

---

# MODELIZACIÓN

---

## Tercero del Grado en Matemáticas

**Hugo Marquerie**

Profesor: Carlos Mora

Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid

Segundo cuatrimestre 2024 - 2025

28 de enero, 2025



# Índice

<b>1</b>	<b>Modelización determinista</b>	<b>1</b>
1.1	Introducción . . . . .	1
1.2	Modelos de población . . . . .	1
1.2.1	Modelo de Fibonacci . . . . .	1
1.2.2	Modelo de Euler-Malthus . . . . .	2
1.2.3	Modelo de Verhulst . . . . .	2
1.2.4	Cooperación ( <i>doomsday</i> ) . . . . .	4
1.3	Modelos depredador-presa . . . . .	4
1.3.1	Modelo de Lotka-Volterra . . . . .	4
1.4	Modelos de contagio . . . . .	5
1.4.1	Enfermedades infecciosas: modelo SIR . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Modelización estocástica. Cadenas de Markov</b>	<b>9</b>
2.1	Procesos de ramificación: modelo de Galton-Watson . . . . .	9
2.2	Modelo poblacional de Leslie . . . . .	11
2.2.1	Recordatorio del modelo de Fibonacci . . . . .	11
2.2.2	Modelo de Leslie . . . . .	11
2.3	Cadenas de Markov . . . . .	14
2.3.1	Probabilidad de transición . . . . .	15
2.3.2	Distribución de probabilidad . . . . .	15
2.3.3	Accesibilidad, comunicación, irreducibilidad y grafos . . . . .	16
2.4	Recurrencia y transitoriedad . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Cálculo de variaciones</b>	<b>19</b>
<b>H</b>	<b>Hojas de ejercicios</b>	<b>21</b>
H.1	Una población, modelos de ecuaciones diferenciales . . . . .	21
H.1.1	Varias poblaciones . . . . .	27
H.1.2	Modelos de contagio . . . . .	28
H.2	Modelización estocástica . . . . .	30
H.2.1	Procesos de Galton-Watson . . . . .	30
H.2.2	Modelo de Leslie . . . . .	32
H.3	Cálculo de variaciones . . . . .	34
H.3.1	Clasificación de estados y cálculo de probabilidades de transición . . .	34

H.3.2	Probabilidades y tiempos medios de llegada . . . . .	36
-------	--	----

# 1. Modelización determinista

## 1.1 Introducción

**Definición 1.1.1 (Modelizar).** Decimos que modelizar es proponer una formulación matemática para entender o explicar un cierto fenómeno real.

**Interacción de la modelización** (proceso ideal cíclico)

1. A partir de mediciones de un fenómeno real, se **formula** un modelo matemático.
2. Se “**resuelve**” el modelo matemático para extraer conclusiones.
3. Se **interpreta** el resultado obtenido para hacer predicciones sobre el fenómeno real.
4. Se **valida** o no el modelo propuesto comparando las predicciones con nuevas mediciones.

El objetivo de un modelo matemático es **entender**, **explicar**, **tomar decisiones** y en ocasiones **desvelar** aspectos ocultos acerca del fenómeno real que se esté estudiando.

Un modelo debería ser siempre:

- Funcional.
- Elegante.
- Sencillo.
- Adimensional.
- Resoluble.

Típicas elecciones iniciales para un modelo:

1. Dinámico o estático según si dependen del tiempo o no.
2. Discreto o continuo según si el tiempo es discreto o continuo.
3. Determinista o probabilístico según si se conocen todas las variables o no.
4. Una o varias magnitudes.

## 1.2 Modelos de población

### 1.2.1 Modelo de Fibonacci

El modelo de Fibonacci es un modelo de crecimiento de una población de una única especie que sigue las siguientes reglas:

- Cada pareja de conejos se reproduce cada mes a partir del primer mes de vida.
- La pareja engendra un par de conejos en cada parto.

- Los conejos nunca mueren.
- Empezamos con una pareja de conejos jóvenes (menos de un mes).

Denotaremos por  $J$  el número de parejas jóvenes y por  $A$  el número de parejas adultas.

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$J$	1	0	1	1	2
$A$	0	1	1	2	3
Total	1	1	2	3	5

Si denotamos por  $P_n$  el número de parejas de conejos en el  $n$ -ésimo mes, entonces  $\forall n \in \mathbb{N} : P_n = F_{n+1}$ , donde  $F_n$  es el  $n$ -ésimo número de la sucesión de Fibonacci.

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \phi^n - \left( \frac{-1}{\phi} \right)^n \right) \text{ donde } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Podemos simplificar este resultado exacto para obtener una fórmula aproximada:  $F_n \sim \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ . Esto es, el número de parejas de conejos **crece exponencialmente**.

### 1.2.2 Modelo de Euler-Malthus

El modelo de Euler es un modelo discreto de crecimiento de una población de una única especie que sigue las siguientes reglas:

- Comenzamos con una población inicial  $P_0$ .
- Cada año la población crece un porcentaje  $x$ .

Por tanto, tenemos que la población en el año  $n$  es  $P_n = P_0(1+x)^n$  con  $x$  la tasa de crecimiento. Entonces,  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión geométrica de razón  $1+x$ .

Podemos extender este modelo a uno continuo (el modelo malthusiano) con un PVI de la forma  $\{P(0) = P_0 \wedge P'(t) = kP(t)\}$  que tiene la solución  $P(t) = P_0 e^{kt}$ .

Este modelo de crecimiento exponencial es demasiado sencillo y solo funciona a corto plazo y cuando hay recursos (casi) ilimitados. Para solventar este problema, propondremos el modelo de Verhulst.

### 1.2.3 Modelo de Verhulst

Podemos incorporar la limitación de escasez de recursos al modelo de Euler-Malthus añadiendo un término en la ecuación diferencial:  $P'(t) = rP(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{k} \right)$  donde  $k$  es el máximo de población que puede soportar el ecosistema y depende de la especie y de los recursos.

Entonces, el desarrollo de Taylor de  $P(t)$  en 0 cuando  $P(0) \approx 0$ :

$$P(t) \approx P(0) + P'(0)t + \dots \approx P'(0)t \approx rP(0)t$$

nos indica que el crecimiento es exponencial cerca del 0. Por otro lado, el desarrollo de Taylor de  $P'(t)$  en  $k$  nos indica que el decrecimiento es exponencial cerca de  $k$ :  $P'(t) \approx -r(P(t) - k)$ .

Tenemos que el único punto de equilibrio estable es  $P = k$ , luego si la población inicial es  $P_0 < k$ , crecerá hasta  $k$  y si es  $P_0 > k$ , decrecerá hasta  $k$ .

Resolvemos la ecuación diferencial:  $P'(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{k}\right) \iff \frac{P'(t)}{P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{k}\right)} = r$

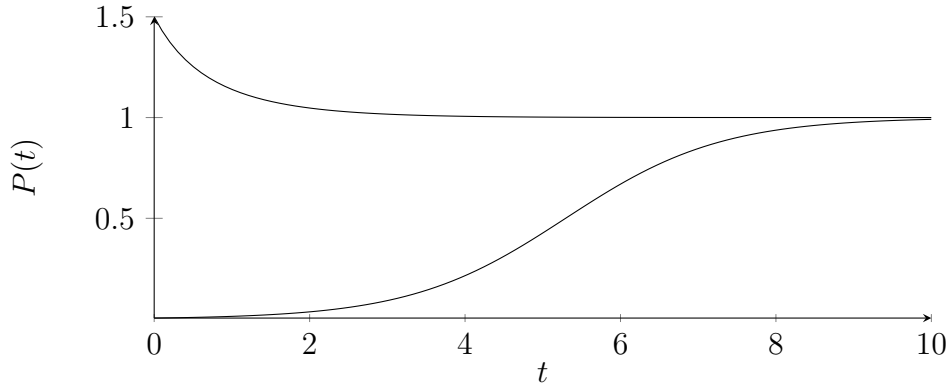
$$\int \frac{P'(t)}{P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{k}\right)} dt = rt + c$$

Por el método de las fracciones simples, tenemos que  $\frac{1}{P(t) (1 - P(t)/k)} = \frac{1}{k} + \frac{1/k}{1 - P(t)/k}$ .

$$\iff \ln |P(t)| - \ln |K - P(t)| = rt + c \iff \ln \left| \frac{P(t)}{K - P(t)} \right| = rt + c$$

Despejando  $P(t)$  obtenemos la solución general:  $P(t) = \frac{P_0 e^{rt}}{1 + \frac{P_0}{K} (e^{rt} - 1)}$ .

Cuya gráfica es una sigmoide:



Para calcular el punto de inflexión es más fácil partir directamente de la ecuación diferencial:

$$P''(t) = \frac{d}{dt} \left( rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{k}\right) \right) = 0 \iff rP'(t) - 2\frac{r}{k}P(t)P'(t) = rP'(t) \left(1 - \frac{2P(t)}{k}\right) = 0$$

Por tanto, el punto de inflexión es  $P = k/2$  que se alcanza cuando  $t = 1/2 \ln \left( \frac{k-P_0}{P_0} \right)$ .

Para  $P_0$  conocido, podemos resolver (numéricamente) para  $r$  y  $k$  dados dos puntos de la gráfica  $P(t_1) = P_1$  y  $P(t_2) = P_2$ . Casualmente, si tenemos  $t_2 = 2t_1$ , podemos resolver

analíticamente para  $r$  y  $k$ :

$$k = P_1 \frac{P_0 P_1 + P_1 P_2 - 2P_0 P_2}{P_1^2 - P_0 P_2} \quad \wedge \quad r = \frac{1}{t_1} \ln \left( \frac{1/P_0 - 1/k}{1/P_1 - 1/k} \right)$$

Podemos adimensionalizar el modelo de Verhulst mediante un cambio de variable:  $x(t) = \frac{P(t)}{k}$ :

$$\implies x'(t) = \frac{P'(t)}{k} = \frac{rP(1 - P/k)}{k} = \frac{rkx(1 - x)}{k} = rx(1 - x)$$

Cuya solución es  $x(t) = \frac{x_0 e^{rt}}{1 + x_0(e^{rt} - 1)}$ .

### 1.2.4 Cooperación (*doomsday*)

En ocasiones, en poblaciones humanas (e.g. siglos XVII-XX) se observa que  $P'/P$  crece con  $P$ . Podemos modelizar esto con la EDO  $P'/P = rP \implies P' = rP^2$  cuya solución es

$$P(t) = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\frac{1}{rP_0} - t}.$$

Entonces, la gráfica de  $P(t)$  presenta una asíntota vertical en  $t_0 = \frac{1}{rP_0}$  (*doomsday* o “el día del juicio final”).

