Hugo Marquerie 13/03/2025

Existencia de cartas adaptadas a una inmersion

Teorema 1 (Cartas adaptadas). *Sea* $F\colon M^m \longrightarrow N^n$ *una inmersión en* $p \in M$

$$\Longrightarrow \exists\,(U,\psi) \text{ carta de } M : p \in U \wedge \exists\,(V,\varphi) \text{ carta de } N : F(p) \in V$$

tales que la expresión local de F *viene dada por* $\widehat{F}(x_1,\ldots,x_m) = (x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0)$. *Estas cartas se denominan* ***cartas adaptadas*** *a* F.

***Demostración*:** Sean (U,ψ), (V,φ) dos cartas de M y N que contienen a p y $F(p)$ respectivamente. Tenemos el siguiente diagrama:

(1) Podemos cambiar los homeomorfismos ψ y V de modo que $\psi(p) = 0$ y $\varphi(F(p)) = 0$ componiendo con una traslación: $\psi'(x) = \psi(X) - \psi(p)$ y $\varphi'(x) = \varphi(x) - \varphi(F(p))$.

(2) Podemos cambiar de nuevo las cartas (U,ψ) y (V,φ) de modo que $D\widehat{F}_0(x) = (x,0,\ldots,0)$.

Sabemos que existe $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que $A \cdot D\widehat{F}_0 = \left(\frac{I_m}{0}\right)$. Definimos $\varphi' = A \circ \varphi$

$$\Longrightarrow D\widehat{F}'_0 = D\left(\varphi' \circ F \circ \psi\right)_0 = D\left(A \circ \varphi \circ F \circ \psi\right)_0 = A \cdot D\widehat{F}_0.$$

(3) Podemos extender $\widehat{F}$ a una aplicación diferenciable G

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \supset \hat{U} \arrow[r, "\widehat{F}"] \arrow[d, hook] & \hat{V} \subset \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}^n \supset \hat{U} \times \mathbb{R}^{n-m} \arrow[ur, dashed, "G"] &
\end{tikzcd}$$

cuya diferencial es no singular en $(0,\ldots,0)$, es decir,

$$G(x,y) = \widehat{F}(x) + (0,y) \implies DG_0 = \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{array}\right).$$

(4) Por el teorema de la función inversa, existen entornos abiertos $A \times B \subset \widehat{U} \times \mathbb{R}^{n-m}$ y $W \subset \hat{V}$ de los orígenes tales que $G|_{A\times B}\colon A \times B \longrightarrow W$ es un difeomorfismo.

(5) Definimos las cartas $\left(\psi^{-1}(A),\, \psi|_{\psi^{-1}(A)}\right)$ y $\left(\varphi^{-1}(W),\, G^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(W)}\right)$.

Entonces, como $G(x,0) = \widehat{F}(x)$ y $G^{-1} \circ \widehat{F}(x) = (x, 0, \ldots, 0)$, tenemos que la expresión local de F en estas cartas viene dada por

$$\left(G^{-1} \circ \varphi\right) \circ F \circ \psi^{-1}(x) = G^{-1} \circ \left(\varphi \circ F \circ \psi^{-1}\right)(x) = G^{-1} \circ \widehat{F}(x) = (x, 0, \ldots, 0).$$

$\blacksquare$