \end{cases} \overset{\substack{\text{C-R} \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} \begin{cases} uu_x - vu_y = 0 & \text{(I)} \\ uv_y + vu_x = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$
$$\left.\begin{aligned} &\overset{\substack{uI+vII \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} 2\left(u^2+v^2\right)u_x = 0 \implies u_x = 0 \implies v_y = 0 \\ &\overset{\substack{vI-uII \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} -2\left(u^2+v^2\right)u_y = 0 \implies u_y = 0 \implies v_x = 0 \end{aligned}\right\} \text{ en } \Omega.$$
Luego u, v son constantes en Ω y por tanto f es constante en Ω.

■

2.1.3 Operadores de Wirtinger $\left(\partial f,\, \overline{\partial} f\right)$

Definición 2.1.10 (Operadores de Wirtinger). Sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, con Ω un dominio, $\partial f, \overline{\partial} f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ son los operadores de Wirtinger

$$\iff \forall x+yi \in \Omega : \begin{cases} \partial f(x+yi) = \partial_z f(x+yi) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - i\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \\ \overline{\partial} f(x+yi) = \partial_{\overline{z}} f(x+yi) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + i\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \end{cases}$$

donde $\partial_x f = u_x + iv_x$ y $\partial_y f = u_y + iv_y$.

Estos operadores provienen de aplicar la regla de la cadena. Como $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2} \wedge y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

$$\implies \partial_z x = \partial_{\overline{z}} x = \frac{1}{2} \wedge \partial_z y = -i\partial_{\overline{z}} y = \frac{1}{2i}.$$

Por lo tanto, $\partial f = \partial_x f \partial_z x + \partial_y f \partial_z y = \partial_x f \dfrac{1}{2} + \partial_y f \dfrac{1}{2i} = \dfrac{1}{2}\left(\partial_x f - i\partial_y f\right)$ y

$$\overline{\partial} f = \partial_x f \partial_{\overline{z}} x + \partial_y f \partial_{\overline{z}} y = \partial_x f \frac{1}{2} + \partial_y f \frac{-1}{2i} = \frac{1}{2}\left(\partial_x f + i\partial_y f\right).$$

Teorema 2.1.5. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *con* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto* $\iff \overline{\partial} f = 0$ *en* Ω.

***Demostración* (Idea):** Tenemos que

$$\overline{\partial} f = \frac{1}{2}\left[f_x + if_y\right] = \frac{1}{2}\left[(u_x + iv_x) + i\left(u_y + iv_y\right)\right] = \frac{1}{2}\left[(u_x - v_y) + i\left(u_y + v_x\right)\right] = 0$$

$$\iff u_x = v_y \wedge u_y = -v_x.$$

■

Ejercicio 2.1.5. Estudia si son holomorfas las siguientes funciones:

(a) $f(z) = e^{|z|^2}$.

(b) $f(z) = \overline{z} \cdot e^{-|z|^2}$.

***Solución*:**

(a) $f(z) = e^{|z|^2} \implies \overline{\partial} f(z) = z e^{z\overline{z}} = 0 \iff z = 0$. Luego se cumple solo en un punto y por tanto f no es holomorfa.

(b) $f(z) = \overline{z} \cdot e^{-|z|^2} \implies \overline{\partial} f(z) = e^{-z\overline{z}} - z\overline{z}e^{-z\overline{z}} = 0 \iff e^{-|z|^2}\left(1 - |z|^2\right) = 0 \iff |z| = 1$. Luego se cumple en la circunferencia unidad que es un conjunto cerrado de $\mathbb{C}$ que no contiene ningún abierto y por tanto f no es holomorfa en ningún abierto de $\mathbb{C}$.

2.2 Funciones elementales

2.2.1 La función exponencial compleja

Definición 2.2.1 (Exponencial compleja). Sea $\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, es la fn exp compleja

$$\iff \forall z = x + yi \in \mathbb{C} : \exp(z) = e^z := e^{x+yi} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) .$$

Proposición 2.2.1 (Propiedades básicas de exp). *Sea* $\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *la función exponencial compleja y* $z, w \in \mathbb{C}$, *entonces*

1. $|e^z| = e^{\Re z}$.
2. $e^{z+w} = e^z e^w$.
3. $\arg(e^z) = \Im z + 2\pi k$ *con* $k \in \mathbb{Z}$.
4. *Periodicidad:* $e^{z+2\pi i} = e^z$.
5. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.
6. $e^{z+\pi i} = -e^z$.
7. $e^z = 1 \iff z = 2\pi i k$ *con* $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.2.2. *La función exponencial compleja es holomorfa en* $\mathbb{C}$ *(entera).*

***Demostración*:** ■

Ejercicio 2.2.1. Demuestra que la función exponencial compleja es la única (salvo constantes) que verifica que $f'(z) = f(z)$.

***Solución*:**

2.2.1.1 Propiedades geométricas de la función exponencial compleja

1. Rectas horizontales y verticales

1.1. Dada la recta horizontal $y = y_0 \implies w = e^z = e^x e^{iy_0} = |w| e^{i \arg w}$, luego $|w| = e^x > 0 \wedge \arg(w) = y_0$ constante. Es decir, e^z lleva las rectas horizontales en semirrectas que no alcanzan al origen y forman un ángulo constante con el eje x.

1.2. Dada la recta vertical $x = x_0 \implies w = e^z = e^{x_0} e^{iy} = e^{x_0} e^{i \arg w}$, luego $|w| = e^{x_0} > 0 \wedge \arg(w) = y \in \mathbb{R}$ variable. Es decir, e^z lleva las rectas verticales en circunferencias centradas en el origen de radio e^{x_0}.

Por tanto, $\operatorname{Im}(\exp) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. La exponencial no es inyectiva en ninguna banda horizontal de anchura mayor o igual que 2π. Por ejemplo, consideramos la banda $\Omega_1 = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R} \wedge y \in [-\pi, \pi]\}$ de anchura exactamente 2π.

Entonces, la semirecta real negativa $\{w \in \mathbb{C} : \Im(w) = 0 \wedge \Re(w) < 0\}$ es la imagen bajo la función exponencial de las rectas $y = \pi$ e $y = -\pi$ (que están contenidas en Ω_1). Por tanto, la exponencial no es inyectiva en Ω_1.

Si en su lugar consideramos $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R} \wedge y \in (-\pi, \pi)\}$ entonces la exponencial sí es inyectiva en Ω_2 y $\exp(\Omega_2) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (donde $(-\infty, 0]$ es el semieje negativo real).

2.2.2 Funciones trigonométricas complejas

Por la identidad de Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, tenemos que $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ y por tanto

$$\forall\theta \in \mathbb{R} : \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \wedge \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Definición 2.2.2 (Funciones trigonométricas complejas). Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos y $\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la función exponencial compleja, definimos

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad \cos z =: \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \quad \wedge \quad \sin z =: \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

Observación 2.2.3. De estas, se definen el resto de funciones trigonométricas complejas.

Proposición 2.2.3 (Propiedades de las funciones trigonométricas complejas). *Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces*

1. *(Im)paridad:* $\cos z = \cos(-z) \wedge \sin z = -\sin(-z)$.
2. *Periodicidad:* $\cos(z + 2\pi k) = \cos z \wedge \sin(z + 2\pi k) = \sin z$ *con* $k \in \mathbb{Z}$.
3. *Identidad trigonométrica:* $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
4. $\cos, \sin \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *(son enteras) y* $(\cos z)' = -\sin z \wedge (\sin z)' = \cos z$.
5. *Las funciones* $\cos$ *y* $\sin$ *no son acotadas en* $\mathbb{C}$.

***Demostración*:** ■

Ejercicio 2.2.2. Halla los ceros en $\mathbb{C}$ de la función cos.

***Solución*:** Tenemos que $\cos z = 0 \iff e^{iz} = -e^{-iz} \iff e^{2zi} = -1$.

Luego $2z = (2k+1)\pi \implies z = (2k+1)\frac{\pi}{2}k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Es decir, los ceros del cos como función compleja son los mismos que los del cos como función real.

2.2.2.1 Propiedades geométricas de las funciones trigonométricas complejas

1. Rectas horizontales y verticales

1.1. Dada la recta horizontal $y = y_0 \implies w = \sin z$.

$$\sin(x + y_0 i) = \frac{e^{-y_0}e^{-ix} - e^{y_0}e^{-ix}}{2i} = \frac{\sin x\,(e^{y_0} + e^{-y_0}) + i\cos x\,(e^{y_0} - e^{-y_0})}{2}$$
$$= \sin x \cosh y_0 + i \cos x \sinh y_0 =: a_0 \sin x + i b_0 \cos x =: u + iv.$$

Entonces $u = a_0 \sin x \wedge v = b_0 \cos x$ y, por tanto, para $y \neq 0$ tenemos que

$$\left(\frac{u}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{v}{b_0}\right)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \text{ es decir, una elipse centrada en el origen.}$$

Según $y_0 \searrow 0 \implies a_0 \searrow 1 \wedge b_0 \nearrow 0$ y por tanto la elipse se va aplanando hasta convertirse en un segmento horizontal $[-1, 1]$ cuando $y = 0$.

1.2. Sea la recta vertical $x = x_0 \implies w = \sin z$.

$$\sin(x_0 + yi) = \frac{e^{-y}e^{-ix_0} - e^{y}e^{-ix_0}}{2i} = \frac{\sin x_0\,(e^{y} + e^{-y}) + i\cos x_0\,(e^{y} - e^{-y})}{2}$$
$$= \sin x_0 \cosh y + i \cos x_0 \sinh y =: a_0 \cosh y + i b_0 \sinh y =: u + iv.$$

Entonces $u = a_0 \cosh y \wedge v = b_0 \sinh y$ y, por tanto, para $x \neq 0$ tenemos que

$$\left(\frac{u}{a_0}\right)^2 - \left(\frac{v}{b_0}\right)^2 = \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1, \text{ es decir, una hipérbola centrada en el origen.}$$

Según $x_0 \to 0 \implies a_0 \to 1 \wedge b_0 \to 0$ y por tanto la hipérbola se va aplanando hasta convertirse en la recta vertical $y = 0$ cuando $x = 0$.

2. Si consideramos $\Omega = (-\pi, \pi] \times (0, \infty) \cup \left[-\pi/2, \pi/2\right] \times \{0\}$, entonces $\sin\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es biyectiva:

2.2.3 Funciones hiperbólicas complejas

Definición 2.2.4 (Funciones hiperbólicas complejas). Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos y $\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la función exponencial compleja, definimos

$$\forall z \in \mathbb{C}: \quad \cosh z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} \quad \wedge \quad \sinh z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}.$$

Proposición 2.2.4 (Propiedades de las funciones hiperbólicas complejas). *Sea $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$, entonces*

1. *Relación con las trigonométricas:* $\cosh z = \cos iz \wedge \sinh z = -i \sin iz$.

2. *Identidad hiperbólica:* $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

3. $\cosh, \sinh \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *(son enteras) y* $(\cosh z)' = \sinh z \wedge (\sinh z)' = \cosh z$.

4. Las funciones $\cosh$ *y* $\sinh$ *no están acotadas en* $\mathbb{C}$.

***Demostración*:** ■

2.2.4 Teorema de la función inversa para funciones holomorfas

Teorema 2.2.5 (de la función inversa). *Sea* $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto y* $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función holomorfa en* Ω *y* $\mathcal{C}^1(\Omega)$ *con* $f'(z_0) \neq 0$

$$\Longrightarrow \exists \mathcal{U} \in \mathcal{V}(z_0) : f\big|_{\mathcal{U}} \text{ es biyectiva } \wedge f^{-1}\colon f(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U} \text{ es holomorfa en } \mathcal{U}.$$

Además, se tiene que $\left(f^{-1}\right)'(f(w)) = \dfrac{1}{f'(w)}$.

