Hugo Marquerie March 18, 2025

# Todo espacio $\mathcal{L}^p$ es de Banach

**Teorema 1.** *Sea* $(X, \Sigma, \mu)$ *un espacio de medida y* $p \in [1, \infty]$

$$\implies L^p := \mathcal{L}^p/\sim \text{ es un espacio de Banach con la norma } p\text{-ésima } \|\cdot\|_p$$

*donde* $\forall f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) : f \sim g \iff f = g$ *c.t.p..*

***Demostración*:** Por `Lem-esp-lp-normado`/Lema 1 sabemos que $L^p$ es un espacio vectorial normado. Por lo tanto, basta probar que la métrica inducida por la norma $p$-ésima es completa.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ una sucesión de Cauchy, es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. Queremos demostrar que existe $f \in L^p$ tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} f$ en la norma $p$-ésima. ■