Hugo Marquerie 22/02/2025

La independencia de π-sistemas implica la independencia de las σ-álgebras generadas

Proposición 1. *Sean* $S_1, \ldots, S_n$ π*-sistemas independientes*

$$\implies \sigma(S_1), \ldots, \sigma(S_n) \text{ son independientes.}$$

***Demostración*:** Fijamos $A_2 \in S_2, \ldots, A_n \in S_n$ y definimos

$$F := \bigcap_{j=2}^{n} A_j \quad \wedge \quad L_F := \{A \in \Sigma : \mathbb{P}(A \cap F) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\}.$$

Veamos que (i) $S_1 \subset L$ y (ii) L es un λ-sistema:

(i) Sea $A_1 \in S_1$, entonces

$$\mathbb{P}(A_1 \cap F) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) \overset{\substack{\text{indep.}\\ \downarrow}}{=} \prod_{j \in \mathbb{N}_n} \mathbb{P}(A_j) \overset{\substack{\text{indep.}\\ \downarrow}}{=} \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=2}^{n} A_j\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(F).$$

Luego $A_1 \in L$ y, por tanto, $S_1 \subset L$.

(ii) Comprobamos las propiedades de la definición de λ-sistema:

(a) $\mathbb{P}(\Omega \cap F) = \mathbb{P}(F) = 1 \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(\Omega) \cdot \mathbb{P}(F) \implies \Omega \in L.$

(b) $\mathbb{P}([B \setminus A] \cap F) = \mathbb{P}([B \cap F] \setminus [A \cap F]) = \mathbb{P}(B \cap F) - \mathbb{P}(A \cap F) \overset{\substack{A, B \in L\\ \downarrow}}{=} \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(B \setminus A) \cdot \mathbb{P}(F) \implies B \setminus A \in L.$

(c) $\mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right] \cap F\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_j \cap F)\right) = \lim_{j \to \infty} \mathbb{P}(A_j \cap F) = \lim_{j \to \infty} \mathbb{P}(A_j) \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \cdot \mathbb{P}(F) \implies \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in L.$

■