Hugo Marquerie 08/02/2025

Plano complejo extendido

Definición 1 (Plano complejo extendido).
Llamamos plano complejo extendido al conjunto $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ donde $\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos y ∞ es un punto adicional que representa el infinito.

Formalmente, la representación de $\widehat{\mathbb{C}}$ la dio Riemann usando la esfera:

$$\mathbb{S}^2 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

y la proyección estereográfica de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P \colon \widehat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ \forall z \in \mathbb{C} : z &\longmapsto \mathbb{P}^{-1}(z) = (x_1, x_2, x_3) \\ \infty &\longmapsto (0, 0, 1) \end{aligned}$$

donde (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas en la esfera y $\mathbb{P}$ es la proyección estereográfica.

Podemos hallar estas coordenadas a partir de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ intersecando la recta que pasa por $(x, y, 0)$ y $(0, 0, 1)$ con la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$:

$$r = \{(0, 0, 1) + \lambda(x, y, -1) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda x, \lambda y, 1 - \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} \cap \mathbb{S}^2.$$

$$(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1 \iff \lambda^2 \left(x^2 + y^2 + 1\right) - 2\lambda = 0 \iff \lambda = 0 \vee \lambda = \frac{2}{|z|^2 + 1}.$$

Luego $\forall z \in \mathbb{C} : \mathbb{P}^{-1}(z) = \left(\dfrac{2x}{|z|^2 + 1}, \dfrac{2y}{|z|^2 + 1}, \dfrac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) = \left(\dfrac{2\Re(z)}{|z|^2 + 1}, \dfrac{2\Im(z)}{|z|^2 + 1}, \dfrac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right).$

Ejercicio 1. Comprobar que $P^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{x_1}{1 - x_3}, \dfrac{x_2}{1 - x_3}\right) = \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$

Referenciado en

- `Teo-transformacion-mobius-pnt-fijos`
- `Teo-transformacion-mobius-dados-3-pnt`
- `Transformacion-mobius-circunferencias-generalizadas`
- `Metrica-cordal`