

---

# ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

---

Tercero del Grado en Matemáticas

**Hugo Marquerie**

Profesor: Ana Primo Ramos  
Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid  
Segundo cuatrimestre 2024 - 2025

28 de enero, 2025



# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Definiciones y ejemplos básicos . . . . .	1
1.1.1	Homogeneidad . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Ecuaciones de primer orden</b>	<b>3</b>
2.1	Modelos sin aporte externo . . . . .	3
2.1.1	Modelos de transporte . . . . .	3
<b>3</b>	<b>EDPs de segundo orden</b>	<b>9</b>
3.1	Clasificación de EDPs lineales de segundo orden . . . . .	9
3.2	Separación de variables en dimensión 1 . . . . .	10
3.2.1	Ecuación del calor con condiciones Dirichlet . . . . .	10
3.2.2	Ecuación de ondas con condiciones Dirichlet . . . . .	11
3.2.3	Ecuación del calor con condiciones Neumann . . . . .	13
3.3	Estudio de las series trigonométricas . . . . .	14
3.3.1	Relaciones de ortogonalidad . . . . .	14
3.3.2	Cálculo de coeficientes . . . . .	15
3.4	Convergencia de sucesiones de funciones . . . . .	16
3.4.1	Espacios $\mathcal{L}^p$ y convergencia en $\mathcal{L}^p$ . . . . .	16
3.4.2	Criterio de Weierstrass . . . . .	19
3.4.3	Simetrías . . . . .	20
3.4.4	Notación compleja . . . . .	20
3.5	Propiedades de las sumas parciales . . . . .	22
3.6	Ecuación de Laplace en el disco . . . . .	23
<b>4</b>	<b>El método de separación de variables. Estudio de problemas de contorno</b>	<b>25</b>
<b>5</b>	<b>Comportamiento cualitativo</b>	<b>27</b>
<b>H</b>	<b>Hojas de ejercicios</b>	<b>29</b>
H.1	Introducción: Ecuaciones de primer orden . . . . .	29
H.1.1	Modelos de tráfico . . . . .	31
H.1.2	Ecuaciones casi-lineales: . . . . .	32



# 1. Introducción

## 1.1 Definiciones y ejemplos básicos

**Definición 1.1.1 (Ecuación en derivadas parciales).** Una ecuación en derivadas parciales (EDP) es una ecuación funcional de la forma:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es la función incógnita.

Las variables  $u_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$  denotan  $\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$  y  $F: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \rightarrow \mathbb{R}$  es una función dada con un número finito de variables.

**Definición 1.1.2 (Orden).** El orden de una EDP es el orden de la derivada parcial de mayor orden que aparece en la Ecu-derivadas-parciales/Equation (1).

**Definición 1.1.3 (Solución clásica).** Sea  $m \in \mathbb{N}$  el orden de una EDP, diremos que la función  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una solución clásica de la Ecu-derivadas-parciales/Equation (1) en  $\Omega \iff$

(i)  $u \in C^m(\Omega)$ .

(ii)  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega : F(x, u(x), u_{x_1}(x), \dots, u_{x_n}(x), u_{x_1 x_1}(x), \dots) = 0$ .

**Definición 1.1.4 (EDP lineal).** Una EDP (Ecu-derivadas-parciales/Equation (1)) es lineal  $\iff F$  es una función lineal en las variables  $u$  y en todas sus derivadas.

**Definición 1.1.5 (EDP casi-lineal).** Una EDP (Ecu-derivadas-parciales/Equation (1)) es casi-lineal  $\iff F$  es una función lineal en las derivadas de orden superior de  $u$ , esto es, en las derivadas con orden igual al orden de la EDP.

*Observación 1.1.6.* Una EDP lineal es casi-lineal, pero no al revés.

**Ejemplos 1.1.1 (de ecuaciones en derivadas parciales).**

[1] **Ecuación de ondas:**  $u_{tt} = \Delta u$ .

[2]

### 1.1.1 Homogeneidad

**Ejemplo 1.1.2.** Consideramos la EDP  $u_{xx} = 0$  con  $u(x, y)$ . Entonces  $u_x = f(y)$  y  $u(x, y) = f(y)x + g(y)$  con  $f, g$  arbitrarias.

**Ejemplo 1.1.3.** Consideramos la EDP  $u_{xx} + u = 0$  con  $u(x, y)$ . Entonces el polinomio característico queda  $\lambda^2 + 1$  con raíces  $\lambda = \pm i$ . Por lo que la solución general es  $u(x, y) = f(y) \cos(x) + g(y) \sin(x)$  con  $f, g$  arbitrarias.

**Ejemplo 1.1.4.** Consideramos  $u_{xy} = 0$  con  $u(x, y)$ . Integramos con respecto a  $x$  e  $y$  fijo:  $u_y(x, y) = f(y)$  e integramos con respecto a  $y$  con  $x$  fijo:  $u(x, y) = F(y) + G(x)$  con  $F' = f$ .