***Demostración*:** Consideramos $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f = (u, v)$ entonces

$$J_f(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \overset{\text{C-R}}{\underset{\downarrow}{=}} \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = (u_x)^2(x_0, y_0) + (v_x)^2(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0.$$

Por el teorema de la Función Inversa en el caso real, como $J_f(x_0, y_0) \neq 0$, existe un entorno de (x_0, y_0), $U \subset \Omega$, tal que la función $f \in C^1(\Omega)$ tiene inversa, $g = f^{-1}$, que es $\mathbb{R}$-diferenciable en $f(U)$.

Veamos que g es holomorfa. Sea $g = U + iV$. Como g es $\mathbb{R}$-diferenciable, solo queda comprobar que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Si D_f y D_g son las Jacobianas de f y g respectivamente, entonces $D_g = D_{f^{-1}}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{pmatrix} = D_g = D_{f^{-1}} = \frac{1}{J_f} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}.$$

Luego efectivamente se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$U_x = \frac{v_y}{J_f} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{C-R}}}{=} \frac{u_x}{J_f} = V_y \quad \wedge \quad U_y = \frac{-u_y}{J_f} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{C-R}}}{=} \frac{-v_x}{J_f} = -V_x$$

Entonces, por el teorema de Cauchy-Riemann, g es holomorfa en $f(U)$. Además,

$$g'(f(z)) = U_x(f(z)) + iV_x(f(z)) = \frac{1}{|f'(z)|^2}\left(u_x(z) - iv_x(z)\right) = \frac{1}{|f'(z)|^2}\overline{f'(z)} = \frac{1}{f'(z)}.$$

Observación 2.2.5. Que $f(U)$ sea abierto nos lo garantiza el teorema de la aplicación abierta, que se verá más adelante. En esta prueba lo estamos suponiendo.

Además, estamos usando una versión del teorema de la función inversa más fuerte del habitual, que pide $f \in \mathcal{C}^1$.

$\blacksquare$

Ejemplo 2.2.3 (de aplicación del teorema de la función inversa). Sea $f(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z$ y $z_0 = i$, entonces $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ porque es una función polinómica y $f'(i) = -2 - 2i \neq 0$. Luego podemos aplicar el teorema de la función inversa y $\exists$ un entorno de i en el que f es invertible con derivada inversa

$$\left(f^{-1}\right)'(f(i)) = \left(f^{-1}\right)(0) = \frac{1}{f'(i)} = \frac{1}{-2-2i} = \frac{-1+i}{4}.$$

2.2.5 Función logaritmo complejo

Definición 2.2.6 (Logaritmo complejo). Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los complejos, definimos

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \log z := \ln|z| + i \arg z = \{\ln|z| + i\left(\operatorname{Arg} z + 2k\pi\right) : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

Definición 2.2.7 (Rama del logaritmo). Sea Ω un dominio en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $l \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua, l es una rama del logaritmo $\iff \forall z \in \Omega : e^{l(z)} = z$.

Definición 2.2.8 (Rama principal). Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los complejos, Log es la rama principal del logaritmo (o función logaritmo principal)

$$\iff \begin{aligned} \operatorname{Log} \colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \end{aligned} \qquad \text{es una rama del logaritmo.}$$

Observación 2.2.9. Se tiene que $e^{\log(z)} = z$ ya que

$$e^{\log(z)} = e^{\ln|z| + i(\operatorname{Arg}(z) + 2\pi k)} = e^{\ln|z|} e^{i \operatorname{Arg}(z)} e^{2\pi k} = |z|\, e^{i \operatorname{Arg}(z)} = z.$$

Sin embargo, en general $\log(e^z) \neq z$ ya que

$$\log\left(e^z\right) = \ln|e^z| + i \arg(e^z) \overset{\overset{z = x+iy}{\downarrow}}{=} \ln(e^x) + i(y + 2\pi k) = x + i(y + 2\pi k) = z + 2\pi k i.$$

No obstante, $\operatorname{Log} e^z = z$.

Proposición 2.2.6. *Sea* Log *la función logaritmo principal, entonces*

(1) *Continuidad:* $\operatorname{Log} \in \mathcal{C}\left(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]\right)$.

(2) *Holomorfía:* $\operatorname{Log} \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]\right)$.

(3) *Derivada:* $\forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] : (\operatorname{Log} z)' = \dfrac{1}{z}$.

***Demostración*:**

(1)

(2) Usamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar $u_\theta = -rv_r \wedge v_\theta = ru_r$:

$$\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z) = \ln r + i\theta \implies u_\theta = 0 = rv_r \wedge v_\theta = 1 = ru_r.$$

(3) Usando la definición de derivada

$$(\operatorname{Log} z)' = \lim_{z\to z_0} \frac{\operatorname{Log} z - \operatorname{Log} z_0}{z - z_0} = \lim_{w\to w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \lim_{w\to w_0} \frac{1}{\frac{e^w - e^{w_0}}{w - w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z}.$$

Los puntos 2 y 3 se pueden deducir del teorema de la función inversa. ■

Ejercicio 2.2.4. Estudia el conjunto de holomorfía de la función $f(z) = \operatorname{Log}(z - i)$ y calcula su derivada en dichos puntos.

***Solución*:** Sabemos que la función Log es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ y que $z-i$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ por ser polinómica. Por tanto $f(z)$ es holomorfa en $z \in \mathbb{C}$

$$\iff \neg\left(\Re(z - i) \leq 0 \wedge \Im(z - i) = 0\right) \iff \neg\left(x \leq 0 \wedge y = 1\right).$$

Por tanto, $f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C} \setminus \{z = x + yi \in \mathbb{C} : x \leq 0 \wedge y = 1\}\right)$.

Para calcular la derivada de f, usamos la regla de la cadena y la derivada de Log:

$$f'(z) = (\operatorname{Log}(z - i))' = \frac{1}{z - i} \cdot 1 = \frac{1}{z - i}.$$

2.2.6 Potencias complejas y exponencial compleja arbitraria

Recordamos que, en $\mathbb{R}$, $\forall x > 0, a \in \mathbb{R} : a^x = e^{x \ln a}$. En $\mathbb{C}$, lo haremos de forma similar:

Definición 2.2.10 (Exponente complejo). Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq 0$, α^β es α elevado a β

$$\iff \alpha^\beta = \left\{w \in \mathbb{C} : w = e^{\beta \log \alpha} = e^{\beta(\ln|\alpha| + i(\operatorname{Arg}(\alpha) + 2k\pi))} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Por abuso de notación, escribimos $\alpha^\beta = e^{\beta \log \alpha} = |\alpha|^\beta \, e^{i\beta(\operatorname{Arg}(\alpha) + 2\pi k)}$.

Definición 2.2.11 (Exponencial base *a*). Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es la función exponencial compleja con base a

$$\iff \forall z \in \mathbb{C} : f(z) = a^z := e^{z \operatorname{Log}(a)}.$$

Observación 2.2.12. La función exponencial compleja con base e es la función exponencial compleja usual.

Definición 2.2.13 (Potencia compleja). Sea $a \in \mathbb{C}$, $f\colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$ es la función potencia compleja con exponente a

$$\iff \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] : f(z) = e^{a \operatorname{Log} z}.$$

Ejercicio 2.2.5. Calcula los valores de las potencias (a) $(-i)^{1+i}$ y (b) 1^i.

***Solución*:**

(a) $(-i)^{1+i} = e^{(1+i)\log(-i)} = e^{(1+i)(\ln|1|+i(\operatorname{Arg}(-i)+2\pi k))} = e^{(1+i)\left[i\left(-\pi/2+2k\pi\right)\right]}.$

$$\implies (-i)^{1+i} = e^{\pi/2-2k\pi+i\left(-\pi/2+2k\pi\right)} = e^{\pi/2-2k\pi}e^{-\pi/2 i}e^{i2k\pi} = -ie^{\pi/2-2k\pi} \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Observamos que el módulo $\left(e^{\pi/2-2k\pi}\right)$ varía, pero el ángulo $\left(-\pi/2 + 2k\pi\right)$ es constante. Luego se trata de una recta.

(b) $1^i = e^{i\log(1)} = e^{i(\ln|1|+i(\operatorname{Arg}(1)+2k\pi))} = e^{-2k\pi} \in \mathbb{R}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 2.2.6. Estudia el conjunto de valores de α^β con $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ según (a) $\beta \in \mathbb{Z}$, (b) $\beta \in \mathbb{Q}$, (c) $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

***Solución*:**

(a) $\alpha^\beta = e^{\beta(\ln|\alpha|+i(\operatorname{Arg}(\alpha)+2k\pi))} = |\alpha|^\beta \, e^{i\beta \operatorname{Arg}(\alpha)} e^{i2(k\beta)\pi}$ que contiene un único valor.

(b) $\beta = m/n \implies \alpha^{m/n} = |\alpha|^{m/n} \, e^{im/n(\operatorname{Arg}(\alpha)+2k\pi)} = |\alpha|^{m/n} \, e^{i\frac{m \operatorname{Arg}(\alpha)+2km\pi}{n}}$ que contiene n valores (es la raíz n-ésima de α^m).

(c) $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies \alpha^\beta = |\alpha|^\beta \, e^{i\beta \operatorname{Arg}(\alpha)} e^{i2(k\beta)\pi}$ que contiene infinitos valores.

2.2.6.1 Holomorfía de las funciones a^z y z^a

Proposición 2.2.7. *Sean a^z, z^a con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ las funciones exponencial compleja con base a y potencia compleja, respectivamente, entonces*

(a) $a^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *con* $(a^z)' = a^z \operatorname{Log} a$.

(b) $z^a \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ *con* $(z^a)' = az^{a-1}$.

***Demostración*:**

(a) $\forall z \in \mathbb{C} : (a^z)' = \left(e^{z \operatorname{Log} a}\right)' = \operatorname{Log}(a)e^{z \operatorname{Log} a} = a^z \operatorname{Log} a.$

(b) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] : (z^a)' = \left(e^{a \operatorname{Log} z}\right)' = \dfrac{a}{z}e^{a \operatorname{Log} z} = az^{-1}z^a = az^{a-1}.$

$\blacksquare$

Ejercicio 2.2.7. Calcula y compara los valores de $(2^i)^2$, $(2^2)^i$ y 2^{2i}.

2.2.7 Transformaciones de Möbius

Definición 2.2.14 (Transformación de Möbius). Sea $T\colon \mathbb{C} \setminus \left\{{}^{-d}\!/_{c}\right\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{{}^{a}\!/_{c}\right\}$, es una transformación de Möbius (TM)

$$\iff \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{{}^{-d}\!/_{c}\right\} : T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ con } ad - bc \neq 0.$$

Teorema 2.2.8. *Toda transformación de Möbius es una función biyectiva en* $\mathbb{C} \setminus \left\{{}^{-d}\!/_{c}\right\}$.

