

Lema de Borel-Cantelli II

Lema 1 (de Borel-Cantelli II). Sea $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ una sucesión de sucesos independientes

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 1.$$

Demostración: Sean $M < N < \infty$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=M}^N A_n^c\right) &= \prod_{n=M}^N \mathbb{P}(A_n^c) = \prod_{n=M}^N (1 - \mathbb{P}(A_n)) \leq \prod_{n=M}^N e^{-\mathbb{P}(A_n)} \text{ porque } 1 - x \leq e^{-x} \\ &\leq e^{-\sum_{n=M}^N \mathbb{P}(A_n)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad \forall M < \infty. \end{aligned}$$

Como $\Omega = \bigcup_{n=M}^{\infty} A_n \sqcup \bigcap_{n=M}^{\infty} A_n^c$, hemos visto que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=M}^{\infty} A_n^c\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=M}^N A_n^c\right) = 0$.

$$\implies \forall M < \infty : \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=M}^{\infty} A_n\right) = 1 \implies \mathbb{P}\left(\bigcap_{M=1}^{\infty} \bigcup_{n=M}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

Entonces, concluimos que $\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 1$. ■

Referenciado en

- Quijote-infinito