Hugo Marquerie 17/03/2025

Convergencia en probabilidad implica la existencia de una subsucesión que converge casi seguro

Proposición 1. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X \implies \exists\,(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{c.s.} X$.

***Demostración*:** Definimos $\forall k \in \mathbb{N} : n_k = \min\left\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}\left(|X_n - X| > 2^{-k}\right) \leq 2^{-k}\right\}$ y llamaremos $A_k := \left\{|X_{n_k} - X| > 2^{-k}\right\}$. Como $\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\forall k \in \mathbb{N} : \exists n_k \in \mathbb{N}$

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty.$$

Entonces, por el Lema de Borel-Cantelli I, $\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right) = 0$.

Por otro lado, afirmamos que $\left\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} |X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| \neq 0\right\} \subset \limsup_{k\to\infty} A_k$.

En efecto, si $\omega \in \Omega$ es tal que $\limsup_{n\to\infty} |X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| \neq 0$, entonces $\exists$ infinitos índices k tales que $\omega \in A_k$. Por tanto, $\omega \in \limsup_{k\to\infty} A_k$. ■