***Demostración*:** Dividimos en casos:

- Si $c = 0$, entonces $ad - bc \neq 0 \implies ad \neq 0$. Por tanto,

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \implies T\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ es biyectiva en } \mathbb{C}.$$

- Si $c \neq 0$, veamos que se cumplen la inyectividad y la sobreyectividad:

  1. $T(z) = T(w) \implies \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{aw+b}{cw+d} \implies (ad-bc)(z-w) = 0 \implies z = w.$

  2. $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \left\{{}^{a}\!/_{c}\right\} : \exists z \in \mathbb{C} \setminus \left\{{}^{-d}\!/_{c}\right\} : T(z) = w \text{ con } z = \dfrac{-dw+b}{cw-a} \in \mathbb{C} \setminus \left\{{}^{-d}\!/_{c}\right\}.$

$\blacksquare$

Observación 2.2.15. La inversa de una transformación de Möbius $T^{-1}(z) = \frac{-dw+b}{cw-a}$ también es una transformación de Möbius.

Observación 2.2.16. Podemos extender una transformación de Möbius a $\widehat{\mathbb{C}}$ definiendo:

$$\forall z \in \widehat{C} : T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \neq {}^{-d}\!/_{c}, \infty \\ \infty & \text{si } z = {}^{-d}\!/_{c}. \\ {}^{a}\!/_{c} & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Ejemplos 2.2.8 (de transformaciones de Möbius).

$\boxed{1}$ Traslaciones: $T_{z_0}(z) = z + z_0$ con $z_0 \in \mathbb{C}$.

$\boxed{2}$ Dilataciones: $S_r(z) = rz$ con $r \in \mathbb{R}_+$.

$\boxed{3}$ Rotaciones: $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$ con $\theta \in \mathbb{R}$.

$\boxed{4}$ Inversiones: $I(z) = {}^1\!/_z$.

Proposición 2.2.9. *Toda transformación de Möbius es una composición de traslaciones, dilataciones, rotaciones e inversiones.*

***Demostración*:** Separamos en dos casos: $c = 0$ y $c \neq 0$:

- Si $c = 0$, entonces $T(z) = {}^a\!/_d z + {}^b\!/_d = {}^a\!/_d \left(z + {}^b\!/_a\right)$ donde ${}^a\!/_d = \left|{}^a\!/_d\right| e^{i\,\mathrm{Arg}\left({}^a\!/_d\right)} = re^{i\theta}$ luego $T(z) = re^{i\theta}\left(z + {}^b\!/_a\right) = \left(S_r \circ R_\theta \circ T_{b/d}\right)(z)$.
- Si $c \neq 0$, entonces $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{(az+b)\,c + ad - ad}{(cz+d)\,c} = \dfrac{a\,(cz+d) + (cb-ad)}{(cz+d)\,c}$

$$\Longrightarrow\ T(z) = \frac{a}{c} + \frac{cb-ad}{c\,(cz-d)} = \frac{a}{c} + \underbrace{\frac{cb-ad}{c^2}}_{re^{i\theta}} \cdot \frac{1}{z + {}^d\!/_c} = \left(T_{a/c} \circ S_r \circ R_\theta \circ I \circ T_{d/c}\right)(z).$$

■

Teorema 2.2.10 (Holomorfía de las TM). *Sea* $T\colon \mathbb{C} \setminus \left\{-{}^d\!/_c\right\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{{}^a\!/_c\right\}$ *una transformación de Möbius, entonces*

(1) $T \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C} \setminus \left\{-{}^d\!/_c\right\}\right)$.

(2) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-{}^d\!/_c\right\} : T'(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$.

Observación 2.2.17. Podemos usar notación matricial para las transformaciones de Möbius:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-{}^d\!/_c\right\} : T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.2.11. *El conjunto de transformaciones de Möbius forma un grupo con la composición de funciones.*

***Demostración*:** En la hoja de ejercicios. ■

Teorema 2.2.12. *Toda transformación de Möbius manda circunferencias generalizadas a circunferencias generalizadas. Es decir, $T(\Gamma) = \Gamma$.*

Más aún, si γ es una circunferencia generalizada, T transforma cada uno de los dos dominios complementarios en que γ divide a la esfera de Riemann en uno de los dominios complementarios de $T(\gamma)$.

***Demostración*:** Observamos que todo elemento $\gamma \in \Gamma$ verifica la ecuación

$$\forall (x,y) \in \gamma : A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D = 0 \text{ con } A, B, C, D \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Si $A \neq 0$, la ecuación γ representa una circunferencia. Si $A = 0$, la ecuación γ representa una recta. Por la `Prop-transformacion-mobius-composicion/??`, basta estudiar las traslaciones, dilataciones, rotaciones e inversiones.

$\boxed{\subset}$ Si T es una dilatación, rotación o traslación, el resultado es inmediato: $T(\gamma) \in \Gamma$.

Consideramos $T(z) = 1/z$ y $z = x + yi \in \gamma$. Entonces

$$\frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} \implies u = \frac{x}{x^2+y^2} \wedge v = -\frac{y}{x^2+y^2} \implies u^2+v^2 = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación (2.4), obtenemos

$$A\left(\frac{1}{u^2+v^2}\right) + B\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) + C\left(\frac{-u}{u^2+v^2}\right) + D = 0$$
$$\iff A + Bu - Cv + D(u^2+v^2) = 0 \implies T(\gamma) \in \Gamma.$$

$\boxed{\supset}$ Como T^{-1} también es transformación de Möbius, le podemos aplicar el argumento anterior y $T^{-1}(\Gamma) \subset \Gamma \implies \Gamma \subset T(\Gamma)$.

■

Ejercicio 2.2.9. Consideramos la transformación de Möbius T dada por $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{1/\overline{\alpha}\right\}$: $T(z) = \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}$ con $\alpha \in \mathbb{D}$.

(a) Halla $T(\partial\mathbb{D})$.

(b) Halla $T(\mathbb{D})$.

(c) Estudia la holomorfía en $\mathbb{D}$.

(d) Calcula $T'(z)$.

***Solución*:**

(a) Sea $z \in \partial\mathbb{D}$, entonces $|z| = 1$, luego $z\overline{z} = 1 \iff z = 1/\overline{z}$

$$\implies |T(z)| = \frac{|\alpha - z|}{\left|1 - \overline{\alpha}1/\overline{z}\right|} = \frac{|\overline{z}|\,|\alpha - z|}{|\overline{z} - \overline{\alpha}|} = |\overline{z}| = |z| = 1.$$

Entonces $T(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$. Como $T^{-1} = T$, entonces $T(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$.

(b) (Hoja 1) Sea $z \in \mathbb{D}$, entonces $|z| < 1$ y calculamos

$$|T(z)| = \frac{|\alpha - z|}{|1-\overline{\alpha}z|} < 1 \iff |\alpha - z|^2 < |1 - \overline{\alpha}z|^2$$
$$\iff (1-|z|)^2\left(1-|\alpha|^2\right) > 0 \iff |z| < 1 \implies T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}.$$

(c) Como $\alpha \in \mathbb{D}$, entonces $1/\overline{\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \left\{\overline{\mathbb{D}}\right\} \implies T \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

(d) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ {}^1\!/_{\overline{\alpha}} \right\} : T'(z) = \dfrac{|\alpha|^2 - 1}{(1 - \overline{\alpha} z)^2} \neq 0.$

Teorema 2.2.13 (Puntos fijos de una TM). *Sea $T \neq \mathrm{id}$ una transformación de Möbius*

$$\Longrightarrow T \textit{ tiene uno o dos puntos fijos en } \widehat{\mathbb{C}}.$$

***Demostración*:** Dividimos en casos como de costumbre:

- Si $c = 0$, entonces $T(z) = {}^a\!/_d z + {}^b\!/_d = z$ y ∞ es un punto fijo trivial en $\widehat{\mathbb{C}}$. Además,

$$T(z) = z \iff \left(\frac{a}{d} - 1\right) z + \frac{b}{d} = 0 \iff \begin{cases} \text{Si } a = d, \quad b = 0 \implies T = \mathrm{id} \longrightarrow\!\longleftarrow \\ \text{Si } a \neq d, \quad z = \frac{-b}{a-d}. \end{cases}$$

  Luego si $c = 0$, T tiene dos puntos fijos: ∞ y $\frac{b}{d-a}$.

- Si $c \neq 0$, entonces $T(z) = {}^{az+b}\!/_{cz+d} = z \iff cz^2 + (d-a)z - b = 0$ que tiene una o dos soluciones en $\widehat{\mathbb{C}}$. En este caso, por tanto, T tiene uno o dos puntos fijos.

En cualquier caso, T tiene uno o dos puntos fijos. ■

Corolario 2.2.14. *Sea T una TM con 3 (o más) puntos fijos $\Longrightarrow T = \mathrm{id}$.*

***Demostración*:** Se sigue del `Teo-transformacion-mobius-pnt-fijos/??`. ■

Teorema 2.2.15. *Sean $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{C}$ distintos y $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{C}$ distintos*

$$\Longrightarrow \exists! T \textit{ transformación de Möbius} : \forall k \in \mathbb{N}_3 : T(z_k) = w_k.$$

Además, la fórmula para fijar estos puntos es:

$$G(w) := \frac{(w_2 - w_3)(w - w_1)}{(w_2 - w_1)(w - w_3)} = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)} =: F(z) \quad \textit{(fórmula de la \textbf{razón doble})}.$$

***Demostración*:** La existencia viene dada por la fórmula de la razón doble. En efecto,

(i) $w = w_1 \iff G(w) = 0 \iff F(z) = 0 \iff z = z_1.$

(ii) $w = w_3 \iff G(w) = \infty \iff F(z) = \infty \iff z = z_3.$

(iii) $w = w_2 \iff G(w) = 1 \iff F(z) = 1 \iff z = z_2.$

Para la unicidad, supongamos que existen dos transformaciones de Möbius T_1 y T_2 que cumplen las condiciones del teorema. Entonces, $T_1 \circ T_2^{-1}(w_k) = w_k$ para $k = 1, 2, 3$.

Por tanto, como $T_1 \circ T_2^{-1}$ tiene tres puntos fijos distintos, el `Cor-transformacion-mobius-3-pnt-fijos/?` nos dice que $T_1 \circ T_2^{-1} = \mathrm{id}$ y, en consecuencia, $T_1 = T_2$. ■

Observación 2.2.18. El comportamiento de las transformaciones de Möbius viene completamente determinado por su acción sobre tres puntos distintos en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Ejercicio 2.2.10. Determina las transformaciones de Möbius tales que

(a) $T(-1) = -i \wedge T(0) = 1 \wedge T(1) = i$. (b) $T(1) = 0 \wedge T(i) = 1 \wedge T(-i) = \infty$.

***Solución*:**

1. Resolvemos el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{cases} T(0) = {}^{b}\!/_{d} = 1 \\ T(-1) = {}^{(b-a)}\!/_{(d-c)} = -i \\ T(1) = {}^{(a+b)}\!/_{(c+d)} = i \end{cases} \implies a = ib \wedge c = -ib \wedge b = d.$$

   Entonces $T(z) = \dfrac{ibz+b}{-ibz+b} = \dfrac{iz+1}{-iz+1}$.

2.

3. Series de potencias

3.1 Series numéricas

Definición 3.1.1 (Serie). Sea $(G,+)$ un grupo, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ es la serie asociada a la sucesión indexada desde 0 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \subset G$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N} : s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \iff \sum_n a_n = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Cada término s_n de la serie es la n-ésima **suma parcial**.

Para poder hablar de la convergencia de una serie, necesitamos poder usar el concepto de límite de una sucesión, es decir, necesitamos alguna topología en G.

Definición 3.1.2 (Convergencia de una serie). Sea V un espacio vectorial normado y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una serie en V, s_n converge

$$\iff \exists s \in V : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \|s_n - s\| < \varepsilon \iff \exists s \in V : \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Observación 3.1.3. Cuando una serie converja, no debemos decir que $\sum_n a_n x^n < \infty$.

