GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Tercero del Grado en Matemáticas

Hugo Marquerie

Profesor: Federico Cantero Morán
Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid
Segundo cuatrimestre 2024 - 2025

28 de enero, 2025

Índice

1 Variedades diferenciables **1**

1.1 Introducción: ¿Qué es la geometría? 1

1.2 Variedades topológicas 1

1.2.1 Variedades diferenciables 3

1.3 La topología cociente 7

1.3.1 Espacio proyectivo 8

2 Funciones diferenciables **13**

2.1 Funciones diferenciables 13

2.2 Aplicaciones diferenciables 14

3 Espacio tangente **17**

3.1 Vectores tangentes 17

3.2 Diferencial de una aplicación 19

3.2.1 Expresión local de un vector en T_pM 20

4 Inmersiones y submersiones **23**

4.1 Definiciones y resultados básicos 23

4.2 Forma local de una inmersión 26

4.3 Forma local de una submersión 28

H Hojas de ejercicios **33**

H.1 Variedades diferenciales 33

H.2 Aplicaciones diferenciables 40

H.3 Espacio tangente 48

1. Variedades diferenciables

1.1 Introducción: ¿Qué es la geometría?

Postulados de Euclides:

1. Por cada par de puntos pasa una única recta.
2. Cada recta se puede extender indefinidamente.
3. Dado un punto (centro) y un radio podemos trazar una única circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Dada una recta y un punto fuera de ella, existe una única recta que pasa por el punto y no corta a la primera recta.

Estos postulados no están formulados con el rigor matemático que se espera hoy en día, pero Hilbert los reformuló de manera más precisa.

Alrededor de 1800-1820 Gauss, Bolyai y Lobachevsky descubrieron el "plano hiperbólico", una geometría que cumplía los primeros cuatro postulados de Euclides pero no el quinto.

"El mundo está escrito en ecuaciones diferenciales"

En 1854 Riemman propone la idea de **variedad diferenciable**.

$$\begin{tikzcd}
\text{Espacios topológicos} & \text{Variedades topológicas} \arrow[l, hook'] \arrow[d, dash] & \text{Variedades diferenciables} \arrow[l, hook'] & \text{Variedades riemannianas} \arrow[l, hook'] \\
& \text{localmente homeomorfas a } \mathbb{R}^n & \text{espacios vectoriales} \arrow[u] & \text{espacios euclídeos} \arrow[l, hook'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

1.2 Variedades topológicas

Definición 1.2.1 (Topología de Hausdorff). Sea $(X, \mathcal{T})$ un esp top, es de Hausdorff

$$\iff \forall x, y \in X : x \neq y : \exists U \in \mathcal{V}(x), V \in \mathcal{V}(y) : U \cap V = \varnothing \tag{T_2}$$

Definición 1.2.2 (Segundo numerable). Sea $(X, \mathcal{T})$ un esp top, es segundo numerable

$$\iff \exists \mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T} : \mathcal{B} \text{ es base de } \mathcal{T}.$$

Definición 1.2.3 (Variedad topológica). Sea $(M, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$, M es una variedad topológica de dimensión $n \iff$

(i) $(M, \mathcal{T})$ es de Hausdorff.

(ii) $(M, \mathcal{T})$ es segundo numerable.

(iii) $\forall p \in M : \exists U \in \mathcal{V}(p) : \exists f \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismo.

Ejercicio 1.2.1. Comprueba que (iii) es equivalente a

(iii') $\forall p \in M : \exists U \in \mathcal{V}(p) : \exists U' \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\exists f \colon U \longrightarrow U'$ homeomorfismo.

***Solución*:** Probemos ambas direcciones de la equivalencia (iii) $\iff$ (iii'):

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $p \in M$, tenemos que $\exists U \in \mathcal{V}(p)$ homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Dado que $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, basta tomar $U' = \mathbb{R}^n$ con la misma $f \colon U \longrightarrow U' = \mathbb{R}^n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $p \in M$, entonces $\exists U \in \mathcal{V}(p)$ y $\exists U' \subset \mathbb{R}^n$ abierto con $f \colon U \longrightarrow U'$ homeomorfismo. Como $f(p) \in U'$ y U' es un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\exists \delta > 0 : B_\delta(f(p)) \subset U'$. Tomamos $V := f^{-1}(B_\delta(f(p)))$ que es abierto de U por ser f continua. Por tanto, $V \in \mathcal{V}(p)$ y $f\big|_V \colon V \longrightarrow B_\delta(f(p))$ es homeomorfismo.

Como sabemos que existe $g \colon B_\delta(f(p)) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismo, basta componer $g \circ f\big|_V$ para obtener el homeomorfismo buscado.

■

Proposición 1.2.1. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico segundo numerable y $A \subseteq X$ con la topología del subespacio $\mathcal{T}_A \implies (A, \mathcal{T}_A)$ es segundo numerable.*

***Demostración*:** Como $(X, \mathcal{T})$ es segundo numerable, $\exists \mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T} : \mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$. Como sabemos que $\{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_A$, tenemos que $\{B_n \cap A\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base numerable de $\mathcal{T}_A$. Por tanto, $(A, \mathcal{T}_A)$ es segundo numerable. ■

Ejemplos 1.2.2 (de variedades topológicas).

$\boxed{1}$ $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto es una variedad topológica de dimensión n.

(i) Sean $p, q \in U$, podemos tomar $B_{\delta/3}(p) \cap U$ y $B_{\delta/3}(q) \cap U$, donde $\delta = \|p - q\|$ y se cumple que son disjuntos. Por tanto, $(U, \mathcal{T}_U)$ es de Hausdorff.

(ii) Podemos tomar como base el conjunto de las bolas abiertas centradas en los puntos de coordenadas racionales y de radio racional (ejercicio 1b de la Hoja 1).

(iii) Sea $p \in U$, entonces podemos tomar el abierto $B_\delta(p) \subset U$ y como homeomorfismo entre $B_\delta(p)$ y $\mathbb{R}^n$ podemos tomar $f\colon B_\delta(p) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $x \longmapsto \frac{x-p}{\delta-\|x-p\|}$.

(iii') Alternativamente, se tiene que para cada punto $p \in U$ podemos tomar $U' = U$ y la identidad como homeomorfismo.

$\boxed{2}$ $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ es una variedad topológica de dim 2.

(i) Como la propiedad Hausdorff se preserva (o hereda) al tomar subespacios y $\mathbb{R}^3$ es de Hausdorff, $\mathbb{S}^2$ también lo es.

(ii) Como la propiedad segundo numerable se preserva (o hereda) al tomar subespacios y $\mathbb{R}^3$ es segundo numerable, $\mathbb{S}^2$ también lo es.

(iii) Se deja como ejercicio

$\boxed{3}$ Consideramos $D^2 = \{p \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{d}(p, 0) \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ y $S^1 = \{p \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{d}(p, 0) = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Definimos la relación de equivalencia $\sim$ en D^2 dada por

$$p \sim q \iff p = q \vee (p = -q \wedge p, q \in S^1)$$

Entonces, el espacio cociente $X = D^2/\sim$ es una variedad topológica de dimensión 2.

(i) Se deja como ejercicio

(ii) Se deja como ejercicio

(iii) Si $[p] \in X$ se tiene uno de varios casos:

Caso 1: $p \notin S^1$, entonces podemos tomar $\delta < 1 - \|p\|$ y $B_\delta(p) \subset D^2$.

1.2.1 Variedades diferenciables

Bibliografía: Lee, 2013 pp 10-17 "smooth structures" y de Boothby, 1986 la primera sección del capítulo 3.

Definición 1.2.4 (Carta). Sea $(X, \mathcal{T})$ un esp top, (U, ψ) es una carta de dim n en $(X, \mathcal{T})$

$$\iff U \in \mathcal{T} \wedge \psi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ es un homeomorfismo sobre su imagen.}$$

Denotamos $\hat{U} = \mathrm{Im}(\psi)$ y $\psi^{-1}\colon \hat{U} \longrightarrow U$ es la **parametrización**.

Definición 1.2.5 (Atlas). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\mathcal{A} = \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ es un altas de dimensión n en $X \iff$

(i) $\forall i \in I : (U_i, \psi_i)$ es una carta de dimensión n en $(X, \mathcal{T})$.

(ii) $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, es decir, $\forall p \in X : \exists i \in I : p \in U_i$.

Observación 1.2.6. Si $(X, \mathcal{T})$ es de Hausdorff y segundo numerable, con un atlas de dim n, entonces $(X, \mathcal{T})$ es una variedad topológica de dimensión n.

Definición 1.2.7 ($\mathcal{C}^\infty$-compatibilidad). Sean (U_1, ψ_1), (U_2, ψ_2) dos cartas de dimensión n en X, son $\mathcal{C}^\infty$-compatibles $\iff$

(i) $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}\big|_{\psi_1(U_1\cap U_2)} : \psi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \psi_2(U_1 \cap U_2)$ es $\mathcal{C}^\infty$.

(ii) $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}\big|_{\psi_2(U_1\cap U_2)} : \psi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \psi_1(U_1 \cap U_2)$ es $\mathcal{C}^\infty$.

Ejercicio 1.2.3. Prueba que la relación de $\mathcal{C}^\infty$-compatibilidad entre cartas es una relación de equivalencia.

Definición 1.2.8 (Atlas diferenciable). Sea $\mathcal{A} = \{(U_i, \psi_i)\}_{i\in I}$ un atlas de dimensión n en X, es diferenciable $\iff \forall i, j \in I : (U_i, \psi_i)$ y (U_j, ψ_j) son $\mathcal{C}^\infty$-compatibles.

Definición 1.2.9 (Compatibilidad entre atlas diferenciables). Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos atlas diferenciables en $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, son compatibles

$$\iff \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \text{ es un atlas diferenciable.}$$

Ejercicio 1.2.4. Prueba que la relación de compatibilidad de atlas diferenciables es una relación de equivalencia.

Definición 1.2.10 (Estructura diferenciable). Sea $\mathcal{A}$ un atlas diferenciable de dim n en X, $\mathcal{A}$ es una estructura diferenciable $\iff \mathcal{A}$ es maximal respecto a la inclusión.

Teorema 1.2.2. *Sea $\mathcal{A}$ un atlas diferenciable en $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico*

$$\implies \exists! \mathcal{B} \text{ estructura diferenciable en } X \text{ que lo contiene.}$$

***Demostración*:** Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las cartas de M que son C^∞-compatibles con todas las cartas de $\mathcal{A}$. Veamos que $\mathcal{D}$ es una estructura diferenciable y que es única.

Está claro que $\mathcal{D}$ cubre a M porque $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ y $\mathcal{A}$ ya cubría a M:

$$M = \bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{A}} U \subset \bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{D}} U.$$

Veamos que las cartas de $\mathcal{D}$ son C^∞-compatibles entre sí: Sean (U_1, ψ_1) y (U_2, ψ_2) dos cartas de $\mathcal{D}$. Tenemos que ver que la composición

$$\psi_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\psi_2 \circ \psi_1^{-1}} \psi_2(U_1 \cap U_2)$$

es diferenciable. Sea $p \in U_1 \cap U_2$, y sea $(V, \varphi) \in \mathcal{A}$ una carta que contiene a p. Entonces, como (U_1, ψ_1) y (U_2, ψ_2) son compatibles con (V, φ), tenemos que la composición

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_1 \cap U_2 \cap V) \xrightarrow{\varphi \circ \psi_1^{-1}} \varphi(U_1 \cap U_2 \cap V) \xrightarrow{\psi_2 \circ \varphi^{-1}} \psi_2(U_1 \cap U_2 \cap V)$$

es diferenciable, y por tanto $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ es diferenciable en $\psi_1(p)$. Como esto es cierto para todo $p \in U_1 \cap U_2$ (Ojo: al cambiar de p quizá haya que cambiar la carta (V, φ)), deducimos que $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_1 \cap U_2) \to \psi_2(U_1 \cap U_2)$ es diferenciable.

Veamos ahora que $\mathcal{D}$ es maximal: Si $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ es otro atlas que contiene a $\mathcal{D}$, entonces cualquier carta de $\mathcal{D}'$ tiene que ser C^∞-compatible con el resto de las cartas de $\mathcal{D}'$, en particular lo ha de ser con las cartas de $\mathcal{A}$, y por tanto será una carta de $\mathcal{D}$, así que $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.

Si $\mathcal{D}'$ es otro atlas maximal que contiene a $\mathcal{A}$, entonces todas sus cartas son C^∞-compatibles con $\mathcal{A}$ y por tanto son cartas de $\mathcal{D}$, así que $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}'$ es maximal, tenemos que $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$. ■

Definición 1.2.11 (Variedad diferenciable). Sea $(X, \mathcal{T})$ un esp top y $\mathcal{A}$ una estructura diferenciable de dim n en X, $(X, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable de dim n $\iff$

(i) $(X, \mathcal{T})$ es de Hausdorff.

(ii) $(X, \mathcal{T})$ es segundo numerable.

Ejemplos 1.2.5 (de variedades diferenciables).

$\boxed{1}$ Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ con $\mathcal{T}_u$ la topología usual, tomamos $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \mathrm{id})\}$, entonces

(a) $\mathcal{A}$ es un atlas de dimensión 1 porque $\mathbb{R} \subset \mathbb{R} \in \mathcal{T}_u$ y id es un homeomorfismo.

(b) $\mathcal{A}$ es diferenciable por la `Prop-atlas-unicarta-imp-diferenciable/`Proposición 1.

(c) Por el `Teo-existencia-unicidad-estructura-diferenciable/`Teorema 1, sabemos que $\exists \mathcal{B}$ estructura diferenciable que contiene a $\mathcal{A}$.

Por tanto, como $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es de Hausdorff y segundo numerable, $(X, \mathcal{B})$ es una variedad diferenciable de dimensión 1.

$\boxed{2}$ Consideramos nuevamente $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ pero con $\mathcal{A}' = \{(\mathbb{R}, \phi)\}$ donde $\forall x \in \mathbb{R} : \phi(x) = x^3$. Entonces, exactamente igual que antes tenemos que

(a) $\mathcal{A}'$ es un atlas de dimensión 1 porque $\mathbb{R} \subset \mathbb{R} \in \mathcal{T}_u$ y ϕ es un homeomorfismo.

(b) $\mathcal{A}'$ es diferenciable por la `Prop-atlas-unicarta-imp-diferenciable/`Proposición 1.

(c) Por el `Teo-existencia-unicidad-estructura-diferenciable/`Teorema 1, sabemos que $\exists \mathcal{B}'$ estructura diferenciable que contiene a $\mathcal{A}'$.

Por tanto, $(X, \mathcal{B}')$ es una variedad diferenciable de dimensión 1.

¿Son el ejemplo 1 y el 2 la misma variedad diferenciable?

***Solución*:** Si lo fuesen, las cartas $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ y $(\mathbb{R}, \phi)$ estarían contenidas en el mismo atlas-diferenciable maximal y, por tanto, serían $\mathcal{C}^\infty$-compatibles. Pero esto no es cierto porque $\forall x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} : (\mathrm{id} \circ \phi^{-1})(x) = x^{1/3}$ no es $\mathcal{C}^\infty$.

$\boxed{3}$ Sea $M_n(\mathbb{R}) = \{$matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales$\}$.

Se tiene una biyección entre $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$, por lo que podemos dotar a $M_n(\mathbb{R})$ de la topología usual de $\mathbb{R}^{n^2}$. Por tanto, $M_n(\mathbb{R})$ es una variedad topológica de dimensión n^2 con atlas estándar $\mathcal{A} = \{(M_n(\mathbb{R}), \mathrm{id})\}$.

$\boxed{4}$ Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable de dimensión n y $V \subset M$ abierto, entonces $(V, \mathcal{A}')$ donde $\mathcal{A}' = \left\{\left(U \cap V, \psi\big|_{U\cap V}\right) : (U, \psi) \in A\right\}$ es una variedad diferenciable:

(a) V es de Hausdorff y segundo numerable porque es subespacio de M.

(b) Por el `Teo-existencia-unicidad-estructura-diferenciable/`Teorema 1, basta ver que $\mathcal{A}'$ es un atlas diferenciable:

i. $\mathcal{A}'$ es un atlas porque $\displaystyle\bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{A}} U \cap V = V \cap \bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{A}} U = V \cap M = V$ y $\forall A \in \mathcal{A}' : A$ es una carta de V:

A. $\forall \left(U \cap V, \psi\big|_{U\cap V}\right) \in \mathcal{A}' : U \cap V$ es abierto en V porque U es abierto en M.

B. $\psi\big|_{U\cap V}$ es homeomorfismo porque como ψ es un homeomorfismo y $U \cap V$ es abierto en V, $\psi(U \cap V)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\psi\big|_{U\cap V}$ es un homeomorfismo.

ii. $\mathcal{A}$ es diferenciable porque dados $\left(U_1 \cap V, \psi_1\big|_{U_1\cap V}\right), \left(U_2 \cap V, \psi_2\big|_{U_2\cap V}\right) \in \mathcal{A}'$, se tiene que $\psi_2\big|_{U_2\cap V} \circ \left(\psi_1\big|_{U_1\cap V}\right)^{-1} = \left(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}\right)\big|_{\psi_1(U_1\cap U_2)}$ es $\mathcal{C}^\infty$ porque $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ lo es y, análogamente para $\left(\psi_1\big|_{U_1\cap V}\right)^{-1} \circ \psi_2\big|_{U_2\cap V}$.

1.3 La topología cociente

Definición 1.3.1 (Topología cociente). Sea $\sim$ una relación de equivalencia en $(X, \mathcal{T}_X)$ espacio topológico, $\mathcal{T}_\pi$ es la topología cociente

$$\iff \mathcal{T}_\pi \text{ es la topología de } {}^{X}\!/\!_{\sim} \text{ inducida por } \pi\colon X \longrightarrow {}^{X}\!/\!_{\sim} \text{ donde } \forall x \in X : \pi(x) = [x].$$

Es decir, $\mathcal{T}_\pi$ es la topología cociente $\iff \mathcal{T}_\pi = \left\{V \subset {}^{X}\!/\!_{\sim} : \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\right\}$.