## 1.3 Modelos depredador-presa

### 1.3.1 Modelo de Lotka-Volterra

Para modelizar la interacción entre dos especies (de depredadores y presas) en un mismo ecosistema, proponemos el modelo de Lotka-Volterra. Denotaremos por  $x(t)$  el número de presas y por  $y(t)$  el número de depredadores en el tiempo  $t$ . El sistema de EDOs es:

$$\begin{cases} \frac{x'(t)}{x(t)} = k_1 - \alpha_1 y(t) \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = -k_2 + \alpha_2 x(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x'(t) = x(t)(k_1 - \alpha_1 y(t)) \\ y'(t) = y(t)(-k_2 + \alpha_2 x(t)) \end{cases}$$

con  $k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$  parámetros del modelo.

Este sistema de EDOs es autónomo no lineal y no admite solución explícita general. Sin embargo, el teorema de Picard-Lindelöf nos garantiza la existencia y unicidad de soluciones locales porque  $F(x, y) = x(k_1 - \alpha_1 y)$  y  $G(x, y) = y(-\alpha_2 x + k_2)$  son localmente Lipschitz.

Además, hay un intervalo maximal de existencia  $[0, T)$  con  $0 < T \leq \infty$  tal que si  $T < \infty$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow T} \|(x(t), y(t))\| = \infty$ .



Tenemos tres soluciones particulares triviales:  $\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = y_0 e^{-k_2 t} \end{cases}$  y  $\begin{cases} x(t) = x_0 e^{k_1 t} \\ y(t) = 0 \end{cases}$ .

Podemos obtener los puntos de equilibrio del sistema resolviendo

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \wedge y = 0 \\ y = \frac{k_1}{\alpha_1} \wedge x = \frac{k_2}{\alpha_2} \end{cases} \rightsquigarrow (0, 0), \left( \frac{k_2}{\alpha_2}, \frac{k_1}{\alpha_1} \right).$$

Para estudiar el diagrama de fases necesitamos la matriz jacobiana del sistema:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 - \alpha_1 y & -\alpha_1 x \\ \alpha_2 y & -k_2 + \alpha_2 x \end{pmatrix}.$$

Entonces,  $J(0, 0) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}$  y tenemos un punto de silla (inestable) en el origen y  $J\left(\frac{k_2}{\alpha_2}, \frac{k_1}{\alpha_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 k_2 / \alpha_1 \\ \alpha_2 k_1 / \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$  y tenemos un centro (estable) en  $\left(\frac{k_2}{\alpha_2}, \frac{k_1}{\alpha_1}\right)$ .

*Observación 1.3.1.* La caza moderna (de ambas especies) aumenta el número de presas y disminuye el número de depredadores.

## 1.4 Modelos de contagio

### 1.4.1 Enfermedades infecciosas: modelo SIR

Dividimos la población en tres grupos:

1.  $S(t)$  (susceptibles): No transmiten la enfermedad pero pueden ser infectados.
2.  $I(t)$  (infectados): Pueden transmitir la enfermedad y/o retirarse del modelo.
3.  $R(t)$  (retirados): No pueden ser infectados ni transmitir la enfermedad.

Se asume que la población  $N$  es constante (los nacimientos y muertes por otras causas son despreciables ya que la enfermedad se estudia en un corto periodo de tiempo). Además, el paso de un individuo de un grupo a otro sigue ciertas reglas:

- De  $S$  a  $I$ : es proporcional al número de encuentros.
- De  $I$  a  $R$ : es proporcional al número de infectados.

Por tanto, el modelo SIR es un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} S'(t) = -aI(t)S(t) \\ I'(t) = aI(t)S(t) - bI(t) \\ R'(t) = bI(t) \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{l} a, b > 0 \text{ son parámetros del modelo:} \\ - a: \text{ tasa de contagio.} \\ - b: \text{ tasa de recuperación.} \end{array}$$

Las condiciones iniciales que se consideran son  $S(0) = N - I_0$ ,  $I(0) = I_0$  y  $R(0) = 0$ . El número de retirados inicial es 0 porque se asume que la enfermedad no ha pasado por la población y los individuos “inmunes”, es decir, los que jamás se infectarán, se excluyen del modelo porque no lo afectan.

Normalmente  $I_0 = 1$  (“paciente cero”) o  $I_0 \ll N$ , con lo que  $S(0) \approx N$ .

**Proposición 1.4.1.** *El modelo SIR tiene una única solución definida para todo  $t \geq 0$ :*

1. Además,  $\forall t \geq 0 : 0 \leq S(t), I(t), R(t) \leq N$ .
2. Por último,  $S(t) \searrow S_\infty > 0$ ,  $I(t) \rightarrow 0$  y  $R(t) \nearrow R_\infty < N$  cuando  $t \rightarrow \infty$  donde:

$$(a) \frac{S(0)}{S_\infty} = \frac{a}{b} (N - S_\infty) \quad (b) S_\infty < \frac{a}{b} \quad (c) R_\infty = N - S_\infty.$$

**Demostración:** La EDO  $S'(t) = -aI(t)S(t)$  tiene solución única local por ser  $\mathcal{C}^1$ .

1. Aplicando la fórmula de variación de las constantes, obtenemos

$$S(t) = S(0)e^{-a \int_0^t I(u) du} \implies S \geq 0.$$

De igual manera  $I'(t) = I(t)(aS(t) - b) \implies I(t) = I(0)e^{-bt + a \int_0^t S(u) du} \geq 0$  y  $R(t) \geq 0$ .

Como  $S' + I' + R' = 0$ , tenemos que  $S(t) + I(t) + R(t) = N$ . En particular,  $0 \leq S, I, R \leq N$ , luego la solución está acotada y por el teorema de existencia global de EDOS, la solución existe para todo  $t \geq 0$ .

2. Como  $S' = -aIS < 0$ ,  $S$  es decreciente y acotada inferiormente por 0,  $S$  converge a un límite  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \inf_{t \geq 0} S(t) =: S_\infty \geq 0$ . Análogamente, como  $R' = bI > 0$ ,  $R$  es creciente y acotada superiormente por  $N$ ,  $R$  converge a un límite  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \sup_{t \geq 0} R(t) =: R_\infty \leq N$ .

Finalmente, como  $I(t) = N - S(t) - R(t)$ ,  $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = I_\infty \geq 0$ . Veamos que  $I_\infty = 0$ :

$$R'(t) = bI(t) \implies R_\infty - R(0) = \int_0^\infty R'(t) dt = b \int_0^\infty I(t) dt.$$

Por tanto,  $\int_0^\infty I(t) dt$  es absolutamente convergente. Si  $I_\infty > 0$ , entonces  $\int_0^\infty I(t) dt = \infty$ , lo cual es absurdo, por tanto,  $I_\infty = 0$ .

- (a) Tenemos

■

Por tanto,  $I(S) = N - S - \frac{b}{a} \log \frac{S_0}{S}$  tiene un máximo en  $S = \frac{b}{a}$ .

El valor máximo de  $I$  es  $I_{\max} = \begin{cases} I_0 & \text{si } S_0 \frac{a}{b} < 1 \\ N - \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \log \frac{a}{b} S_0 & \text{si } S_0 \frac{a}{b} \geq 1 \end{cases}$

El número total de infectados (a lo largo de todo el desarrollo de la enfermedad) es  $\int_0^\infty I(t) dt$ .

Observamos que  $s' = -aIS$  y  $I' = aIS - bI$  luego al sumar tenemos que  $(S + I)' = -bI$

$$\implies \int_0^\infty (S(t) + I(t))' dt = -b \int_0^\infty I(t) dt.$$

Como  $N = I_0 + S_0$ ,  $\int_0^\infty (S + I)' dt = S_\infty + I_\infty - N$  y se tiene que

$$\int_0^\infty I(t) dt = \frac{N - S_\infty}{b} = \frac{N}{b} \left( 1 - \frac{S_\infty}{N} \right).$$

**Pregunta:** ¿Cómo podemos calibrar los parámetros  $a$  y  $b$  del modelo?

El “observable” más habitual es el número de retirados (por semana o día), que nos da una aproximación de  $R'(t)$ . A partir de esta información, podemos ajustar los parámetros del modelo pero esta es una labor muy complicada y no estudiaremos cómo hacerlo.

#### 1.4.1.1 Reinterpretación de los parámetros

Como ya vimos, el parámetro  $b$  puede interpretarse como la tasa de recuperación de la enfermedad, pero podemos considerar su inverso  $1/b$  como el tiempo medio que un individuo infectado pasa en el grupo de infectados, es decir, la duración media de la enfermedad.

Por otro lado,  $a$  es la tasa de contagio, pero podemos despejar  $a = \frac{k\tau}{N}$  donde  $k$  es el número de contactos de cada individuo por unidad de tiempo (independiente de la  $N$ ) y  $\tau$  es la fracción de contactos que resultan en contagio (transmisibilidad).

Luego, con esta nueva notación,  $R_0 = S_0 \frac{a}{b} = S_0 D \frac{k\tau}{N}$ . Queremos que  $R_0 < 1$ , para reducirlo, tenemos 4 maneras:

1. Reducir  $D$  mediante medicamentos o antivirales.
2. Reducir  $S_0$  mediante vacunas. Por ejemplo, si pasamos de  $S_0$  a  $S_0(1 - p)$ , quizá  $R_0$  pase a ser menor que 1 (inmunidad de rebaño).
3. Reducir  $k$  mediante medidas de distanciamiento social (confinamiento, aislamiento, etc.).

4. Reducir  $\tau$  mediante medidas de higiene (mascarillas, lavado de manos, etc.).

## 2. Modelización estocástica. Cadenas de Markov

### 2.1 Procesos de ramificación: modelo de Galton-Watson

Queremos estudiar, por ejemplo, la herencia de un apellido a lo largo de las generaciones:

1. El tiempo es discreto:  $n = 0, 1, 2, \dots$
2. En el tiempo  $n = 0$ , hay un individuo con el apellido.
3. En el tiempo  $n + 1$ ,  $X_{n+1}$  individuos heredan el apellido de cada individuo en la generación anterior  $n$ .
4. Las  $X_n$  son discretas, independientes y están idénticamente distribuidas con distribución conocida:

$$\forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\} : p_j := \mathbb{P}(X_n = j).$$

Nos interesa calcular  $Y_n$  = número de individuos con el apellido en la generación  $n$ .

$$\implies Y_0 = 1 \wedge Y_1 = X_1 \wedge Y_2 = \sum_{i=1}^{Y_1} X_i \wedge \dots \wedge Y_n = \sum_{i=1}^{Y_{n-1}} X_i.$$

Observamos que si  $\exists n \in \mathbb{N} : Y_n = 0$ , entonces  $\forall m \geq n : Y_m = 0$  y el apellido se extingue. Por tanto, nos interesa calcular  $e = \mathbb{P} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Y_n = 0\} \right)$ .