Teorema 3.1.1. *Sea $\sum_n a_n$ una serie convergente* $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

***Demostración*:** ■

Teorema 3.1.2. *Sea $\sum_n z_n$ una serie con $z_n \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\sum_n z_n \textit{ converge} \iff \sum_n \Re(z_n) \textit{ y } \sum_n \Im(z_n) \textit{ convergen.}$$

***Demostración*:** Evaluemos por casos según el valor de λ:

(1) Si $\lambda \in [0,1)$, definimos $r = \frac{\lambda+1}{2}$ tal que $\lambda < r < 1$. Tomamos $\varepsilon = r - \lambda$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \geq N_0 : \left|\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} - \lambda\right| < \varepsilon \implies \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < \varepsilon + \lambda = r \implies |z_{n+1}| < r\,|z_n|.$$

Por tanto, $|z_{N_0+1}| < r\,|z_{N_0}| \implies |z_{N_0+2}| < r^2\,|z_{N_0}| \implies \forall k \in \mathbb{N} : |z_{N_0+k}| < r^k\,|z_{N_0}|$.

$$\implies \sum_{n=N_0}^{\infty} |z_n| = \sum_{k=0}^{\infty} |z_{N_0+k}| < |z_{N_0}| \sum_{k=0}^{\infty} r^k \text{ que converge.}$$

Entonces, por el corolario del criterio de Cauchy, $\sum |z_n|$ converge, luego $\sum z_n$ converge absolutamente.

(2) Si $\lambda \in (1, \infty)$, definimos $r = \frac{\lambda+1}{2}$ tal que $1 < r < \lambda$. Tomamos $\varepsilon = \lambda - r$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \geq N_0 : \left| \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} - \lambda \right| < \varepsilon \implies \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > \lambda - \varepsilon = r \implies |z_{n+1}| > r\,|z_n|\,.$$

Por tanto, $|z_{N_0+1}| > r\,|z_{N_0}| \implies |z_{N_0+2}| > r^2\,|z_{N_0}| \implies \forall k \in \mathbb{N} : |z_{N_0+k}| > r^k\,|z_{N_0}|$. Entonces, $\lim_{n\to\infty} |z_n| \neq 0$, luego $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ y la serie $\sum z_n$ diverge.

(3) Si $\lambda = \infty$ entonces $\forall M > 0 : \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : |z_n| > M\,|z_{N_0}|$. Entonces, $|z_n| \nrightarrow 0$ y la serie $\sum z_n$ diverge.

$\blacksquare$

Ejemplos 3.1.1 (Si $\boldsymbol{\lambda = 1}$, el criterio no es concluyente).

$\boxed{1}$ Si $\sum a_n$ está dada por $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{1}{n}$. Entonces, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ y $\sum a_n$ diverge.

$\boxed{2}$ Si $\sum b_n$ está dada por $\forall n \in \mathbb{N} : b_n = \frac{1}{n^2}$. Entonces, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$ y $\sum b_n$ converge.

Teorema 3.1.3 (Criterio de la raíz). *Sea $\sum z_n$ una serie de términos complejos tal que $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lambda \in [0, \infty]$, entonces*

(1) $\lambda < 1 \implies \sum z_n$ *converge absolutamente.*

(2) $\lambda > 1 \implies \sum z_n$ *diverge.*

(3) *Si $\lambda = 1$, el criterio no es concluyente.*

3.2 Sucesiones y series de funciones

Notación: En este curso, escribiremos $\mathcal{F}(A) := \{f \colon A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\}$.

3.2.1 Sucesiones de funciones

Entonces, una sucesión de funciones en A es una función $F \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}(A)$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$: $F(n) =: f_n \colon A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Recordemos algunas nociones de convergencia de funciones:

Definición 3.2.1 (Convergencia puntual). Sean $\forall n \in \mathbb{N} : f, f_n \colon X \longrightarrow Y$ con (Y, d) un espacio métrico, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f

$$\iff \forall x \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d\left(f_n(x), f(x)\right) < \varepsilon$$
$$\iff \forall x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Definición 3.2.2 (Convergencia uniforme). Sean $\forall n \in \mathbb{N} : f, f_n \colon X \longrightarrow Y$ con (Y, d) un espacio métrico, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en X

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \forall x \in X : d\left(f_n(x), f(x)\right) < \varepsilon \iff f_n \rightrightarrows f$$
$$\iff \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left\{ d\left(f_n(x), f(x)\right) \right\} = 0.$$

Ejercicio 3.2.1. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $z_n = z^n$, comprueba que

(a) z_n converge puntualmente en $\mathbb{D}$ pero no uniformemente en $\mathbb{D}$.

(b) $\exists K \subset \mathbb{D}$ un compacto tal que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en K.

Teorema 3.2.1. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en A y $f \colon A \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$ en A*

$$\implies f \text{ es continua en } A.$$

Ejercicio 3.2.2. Estudia la convergencia localmente uniforme en $\mathbb{D}$ de la serie funcional $\sum_1^\infty \frac{z^n}{1-z^n}$.

***Solución*:** Sea $K \Subset \mathbb{D}$, entonces $\forall z \in K : \exists 0 < R < 1 : |z| \leq R < 1$. Por lo tanto, $|z^n| = |z|^n \leq R^n$ y $|1-z|^n \geq 1 - |z|^n \geq 1 - R^n > 0$.

$$\implies \left| \frac{z^n}{1-z^n} \right| \leq \frac{R^n}{1-R^n} =: M_n \text{ donde } \sum_1^\infty M_n = \frac{1}{1-R} \sum_1^\infty R^n \text{ converge.}$$

Por tanto, por el criterio M-test de Weistrass $\sum_1^\infty \frac{z^n}{1-z^n}$ converge uniformemente en K, es decir, la serie funcional converge local y uniformemente en $\mathbb{D}$.

3.3 Series de potencias

3.3.1 Convergencia de las series de potencias

Definición 3.3.1 (Serie formal de potencias). Sea A un anillo, f es la serie formal de potencias con coeficientes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \subset A$

$$\iff \forall x \in X : f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_n a_n x^n \text{ como serie.}$$

El conjunto de todas las series formales de potencias con coeficientes en A se denota $A[[x]]$.

Observación 3.3.2. Hay una correspondencia biyectiva entre $A[[x]]$ y $A^{\mathbb{N}}$.

Por tanto, para K cuerpo, $K[[x]]$ es un K-espacio vectorial.

Si $\forall z \in A \subset \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge a $g\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$, decimos que f representa a g en A.

Ejemplo 3.3.1 (dos series distintas pueden representar a la misma función). Consideramos $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n$. Ambas representan a la función $\frac{1}{1-z}$ en $\mathbb{D}$ y en $|z+1| < 2$ respectivamente ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{1}{1-z}.$$

Teorema 3.3.1 (de Abel). *Sea $f(x) = \sum_n a_n x^n \in A[[x]]$ una serie formal de potencias con coeficientes en $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) tal que $f(x_0)$ converge*

$$\Longrightarrow \forall x : |x| < |x_0| : f(x) \text{ converge uniformemente.}$$

***Demostración*:** Como $\sum_n a_n x_0$ converge, se tiene que $a_n x_0^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y, por tanto, $\exists C > 0 : \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : |a_n x_0^n| \leq C$. Sea $r \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) tal que $|x| \leq r < |x_0|$

$$\Longrightarrow |a_n x^n| = |a_n|\,|x|^n \leq |a_n|\, r^n \frac{|x_0|^n}{|x|^n} \leq C\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n =: M_n.$$

Aplicando el criterio de Weierstrass, tenemos que $\sum_n a_n x^n$ converge uniformemente en cada disco cerrado $\overline{D}(0,r)$. ∎

Teorema 3.3.2 (de Cauchy-Hadamard). *Sea $f(z) = \sum_n a_n(z-z_0)^n \in \mathbb{C}[[x]]$ una serie formal de potencias con coeficientes en $\mathbb{C}$ tal que $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0,\infty]$, entonces*

1. *$f(z)$ converge absolutamente en $D(z_0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$.*

2. *$f(z)$ converge uniformemente en cada disco cerrado $\overline{D}(z_0,r)$ con $0 \leq r < R$.*

3. *$f(z)$ diverge en $\overline{D}(z_0,R)^c$.*

4. *El teorema no dice nada acerca de la convergencia en los puntos tales que $|z-z_0| = R$.*

Proposición 3.3.3 (Fórmula alternativa de Hadamard). *Sea $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ una serie de potencias tal que $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : a_n \neq 0$ y $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ o es ∞*

$$\Longrightarrow R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Ejemplos 3.3.2 (de aplicación de la fórmula alternativa de Hadamard).

$\boxed{1}$ Sea $\displaystyle\sum_n z^n = \begin{cases} \frac{1}{1-z} & |z| < 1 \\ \text{diverge} & |z| > 1 \end{cases}$. Entonces, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \implies R = 1$.

$\boxed{2}$ Sea $\displaystyle\sum_n \frac{z^n}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1 \implies a_n = \frac{1}{n^\alpha} \wedge z_0 = 0$. Entonces, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \implies R = 1$.

En $|z| = 1 \implies \left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha} =: M_n$ donde $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Por tanto, $\sum_n \frac{z^n}{n^\alpha}$ también converge si $|z| = 1$.

$\boxed{3}$ $\sum_n z^{n!} = \sum_k a_k z^k$ donde $a_k = \begin{cases} 1 & k = n! \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \implies 0 \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$, existe una subsucesión $(a_{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n!}|} = 1 \implies R = 1$.

Teorema 3.3.4 (Criterio de Abel-Dirichlet). *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tales que*

(i) *Las sumas parciales $\forall N \in \mathbb{N} : A_N = \sum_{n=0}^N a_n$ están acotadas.*

(ii) *$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.*

$$\implies \sum_n a_n b_n \text{ converge.}$$

Corolario 3.3.5 (Criterio de Leibniz). *Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que $b_n \searrow 0$*

$$\implies \sum_n (-1)^n b_n \text{ converge.}$$

Demostración: Basta tomar $a_n = (-1)^n$ en el criterio de Abel-Dirichlet y $A_N = \begin{cases} 1 & N \text{ impar} \\ 0 & N \text{ par} \end{cases}$. ■

3.3.2 Diferenciación de series de potencias

Teorema 3.3.6 (Derivada de una serie de potencias). *Sea $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R \in [0, \infty]$, entonces*

(1) *$\forall z \in D(z_0, R) : \sum_n a_n(z - z_0)^n$ converge a $f(z)$ con $f \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$.*

(2) *$\forall z \in D(z_0, R) : \sum_n (n + 1)a_{n+1}(z - z_0)^n$ converge a $f'(z)$.*

(3) *$\exists F$ dada por $F(z) = \sum_n \frac{a_n}{a_{n+1}}(z - z_0)^{n+1} : \forall z \in D(z_0, R) : F'(z)$ converge a $f(z)$.*

Corolario 3.3.7. *Sea $f \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$ con $R \in [0, \infty]$, entonces*

1. *f es indefinidamente $\mathbb{C}$-diferenciable tal que* $\forall z \in D(z_0, R) : \sum_n n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$ *converge a* $f^{(k)}(z)$.