Al espacio topológico $\left({}^{X}\!/\!_{\sim}, \mathcal{T}_\pi\right)$ se le llama **espacio cociente** de X por $\sim$.

Proposición 1.3.1. *Sea $\sim$ una relación de equivalencia en $(X, \mathcal{T})$ esp topológico, entonces*

$$f\colon \left({}^{X}\!/\!_{\sim}, \mathcal{T}_\pi\right) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y) \text{ es continua } \iff f \circ \pi\colon (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y) \text{ es continua.}$$

***Demostración*:** Por definición, f es continua $\iff \forall V \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_\pi$ que es equivalente (por la definición de $\mathcal{T}_\pi$) a que $\forall V \in \mathcal{T}_Y : \pi^{-1}\left(f^{-1}(V)\right) \in \mathcal{T}_X$. Luego como $\pi^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ \pi)^{-1}$, se tiene que f es continua $\iff f \circ \pi$ es continua. ∎

Teorema 1.3.2 (Universal de las aplicaciones cocientes). *Sea $\rho\colon (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ una aplicación cociente, $(Z, \mathcal{T}_Z)$ un espacio topológico y $g\colon X \longrightarrow Z$ una aplicación constante en cada fibra de ρ, es decir, $\forall y \in Y : \forall x \in \rho^{-1}(\{y\}) : g(x) = c_y \in Z$*

$$\implies \exists! f\colon Y \longrightarrow Z \text{ tal que } f \circ \rho = g \text{ y se cumple que}$$

(i) *f es continua $\iff$ g es continua.*

(ii) *f es una aplicación cociente $\iff$ g es una aplicación cociente.*

***Demostración*:**

∎

Ejemplo 1.3.1 (de aplicación de la propiedad universal). Definimos la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathbb{R}$ dada por $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.3.2 (Relación de equivalencia abierta). Sea $\sim$ una relación de equivalencia en $(X, \mathcal{T}_X)$ espacio topológico, $\sim$ es abierta

$$\iff \forall U \in \mathcal{T}_X : \left(\pi^{-1} \circ \pi\right)(U) = \{x \in X : \exists p \in U : x \sim p\} \in \mathcal{T}_X.$$

Lema 1.3.3. *Sea $\sim$ una relación de equivalencia en $(X, \mathcal{T}_X)$ espacio topológico, entonces*

$$\sim \text{ es abierta } \iff \pi\colon X \longrightarrow {}^{X}\!/\!_{\sim} \text{ es abierta.}$$

***Demostración*:** Se deja como ejercicio. ■

Lema 1.3.4. *Sea $\sim$ abierta en $(X, \mathcal{T})$ esp topológico segundo numerable*

$$\Longrightarrow \left(X/\sim, \mathcal{T}_\pi\right) \text{ es segundo numerable.}$$

***Demostración*:**

■

Lema 1.3.5. *Sea $\sim$ abierta en $(X, \mathcal{T})$ esp topológico, entonces*

$$X/\sim \text{ es de Hausdorff} \iff \mathcal{R} := \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\} \text{ es cerrado.}$$

***Demostración*:**

$\boxed{\Rightarrow}$ Veamos que $(X \times X) \setminus \mathcal{R}$ es abierto con la topología producto.

Sea $(x, y) \notin \mathcal{R}$, entonces $x \not\sim y \implies [x] \neq [y]$ en $X/\sim$. Como $X/\sim$ es de Hausdorff, $\exists U \in \mathcal{V}([x]), V \in \mathcal{V}([y]) : U \cap V = \varnothing$. Por tanto, $\varnothing = \pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$.

Veamos que $(\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)) \cap \mathcal{R} = \varnothing$. Sea $(a, b) \in (\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)) \cap \mathcal{R}$, entonces

- $(a, b) \in \mathcal{R} \implies a \sim b \implies [a] = [b]$ en $X/\sim$ y
- $(a, b) \in (\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)) \implies [a] \in U \wedge [b] \in V$.

Por tanto, $[a] \in U \cap V = \varnothing$, luego $(a, b) \notin \mathcal{R}$. $\longrightarrow\longleftarrow$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $[x] \neq [y]$ en $X/\sim$, entonces $(x, y) \notin \mathcal{R} \implies \exists A_1, A_2 \subset X$ tales que $(x, y) \in A_1 \times A_2 \wedge (A_1 \times A_2) \cap \mathcal{R} = \varnothing$. Definimos $U = \pi(A_1)$ y $V = \pi(A_2)$ que son abiertos de $X/\sim$ porque $\sim$ es abierta. Entonces, $x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \varnothing$. Por tanto, $X/\sim$ es de Hausdorff.

■

1.3.1 Espacio proyectivo

Sea V un espacio vectorial normado sobre un cuerpo K. Denotamos por $K^* = K \setminus \{0\}$ y $V^* = V \setminus \{0\}$. Definimos la relación de equivalencia $\sim$ en V^* mediante

$$\forall x, y \in V^* : \quad x \sim y \iff \exists \lambda \in K^* : x = \lambda y.$$

Tomamos la topología cociente en $\mathbb{P}(V) := V^*/\sim$ inducida por la proyección $\pi \colon V^* \longrightarrow V^*/\sim$ dada por $\pi(x) = [x]$. La denotaremos por $\mathcal{T}_\sim := \{U \subset \mathbb{P}(V) : \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{V^*}\}$ donde $\mathcal{T}_{V^*}$ es la topología inducida en V^* por $\mathcal{T}_V$ (que viene dada por la base de bolas abiertas de V).

Definición 1.3.3. El espacio topológico $(\mathbb{P}(V), \mathcal{T}_\sim)$ se denomina espacio proyectivo sobre V.

Veamos que $\sim$ es una relación abierta en V^*. Por definición, esto significa que

$$\begin{aligned} \pi \text{ es una aplicación abierta } &\iff \forall U \in \mathcal{T}_{V^*} : \pi(U) \in \mathcal{T}_\sim \\ &\iff \forall U \in \mathcal{T}_{V^*} : \pi^{-1}(\pi(U)) \in \mathcal{T}_{V^*} \\ &\iff \forall U \in \mathcal{T}_{V^*} : \{p \in V^* : \exists q \in U : \exists \lambda \in K^* : p = \lambda q\} \in \mathcal{T}_{V^*}. \end{aligned}$$

Ahora bien, podemos ver este último conjunto como la unión de los conjuntos $\{\lambda q : q \in U\}$ con $\lambda \in K^*$. Como $U \in \mathcal{T}_{V^*}$, tenemos que $\forall p \in U : \exists \delta > 0 : B_\delta(p) \subset U$. Por tanto, $\forall \lambda \in K^* : \exists \hat{\delta} = |\lambda| \cdot \delta > 0 : B_{\hat{\delta}}(\lambda p) \subset \{\lambda q : q \in U\}$, luego $\forall \lambda \in K^* : \{\lambda q : q \in U\} \in \mathcal{T}_{V^*}$.

$$\implies \forall U \in \mathcal{T}_{V^*} : \{p \in V^* : \exists q \in U : \exists \lambda \in K^* : p = \lambda q\} = \bigcup_{\lambda \in K^*} \{\lambda q : q \in U\} \in \mathcal{T}_{V^*}.$$

Por tanto, π es una aplicación abierta y $\sim$ es una relación abierta.

1.3.1.1 Espacio proyectivo real

Tenemos que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es un espacio topológico con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^n$, que, como es de Hausdorff y segundo numerable, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ también lo es. Veamos que $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ también hereda estas propiedades.

1. Como $\sim$ es abierta, por el `Lem-relacion-equivalencia-abierta-segundo-numerable`/Lema 1, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ es segundo numerable.

2. Veamos que $\mathcal{R} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : x \sim y\}$ es un conjunto cerrado con la topología producto. Podemos escribir

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) : \forall i, j \in \mathbb{N}_n : i \neq j : \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = 0 \right\}.$$

   Luego si definimos $f \colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sum_{i \neq j} \left| \begin{smallmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{smallmatrix} \right|$, $\mathcal{R} = f^{-1}(\{0\})$ es la preimagen de un cerrado por una función continua, por lo que $\mathcal{R}$ es cerrado. Como $\sim$ es abierta y $\mathcal{R}$ es cerrado, por el `Lem-relacion-equivalencia-abierta-hausdorff` $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ es de Hausdorff.

Notación: $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : [x] = [(x_1, \ldots, x_n)] =: [x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$.

Dotemos a $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ de una estructura diferenciable. Sea $\mathcal{A} = \{(U_i, \psi_i) : i \in \mathbb{N}_n\}$ con

$$\forall i \in \mathbb{N}_n : U_i = \left\{ [x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) : x_i \neq 0 \right\}$$

y $\forall [x] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) : \psi_i([x_1 : \cdots : x_n]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces

1. $\forall (U_i, \psi_i) \in \mathcal{A} : (U_i, \psi_i)$ es una carta de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$:

   (a) $\forall i \in \mathbb{N}_n : U_i$ es un abierto de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ porque, por definición de topología cociente, lo es $\iff \pi^{-1}(U_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x_i \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es abierto.

   (b) Veamos que $\forall i \in \mathbb{N}_n : \psi_i$ es un homeomorfismo:

      i. Primero veamos que ψ_i está bien definida. Sean $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ distintos representantes de la misma clase ($[x] = [y]$). Entonces, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^* : x = \lambda y$
      $$\implies \psi([x]) = \left(\frac{\lambda y_1}{\lambda y_i}, \ldots, \frac{\lambda y_{i-1}}{\lambda y_i}, \frac{\lambda y_{i+1}}{\lambda y_i}, \ldots, \frac{\lambda y_n}{\lambda y_i}\right) = \psi([y]).$$

      ii. Por la `Prop-fn-continua-cociente-iff-composicion-continua/`Proposición 1 ψ_i es continua $\iff \psi_i \circ \pi|_{\pi^{-1}(U_i)} : \pi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ es continua.
      $$(\psi_i \circ \pi)(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$
      donde cada componente es continua porque $\forall x \in \pi^{-1}(U_i) : x_i \neq 0$.

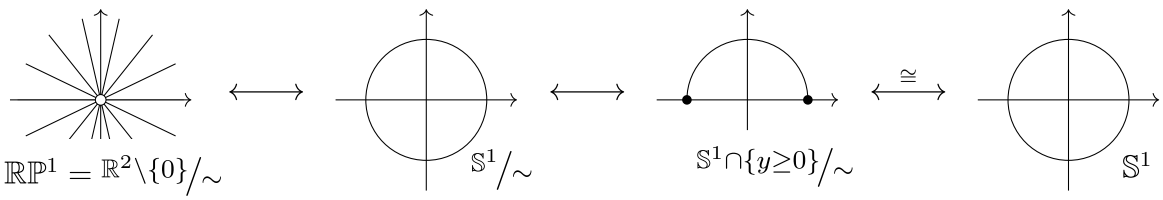
      iii. Observamos que $\mathrm{Im}(\psi_i) = \mathbb{R}^{n-1}$ y que $\psi_i^{-1} \colon \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ viene dada por
      $$\psi_i^{-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = [a_1 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \cdots : a_{n-1}]$$
      que es contina por ser composición de funciones continuas.

2. Como $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_n} U_i = \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ y $\forall (U_i, \psi_i) \in \mathcal{A} : (U_i, \psi_i)$ es una carte de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{A}$ es un atlas de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$. Veamos que $\mathcal{A}$ es diferenciable. Sean $(U_i, \psi_i), (U_j, \psi_j) \in \mathcal{A}$, entonces
   $$\begin{aligned} \psi_j \circ \psi_i^{-1} \colon \psi_i(U_i \cap U_j) &\to \psi_j(U_i \cap U_j) \\ (a_1, \ldots, a_{n-1}) &\mapsto \psi_j\big([a_1 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \cdots : a_{n-1}]\big) \\ &= \left(\frac{a_1}{a_j}, \ldots, \frac{a_{j-1}}{a_j}, \frac{a_{j+1}}{a_j}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_j}\right) \end{aligned}$$
   que es $\mathcal{C}^\infty$ porque cada componente es $\mathcal{C}^\infty$ ya que $\forall a \in \psi_i(U_i \cap U_j) : a_j \neq 0$. Análogamente, $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$, luego las cartas de $\mathcal{A}$ son $\mathcal{C}^\infty$-compatibles.

3. Por el `Teo-existencia-unicidad-estructura-diferenciable/`Teorema 1, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ es una variedad diferenciable de dimensión $n - 1$.

Definición 1.3.4 (Espacio preoyectivo real). A la variedad diferenciable $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ la llamamos espacio proyectivo real de dimensión n y la denotamos por $\mathbb{RP}^n$.

Ejemplo 1.3.2 (Plano proyectivo real). Consideramos $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, entonces



Es decir, $\mathbb{RP}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ (prueba completa en el ejercicio 7 de la H.2)

2. Funciones diferenciables

2.1 Funciones diferenciables

Definición 2.1.1 (Función diferenciable). Sean $(M, \mathcal{A})$ una v.d. y $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, f es diferenciable en $p \in M$

$$\iff \exists\,(U, \psi) \in \mathcal{A} \text{ carta de } M : p \in U \wedge f \circ \psi^{-1} \colon \psi(U) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es diferenciable en } \psi(p).$$

Además, f es diferenciable en M si lo es en todo punto de M.

La función $f \circ \psi^{-1}$ se denomina **expresión local** de f en la carta (U, ψ).

Ejercicio 2.1.1. Demuestra que la definición no depende de la carta elegida, es decir, si $(U_1, \psi_1), (U_2, \psi_2)$ son cartas de M con $p \in U_1, U_2$, entonces $f \circ \psi_1^{-1}$ es diferenciable en $\psi_1(p) \iff f \circ \psi_2^{-1}$ es diferenciable en $\psi_2(p)$.

Observación 2.1.2. La expresión local sí depende de la carta elegida.

Ejercicio 2.1.2. Sea $\mathbb{S}^1$ con el atlas de las proyecciones estereográficas. Calcula la expresión local de $f\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x$ con ambas cartas.

Ejercicio 2.1.3. Sea M una variedad diferenciable y (U, ψ) una carta de M, demuestra que la proyección en la i-ésima coordenada (π_i) es una función diferenciable en M.

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\psi} & \psi(U) \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad\pi_i\quad} & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & \psi(p) & \longmapsto & \pi_i(\psi(p)) \end{array}$$

Ejercicio 2.1.4. Demuestra que f diferenciable $\implies$ f continua.

Notación: $\mathcal{C}^\infty(M) := \{f\colon M \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es diferenciable}\}$.

Definición 2.1.3 (Propiedad local). Sea P una propiedad de las funciones $A \to B$ con $A \subset M$ abierto, P es una propiedad local $\iff$

(i) Si $U \subset V$ son abiertos de M y $f\colon V \longrightarrow B$ cumple P, entonces $f\big|_U \colon U \longrightarrow f(U)$ también cumple P.

(ii) Si $V = \bigcup_{i\in I} A_i$ es unión de abiertos de M y $f\colon V \longrightarrow B$ satisface que $\forall i \in I$: $f\big|_{A_i} \colon A_i \longrightarrow f(A_i)$ cumple P, entonces $f\colon V \longrightarrow B$ cumple P.

Ejemplos 2.1.5 (de propiedades locales y no locales).

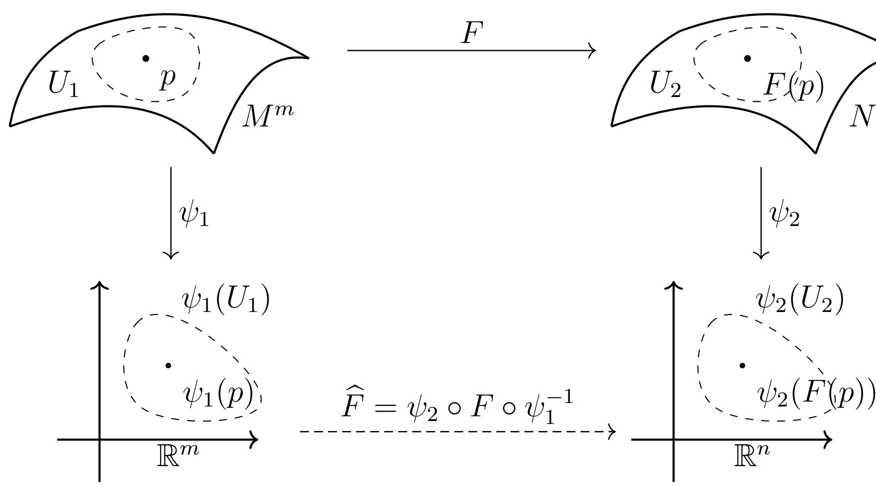
	(i)	(ii)	Propiedad local
Sobreyectividad	NO	SÍ	NO
Inyectividad	SÍ	NO	NO
Biyectividad	NO	NO	NO
Continuidad	SÍ	SÍ	SÍ
Diferenciabilidad	SÍ	SÍ	SÍ
Ser constante	SÍ	NO	NO

2.2 Aplicaciones diferenciables

Definición 2.2.1 (Aplicación diferenciable). Sean M^m y N^n dos variedades diferenciables[1], $F\colon M \longrightarrow N$ continua es diferenciable en $p \in M \iff \exists\,(U_1, \psi_1), (U_2, \psi_2)$ cartas de M y N respectivamente con $p \in U_1$ y $F(p) \in U_2$ tales que

$$\psi_2 \circ F \circ \psi_1^{-1}\colon \psi_1\left(U_1 \cap F^{-1}(U_2)\right) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^n \text{ es } \mathcal{C}^\infty \text{ en } \psi(p).$$

Además, F es diferenciable en $M \iff$ lo es en todo punto de M.



