Hugo Marquerie 11/02/2025

Topología inducida por función sobreyectiva

Proposición 1. *Sea* $(X, \mathcal{T}_X)$ *un esp top,* Y *un conjunto y* $f\colon X \longrightarrow Y$ *sobreyectiva*

$$\implies \exists! \text{ topología } \mathcal{T}_f \text{ en } Y : f\colon\ (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_f) \text{ es una aplicación cociente.}$$

$\mathcal{T}_f$ *se denomina la* ***topología*** *de* Y ***inducida*** *por* f.

***Demostración*:** Sea $\mathcal{T}_f = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$. Vemos que $\mathcal{T}_f$ es una topología:

(i) $\varnothing \in \mathcal{T}_f$ porque $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{T}_X$ e $Y \in \mathcal{T}_f$ porque $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}_X$.

(ii) $U, V \in \mathcal{T}_f \implies f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$

$$\implies f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) \in \mathcal{T}_X \implies U \cap V \in \mathcal{T}_f.$$

(iii) $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{T}_f \implies \left\{f^{-1}(V_\alpha)\right\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{T}_X \implies f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(V_\alpha) \in \mathcal{T}_X$.

Entonces concluimos que $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \in \mathcal{T}_f$.

Por tanto, $\mathcal{T}_f$ es una topología en Y. Además, f es una aplicación cociente porque es sobreyectiva y $\forall V \in \mathcal{T}_f : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ por definición de $\mathcal{T}_f$.

Por último, sabemos que $\mathcal{T}_f$ es única dado que si consideramos $\mathcal{T}_Y$ otra topología en Y que hace de f una aplicación cociente, entonces

$$\forall V \subset Y : \big(V \in \mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \iff V \in \mathcal{T}_f\big) \implies \mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_f.$$

■

Referenciado en

- `Topologia-cociente`
- `Esp-proyectivo`