Por supuesto, si  $p_0 = 0$  siempre hay descendencia y  $e = 0$ . Supondremos que  $p_0 \neq 0$ .

**Definición 2.1.1 (Serie formal de potencias).** Sea  $A$  un anillo,  $f$  es la serie formal de potencias con coeficientes  $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset A$

$$\iff \forall x \in X : f(x) = \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_n a_n x^n \text{ como serie.}$$

El conjunto de todas las series formales de potencias con coeficientes en  $A$  se denota  $A[[x]]$ .

*Observación 2.1.2.* Hay una correspondencia biyectiva entre  $A[[x]]$  y  $A^{\mathbb{N}}$ .

Por tanto, para  $K$  cuerpo,  $K[[x]]$  es un  $K$ -espacio vectorial.

**Definición 2.1.3 (Radio convergencia).** Sea  $f(x) = \sum_n a_n x^n$  una serie formal de potencias, tiene radio de convergencia  $R \in [0, \infty]$

$$\begin{aligned} &\iff \forall x \in \mathbb{R} : [|x| < R \implies f(x) \text{ converge}] \wedge [|x| > R \implies f(x) \text{ diverge}] \\ &\iff \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \end{aligned}$$

**Teorema 2.1.1 (de Abel).** Sea  $f(x) = \sum_n a_n x^n \in A[[x]]$  una serie formal de potencias con coeficientes en  $\mathbb{C}$  (o  $\mathbb{R}$ ) tal que  $f(x_0)$  converge

$$\implies \forall x : |x| < |x_0| : f(x) \text{ converge uniformemente.}$$

**Demostración:** Como  $\sum_n a_n x_0^n$  converge, se tiene que  $a_n x_0^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  y, por tanto,  $\exists C > 0 : \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : |a_n x_0^n| \leq C$ . Sea  $r \in \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{C}$  (o  $\mathbb{R}$ ) tal que  $|x| \leq r < |x_0|$

$$\implies |a_n x^n| = |a_n| |x|^n \leq |a_n| r^n \frac{|x_0|^n}{|x|^n} \leq C \left( \frac{r}{|x_0|} \right)^n =: M_n.$$

Aplicando el criterio de Weierstrass, tenemos que  $\sum_n a_n x^n$  converge uniformemente en cada disco cerrado  $\overline{D}(0, r)$ . ■

**Lema 2.1.2 (de Abel).** Sea  $\sum_n a_n x^n \in A[[x]]$  una serie formal de potencias con radio de convergencia 1 tal que  $\sum_n a_n$  converge

$$\implies \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_n a_n x^n = \sum_n a_n.$$

**Definición 2.1.4 (Función generatriz).** Sea  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  una variable aleatoria discreta,  $G_X : \mathbb{R} \longrightarrow A[[x]]$  es la función generatriz (de probabilidad) de  $X$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R} : G_X(x) = \left( \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) x^k \right)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_n \mathbb{P}(X = n) x^n.$$

**Proposición 2.1.3 (Generatriz de la suma).** Sean  $X + Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  dos variables aleatorias discretas e independientes

$$\implies \forall t \in \mathbb{R} : G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t)$$

donde  $G_{X+Y}$  es la función generatriz de  $X + Y$  y  $\cdot$  es el producto de Cauchy.

**Demostración:** Sea  $t \in \mathbb{R}$ , por definición de  $G_{X+Y}$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
G_{X+Y}(t) &= \sum_n \mathbb{P}(X+Y=n)t^n = \sum_n \left[ \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X=k \wedge Y=n-k) \right] t^n \\
&\stackrel{\text{indep}}{=} \sum_n \left[ \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X=k)t^k \cdot \mathbb{P}(Y=n-k)t^{n-k} \right] \\
&\stackrel{\text{Cauchy}}{=} \left( \sum_n \mathbb{P}(X=n)t^n \right) \cdot \left( \sum_n \mathbb{P}(Y=n)t^n \right) = G_X(t) \cdot G_Y(t).
\end{aligned}$$

■

**Proposición 2.1.4.** Sean  $X_1, X_2, \dots : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$  variables aleatorias discretas independientes e idénticamente distribuidas y sea  $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$  una variable aleatoria discreta con función generatriz  $G_N$

$$Z := \sum_{i=1}^N X_i \implies G_Z = G_N(G_X(t)).$$

## 2.2 Modelo poblacional de Leslie

### 2.2.1 Recordatorio del modelo de Fibonacci

### 2.2.2 Modelo de Leslie

1. Dividimos población en  $k+1$  grupos de edad:  $0, \dots, k$ .
2. La duración de los intervalos de edad es la misma en todos los grupos de edad.
3. Una unidad de tiempo (discreto) es lo que se tarda en pasar de un grupo de edad al siguiente.
4. Solo se estudian las hembras.

$$\forall j = 0, \dots, k : \begin{cases} P_{j,n} = n^{\circ} \text{ hembras de edad } j \text{ en tiempo } n \in \mathbb{N}. \\ f_j = n^{\circ} \text{ de hijas nacidas en tiempo } n \text{ por cada hembra de edad } j. \\ s_j = \text{proporción de hembras de edad } j \text{ que siguen vivas a edad } j+1. \end{cases}$$

Suponemos que  $s_k = 0$  (límite de edad) y tomamos como datos iniciales:  $f_0, \dots, f_k \geq 0$  (fertilidad) y  $s_0, \dots, s_{k-1} \in (0, 1]$  (supervivencia). Entonces, el paso de la población de un

tiempo  $n$  a un tiempo  $n + 1$  es

$$\begin{cases} P_{0,n+1} = f_0 P_{0,n} + \cdots + f_k P_{k,n} \\ P_{1,n+1} = s_0 P_{0,n} \\ \vdots \\ P_{k,n+1} = s_{k-1} P_{k-1,n}. \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} P_{0,n+1} \\ \vdots \\ P_{k,n+1} \end{pmatrix}}_{P_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{k-1} & f_k \\ s_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{k-1} & 0 \end{pmatrix}}_{M \text{ de dim } (k+1) \times (k+1)} \underbrace{\begin{pmatrix} P_{0,n} \\ \vdots \\ P_{k,n} \end{pmatrix}}_{P_n}.$$

Luego la solución de esta recurrencia para  $P_0 = (P_{0,0}, P_{1,0}, \dots, P_{k,0})$  es  $P_n = M^n P_0$ .

A pesar de que podemos calcular  $M^n$  explícitamente (por ejemplo, mediante la matriz de Jordan), podemos responder preguntas menos concretas sin necesidad de hacerlo.

**Notación:**  $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) : (A \geq 0 \iff \forall i, j : a_{ij} \geq 0) \wedge (A > 0 \iff \forall i, j : a_{ij} > 0)$ .

*Observación 2.2.1.* Como  $P_0 \geq 0$  y  $M \geq 0$ , entonces  $M^n \geq 0$  y  $P_n \geq 0$ .

Vamos a calcular los autovalores y autovectores de  $M$ :

$$Mx = \lambda x \iff \begin{cases} \lambda x_0 = f_0 x_0 + f_1 x_1 + \cdots + f_k x_k \\ \lambda x_1 = s_0 x_0 \\ \vdots \\ \lambda x_k = s_{k-1} x_{k-1}. \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{s_0}{\lambda} x_0 \\ x_2 = \frac{s_1}{\lambda} x_1 = \frac{s_1 s_0}{\lambda^2} x_0 \\ \vdots \\ x_k = \frac{s_{k-1}}{\lambda} x_{k-1} = \frac{s_{k-1} \cdots s_0}{\lambda^k} x_0. \end{cases}$$

suponiendo que  $\lambda \neq 0$ . Entonces, sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos

$$\lambda x_0 = f_0 x_0 + \cdots + f_k x_k = f_0 x_0 + f_1 \frac{s_0}{\lambda} x_0 + \cdots + f_k \frac{s_{k-1} \cdots s_0}{\lambda^k} x_0.$$

Definimos  $\Pi_0 = 1, \Pi_1 = s_0, \dots, \Pi_j = s_{j-1} \cdots s_0$  que significa la tasa de supervivencia del grupo 0 al grupo  $j$ . Entonces, la igualdad anterior se puede reescribir como

$$\lambda x_0 = \left( f_0 \frac{\Pi_0}{\lambda^0} + f_1 \frac{\Pi_1}{\lambda^1} + \cdots + f_k \frac{\Pi_k}{\lambda^k} \right) x_0 = \sum_{j=0}^k f_j \frac{\Pi_j}{\lambda^j} x_0.$$

Para  $\lambda$  autovalor,  $x_0 \neq 0$  (para que  $x$  sea autovector). Dividiendo por  $x_0$  y por  $\lambda \neq 0$ ,

$$1 = \sum_{j=0}^k f_j \frac{\Pi_j}{\lambda^{j+1}} =: \phi(\lambda) \text{ que es una función decreciente.}$$

Entonces, como  $\phi'(\lambda) < 0$  en  $(0, \lambda)$ ,  $\phi$  es decreciente en  $(0, \infty)$  y  $\phi(\lambda) = 1$  tiene una única solución  $\lambda > 0$ . Es decir,  $M$  tiene un único autovalor positivo  $\lambda^*$  con autovector asociado  $v_0^* = (1, \Pi_1/\lambda^*, \Pi_2/(\lambda^*)^2, \dots, \Pi_k/(\lambda^*)^k) > 0$ .



Además,  $\lambda^*$  es un autovalor simple. Es fácil ver que el polinomio característico de  $M$  es  $p(\lambda) = \lambda^{k+1} (1 - \phi(\lambda))$ . Como  $p'(\lambda) = (k+1)\lambda^k (1 - \phi(\lambda)) - \lambda^{k+1}\phi'(\lambda)$ , entonces

$$p(\lambda^*) = 0 \quad \wedge \quad p'(\lambda^*) = - \underbrace{(\lambda^*)^{k+1}}_{>0} \underbrace{\phi'(\lambda^*)}_{<0} > 0.$$

Por tanto,  $\lambda^*$  es un autovalor simple.

Se cumple que  $\forall \lambda$  autovalor de  $M : \lambda^* \geq |\lambda|$  y para casi todo  $\lambda$  autovalor de  $M$ ,  $\lambda^* > |\lambda|$ .

