Hugo Marquerie March 2, 2025

Integral

Definición 1 (Integral de fn simple). Sea $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ una fn simple en un espacio de medida (X, Σ, μ), $I \in \mathbb{R}$ es la integral de φ respecto de μ en $E \in \Sigma$

$$\iff I = \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) \quad \text{donde} \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{E_i}$$

Definición 2 (Integral de fn no negativa). Sea $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ una fn medible no negativa en un espacio de medida (X, Σ, μ), $I \in \mathbb{R}$ es la integral de f respecto de μ en $E \in \Sigma$

$$\iff I = \int_E f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu : \varphi \text{ simple} \wedge 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

Definición 3 (Integral). Sea $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible en un espacio de medida (X, Σ, μ), $I \in \mathbb{R}$ es la integral de f respecto de μ en $E \in \Sigma$

$$\iff I = \int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu \quad \text{donde} \quad f^+ = \max\{f, 0\} \wedge f^- = \max\{-f, 0\}$$