## 2. Ecuaciones de primer orden

**Bibliografía:** Este capítulo se ha tomado entero de Salsa et al., 2013 página 179.

### 2.1 Modelos sin aporte externo

**Motivación física:** Consideramos  $u(x, t)$  = densidad o concentración de una cantidad física  $Q$  en el punto  $x$  y en el instante  $t$  (con unidades  $\frac{\text{cantidad}}{\text{espacio}}$ ).

Entonces  $\int_a^b u(x, t) dx$  es la cantidad de  $Q$  contenida en el intervalo  $[a, b]$  en el instante  $t$ . La ley física de conservación determina que en ausencia de fuentes o sumideros, la tasa de cambio de  $Q$  por unidad de tiempo en un intervalo es igual al **flujo neto** a través de los extremos del intervalo (lo que entra menos lo que sale).

Por tanto,  $\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+h} u(x, t) dx = q(u(x_0, t)) - q(u(x_0 + h, t))$  donde  $q$  es la función de flujo, es decir,  $q(u(x, t))$  es la cantidad de que se mueve a través del punto  $x$  en el instante  $t$  “cantidad física que pasa a través de una superficie o un punto” (con unidades  $\frac{\text{cantidad}}{\text{tiempo}}$ ).

Si  $u$  y  $q$  son lo suficientemente regulares, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+h} u_t(x, t) dx &= - \int_{x_0}^{x_0+h} q(u(x, t))_x dx \\ \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} u_t(x, t) + q(u(x, t))_x dx &= 0 \implies \boxed{u_t + (q(u))_x = 0} \end{aligned}$$

#### 2.1.1 Modelos de transporte

Tenemos un camino donde el tráfico fluye en un único sentido y no se permiten adelantamientos. No tiene cruces con otros caminos. Dada una distribución inicial, a tiempo  $t = 0$ , de coches en dicho camino, ¿cuál es la distribución de esos coches a tiempo  $t = T$ ? Consideramos  $u(x, t)$  = densidad de coches en el punto  $x$  en el instante  $t$ . Entonces, el sistema que modela este problema es

$$\begin{cases} u_t(x, t) + [q(u(x, t))]_x = 0 & x \in \mathbb{R} \wedge t > 0 \\ u(x, 0) = F(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

### 2.1.1.1 Modelo simple (poco realista)

Consideramos un flujo proporcional a la densidad de coches, es decir,  $q(u) = c \cdot u$  con  $c \in \mathbb{R}$  constante. Entonces, el sistema se reduce a

$$\begin{cases} u_t(x, t) + cu_x(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R} \wedge t > 0 \\ u(x, 0) = F(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{con } F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ conocida.}$$

Se trata de una EDP de primer orden con coeficientes constantes.

**a) Resolución geométrica:** Si definimos  $\vec{c} := (c, 1)$ , se tiene que

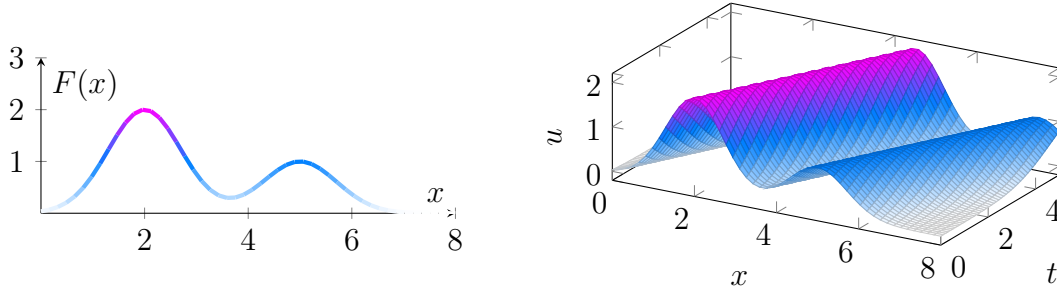
$$u_t(x, t) + cu_x(x, t) = (u_t, u_x) \cdot \vec{c} = \nabla u \cdot \vec{c}$$

luego podemos reescribir la EDP como  $\nabla u \cdot \vec{c} = 0$  donde  $\nabla u$  es el gradiente de  $u$  y  $\cdot$  representa el producto escalar.

Es decir,  $\nabla u \perp \vec{c}$  y como  $\nabla u$  es siempre perpendicular a las curvas de nivel de  $u$ ,  $\vec{c}$  es paralelo a dichas curvas. Por tanto,  $u(x, t)$  es constante a lo largo de las rectas con dirección  $\vec{c}$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = x_0 + c\mu \\ t = \mu \end{cases} \implies \mu = t = \frac{x - x_0}{c} \implies x_0 = x - ct.$$

Entonces, para cualquier  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ,  $u(x, t)$  tomará el mismo valor que  $u(x_0, 0)$  donde  $x_0 = x - ct$ . La condición inicial  $u(x, 0) = F(x)$  implica que  $u(x, t) = F(x - ct)$ .