**Definición 2.2.2 (Autovalor dominante).** Sea  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , un autovalor de  $A$   $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  es el dominante  $\iff \forall \lambda \in \mathbb{C}$  autovalor de  $A : \lambda \neq \lambda_0 : \lambda_0 > |\lambda|$ .

**Objetivo:** Calcular (o estimar)  $\mathbb{P}_n$ . Sea  $(v_0, \dots, v_k)$  una base de autovectores generalizados de  $M$ . Expresamos el dato inicial en esta base:  $P_0 = c_0 v_0 + \dots + c_k v_k$ .

Por hipótesis,  $c_0 = 0$  y supondremos que  $M$  es diagonalizable (luego todos los  $v_i$  son autovectores). Entonces, como  $\mathbb{P}_n = M^n \mathbb{P}_0$  y  $M v_i = \lambda_i v_i$ , tenemos que  $M^n v_i = \lambda_i^n v_i$  y, por tanto,

$$\mathbb{P}_n = c_0 \lambda_0^n v_0 + \dots + c_k \lambda_k^n v_k = \lambda_0^n \left( c_0 v_0 + c_1 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^n v_1 + \dots + c_k \left( \frac{\lambda_k}{\lambda_0} \right)^n v_k \right).$$

Entonces, el único valor importante es el dominante  $\mathbb{P}_n \approx c_0 \lambda_0^n v_0$ .

Esto nos dice que la población total  $p_n := \sum_{j=0}^k \mathbb{P}_{n,j}$  cumple que  $p_n \approx c_0 \lambda_0^n \sum_{j=0}^k v_j$ .

Además, el perfil (pirámide) límite de la población es  $\frac{\mathbb{P}_n}{p_n} \approx \frac{v^*}{\sum_{j=0}^k \frac{\Pi_j}{\lambda^{*j}}}$  para  $n$  grande.

$\lambda^* > 1$  Tenemos un crecimiento exponencial.

$\lambda^* = 1$  La población se estabiliza.

$\lambda^* < 1$  Tenemos un decrecimiento exponencial.

Recordamos que  $\lambda^*$  es la única solución positiva a  $\phi(\lambda) = \sum_{j=0}^k f_j \frac{\Pi_j}{\lambda^{j+1}} = 1$ .

$$\implies \begin{cases} \lambda^* > 1 \\ \lambda^* = 1 \\ \lambda^* < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{j=0}^k f_j \Pi_j > 1 \\ \sum_{j=0}^k f_j \Pi_j = 1 \\ \sum_{j=0}^k f_j \Pi_j < 1 \end{cases} \quad (\text{tasa neta de reproducción}).$$

Este resultado se tiene para  $M$  diagonalizable pero, ¿qué pasa si no lo es? Veamos que se llega a la misma conclusión. En este caso, sean  $\lambda_0, \dots, \lambda_k$  autovalores de  $M$  (contando

multiplicidades) con  $v_0, \dots, v_k$  autovectores generalizados. Recordamos que

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Observamos que lo que más rápido crece es  $\lambda^n$  y, por tanto,  $\mathbb{P}_n \approx c_0 \lambda_0^n v_0$ .

Veamos que tampoco hace falta imponer  $c_0 \neq 0$  ni  $(c_0 > 0)$ . Como  $\mathbb{P}_n \approx c_0 \lambda^{*n} v^*$  y  $\mathbb{P}_n \geq 0$ ,  $\lambda^* > 0$  y  $v^* > 0$ , entonces  $c_0 \geq 0$ . Ahora bien, si  $\lambda^*$  es autovalor dominante, entonces  $\mathbb{P}_0 \neq 0$  y, por tanto,  $c_0 > 0$ .

Por último, ¿cuándo es  $\lambda^*$  dominante? Si  $\gcd\{i \in \{0, \dots, k\} : f_i > 0\} = 1$

$$\implies \lambda^* \text{ es dominante.}$$

Por ejemplo, si  $f_i, f_{i+1} > 0$  para algún  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , entonces  $\lambda^*$  es dominante.

### 2.2.2.1 Resumen del modelo de Leslie

Sea  $M$  la matriz de Leslie, entonces  $\mathbb{P}_n = M^n \mathbb{P}_0$ . Además,  $M$  tiene un único autovalor positivo  $\lambda^*$  que es simple y su autovector asociado es  $v^* = (1, \Pi_1/\lambda^*, \dots, \Pi_k/(\lambda^*)^k)$ .

Se tiene que  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  autovalor de  $M$  :  $\lambda^* \geq |\lambda|$  y si  $\gcd\{i \in \{0, \dots, k\} : f_i > 0\} = 1$ , entonces  $\lambda^*$  es dominante. En este caso, si  $\mathbb{P}_0 \geq 0$ ,  $\mathbb{P}_0 \neq 0$  entonces  $c_0 > 0$ . Además,

$$\mathbb{P}_n \approx c_0 \lambda^{*n} v^* \quad \wedge \quad p_n \approx c_0 \lambda^{*n} \sum_{j=0}^k \frac{\Pi_j}{\lambda^{*j}} \quad \wedge \quad \frac{\mathbb{P}_n}{p_n} \approx \frac{v^*}{\sum_{j=0}^k v_j^*}.$$

## 2.3 Cadenas de Markov

- Tenemos un conjunto finito (a veces numerable) de estados  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ .
- El tiempo es discreto  $n \in \mathbb{N}$ .
- Tenemos una serie de variables aleatorias de estado que toman valores en  $\mathcal{E}$ , es decir,  $\forall n \in \mathbb{N} : X_n : \Omega \longrightarrow \mathcal{E}$ , que registran el estado del sistema en el tiempo  $n$ .
- **Hipótesis básica:**  $\forall n \in \mathbb{N}, i, j \in \mathbb{N}_N :$

$$p_{i,j}^n := \mathbb{P}(X_{n+1} = e_j \mid X_n = e_i \wedge \dots \wedge X_0 = e_{i_0}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = e_j \mid X_n = e_i).$$

Es decir, la probabilidad de pasar a un estado solo depende del estado anterior.

- Una cadena de Markov es **homogénea**  $\iff p_{i,j}^n = p_{i,j}$  no depende de  $n$ .

En este curso solo estudiaremos cadenas de Markov homogéneas. En este caso podemos definir la **matriz de transición**  $P = (p_{i,j})_{i,j \in \mathcal{E}}$ . Esta matriz cumple que  $\forall i, j \in \mathbb{N}_N : p_{i,j} \geq 0$  y que  $\forall i \in \mathbb{N}_N : \sum_{j \in \mathbb{N}_N} p_{i,j} = 1$  (cada fila suma 1).

Formalmente, tenemos esta definición:

**Definición 2.3.1 (Cadena de Markov).** Sean  $\forall n \in \mathbb{N} : X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  variables aleatorias discretas,  $(X_n)_{n=0}^\infty$  es una cadena de Markov  $\iff \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \forall i, j \in \mathbb{N} :$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i \wedge \dots \wedge X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

Es decir, la probabilidad de que la variable aleatoria  $X_{n+1}$  tome el valor  $j$  condicionada a todos los valores anteriores de la cadena, solo depende del valor de la variable aleatoria  $X_n$ .

**Definición 2.3.2 (Homogeniedad).** Sea  $(X_n)_{n=0}^\infty$  una cadena de Markov, es homogénea

$$\iff \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \forall i, j \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) =: p_{i,j}.$$

Es decir, la probabilidad de que la variable aleatoria  $X_{n+1}$  tome el valor  $j$  condicionada al valor de la variable aleatoria  $X_n$ , no depende de  $n$ .

### 2.3.1 Probabilidad de transición

Queremos calcular  $p_{i,j}(n) := \mathbb{P}(X_n = e_j \mid X_0 = e_i)$  (la probabilidad de llegar del estado  $e_i$  al estado  $e_j$  en  $n$  pasos). Sabemos  $p_{i,j}(1) = p_{i,j}$ , definimos  $P(n) = (p_{i,j}(n))$  y calculamos

$$\begin{aligned} p_{i,j}(2) &= \mathbb{P}(X_2 = e_j \mid X_0 = e_i) = \sum_{k \in \mathbb{N}_N} \mathbb{P}(X_2 = e_j \mid X_1 = e_k \wedge X_0 = e_i) \mathbb{P}(X_1 = e_k \mid X_0 = e_i) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_N} p_{k,j} p_{i,k} = (P^2)_{i,j} \implies P(2) = P^2. \end{aligned}$$

Por inducción, tenemos que  $P(n) = P^n$ . Más generalmente, tenemos las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \forall i, j \in \mathbb{N}_N : p_{i,j}(n+m) = \sum_{k \in \mathbb{N}_N} p_{i,k}(n) p_{k,j}(m) \iff P(n+m) = P(n)P(m).$$

### 2.3.2 Distribución de probabilidad

Calculamos la distribución de probabilidad de cada  $X_n$  sabiendo la distribución de probabilidad de  $X_0$ . Definimos

$$\Pi^{(0)} := (\mathbb{P}(X_0 = e_1), \dots, \mathbb{P}(X_0 = e_N)) \quad \wedge \quad \Pi^{(n)} := (\mathbb{P}(X_n = e_1), \dots, \mathbb{P}(X_n = e_N)).$$

Fijado  $j \in \mathbb{N}_N$ , tenemos por la fórmula de probabilidad total, tenemos

$$\Pi_j^{(1)} = \mathbb{P}(X_1 = e_j) = \sum_{i=1}^N \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = e_j \mid X_0 = e_i)}_{p_{i,j}} \underbrace{\mathbb{P}(X_0 = e_i)}_{\Pi_i^{(0)}} = \begin{pmatrix} \Pi_1^{(0)} & \cdots & \Pi_N^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,j} \\ \vdots \\ p_{N,j} \end{pmatrix}.$$

Luego  $\Pi^{(1)} = \Pi^{(0)} P$  y, por inducción,  $\forall n \in \mathbb{N} : \Pi^{(n)} = \Pi^{(0)} P^n$ .

**Ejemplo 2.3.1 (Lluvia / No lluvia).** Consideramos la cadena de Markov homogénea dada por la matriz de transición  $P = \begin{pmatrix} \rho & 1 - \rho \\ q & 1 - q \end{pmatrix}$ , con  $\rho, q \in (0, 1)$ .

