

Expresión de la σ -álgebra generada

Proposición 1. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X

$$\implies \sigma(\mathcal{A}) = \bigcap \{ \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{F} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra } \wedge \mathcal{A} \subset \mathcal{F} \}.$$

Demostración: Por la Prop-interseccion-sigma-algebra/Proposición 1,

$$\Sigma = \bigcap \{ \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{F} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra } \wedge \mathcal{A} \subset \mathcal{F} \}$$

es una σ -álgebra. Tenemos que si \mathcal{F} es una σ -álgebra que contiene a \mathcal{A} , entonces $\mathcal{F} \subset \Sigma$ por definición de Σ . Por lo tanto, Σ es la menor σ -álgebra que contiene a \mathcal{A} . ■