En efecto, se cumple el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u(x, t) = F(x - ct) &\implies u_x(x, t) = F'(x - ct) \wedge u_t(x, t) = F'(x - ct)(-c) \\ \implies u_t(x, t) + cu_x(x, t) &= F'(x - ct)(-c) + cF'(x - ct) = 0 \wedge u(x, 0) = F(x). \end{aligned}$$

**b) Resolución analítica:** Podemos resolver la EDP mediante un cambio de variables:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x' &= cx + t \\ t' &= x - ct \end{aligned} \right\} \implies u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = cu_{x'} + u_{t'} \wedge u_t = u_{x'} - cu_{t'} \\ \implies u_t + cu_x &= u_{x'} - cu_{t'} + c^2 u_{x'} + cu_{t'} = (1 + c^2)u_{x'} = 0 \implies u_{x'} = 0. \end{aligned}$$



Por tanto,  $u(x, t) = F(x - ct)$  con  $F \in C^1(\mathbb{R})$  fijada por el dato inicial como antes.

Para este modelo, observamos que el dato inicial se desplaza a la derecha a velocidad  $c$ . Es decir, si  $u(x, t)$  es la densidad de coches en el punto  $x$  en el instante  $t$ , este modelo indica que todos los coches se mueven a la misma velocidad  $c$ . Sin embargo, en la realidad, los coches se mueven a velocidades distintas y se producen atascos.

### 2.1.1.2 Modelo más realista

En el modelo anterior, se consideraba que el flujo de coches era proporcional a la densidad, es decir que  $q(u) = u \cdot v(u)$  con  $v(u) = c$  constante. Igual que mejorábamos el modelo de crecimiento de Malthus ( $P'(t) = kP(t)$ ) por el de Verhulst ( $P'(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{k}\right)$ ) añadiendo un término, podemos hacer lo mismo con el modelo de transporte.

Ahora consideraremos  $v(u) = v_m \cdot \left(1 - \frac{u}{u_m}\right)$  donde  $u_m$  y  $v_m$  son la densidad y velocidad máxima de los coches respectivamente. Esto hace al modelo más realista ya que si la densidad es muy alta, los coches se verán obligados a parar y si es muy baja, los coches podrán circular a la velocidad máxima.

$$\begin{aligned} [u \cdot v(u)]_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( u(t, x) \cdot v_m \left( 1 - \frac{u(t, x)}{u_m} \right) \right) = v_m \left( u \cdot \left( -\frac{u_x}{u_m} \right) + u_x \cdot \left( 1 - \frac{u}{u_m} \right) \right) \\ &= v_m \left( u_x - \frac{2u_x u}{u_m} \right) = v_m \left( 1 - \frac{2u}{u_m} \right) u_x. \end{aligned}$$

Luego la EDP queda  $\boxed{u_t + v_m \left( 1 - \frac{2u}{u_m} \right) u_x = 0}.$

Siguiendo la estrategia del modelo anterior, buscamos las curvas  $(x(t), t)$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  donde  $u$  es constante. Es decir,  $u(x(t), t) = k = u(x(0), 0) = F(x(0))$ , luego obtenemos

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t} = u_t + u_x \cdot x'(t) & \text{derivando y, por otra parte,} \\ 0 = u_t + v_m \left( 1 - \frac{2u}{u_m} \right) u_x & \text{para ser solución de la EDP.} \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos  $u_t = -u_x \cdot x'(t)$  y sustituyendo en la segunda

$$x'(t) = v_m \left( 1 - \frac{2u(x(t), t)}{u_m} \right) = v_m \left( 1 - \frac{2k}{u_m} \right) \implies x(t) = x_0 + v_m \left( 1 - \frac{2k}{u_m} \right) t. \quad (2.1)$$

Por tanto, las curvas características son rectas con pendiente  $v_m \left( 1 - \frac{2F(x_0)}{u_m} \right)$  que depende de la densidad inicial de coches en el punto  $x_0$ .

*Observación 2.1.1.* Como la pendiente de las rectas características depende de la densidad inicial de coches, si para  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a \leq b$  se tiene que  $F(a) < u_m/2$  y  $F(b) > u_m/2$ ,

entonces la recta característica que pasa por  $a$  tendrá pendiente negativa y la que pasa por  $b$  tendrá pendiente positiva.

Por tanto, dichas rectas intersecarán en algún punto  $(x, t)$  con  $t > 0$  y  $x \in (a, b)$ . Luego la solución no está definida en ese punto ya que tenemos dos valores distintos de  $u$ .

¡Esto puede ocurrir incluso si  $F$  es  $\mathcal{C}^\infty$ !

### 2.1.1.3 Atasco (o embotellamiento)

$$\text{Si } F(x) = \begin{cases} u_m/8 & x < 0 \\ u_m & x > 0 \end{cases}, \text{ entonces } v(u(x, 0)) = v_m \left( 1 - \frac{F(x)}{u_m} \right) = \begin{cases} 7v_m/8 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Entonces, por (2.1), las curvas características son } x(t) = \begin{cases} x_0 + 3/4 u_m t & x_0 < 0 \\ x_0 - v_m t & x_0 > 0 \end{cases}.$$

Como hemos encontrado una discontinuidad en la solución a lo largo de toda una curva (llamada onda de choque)  $s(t)$ , debemos volver a la formulación integral del problema:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = q(u(x_1, t)) - q(u(x_2, t)).$$

Veamos ahora que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{s(t)} u(x, t) dx &= \int_{x_1}^{s(t)} u_t(x, t) dx + u^-(s(t), t) \cdot s'(t). \\ \frac{d}{dt} \int_{s(t)}^{x_2} u(x, t) dx &= \int_{s(t)}^{x_2} u_t(x, t) dx - u^+(s(t), t) \cdot s'(t). \end{aligned}$$

donde  $u^-(s(t), t) := \lim_{x \nearrow s(t)} u(x, t) \wedge u^+(s(t), t) := \lim_{x \searrow s(t)} u(x, t)$ .