Por inducción, se tiene que

$$P^n = \frac{1}{q + (1 - \rho)} \begin{pmatrix} q & 1 - \rho \\ q & 1 - \rho \end{pmatrix} + \frac{(\rho - q)^n}{q + (1 - \rho)} \begin{pmatrix} 1 - \rho & \rho - 1 \\ -q & q \end{pmatrix}.$$

Entonces, tomando límites, tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \frac{1}{q + 1 - \rho} \begin{pmatrix} q & 1 - \rho \\ q & 1 - \rho \end{pmatrix}$ . Además,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^{(n)} &= \Pi^{(0)} \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \Pi^{(0)} \frac{1}{q + 1 - \rho} \begin{pmatrix} q & 1 - \rho \\ q & 1 - \rho \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{q + 1 - \rho} \left( q \left( \Pi_1^{(0)} + \Pi_2^{(0)} \right), (1 - \rho) \left( \Pi_1^{(0)} + \Pi_2^{(0)} \right) \right) = \frac{1}{q + 1 - \rho} (q, 1 - \rho). \end{aligned}$$

Luego cuando  $n$  es grande, la probabilidad de que llueva o no llueva no depende de las condiciones iniciales.

### 2.3.3 Accesibilidad, comunicación, irreducibilidad y grafos

**Definición 2.3.3 (Grafo asociado).** Sea  $(X_n)_{n=0}^\infty$  una cadena de Markov homogénea con matriz de transición  $P = (p_{i,j})_{i,j}$ ,  $G = (V, A, w)$  es el digrafo ponderado asociado

$$\iff V = \mathbb{N} \wedge A = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : p_{i,j} > 0\} \wedge \forall (i, j) \in A : w(i, j) = p_{i,j}.$$

**Definición 2.3.4 (Accesibilidad).** Sea  $(X_n)_{n=0}^\infty$  una cadena de Markov,  $j \in \mathbb{N}$  es accesible desde  $i \in \mathbb{N}$

$$\iff \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \mathbb{P}(X_n = e_j \mid X_0 = e_i) > 0 \iff i \rightarrow j.$$

**Definición 2.3.5 (Comunicación).** Sea  $(X_n)_{n=0}^\infty$  una cadena de Markov,  $i, j \in \mathbb{N}$  se comunican  $\iff i \rightarrow j \wedge j \rightarrow i \iff i \leftrightarrow j$ .

**Lema 2.3.1.** Sea  $(X_n)_{n=0}^{\infty}$  una cadena de Markov

$\implies$  La relación de comunicación ( $\leftrightarrow$ ) es de equivalencia.

Así, la relación de comunicación induce una partición en  $\mathcal{E}$  en la que puede haber aristas de un estado de una clase a otro estado de otra clase, pero no al revés al mismo tiempo.

**Definición 2.3.6 (irreducibilidad).** Sea  $(X_n)_{n=0}^{\infty}$  una cadena de Markov, es irreducible

$$\iff \forall i, j \in \mathcal{E} : i \leftrightarrow j.$$

## 2.4 Recurrencia y transitoriedad

**Definición 2.4.1 (Recurrencia).** Sea  $(X_n)_{n=0}^{\infty}$  una cadena de Markov,

$$i \in \mathcal{E} \text{ es recurrente} \iff \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} : X_n = e_i \mid X_0 = e_i) = 1.$$

**Definición 2.4.2 (Transitoriedad).** Sea  $(X_n)_{n=0}^{\infty}$  una cadena de Markov,

$$e_i \in \mathcal{E} \text{ es transitorio} \iff \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} : X_n = e_i \mid X_0 = e_i) < 1.$$

Denotamos por  $V_i: \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  la variable aleatoria que “cuenta” el número de visitas al estado  $e_i \in \mathcal{E}$ .

*Observación 2.4.3.* Si  $e_i \in \mathcal{E}$  es recurrente, entonces  $\mathbb{E}(V_i \mid X_0 = e_i) = \infty$ .

Si  $e_i$  es transitorio, podemos calcular la distribución de  $V_i$  condicionada a  $X_0 = e_i$ . Llamamos  $a_{ii} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} : X_n = e_i \mid X_0 = e_i) < 1$ . Entonces,

$$\mathbb{P}(V_i = k \mid X_0 = e_i) = a_{ii}^{k-1}(1 - a_{ii}) \implies V_i \mid X_0 = e_i \sim \text{Geom}(1 - a_{ii}).$$

En particular,  $\mathbb{E}(V_i \mid X_0 = e_i) = \frac{1}{1 - a_{ii}}$ , luego  $e_i$  es recurrente  $\iff \mathbb{E}(V_i \mid X_0 = e_i) = \infty$ .

Veamos otra fórmula: Definimos  $I_i(n) = \mathbb{1}_{\{X_n = e_i\}}$ , entonces  $V_i = \sum_{n=0}^{\infty} I_i(n)$ . Se tiene que

$$\mathbb{E}[I_i(n) \mid X_0 = e_i] = \mathbb{P}(X_n = e_i \mid X_0 = e_i) = p_{i,i}(n).$$

Entonces,  $\mathbb{E}[V_i \mid X_0 = e_i] = \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}(n) = \infty \iff e_i$  es recurrente.



### 3. Cálculo de variaciones





# H. Hojas de ejercicios

## H.1 Una población, modelos de ecuaciones diferenciales

[1.] Supongamos que una población tiene 100 individuos en  $t = 0$  y 150 miembros a los 100 días. Encontrar la población a los 150 días.

**Nota:** se supone un modelo de crecimiento exponencial.

**Solución:** Se tiene que  $P(0) = 100$  y  $P(100) = 150$ . Como  $P(t) = P_0 e^{kt}$ ,

$$150 = 100e^{100k} \implies k = \frac{\ln(3/2)}{100} \implies P(150) = 100e^{150 \ln(3/2)/100} = 100 \left(3/2\right)^{3/2}.$$

Simplificando,  $P(150) = 75\sqrt{6} \approx \boxed{184 \text{ individuos.}}$

[2.] La proporción de carbono-14 en la madera de un sarcófago egipcio es un 60% de la que tenía originalmente. Se sabe que el periodo de semidesintegración (o semiperiodo) del carbono-14 es de 5730 años. Determina la edad del sarcófago.

**Nota:** parte del ejercicio es entender qué pinta esta pregunta aquí (y cuál es el modelo de desintegración radioactiva subyacente).

**Solución:** La concentración del carbono-14 sigue un modelo de decrecimiento exponencial, es decir,  $P(t) = P_0 e^{-kt}$ . Como  $P(5730) = P_0/2$ , podemos hallar  $k$  (sin necesidad de conocer  $P_0$ ) despejando en la fórmula de decrecimiento:

$$P(5730) = P_0 e^{-5730k} = \frac{P_0}{2} \implies e^{-5730k} = \frac{1}{2} \implies k = \frac{\ln 2}{5730}.$$

Por tanto, como tenemos que  $P(T) = 0.6P_0 = P_0 e^{-kT}$ , podemos despejar  $T$ :

$$0.6 = e^{-kT} \implies T = \frac{\ln 0.6}{-k} = \frac{\ln 0.6}{-\ln 2} \cdot 5730 \approx \boxed{4222.8 \text{ años.}}$$

[3.] Según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura  $T(t)$  de un objeto introducido en un ambiente más frío con temperatura constante  $A$  varía a una velocidad proporcional a  $(T(t) - A)$ , el exceso de temperatura.

La escena del crimen está a 20 grados. La temperatura corporal de un ser humano se toma como 36.7 grados. Un médico forense mide la temperatura del cadáver, que resulta ser de 29.4 grados. Dos horas después, vuelve a medir y obtiene 23.3 grados. Calcula cuánto tiempo ha pasado desde la muerte del desdichado hasta la primera medición.

**Solución:** La ecuación diferencial que modela este fenómeno es  $T'(t) = -k(T(t) - A)$  que

es una EDO autónoma de variables separadas lineal. Resolvemos:

$$-kt = \int_0^t \frac{T'(t)}{T(t) - A} dt = \ln |T(t) - A| - \ln |T(0) - A| \implies T(t) = A + (T(0) - A)e^{-kt}.$$

Tenemos que  $T(0) = 36.7$ ,  $T(t_1) = 29.4$  y  $T(t_1 + 2) = 23.3$  con  $A = 20$ . Por tanto,  $T(t) = 20 + (36.7 - 20)e^{-kt}$ .

$$\left. \begin{array}{l} 29.4 = 20 + 16.7e^{-kt_1} \\ 23.3 = 20 + 16.7e^{-k(t_1+2)} \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} 9.4 = 16.7e^{-kt_1} \\ 3.3 = 16.7e^{-kt_1}e^{-2k} \end{array} \right\} \implies \frac{9.4}{3.3} = e^{2k}$$

Por tanto,  $k = \frac{1}{2} \ln \frac{9.4}{3.3}$  y  $t_1 = \frac{-\ln \frac{9.4}{16.7}}{k} \approx \boxed{1.098 \text{ horas.}}$

4. Una población  $x(t)$  está gobernada por la ecuación diferencial

$$x' = x(e^{3-x} - 1).$$

Halla los puntos de equilibrio y determina su estabilidad.

**Recuerda:** si  $x(t)$  cumple la ecuación  $x' = f(x)$ , entonces sus puntos de equilibrio son las soluciones de  $f(x) = 0$ . Y un punto de equilibrio  $x^*$  será atractor o repulsor dependiendo de si  $f'(x^*)$  es menor o mayor que 0.

**Solución:** Los puntos de equilibrio son los valores de  $x$  en los que  $x'(t) = 0$ , es decir,  $x(e^{3-x} - 1) = 0 \iff x = 0 \vee x = 3$ . Estudiando el signo de  $x'$  en estos puntos observamos que  $x = 0$  es un punto de equilibrio inestable y  $x = 3$  es un punto de equilibrio estable.

Esto significa que si la población es no nula, siempre tenderá a 3.

5. ¿Para qué valores  $y(0)$ , la solución  $y(t)$  de la ecuación

$$y' = y(2y - e^{-y})$$

tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ ?

**Solución:** Los puntos de equilibrio son  $y = 0$  e  $y \in \mathbb{R} : 2y - e^{-y} = 0$ . Estudiando el signo de  $y'$  en estos puntos, vemos que  $y = 0$  es un punto de equilibrio estable y que el otro  $y_* \approx 0.35$  es un punto de equilibrio inestable.

Por tanto, si  $y(0) < y_*$ , la solución tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por otro lado, si  $y(0) > y_*$ , la solución crece indefinidamente cuando  $t \rightarrow \infty$ .

