Hugo Marquerie 27/02/2025

Desigualdad de Hölder

Teorema 1 (Desigualdad de Hölder). *Sea* $p \in (1, \infty)$ *y* $X \in \mathcal{L}^p(\mathbb{P}), Y \in \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{P})$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\big[\,|X \cdot Y|\,\big] \leq \|X\|_p \cdot \|Y\|_{p'}$$

donde p' *es el exponente conjugado de* p.

***Demostración*:** Suponemos que $\|Y\|_{p'} \neq 0$ (si no, la desigualdad es trivial).

Definimos una función $h\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y una medida ν en Ω dadas por

$$h(\omega) := \frac{|X(\omega)|}{|Y(\omega)|^{p'-1}} \mathbb{1}_{\{Y \neq 0\}}(\omega) \quad \wedge \quad \mathrm{d}\nu = \frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}} \mathbb{1}_{\{Y \neq 0\}}(\omega)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

donde ν es una medida porque $\frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ por hipótesis.

Además $\nu(\Omega) = \displaystyle\int_\Omega \frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}}\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \frac{\|Y\|_{p'}^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}} = 1$, luego ν es de probabilidad.

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \mathbb{E}\left[|X \cdot Y|\right] &= \int_\Omega |X(\omega) \cdot Y(\omega)|\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\ &= \|Y\|_{p'}^{p'} \int_\Omega \frac{|X(\omega)|}{|Y(\omega)|^{p'-1}} \frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}}\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \|Y\|_{p'}^{p'} \left[\int_\Omega h(\omega)\, \mathrm{d}\nu(\omega)\right]^{p/p}.\end{aligned}$$

Como $p > 1$, $\varphi(t) = |t|^p$ es convexa y por la desigualdad de Jensen se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X \cdot Y|\right] = \|Y\|_{p'}^{p'} \left[\varphi\left(\int_\Omega h(\omega)\, \mathrm{d}\nu(\omega)\right)\right]^{1/p} &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{jJensen}}}{\leq} \|Y\|_{p'}^{p'} \left[\int_\Omega h(\omega)^p\, \mathrm{d}\nu(\omega)\right]^{1/p} = \\ \leq \|Y\|_{p'}^{p'} \left[\int_\Omega \frac{|X(\omega)|^p}{|Y(\omega)|^{p(p'-1)}} \cdot \frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}}\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\right]^{1/p} &= \|X\|_p \|Y\|_{p'}.\end{aligned}$$

■

***Demostración* (Alternativa):** Si $\|X\|_p = 0$ o $\|Y\|_{p'} = 0$, la desigualdad es trivial, por tanto, suponemos que $\|X\|_p \neq 0$ y $\|Y\|_{p'} \neq 0$ y definimos $\widehat{X} := X/\|X\|_p \wedge \widehat{Y} := Y/\|Y\|_{p'}$.

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left[|X \cdot Y|\right] = \int_\Omega |X(\omega) \cdot Y(\omega)|\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \|X\|_p \cdot \|Y\|_{p'} \int_\Omega \left|\widehat{X}(\omega) \cdot \widehat{Y}(\omega)\right| \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega).$$

Por la desigualdad de Young, $\forall \omega \in \Omega : \left| \widehat{X}(\omega) \cdot \widehat{Y}(\omega) \right| \leq \frac{\left| \widehat{X}(\omega) \right|^p}{p} + \frac{\left| \widehat{Y}(\omega) \right|^{p'}}{p'}$.

$$\implies \mathbb{E}\left[|X \cdot Y| \right] \leq \|X\|_p \cdot \|Y\|_{p'} \left(\frac{1}{p} \int_\Omega \left| \widehat{X}(\omega) \right|^p \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) + \frac{1}{p'} \int_\Omega \left| \widehat{Y}(\omega) \right|^{p'} \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \right) =$$
$$\leq \|X\|_p \cdot \|Y\|_{p'} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \right) = \|X\|_p \cdot \|Y\|_{p'}.$$

■

Referenciado en

- `Desigualdad-minkowski`