Hugo Marquerie 06/03/2025

Espacio proyectivo real

Tenemos que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es un espacio topológico con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^n$, que, como es de Hausdorff y segundo numerable, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ también lo es. Veamos que $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ también hereda estas propiedades.

1. Como $\sim$ es abierta, por el `Lem-relacion-equivalencia-abierta-segundo-numerable/`Lema 1, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ es segundo numerable.

2. Veamos que $\mathcal{R} = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : x \sim y\}$ es un conjunto cerrado con la topología producto. Podemos escribir
$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) : \forall i,j \in \mathbb{N}_n : i \neq j : \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = 0 \right\}.$$
Luego si definimos $f\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sum_{i \neq j} \left| \begin{smallmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{smallmatrix} \right|$, $\mathcal{R} = f^{-1}(\{0\})$ es la preimagen de un cerrado por una función continua, por lo que $\mathcal{R}$ es cerrado. Como $\sim$ es abierta y $\mathcal{R}$ es cerrado, por el `Lem-relacion-equivalencia-abierta-hausdorff` $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ es de Hausdorff.

Notación: $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : [x] = [(x_1, \dots, x_n)] =: [x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$.

Dotemos a $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ de una estructura diferenciable. Sea $\mathcal{A} = \{(U_i, \psi_i) : i \in \mathbb{N}_n\}$ con
$$\forall i \in \mathbb{N}_n : U_i = \left\{ [x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) : x_i \neq 0 \right\}$$
y $\forall [x] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) : \psi_i([x_1 : \cdots : x_n]) = \left(\dfrac{x_1}{x_i}, \dots, \dfrac{x_{i-1}}{x_i}, \dfrac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \dfrac{x_n}{x_i} \right) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces

1. $\forall (U_i, \psi_i) \in \mathcal{A} : (U_i, \psi_i)$ es una carta de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$:

   (a) $\forall i \in \mathbb{N}_n : U_i$ es un abierto de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ porque, por definición de topología cociente, lo es $\iff \pi^{-1}(U_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x_i \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es abierto.

   (b) Veamos que $\forall i \in \mathbb{N}_n : \psi_i$ es un homeomorfismo:

      i. Primero veamos que ψ_i está bien definida. Sean $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ distintos representantes de la misma clase ($[x] = [y]$). Entonces, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^* : x = \lambda y$
      $$\implies \psi([x]) = \left(\frac{\lambda y_1}{\lambda y_i}, \dots, \frac{\lambda y_{i-1}}{\lambda y_i}, \frac{\lambda y_{i+1}}{\lambda y_i}, \dots, \frac{\lambda y_n}{\lambda y_i} \right) = \psi([y]).$$

      ii. Por la `Prop-fn-continua-cociente-iff-composicion-continua/`Proposición 1

ψ_i es continua $\iff$ $\psi_i \circ \pi|_{\pi^{-1}(U_i)} : \pi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ es continua.

$$(\psi_i \circ \pi)(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

donde cada componente es continua porque $\forall x \in \pi^{-1}(U_i) : x_i \neq 0$.

iii. Observamos que $\operatorname{Im}(\psi_i) = \mathbb{R}^{n-1}$ y que $\psi_i^{-1} \colon \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ viene dada por

$$\psi_i^{-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) = [a_1 : \dots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \dots : a_{n-1}]$$

que es contina por ser composición de funciones continuas.

2. Como $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_n} U_i = \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ y $\forall (U_i, \psi_i) \in \mathcal{A} : (U_i, \psi_i)$ es una carte de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{A}$ es un atlas de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$. Veamos que $\mathcal{A}$ es diferenciable. Sean $(U_i, \psi_i), (U_j, \psi_j) \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned} \psi_j \circ \psi_i^{-1} \colon \psi_i(U_i \cap U_j) &\to \psi_j(U_i \cap U_j) \\ (a_1, \dots, a_{n-1}) &\mapsto \psi_j\big([a_1 : \dots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \dots : a_{n-1}]\big) \\ &= \left(\frac{a_1}{a_j}, \dots, \frac{a_{j-1}}{a_j}, \frac{a_{j+1}}{a_j}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_j}\right) \end{aligned}$$

que es $\mathcal{C}^\infty$ porque cada componente es $\mathcal{C}^\infty$ ya que $\forall a \in \psi_i(U_i \cap U_j) : a_j \neq 0$. Análogamente, $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$, luego las cartas de $\mathcal{A}$ son $\mathcal{C}^\infty$-compatibles.

3. Por el `Teo-existencia-unicidad-estructura-diferenciable`/Teorema 1, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ es una variedad diferenciable de dimensión $n - 1$.

Definición 1 (Espacio preoyectivo real). A la variedad diferenciable $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ la llamamos espacio proyectivo real de dimensión n y la denotamos por $\mathbb{RP}^n$.