6. (Doomsday bis). Supongamos que una población  $P(t)$  evoluciona con la siguiente regla diferencial:

$$P'(t) = rP^\alpha(t), \quad t > 0.$$

Aquí,  $r > 0$  y  $\alpha \geq 1$  son dos parámetros. Se sabe que  $P(0) = P_0 > 1$ . Los casos  $\alpha = 1$  (crecimiento exponencial) y  $\alpha = 2$  (explosión en tiempo finito) se han discutido en clase.

Para cada  $\alpha > 2$ , halla una fórmula para  $P(t)$ , determina cuándo se produce la explosión demográfica, y decide si ese Día del Juicio Final se acerca o se aleja, en términos de  $\alpha$ .

**Solución:** Resolvemos la ecuación diferencial:

$$P'(t) = rP^\alpha(t) \implies \int \frac{P'(t)}{P^\alpha(t)} dt = rt + c \implies P^{1-\alpha}(t) = (1-\alpha)rt + c'$$

Luego  $P(t) = \frac{1}{[(1-\alpha)rt + c']^{1/\alpha-1}}$ . Imponiendo una condición inicial  $P(0) = P_0$ , obtenemos  $c' = P_0^{1-\alpha}$ . Por tanto, la fórmula queda

$$P(t) = \frac{1}{[P_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)rt]^{1/\alpha-1}}$$

cuya gráfica presenta una asíntota vertical en  $t = t_0$  donde  $P_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)rt_0 = 0$ . Por tanto,  $t_0 = \frac{P_0^{1-\alpha}}{(\alpha-1)r}$  y el día del juicio final se acerca según  $\alpha$  crece.

[7.] Supongamos que cada individuo de una población requiere de un encuentro con su pareja para la reproducción y que el número de encuentros es proporcional al producto del número de machos y hembras, estando estos igualmente distribuidos entre la población. La tasa de nacimientos es por tanto proporcional a  $P^2(t)$ . Si la tasa de muerte es proporcional a  $P(t)$ , se tiene, para  $P(t)$ ,

$$P'(t) = bP^2(t) - aP(t), \quad t > 0, \quad P(0) = P_0.$$

Supongamos que  $P_0 < \frac{a}{b}$ . Demuestra que  $P(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Solución:** Tenemos que  $P'(t) = bP^2(t) - aP(t) = P(t)(bP(t) - a)$ . Los puntos de equilibrio son 0 y  $a/b$ , y estudiando el signo de  $P'(t)$  en estos puntos, vemos que 0 es un punto de equilibrio estable y  $a/b$  es un punto de equilibrio inestable.

Entonces, si  $P(0) = P_0 < a/b$ , la población tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$  y si  $P_0 > a/b$ , la población crece indefinidamente.

[8.] Designamos con  $P(t)$  al tamaño de una cierta población en tiempo  $t$ . Sabemos que  $P(0) = 100$ . Modelamos la evolución de la población a la Verhulst (con  $r$  y  $K$  parámetros positivos):

$$P'(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right), \quad t > 0.$$

(a) Si  $P(5) = 126$  y  $P(8) = 143$ , ¿qué valores tienen los parámetros  $r$  y  $K$ ? (Usa tu software favorito).

- (b) Se sabe que  $P(5) = 126$ ,  $P(8) = 143$ ,  $P(20) = 320$  y  $P(55) = 750$ . ¿Qué harías ahora? Hazlo.

**Solución:**

- (a) Tenemos que  $P(5) = 126$  y  $P(8) = 143$ . Resolviendo numéricamente el sistema de ecuaciones, obtenemos  $r \approx 0.0735$  y  $K \approx 850$ .

- (b) Por mínimos cuadrados.

9. Supongamos que una cierta población  $P(t)$  evoluciona como sigue:

$$P'(t) = \frac{1}{25}P(t) - \frac{1}{108}P^2(t), \quad t > 0,$$

donde  $t$  está medido en años. Si la población en 1970 fue de 2 millones, halla la población en cada  $t > 0$ . ¿Qué ocurre cuando  $t \rightarrow \infty$ ? ¿Qué pasaría si la población en 1970 fuera de 6 millones?

**Solución:**

10. Se considera el modelo logístico bajo una intensidad de explotación  $h(t)$ :

$$P'(t) = rP(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{K} \right) - h(t), \quad t > 0.$$

Estudia el comportamiento en los casos

- (a)  $h(t) = c$ , con  $c$  una constante positiva;

- (b)  $h(t) = cP(t)$ , con  $0 < c < r$ .

**Sugerencia:** simplifica la ecuación mediante cambios de escala para estudiar la respuesta.

**Extra:** ¿Qué ocurriría en (b) si  $c$  fuera mayor que  $r$ ?

**Solución:** El término  $h(t)$  resta crecimiento a la población, como si un factor externo a la especie la estuviera diezmando (caza, pesca, calentamiento global, etc.).

- (a) Si  $h(t) = c$ , como la ecuación diferencial no tiene al 0 como punto de equilibrio, debemos imponer una nueva condición sobre el modelo: si  $P(t_1) = 0$ , entonces  $\forall t > t_1 : P(t) = 0$ .

Los puntos de equilibrio son  $P = \frac{K}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4c}{rK}} \right)$ . Por tanto, para  $1 - \frac{4c}{rK} > 0$  (i.e.  $c < \frac{rk}{4}$ ), tenemos dos soluciones:

$$K^+ = \frac{K}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4c}{rK}} \right) \wedge K^- = \frac{K}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4c}{rK}} \right).$$

Estudiando el signo de  $P'(t)$ , observamos que  $K^+$  es un punto de equilibrio estable y  $K^-$  es un punto de equilibrio inestable.

Entonces, si  $P_0 > K^+ \implies P(t) \searrow K^+$  y si  $K^- < P_0 < K^+ \implies P(t) \nearrow K^-$ . Por otro lado, si  $P_0 < K^- \implies P(t) \searrow -\infty$  pero  $\exists t_1 > 0 : P(t_1) = 0$ .

Interpretando este modelo, si hay suficientemente poca pesca  $c < \frac{rk}{4}$  tenemos dos posibilidades: para una cantidad inicial suficiente de peces ( $K^+$ ), la población tiende a un equilibrio estable  $K^+$  pero si no, la población se extingue en tiempo finito.

(b) El término  $h(t) = cP(t)$  representa una caza proporcional a la población. Escribimos

$$P'(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) - cP(t) = (r - c)P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K \frac{r-c}{r}}\right).$$

- Si  $0 < c < r$ , entonces  $\tilde{r} = r - c$ ,  $\tilde{K} > 0$  y estamos en el modelo de Verhulst. Los puntos de equilibrio son 0 y  $\tilde{K}$  y estudiando el signo de  $P'(t)$  en estos puntos, vemos que 0 es un punto de equilibrio inestable y  $\tilde{K}$  es un punto de equilibrio estable.
- Si  $c > r$ , entonces tenemos el modelo de decrecimiento exponencial y la población se extingue.

11. Se considera el modelo logístico bajo un “efecto por depredadores”:

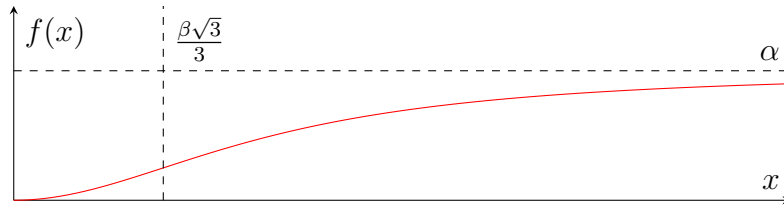
$$P'(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) - \frac{\alpha^2 P^2(t)}{\beta^2 + P^2(t)}, \quad t > 0.$$

Interpreta el término nuevo. Comprueba que basta analizar la ecuación

$$x' = \tilde{r}x \left(1 - \frac{x}{\tilde{K}}\right) - \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Analiza con detalle los puntos de equilibrio de esta última ecuación.

**Solución:** Para poder interpretar el nuevo término, conviene graficar  $f(x) = \frac{\alpha x^2}{\beta^2 + x^2}$ :



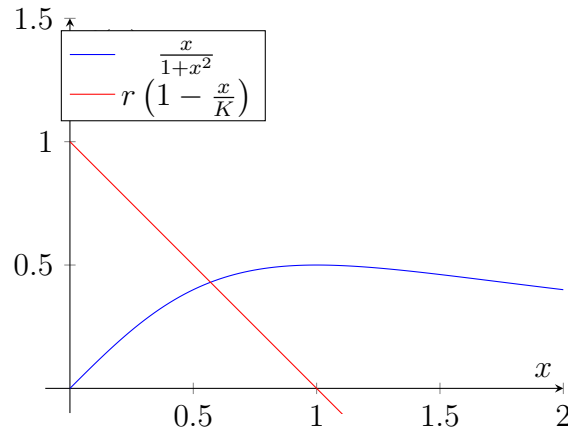
Adimensionalizamos el problema: derivamos en  $x(t) = \frac{1}{A}P\left(\frac{t}{T}\right)$

$$\begin{aligned} \implies x'(t) &= \frac{1}{AT} P' \left( \frac{t}{T} \right) = \frac{1}{AT} \left( rP \left( \frac{t}{T} \right) \left( 1 - \frac{P \left( \frac{t}{T} \right)}{K} \right) - \frac{\alpha P^2 \left( \frac{t}{T} \right)}{\beta^2 + P^2 \left( \frac{t}{T} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{AT} \left( Arx \left( 1 - \frac{A}{K}x \right) - \frac{\alpha A^2 x^2}{\beta^2 + A^2 x^2} \right). \end{aligned}$$

Luego queremos resolver  $\frac{1}{T} \frac{\alpha A x^2}{\beta^2 + A^2 x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$  y basta con

$$\begin{cases} \alpha A = T \beta^2 \implies A = \frac{T \beta^2}{\alpha}, \\ \alpha A = T A^2 \implies A = \frac{\alpha}{T}. \end{cases} \implies \frac{T \beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha}{T} \implies T = \frac{\alpha}{\beta} \wedge A = \beta.$$

Luego a partir de ahora estudiaremos la versión adimensionalizada:  $x' = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$ . Los puntos de equilibrio son 0 y los  $x \in \mathbb{R}$  tales que  $r \left(1 - \frac{x}{K}\right) = \frac{x}{1+x^2}$ . Resolver aquí sería equivalente a resolver una ecuación de tercer grado que, a pesar de tener una fórmula para las soluciones exactas, resulta muy complicado. Por ello, lo estudiamos gráficamente:



Tenemos cinco casos:

1. Un punto de corte, la recta roja va por debajo de la curva azul.
2. Dos puntos de corte, la recta roja es tangente por debajo a la curva azul.
3. Tres puntos de corte.
4. Un punto de corte, la recta roja es tangente por arriba a la curva azul.
5. Ningún punto de corte, la recta roja va por arriba de la curva azul.