Ejercicio 2.2.1. Demuestra que este concepto no depende de las cartas elegidas.

Ejercicio 2.2.2. Demuestra que

(a) la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable.

(b) la identidad es diferenciable.

[1]El superíndice indica la dimensión de la variedad diferenciable.

Ejercicio 2.2.3. Sea (U, ψ) una carta de M, demuestra que $\psi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

Ejercicio 2.2.4. Demuestra que "ser diferenciable" es una propiedad local.

Definición 2.2.2 (Difeomorfismo). Sean M y N dos variedades diferenciables, la aplicación $F\colon M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo $\iff$

(i) F es diferenciable.

(ii) $\exists F^{-1}\colon N \longrightarrow M$ diferenciable.

Definición 2.2.3 (Variedades diferenciables difeomorfas). Sean M y N dos variedades diferenciables, M y N son difeomorfas

$$\iff \exists F\colon M \longrightarrow N \text{ difeomorfismo.}$$

Ejercicio 2.2.5. Demuestra que la relación "ser difeomorfas" es de equivalencia.

Ejemplo 2.2.6 (de variedades difeomorfas).

Ya vimos en los Ejemplos 1.2.5 que $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}$ con $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \mathrm{id})\}$ y $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R}$ con $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \phi)\}$ con $\phi(x) = x^3$ son dos variedades diferenciables distintas, pero ¿son difeomorfas?

La respuesta es sí, mediante el difeomorfismo $F\colon \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_1$ dado por $F(x) = x^3$.

(i) F es una aplicación diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}$ porque F es $\mathcal{C}^\infty$ ya que su expresión local en la única carta es id que es $\mathcal{C}^\infty$.

(ii) F^{-1} dada por $F^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en todo punto de $\mathbb{R}$ por la misma razón.

Ejercicio 2.2.7. Sea $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ donde $\mathbb{R}$ tiene la estructura diferenciable estándar y $\mathbb{S}^1$ tiene la estructura diferenciable dada por las proyecciones estereográficas. Demuestra que F es un diferenciable. ¿Es F un difeomorfismo?

Definición 2.2.4 (Función *bump*). Sea M^n una variedad diferenciable y sean $A \subset U \subset M$ con A cerrado y U abierto, $f\colon M \longrightarrow [0,1]$ es una función *bump* para A con soporte en U

$$\iff f \text{ es diferenciable } {}_\wedge\ f(p) = \begin{cases} 1 & p \in A \\ 0 & p \notin U \end{cases}.$$

Lema 2.2.1. *Sea M^n una variedad diferenciable y sean $A \subset U \subset M$ con A cerrado y U abierto $\implies \exists f\colon M \longrightarrow [0,1]$ función bump para A con soporte en U.*

Definición 2.2.5. Sean M^n una variedad diferenciable y $A \subset M$ cerrado, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable $\iff \exists V \supset A$ abierto, $\widetilde{f}\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en V : $\widetilde{f}|_A = f$.

3. Espacio tangente

3.1 Vectores tangentes

Observación 3.1.1. Existe cierta dicotomía en la manera que tenemos de pensar en $x \in \mathbb{R}^n$:

1. Por un lado, $x = (x^1, \ldots, x^n)$ es una lista ordenada de números reales que corresponden a las coordenadas cartesianas de x en un espacio euclídeo de dimensión n. Es decir, x contiene información sobre la **posición** de un punto en el espacio.

2. Por otro lado, x es un vector en un espacio vectorial de dimensión n. Es decir, x contiene información sobre la **dirección** y la **magnitud** de una flecha en el espacio.

Entonces, cuando pensamos en $\mathbb{R}^n$ como un espacio afín, estamos pensando en la copia de vectores ($\mathbb{R}^n$ con la segunda interpretación) que salen de un punto $p \in \mathbb{R}^n$ (con la primera interpretación).

Definición 3.1.2 (Derivación). Sea $p \in M$ variedad diferenciable, $w \colon \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una derivación en $p \iff$

(i) w es lineal.

(ii) w satisface la regla de Leibniz: $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M) : w(fg) = f(p)w(g) + g(p)w(f)$.

Definición 3.1.3 (Espacio tangente). Sea $p \in M$ variedad diferenciable, T_pM es el espacio tangente a M en $p \iff T_pM = \{w \colon \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ derivación en } p\}$.

Los elementos $w \in T_pM$ se denominan **vectores tangentes**.

Lema 3.1.1. *Sea $p \in M$ v.d. $\implies T_pM$ es un espacio vectorial con las operaciones*

- *Suma: $\forall v, w \in T_pM, f \in \mathcal{C}^\infty(M) : (v + w)(f) = v(f) + w(f)$.*
- *Producto por escalar: $\forall v \in T_pM, f \in \mathcal{C}^\infty(M), a \in \mathbb{R} : (av)(f) = a \cdot v(f)$.*

***Demostración*:** Se deja como ejercicio. ■

Observación 3.1.4. Sea $p \in \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \mathbb{N}_n$: la derivada parcial $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ es una derivación en p.

Lema 3.1.2. *Sean $p \in M$ v.d., $w \in T_p(M)$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces*

1. f constante $\implies w(f)=0$.

2. $f(p)=g(p)=0 \implies w(fg)=0$.

***Demostración*:**

1. Basta probarlo para $f_1 \equiv 1$ ya que para $f \equiv c \in \mathbb{R}$ se tiene por linealidad que $w(f)=w(cf_1)=cw(f_1)=0$. Para f_1, podemos aplicar la regla de Leibniz:
$$w(f_1)=w(f_1\cdot f_1)=f_1(p)w(f_1)+f_1(p)w(f_1)=2w(f_1) \implies w(f_1)=0.$$

2. De manera similar al apartado anterior, podemos aplicar la regla de Leibniz:
$$w(fg)=f(p)w(g)+g(p)w(f)=0+0=0.$$

$\blacksquare$

Observación 3.1.5. Sean $v,p\in\mathbb{R}^n$, entonces $\left.D_v\right|_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$ donde

$$\begin{aligned}\forall f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}):\ \left.D_v\right|_p(f) &= \sum_{i=0}^n v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x^n}(p)\right)}_{Df(p)}\begin{pmatrix} v^1\\ \vdots \\ v^n\end{pmatrix}\\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(p+tv) = (f\circ\gamma)^{-1}(0)\end{aligned}$$

y para $v=e_i$ (donde $\{e_1,\dots,e_n\}$ es la base estándar de $\mathbb{R}^n$) tenemos $\left.D_{e_i}\right|_p(f)=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(p)$.

Teorema 3.1.3. $\forall p\in\mathbb{R}^n:\ \begin{aligned}\phi\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_p(\mathbb{R}^n)\\ v &\longmapsto \left.D_v\right|_p\end{aligned}$ *es un isomorfismo entre espacios vectoriales.*

***Demostración*:** Basta probar que ϕ es lineal y biyectiva:

– Linealidad: Sean $a,b\in\mathbb{R}$ y $u,v\in\mathbb{R}^n$, entonces $\forall f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$:
$$\begin{aligned}\phi(au+bv)(f) &= \left.D_{au+bv}\right|_p(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(p+t(au+bv))\\ &= a\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(p+tu) + b\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(p+tv) = a\left.D_u\right|_p(f)+b\left.D_v\right|_p(f)\\ &= a\phi(u)(f)+b\phi(v)(f) \implies \phi(au+bv)=a\phi(u)+b\phi(v).\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Corolario 3.1.4. *Así que tenemos un isomorfismo canónico*[1] $\mathbb{R}^n \simeq T_p(\mathbb{R}^n)$ *con lo que a*

[1] Ha habido toda una discusión en clase sobre qué significa "canónico". En palabras de Fede, el isomorfismo es canónico porque no se ha tomado ninguna decisión para definirlo, pero esto no parece un argumento muy

partir de ahora podemos identificar ambos espacios vectoriales.

3.2 Diferencial de una aplicación

Definición 3.2.1 (Diferencial). Sean M y N variedades diferenciables y $F\colon M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable, $DF|_p$ es la diferencial de F en $p \in M$

$$\iff DF|_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$$
$$w \longmapsto DF|_p\,(w) : \mathcal{C}^\infty(N) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g \longmapsto DF|_p\,(w)(g) = w(g \circ F).$$

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "DF|_p"] & T_{F(p)}N \\
T_{\hat{p}}\mathbb{R}^m \arrow[u, "D\psi^{-1}|_{\hat{p}}"] \arrow[r, "D\widehat{F}\big|_{\hat{p}}"] & T_{\widehat{F}(\hat{p})}\mathbb{R}^n \arrow[u, "D\varphi^{-1}|_{\widehat{F}(\hat{p})}"']
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 3.2.1. Demuestra que la aplicación $DF|_p$ está bien definida y es lineal.

Lema 3.2.1. *Sean M_1, M_2, M_3 variedades diferenciables y $G\colon M_1 \longrightarrow M_2$, $F\colon M_2 \longrightarrow M_3$ aplicaciones diferenciables, entonces*

1. $D(F \circ G)|_p = DF|_{G(p)} \circ DG|_p$.
2. $D(\mathrm{id})|_p = \mathrm{id}$.
3. *F difeomorfismo* $\implies \forall p \in M_1 : DF|_p$ *es un isomorfismo y* $DF^{-1}|_{F(p)} = DF|_p{}^{-1}$.

***Demostración*:** Se deja como ejercicio. ■

Definición 3.2.2 (Soporte). Sea $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, $\mathrm{supp}(f)$ es el soporte de $f \iff \mathrm{supp}(f) = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}$.

Lema 3.2.2. *Sean $p \in M$ variedad diferenciable, $v \in T_pM$, $U \in \mathcal{V}(p)$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con* $f\big|_U = g\big|_U \implies v(f) = v(g)$.

***Demostración*:** Sea $h = f - g$ (entonces $h\big|_U = 0$). Sea $\psi\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función bump para $\mathrm{supp}(h)$ con soporte en $U \setminus \{p\}$. Es decir, $\psi(\mathrm{supp}(h)) = 1 \wedge \psi(p) = 0$. Observamos

(i) $\psi \cdot h = h$ porque $\forall q \in M : h(q) = 0 \vee (h(q) \neq 0 \implies q \in \mathrm{supp}(h) \implies \psi(q) = 1)$.

---

riguroso.

(ii) $\psi(p) = 0 \wedge h(p) = 0$ por lo que $v(\psi h) = 0$. Usando el apartado anterior tenemos $v(\psi h) = v(h) = v(f-g) = v(f) - v(g) = 0$. Por tanto concluimos que $v(f) = v(g)$.

■

Proposición 3.2.3. *Sea M una variedad diferenciable, $U \in \mathcal{V}(p)$ y $\iota \colon U \longrightarrow M$ la función inclusión*

$$\Longrightarrow \forall p \in U : D\iota\big|_p : T_pU \longrightarrow T_pM \text{ es un isomorfismo.}$$

***Demostración*:** Consultar Lee, 2013 página 56. ■

Corolario 3.2.4. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n*

$$\Longrightarrow \forall p \in M : \dim T_pM = n \text{ (como espacio vectorial).}$$

***Demostración*:** Sea (U, ψ) una carta de M que contiene a p, tenemos

$$T_pM \xleftarrow{D\iota|_p} T_pU \xrightarrow{\psi} T_{\hat{p}}\hat{U} \xrightarrow{D\iota'|_{\hat{p}}} T_{\hat{p}}\mathbb{R}^n.$$

Como ψ es un difeomorfismo y $D\iota\big|_p$ es un isomorfismo, entonces $D\iota'\big|_{\hat{p}}$ también lo es. Por tanto, $\dim T_pM = \dim T_{\hat{p}}\mathbb{R}^n = n$. ■

Corolario 3.2.5. *Dos variedades difeomorfas tienen la misma dimensión.*

Observación 3.2.3. Cabría preguntarse si ocurre lo mismo del Corolario 3.2.5 para variedades topológicas homeomorfas. La respuesta es que sí, pero la demostración es muchísimo más complicada (no se verá en este curso).

3.2.1 Expresión local de un vector en T_pM

Sea $p \in M^m$ variedad diferenciable. Tomamos (U, ψ) una carta de M que contenga a p.

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{D\psi|_p} & T_{\hat{p}}\mathbb{R}^m \\ \cong\big\downarrow & & \big\downarrow\cong \\ T_pU & & T_{\hat{p}}\hat{U} \end{array}$$

donde $D\psi\big|_p$ es un isomorfismo no canónico.

Como $T_{\hat{p}}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, tenemos que $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_{\hat{p}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\big|_{\hat{p}}\right)$ es base de $T_{\hat{p}}\mathbb{R}^n$. Por tanto,

$$\left(D\psi^{-1}\big|_{\hat{p}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{\hat{p}} \right), \ldots, D\psi^{-1}\big|_{\hat{p}} \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\bigg|_{\hat{p}} \right) \right) \text{ es una base de } T_pM.$$

Si está claro qué carta estamos usando se escribe $\forall i \in \mathbb{N}_m : D\psi^{-1}\big|_{\hat{p}}\left(\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\hat{p}}\right) =: \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$.

Como cartas distintas dan lugar a bases diferentes de T_pM, esta base *no es canónica.*

(1) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y conocemos $f \circ \psi^{-1}$ y $v \in T_pM$ con $v = \sum_{i=1}^n v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, entonces

$$v(f) = \left(\sum_{i=1}^n v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)(f) = \sum_{i=1}^n v^i \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f)\right)$$

donde $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) = D\psi^{-1}\big|_{\hat{p}}\left(\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\hat{p}}\right)(f) = \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\hat{p}} (f \circ \psi^{-1})$.

Definición 3.2.4 (Curva diferenciable). Sea M una var diferenciable y $I \subset \mathbb{R}$ abierto, $\gamma \colon I \longrightarrow M$ es una curva diferenciable (o camino)

$$\iff \gamma \text{ es una aplicación diferenciable.}$$

Definición 3.2.5 (Velocidad). Sea $\gamma \colon I \longrightarrow M$ una curva diferenciable en una variedad diferenciable M, la velocidad de γ en $s \in I$ es el vector $D\gamma|_s \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_s\right) \in T_{\gamma(s)}M$.

También se denota por $\gamma'(s)$, $\frac{\partial \gamma}{\partial t}(s)$ o $\left.\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right|_{t=s}$.

¿Cómo podemos interpretar $\gamma'(s)$ como una derivación escalar en $p \in M$?

$$\begin{aligned} v \colon \mathcal{C}^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto D\gamma|_s \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_s\right)(f) \end{aligned} \qquad (f \circ \gamma)'(s) = D(f \circ \gamma)_s \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_s\right)$$

En coordenadas, si $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ es la base de T_pM dada por la carta

$$\gamma'(s) = v = \sum_{j=1}^n \frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}t}(s) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\gamma(s)}$$

Tengo así una aplicación que va de las curvas diferenciables en M que pasan por $p \in M$ al espacio tangente de M en p que envía γ a $\gamma'(s)$.

Lema 3.2.6. *Esta aplicación es sobreyectiva.*

***Demostración*:** Usando cartas, basta demostrarlo para $M = \mathbb{R}^n$. Sea $v \in \mathbb{R}^n = T_p\mathbb{R}^n$, construimos

$$\begin{aligned} \gamma \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \gamma(t) = p + tv \end{aligned}$$

y $\gamma'(0) = v \wedge \gamma(0) = p$. Así que podemos interpretar $v \in T_pM$ como velocidades de curvas.

Dos curvas γ_1, γ_2 darán lugar al mismo vector tangente si y solo si $\exists\,(U, \psi)$ carta que contiene a p tal que $(\psi \circ \gamma_1)'\,(s) = (\psi \circ \gamma_2)'\,(s)$.

Observación 3.2.6. Esta relación entre dos curvas es una relación de equivalencia.

■

Ejemplos 3.2.2 (de curvas diferenciables y sus velocidades).

$\boxed{1}$ Consideramos $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0)$, entonces $\gamma(0) = (1, 0, 0)$. Queremos ver cómo actúa $\gamma'(0)$ sobre una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2)$.

Por ejemplo, consideramos $f\colon \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, entonces

$$\begin{aligned} v(f) &= (f \circ \gamma)'\,(0) = (f\,(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0))'\,(0) \\ &= \left(\cos^2 2\pi t + \sin^2 2\pi t + 0\right)'\,(0) = (1)'(s) = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, si consideramos $g\colon \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y, z) = x + y + z$, entonces

$$v(g) = (g \circ \gamma)'\,(0) = (\cos 2\pi t + \sin 2\pi t)'\,(0) = 2\pi.$$

4. Inmersiones y submersiones

4.1 Definiciones y resultados básicos

Definición 4.1.1. Sean V, W dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ y $A, B\colon V \longrightarrow W$ dos aplicaciones lineales, A y B son equivalentes

$$\iff \exists P, Q \text{ isomorfimos} : PAQ = B.$$

Lema 4.1.1. *Sean $A, B\colon V \longrightarrow W$ dos aplicaciones lineales,*

$$A \text{ y } B \text{ son equivalentes} \iff \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B.$$

***Demostración*:** ■

Definición 4.1.2 (Rango de una aplicación diferenciable). Sea $F\colon M \longrightarrow N$ una apl diferenciable, $\operatorname{rang} F\big|_p$ es el rango de F en $p \iff \operatorname{rang} F\big|_p = \operatorname{rang}\left(DF\big|_p\right)$.

Observación 4.1.3. Sea $F\colon M \longrightarrow N$ un difeomorfismo $\implies \forall p \in M : \operatorname{rang} F\big|_p = \dim M$.

