

Desigualdad de Jensen

Proposición 1 (Desigualdad de Jensen). Sea $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y X v.a. tales que $X, \varphi(X) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \implies \varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$.

Demostración: Vamos a asumir que $\varphi \in \mathcal{C}^1$. Sea A la recta tangente a φ en $t_0 = \mathbb{E}[X]$. Como φ es convexa, $\forall t \in \mathbb{R} : A(t) \leq \varphi(t)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X)] &= \int_{\Omega} \varphi(X(\omega)) \, d\mathbb{P}(\omega) \geq \int_{\Omega} A(X(\omega)) \, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[A(X)] \\ &= \mathbb{E}[aX + b] = a \mathbb{E}[X] + b = A(\mathbb{E}[X]) = A(t_0) = \varphi(t_0) = \varphi(\mathbb{E}[X]). \end{aligned}$$

Luego $\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}[X])$. ■

Referenciado en

- Cor-orden-normas-lp
- Desigualdad-holder