Estudiamos los casos límite de transición: el 2 y el 4. Buscamos  $(r, k)$  tal que  $r \left(1 - \frac{x}{K}\right)$  es tangente a  $\frac{x}{1+x^2}$ :

$$\begin{cases} r \left(1 - \frac{x}{K}\right) = \frac{x}{1+x^2} \\ -\frac{r}{K} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \end{cases} \implies r + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} \implies \begin{cases} r = \frac{2x^3}{(1+x^2)^2} \\ K = \frac{2x^2}{x^2-1}. \end{cases}$$

### H.1.1 Varias poblaciones

12. Los sistemas

$$(a) \quad \begin{cases} x' = x(r - ax + by), \\ y' = y(s - cy + dx), \end{cases} \quad (H.1)$$

$$(b) \quad \begin{cases} x' = rx \left(1 - \frac{ax+by}{K}\right) + \alpha, \\ y' = sy \left(1 - \frac{ax+by}{K}\right), \end{cases} \quad (H.2)$$

$$(c) \quad \begin{cases} x' = x(r - a(x + y)), \\ y' = y(s - b(x + y)), \end{cases} \quad (H.3)$$

describen las siguientes situaciones (no necesariamente en este orden):

- Dos especies compiten por una cantidad limitada de alimentos; además hay inmigración de una de ellas, a ritmo constante.
- Dos tipos de levadura crecen en un mismo medio, y producen alcohol, cuya concentración, proporcional en cada momento al peso total de ambas levaduras, limita el crecimiento de cada una.
- Dos especies en simbiosis: la concentración de cada una limita su propio crecimiento, pero favorece el de la otra.

Se trata de identificar cuál es cuál y explicar cómo traducen las fórmulas cada aspecto del modelo descrito. **Nota:** todos los parámetros se suponen positivos.

**Solución:**

- (a) Se corresponde con un modelo de simbiosis entre dos poblaciones  $x$  e  $y$ .
- (b) Se corresponde con un modelo de competencia igual por un mismo recurso (el parámetro  $K$  es el mismo en ambas ecuaciones<sup>1</sup>) entre dos poblaciones  $x$  e  $y$  con tasas de crecimiento  $r$  y  $s$  respectivamente con tasa de inmigración  $\alpha$  de  $x$ .
- (c) Se corresponde con un modelo de competencia desigual entre dos poblaciones  $x$  e  $y$ .

13. Encontrar un sistema que modelice la evolución de las tres poblaciones siguientes: dos especies que compiten por una cantidad limitada de recursos y un predador para el que ambas sirven de alimento.

---

<sup>1</sup>Escribiríamos distintos valores de  $K$  para una ecuación que para la otra si los recursos o la alimentación no fuesen iguales para ambas especies. Por ejemplo, una especie con ejemplares más grandes requiere de más cantidad de un recurso para subsistir que una de ejemplares más pequeños que se alimente de lo mismo.

**Solución:** Tenemos tres poblaciones:  $x, y, z$  donde  $x$  e  $y$  compiten por un recurso limitado y  $z$  se alimenta de  $x$  e  $y$ . Un modelo que describa esta situación es

$$\begin{cases} x' = r_1 x \left(1 - \frac{ax+by}{K}\right) - \alpha_1 x z \\ y' = r_2 y \left(1 - \frac{ax+by}{K}\right) - \alpha_2 y z \\ z' = r_3 z (-1 + \beta_1 x + \beta_2 y). \end{cases}$$

### H.1.2 Modelos de contagio

14. En este ejercicio se plantean algunas cuestiones sobre variaciones del modelo SIR (susceptibles, infectados, recuperados) discutido en clase.

$$\text{Modelo SIS: } \begin{cases} S' = -aS \cdot I + bI, \\ I' = aS \cdot I - bI. \end{cases} \quad (\text{H.4})$$

$$\text{Modelo SIRS: } \begin{cases} S' = -aS \cdot I + cR, \\ I' = aS \cdot I - bI, \\ R' = bI - cR. \end{cases} \quad (\text{H.5})$$

$$\text{Modelo SIRV: } \begin{cases} S' = -aS \cdot I + cS, \\ I' = aS \cdot I - bI, \\ R' = bI, \\ V' = cS. \end{cases} \quad (\text{H.6})$$

$$\text{Modelo SIRD: } \begin{cases} S' = -aS \cdot I, \\ I' = aS \cdot I - bI - cI, \\ R' = bI, \\ D' = cI. \end{cases} \quad (\text{H.7})$$

(La “V” y la “D” de los últimos casos son por vacunados y fallecidos). En todos los casos, los parámetros  $a, b, c, d$  se suponen positivos, y se parte de una población de tamaño  $N$ .

(a) Reflexiona sobre la estructura de cada modelo. Piensa en enfermedades contagiosas cuya evolución pudiera estar descrita por estos modelos. Describe qué representan los parámetros en cada caso. Escribe, en cada caso, condiciones iniciales que te parezcan razonables.

(b) Resuelve el modelo SIS, obteniendo por ejemplo una expresión explícita para  $I(t)$ . Es-



tudia el comportamiento asintótico de esta función.

- (c) Estudia cualitativamente el modelo SIRS: puntos de equilibrio, linealización del sistema, etc.

***Solución:***

- (a)

## H.2 Modelización estocástica

### H.2.1 Procesos de Galton-Watson

[1.] Se dispone de una moneda que sale cara con probabilidad  $p \in (0, 1)$ . Se diseña el siguiente experimento: se sortea una variable  $N$  de Poisson de parámetro  $\lambda$ , para posteriormente lanzar la moneda tantas veces como nos diga  $N$  (Si  $N = 0$ , no se lanza la moneda). Llamemos  $X$  al número de caras que se obtienen en el experimento. La variable  $X$  puede tomar cualquier valor entero  $k \geq 0$ . ¿Con qué probabilidades?

**Solución:** Tenemos que  $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$  e  $Y \sim \text{Bernoulli}(p)$ , entonces  $X = Y_1 + \dots + Y_N$ , donde  $Y_i \sim Y$  para cada  $i \geq 1$ . Queremos hallar  $P(X = k)$  para cada  $k \geq 0$ . Para ello, usamos funciones generatrices de probabilidad. Tenemos que

$$\forall t \in \mathbb{R} : G_Y(t) = (1 - p) + pt \quad \wedge \quad G_N(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

Entonces, usando que  $\forall t \in \mathbb{R} : G_X(t) = G_N(G_Y(t))$ , tenemos que

$$G_X(t) = e^{\lambda((1-p)+pt-1)} = e^{\lambda p(t-1)} \implies X \sim \text{Poisson}(\lambda p)$$

ya que la distribución de una variable aleatoria queda determinada por su función generatriz de probabilidad. Por tanto,  $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}$  para cada  $k \geq 0$ .

[2.] Considera un proceso de Galton-Watson, en el que, para cada  $n \geq 0$ , llamamos  $Y_n$  al número de individuos en la generación  $n$  y  $G_n(s)$  es la función generatriz de  $Y_n$ . ¿Qué información contiene  $G_n(0)$ ? ¿Y  $G'_n(0)$ ?

**Solución:** Tenemos que  $\forall n \in \mathbb{N} : G_n(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n = k)(0)^k = \mathbb{P}(Y_n = 0)$ , que es la probabilidad de que la población se extinga en la generación  $n$ .

Por otro lado,  $G'_n(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\mathbb{P}(Y_n = k+1)(0)^k = \mathbb{P}(Y_n = 1)$ , que es la probabilidad de que la población tenga un único individuo en la generación  $n$ .

[3.] (a) En el modelo de Galton-Watson, consideramos el caso en el que la prole se genera con una  $X$  que toma valores  $0, 1, 2, \dots$  con probabilidades

$$P(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{para cada } k \geq 0.$$

La función generatriz asociada es  $G_X(s) = \frac{1}{2-s}$  para  $|s| < 2$ . Comprueba que, si  $Y_n$  es la variable aleatoria que registra el número de individuos en la generación/tiempo  $n$ , y  $G_n$  es su función generatriz de probabilidad, entonces

$$G_n(s) = \frac{n - (n-1)s}{n+1 - ns} \quad \text{para } |s| \leq 1.$$

Halla  $P(Y_n = k)$  para cada  $k \geq 0$ , además de  $E(X)$  y  $V(X)$ . ¿Con qué probabilidad se extingue la población?

- (b) Supongamos ahora que las probabilidades son  $P(X = k) = pq^k$  para  $k \geq 0$ , donde  $p \neq \frac{1}{2}$  y llamamos  $q = 1 - p$ , por comodidad. Prueba (por inducción, por ejemplo) que

$$G_n(s) = \frac{p(q^n - p^n) - q(q^{n-1} - p^{n-1})s}{(q^{n+1} - p^{n+1}) - q(q^n - p^n)s} \quad \text{para } |s| \leq 1.$$

¿Cuánto valen  $E(Y_n)$  y  $V(Y_n)$ ? ¿Y los límites de las dos cantidades anteriores cuando  $n \rightarrow \infty$ ? ¿Con qué probabilidad se extingue la población?

- (c) Llamemos  $T = \min\{n : Y_n = 0\}$  la variable aleatoria que registra el momento en el que se extingue la población. Calcula  $P(T = n)$ . Determina cuándo  $T$  tiene esperanza finita.

**Solución:**

(a)

[4.] Considera un proceso de Galton–Watson con  $Y_0 = 1$  y función generatriz de la progenie  $G_X(s) = \frac{1}{2-s}$ . Llamemos  $V_1$  al número de generaciones en las que hay exactamente un individuo. Prueba que

$$\mathbb{E}(V_1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

(Sugerencia: ejercicios 2 y 3).

**Solución:** Tenemos que  $Y_n = \sum_{j=1}^{Y_{n-1}} X_j$ , luego por el ejercicio [3.],  $G_n(s) = \frac{n-(n-1)s}{n+1-ns}$ .

$$\implies G'_n(s) = \frac{-(n-1)(n+1-ns) + n(n-(n-1)s)}{(n+1-ns)^2}.$$

Por otro lado,  $V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Y_n=1\}}$  donde, por el ejercicio [2.],  $\mathbb{P}(Y_n = 1) = G'_n(0)$ .

