Hugo Marquerie 24/02/2025

Base de la topología de subespacio

Proposición 1. *Sea $\mathcal{B}$ una base de la topología $\mathcal{T}$ de X y sea $A \subseteq X$*

$$\implies \mathcal{B}_A := \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\} \text{ es una base de la topología del subespacio } \mathcal{T}_A \text{ de } A.$$

***Demostración*:** Sea $V \in \mathcal{T}_A$, entonces por defineción $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $V = U \cap A$. Como $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, $\exists \{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$.

$$\implies V = U \cap A = \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) \cap A = \bigcup_{\alpha \in I} \left(B_\alpha \cap A \right).$$

Luego $\forall V \in \mathcal{T}_A : \exists \{B_\alpha \cap A\}_{\alpha \in I} : V = \bigcup_{\alpha \in I} (B_\alpha \cap A)$.

Por tanto, $\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ es una base de $\mathcal{T}_A$. ■

Referenciado en

- `Herencia-segundo-numerable`