**Demostración:** Sea  $F(s, t) = \int_{x_0}^s u(x, t) dx$  y sea  $y \in (x_0, s)$ , entonces, como para  $t$  fijo,  $u(x, t)$  es continua en  $(x_0, y)$ , podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo

$$\implies F_s(y, t) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \int_{x_0}^s u(x, t) dx \right) \Big|_{s=y} = u(y, t).$$

Luego  $F_s(s, t) = \lim_{y \nearrow s} F_s(y, t) = u^-(s, t)$ . Por otro lado,  $F_t(s, t) = \int_a^s u_t(x, t) dx$ .

Luego si definimos  $g(t) := F(s(t), t)$ , al derivar, la regla de la cadena nos da

$$g'(t) = F_s(s(t), t) \cdot s'(t) + F_t(s(t), t) = u^-(s(t), t) \cdot s'(t) + \int_{x_0}^{s(t)} u_t(x, t) dx.$$

■

Entonces, la ley de la conservación nos da

$$\begin{aligned} q(u(x_1, t)) - q(u(x_2, t)) &= \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = \frac{d}{dt} \left[ \int_{x_1}^{s(t)} u(x, t) dx + \int_{s(t)}^{x_2} u(x, t) dx \right] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} u_t(x, t) dx + (u^-(s(t), t) - u^+(s(t), t)) \cdot s'(t). \end{aligned}$$

Si hacemos tender  $x_1 \rightarrow s(t)$  y  $x_2 \rightarrow s(t)$ , obtenemos

$$q(u^-(s(t), t)) - q(u^+(s(t), t)) = (u^-(s(t), t) - u^+(s(t), t)) \cdot s'(t).$$

Despejando  $s'(t)$ , llegamos a la **condición de Rankine-Hugoniot**:

$$\boxed{s'(t) = \frac{q(u^+(s(t), t)) - q(u^-(s(t), t))}{u^+(s(t), t) - u^-(s(t), t)}}.$$

En nuestro caso concreto,  $u^+ = u_m$  y  $u^- = u_m/8$ , luego  $q(u^+) = 0$  y  $q(u^-) = 7/64 \cdot u_m v_m$ .

$$\implies s'(t) = \frac{q(u^+) - q(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{-7/64 \cdot u_m v_m}{7/8 \cdot u_m} = -\frac{1}{8} v_m.$$

Es decir, el atasco del punto  $(0, 0)$  se desplaza a la izquierda (hacia atrás según la dirección de los coches) a velocidad  $v_m/8$  en el tiempo. Por tanto, la solución queda:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_m/8 & x < -v_m t/8 \\ u_m & x > -v_m t/8 \end{cases}.$$

#### 2.1.1.4 Semáforo (green light problem)

Consideramos un semáforo en el punto  $x = 0$  que se pone en verde en el instante  $t = 0$ . En ese instante, todos los coches (que estaban parados en)  $x < 0$  comienzan a moverse.

$$\text{Es decir, } F(x) = \begin{cases} u_m & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \text{ luego } v(u(x, 0)) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ v_m & x > 0 \end{cases}.$$

$$\implies x(t) = \begin{cases} x_0 - v_m t & x_0 < 0 \\ x_0 + v_m t & x_0 > 0 \end{cases}$$

Observamos un vacío en la solución, una región  $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  donde no se ha definido la solución ya que el dato inicial  $F$  presenta una discontinuidad.

Estudiamos la rarefacción en este modelo de tráfico haciendo un cambio de variables:  $w(x, t) =$

$v_m \left(1 - \frac{u(x,t)}{u_m}\right)$ . Entonces, la EDP se convierte en

$$w_x = -\frac{2}{u_m}v_m u_x \wedge w_t = -\frac{2}{u_m}v_m u_t \implies \boxed{w_t + w \cdot w_x = 0}.$$

Esta es la llamada **ecuación de Burgers**, en este caso el flujo  $q(w) = w^2/2$ .

Si  $F(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}}$  entonces tenemos una zona de rarefacción  $R = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : x > 0 \wedge t > x\}$  en la que la solución no está definida.

Para solucionar este problema, estudiamos su causa: la discontinuidad del dato inicial  $F$ . Podemos entonces regularizar este dato inicial con una función continua dada por

$$F_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/\varepsilon & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ 1 & x > \varepsilon \end{cases}$$

Entonces las curvas características son  $x(t) = x_0 + F_\varepsilon(x_0)t = \begin{cases} x_0 & x_0 < 0 \\ x_0 + x_0/\varepsilon t & 0 \leq x_0 \leq \varepsilon \\ x_0 + t & x_0 > \varepsilon \end{cases}$ .