Definición 4.1.4 (Difeomorfismo local). Sea $F\colon M \longrightarrow N$ una apl diferenciable, F es un difeomorfismo local

$$\iff \forall p \in M : \exists U \in \mathcal{V}(p) : F(U) \in \mathcal{T}_N \wedge F\big|_U \text{ es un difeomorfismo.}$$

Teorema 4.1.2. *Sea $F\colon M \longrightarrow N$ una apl diferenciable,*

$$F \text{ es un difeomorfismo local} \iff \forall p \in M : \operatorname{rang} F\big|_p = \dim M.$$

***Demostración*:**

$\boxed{\Rightarrow}$ Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{DF_p} & T_{F(p)}N \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_pU & \xrightarrow{DF_p} & T_{F(p)}F(U) \end{array}$$

Como

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea (U_1, ψ_1) una carta de V que contiene a p y (U_2, ψ_2) una carta de $F(U)$ que contiene a $F(p)$. Tomamos $\widehat{F} = \left(\psi_2 \circ F \circ \psi_1^{-1}\right) : \psi_1(U_1 \cap F^{-1}(U_2)) \to \psi_2(U_2) =: \hat{U}_2$.

Sabemos que $\operatorname{rang} DF_p = \dim M$ por hipótesis, por tanto, el teorema de la función inversa nos dice que existen entornos W_1 de $\hat{p}$ y W_2 de $\widehat{F}(\hat{p})$ y $G\colon W_2 \to W_1$ diferenciable tal que $G \circ \widehat{F} = \mathrm{id}$ y $\widehat{F} \circ G = \mathrm{id}$.

Entonces definimos los abiertos $\psi_1^{-1}(W_1) \subset M$ y $\psi_2^{-1}(W_2) \subset N$ y la aplicación $\tilde{G}\colon W_2 \to W_1$ dada por $\tilde{G} = \psi_1^{-1} \circ G \circ \psi_2$ que es diferenciable e inversa de $F|_{\psi_1^{-1}(W_1)}$.

■

Observación 4.1.5. Si $F\colon M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo $\implies$ F es un difeomorfismo local. Sin embargo, la recíproca no es cierta.

Ejemplos 4.1.1 (de difeomorfismos locales que no son difeomorfismos).

$\boxed{1}$ Sea $F\colon \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ dada por $F(x, y, z) = [x, y, z]$.

$\boxed{2}$ Sea $G\colon \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ dada por $G(z) = z^n$.

Proposición 4.1.3. *Sea $F\colon M \longrightarrow N$ diferenciable y $p \in M$ con $DF|_p$ inyectiva*

$$\implies \exists U \in \mathcal{V}(p) : \forall q \in U : DF|_q \text{ es inyectiva.}$$

***Demostración*:** Basta probarlo para $M = \mathbb{R}^m$ y $N = \mathbb{R}^n$. Definimos la aplicación $G\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dada por $F(p) = DF|_p$ que es continua. Además, el subespacio $W = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ tiene rango } n\}$ es abierto ya que $W = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ con

$$\begin{aligned} f\colon M_{n\times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \sum_{B \text{ es submatriz de } A \text{ de tamaño } \max\{n,m\}} \det(B)^2 \end{aligned}$$

Como W es abierto, $F^{-1}(W)$ es abierto y, por tanto, podemos tomar $U = F^{-1}(W)$. ■

Definición 4.1.6 (Inmersión). Sea $F\colon M \longrightarrow N$ diferenciable, es una inmersión

$$\iff \forall p \in M : DF_p \text{ es inyectiva.}$$

Definición 4.1.7 (Submersión). Sea $F\colon M \longrightarrow N$ diferenciable, es una submersión

$$\iff \forall p \in M : DF_p \text{ es sobreyectiva.}$$

Definición 4.1.8 (Embebimiento). Sea $F\colon M \longrightarrow N$ diferenciable, es un embebimiento

$$\iff F \text{ es una inmersión inyectiva y un homeomorfismo sobre su imagen.}$$

Ejercicio 4.1.2. Demuestra que todo difeomorfismo es un embebimiento.

Definición 4.1.9 (Subvariedad). Sean M y N variedades diferenciables,

$$W \subset N \text{ es una subvariedad de } N \iff \exists F\colon M \longrightarrow N \text{ embebimiento} : \operatorname{Im} F = W.$$

Definición 4.1.10 (Subvariedad inmersa). Sean M y N variedades diferenciables, $W \subset N$ es una subvariedad inmersa de N

$$\iff \exists F\colon M \longrightarrow N \text{ inmersión inyectiva} : \operatorname{Im} F = W.$$

Observación 4.1.11. N subvariedad de $M \implies N$ subvariedad inmersa de M.

Ejercicio 4.1.3. Sea W una subvariedad de $N \implies W$ es una variedad diferenciable.

***Solución*:** Como $F\colon M \longrightarrow W$ es un homeomorfismo, podemos dotar a W de una estructura diferenciable inducida por F (ejercicio 6 de la Hoja 1).

Ejemplos 4.1.4 (de subvariedades (inmersas)).

$\boxed{1}$ Consideramos $\alpha\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, entonces α es una inmersión porque $D\alpha|_t$ es inyectiva ya que $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq 0$.

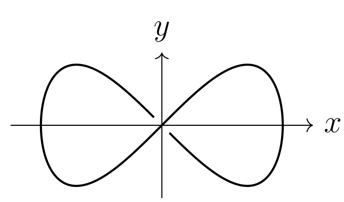
Sin embargo, α no es un embebimiento porque no es inyectiva: $\alpha(2) = (0,0) = \alpha(-2)$.

Por tanto, $\alpha(\mathbb{R})$ es una subvariedad inmersa pero no una subvariedad.

$\boxed{2}$ La inclusión $\begin{aligned} \iota\colon \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x,y,z) \end{aligned}$ es un embebimiento (se deja como ejercicio).

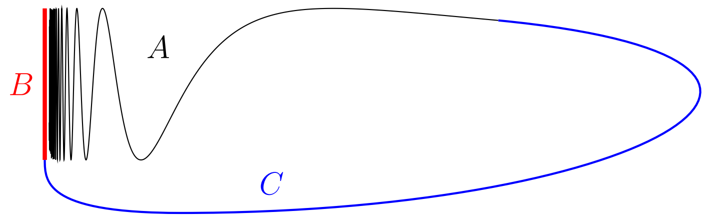
$\boxed{3}$ La inclusión $\begin{aligned} \iota\colon \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x,y,0) \end{aligned}$ es un embebimiento (se deja como ejercicio).

$\boxed{4}$ Consideramos $\alpha\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (2\cos t, \sin 2t)$.



Tenemos que α es diferenciable y una inmersión, además es inyectiva pero no es un homeomorfismo sobre su imagen porque, de serlo, $\alpha|_{(-\pi/2, 3\pi/2)\setminus\{0\}}$ también lo sería. Sin embargo, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ no es conexo pero $\alpha\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus \{0\}\right)$ sí lo es.

$\boxed{5}$ (El círculo de Varsovia) Consideramos la sección del seno del topólogo dado por $A = \left\{\left(x, \sin\left(1/x\right)\right) : x \in (0,1)\right\}$ y le añadimos el segmento $B = \{0\} \times [-1,1]$ y una curva C que une B con la parte derecha de A, como se ve en la siguiente figura:



Entonces, el conjunto $A \cup B \cup C$ es una inmersión, es inyectiva pero no es un embebimiento porque no es un homeomorfismo sobre su imagen. Luego $A \cup B \cup C$ es una subvariedad inmersa pero no una subvariedad.

4.2 Forma local de una inmersión

Observación 4.2.1. Sea $F\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $m \leq n$ dada por

$$\forall (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : F(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0),$$

entonces F es una inmersión.

Teorema 4.2.1 (Cartas adaptadas). *Sea $F\colon M^m \longrightarrow N^n$ una inmersión en $p \in M$*

$$\Longrightarrow \exists\,(U, \psi) \text{ carta de } M : p \in U \wedge \exists\,(V, \varphi) \text{ carta de } N : F(p) \in V$$

tales que la expresión local de F viene dada por $\widehat{F}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. Estas cartas se denominan ***cartas adaptadas*** *a F.*

***Demostración*:** Sean (U, ψ), (V, φ) dos cartas de M y N que contienen a p y $F(p)$ respectivamente. Tenemos el siguiente diagrama:

(1) Podemos cambiar los homeomorfismos ψ y V de modo que $\psi(p) = 0$ y $\varphi(F(p)) = 0$ componiendo con una traslación: $\psi'(x) = \psi(X) - \psi(p)$ y $\varphi'(x) = \varphi(x) - \varphi(F(p))$.

(2) Podemos cambiar de nuevo las cartas (U, ψ) y (V, φ) de modo que $D\widehat{F}_0(x) = (x, 0, \ldots, 0)$.

Sabemos que existe $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que $A \cdot D\widehat{F}_0 = \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$. Definimos $\varphi' = A \circ \varphi$

$$\Longrightarrow D\widehat{F}'_0 = D\left(\varphi' \circ F \circ \psi\right)_0 = D\left(A \circ \varphi \circ F \circ \psi\right)_0 = A \cdot D\widehat{F}_0.$$

(3) Podemos extender $\widehat{F}$ a una aplicación diferenciable G

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \supset \hat{U} \arrow[r, "\widehat{F}"] \arrow[d, hook] & \hat{V} \subset \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n \supset \hat{U} \times \mathbb{R}^{n-m} \arrow[ur, dashed, "G"] & \end{tikzcd}$$

cuya diferencial es no singular en $(0, \ldots, 0)$, es decir,

$$G(x,y) = \widehat{F}(x) + (0,y) \implies DG_0 = \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{array} \right).$$

(4) Por el teorema de la función inversa, existen entornos abiertos $A \times B \subset \widehat{U} \times \mathbb{R}^{n-m}$ y $W \subset \hat{V}$ de los orígenes tales que $G|_{A \times B} \colon A \times B \longrightarrow W$ es un difeomorfismo.

(5) Definimos las cartas $\left(\psi^{-1}(A), \psi|_{\psi^{-1}(A)}\right)$ y $\left(\varphi^{-1}(W), G^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(W)}\right)$.

Entonces, como $G(x,0) = \widehat{F}(x)$ y $G^{-1} \circ \widehat{F}(x) = (x, 0, \ldots, 0)$, tenemos que la expresión local de F en estas cartas viene dada por

$$\left(G^{-1} \circ \varphi\right) \circ F \circ \psi^{-1}(x) = G^{-1} \circ \left(\varphi \circ F \circ \psi^{-1}\right)(x) = G^{-1} \circ \widehat{F}(x) = (x, 0, \ldots, 0).$$

■

Corolario 4.2.2. *Toda inmersión es localmente un embebimiento.*
Es decir, sea $F \colon M \longrightarrow N$ una inmersión y $p \in M$

$$\implies \exists U \in \mathcal{V}(p) : F|_U \text{ es un embebimiento.}$$

***Demostración*:** Podemos aplicar el `Teo-cartas-adaptadas-inmersion/`Teorema 1 para obtener las cartas adaptadas (U, ψ) y (V, φ) y se tiene que $\widehat{F}$ es un embebimiento.
Por tanto, $\varphi^{-1} \circ \widehat{F} \circ \psi$ es un embebimiento. ■

Teorema 4.2.3. *Sea $\iota \colon P \longrightarrow N$ una inmersión y $F \colon M \longrightarrow P$ una aplicación continua tal que $\iota \circ F$ es diferenciable $\implies$ F es diferenciable.*

***Demostración*:** Sea $p \in M$, $q := F(p)$ y sean (U, ψ) y (V, φ) cartas adaptadas a ι ■

Teorema 4.2.4. *Sea $\iota \colon P \longrightarrow N$ un embebimiento y $F \colon M \longrightarrow P$ es una aplicación tal que $\iota \circ F$ es diferenciable $\implies$ F es diferenciable.*

***Demostración*:** ■

Ejemplo 4.2.1 (de aplicación del teorema). Consideramos $F \colon \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ dada por $\forall z \in \mathbb{S}^1 : F(z) = z^2$, veamos que F es diferenciable.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "H"] \arrow[dr, "G\circ H"] & \mathbb{S}^1 \arrow[d, hook, "H"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "G"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Observación 4.2.2. Sea $F\colon M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable

- Si F es inyectiva y abierta o cerrada $\implies$ F es un homeomorfismo sobre su imagen.
- Si M es compacto y F es abierta $\implies$ F es cerrada.

Definición 4.2.3 (Aplicación propia). Sean X e Y dos esp topológicos, una aplicación continua $f\colon X \longrightarrow Y$ es propia

$$\iff \forall K \subset Y \text{ compacto} : f^{-1}(K) \text{ es compacto en } X.$$

Lema 4.2.5 ((Lee, 2013) A. 57). *Sea $F\colon M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable y propia $\implies$ F es cerrada.*

***Demostración*:** No se va a demostrar. ∎

Ejercicio 4.2.2. Demuestra que un difeomorfismo local entre variedades es siempre una aplicación abierta (si F es una inmersión entre variedades diferenciables con la misma dimensión, entonces F es un difeomorfismo local).

Corolario 4.2.6. *Sea $F\colon M \longrightarrow N$ una inmersión inyectiva, entonces las siguientes condiciones implican que F es un embebimiento:*

(1) *F es abierta o cerrada.*

(2) *M es compacto.*

(3) *F es propia.*

(4) *M y N tienen la misma dimensión.*

4.3 Forma local de una submersión

Observación 4.3.1. La aplicación $F\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $F(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$ con $m \geq n$ es una submersión.

Teorema 4.3.1. *Sea $F\colon M^m \longrightarrow N^n$ una submersión y $p \in M$*

$$\implies \exists\,(U, \psi) \text{ carta de } M : p \in M \,{}_\wedge\, \exists\,(V, \varphi) \text{ carta de } N : F(p) \in V$$

tales que la expresión local de F viene dada por $\widehat{F}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$.

***Demostración*:** En moodle. ■

Definición 4.3.2 (Sección de una aplicación diferenciable). Sea $F\colon M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable, $s\colon N \longrightarrow M$ es una sección de F

$$\iff F \circ s = \mathrm{id}_N .$$

Observación 4.3.3. Si s es una sección de $F \implies F$ es sobreyectiva y s es inyectiva.

Observación 4.3.4. La proyección $F\colon M \times N \longrightarrow M$ tiene como sección a la aplicación s_q dada por $\forall p \in M : s_q(p) = (p, q)$ donde $q \in N$ ya que $\forall p \in M : F \circ s_q(p) = F(p, q) = p$.

Definición 4.3.5 (Sección local). Sea $F\colon M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable y $U \subset N$ abierto, $s\colon U \longrightarrow M$ es una sección local de F

$$\iff \forall p \in U : F \circ s(p) = p.$$

Teorema 4.3.2. *Sea $F\colon M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable, entonces*

$$F \text{ es una submersión} \iff \forall p \in M \text{ está en la imagen de alguna sección local de } F.$$

***Demostración*:**

$\boxed{\Rightarrow}$ Sean (U, φ) y (V, ψ) cartas adaptadas a F del `Teo-cartas-adaptadas-submersion/`Teorema 1 tales que $p \in U$ y $F(p) \in V$.

Entonces existe un cubo $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \hat{V}$ y un cubo $(-\varepsilon, \varepsilon)^m \subset \hat{U}$ tales que

$$\begin{aligned} \widehat{F}\big|_{(-\varepsilon,\varepsilon)^m}\colon (-\varepsilon, \varepsilon)^m &\longrightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)^n \\ (x_1, \ldots, x_m) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Esta aplicación tiene como sección a

$$\begin{aligned} \sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon)^n &\longrightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)^m \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

y definimos $A = \psi^{-1}\left((-\varepsilon, \varepsilon)^n\right)$ y $s\colon A \longrightarrow M$ como $s = \varphi^{-1} \circ \sigma \circ (\psi|_A)$. Entonces s es diferenciable porque es composición de aplicaciones diferenciables y $s\left(F(p)\right) = p$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $p \in M$, podemos hallar una sección local $s\colon U \longrightarrow M$ con $U \subset N$ abierto tal que $s(q) = p$ donde $q = F(p)$. Entonces se tiene que $F \circ s = \iota$ donde $\iota\colon U \longrightarrow N$ es la inclusión.

$$\implies DF_p \circ Ds_q = D\left(F \circ s\right)_q = \left(D\iota\right)_q .$$

Como $(D\iota)_q$ es un isomorfismo $\implies$ Ds_q es inyectiva y DF_p es sobreyectiva.

■

Corolario 4.3.3. *Toda submersión es una aplicación abierta.*

***Demostración*:** Sea $F\colon M \longrightarrow N$ una submersión, $A \subset M$ abierto y $\{(U_i, s_i)\}_{i\in I}$ un conjunto de secciones locales de F tales que $F(A) = \bigcup_{i\in I} s_i(U_i)$. Entonces,

$$F(A) = \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} s_i^{-1}(A).$$

Como s_i es continua y A es abierto, $s_i^{-1}(A)$ es abierto. Por tanto, $F(A)$ es abierto. ■

Corolario 4.3.4. *Una submersión sobreyectiva es una aplicación cociente.*

Corolario 4.3.5 (Propiedad característica de las submersiones sobreyectivas). *Sea $\pi\colon M \longrightarrow N$ una submersión sobreyectiva y $F\colon N \longrightarrow P$ tal que $F\circ\pi$ es diferenciable*

$$\implies F \text{ es una aplicación diferenciable.}$$

Observación 4.3.6. Esta es una versión diferenciable de la propiedad universal de las aplicaciones cociente.

***Demostración*:** Sea $q \in N$, como π es sobreyectiva, entonces $\exists p \in M : \pi(p) = q$. Como π es una submersión, existe una sección local $s\colon U \subset N \longrightarrow M$ donde U es abierto tal que $p \in \operatorname{Im}(s)$. Además, $s(q) = p$ (ya que, como $p \in \Im(s)$, $\exists q' \in N : s(q') = p \implies q' = \pi\circ s(q') = \pi(p) = q$).