2. *Para cada* $k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(z_0) = k!a_k \implies a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

4. Fórmula integral de Cauchy y sus aplicaciones

5. Cálculo de residuos

6. Transformaciones conformes

H. Hojas de ejercicios

H.1 Números y funciones complejas

H.1.1 Operaciones algebraicas y propiedades básicas

$\boxed{1.}$ Realice las operaciones con números complejos indicadas abajo, calculando explícitamente las partes real e imaginaria del resultado:

(a) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{1+i}$, (b) $\left(i-\sqrt{2}\right)^2$, (c) $\dfrac{1}{(3+2i)^2}$, (d) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$.

Solución:

(a) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{1+i}=-i+\dfrac{1-i}{1+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i.$ (b) $-1-2\sqrt{2}i+2=1-2\sqrt{2}i.$

$\boxed{2.}$ Calcule los valores

(a) $\left|(2-i)(1+i)^4\right|$, (b) $\left|\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4-3i}\right|$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2024} i^k$.

Solución:

(a) $\left|(2-i)(1+i)^4\right|=|2-i|\left|(1+i)^4\right|=\sqrt{2^2+1^2}\cdot\left(\sqrt{1+1}\right)^4=4\sqrt{5}.$

(b) $\left|\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4-3i}\right|=\dfrac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{2}{5}.$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2024} i^k=\sum_{k=1}^{506} i^{4(k-1)+1}+i^{4(k-1)+2}+i^{4(k-1)+3}+i^{4(k-1)}=\sum_{k=1}^{506} i+-1+-i+1=0.$

$\boxed{3.}$ Compruebe que $|1+z\overline{w}|^2+|z-w|^2=\left(1+|z|^2\right)\left(1+|w|^2\right)$, para todo $z,w\in\mathbb{C}$.

Solución: Calculamos los sumandos por separado y luego cancelamos sumando:

$$\begin{aligned}|1+z\overline{w}|^2&=(1+z\overline{w})(1+\overline{z}w)=1+z\overline{w}+\overline{z}w+|z|^2|w|^2\\ |z-w|^2&=(z-w)(\overline{z}-\overline{w})=z\overline{z}-z\overline{w}-\overline{z}w+w\overline{w}=|z|^2-z\overline{w}-\overline{z}w+|w|^2\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ |1+z\overline{w}|^2+|z-w|^2=1+|z|^2|w|^2+|z|^2+|w|^2=\left(1+|z|^2\right)\left(1+|w|^2\right).$$

$\boxed{4.}$ Demuestre la **identidad de Lagrange**: si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son números complejos, entonces

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right) - \left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 = \sum_{1\le i<j\le n} |z_i w_j - z_j w_i|^2 .$$

¿Qué consecuencia tiene esta identidad?

Indicación: Pruebe por inducción que $\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} \Re(z_i\overline{z_j})$.

***Solución*:** Sigamos la indicación.

- Para el caso $n=1$, tenemos $|z_1|^2 = |z_1|^2 + 0$.

- Supongamos que la fórmula es cierta para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, entonces

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n+1} z_j\right|^2 &= \left|\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) + z_{n+1}\right|^2 = \left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right|^2 + |z_{n+1}|^2 + 2\Re\left(\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right)\overline{z_{n+1}}\right)\\ &\overset{\substack{\text{HI}\\ \downarrow}}{=} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} \Re(z_i\overline{z_j}) + |z_{n+1}|^2 + 2\sum_{j=1}^{n} \Re(z_j\overline{z_{n+1}})\\ &= \sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n+1} \Re(z_i\overline{z_j}).\end{aligned}$$

Luego, para $n \in \mathbb{N}$, hemos probado que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} \Re(z_i\overline{z_j}). \tag{H.1}$$

Demostremos ahora la identidad de Lagrange usando esta identidad auxiliar.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |z_i|^2|w_j|^2\\ &= \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2|w_j|^2 + \sum_{1\le i<j\le n} (|z_i|^2|w_j|^2 + |z_j|^2|w_i|^2).\end{aligned}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 \overset{\substack{\text{(H.1)}\\ \downarrow}}{=} \sum_{j=1}^{n} |z_j w_j|^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} \Re(z_i w_i \overline{z_j w_j}) = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2|w_j|^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} \Re(z_i\overline{z_j} w_i\overline{w_j}).$$

Por tanto, la diferencia queda:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right) - \left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 = \sum_{1\le i<j\le n} (|z_i|^2|w_j|^2 + |z_j|^2|w_i|^2 - 2\Re(z_i\overline{z_j} w_i\overline{w_j})).$$

Ahora bien, como se puede probar que

$$\begin{aligned}|z_iw_j - z_jw_i|^2 &= |z_iw_j|^2 + |z_jw_i|^2 - 2\Re(z_iw_j\overline{z_jw_i})\\ &= |z_i|^2|w_j|^2 + |z_j|^2|w_i|^2 - 2\Re(z_i\overline{z_j}w_i\overline{w_j}),\end{aligned}$$

finalmente se obtiene $\displaystyle\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right) - \left|\sum_{j=1}^{n}z_jw_j\right|^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n}|z_iw_j - z_jw_i|^2.$ ■

Observación H.1.1. Esta identidad implica la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left|\sum_{j=1}^{n}z_jw_j\right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right)$$

con igualdad si y solo si los vectores complejos son linealmente dependientes.

$\boxed{5.}$ Demuestre las siguientes afirmaciones:

(a) Si $|a| < 1$, entonces $|z| < 1$ es equivalente a $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1$.

(b) Si $a, b \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}\setminus\left\{-\overline{a/b}\right\}$ con $|z| = 1$, entonces se cumple $\left|\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right| = 1$.

***Solución*:**

(a) Sea $a \in \mathbb{C}$ tal que $|a| < 1$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1 \iff |z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2 &\iff (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) < (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z})\\ &\iff z\overline{z} - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a} < 1 - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a}\\ &\iff z\overline{z}\left(1-|a|^2\right) < 1 - |a|^2 \iff |z|^2 < 1 \iff |z| < 1.\end{aligned}$$

(b) Sea $a, b \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}\setminus\left\{-\overline{a/b}\right\}$ tal que $|z| = 1$, entonces

$$\left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|^2 = \frac{|az+b|^2}{|\overline{b}z+\overline{a}|^2} = \frac{|az|^2 + |b|^2 + 2\Re\left(az\overline{b}\right)}{|\overline{b}z|^2 + |\overline{a}|^2 + 2\Re\left(\overline{b}za\right)} = \frac{|a|^2 + |b|^2 + 2\Re\left(az\overline{b}\right)}{|b|^2 + |a|^2 + 2\Re\left(\overline{b}za\right)} = 1.$$

$\boxed{6.}$ (a) Demuestre que si $|a| < 1$ y $|z| < 1$, entonces $1 - \overline{a}z \neq 0$ y observe su relevancia en el ejercicio anterior.

(b) Demuestre que las raíces de la ecuación cuadrática $z^2 + z + 3 = 0$ no pueden estar en el disco unidad cerrado $D = \{z : |z| \leq 1\}$, sin calcular dichas soluciones.

***Solución*:**

(a) Supongamos por contradicción que $1 = \overline{a}z$ y $|a|, |z| < 1$, entonces

$$1 = \overline{a}z \implies a\overline{z} = \overline{a}za\overline{z} = |a|^2 |z|^2 < 1 \implies 1 < 1 \longrightarrow\!\longleftarrow .$$

En el ejercicio anterior, si $1 - \overline{a}z = 0$, entonces la expresión $\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ no está definida y no podríamos tampoco multiplicar a ambos lados de la desigualdad por $|1 - \overline{a}z|$.

(b) Sea $z \in \mathbb{C}$ una raíz de $z^2 + z + 3$. Supongamos por contradicción que $|z| \leq 1$, entonces $|z + 1| \leq |z| + 1 \leq 2$, luego $|z|\,|z + 1| \leq 2$.

Sin embargo, como z es raíz de la ecuación, entonces $z^2 + z + 3 = 0$

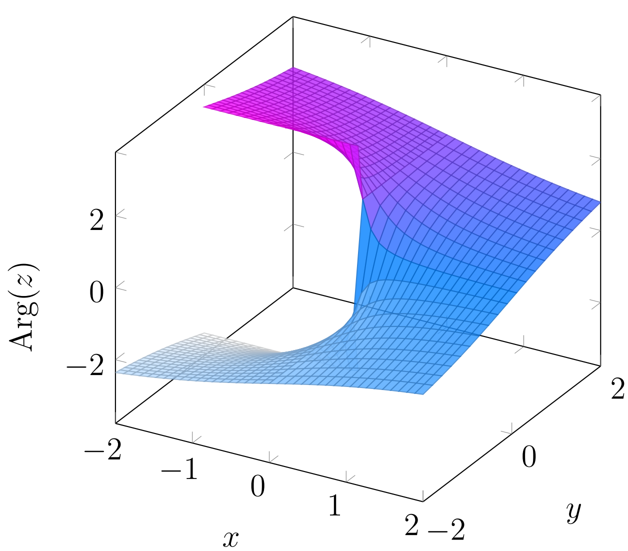
$$\implies z^2 + z = -3 \implies \left|z^2 + z\right| = 3 \implies |z|\,|z + 1| = 3, \text{ pero } |z|\,|z + 1| \leq 2 \longrightarrow\!\longleftarrow .$$

H.1.2 Representación polar. Potencias y raíces complejas

$\boxed{7.}$ Sea $z = x + yi \neq 0$ un número complejo. Compruebe que su argumento principal $\operatorname{Arg} z$, elegido en el intervalo $(-\pi, \pi]$, puede expresarse mediante la siguiente fórmula:

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{si } x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{si } x < 0 \text{ y } y \geq 0, \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & \text{si } x < 0 \text{ y } y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0. \end{cases}$$

***Solución*:** Se trata de dividir el plano complejo ($\mathbb{R}^2$) en cachos. Basta dibujar la gráfica de la función y se resuelve por contemplación:



$\boxed{8.}$ Utilice las representaciones polares de $1+i$ y $1+i\sqrt{3}$ para calcular el valor de $\cos\frac{5\pi}{12}$.

***Solución*:** Calculamos las expresiones polares de $1+i$ y $1+i\sqrt{3}$:

– Para $1+i$, tenemos que $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

– Para $1+i\sqrt{3}$, tenemos que $\left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+3} = 2$ y $\operatorname{Arg}\left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, luego $1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Por tanto, $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$\boxed{9.}$ Calcule los valores de (a) $(1+i)^{14}$, (b) $(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})^{20}$.

***Solución*:**

(a) $(1+i)^{14}=\left(\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right)^{14}=2^7e^{i\frac{7\pi}{2}}=128e^{i\frac{3\pi}{2}}=128\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)=-128i.$

(b) $\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^{20}=e^{i\frac{\pi}{12}\cdot 20}=e^{i\frac{5\pi}{3}}=\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

$\boxed{10.}$ Calcule los valores de

(a) $\left(\frac{-1+i}{1-i}\right)^{401}$,

(b) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^{2023}+\left(\frac{1}{1+i}\right)^{2023}$,

(c) $(1+i)^n+(1-i)^n$, $n\in\mathbb{N}$.

$\boxed{11.}$ Demuestre que:

(a) $\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3 x$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

(b) Para cualquier $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$ tal que $\cos(n\theta)\neq 0$, se cumple que

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}.$$

***Solución*:**

(a) Por las fórmulas del seno y coseno del ángulo doble y la fórmula del seno de la suma,

$$\begin{aligned}\sin(3x)&=\sin(x+2x)=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x\\&=\sin x(1-2\sin^2 x)+2\sin x\left(1-\sin^2 x\right)\\&=\sin x-2\sin^3 x+2\sin x-2\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x.\end{aligned}$$

(b) Por la fórmula de De Moivre, tenemos que

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{(\cos\theta-i\sin\theta)^n}=\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos n\theta-i\sin n\theta}=\frac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}.$$

$\boxed{12.}$ Calcule todos los valores de

(a) $\sqrt[4]{-16}$, (b) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$, (c) $\sqrt[4]{1-i}$, (d) $\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{1/3}$.