Si  $0 < x_0 < \varepsilon$ , entonces  $x = x_0 + x_0/\varepsilon t$ , luego  $x_0 = \frac{\varepsilon x}{\varepsilon + t}$  y  $\forall (x,t) : 0 < x \leq \varepsilon + t : u(x,t) = F_\varepsilon(x_0) = \frac{x}{\varepsilon + t}$ . Tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , tenemos la solución final:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/t & 0 \leq x \leq t \\ 1 & x > t \end{cases}$$

**Teorema 2.1.1 (Existencia y unicidad local para EDP casilineal de primer orden).**

Sean  $a, b, c: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  funciones  $\mathcal{C}^1$  en un entorno de  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  y sean  $\alpha, \beta, \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones  $\mathcal{C}^1$  en un intervalo  $I \ni 0$  con  $\alpha(0) = x_0, \beta(0) = y_0, \gamma(0) = z_0$ , entonces

En un entorno de  $(x_0, y_0)$ ,  $\exists! z = u(x, y) :$

$$\begin{vmatrix} a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \\ \alpha'(0) & \beta'(0) \end{vmatrix} \neq 0 \implies \begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \\ u(\alpha(s), \beta(s)) = \gamma(s) \end{cases}$$

### 3. EDPs de segundo orden

Recordamos del Tema 1 que una EDP de segundo orden es una ecuación de la forma

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_n x_n}) = 0.$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $F: \Omega \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  conocida.

#### 3.1 Clasificación de EDPs lineales de segundo orden

Consideramos el caso lineal general:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = c_0(x) \quad (3.1)$$

donde  $\forall i, j \in \mathbb{N}_n : a_{ij}, b_i, c, c_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \wedge a_{ij} = a_{ji}$ . Entonces, si  $n = 2$ , tenemos

$$a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + d(x, y) u_x + e(x, y) u_y + f(x, y) u = g(x, y).$$

donde  $a, b, c, d, e, f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Nos enfocamos en los coeficientes de las derivadas parciales de mayor orden (coeficientes principales).

**1. Caso de coeficientes constantes.** Para  $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$  tenemos una forma cuadrática asociada con la siguiente expresión matricial:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Sean  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  los autovalores de la matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ , entonces

(a)  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \vee \lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 \rightarrow$  Problema **elíptico**.

(b)  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \vee \lambda_1 \leq \lambda_2 = 0 \rightarrow$  Problema **parabólico**.

(c)  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \rightarrow$  Problema **hiperbólico**.

*Observación 3.1.1.* Para saber en qué caso estamos basta con saber  $\text{sgn}(\det(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}))$ :

(a)  $\det > 0 \rightarrow$  Problema **elíptico** ( $b^2 < ac$ ), e.g., la ecuación de Laplace.

(b)  $\det = 0 \rightarrow$  Problema **parabólico** ( $b^2 = ac$ ), e.g., la ecuación del calor.

(c)  $\det < 0 \rightarrow$  Problema **hiperbólico** ( $b^2 > ac$ ), e.g., la ecuación de ondas.

**2. Caso de coeficientes variables.** Tenemos la misma clasificación que para el caso anterior pero ahora la EDP puede ser de distintos tipos en distintas regiones del dominio.

### Ejemplos 3.1.1 (de clasificación de EDPs lineales de segundo orden en dim 2).

Para casos con coeficientes constantes el cálculo es muy sencillo:

$$\boxed{1} \quad u_{xx} - 5u_{xy} = 0 \text{ es un problema hiperbólico ya que } (-5/2)^2 - (1)(0) = 25/4 > 0.$$

$$\boxed{2} \quad 4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_y = 0 \text{ es un problema parabólico ya que } (-6)^2 - (4)(9) = 0.$$

$$\boxed{3} \quad 4u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0 \text{ es un problema elíptico ya que } (3)^2 - (4)(9) = 9 - 36 < 0.$$

Para casos con coeficientes variables, deberemos separar el dominio en regiones:

$$\boxed{4} \quad yu_{xx} - 2u_{xy} + xu_{yy} = 0 \implies b^2 - ac = (-1)^2 - (y)(x) = 1 - xy.$$

Por tanto, la EDP es parabólica en la hipérbola  $xy = 1$ , elíptica en las dos regiones convexas  $xy > 1$  e hiperbólica en la región cóncava  $xy < 1$ .

## 3.2 Separación de variables en dimensión 1

### 3.2.1 Ecuación del calor con condiciones Dirichlet

Consideramos la EDP de segundo orden en dimensión 1 con coeficientes constantes

$$\forall x \in (0, L) : u_t - u_{xx} = 0 \text{ con dato de contorno Dirichlet } \forall t > 0 : u(0, t) = u(L, t)$$

y condiciones iniciales  $\forall x \in (0, L) : u(x, 0) = f(x)$  con  $f$  conocida.