Ahora, si $\iota\colon U \hookrightarrow M$ es la inclusión de U en M, entonces

$$F|_U = F\circ\iota = F\circ(\pi\circ s) = (F\circ\pi)\circ s$$

es una composición de aplicaciones diferenciables $\implies$ $F|_U$ es diferenciable $\implies$ F es diferenciable. ■

Corolario 4.3.6. *Sea $\pi\colon M \longrightarrow N$ una submersión sobreyectiva y $F\colon M \longrightarrow P$ es una aplicación diferenciable tal que $\pi(p) = \pi(q) \implies F(p) = F(q)$*

$$\implies \exists! G\colon N \longrightarrow P \text{ diferenciable tal que } G\circ\pi = F.$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "F\ dif"] & \\ N \arrow[r, dotted, "\exists! G\ dif"'] & P \end{tikzcd}$$

***Demostración*:** Bajo estas hipótesis, π es una aplicación cociente y F es continua $\Longrightarrow$ $\exists! G\colon N \longrightarrow P$ continua tal que $G \circ \pi = F$. Aplicando el corolario anterior Corolario 4.3.5, G es diferenciable. ■

Ejemplos 4.3.1 (de aplicación de estos resultados).

$\boxed{1}$ Veamos que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ es una submersión:

- **Método 1:** Ver que $\forall p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : DF_p$ es no singular.

- **Método 2:** Veamos que $\forall p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : \exists$ una sección local $s\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con U abierto de $\mathbb{RP}^n$ y $p \in \mathrm{Im}(s)$.

  Si $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, entonces $\exists i_n \in \{0, \dots, n\}$ tal que $p_{i_n} \neq 0$. Tomamos

  $$U_i = \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{RP}^n : x_i \neq 0\} \qquad \begin{aligned} s\colon U_i &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ [x_0 : \cdots : x_n] &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \end{aligned}$$

  entonces $p = s(\pi(p)) \implies p \in \mathrm{Im}(s)$.

  Veamos que es diferenciable:

  $$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\ s\ } & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \big\downarrow \psi_i & & \big\downarrow \mathrm{id} \\ \mathbb{R}^n = \hat{U}_i & \xrightarrow{\ \hat{s}_i\ } & \mathbb{R}^n \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \hat{s}\,(x_1, \dots, x_n) &= \mathrm{id} \circ s \circ \psi_i^{-1}\,(x_0, \dots, x_n) \\ &= s\,[x_0 : \cdots : 1 : \cdots : x_{n-1}] \\ &= p_i\,(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

  que sí es diferenciable.

$\boxed{2}$ Veamos que $F\colon \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ dada por $F\,[z_0 : z_1] = [z_0^2 : z_1^2]$ es diferenciable. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\ \widetilde{F}\ } & \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ \big\downarrow \pi & & \big\downarrow \pi \\ \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{\ F\ } & \mathbb{CP}^1 \end{array} \qquad \text{donde} \quad \widetilde{F}(z_0, z_1) = \left(z_0^2, z_1^2\right)$$

Como $\widetilde{F}$ y π son diferenciables, $\pi \circ \widetilde{F}$ es diferenciable $\implies$ $F \circ \pi$ es diferenciable.

Como π es una submersión sobreyectiva y $F \circ \pi$ es diferenciable $\implies$ F es diferenciable.

$\boxed{3}$ (Último ejercicio del primer parcial) Consideramos $F\colon \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$F\,[x_0 : x_1 : x_2] = \frac{1}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}\left(2x_0x_1, 2x_0x_2, -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2\right).$$

Veamos que es diferenciable estudiando el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{RP}^2 \arrow[d, "F"] & \\
& \mathbb{S}^2 \arrow[r, hook, "\iota"] & \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}
\end{tikzcd}$$

H. Hojas de ejercicios

H.1 Variedades diferenciales

$\boxed{1.}$ Un espacio topológico satisface el segundo axioma de numerabilidad si admite una base numerable de abiertos (es segundo numerable).

(a) Demostrar que "satisfacer el segundo axioma de numerabilidad" es una propiedad hereditaria.

(b) Demostrar que la siguiente colección numerable de abiertos de $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{B} = \{B_\delta(p) : \delta \in \mathbb{Q} \wedge p \in \mathbb{Q}^n\}$$

es una base, y por tanto $\mathbb{R}^n$ satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Solución:

(a) Se trata de la `Herencia-segundo-numerable`/Proposición 1.

(b) Por la `Prop-base-topologia`/Proposición 1, basta ver que

$$\forall U \in \mathcal{T} : \forall x \in U : \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subset U.$$

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x \in U$, entonces x es un punto de acumulación de U luego $\exists \delta > 0 : B_\delta(x) \subset U$. Podemos tomar $\hat{\delta} \in \mathbb{Q}$ y $p \in \mathbb{Q}^n$ tales que $x \in B_{\hat{\delta}}(p) \subset B_\delta(x) \subset U$.

Por tanto, $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y, en consecuencia, $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable.

$\boxed{2.}$ Sean M y N dos variedades topológicas de dimensión m y n respectivamente. Demostrar que el espacio topológico producto $M \times N$ es una variedad topológica de dimensión $m + n$.

Solución: Consideramos el conjunto $M \times N$ con la topología producto $\mathcal{T}$ generada por la base $\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_M \wedge V \in \mathcal{T}_N\}$ donde $\mathcal{T}_M$ y $\mathcal{T}_N$ son las topologías de M y N respectivamente.

Comprobamos las propiedades de la `Variedad-topologica`/Definición 1:

(a) $(M \times N, \mathcal{T})$ es Hausdorff porque M y N lo son.

(b) $(M \times N, \mathcal{T})$ es segundo numerable porque M y N lo son.

(c) Sea $(p, q) \in M \times N$ con $p \in M \wedge q \in N$, como M y N son variedades topológicas de dim m y n respect, sabemos que $\exists U \in \mathcal{V}(p), V \in \mathcal{V}(q)$ tales que $\exists f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m, g : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismos.

Entonces $U \times V \in \mathcal{V}((p,q))$ y definimos $F\colon U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ mediante $F(u,v) = (f(u), g(v))$ (ya sabemos que $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$). Veamos que F es un homeomorfismo:

i. F es continua porque sus funciones componentes (f,g) lo son.

ii. F es biyectiva con inversa $F^{-1}(x,y) = (f^{-1}(x), g^{-1}(y))$.

iii. F^{-1} es continua porque sus funciones componentes (f^{-1}, g^{-1}) lo son.

Como se cumplen, $M \times N$ es una variedad topológica de dimensión $m+n$. ■

$\boxed{3.}$ Sean M y N dos variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. Demostrar que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son atlas diferenciables de M y N, entonces

$$\mathcal{A}'' = \{(U_i \times V_j, \psi_i \times \phi_j) : (U_i, \psi_i) \in \mathcal{A}, (V_j, \phi_j) \in \mathcal{A}'\}$$

es un atlas diferenciable para $M \times N$. La variedad diferenciable producto $M \times N$ viene dada por este atlas.

***Solución*:** Comprobamos las propiedades de la `Atlas-diferenciable/`Definición 1:

(a) Veamos primero que $\mathcal{A}''$ es un atlas de dim $m+n$ en $M \times N$:

i. Sea $(U \times V, \psi \times \phi) \in \mathcal{A}''$ donde $(U, \psi) \in \mathcal{A} \wedge (V, \psi) \in \mathcal{A}'$. Entonces $U \times V$ es un abierto básico de la topología producto $\mathcal{T}_{M \times N}$. Además, $\psi \times \phi\colon U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ es un homeomorfismo por el mismo razonamiento del ejercicio anterior.

Por tanto, $(U \times V, \psi \times \phi)$ es una carta de dim $m+n$ en $M \times N$.

ii. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i = \bigcup_{i \in I} U_i \times \bigcup_{j \in J} V_j = M \times N$ por ser $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ atlas de M y N respect.

(b) Solo falta ver que las cartas de $\mathcal{A}''$ son $\mathcal{C}^\infty$-compatibles:

$$\begin{aligned} (\psi_i \times \phi_i) \circ (\psi_j \times \phi_j)^{-1} &= \left(\psi_i \circ \psi_j^{-1}\right) \times \left(\phi_i \circ \phi_j^{-1}\right) \text{ que es } \mathcal{C}^\infty \\ \text{y } (\psi_i \times \phi_i)^{-1} \circ (\psi_j \times \phi_j) &= \left(\psi_i^{-1} \circ \psi_j\right) \times \left(\phi_i^{-1} \circ \phi_j\right) \text{ que es } \mathcal{C}^\infty \end{aligned}$$

por serlo cada componente $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$, $\psi_i^{-1} \circ \psi_j$ y $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$, $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$.

Como $\mathcal{A}''$ es un atlas cuyas cartas son $\mathcal{C}^\infty$-compatibles, entonces es un atlas diferenciable de $M \times N$ y, por tanto, $(M \times N, \mathcal{A}'')$ es una variedad diferenciable. ■

$\boxed{4.}$ Usar las coordenadas estereográficas desde los polos norte y sur para construir un atlas diferenciable con dos cartas para la esfera unidad $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

***Solución*:** Debemos considerar la proyección estereográfica generalizada a n dimensiones. Buscamos $\mathbb{P}_N\colon \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ el polo norte.

Consideramos $\mathbb{S}^n := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$ y la recta que pasa por N y $p = (p_1, \ldots, p_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$: $R_1 = \{N + t\,(p - N) : t \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{aligned}
x \in \mathbb{S}^n \cap R_1 \iff & \|x\|^2 = 1 \wedge \exists t \in \mathbb{R} : x = N + t\,(p - N) \\
\iff & \|N + t\,(p - N)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} t^2 p_i^2 + (1 - t)^2 = 1 \\
\iff & t^2 \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = t^2 \|p\|^2 = 1 - (1 - t)^2 = 2t - t^2 \\
\iff & t^2 \left(\|p\|^2 + 1\right) - 2t = 0 \iff t = 0 \vee t = \frac{2}{\|p\|^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Podemos descartar $t = 0$ porque corresponde al polo norte (N) y tenemos que

$$x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \cap R_1 \iff x = N + \frac{2}{\|p\|^2 + 1}\,(p - N) = \frac{N\left(\|p\|^2 - 1\right) + 2p}{\|p\|^2 + 1}.$$

$$x = \frac{1}{\|p\|^2 + 1}\left(2p_1, \ldots, 2p_n, \|p\|^2 - 1\right).$$

Para hallar la inversa de esta función, lo más sencillo es considerar $y \in \mathbb{S}^n$ e intersecar la recta que pasa por N e y con el plano $x_{n+1} = 0$. Definimos $R_2 = \{N + t\,(x - N) : t \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned}
q \in R_1 \cap \{x_{n+1}\} \iff & \exists t \in \mathbb{R} : q = N + t\,(y - N) \wedge q_{n+1} = 0 \\
\iff & 0 = 1 + t\,(y_{n+1} - 1) \iff t = \frac{1}{1 - y_{n+1}} \\
\iff & q = N + \frac{1}{1 - y_{n+1}}\,(y - N) = \frac{1}{1 - y_{n+1}}\,(y_1, \ldots, y_n).
\end{aligned}$$

Luego ya hemos encontrado la proyección que buscábamos (y su inversa):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_N \colon \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right) \\
\mathbb{P}_N^{-1} \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \\
p = (p_1, \ldots, p_n) &\longmapsto \left(\frac{2p_1}{\|p\|^2 + 1}, \ldots, \frac{2p_n}{\|p\|^2 + 1}, \frac{\|p\|^2 - 1}{\|p\|^2 + 1} \right).
\end{aligned}$$

Podemos encontrar la proyección de la otra carta $\mathbb{P}_S$ de forma análoga:

$$\mathbb{P}_S(x) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right) \wedge \mathbb{P}_S^{-1}(p) = \left(\frac{2p_1}{\|p\|^2 + 1}, \ldots, \frac{2p_n}{\|p\|^2 + 1}, \frac{1 - \|p\|^2}{\|p\|^2 + 1} \right).$$

Observamos que las cuatro funciones $\mathbb{P}_N, \mathbb{P}_N^{-1}, \mathbb{P}_S, \mathbb{P}_S^{-1}$ son continuas luego son todas homeomorfismos. Es decir, hemos probado que $(\mathbb{S}\setminus\{N\}, \mathbb{P}_N)$ y $(\mathbb{S}\setminus\{S\}, \mathbb{P}_S)$ son cartas de la esfera unidad $\mathbb{S}^n$. Como $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}\setminus\{N\}\cup\mathbb{S}\setminus\{S\}$, hemos encontrado un atlas para $\mathbb{S}^n$ con dos cartas. Solo falta ver que son $\mathcal{C}^\infty$-compatibles:

$$
\begin{aligned}
\left(\mathbb{P}_N\circ\mathbb{P}_S^{-1}\right)(p) &= \mathbb{P}_N\left(\frac{2p_1}{\|p\|^2+1},\dots,\frac{2p_n}{\|p\|^2+1},\frac{1-\|p\|^2}{\|p\|^2+1}\right)\\
&= \left(\frac{\frac{2p_1}{\|p\|^2+1}}{1-\frac{1-\|p\|^2}{\|p\|^2+1}},\dots,\frac{\frac{2p_n}{\|p\|^2+1}}{1-\frac{1-\|p\|^2}{\|p\|^2+1}}\right) = \left(\frac{p_1}{\|p\|^2},\dots,\frac{p_n}{\|p\|^2}\right) = \frac{p}{\|p\|^2}.\\
\left(\mathbb{P}_S\circ\mathbb{P}_N^{-1}\right)(p) &= \mathbb{P}_S\left(\frac{2p_1}{\|p\|^2+1},\dots,\frac{2p_n}{\|p\|^2+1},\frac{\|p\|^2-1}{\|p\|^2+1}\right)\\
&= \left(\frac{\frac{2p_1}{\|p\|^2+1}}{1+\frac{\|p\|^2-1}{\|p\|^2+1}},\dots,\frac{\frac{2p_n}{\|p\|^2+1}}{1+\frac{\|p\|^2-1}{\|p\|^2+1}}\right) = \left(\frac{p_1}{\|p\|^2},\dots,\frac{p_n}{\|p\|^2}\right) = \frac{p}{\|p\|^2}.
\end{aligned}
$$

Observamos que esta función es $\mathcal{C}^\infty$ excepto en $p=0$, pero no importa porque $0\notin \mathbb{P}_N(\mathbb{S}\setminus\{N,S\}) = \mathbb{P}_S(\mathbb{S}\setminus\{N,S\}) = \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ ya que se trata de la proyección de los polos norte y sur respecto de $\mathbb{P}_S$ y $\mathbb{P}_N$ respectivamente.

Por tanto, las cartas son $\mathcal{C}^\infty$-compatibles y hemos encontrado un atlas diferenciable para $\mathbb{S}^n$ con dos cartas.

$\boxed{5.}$ Usar el ejercicio anterior para demostrar que $\mathbb{Q}^{n+1}\cap\mathbb{S}^n$ es denso en $\mathbb{S}^n$.

***Solución*:** Mediante las proyecciones del ejercicio anterior, $\mathbb{P}_N^{-1}(\mathbb{Q}^n)\subset\mathbb{Q}^{n+1}\cap\mathbb{S}^n\setminus\{N\}$ y $\mathbb{P}_N(\mathbb{Q}^{n+1}\cap\mathbb{S}^n\setminus\{N\})\subset\mathbb{Q}^n$, luego $\mathbb{P}_N(\mathbb{Q}^{n+1}\cap\mathbb{S}^n\setminus\{N\}) = \mathbb{Q}^n$ por ser $\mathbb{P}_N$ biyectiva. Como $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{P}_N$ es un homeomorfismo, $\mathbb{Q}^{n+1}\cap\mathbb{S}^n$ es denso en $\mathbb{S}^n$. ■

$\boxed{6.}$ Sea M una variedad diferenciable, N un esp topológico y $f: M\to N$ un homeomorfismo.

(a) Usar f para dotar a N de una estructura diferenciable.

(b) Dar una estructura diferenciable a la frontera del cuadrado unidad en $\mathbb{R}^2$.

***Solución*:**

(a) Sea $\mathcal{A}_M$ un atlas diferenciable de M. Definimos $\mathcal{A} := \{(f(U), \psi\circ f^{-1}) : (U,\psi)\in\mathcal{A}_M\}$.

i. $\forall (U,\psi)\in\mathcal{A}_M : f(U)\in\mathcal{T}_N$ abierto por ser f homeomorfismo. Además, como $U\in\mathcal{T}_M$ y ψ, f^{-1} son un homeomorfismo, $\psi\circ f^{-1}\colon f(U)\longrightarrow\mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo.

ii. Como f es biyectiva, $\bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{A}_M} f(U) = f\left(\bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{A}_M} U\right) = f(M) = N$.

Luego $\mathcal{A}$ es un atlas de N. Solo falta ver que las cartas son $\mathcal{C}^\infty$-compatibles. Sean $(U,\psi),(V,\phi)\in\mathcal{A}_M$, entonces

$$\left(\psi\circ f^{-1}\right)\circ\left(\phi\circ f^{-1}\right)^{-1}=\left(\psi\circ f^{-1}\right)\circ\left(f\circ\phi^{-1}\right)=\psi\circ\phi^{-1} \text{ que es } \mathcal{C}^\infty$$
$$\left(\psi\circ f^{-1}\right)^{-1}\circ\left(\phi\circ f^{-1}\right)=\left(f\circ\psi^{-1}\right)\circ\left(\phi\circ f^{-1}\right)=f\circ\left(\psi^{-1}\circ\phi\right)\circ f^{-1} \text{ que es } \mathcal{C}^\infty.$$

Entonces, $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable de N y, por tanto, N es una variedad diferenciable.