$\boxed{13.}$ Demuestre que si ζ es una solución de $z^n = \theta$ (con $\theta \in \mathbb{C}$ fijo), entonces todas las soluciones son $\zeta\omega_0, \zeta\omega_1, \zeta\omega_2, \ldots, \zeta\omega_{n-1}$, donde $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ son las raíces n-ésimas de la unidad. Después encuentre razonadamente las soluciones de $z^6 - 8 = 0$.

$\boxed{14.}$ En este ejercicio, consideraremos sólo el valor principal de la raíz cuadrada, definido como

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

cuando $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ con $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Claramente, $(\sqrt{z})^2 = z$.

(a) Demuestre que las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$, con $a \neq 0$, son

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(b) Encuentre las soluciones de la ecuación $z^2 + (1+i)z + 5i = 0$.

$\boxed{15.}$ Resuelva (en $\mathbb{C}$) la ecuación $z = z^{n-1}$, donde $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{16.}$ Demuestre las siguientes afirmaciones:

(a) Si $z \neq 1$, entonces $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

(b) Si $\omega \neq 1$ es una raíz n-ésima de la unidad, entonces

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0, \quad 1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1} = \frac{n}{\omega - 1}.$$

(c) Si $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$, entonces

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\right),$$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Solución:

(a) Como $z \neq 1$, $1 - z \neq 0$, la afirmación es equivalente a

$$\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^n\right)(1-z) = 1 + z + \cdots + z^n - z - z^2 - \cdots - z^n - z^{n+1} = 1 - z^{n+1}.$$

(b) Como $\omega \neq 1$ es una raíz n-ésima de la unidad, entonces $\omega^n = 1$, luego $\frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$ y, por el apartado (a), $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$.

Por otro lado, al multiplicar por $\omega - 1$ en $1 + 2\omega + \cdots + n\omega^{n-1}$

$$\left(1 + 2\omega + \cdots + n\omega^{n-1}\right)(\omega - 1) = \omega + 2\omega^2 + \cdots + n\omega^n - \omega - 2\omega^2 - \cdots - n\omega^{n-1} = n\omega^n = n.$$

(c) Si $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$, entonces $\frac{\theta}{2} \neq k\pi \iff \theta \neq 2k\pi$.

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \sum_{k=0}^{n} \Re\left(e^{ik\theta}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\theta}\right)^k + \sum_{k=0}^{n}\left(e^{-i\theta}\right)^k\right]$$

$$\overset{\overset{(a)}{\downarrow}}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} + \frac{1 - e^{-i(n+1)\theta}}{1 - e^{-i\theta}}\right] =$$

H.1.3 Conjuntos en el plano y los números complejos

$\boxed{17.}$ ¿Cuándo son colineales tres puntos z_1, z_2, z_3, distintos dos a dos? Encuentre una condición analítica sencilla.

***Solución*:** Para ser “colineales” deben pasar por la misma recta, es decir, debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $z_3 = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$

$$\iff z_3 - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) \iff \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R} \iff \Im\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = 0.$$

$\boxed{18.}$ Este ejercicio recoge algunas relaciones entre los números complejos y las rectas en el plano.

(a) Compruebe que la ecuación $\Re(az + b) = 0$, con $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$, define una recta en el plano y que, recíprocamente, cada recta viene descrita por una ecuación de este tipo.

(b) Encuentre los números a, b para que la recta pase por dos puntos dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(c) Demuestre que las rectas determinadas por las ecuaciones $\Re(az+b) = 0$ y $\Re(cz+d) = 0$, respectivamente, son perpendiculares si y sólo si $\Re(a\overline{c}) = 0$.

(d) Demuestre que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados z_1 y z_2, puede escribirse en la forma

$$\Im\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right) = 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{vmatrix} z & z_1 & 1 \\ z_2 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Solución:

(a) .

(b) .

(c) .

(d) Sea $\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} : \exists \lambda \in \mathbb{R} : z = z_1 + \lambda z_2\} = \left\{z : \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R}\right\}$, entonces

$$z \in \mathcal{L} \iff \Im\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right) = 0.$$

Ahora bien, si operamos en la segunda expresión, obtenemos

$$\begin{vmatrix} z & z_1 & 1 \\ z_2 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \underbrace{(z\overline{z_1} - z_1\overline{z})}_{2i\Im(z\overline{z_1})} + \underbrace{(z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1})}_{2i\Im(z_1\overline{z_2})} + \underbrace{(z_2\overline{z} - z\overline{z_2})}_{2i\Im(z_2\overline{z})} = 0$$

$$\iff 2i\Im\left(z\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z}\right) = 0$$

$$\iff z\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z} \in \mathbb{R} \iff \{z, z_1, z_2\} \text{ son colineales.}$$

De $\mathcal{L}$ tenemos que $z - z_1 = \lambda\,(z_2 - z_1)$, luego $(z - z_1)\,(\overline{z_2} - \overline{z_1}) = \lambda\,|z_2 - z_1|^2$

$$\iff z\overline{z_2} - z\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} \pm z_2\overline{z} \in \mathbb{R} \iff -z\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z} \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{19.}$ Determine las ecuaciones complejas:

(a) de la parábola con foco i y directriz $\Im z = -1$.

(b) de la elipse con focos ± 1 que pasa por i.

(c) de la hipérbola con focos ± 1 que pasa por $1 + i$.

Solución:

(a) La distancia a la directriz debe coincidir con la distancia al foco: $\Im z + 1 = |z - i|$.

(b) La suma de las distancias a los focos debe ser constante: $|z - 1| + |z + 1| = 2\sqrt{2}$.

(c) La diferencia de las distancias a los focos debe ser constante:

$$||z - 1| - |z + 1|| = ||1 + i - 1| - |1 + i + 1|| = \sqrt{5} - 1.$$

$\boxed{20.}$ Resuelva las siguientes ecuaciones (donde $z \in \mathbb{C}$):

(a) $(z + 1)^4 + i = 0$, (b) $\Re(z^2 + 5) = 0$, (c) $\Re(z + 5) = \Im(z - i)$.

***Solución*:**

(a) $z = \sqrt[4]{-i} - 1 = \sqrt[4]{e^{-i\pi/2}} - 1 = \sqrt[4]{e^{-i\left(\pi/2+2\pi k\right)}} - 1 = e^{-i\pi\left(\frac{1+4k}{8}\right)} - 1,\ k = 0, 1, 2, 3.$

(b) $\Re(z^2+5) = 0 \iff \Re(z^2) = -5 \iff \frac{z^2+\overline{z}^2}{2} = -5 \iff \Im(z)^2 - \Re(z)^2 = 5$ (hipérbola).

(c) $\Re(z+5) = \Im(z-i) \iff \Re(z) + 5 = \Im(z) - 1 \iff \Im(z) - \Re(z) = 6$ (recta).

$\boxed{21.}$ Describa el lugar geométrico del plano complejo determinado por las siguientes relaciones:

(a) $|z-2| - |z+2| > 3$,

(b) $\Re z + \Im z \geq 1$,

(c) * $|2z| \geq |1+z^2|$,

(d) $\Im\left(\frac{1}{z+i}\right) = 0$.

Sugerencia para el apartado (c): Después de elevar los módulos al cuadrado, factorizar la diferencia de ambos lados, simplificar y analizar el significado de las conclusiones obtenidas.

***Solución*:** Lo más fácil va a ser escribir $z = x+yi$ y trabajar en $\mathbb{R}^2$ con lo que ya sabemos.

(a) Se trata de una sección hiperbólica del plano, concretamente la región exterior abierta con parte real negativa de una hipérbola con focos en $(0,2)$ y $(-2,0)$.

(b) Se trata del semiplano abierto inferior delimitado por la recta $y = 1-x$.

(c) $|2z|^2 > |1+z^2|^2 \iff 4\,|z|^2 > (1+z^2)\,(1+\overline{z}^2) = 1 + |z|^4 + z^2 + \overline{z}^2.$

$$\text{Como } 2\Re\left(z^2\right) = z^2 + \overline{z}^2, \text{ tenemos } 0 > -4\,|z|^2 + 1 + |z|^4 + 2\Re\left(z^2\right).$$

$$\iff 0 > \left(1 - |z|^2\right)^2 + 2\left(-\,|z|^2 + \Re\left(z^2\right)\right) \iff 4\Im^2 z > \left(1-\overline{z}^2\right)^2.$$

Considerando $z = x+yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\left|1 - \left(x^2+y^2\right)\right| < 2\,|y| \iff -2\,|y| < 1 - \left(x^2+y^2\right) < 2\,|y|.$$

$$y > 0 \implies \begin{cases} -2y < 1-(x^2+y^2) \implies x^2+y^2-2y < 1 \iff x^2+(y-1)^2 < 2, \\ 1-(x^2+y^2) < 2y \implies x^2+(y+1)^2 > 2. \end{cases}$$

$\boxed{22.}$ Dibuje el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

(a) $|z^2-4z+4| = 4$,

(b) $|z^2-2z-1| = 2$,

buscando una interpretación geométrica. (La curva del segundo apartado se llama lemniscata.)

***Solución*:**

(a) Completando cuadrados, $|z^2 - 4z + 4| = 4 \iff \left|(z-2)^2\right| = 4 \iff |z-2| = 2$, que es una circunferencia de radio 2 y centro en 2.

(b) Aplicando la fórmula cuadrática, $\left|z - \left(1+\sqrt{2}\right)\right| \left|z - \left(1-\sqrt{2}\right)\right| = 2$.

En el apartado (a), el polinomio cuadrático tiene una raíz doble en 2, por lo que genera una circunferencia. En el apartado (b), el polinomio cuadrático tiene dos raíces, por lo que genera una curva más compleja.

$\boxed{23.}$ Halle razonadamente el supremo y el ínfimo del siguiente conjunto de números reales (y explique, en ambos casos, si se alcanzan el máximo y/o el mínimo):

(a) $\{|z^{12} - a| : z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$, donde $a \in \mathbb{C}$ es un número fijo.

(b) $\left\{\Re(iz^4 + 1) : |z| \leq \sqrt{2}\right\}$.

***Solución*:**

(a) Como $|z| \leq 1$, tenemos que $|z^{12}| \leq 1$, luego $|z^{12} - a| \leq 1 + |a|$, por lo que el supremo es $1 + |a|$ y se alcanza en $z = -{}^{a}\!/\!_{|a|}$. El ínfimo es $1 - |a|$ y se alcanza en $z = {}^{a}\!/\!_{|a|}$.

(b) Tenemos que $\Re(iz^4 + 1) = \Re(iz^4) + 1 = 1 - \Im(z^4)$. Como $|z| \leq \sqrt{2}$, tenemos que $|z^4| \leq 4$, luego $-4 \leq \Im(z^4) \leq 4$. Entonces, el ínfimo es -3 (que se alcanza) y el supremo es 5 (que también se alcanza).

$\boxed{24.}$ * Demuestre que la condición necesaria y suficiente para que $\{z_1, z_2, z_3\}$ sean los vértices de un triángulo equilátero es que

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

H.1.4 Topología del plano complejo

$\boxed{25.}$ Demuestre que la sucesión $(z^n)_{n=1}^{\infty}$ no tiene límite para ningún número $z \neq 1$ con $|z| = 1$.