**Idea de separación de variables:** Estamos buscando soluciones para  $u$  de la forma  $\forall (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}_+ : u(x, t) = X(x)T(t)$ . Entonces, la EDP se convierte en

$$XT' - X''T = 0 \implies \forall (x, t) : \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} \text{ con } X(0) = X(L) = 0.$$

Entonces, necesariamente,  $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}$  y obtenemos dos PVI:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \wedge \quad X(0) = X(L) = 0 \tag{3.2}$$

$$T' - \lambda T = 0 \quad \wedge \quad T(0) = f(x). \tag{3.3}$$

Las  $\lambda$  admisibles se denominan **autovalores** (o valores propios) y las soluciones admisibles se denominan **autofunciones** (o autovectores). Veamos cuáles son en cada PVI.

(3.2) Consideramos  $\boxed{\lambda = 0}$ , entonces  $X'' = 0 \implies X(x) = ax + b$  y como  $X(0) = X(L) = 0$ ,

obtenemos  $X(x) \equiv 0$ . Luego este valor de  $\lambda$  no es admisible.

Si  $\boxed{\lambda > 0}$ , podemos escribir  $\lambda = \mu^2$  y tenemos  $X'' = \mu^2 X$  que es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes y polinomio característico  $r^2 - \mu^2 = 0$ . Por tanto,  $X(x) = ae^{\mu x} + be^{-\mu x}$  y como  $X(0) = X(L) = 0$ , obtenemos  $a = b = 0$ . Luego este valor de  $\lambda$  no es admisible.

Por último, si  $\boxed{\lambda < 0}$ , podemos escribir  $\lambda = -\mu^2$  y el polinomio característico de la edo que resulta es  $r^2 + \mu^2 = 0$ . Por tanto,  $X(x) = a \cos(\mu x) + b \sin(\mu x)$  y como  $X(0) = X(L) = 0$ , obtenemos  $a = 0$  y  $b \sin(\mu L) = 0 \implies b = 0 \vee \mu = k\pi/L$  con  $k \in \mathbb{N}$ . Luego este valor de  $\lambda = -(k\pi/L)^2$  es admisible.

Entonces las soluciones de (3.2) son  $X_k(x) = b \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$  con  $k \in \mathbb{N}$  y  $b \in \mathbb{R}$ .

$$(3.3) \quad T' - \lambda T = 0 \implies T'_k(t) = -(k\pi/L)^2 T(t), \text{ luego } T_k(t) = c_k e^{-(k\pi/L)^2 t} \text{ con } c_k \in \mathbb{R}.$$

Como el problema es lineal, cualquier combinación lineal (finita) de las  $u_k = X_k(x)T_k(t)$  también es solución de la EDP

$$\forall m \in \mathbb{N} : u(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k e^{-(k\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Solo falta ajustar para que se cumplan las condiciones iniciales, es decir, despejar los  $a_k$  de

$$\forall x \in (0, L) : u(x, 0) = \sum_{k=1}^m a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = f(x).$$

Sin embargo, no está claro que esto se vaya a poder hacer para cualquier  $f$  y con un  $m$  finito. La idea de Fourier fue recuperar el dato inicial  $f$  mediante una serie infinita de senos. Pero,

- (i) ¿cómo encontramos los coeficientes  $a_k$  dada  $f$ ?
- (ii) ¿cómo es la convergencia de esta serie infinita?
- (iii) ¿cómo podríamos justificar poder derivarla?
- (iv) ¿cómo extendemos este razonamiento para otras condiciones de contorno?
- (v) ¿cómo nos aseguramos de que no hay otras soluciones?

### 3.2.2 Ecuación de ondas con condiciones Dirichlet

Consideramos la EDP de segundo orden en dimensión 1 con coeficientes constantes

$$\forall x \in (0, L) : u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ con dato de contorno } \mathbf{Dirichlet} \quad \forall t > 0 : u(0, t) = u(L, t)$$

con datos iniciales  $\forall x \in (0, L) : u(x, 0) = f(x) \wedge u_t(x, 0) = g(x)$  con  $f, g$  conocidas.

**Nota:** este se conoce como el problema de la cuerda vibrante con posición  $f$  e impulso  $g$ .

Al igual que para la ecuación del calor, usamos el método de separación de variables para encontrar soluciones de la forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Entonces, la EDP se convierte en

$$XT'' = X''T \implies \forall(x, t) : \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ con } X(0) = X(L) = 0.$$

Obtenemos de nuevo dos PVI:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \wedge \quad X(0) = X(L) = 0 \quad (3.4)$$

$$T'' - \lambda T = 0 \quad \wedge \quad T(0) = f(x) \wedge T'(0) = g(x). \quad (3.5)$$

(3.4) Es igual que (3.2) y las soluciones son  $X_k(x) = b \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$  con  $k \in \mathbb{N}$  y  $b \in \mathbb{R}$ .