(b) Sea $Q^1=\partial([0,1]\times[0,1])$, podemos usar el apartado anterior tomando como homeomorfismo $f\colon Q_1\longrightarrow\mathbb{S}^1$ dado por $f(p)={}^{p}\!/\!_{\|p\|}$.

Entonces, podemos dotar a Q^1 con una estructura diferenciable dada por el atlas diferenciable de $\mathbb{S}^1$ que encontramos en el ejercicio 4.

$\boxed{7.}$ Definir una estructura diferenciable en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$. (Recordemos que $\mathbb{CP}^n$ es el conjunto de todas las rectas vectoriales en $\mathbb{C}^{n+1}$ y que está identificado con el cociente de $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ por la relación de equivalencia $u\sim v\iff\exists\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:v=\lambda u$).

***Solución*:** Consideramos $\forall i\in\mathbb{N}_{n+1}$ el conjunto

$$U_i:=\{[z_1:\cdots:z_1:\cdots:z_{n+1}]\in\mathbb{CP}^n:z_i\neq 0\}.$$

$\boxed{8.}$ Demostrar que la unión de los dos ejes coordenados en $\mathbb{R}^2$ no es una variedad topológica (y por tanto tampoco es una variedad diferenciable).

***Solución*:** Tenemos que $M=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y):y\in\mathbb{R}\}$ es Hausdorff y segundo numerable porque al ser subconjunto de $\mathbb{R}^2$, hereda dichas propiedades. Por tanto, ha de ser la tercera propiedad la que no se cumple.

Basta ver que no existe $U\in\mathcal{V}((0,0))$ homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Supongamos por contradicción que existe tal U con $h\colon U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ homeomorfismo. Entonces,

$$h\big|_{U\setminus\{(0,0)\}}\colon U\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}^n\setminus\{h((0,0))\}$$

también sería homeomorfismo pero esto es imposible porque $U\setminus\{(0,0)\}$ tiene 4 componentes conexas pero $\forall n\in\mathbb{N}:\forall x\in\mathbb{R}^n:\mathbb{R}^n\setminus\{x\}$ tiene o bien 2 componentes conexas ($n=1$), o bien 1 componente conexa ($n\geq 2$).

$\boxed{9.}$ Demostrar que cualquier atlas de la esfera unidad $\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ tiene al menos dos cartas.

***Solución*:** Supongamos por contradicción que existe un atlas $\mathcal{A}$ de $\mathbb{S}^n$ con una única carta (U,ψ). Entonces, $\mathbb{S}^n=U$ y $\psi\colon U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.

Por el teorema de Heine-Borel $\mathbb{S}^n$ es un espacio topológico compacto, luego su imagen por el homeomorfismo ψ debe ser compacto. Sin embargo, ya sabemos que $\mathbb{R}^n$ no es compacto.

Por tanto, hemos llegado a una contradicción y $\mathcal{A}$ ha de tener al menos dos cartas.

$\boxed{10.}$ Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Demostrar que el grafo $G(f) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de una función diferenciable $f : A \to \mathbb{R}$ admite una estructura de variedad diferenciable.

***Solución*:** Ya sabemos que $G(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tiene una topología (la de subespacio) que es Hausdorff y segundo numerable. Solo falta dotar a $G(f) = A \times f(A)$ de una estructura diferenciable. Definimos $\mathcal{A} = \{(A \times f(A), \psi)\}$ donde ψ viene dada por:

$$\begin{aligned} \psi\colon A \times f(A) &\longrightarrow A \subset \mathbb{R}^n \\ (x, f(x)) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{A}$ solo contiene una carta, basta probar que ψ es un homeomorfismo. Esto es cierto porque ψ es claramente biyectiva y continua (porque es una proyección) con inversa $\psi^{-1}(x) = (x, f(x))$ que también es continua (porque f es diferenciable).

Entonces, $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable de $G(f)$ y, por tanto, $G(f)$ admite una estructura diferenciable. ■

$\boxed{11.}$ En el conjunto $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$(x, i) \sim (y, j) \iff \begin{cases} x = y \neq 0, \text{ o} \\ x = y = 0 \wedge i = j. \end{cases}$$

Demostrar lo siguiente:

(a) El espacio cociente no es Hausdorff.

(b) El espacio cociente satisface el segundo axioma de numerabilidad.

(c) Todo punto del espacio cociente tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^1$.

***Solución*:**

(a) Veamos que $[(0, 0)] \neq [(0, 1)]$ no son separables por abiertos. Sean $V \in \mathcal{V}([0, 1]), U \in \mathcal{V}([0, 0])$ abiertos. Entonces $\exists \delta > 0 : B_\delta(0) \subset \mathbb{R}$ tal que $\{[(x, 0)] : x \in B_\delta(0)\} \subset U$ y $\{[(x, 1)] : x \in B_\delta(0)\} \subset V$. Pero como $\forall x \in B_\delta(0) \setminus \{0\} : [(x, 0)] = [(x, 1)]$, entonces $U \cap V \neq \varnothing$. Es decir, el espacio cociente no es Hausdorff.

(b) Por el `Lem-relacion-equivalencia-abierta-segundo-numerable/`Lema 1, basta ver que la relación $\sim$ es una relación abierta en X. Sea $U = A \times \{i\} \subset X$ abierto con $A \subset \mathbb{R}$ abierto

$$\implies \left(\pi^{-1} \circ \pi\right)(U) = \{x \in X : \exists p \in U : x \sim p\} = \big(A \times \{i\}\big) \cup \Big(\big(A \setminus \{0\}\big) \times \{1 - i\}\Big)$$

que es abierto en X. Por tanto, $\sim$ es abierta y el espacio cociente es segundo numerable.

(c)

H.2 Aplicaciones diferenciables

$\boxed{1.}$ Demostrar que la aplicación antipodal $F : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es una aplicación diferenciable, y hallar su expresión en coordenadas estereográficas.

***Solución*:** La aplicación antipodal viene dada por $\forall x \in \mathbb{S}^n : F(x) = -x$. Queremos ver que $\forall x \in \mathbb{S}^n$ existen cartas (U, ψ) de $\mathbb{S}^n$ y (V, φ) de $\mathbb{S}^n$ tales que $\varphi \circ F \circ \psi^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en $\psi(p)$. Sea $p \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ y consideramos la carta (U, ψ) de $\mathbb{S}^n$ dada por $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ y $\psi(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$ la proyección estereográfica (desde el polo norte). Para $F(x) = -x \in \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ tomamos $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ y $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right)$ la proyección estereográfica desde el polo sur. Entonces

$$\forall x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\} : \left(\varphi \circ F \circ \psi^{-1}\right)(x_1, \dots, x_n) = \varphi\left(\frac{-2x_1}{\|x\|^2+1}, \dots, \frac{-2x_n}{\|x\|^2+1}, \frac{1-\|x\|^2}{\|x\|^2+1}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{-2x_1}{\|x\|^2+1}}{1+\frac{1-\|x\|^2}{\|x\|^2+1}}, \dots, \frac{\frac{-2x_n}{\|x\|^2+1}}{1+\frac{1-\|x\|^2}{\|x\|^2+1}}\right) = (-x_1, \dots, -x_n) = -x.$$

Si $x = N$, tomamos ψ la proyección estereográfica desde el polo sur y φ la proyección estereográfica desde el polo norte. Entonces de manera análoga obtenemos que $\varphi \circ F \circ \psi^{-1}(N) = -N = S$.

Entonces, como $\widehat{F}$ dada por $\forall x \in \mathbb{R}^n : \widehat{F}(x) = -x$ es una función $\mathcal{C}^\infty$, concluimos que F es una aplicación diferenciable.

$\boxed{2.}$ Sea M una variedad topológica y sea $\mathcal{A}$ un atlas de M. Sea $p \in M$ y sea (U, ψ) una carta que contiene a p. Demostrar que $f : M \to \mathbb{R}$ es continua en p si y solo si la expresión local $f \circ \psi^{-1} : \hat{U} \to \mathbb{R}$ es continua en $\psi(p)$.

***Solución*:** Tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(f \circ \psi^{-1}\right) \text{ es continua en } \psi(p) &\iff \forall U \subset \mathbb{R} \text{ abierto} : \left(f \circ \psi^{-1}\right)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \\
&\iff \forall U \subset \mathbb{R} \text{ abierto} : \psi\left(f^{-1}(U)\right) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \\
(\text{como } \psi \text{ es un homeomorfismo}) &\iff \forall U \subset \mathbb{R} \text{ abierto} : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_M \\
&\iff f \text{ es continua en } p.
\end{aligned}$$

Luego f es continua en p si y solo si $f \circ \psi^{-1}$ es continua en $\psi(p)$. ■

$\boxed{3.}$ (Ser diferenciable es una propiedad local) Sean M y N variedades diferenciables.

(a) Si A es abierto de M y $F : M \to N$ es una función diferenciable, entonces $F|_A : A \to N$ es una función diferenciable.

(b) Si $A = \bigcup_{i \in I} U_i$ es una unión de abiertos de M y $F : A \to N$ es una función tal que $F|_{U_i}$ es diferenciable para cada $i \in I$, entonces F es diferenciable.

***Solución*:** Comprobemos que se satisfacen las condiciones de la `Propiedad-local`/Definición 1.

(a) Sea $p \in A$, tomamos la carta (U, ψ) de M tal que $p \in U \cap A$ y la carta (V, φ) de N tal que $F(p) \in V$. Como A, U son abiertos $A \cap U$ también lo es y, en consecuencia, $\psi|_{A\cap U}$ es un homeomorfismo, luego basta ver que $\varphi \circ F|_A \circ \psi|_{A\cap U}^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en $\psi(p)$. Pero como $\varphi \circ F \circ \psi^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en $\psi(p)$ por ser F diferenciable, entonces $\varphi \circ F|_A \circ \psi|_{A\cap U}^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en $\psi(p)$, luego $F|_A$ es diferenciable.

(b) Sea $p \in A$, entonces $\exists i \in I : p \in U_i$. Como $F|_{U_i}$ es diferenciable, $\exists\, (U, \psi)$ carta de M tal que $p \in U$ y (V, φ) carta de N tal que $F(p) \in V$ con $\varphi \circ F|_{U_i} \circ \psi^{-1}$ $\mathcal{C}^\infty$ en $\psi(p)$. Entonces $\varphi \circ F \circ \psi^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en $\psi(p)$, luego F es diferenciable.

Por tanto, concluimos que ser diferenciable es una propiedad local. ■

$\boxed{4.}$ Una función $\tilde{F} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ es homogénea de grado d si $\tilde{F}(\lambda \cdot x) = \lambda^d \cdot \tilde{F}(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por ejemplo, cualquier colección de $m+1$ polinomios homogéneos de grado d dan lugar a una función de este tipo. Demostrar que una función homogénea diferenciable induce una aplicación diferenciable $F : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$ (lo mismo se aplica a $\mathbb{CP}^n$).

***Solución*:** Consideramos el diagrama siguiente (donde $\tilde{F}$ es homogénea de grado d):

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{RP}^n \arrow[r, dashed, "F"] & \mathbb{RP}^m
\end{tikzcd}$$

y definimos $\forall [v] \in \mathbb{RP}^n : F([v]) = [\tilde{F}(v)]$. Veamos que F está bien definida.

$$[v], [w] \in \mathbb{RP}^n : [v] = [w] \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : w = \lambda v.$$

Entonces por construcción de F tenemos que

$$F([w]) = [\tilde{F}(w)] = [\tilde{F}(\lambda v)] = [\lambda^d \cdot \tilde{F}(v)] = [\tilde{F}(v)] = F([v]),$$

luego F está bien definida. Veamos que F es diferenciable. Sea $[x] \in \mathbb{RP}^n$ y tomamos una carta (U_i, ψ_i) de $\mathbb{RP}^n$ tal que $[x] \in U_i$ donde

$$U_i = \{[u_1 : \cdots : u_{n+1}] : u_i \neq 0\} \quad \wedge \quad \psi_i \colon U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n, \text{ dada por } [u] \mapsto \left(\frac{u_1}{u_i}, \ldots, \frac{u_{n+1}}{u_i}\right)$$

(como $[x] \in \mathbb{RP}^n$, $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, i.e. $\exists i \in \mathbb{N}_{n+1} : x_i \neq 0$). Como $\tilde{F}(x) \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$,

$\exists j \in \mathbb{N}_{m+1} : \tilde{F}(x)_j \neq 0$. Tomamos la carta (V_j, φ_j) de $\mathbb{RP}^m : F([x]) = [\tilde{F}(x)] \in V_j$ donde

$$V_j = \{[v_1 : \cdots : v_{m+1}] : v_j \neq 0\} \quad \wedge \quad \varphi_j \colon V_j \longrightarrow \mathbb{R}^m, \text{ dada por } [v] \mapsto \left(\frac{v_1}{v_j}, \ldots, \frac{v_{m+1}}{v_j}\right).$$

Basta ver que $\varphi_j \circ F \circ \psi_i^{-1} \colon \psi_i\left(U_i \cap F^{-1}(V_j)\right) \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en $\psi_i(x)$.

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_j \circ F \circ \psi_i^{-1}\right)(u) &= (\varphi_j \circ F)\left([u_1 : \cdots : u_{i-1} : 1 : u_i : \cdots : u_n]\right) \\
&= \varphi_j\left(\left[\tilde{F}(u_1, \ldots, u_{i-1}, 1, u_i \ldots, u_n)\right]\right) \\
&= \left(\frac{\tilde{F}(u_1, \ldots, u_{i-1}, 1, u_i \ldots, u_n)_1}{\tilde{F}(u_1, \ldots, u_{i-1}, 1, u_i \ldots, u_n)_j}, \ldots, \frac{\tilde{F}(u_1, \ldots, u_{i-1}, 1, u_i \ldots, u_n)_m}{\tilde{F}(u_1, \ldots, u_{i-1}, 1, u_i \ldots, u_n)_j}\right).
\end{aligned}$$

El denominador no se anula porque $u \in \psi_i\left(U_i \cap F^{-1}(V_j)\right)$

$$\implies \psi^{-1}(u) \in F^{-1}(V_j) \implies \tilde{F}(\psi^{-1}(u)) \in V_j \implies \tilde{F}(u_1, \ldots, u_{i-1}, 1, u_i \ldots, u_n)_j \neq 0.$$

Como $\tilde{F}$ es diferenciable, $\varphi_j \circ F \circ \psi_i^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en $\psi_i(x)$, luego F es diferenciable. ■

$\boxed{5.}$ Recordemos que la estructura diferenciable de $\mathbb{RP}^n$ viene dada por el atlas $\{(U_i, \psi_i)\}_{i=0}^n$. Demostrar que, para cada i, el complemento $\mathbb{RP}^n \setminus U_i$ es difeomorfo a $\mathbb{RP}^{n-1}$.

***Solución*:** Sea $i \in \mathbb{N}_{n+1}$, consideramos $U_i = \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] : x_i \neq 0\}$, entonces

$$\mathbb{RP}^n \setminus U_i = \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] : x_i = 0\} = \{[x_1 : \cdots : x_{i-1} : 0 : x_{i+1} : \cdots : x_{n+1}]\}.$$

Consideremos el siguiente candidato a difeomorfismo:

$$\begin{aligned}
F \colon \mathbb{RP}^n \setminus U_i &\longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1} \\
[x_1 : \cdots : x_{i-1} : 0 : x_{i+1} : \cdots : x_{n+1}] &\longmapsto [x_1 : \cdots : x_{i-1} : x_{i+1} : \cdots : x_{n+1}].
\end{aligned}$$

(1) Veamos que F está bien definida. Sean $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tales que $[x] = [y]$, entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y = \lambda x$. Supongamos además que $x_i = 0$ (entonces $y_i = 0$)

$$\begin{aligned}
\implies F([y]) = F([\lambda x]) &= [\lambda x_1 : \cdots : \lambda x_{i-1} : \lambda x_{i+1} : \cdots : \lambda x_{n+1}] \\
&= [x_1 : \cdots : x_{i-1} : x_{i+1} : \cdots : x_{n+1}] = F([x]).
\end{aligned}$$

(2) Veamos que F es diferenciable. Fijamos $[x] \in U_j$, consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
U_j \subset \mathbb{RP}^n \setminus U_i \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\psi_j"] & \mathbb{RP}^{n-1} \supset V_k \arrow[d, "\varphi_k"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "\widehat{F}"] & \mathbb{R}^{n-1}
\end{tikzcd}$$

donde $U_j = \{[u_1 : \cdots : u_{n+1}] : u_i = 0 \wedge u_j \neq 0\}$ y $V_k = \{[v_1 : \cdots : v_n] : v_k \neq 0\}$. Para que $F([x]) \in V_k$ basta que $k = j$ (si $j < i$) $\veebar$ $k = j - 1$ (si $j > i$).

