

Desigualdad de Minkowski

Proposición 1 (Desigualdad de Minkowski). Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $X, Y \in \mathcal{L}^p(\mathbb{P})$

$$\implies \|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

Demostración: Dividimos la demostración en tres casos:

1. Si $p = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \|X + Y\|_1 &= \int_{\Omega} |X(\omega) + Y(\omega)| \, d\mathbb{P}(\omega) \stackrel{\Delta}{\leq} \int_{\Omega} [|X| + |Y|] \, d\mathbb{P}(\omega) \\ &\stackrel{\text{lineal}}{=} \int_{\Omega} |X| \, d\mathbb{P}(\omega) + \int_{\Omega} |Y| \, d\mathbb{P}(\omega) = \|X\|_1 + \|Y\|_1. \end{aligned}$$

2. Si $1 < p < \infty$, entonces

$$\begin{aligned} |X(\omega) + Y(\omega)|^p &= |X(\omega) + Y(\omega)| |X(\omega) + Y(\omega)|^{p-1} \\ &\leq |X(\omega)| |X(\omega) + Y(\omega)|^{p-1} + |Y(\omega)| |X(\omega) + Y(\omega)|^{p-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Integrando en el lado derecho, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |X(\omega)| |X(\omega) + Y(\omega)|^{p-1} \, d\mathbb{P}(\omega) &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|X\|_p \| |X + Y|^{p-1} \|_{p'} = \\ &\leq \|X\|_p \left[\int_{\Omega} |X + Y|^{(p-1)p'} \, dP \right]^{1/p'} = \\ &\leq \|X\|_p \left[\int_{\Omega} |X + Y|^p \, dP \right]^{\frac{1}{p} \cdot \frac{p}{p'}} = \|X\|_p \|X + Y\|_p^{p/p'}. \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \|X + Y\|_p^p &\stackrel{(1)}{\leq} \left[\int_{\Omega} |X(\omega)| |X(\omega) + Y(\omega)|^{p-1} \, dP(\omega) + \int_{\Omega} |Y(\omega)| |X(\omega) + Y(\omega)|^{p-1} \, dP(\omega) \right]^{p/p'} \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \|X\|_p \|X + Y\|_p^{p/p'} + \|Y\|_p \|X + Y\|_p^{p/p'} = \|X + Y\|_p^{p/p'} [\|X\|_p + \|Y\|_p] \\ &\iff \|X + Y\|_p^{p-p/p'} = \|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p. \end{aligned}$$

3. Si $p = \infty$, entonces tomamos

$$A_1 \subset \Omega : \|X\|_{\infty} = \sup_{\omega \in A_1^c} |X(\omega)| \quad \text{y} \quad A_2 \subset \Omega : \|Y\|_{\infty} = \sup_{\omega \in A_2^c} |Y(\omega)|.$$

Definimos $A := A_1 \cup A_2$, entonces

$$\begin{aligned}
\|X\|_\infty + \|Y\|_\infty &= \sup_{\omega \in A_1^c} |X(\omega)| + \sup_{\omega \in A_2^c} |Y(\omega)| \geq \sup_{\omega \in A^c} |X(\omega)| + \sup_{\omega \in A^c} |Y(\omega)| \\
&\geq \sup_{\omega \in A^c} [|X(\omega)| + |Y(\omega)|] \geq \sup_{\omega \in A^c} |X(\omega) + Y(\omega)| \\
&\geq \inf_{\substack{B \in \Sigma \\ \mathbb{P}(B)=0}} \sup_{\omega \in B^c} |X(\omega) + Y(\omega)| = \|X + Y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Como se ha demostrado en los tres casos, se tiene que $\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$. ■

Referenciado en

- Lem-esp-lp-normado
- Lem-esp-lp-vectorial