***Solución*:** Supongamos que $\lim_{n\to\infty} z^n = L$ con $|z| = 1$ y $z \neq 1$. Entonces,

$$z^{n+1} = z^n \cdot z \xrightarrow{n\to\infty} L \cdot z \implies L = L \cdot z \implies z = 1$$

lo que es una contradicción $\longrightarrow\!\longleftarrow$.

$\boxed{26.}$ Decida razonadamente cuál de las siguientes sucesiones tienen límite (finito o infinito):

$$z_n = \left(\frac{1-2i}{3}\right)^n, \quad w_n = n^{5/4}\sin\frac{1}{n} + i\sin n, \quad \xi_n = \left(\frac{4-3i}{5}\right)^n + \frac{1}{(3-i)^n}.$$

Solución:

(a) Basta ver que $\left|\frac{1-2i}{3}\right| = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$, por lo que $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \infty$ ya que $\left|n^{5/4}\sin\frac{1}{n} + i\sin n\right| \geq n^{5/4}\left|\sin\frac{1}{n}\right| \geq n^{1/4} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

(c) $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene límite porque $\frac{1}{(3-i)^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y $\left|\frac{4-3i}{5}\right| = 1$ pero $\frac{1-3i}{5} \neq 1$ (ejercicio $\boxed{25.}$).

$\boxed{27.}$ Sea $\mathbb{P} : \widehat{\mathbb{C}} \to S^2$ la proyección estereográfica, que asocia cada punto $z \in \mathbb{C}$ con el único punto Q de la esfera unidad S^2 (conocida también como esfera de Riemann) tal que z, Q y el polo norte $N = (0,0,1)$ están alineados.

(a) Halle las imágenes por $\mathbb{P}$ de los conjuntos definidos por las siguientes desigualdades:

i. $\Im z = 0$, ii. $\Re z \geq 1$, iii. $|z| \leq 1$, iv. $|z| \geq 2$.

(b) Demuestre que la transformación inversa $\mathbb{P}^{-1}$ transforma las circunferencias sobre la esfera en circunferencias o rectas del plano.

(c) ¿Cuáles son las circunferencias sobre la esfera que se transforman en rectas?

Solución:

(a)

(b) Consideramos una circunferencia en $\mathbb{S}^2$:

$$\left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{S}^2 \cap \pi\right\} = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{S}^2 : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\right\}.$$

Sea $z = x + yi \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{P}(z) = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{S}^2$, entonces

$$a\frac{2x}{1+(x^2+y^2)} + b\frac{2y}{1+(x^2+y^2)} + c\frac{1-(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)} = d.$$

$$\iff (c-d)\left(x^2+y^2\right) + 2ax + 2by = c + d.$$

Observamos que, si $c = d$, tenemos $2ax + 2by = 2c$, que es la ecuación de una recta en el plano. En este caso, $(x_1,x_2,x_3) \in \pi_{c=d}$ (el plano que contiene al polo norte $N = (0,0,1)$).

Si $c \neq d$, entonces completando cuadrados tenemos

$$\left(x + \frac{2a}{c-d}\right)^2 + \left(y + \frac{2b}{c-d}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-d^2}{(c-d)^2}(= r^2).$$

que es la ecuación de una circunferencia en el plano (el lado derecho de la ecuación es positivo porque suponemos que hay intersección no vacía de la esfera unidad con el plano π).

$\boxed{28.}$ En el plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definimos la métrica cordal como sigue: dados dos puntos $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$, sean $A = P(z)$ y $B = P(w)$ los puntos correspondientes en la esfera de Riemann; definamos entonces la distancia $\hat{d}(z,w)$ como la distancia euclídea entre A y B en $\mathbb{R}^3$. Se pide demostrar lo siguiente.

(a) $\hat{d}(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}$, para $z, w \in \mathbb{C}$.

(b) $\hat{d}(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$, para $z \in \mathbb{C}$.

(c) Aunque la distancia $\hat{d}$ define la misma topología en $\mathbb{C}$ que la métrica habitual, $(\mathbb{C}, \hat{d}|_{\mathbb{C}})$ no es un espacio métrico completo. (Se pide dar un ejemplo de una sucesión de Cauchy explícita que no sea convergente en dicha métrica.)

***Solución*:** Denotamos $\mathbb{P}(z) = (z_1, z_2, z_3)$ y $\mathbb{P}(w) = (w_1, w_2, w_3)$, entonces

(a) $\left(\hat{d}(z,w)\right)^2 = \|\mathbb{P}(z) - \mathbb{P}(w)\|^2$ por definición.

$$\Longrightarrow \left(\hat{d}(z,w)\right)^2 = (z_1 - w_1)^2 + (z_2 - w_2)^2 + (z_3 - w_3)^2 = \cdots$$

H.1.5 Funciones de una variable compleja: límites y continuidad

$\boxed{29.}$ Halle los puntos de continuidad de las siguientes funciones:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^4-1}{z-i} & \text{si } z \neq i, \\ 4i & \text{si } z = i, \end{cases} \qquad g(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq 1, \\ \frac{1}{|z|^2} & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

***Solución*:**

(a) Tenemos que $\dfrac{z^4-1}{z-i} = \dfrac{(z^2+1)(z^2-1)}{z-i} = \dfrac{\cancel{(z-i)}(z+i)(z^2-1)}{\cancel{z-i}} = (z+i)\left(z^2-1\right).$
Luego f es una función polinómica (luego continua) excepto en $z = i$, donde

$$\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i}(z+i)\left(z^2-1\right) = -4i \neq 4i = f(i).$$

Por tanto, f es continua en $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ y no es continua en i.

(b) .

$\boxed{30.}$ Si $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ y $Q(z) = b_m z^m + \cdots + b_0$ con $a_n \neq 0 \neq b_m$, demuestre que entonces

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m, \\ \infty & \text{si } n > m. \end{cases}$$

$\boxed{31.}$ Demuestre que toda función de la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$, definida de forma adecuada en el infinito, es continua en el plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

***Solución*:** Podemos extender T a $\widehat{\mathbb{C}}$ de la siguiente forma:

$$\forall z \in \widehat{\mathbb{C}} : T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \neq \frac{-d}{c}, \infty \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty, \\ \infty & \text{si } z = \frac{-d}{c}. \end{cases} = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \neq \frac{-d}{c} \\ \infty & \text{si } z = \frac{-d}{c}. \end{cases}$$

Ahora bien, esta función es continua porque

$$\lim_{z\to\frac{-d}{c}} T(z) = \lim_{z\to\frac{-d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty.$$

Por tanto, toda transformación de Möbius es continua en $\widehat{\mathbb{C}}$.

$\boxed{32.}$ Sea $A \neq \varnothing$ un conjunto arbitrario en el plano complejo. Para un punto $z \in \mathbb{C}$, definimos

$$d(z, A) = \inf\{|z - a| : a \in A\}.$$

Demuestre que la función d es uniformemente continua en $\mathbb{C}$. De hecho, puede verse que d satisface una propiedad más fuerte que la continuidad uniforme, bien conocida en análisis. ¿Cuál?

***Solución*:** Se tiene que $d(z, A)$ es la distancia (euclídea) entre un punto z y un conjunto A en $\mathbb{R}^2$, veamos que $D_A \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\forall z \in \mathbb{C} : D_A(z) = d(z, A)$ es uniformemente continua. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} |D_A(z) - D_A(w)| = |d(z, A) - d(w, A)| &= \left| \inf_{a\in A} |z - a| - \inf_{a\in A} |w - a| \right| \\ &\leq \sup_{a\in A} ||z - a| - |w - a|| \underset{\substack{\uparrow \\ \triangledown}}{\leq} |z - w|\,. \end{aligned}$$

Por tanto, D_A es lLipschitz con constante 1, luego además es uniformemente continua.

H.2 Funciones holomorfas

H.2.1 Funciones holomorfas. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

$\boxed{33.}$ ¿En qué conjuntos abiertos del plano son holomorfas las siguientes funciones? ¿Cuál es su derivada en dichos puntos?

(a) $\dfrac{1}{(z-1)(z^2+4)}$ (b) $\dfrac{1}{z+{}^1\!/_z}$ (c) z^{n-2}, $n \in \mathbb{N}$

Solución:

(a) Los únicos puntos conflictivos son los z en los que el denominador se anula. Estos son $z = 1$ y $z = \pm 2i$. Por tanto, la función es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1, 2i, -2i\}$. En estos puntos, la derivada es

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{(z-1)(z^2+4)}\right) = -\frac{(z^2+4)+2z(z-1)}{((z-1)(z^2+4))^2} = -\frac{3z^2-2z+4}{(z^2+4)^2(z-1)^2}.$$

(b) Tenemos que $z + {}^1\!/_z = \frac{z^2+1}{z}$, luego $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ cuyo denominador se anula cuando $z = \pm i$. Por tanto, la función es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y su derivada es

$$f'(z) = \frac{1(z^2+1) - z(2z)}{(z^2+1)^2} = \frac{1-z^2}{(z^2+1)^2}.$$

(c) Si $n - 2 < 0$, tenemos que $f(z) = z^{-1}$ que es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y su derivada es $f'(z) = -z^{-2}$. Si $n - 2 \geq 0$, la función es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y su derivada es $f'(z) = (n-2)z^{n-3}$.

$\boxed{34.}$ ¿En qué puntos $z = x + iy$ del plano son $\mathbb{C}$-diferenciables las siguientes funciones?

(a) $f(z) = x^2 - y^2 + ixy$ (b) $f(z) = e^x \cos y - ie^x \sin y$ (c) $f(z) = z\Re z$

Solución:

(a) La función asociada $f(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$ es $\mathbb{R}$-diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, por lo que basta comprobar dónde se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = x \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -y.$$

Por tanto, la función es $\mathbb{C}$-diferenciable solo en $z = 0$.

(b) De nuevo, $f(x,y) = (e^x \cos y, -e^x \sin y)$ es $\mathbb{R}$-diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \cos y \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y.$$

Por tanto, $\cos y = 0$ y $\sin y = 0$ lo cual es imposible, por lo que la función no es $\mathbb{C}$-diferenciable en ningún punto.

(c) La función asociada $f(x,y) = (x^2, xy)$ es $\mathbb{R}$-diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = x \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} = -y.$$

Por tanto, la función solo es $\mathbb{C}$-diferenciable en $z = 0$.

$\boxed{35.}$ Escriba las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

Sugerencia: Use la versión de la regla de la cadena conocida del cálculo de varias variables.

***Solución*:** Para una función $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, usando la regla de la cadena y las relaciones entre coordenadas cartesianas y polares, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones de Cauchy-Riemann originales y simplificando, se obtienen las ecuaciones en coordenadas polares:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

$\boxed{36.}$ Sea Ω un dominio (conjunto abierto y conexo) en $\mathbb{C}$, simétrico respecto al eje real, y g una función holomorfa en Ω. Demuestre las siguientes afirmaciones.

(a) La función $f(z) = \overline{g(z)}$ es holomorfa en Ω (es decir, tiene derivada compleja en todos los puntos del dominio).

(b) La función $f(z) = |g(z)|$ tiene derivada compleja en un punto $a \in \Omega$ si y sólo si $g'(a) = 0$.

Sugerencia: En ambos apartados, es suficiente usar la definición de la derivada.

***Solución*:**

$\boxed{37.}$ Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$, simétrico respecto al eje real, y g una función holomorfa en Ω. Sabiendo que la función $f(z) = |g(z)|$ es también holomorfa en Ω, use las ecuaciones de

Cauchy-Riemann para determinar la función f.

