Hugo Marquerie 15/03/2025

Consecuencias de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Proposición 1 (Consecuencias de las ecuaciones de Cauchy-Riemann).
Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces

1. $\forall z \in \Omega : f'(z) = 0 \implies f$ *es constante en* Ω.
2. $\forall z \in \Omega : \big(\Re\left(f(z)\right) = 0\big) \vee \big(\Im\left(f(z)\right) = 0\big) \implies f$ *es constante en* Ω.
3. $|f(z)|$ *es constante en* $\Omega \implies f$ *es constante en* Ω.

***Demostración*:** Consideramos $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = u(z) + iv(z)$ con $u, v \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Sea $z_0 \in \Omega$, como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f es $\mathbb{C}$-derivable en z_0 con $f'(z_0) = 0$. Entonces, por el Teorema de Cauchy-Riemann, u, v son $\mathbb{R}$-diferenciables en z_0 con

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = 0 \implies u_x = v_x = 0 \implies v_y = u_y = 0.$$

   Luego u y v son constantes en Ω y, por tanto, f también lo es.

2. Si $\forall z \in \Omega : \Re f(z) = 0 \implies \forall z \in \Omega u(z) = 0 \implies u_x = 0 \wedge u_y = 0$. Entonces, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $v_y = u_x = 0 \wedge v_x = -u_y = 0$, luego u y v son constantes en Ω y, por tanto, f también lo es.

3. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\forall z \in \Omega : |f(z)| = c \in \mathbb{R}$, entonces si $c = 0$ inmediatamente $f \equiv 0$. Supongamos que $c \neq 0$, entonces $|f|^2 = u^2 + v^2$ es constante en Ω.

$$\begin{cases} 2uu_x + 2vv_x = 0 & \text{(I)} \\ 2uu_y + 2vv_y = 0 & \text{(II)} \end{cases} \overset{\substack{\text{C-R} \\ \downarrow}}{\implies} \begin{cases} uu_x - vu_y = 0 & \text{(I)} \\ uv_y + vu_x = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\substack{uI+vII \\ \downarrow}}{\implies} 2\left(u^2+v^2\right)u_x = 0 \implies u_x = 0 \implies v_y = 0 \\ \overset{\substack{vI-uII \\ \downarrow}}{\implies} -2\left(u^2+v^2\right)u_y = 0 \implies u_y = 0 \implies v_x = 0 \end{array}\right\} \text{en } \Omega.$$

   Luego u, v son constantes en Ω y por tanto f es constante en Ω.

■