Hugo Marquerie 11/03/2025

Ley 0-1 de Kolmogorov

Teorema 1 (Ley 0-1 de Kolmogorov). *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a.i. y* $A \in T$

$$\implies \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}.$$

***Demostración*:** Sea $A \in T$, veamos que A es independiente de sí mismo:

1. Veamos que $E \in \sigma(X_1, \ldots, X_k)$ y $F \in \sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots) \implies E$, F son indep.

a. Si $F \in \sigma\left(X_{k+1,\ldots,X_{k+l}}\right)$ por el teorema Π-λ E y F son independientes.

b. Si no, consideramos los π-sistemas siguientes:

$$\Pi_1 = \sigma(X_1, \ldots, X_k) \quad \wedge \quad \Pi_2 = \bigcup_{j\geq 1} \sigma(X_{k+1}, \ldots, X_{k+l}).$$

Entonces por el caso 1a, Π_1, Π_2 son independientes, luego por el teorema Π-λ $\sigma(\Pi_1)$, $\sigma(\Pi_2)$ son independientes. Como $\sigma(X_{k+1}, \ldots) \subset \sigma(\Pi_2)$, se tiene que E y F son indep.

2. Veamos que $E \in \sigma\left(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ y $F \in T \implies E$, F son independientes.

a. Si $E \in \sigma(X_1, \ldots, X_k)$, tomamos $F \in \sigma(X_{k+1}, \ldots)$ (en particular), por el paso 1 E, F son independientes.

b. Si no, consideramos los π-sistemas siguientes:

$$\Pi_1' = \bigcup_{k\geq 1} \sigma(X_1, \ldots, X_k) \quad \wedge \quad \Pi_2' = T.$$

Entonces Π_1', Π_2' son independientes, luego por el teorema Π-λ $\sigma(\Pi_1')$, $\sigma(\Pi_2')$ son independientes. Como $\sigma\left(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) \subset \sigma(\Pi_1')$, se tiene que E y F son indep.

3. En conclusión, $T \subset \sigma\left(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ y por tanto $A \in T \implies A \in \sigma\left(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Como T es independiente de $\sigma\left(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$, se tiene que A es independiente de A.

Por tanto $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A) \implies \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. ∎