Hugo Marquerie 27/02/2025

Teorema de la función inversa para funciones holomorfas

Teorema 1 (de la función inversa). *Sea $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω y $\mathcal{C}^1(\Omega)$ con $f'(z_0) \neq 0$*

$$\Longrightarrow \exists \mathcal{U} \in \mathcal{V}(z_0) : f\big|_{\mathcal{U}} \text{ es biyectiva } \wedge f^{-1}\colon f(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U} \text{ es holomorfa en } \mathcal{U}.$$

Además, se tiene que $\left(f^{-1}\right)'(f(w)) = \dfrac{1}{f'(w)}$.

***Demostración*:** Consideramos $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f = (u, v)$ entonces

$$J_f(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{C-R} \\ \downarrow}}{=} \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = (u_x)^2(x_0, y_0) + (v_x)^2(x_0, y_0) = \left|f'(z_0)\right|^2 \neq 0.$$

Por el teorema de la Función Inversa en el caso real, como $J_f(x_0, y_0) \neq 0$, existe un entorno de (x_0, y_0), $U \subset \Omega$, tal que la función $f \in C^1(\Omega)$ tiene inversa, $g = f^{-1}$, que es $\mathbb{R}$-diferenciable en $f(U)$.

Veamos que g es holomorfa. Sea $g = U + iV$. Como g es $\mathbb{R}$-diferenciable, solo queda comprobar que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Si D_f y D_g son las Jacobianas de f y g respectivamente, entonces $D_g = D_{f^{-1}}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{pmatrix} = D_g = D_{f^{-1}} = \frac{1}{J_f} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}.$$

Luego efectivamente se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$U_x = \frac{v_y}{J_f} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{C-R}}}{=} \frac{u_x}{J_f} = V_y \quad \wedge \quad U_y = \frac{-u_y}{J_f} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{C-R}}}{=} \frac{-v_x}{J_f} = -V_x$$

Entonces, por el teorema de Cauchy-Riemann, g es holomorfa en $f(U)$. Además,

$$g'(f(z)) = U_x(f(z)) + iV_x(f(z)) = \frac{1}{\left|f'(z)\right|^2}\left(u_x(z) - iv_x(z)\right) = \frac{1}{\left|f'(z)\right|^2}\overline{f'(z)} = \frac{1}{f'(z)}.$$

Observación 1. Que $f(U)$ sea abierto nos lo garantiza el teorema de la aplicación abierta, que se verá más adelante. En esta prueba lo estamos suponiendo.

Además, estamos usando una versión del teorema de la función inversa más fuerte del habitual, que pide $f \in \mathcal{C}^1$.

$\blacksquare$