Hugo Marquerie 13/02/2025

Esperanza de una función de una variable aleatoria

Proposición 1. *Sea* $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *medible (Borel) y* $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *una variable aleatoria*

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t).$$

***Demostración*:** Dividiremos la demostración en pasos:

1. Consideramos primero $g = \mathbb{1}_A$, con $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces $g(X) = \mathbb{1}_A(X)$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \mathbb{E}[g(X)] &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X(\omega)\in A\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\\ &= \mathbb{P}(X \in A) = \mu_X(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t).\end{aligned}$$

2. Por tanto, si $g = \sum_j \alpha_j \mathbb{1}_{E_j}$ es simple, entonces por linealidad de la integral:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g(X)\right] &= \int_{\Omega} g(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{E_j}(X(\omega))\right)\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{\Omega} \mathbb{1}_{E_j}(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{E_j}(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t) = \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{E_j}(t)\right)\mathrm{d}\mu_X(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t).\end{aligned}$$

3. Entonces, si g es medible no negativa, por un lema técnico, $\exists\, (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión no decreciente de funciones simples tales que $\forall t \in \mathbb{R} : \lim s_n(t) = g(t)$, entonces por convergencia monótona:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g(X)\right] &= \int_{\Omega} g(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int \lim_{n\to\infty} s_n(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\\ &\overset{\substack{\text{TCM}\\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty} \int s_n(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int s_n(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t) \overset{\substack{\text{TCM}\\ \downarrow}}{=} \int g(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t).\end{aligned}$$

4. Finalmente, si g es medible arbitraria, entonces $g = g^+ - g^-$, con g^+, g^- medibles no negativas, y por linealidad de la integral:

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t) = \int_{\mathbb{R}} g^+(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t) - \int_{\mathbb{R}} g^-(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t) = \mathbb{E}\left[g^+(X)\right] - \mathbb{E}\left[g^-(X)\right] = \mathbb{E}\left[g(X)\right].$$

$\blacksquare$