***Solución*:**

$\boxed{38.}$ Sea f una función holomorfa en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Si f toma sólo valores reales, usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, demuestre que f es constante.

(b) Demuestre que si $g = |f|$ es holomorfa en Ω, entonces f es constante.

Comentario: Más adelante, demostraremos el teorema de la aplicación abierta, que expresa un hecho todavía más fuerte: para toda función f, holomorfa y no constante en un dominio Ω, la imagen $f(\Omega)$ es otro dominio.

(c) Si $h(z) = |f(z)| + (f(z))^3$ es holomorfa en Ω, demuestre que f es constante.

***Solución*:**

(a) Como $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ toma valores reales, $v(x,y) = 0$. Entonces, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Por tanto, $f'(z) = 0$ y f es constante. ∎

(b) Como $g = |f|$ es holomorfa y toma valores reales, por el apartado (a), $|f| = \sqrt{u^2+v^2}$ es constante.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0.$$

Multiplicando la primera ecuación por u y la segunda por v, se obtiene

$$u^2\frac{\partial u}{\partial x} + uv\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad uv\frac{\partial u}{\partial y} + v^2\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \implies u^2\frac{\partial u}{\partial x} + uv\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + v^2\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Como f es holomorfa, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, por tanto

$$u^2\frac{\partial u}{\partial x} + v^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \implies f'(z) = 0 \implies f \text{ es constante.}$$

(c)

H.2.2 Funciones armónicas

$\boxed{39.}$ ¿Para qué valores de los parámetros reales a, b, c, d es armónica la función

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3?$$

***Solución*:** Basta ver que $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6ax + 2by + 2cx + 6dy = 0 \implies (6a+2c)x + (2b+6d)y = 0.$$

Por tanto, $6a + 2c = 0$ y $2b + 6d = 0$, es decir, $a = -{}^{c}\!/_{3}$ y $b = -3d$. ■

$\boxed{40.}$ Halle la conjugada armónica de $u(x,y) = \log \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en el semiplano $\{(x,y) : x \geq 0\}$.

***Solución*:** Queremos encontrar $v \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ sea holomorfa. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x}{x^2+y^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Integrando en la segunda ecuación, se obtiene que $v(x,y) = -\arctan \dfrac{y}{x} + C$. Derivamos respecto a x y comparamos con la segunda ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} + C'(x) = \frac{y}{x^2+y^2} \implies C'(x) = 0 \implies C = \text{cte}.$$

Por tanto, la conjugada armónica es $v(x,y) = -\arctan \frac{y}{x} + C$.

$\boxed{41.}$ (a) Encuentre todas las funciones armónicas de la forma $g(ax+by)$ donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2. ¿Qué funciones holomorfas tienen por parte real las funciones halladas?

(b) Encuentre todas las funciones armónicas de la forma $h(x^2+y^2)$ donde h es una función real de clase C^2.

***Solución*:**

H.2.3 Las funciones exponencial, trigonométricas e hiperbólicas

$\boxed{42.}$ Compruebe las siguientes propiedades de la función exponencial:

(a) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

(b) No existe $\lim_{z\to\infty} e^{-z}$.

***Solución*:**

(a) $z = x + iy \implies \overline{z} = x - iy \implies e^{\overline{z}} = e^{x-iy} = e^x e^{-iy} = e^x(\cos y - i \sin y) = \overline{e^z}$.

(b) Consideramos dos caminos $z = x + i0$ y $z = 0 + iy$:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \quad \wedge \quad \lim_{y\to\infty} e^{-iy} = \lim_{y\to\infty} \cos y - i \sin y \text{ no existe.}$$

$\boxed{43.}$ ¿En qué puntos del plano son $\mathbb{C}$-diferenciables las siguientes funciones?

(a) $\sin(e^z)$ (b) $\cos \overline{z}$ (c) $\frac{1}{e^z-1}$ (d) $\frac{1}{e^z-e^{-z}}$

Solución:

(a) La función $f(z) = \sin(e^z)$ es entera por ser composición de funciones enteras.

(b) La función $f(z) = \cos \overline{z}$ no es $\mathbb{C}$-diferenciable en ningún punto, ya que $\overline{z}$ no es $\mathbb{C}$-diferenciable en ningún punto (Ejercicio 2.1.1 apartado (c)).

(c) El único punto conflictivo es cuando el denominador se anula, es decir, $e^z = 1 \iff z = 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, la función es $\mathbb{C}$-diferenciable en $\mathbb{C} \setminus \{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) Resolviendo $e^z - e^{-z} = 0 \iff e^{2z} = 1 \iff z = \pi ik, k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, la función es $\mathbb{C}$-diferenciable en $\mathbb{C} \setminus \{\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$.

$\boxed{44.}$ Demuestre que para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$ se cumplen las siguientes identidades:

(a) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ (b) $|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x$

Solución:

(a) Recordamos que $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ y $\sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$, entonces

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \frac{e^{2z}+2+e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z}-2+e^{-2z}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

(b) Por la fórmula del coseno de la suma,

$$\cos(x+iy) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y).$$

$$\begin{aligned}
\implies |\cos z|^2 &= \cos^2(x)\cosh^2(y) + \sin^2(x)\sinh^2(y) = (*) \\
(*) &= \cos^2(x)\cosh^2(y) + (1-\cos^2(x))\sinh^2(y) \\
&= \cos^2(x)(\cosh^2(y) - \sinh^2(y)) + \sinh^2(y) = \cos^2(x) + \sinh^2(y). \\
(*) &= (1-\sin^2(x))\cosh^2(y) + \sin^2(x)\sinh^2(y) \\
&= \cosh^2(y) + \sin^2(x)(\sinh^2(y) - \cosh^2(y)) = \cosh^2(y) - \sin^2(x).
\end{aligned}$$

$\boxed{45.}$ Demostrar que la función $f(z) = \cos z$ manda el conjunto $A = \{x+iy : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0\}$ de forma inyectiva sobre el conjunto $B = \{u+iv : u \geq 0, v \geq 0\}$.

Solución:

H.2.4 Función inversa, logaritmos, raíces y potencias complejas

$\boxed{46.}$ Calcule todos los posibles valores complejos de:

(a) $\log e$ (b) $\log(-i)$ (c) $\log\left(\sqrt{3}+i\right)$ (d) $\log\left((1-i)^4\right)$

Solución: Recordamos la definición: $\log z = \ln|z| + i\arg z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$.

(a) $\log e = \ln|e| + i\left(\operatorname{Arg} e + 2\pi k\right) = 1 + 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\log(-i) = \ln|-i| + i\left(\operatorname{Arg}(-i) + 2\pi k\right) = \ln 1 + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) = \frac{3+4k}{2}\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\log\left(\sqrt{3}+i\right) = \ln\left|\sqrt{3}+i\right| + i\left(\operatorname{Arg}\left(\sqrt{3}+i\right) + 2\pi k\right) = \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$.

$\boxed{47.}$ Calcule todos los valores de:

(a) $i^{\sqrt{3}}$ (b) 2^{-1-i} (c) $2^{\pi i}$ (d) $(1-i)^i$

Solución: Recordamos la definición: $\alpha^\beta = e^{\beta\log\alpha} = |\alpha|^\beta\, e^{i\beta(\operatorname{Arg}\alpha + 2\pi k)}, k \in \mathbb{Z}$.

(a) $i^{\sqrt{3}} = |i|^{\sqrt{3}}\, e^{i\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} = e^{i\sqrt{3}\frac{\pi}{2}}\left(e^{i2\pi}\right)^{k\sqrt{3}} = e^{i\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}$.

(b) $2^{-1-i} = e^{-(1+i)\log 2} = e^{-(1+i)(\ln 2 + i(\operatorname{Arg} 2 + 2k\pi))} = e^{-\ln 2 - i2\pi k - i\ln 2 + 2k\pi} = \frac{1}{2}e^{2\pi k}e^{-i\ln 2}$.

$\boxed{48.}$ (a) Resuelva las siguientes ecuaciones: $\cos z = 2$, $z^i = 1$.

(b) Como muestra el apartado (a), a diferencia del coseno de variable real, el coseno complejo no está acotado por uno. Demuestre que, de hecho, la función coseno no está acotada.

Solución:

(a)

$\boxed{49.}$ Elija un dominio adecuado Ω de manera que sea simplemente conexo (esto significa que $\mathbb{C}\setminus\Omega$ sea conexo) y que F sea holomorfa en Ω. Después calcule la derivada $F'(z)$.

(a) $F(z) = \log(1-z)$ (c) $F(z) = \sin\sqrt{z}$

(b) $F(z) = \sqrt{e^z+1}$ (d) $F(z) = z^{z^2}$

Solución:

$\boxed{50.}$ Sean Ω y D dos dominios en el plano tales que $0, \pm i \notin \Omega$, $f : \Omega \to D$ una función holomorfa y biyectiva y $g : D \to \Omega$ su función inversa. Sabiendo que en cada $w \in D$ se cumple la identidad

$$g'(w) = \frac{g(w)^2 + 1}{g(w)},$$

calcule $f'(z)$, para $z \in \Omega$.

***Solución*:**

$\boxed{51.}$ Utilice el teorema de la función inversa para funciones holomorfas para demostrar el siguiente resultado probado ya con otro argumento: si Ω es un dominio plano, $f \in H(\Omega)$ y $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ (es decir, f sólo toma valores reales), entonces f es idénticamente constante.

***Solución*:**

H.2.5 Las transformaciones de Möbius

$\boxed{52.}$ Demostrar que el conjunto de todas las transformaciones de Möbius T es un grupo. Demostrar que este grupo no es conmutativo.

***Solución*:**

$\boxed{53.}$ Hallar todas las transformaciones de Möbius T que cumplen $T(1) = 1$ y $T(-1) = -1$. Demostrar que constituyen un grupo. ¿Es este grupo conmutativo?

***Solución*:**

$\boxed{54.}$ Demostrar que cada transformación de Möbius se puede escribir como $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc = 1$.

***Solución*:**

$\boxed{55.}$ Hallar la transformación de Möbius T con:

(a) $T(1) = -1$, $T(i) = i$ y $T(-1) = 1$,

(b) $T(0) = 0$, $T(1) = i$ y $T(\infty) = 1$,

(c) $T(0) = 1$, $T(1) = 1$ y $T(i) = -i$.

***Solución*:**

$\boxed{56.}$ ¿Cuál es la imagen de la recta $\Re z = 2$ tras una inversión?

***Solución*:**

$\boxed{57.}$ Hallar la imagen por la transformación de Möbius $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$ del conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \Im z \geq 0\}$.

Solución:

$\boxed{58.}$ Sea D el disco unidad. Demostrar que una transformación de Möbius T es una biyección entre D y sí mismo (equivalentemente, es un automorfismo de D) si y sólo si es de la forma

$$T(z) = e^{i\mu}\frac{a-z}{1-az}, \quad a \in D, \mu \in \mathbb{R}.$$

Recordar que una de las dos direcciones se ha visto en el problema 5(a) de la hoja 1.a.

Solución:

$\boxed{59.}$ Hallar la transformación de Möbius T que manda D sobre D y que cumple $T(1/2) = 1/3$.

Solución:

$\boxed{60.}$ Hallar la transformación de Möbius T que manda el círculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ al círculo $\{w \in \mathbb{C} : |w+1| = 1\}$, que además cumple $T(-2) = 0$ y $T(0) = i$.

Solución:

Referenciado en

- `Asignaturas`