Basta ver que $\varphi_k \circ F \circ \psi_j^{-1} \colon \psi_j(U_j \cap F^{-1}(V_k)) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en $\psi_j(x)$.

i. Si $j < i$, entonces $k = j$ y $u = (u_1, \dots, u_j, \dots, u_{i-2}, 0, u_i, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\left(\varphi_k \circ F \circ \psi_j^{-1}\right)(u) &= (\varphi_k \circ F)\left([u_1 : \cdots : u_j : 1 : u_{j+1} : \cdots : u_{i-2} : 0 : u_i : \cdots : u_n]\right) \\ &= \varphi_k\left([u_1 : \cdots : u_j : 1 : u_{j+1} : \cdots : u_{i-2} : u_i : \cdots : u_n]\right) \\ &= (u_1, \dots, u_j, u_{j+1}, \dots, u_{i-2}, u_i, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.\end{aligned}$$

ii. Si $j > i$, entonces $k = j - 1$ y $u = (u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_j, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\left(\varphi_k \circ F \circ \psi_j^{-1}\right)(u) &= (\varphi_k \circ F)\left([u_1 : \cdots : u_{i-1} : 0 : u_{i+1} : \cdots : u_{j-1} : 1 : u_j : \cdots : u_n]\right) \\ &= \varphi_k\left([u_1 : \cdots : u_{i-1} : u_{i+1} : \cdots : u_{j-1} : 1 : u_j : \cdots : u_n]\right) \\ &= (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.\end{aligned}$$

En ambos casos, $\varphi_k \circ F \circ \psi_j^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en $\psi_j(x)$, porque es una proyección en cada coordenada. Por tanto, F es diferenciable. Por otro lado, F es claramente invertible con inversa

$$\begin{aligned}F^{-1} \colon \mathbb{RP}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{RP}^n \setminus U_i \\ [y_1 : \cdots : y_n] &\longmapsto [y_1 : \cdots : y_{i-1} : 0 : y_i : \cdots : y_n].\end{aligned}$$

(3) Solo queda probar que F^{-1} es diferenciable. Tomamos $[y] \in V_k \subset \mathbb{RP}^{n-1}$

$\boxed{6.}$ Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio no nulo en una variable con coeficientes complejos y F la aplicación inducida por el polinomio. Demostrar que existe una única aplicación diferenciable $\tilde{F} : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\psi_1^{-1}"] \arrow[d, "F"] & \mathbb{CP}^1 \arrow[d, "\tilde{F}"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\psi_1^{-1}"] & \mathbb{CP}^1 \end{tikzcd}$$

(aquí $\psi_1^{-1} : \mathbb{C} \to U_1 \subset \mathbb{CP}^1$ es la parametrización inversa de la carta (U_1, ψ_1) en la estructura diferenciable de $\mathbb{CP}^1$).

Solución: Si $p = [z_0 : z_1] \in U_1$, entonces $\psi_1([z_0 : z_1]) = \frac{z_0}{z_1}$, y como el diagrama conmuta:

$$\widetilde{F}([z_0 : z_1]) = \left(\widetilde{F} \circ \psi_1^{-1}\right)\left(\frac{z_0}{z_1}\right) = \left(\psi_1^{-1} \circ F\right)\left(\frac{z_0}{z_1}\right) = \left[F\left(\frac{z_0}{z_1}\right) : 1\right].$$

Así, ya conocemos el valor de $F|_{U_1}$. Como $\mathbb{CP}^1 \setminus U_1 = \{[1:0]\}$, esta fórmula nos define $\widetilde{F}$ en todos los puntos salvo $[1:0]$. Supongamos que ya hemos construido $\widetilde{F}$. Observemos que $\widetilde{F}$ será continua en el punto $[1:0]$ si y solo si $\widetilde{F} \circ \psi_0^{-1}$ es continua en $\psi_0([1:0]) = 0$. A su vez, $\widetilde{F} \circ \psi_0^{-1}$ será continua en 0 si y solo si se da alguna de las siguientes condiciones:

– $\widetilde{F}([1:0]) \in U_0$ y $\left(\psi_0 \circ \widetilde{F} \circ \psi_0^{-1}\right)$ está definida en un entorno de 0 y es continua en 0.

– $\widetilde{F}([1:0]) \in U_1$ y $\left(\psi_1 \circ \widetilde{F} \circ \psi_0^{-1}\right)$ está definida en un entorno de 0 y es continua en 0.

Calculamos ambas expresiones:

$$\psi_0 \circ \widetilde{F}|_{U_1} \circ \psi_0^{-1}(\omega) = \psi_0 \circ \widetilde{F}|_{U_1}([1:\omega]) = \psi_0\left(F\left(\frac{1}{\omega}\right) : 1\right) = \frac{1}{F\left(\frac{1}{\omega}\right)}.$$

$$\psi_1 \circ \widetilde{F}|_{U_0} \circ \psi_0^{-1}(\omega) = \psi_1 \circ \widetilde{F}|_{U_1}([1:\omega]) = F\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Si $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ con $a_n \neq 0$, entonces podemos escribir:

$$\psi_0 \circ \widetilde{F}|_{U_1} \circ \psi_0^{-1}(\omega) = \frac{1}{a_n\omega^{-n} + \cdots + a_1\omega^{-1} + a_0} = \frac{\omega^n}{a_n + \cdots + a_1\omega^{n-1} + a_0\omega^n}$$

$$\psi_1 \circ \widetilde{F}|_{U_1} \circ \psi_0^{-1}(\omega) = a_n\omega^{-n} + \cdots + a_1\omega^{-1} + a_0$$

Vemos entonces, que en la primera fórmula la única manera de que la función $\psi_0 \circ \widetilde{F} \circ \psi_0^{-1}$ sea continua en $\psi_0([1:0]) = 0$ es acordar que $\psi_0 \circ \widetilde{F} \circ \psi_0^{-1}(0) = 0$, mientras que en la segunda fórmula no hay manera de extender la función continuamente en $\psi_0([1:0]) = 0$. Por tanto, deducimos que $\widetilde{F}([1:0])$ ha de ser $\psi_0^{-1}(0) = [1:0]$. Así pues, tenemos que la única aplicación continua $\widetilde{F}$ que puede hacer conmutar el diagrama es

$$\begin{aligned} \widetilde{F} \colon \mathbb{CP}^1 &\longrightarrow \mathbb{CP}^1 \\ [z_0 : z_1] &\longmapsto \begin{cases} \left[F\left(\frac{z_0}{z_1}\right) : 1\right] & \text{si } z_1 \neq 0, \\ [1:0] & \text{si } z_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Veamos que $\widetilde{F}$ es continua. Hemos visto que $\widetilde{F}|_{U_1} : U_1 \to U_1 \subset \mathbb{CP}^1$ es continua, ya que $\widetilde{F}|_{U_1} = \psi_1^{-1} \circ F \circ \psi_1$ es una composición de aplicaciones continuas. Por otro lado, $\widetilde{F}|_{U_2} : U_2 \to U_2 \subset \mathbb{CP}^1$ se puede escribir como $\widetilde{F}|_{U_0} = \psi_0^{-1} \circ G \circ \psi_0$ donde G es la aplicación dada en (1), que es continua. Por tanto $\widetilde{F}|_{U_0}$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Como "ser continua" es una propiedad local, deducimos que $\widetilde{F}$ es continua.

Veamos que $\widetilde{F}$ es diferenciable. Sea $p \in \mathbb{CP}^1$. Si $p \in U_1$, tomamos como cartas (U_1, ψ_1), que contiene a p y (U_1, ψ_1), que contiene a $\widetilde{F}(p)$. La expresión local de $\widetilde{F}$ en esas cartas es

$$\psi_1 \circ \widetilde{F} \circ \psi_1^{-1}(\omega) = F(\omega)$$

que es diferenciable por ser la aplicación asociada a un polinomio. Si $p \notin U_1$ (es decir, $p = [1:0]$), entonces tomamos la carta (U_0, ψ_0) que contiene a p y la carta (U_0, ψ_0) que contiene a $\widetilde{F}(p) = p$. La expresión de $\widetilde{F}$ en esta carta es:

$$\psi_0 \circ \widetilde{F}|_{U_1} \circ \psi_0^{-1}(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega^n}{a_n + \cdots + a_1\omega^{n-1} + a_0\omega^n} & \text{si } \omega \neq 0, \\ 0 & \text{si } \omega = 0. \end{cases}$$

Como es una función racional[1] cuyo dominio incluye a 0, es una función diferenciable en 0, y por tanto $\widetilde{F}$ es diferenciable en $[1:0]$ también.

$\boxed{7.}$ Construir un difeomorfismo entre $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{RP}^1$.

***Solución*:** Sabemos que ambas son variedades diferenciables de dimensión 1, y sabemos también que $U_S = S^1 \setminus \{(0,-1)\}$ es difeomorfo a $\mathbb{R}$ a través de la carta ψ_S, mientras que $U_1 = \mathbb{RP}^1 \setminus \{[1:0]\}$ es difeomorfo a $\mathbb{R}$ a través de la carta ψ_1. Por tanto, podemos definir

$$\begin{aligned} F\colon S^1 &\longrightarrow \mathbb{RP}^1 \\ p &\longmapsto \begin{cases} \psi_1^{-1} \circ \psi_S(p) & \text{si } p \neq (0,-1) \\ [1:0] & \text{si } p = (0,-1). \end{cases} \end{aligned}$$

Esta aplicación es diferenciable en U_N, porque $F|_{U_N} = \psi_0^{-1} \circ \psi_S$ es composición de dos aplicaciones diferenciables. Veamos qué ocurre en $p = (0,-1)$. Para ello tomamos las cartas U_N y ψ_0, que contienen a p y $F(p)$ y escribimos la expresión local de F en esas cartas:

$$\psi_0 \circ F \circ \psi_N^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Usando que $\psi_S \circ \psi_N^{-1}(a) = 1/a$ y $\psi_0 \circ \psi_1^{-1} = 1/a$, obtenemos que esta expresión local es:

$$\begin{aligned} &\psi_0 \circ F \circ \psi_N^{-1}(a) = \psi_0 \circ \psi_1^{-1} \circ \psi_S \circ \psi_N^{-1}(a) = a && \text{si } a \neq 0, \\ &\psi_0 \circ F \circ \psi_N^{-1}(a) = \psi_0 \circ F((0,-1)) = \psi_0([1:0]) = 0 && \text{si } a = 0. \end{aligned}$$

Así que ya sabemos que $\psi_0 \circ F \circ \psi_N^{-1}$ es diferenciable en 0. Además, sabemos que F es continua en $(-1,0)$ porque $F|_{U_N} = \psi_0^{-1} \circ \mathrm{id} \circ \psi_N$ es continua en el abierto U_N.

$\boxed{8.}$ Construir un difeomorfismo entre $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{CP}^1$.

***Solución*:**

$\boxed{9.}$ Sean M, N variedades diferenciables, y sean $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ las proyecciones. Demostrar que p_1 y p_2 son diferenciables. Demostrar que una aplicación $F : Q \to M \times N$ es diferenciable si y solo si la composición $p_1 \circ F$ y la composición $p_2 \circ F$ son diferenciables.

[1] Una función es racional si es el cociente de dos polinomios $f(z) = p(z)/q(z)$ (que podemos asumir que son coprimos), el dominio de definición de $f(z)$ es $z : q(z) \neq 0$. La derivada compleja es $\frac{p'(z)q(z)-p(z)q'(z)}{q(z)^2}$, que está bien definida en todo el dominio de definición de f. A su vez, vemos que esta derivada es otra función racional cuyo dominio de definición está contenido en el dominio de definición de f, así que la derivada también es derivable. De este modo, deducimos que la función se puede derivar respecto a z tantas veces como queramos. Finalmente, podemos expresar las derivadas parciales de $f(z)$ en términos de la derivada compleja de $f(z)$ usando las fórmulas de Cauchy-Riemann. En conclusión, la función racional es $\mathcal{C}^\infty$ en su dominio de definición.

***Solución*:**

(a) .

(b) Veamos ambas direcciones de la equivalencia:

$\boxed{\Rightarrow}$ Es trivial.

$\boxed{\Leftarrow}$ Observamos primero que $p_1 \circ F, p_2 \circ F$ continuas $\implies$ F es continua por la propiedad universal del producto. Veamos que F es diferenciable.

Sea $x \in Q$, y $(p,q) = F(x)$. Tomamos una carta (W, ϕ) de Q que contiene a x y otra carta $(U \times V, \psi \times \varphi)$ de $M \times N$ que contiene a (p,q). Veamos que $(\psi \times \varphi) \circ F \circ \phi^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en $\phi(x)$.

$$\begin{aligned}(\psi \times \varphi) \circ F \circ \phi^{-1}(z) &= \left(\psi\left(F(\phi^{-1}(z))\right), \varphi\left(F\left(\phi^{-1}(z)\right)\right)\right)\\ &= \left(\left(\psi \circ p_1 \circ F \circ \phi^{-1}\right)(z), \left(\varphi \circ p_2 \circ F \circ \phi^{-1}\right)(z)\right).\end{aligned}$$

Como ambas componentes son $\mathcal{C}^\infty$ porque son las expresiones locales de $p_1 \circ F$ y $p_2 \circ F$, concluimos que F es diferenciable.

$\boxed{10.}$ Sean $F : M \to M'$ y $G : N \to N'$ aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables. Demostrar que el producto $F \times G : M \times N \to M' \times N'$ es una aplicación diferenciable.

***Solución*:** Como $F\colon M \longrightarrow M'$ y $G\colon N \longrightarrow N'$ son $\mathcal{C}^\infty$, entonces $\pi_1 \circ H\colon M \times N \longrightarrow M'$ es la misma que $F \circ \pi_1\colon M \times N \longrightarrow M'$ y $\pi_2 \circ H = G \circ \pi_2$. Luego como

$$G \circ \pi_2 \text{ es } \mathcal{C}^\infty \implies \pi_2 \circ H \text{ es } \mathcal{C}^\infty \quad \text{y} \quad F \circ \pi_1 \text{ es } \mathcal{C}^\infty \implies \pi_1 \circ H \text{ es } \mathcal{C}^\infty,$$

por el ejercicio anterior, H es $\mathcal{C}^\infty$.

$\boxed{11.}$ Demostrar que una aplicación $F : M \to N$ entre variedades diferenciables es $\mathcal{C}^\infty$ si y solo si para toda $f : A \to \mathbb{R}$ diferenciable definida en un abierto $A \subset N$, la función $f \circ F : F^{-1}(A) \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

***Solución*:**

$\boxed{12.}$ **(Opcional)** Sean M, N dos variedades diferenciables.

(a) Demostrar que $\mathcal{C}^\infty(M)$ y $\mathcal{C}^0(M)$ son $\mathbb{R}$-álgebras y que $\mathcal{C}^\infty(M)$ es una subálgebra de $\mathcal{C}^0(M)$.

(b) Demostrar que si $F : M \to N$ es una aplicación continua, entonces la asignación $g \mapsto g \circ F$ define un homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $F^* : \mathcal{C}^0(N) \to \mathcal{C}^0(M)$.

(c) Demostrar que si $F : M \to N$ es una aplicación diferenciable, entonces el homomorfismo del apartado anterior se restringe a un homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $F^* : \mathcal{C}^\infty(N) \to \mathcal{C}^\infty(M)$.

(d) Demostrar que si $F : M \to N$ es una aplicación continua y $F^* : \mathcal{C}^0(N) \to \mathcal{C}^0(M)$ se restringe a un homomorfismo $F^* : \mathcal{C}^\infty(N) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, entonces F es diferenciable.

(e) Deducir que si $F : M \to N$ es un homeomorfismo y $F^* : \mathcal{C}^0(N) \to \mathcal{C}^0(M)$ se restringe a un isomorfismo $F^* : \mathcal{C}^\infty(N) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, entonces F es un difeomorfismo.

(f) Deducir que si las variedades diferenciables M, N están construidas sobre el mismo espacio topológico y $\mathcal{C}^\infty(M) = \mathcal{C}^\infty(N)$, entonces M y N son la misma variedad diferenciable.

***Solución*:**

H.3 Espacio tangente

$\boxed{1.}$ Sea $F : M \to N$ una aplicación diferenciable. Demostrar que si M es conexa, entonces F es constante si y solo si $DF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es la aplicación nula para cada punto $p \in M$.

***Solución*:** Tenemos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\psi"'] & N \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, dashed, "\widehat{F}"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "DF_p"] & T_{F(p)}N \\ T_p\mathbb{R}^m \arrow[u, "D\psi^{-1}\big|_p"] \arrow[r, dashed, "D\widehat{F}_{\hat{p}}"] & T_{\hat{p}}R^n \arrow[u, "D\varphi^{-1}\big|_{F(p)}"'] \end{tikzcd}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que F es constante, es decir, $F(p) = q \in N$ para todo $p \in M$. Entonces, $\widehat{F} = \varphi \circ F \circ \psi^{-1}$ es constante y, por lo tanto, su derivada es nula:

$$\forall i \in \mathbb{N}_m : D\widehat{F}\Big|_{\hat{p}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\hat{p}} \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}_n} \frac{\partial \left(\widehat{F}_j\right)}{\partial x^i}\Bigg|_{\hat{p}} \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{\widehat{F}(\hat{p})} = 0 \implies DF = 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $\forall p \in M : DF_p = 0$.

$\boxed{2.}$ Sean M, N variedades diferenciables y $q \in N$. Demostrar que la aplicación $F : M \to M \times N$ dada por $F(p) = (p, q)$ es diferenciable.

***Solución*:**

$\boxed{3.}$ Sean M, N variedades diferenciables, y $p \in M, q \in N$. Demostrar que la aplicación $T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \oplus T_qN$ inducida por las proyecciones $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ es un isomorfismo (como consecuencia, estos dos espacios vectoriales son canónicamente isomorfos, y podemos identificarlos inequívocamente).

***Solución*:** Como p_1 y p_2 son diferenciables, inducen

$$(Dp_1)_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM, \quad (Dp_2)_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_qN.$$

$$\begin{aligned} T_{(p,q)}M \times N &\xrightarrow{D(p_1,p_2)_{(p,q)}} T_pM \oplus T_qN \\ (v, w) &\longmapsto \Big((Dp_1)_{(p,q)}(v), (Dp_2)_{(p,q)}(w) \Big). \end{aligned}$$

Ahora considero las aplicaciones diferenciables

$$\begin{aligned} \iota_q \colon M &\to M \times N \\ p &\mapsto (p, q), \end{aligned} \quad \text{con } \left(D\iota_q\right)_p : T_pM \to T_{(p,q)}(M \times N)$$

$$\begin{aligned} \iota_p\colon N &\to M\times N \\ q &\mapsto (p,q). \end{aligned} \quad \text{con } \left(D\iota_p\right)_q : T_qN \to T_{(p,q)}\left(M\times N\right).$$

Entonces, por la propiedad universal del producto,existe una única aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \left(D\iota_q\right)_p \oplus \left(D\iota_p\right)_q : T_pM \oplus T_qN &\to T_{(p,q)}\left(M\times N\right), \\ (v,w) &\mapsto \left(D\iota_q\right)_p(v) + \left(D\iota_p\right)_q(w). \end{aligned}$$

Ahora

$$T_pM \oplus T_qN \xrightarrow{\left(D\iota_q\right)_p\oplus\left(D\iota_p\right)_q} T_{(p,q)}\left(M\times N\right) \xrightarrow{D(p_1,p_2)_{(p,q)}} T_pM \oplus T_qN$$

$\boxed{4.}$ Sea $F:\mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ dada por $F((x,y,z)) = [x+y : x+z : y]$.

