Hugo Marquerie 25/03/2025

Medida inducida

Lema 1. *Sea X una v.a. y definimos $\mu_X \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$ dada por $\mu_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$*

$$\Longrightarrow \mu_X \text{ es una medida de probabilidad en el epacio medible } (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

*a esta medida μ_X se le llama **medida inducida** por X.*

***Demostración*:** Comprobemos las condiciones de la definición de medida:

i) $\mu_X(\varnothing) = \mathbb{P}(X \in \varnothing) = 0$.

ii) Sean $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjuntos dos a dos, entonces

$$\begin{aligned}
\mu_X\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= \mathbb{P}\left(X \in \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right\}\right) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{unión disjunta}}}{=} \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_n\}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X \in B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_X(B_n).
\end{aligned}$$

Como μ_X es positiva (porque $\mathbb{P}$ lo es), basta ver que $\mu_X([0,1]) = 1$.

$$\mu_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbb{R}\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Por tanto, μ_X es una medida de probabilidad. ■

Referenciado en

- `Igualdad-distribucion`
- `Var-aleatoria-continua`