Como  $G'(0) = \frac{-(n-1)(n+1) + n^2}{(n+1)^2} = \frac{-n^2 + 1 + n}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$ , tenemos que

$$\mathbb{E}[V_i] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n = 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

### H.2.2 Modelo de Leslie

5. La población de cierta especie de animales en un bosque está dividida en dos grupos de edad (jóvenes y adultos). La correspondiente matriz de Leslie es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Interpreta el significado de cada uno de los elementos de la matriz anterior.
- (b) Calcula el autovalor dominante de  $A$  y un autovector asociado.
- (c) Sea  $X(k)$  el número de animales de cada grupo en la etapa  $k$ . Si en la etapa 0 hay únicamente 10 animales jóvenes en el bosque, calcula  $X(k)$  para  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , y las proporciones de cada grupo respecto al total de la población.
- (d) Calcula la misma proporción de forma aproximada mediante el autovector asociado al autovalor dominante. Compara resultados.

**Solución:**

6. Estudiamos una población de aves. Clasificamos las hembras en tres grupos de edad: jóvenes (de 0 a 1 año), adultas fértiles (de 1 a 2 años), y adultas no fértiles (de 2 a 3 años). Sabemos que un 12% de las hembras jóvenes y un 54% de las adultas fértiles sobreviven cada año. Ninguna de las adultas no fértiles sobrevive. Cada hembra joven produce (en promedio) una hembra al año y cada adulta fértil produce dos.

- (a) Describe la evolución de la población en forma matricial.
- (b) Transcurridos unos años, determina en qué tanto por ciento crecerá o decrecerá anualmente la población de hembras.
- (c) Determina cuál debería ser el tanto por ciento de supervivencia de las hembras jóvenes para que la población se mantuviera estable.

**Solución:**

7. (a) Supongamos que la matriz de Leslie viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \frac{a_2}{2} & \frac{3a_3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $a > 0$ . Estudia el comportamiento asintótico de la población, y en particular, la pirámide de población límite (si es que la hay).

(b) Digamos que la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & a_3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con  $a > 0$ . Analiza esta situación. Toma  $a = 1$  y estudia qué sucede si las poblaciones iniciales son  $(6, 0, 0)$  y  $(12, 2, 1)$ .

**Solución:**

[8.] Plantea un modelo de compartimentos con tres clases de edad (0, 1 y 2 años), sin supervivencia por encima de 2 años, y con el mismo coeficiente de fertilidad  $b$  para las dos últimas clases (la primera no es fértil).

(a) Estudia la dinámica del modelo y cómo depende de sus tres parámetros (fertilidad y supervivencias); en particular, analiza bajo qué condiciones tenderá a crecer o a extinguirse.

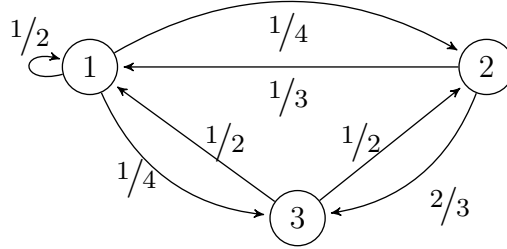
(b) ¿Y si las tasas de supervivencia fueran iguales?

**Solución:**

## H.3 Cálculo de variaciones

### H.3.1 Clasificación de estados y cálculo de probabilidades de transición

1. Se considera la cadena de Markov con el siguiente grafo dirigido asociado:



- (a) Determina las clases de la cadena, y decide si son recurrentes/transitorias y si son periódicas/apériodicas.
- (b) Calcula  $\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_0 = 1)$ .
- (c) Se sabe que  $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 2) = \frac{1}{4}$ . Calcula  $\mathbb{P}(X_0 = 3, X_1 = 2, X_2 = 1)$ .

**Solución:**

- (a) Tenemos que  $1 \rightarrow 2$  y  $2 \rightarrow 1$ , luego  $1 \leftrightarrow 2$ . Además,  $3 \rightarrow 1$  y  $1 \rightarrow 3$ , luego  $1 \leftrightarrow 3$  y, por tanto, tenemos una única clase. Como 1 es recurrente y aperiódico, toda la cadena es recurrente y aperiódica.
- (b) Queremos calcular  $\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) = p_{13}(2)$ . En este caso, es más fácil aplicar la fórmula de la probabilidad total:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) &= \sum_{k=1}^3 \mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_1 = k) \cdot \mathbb{P}(X_1 = k \mid X_0 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24}.\end{aligned}$$

- (c) Como cada paso solo está condicionado al anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = 3 \wedge X_1 = 2 \wedge X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 2) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_0 = 3) \cdot \mathbb{P}(X_0 = 3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

2. Determina las clases de las siguientes cadenas de Markov, decide si son recurrentes o

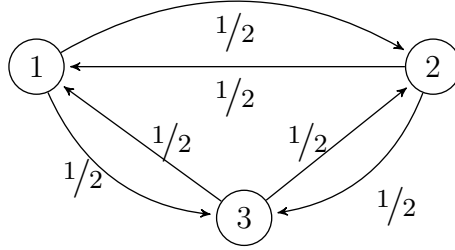
transitorias, y analiza su posible periodicidad.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

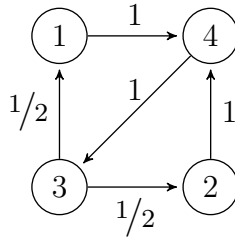
**Solución:**

(a) Tenemos el siguiente grafo dirigido asociado a la cadena de Markov:



En este caso,  $1 \rightarrow 2$  y  $2 \rightarrow 1$ , luego  $1 \leftrightarrow 2$ . Además,  $3 \rightarrow 1$  y  $1 \rightarrow 3$ , luego  $1 \leftrightarrow 3$  y, por tanto, tenemos una única clase (es una cadena irreducible). Por tanto, es recurrente. Además,  $p_{11}(1) = 0$  pero  $p_{11}(2) > 0$  y  $p_{11}(3) > 0$ , luego  $d_1 = \gcd\{2, 3\} = 1$  y 1 es aperiódico. Por tanto, toda la cadena es aperiódica.

(b) Tenemos el siguiente grafo dirigido asociado a la cadena de Markov:



En este caso,  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ , luego  $1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 3$ ,  $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ , luego  $4 \leftrightarrow 2$  y tenemos una única clase (es una cadena irreducible). Por tanto, es recurrente. Además,  $p_{ii}(1) = 0$ ,  $p_{ii}(2) = 0$ ,  $p_{ii}(3) > 0$  y  $p_{ii}(6) > 0$ , luego  $d_1 = 3$  y 1 es periódico. Por tanto, toda la cadena es periódica con periodo 3.

(c) Tenemos el siguiente grafo dirigido asociado a la cadena de Markov:

[3.] Tres bolas azules y tres bolas rojas se distribuyen en dos urnas de manera que cada urna contiene tres bolas. Decimos que el sistema está en el estado  $i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , si la primera urna contiene  $i$  bolas azules. En cada paso, extraemos una bola de cada urna y las intercambiamos: la bola extraída de la urna 1 pasa a la urna 2 y viceversa. Digamos que la variable  $X_n$  registra el estado del sistema tras el paso  $n$ . Explica por qué la sucesión  $(X_n)$  es una cadena de Markov y calcula la matriz de probabilidades de transición.

[4.] En un informe sobre la permanencia de los clientes entre las tres mayores compañías telefónicas de China, (1) China Telecom, (2) China Unicom, y (3) China Mobile, las probabilidades de transferencia de los contratos de una compañía a otra son:

$$P = \begin{pmatrix} 0.84 & 0.06 & 0.10 \\ 0.08 & 0.82 & 0.10 \\ 0.10 & 0.04 & 0.86 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que un cliente está actualmente con China Unicom. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente esté en este mismo proveedor después de tres cambios de contrato?

[5.] La moneda 1 tiene probabilidad 70% de salir cara, y la moneda 2 tiene probabilidad 60% de salir cara. Si la moneda lanzada hoy sale cara, entonces seleccionamos la moneda 1 para mañana, y si sale cruz, lanzaremos mañana la moneda 2. La moneda que se lanza al empezar puede ser la 1 o la 2 con igual probabilidad. ¿Cuál es la probabilidad de que sea la moneda 1 la lanzada en el tercer día si la moneda inicial es la 1?

[6.] Consideremos una sucesión de variables aleatorias  $(X_n)_{n \geq 0}$ , que toman valores 0, 1 o 2, y supongamos que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \begin{cases} P_{ij}^I & \text{si } n \text{ es par,} \\ P_{ij}^{II} & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

donde  $\sum_{j=0}^2 P_{ij}^I = \sum_{j=0}^2 P_{ij}^{II} = 1$  para  $i = 0, 1, 2$ . ¿Es  $(X_n)$  una cadena de Markov homogénea en el tiempo? Si no lo es, ¿podrías transformarla en una cadena de Markov homogénea en el tiempo, quizás aumentando el número de estados?

### H.3.2 Probabilidades y tiempos medios de llegada

[7.] Un proceso de Markov tiene cuatro estados, designados por 0, 1, 2 y 3. En cada paso, se mueve al de un entero menor, alcanzando cualquiera de los posibles con la misma probabilidad. Suponemos que 0 es un estado absorbente.



- (a) Halla el número esperado de pasos para alcanzar 0, si se comenzó en el estado 3.
- (b) Resuelve el mismo problema del apartado (a), pero con un número arbitrario de estados  $0, 1, \dots, N$ .

8. Considera la cadena de Markov con espacio de estados  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  y matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 - \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $0 < \alpha, \beta < 1$ .

- (a) Dibuja el grafo dirigido asociado.
- (b) ¿Cuáles son las clases? ¿Es la cadena irreducible? ¿Qué estados son absorbentes?
- (c) Halla la probabilidad de llegar al estado 1 si empezamos en el 2.
- (d) ¿Cuánto se tarda, en media, en alcanzar un estado absorbente si empezamos en 2?

9. Considera la cadena de Markov con espacio de estados  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  y matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Empezamos en el estado 1.

- (a) ¿Cuánto se tarda, en media, en alcanzar un estado del conjunto  $\{2, 3\}$ ?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de alcanzar el estado 2 antes de alcanzar el 3?

10. Se considera la cadena de Markov cuyo conjunto de estados está formado por los vértices de un cubo y con probabilidades de transición de un vértice a un vecino o a sí mismo todas iguales. Si  $a$  y  $b$  son vértices opuestos y la cadena comienza en  $a$ , se pide calcular:

- (a) El número medio de pasos para el primer retorno a  $a$ .
- (b) El número medio de pasos para la primera visita a  $b$ .

## Referenciado en

- Asignaturas