(a) Hallar la expresión local de DF_p en las coordenadas de las cartas (U_N,ψ_N) y (U_2,ψ_2) de $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{RP}^2$ respectivamente, donde $p\in U_N\cap F^{-1}(U_2)$ es un punto cualquiera.

(b) Si $p=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ y consideramos el vector

$$v = \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p - \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p \in T_p\mathbb{S}^2$$

que viene dado en las coordenadas de la carta (U_N,ψ_N), hallar la expresión de $DF_p(v)\in T_{F(p)}\mathbb{RP}^2$ en la base dada por la carta (U_2,ψ_2).

(c) Hallar un camino diferenciable $\gamma: J\to\mathbb{S}^2$ cuya velocidad en $t=0$ sea igual a v.

***Solución*:** Tenemos que F está bien definida porque si $x+y=0$, $x+z=0$ y $y=0$, entonces $x=y=z=0$ luego $(x,y,z)\notin\mathbb{S}^2$.

(a) Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U_N\subset\mathbb{S}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{RP}^2\supset U_2 \\ \downarrow{\scriptstyle\psi_N} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_2} \\ \mathbb{R}^2 & \overset{\widehat{F}}{\dashrightarrow} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

donde $\widehat{F} = \psi_2\circ F\circ\psi_N^{-1}$. Calculemos $\widehat{F}$, sea $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \psi_N^{-1}(x_1,x_2) &= \frac{1}{x_1^2+x_2^2+1}\left(2x_1,2x_2,x_1^2+x_2^2-1\right) \\ \implies F\circ\psi_N^{-1}(x_1,x_2) &= \left[\frac{2x_1+2x_2}{x_1^2+x_2^2+1} : \frac{2x_1+x_1^2+x_2^2-1}{x_1^2+x_2^2+1} : \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2+1}\right] \\ &= \left[2x_1+2x_2 : 2x_1+x_1^2+x_2^2-1 : 2x_2\right] \\ \implies \widehat{F}(x_1,x_2) &= \left(1+\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1^2+x_2^2+2x_1-1}{2x_2}\right). \end{aligned}$$

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p , \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p \right\rangle = T_p\mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\quad DF_p \quad} & T_{F(p)}\mathbb{RP}^2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_{F(p)} , \frac{\partial}{\partial y^2}\Big|_{F(p)} \right\rangle \\
\Big\downarrow (D\psi_N)_p & & \Big\downarrow (D\psi_2)_{F(p)} \\
\left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{\hat p} , \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_{\hat p} \right\rangle = T_{\hat p}\mathbb{R}^2 & \overset{D\hat F_{\hat p}}{\dashrightarrow} & T_{F(\hat p)}\mathbb{R}^2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_{\widehat F(\hat p)} , \frac{\partial}{\partial y^2}\Big|_{\widehat F(\hat p)} \right\rangle \mathbb{R}^2
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad D\widehat F\Big|_{\hat p}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{\hat p}\right) = \frac{\partial\left(y^1\circ \widehat F\right)}{\partial x^1}\Bigg|_{\hat p} \frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_{\widehat F(\hat p)} + \frac{\partial\left(y^2\circ \widehat F\right)}{\partial x^1}\Bigg|_{\hat p} \frac{\partial}{\partial y^2}\Big|_{\widehat F(\hat p)}$$

$$D\widehat F\Big|_{\hat p}\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_{\hat p}\right) = \frac{\partial\left(y^1\circ \widehat F\right)}{\partial x^2}\Bigg|_{\hat p} \frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_{\widehat F(\hat p)} + \frac{\partial\left(y^2\circ \widehat F\right)}{\partial x^2}\Bigg|_{\hat p} \frac{\partial}{\partial y^2}\Big|_{\widehat F(\hat p)}$$

$$\Longrightarrow \quad D\widehat F_{\hat p} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_2} & -\dfrac{x_1}{x_2^2} \\ \dfrac{x_1+1}{x_2} & \dfrac{x_2^2 - x_1^2 - 2x_1 + 1}{2x_2^2} \end{pmatrix} = DF_p.$$

(b) Tenemos $p = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, entonces $\hat p = \psi_N(p) = \left(\frac{2/3}{1-1/3}, \frac{2/3}{1-1/3}\right) = (1,1)$.

$$\Longrightarrow \quad DF_p = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad DF_p(v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}.$$

Entonces $DF_p(v) = 2\, \dfrac{\partial}{\partial y^1}\Big|_{F(p)} + \dfrac{5}{2}\, \dfrac{\partial}{\partial y^2}\Big|_{F(p)}$.

(c) Consideremos los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
J\subset\mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{S}^2 \\
\big\downarrow \mathrm{id} & & \big\downarrow \psi_N \\
\mathbb{R} & \overset{\hat\gamma}{\dashrightarrow} & \mathbb{R}^2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
T_sJ & \xrightarrow{D\gamma_s} & T_{\gamma(s)}\mathbb{S}^2 \\
\big\downarrow \mathrm{id} & & \big\downarrow D\psi_N|_{\gamma(s)} \\
T_s\mathbb{R} & \overset{D\hat\gamma_s}{\dashrightarrow} & T_{\hat\gamma(s)}\mathbb{R}^2
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad D\widehat\gamma|_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_s\right) = \frac{\partial\widehat\gamma_1}{\partial t}\Big|_s \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{\gamma(s)} + \frac{\partial\widehat\gamma_2}{\partial t}\Big|_s \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_{\gamma(s)}.$$

Imponiendo que $D\widehat\gamma|_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\big|_0\right) = v$ obtenemos el sistema

$$\frac{\partial\widehat\gamma_1}{\partial t}\Big|_0 = 1 \quad \wedge \quad \frac{\partial\widehat\gamma_2}{\partial t}\Big|_0 = -1.$$

Por ejemplo, sirve $\hat{\gamma}(t) = (1+t, 1-t)$ cumple $\hat{\gamma}(0) = (1,1) = \hat{p}$ y $D\hat{\gamma}|_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}\big|_0\right) = v$.

$$\implies \gamma(t) = \left(\psi_N^{-1} \circ \hat{\gamma}\right)(t) = \left(\frac{2+2t}{3+2t^2}, \frac{2-2t}{3+2t^2}, \frac{1+2t^2}{3+2t^2}\right).$$

$\boxed{5.}$ Sea $F : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ la aplicación diferenciable dada por $F([z_0 : z_1]) = [z_0^2 : z_1^2]$, sea $\gamma : (-1, \infty) \to \mathbb{CP}^1$ el camino diferenciable dado por $\gamma(t) = [t+1 : t^2 + i]$, y sean $p = \gamma(0), q = \gamma(1)$.

(a) Calcular la expresión local de F tomando la carta (U_0, ψ_0) en el dominio y la carta (U_0, ψ_0) en el codominio.

(b) Calcular la expresión local respecto a la carta (U_0, ψ_0) de los vectores

$$v = \gamma'(0) \in T_p\mathbb{CP}^1, \quad w = \gamma'(1) \in T_q\mathbb{CP}^1.$$

(c) Calcular la expresión local de $DF_p(v)$ y de $DF_q(w)$ en la base dada por la carta (U_0, ψ_0).

Solución:

$\boxed{6.}$ Definir una función $f : \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}$ que asigne a cada par de rectas L, L' la distancia angular

$$\sqrt{1 - \cos^2(\theta)},$$

donde θ es el ángulo (sin signo) entre un vector que genera a L y otro vector que genera a L'.

(a) Convencerse de que f es la siguiente función:

$$f([x_0, x_1, x_2], [y_0, y_1, y_2]) = \sqrt{\frac{\sum_{i \neq j} x_i^2 y_j^2 - x_i y_i x_j y_j}{\sum x_i^2 y_j^2}}.$$

(b) Comprobar que f es una función diferenciable.

(c) Consideremos el camino $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ dado por

$$\gamma(t) = ([1:0:0], [1:t:0]).$$

Si $v = \gamma'(0) \in T_{\gamma(0)}(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2)$ es la velocidad de γ en 0, ¿qué número es $v(f)$?

(d) Hallar la expresión de $\gamma'(0)$ en las coordenadas de alguna carta.

$\boxed{7.}$ Consideremos la esfera de dimensión n, donde definimos las siguientes $2n+2$ cartas:

$$A = \{(U_i^+, \phi_i^+), (U_i^-, \phi_i^-)\}_{i=1}^{n+1}$$

de la siguiente manera:

$$U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0\}, \quad U_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i < 0\},$$

$$\phi_i^+(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), \quad \phi_i^-(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}).$$

(a) Demostrar que A es un atlas diferenciable en S^n.

(b) Demostrar que A define la misma estructura diferenciable en S^n que el atlas formado por las proyecciones estereográficas desde el polo norte y el polo sur.

(c) Sea $\gamma(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t), \sin(t))$ y sea $p = (1, 0, 0)$. Expresar $v = \gamma'(0) \in T_p\mathbb{S}^2$ en las coordenadas de la carta (U_N, ψ_N).

(d) Escribir la matriz de cambio de base de $T_p\mathbb{S}^2$ de la base dada por la carta (U_N, ψ_N) a la base dada por la carta (U_1^+, ϕ_1^+). Calcular la imagen de $\gamma'(0)$ usando este cambio de base.

(e) Sean

$$v = 2\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_{(1,0,0)} - \frac{\partial}{\partial x_2}\bigg|_{(1,0,0)}, \quad w = -\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_{(3/5,4/5,0)} + 3\frac{\partial}{\partial x_2}\bigg|_{(3/5,4/5,0)}$$

expresados en las coordenadas de la carta (U_1^+, ϕ_1^+). Calcular la expresión de v y w en las coordenadas de la carta (U_N, ψ_N).

H.4 Inmersiones, submersiones

$\boxed{1.}$ Sean V, W espacios vectoriales. Diremos que dos aplicaciones lineales $A, B : V \to W$ son equivalentes si existe un automorfismo G de V y un automorfismo F de W tales que $A = FBG$. El rango de una aplicación lineal es la dimensión de su imagen.

(a) Demostrar que dos aplicaciones lineales $A, B : V \to W$ son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

(b) Sea $F : M^m \to N^n$ una aplicación diferenciable y $p \in M$. Sea k el rango de DF_p y sea A una matriz $n \times m$ de rango k. Sea B la matriz cuyas entradas son

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ y } i \leq k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

i. Demostrar que existen cartas (U, ψ) y (V, ϕ) de M y N que contienen a p y a $F(p)$ respectivamente tales que la expresión matricial de DF_p en esas coordenadas es A.

ii. Demostrar que existen cartas (U, ψ) y (V, ϕ) de M y N que contienen a p y a $F(p)$ respectivamente tales que la expresión matricial de DF_p en esas coordenadas es B.

$\boxed{2.}$ Demostrar que la aplicación cociente $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ es una submersión.

***Solución*:**

$\boxed{3.}$ Demostrar que la aplicación $F : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ dada por $F(u) = \frac{u}{\|u\|}$ es una submersión.

$\boxed{4.}$ Demostrar que la aplicación inclusión $F : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ es un embebimiento.

***Solución*:** Ya sabemos que F es una inmersión y que es inyectiva. Como $\mathbb{S}^n$ es compacto y F es una inmersión inyectiva, entonces F es un embebimiento.

$\boxed{5.}$ Demostrar que la proyección $p_1 : M \times N \to M$ es una submersión.

***Solución*:** Sea $(p, q) \in M \times N$, entonces $s \colon M \longrightarrow M \times N$ es una sección de p_1 cuya imagen contiene a (p, q). Por tanto, p_1 es una submersión.

$\boxed{6.}$ Demostrar que si $F : M_1 \to N_1$ y $G : M_2 \to N_2$ son dos inmersiones (submersiones), entonces $F \times G : M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2$ es también una inmersión (submersión).

***Solución*:**

$\boxed{7.}$ Demostrar que la aplicación $F : S^1 \to S^1$ dada por $F(z) = z^n$ es un difeomorfismo local pero no un difeomorfismo (aquí vemos $S^1 \subset \mathbb{C}$). Demostrar que la aplicación $F : S^2 \to \mathbb{RP}^2$ dada por $F(x, y, z) = [x : y : z]$ es un difeomorfismo local, pero no un difeomorfismo.

Solución:

$\boxed{8.}$ Demostrar que si $F : M \to N$ es un difeomorfismo local y una biyección, entonces es un difeomorfismo.

Solución:

$\boxed{9.}$ Si $F : M \to N$ es una inmersión inyectiva entre variedades de la misma dimensión, entonces F es un embebimiento.

Solución:

$\boxed{10.}$ Demostrar que si $F : M \to N$ y $G : N \to Q$ son dos aplicaciones diferenciables, entonces:

(a) Si F y G son inmersiones, entonces $G \circ F$ es una inmersión.

(b) Si $G \circ F$ es una inmersión, entonces F es una inmersión.

$\boxed{11.}$ Sea M una variedad compacta, y sea N una variedad conexa, ambas de la misma dimensión. Si $F : M \to N$ es un embebimiento entonces es un difeomorfismo.

Solución:

$\boxed{12.}$ Sea $F : M \to N$ una submersión. Demostrar que la estructura diferenciable de M determina la estructura diferenciable de N. (En detalle: Si M es una variedad diferenciable con estructura diferenciable A y N es una variedad topológica con dos estructuras diferenciables A' y A'' tales que $F : M \to N$ es una submersión respecto a ambas estructuras, entonces $A' = A''$).

$\boxed{13.}$ Resolver la primera cuestión del Ejercicio 5 de esta hoja usando las propiedades universales de submersiones y la submersión $G : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $G(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

$\boxed{14.}$ Volver a hacer el Ejercicio 5 de la Hoja 2, usando que la aplicación cociente $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ es una submersión.

$\boxed{15.}$ Volver a hacer el Ejercicio 1 de la Hoja 1, usando que la aplicación inclusión $S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ es un embebimiento.

$\boxed{16.}$ Demostrar que el subconjunto $\{[x_0 : \ldots : x_n] \mid x_0 = 0\} \subset \mathbb{RP}^n$ es una subvariedad difeomorfa a $\mathbb{RP}^{n-1}$.

$\boxed{17.}$ Demostrar que la aplicación diferenciable $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(u, v) = \big((2 + \cos(2\pi u)) \cos(2\pi v), (2 + \cos(2\pi u)) \sin(2\pi v), \sin(2\pi u)\big)$$

es una inmersión. Demostrar que induce un embebimiento $S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$ (recordemos que $S^1 \times S^1$ se puede obtener como el cociente de $\mathbb{R}^2$ por cierta relación).

$\boxed{18.}$ Demostrar que una submersión es una aplicación abierta. Deducir que una submersión sobreyectiva es una aplicación cociente.

$\boxed{19.}$ Dar un ejemplo de una submersión que no sea sobreyectiva.

$\boxed{20.}$ Demostrar que si $F : M \to N$ es una submersión y M es compacto, entonces F es sobreyectiva.

$\boxed{21.}$ Demostrar que la aplicación $F : S^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$

induce una aplicación diferenciable $\mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$, y que esta aplicación es un embebimiento.

$\boxed{22.}$ Demostrar que la aplicación de Segre $F : \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^3$ definida como

$$F([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) = [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1]$$

es un embebimiento.

$\boxed{23.}$ Sea $T^2 = S^1 \times S^1$ el toro, con la estructura diferenciable producto.

(a) Demostrar que la aplicación $F : \mathbb{R}^2 \to T^2 \subset \mathbb{C}^2$ dada por $F(t_1, t_2) = (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2})$ es un difeomorfismo local.

(b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ como $G(t) = (t, \alpha t)$. Demostrar que $H = F \circ G$ es una inmersión de $\mathbb{R}$ en T^2.

(c) Demostrar que si $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces la imagen de H es una subvariedad de T^2 difeomorfa a S^1.

(d) Demostrar que si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces H es inyectiva.

(e) Demostrar que $D = F^{-1}(H(\mathbb{R}))$ es la unión de todas las rectas de $\mathbb{R}^2$ con ecuación $y = \alpha x + (n - \alpha m)$, donde m y n son enteros.

(f) Demostrar que si $D \subset \mathbb{R}^2$ es denso, entonces $H(\mathbb{R}) \subset T^2$ es denso.

(g) Demostrar que si la intersección de D con el eje de ordenadas es denso en el eje, entonces D es denso en $\mathbb{R}^2$.

(h) Demostrar que esa intersección es densa en el eje de ordenadas usando el Teorema de aproximación de Dirichlet: Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$, entonces existen enteros p, q tales que $1 \leq q \leq N$ y $|q\alpha - p| < \frac{1}{N}$.

Bibliografía

Boothby, W. M. (1986). *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry* (2nd ed). Academic Press. https://www.academia.edu/8405433/An_introduction_to_differentiable_manifolds_and_riemannian_geometry

Lee, J. M. (2013). *Introduction to smooth manifolds* (Second edition). Springer. https://julianchaidez.net/materials/reu/lee_smooth_manifolds.pdf

Referenciado en

- `Asignaturas`