$$(3.5) \quad T'' + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 T = 0 \implies T_k(t) = \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \text{ con } \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}.$$

$$\implies \forall(x, t) : u_k(x, t) = \left( \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Siguiendo la idea de Fourier, tomamos sumas infinitas  $u = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$  y suponemos que podemos derivarla término a término (ya lo justificaremos luego). Entonces, tenemos que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad \wedge \quad g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{L} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Para encontrar los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  definimos las siguientes funciones:

$$u^1(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad \wedge \quad u^2(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

que satisfacen  $u(x, t) = u^1(x, t) + u^2(x, t)$ . Entonces, usando las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin A \cos B &= \frac{1}{2} (\sin(A+B) + \sin(A-B)) \quad \text{y} \\ \sin A \sin B &= \frac{1}{2} (\cos(A-B) - \cos(A+B)), \text{ obtenemos} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^1(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} \left( \sin\frac{k\pi}{L}(x+t) + \sin\frac{k\pi}{L}(x-t) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}(x+t)\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}(x-t)\right) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t)) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
u^2(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2} \left( \cos\frac{k\pi}{L}(x-t) - \cos\frac{k\pi}{L}(x+t) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}(x-t)\right) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}(x+t)\right) \right].
\end{aligned}$$

$$\text{Sea } G(\xi) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) \implies G'(\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\pi}{L} \sin\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) = -g(\xi)$$

$$\implies G(\xi) = -\int_0^{\xi} g(s) ds$$

$$\implies u^2(x, t) = \frac{1}{2} \left( \int_0^{x+t} g(s) ds - \int_0^{x-t} g(s) ds \right) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds$$

Así, hemos llegado a la **fórmula de D'Alembert**:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds.$$

*Observación 3.2.1.* En el cálculo de  $u(x, t)$  solo intervienen los valores de (i)  $f$  en  $x \pm t$  y (ii)  $g$  en  $[x-t, x+t]$ , lo que ocurre fuera con los datos iniciales de  $[x-t, x+t]$  no afecta.

Por eso, al intervalo  $[x-t, x+t]$  se le llama **dominio de influencia** de  $(x, t)$ .

Por otro lado, los puntos  $(x, t)$  tales que  $u(x, t)$  depende del valor de los datos iniciales en  $x_0$  son los que cumplen  $|x - x_0| \leq t$ , este es el **dominio de influencia** de  $x_0$ .

### 3.2.3 Ecuación del calor con condiciones Neumann

**Resumen:**

1. **Dirichlet** en  $[0, l] \rightarrow \begin{cases} u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ t > 0 \end{cases} \rightarrow \text{Desarrollo de los datos iniciales en serie de senos.}$
2. **Neumann** en  $[0, l] \rightarrow \begin{cases} u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \\ t > 0 \end{cases} \rightarrow \text{Desarrollo de los datos iniciales en serie de cosenos.}$
3. **Periódicas** en  $[-l, l] \rightarrow \begin{cases} u(-l, t) = u(l, t) \\ u_x(-l, t) = u_x(l, t) \\ t > 0 \end{cases} \rightarrow \text{Desarrollo de los datos iniciales en serie de senos y cosenos.}$

### 3.3 Estudio de las series trigonométricas

Ventajas de las funciones trigonométricas:

- Regularidad.
- Simetría: coseno par y seno impar.
- Periodicidad.

**Objetivo:** Estudio de las series trigonométricas

$$\forall x \in [-L, L] : \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right) + b_k \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) \right)$$

#### 3.3.1 Relaciones de ortogonalidad

$$(1) \quad \forall k \in \mathbb{N} : \int_{-L}^L \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right) dx = \int_{-L}^L \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) dx = 0 \text{ (calculando primitivas).}$$

$$(2) \quad \forall k, j \in \mathbb{N} : \int_{-L}^L \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right) \sin \left( \frac{j\pi}{L} x \right) dx = 0 \text{ (por ser una función impar).}$$

$$(3) \quad \forall k \neq j \in \mathbb{N} : \int_{-L}^L \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right) \cos \left( \frac{j\pi}{L} x \right) dx = \int_{-L}^L \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) \sin \left( \frac{j\pi}{L} x \right) dx = 0.$$

**Demostración:** Aplicamos la fórmula del coseno de la suma de ángulos

$$\implies \cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right) \cos \left( \frac{j\pi}{L} x \right) dx &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-L}^L \cos \frac{(k+j)\pi}{L} x dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-L}^L \cos \frac{(k-j)\pi}{L} x dx \right] = \begin{cases} L & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Para el caso de senos, aplicamos la fórmula del seno de la suma de ángulos

$$\implies \sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)).$$

■

$$(4) \quad \forall k \in \mathbb{N} : \int_{-L}^L \left( \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right) \right)^2 dx = \int_{-L}^L \left( \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) \right)^2 dx = L \text{ (porque son pares).}$$

Recordamos de Álgebra lineal que, dada  $(e_1, \dots, e_n)$  base de  $\mathbb{R}^n$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \text{ donde } \forall i \in \mathbb{N} : x_i = \langle x, e_i \rangle.$$

### 3.3.2 Cálculo de coeficientes

Queremos usar las relaciones de ortogonalidad para calcular los coeficientes del desarrollo. Primero supongamos que tenemos una suma finita:

$$\forall x \in [-L, L] : f_M(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M \left( a_k \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right) + b_k \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) \right).$$

Fijamos  $j \in \mathbb{N}_M$ , multiplicamos por  $\cos \left( \frac{j\pi}{L} x \right)$  e integramos:

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L \cos \left( \frac{j\pi}{L} x \right) \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M \left( a_k \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right) + b_k \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) \right) \right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-L}^L \cos \left( \frac{j\pi}{L} x \right) dx}_0 + \sum_{k=1}^M a_k \underbrace{\int_{-L}^L \cos \left( \frac{j\pi}{L} x \right) \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right) dx}_{L \text{ si } k=j \vee 0 \text{ si } k \neq j} \\ & \quad + \sum_{k=1}^M b_k \underbrace{\int_{-L}^L \cos \left( \frac{j\pi}{L} x \right) \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) dx}_0 \\ &= a_j L \implies a_j = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_M(x) \cos \left( \frac{j\pi}{L} x \right) dx. \end{aligned}$$

Si, en lugar de multiplicar por  $\cos \left( \frac{j\pi}{L} x \right)$ , multiplicamos por  $\sin \left( \frac{j\pi}{L} x \right)$ , obtenemos

$$b_j = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_M(x) \sin \left( \frac{j\pi}{L} x \right) dx.$$

Luego, en resumen, hemos obtenido  $\forall k \in \mathbb{N}_M$ :

$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_M(x) dx$	$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_M(x) \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right) dx$	$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_M(x) \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) dx.$
---	--	---

La idea ahora es trasladar este tipo de cálculos al caso de series trigonométricas (sumas infinitas), el problema es que no sabemos si podemos intercambiar la integral y el sumatorio.

En cualquier caso, dada una función  $f$  continua en  $[-L, L]$ , podemos definir los **coeficientes de Fourier** de  $f$  como  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \wedge a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right) dx \wedge b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) dx \quad (3.6)$$

y considerar la serie formal asociada

$$\forall x \in [-L, L] : \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right) + b_k \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) \right).$$

La **gran pregunta** sería ¿en qué sentido y bajo qué hipótesis esta serie es igual a  $f$ ?

Es decir, si definimos  $\forall N \in \mathbb{N} : S_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left( a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right)$ ,

¿En qué sentido y bajo qué hipótesis  $S_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{f}$ ?

Tenemos, por tanto, que estudiar la noción de convergencia de sucesiones de funciones.

### 3.4 Convergencia de sucesiones de funciones

Repasemos las distintas nociones de convergencia de sucesiones de funciones:

**Definición 3.4.1 (Convergencia puntual).** Sean  $\forall n \in \mathbb{N} : f, f_n : X \longrightarrow Y$  con  $(Y, d)$  un espacio métrico,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente a  $f$

$$\iff \forall x \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

$$\iff \forall x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

**Definición 3.4.2 (Convergencia uniforme).** Sean  $\forall n \in \mathbb{N} : f, f_n : X \longrightarrow Y$  con  $(Y, d)$  un espacio métrico,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$  en  $X$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \forall x \in X : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \iff f_n \rightrightarrows f$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left\{ d(f_n(x), f(x)) \right\} = 0.$$

#### 3.4.1 Espacios $\mathcal{L}^p$ y convergencia en $\mathcal{L}^p$

**Definición 3.4.3 (Norma  $\mathcal{L}^p$ ).** Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida,  $p \in [1, \infty]$  y  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  medible,  $\|f\|_p$  es la norma  $\mathcal{L}^p$  de  $f$

$$\iff \begin{cases} \|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} & \text{si } p \in [1, \infty) \\ \|f\|_\infty = \text{ess sup } |f| = \inf_{\substack{A \in \Sigma \\ \mu(A)=0}} \left\{ \sup_{x \in A^c} |f(x)| \right\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

**Definición 3.4.4 (Espacio  $\mathcal{L}^p$ ).** Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y  $p \in [1, \infty]$ , definimos

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible} \wedge \|f\|_p < \infty \right\}.$$

**Definición 3.4.5 (Convergencia en  $\mathcal{L}^p$ ).** Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un esp medida y  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$

una sucesión de funciones medibles,  $f_n$  converge en  $\mathcal{L}^p(\mu)$  a  $f$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0 \iff f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^p} f.$$

**Lema 3.4.1.** Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y  $p \in [1, \infty]$

$\implies \mathcal{L}^p(\mu)$  es un  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial con las operaciones:

- Suma:  $\forall f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) : \forall x \in X : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ .
- Producto por escalar:  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall f \in \mathcal{L}^p(\mu) : \forall x \in X : (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ .

**Demostración:** Veamos que la suma es cerrada. Sean  $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ . Por la desigualdad de Minkowski,

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p < \infty \implies f + g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu).$$

Veamos ahora que la multiplicación por escalar es cerrada. Sea  $f \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $1 \leq p < \infty$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_p &= \left( \int_X |\alpha f|^p d\mu \right)^{1/p} = \left( \int_X |\alpha|^p |f|^p d\mu \right)^{1/p} = |\alpha| \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &= |\alpha| \cdot \|f\|_p < \infty \end{aligned}$$

2. Si  $p = \infty$ , tenemos que

$$\|\alpha f\|_\infty = \text{ess sup } |\alpha f| = |\alpha| \cdot \text{ess sup } |f| = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty < \infty$$

Los axiomas restantes de espacio vectorial (asociatividad, elemento neutro, etc.) se cumplen trivialmente porque las funciones heredan estas propiedades de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar en el cuerpo de los números reales o complejos.

Por lo tanto,  $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . ■

**Lema 3.4.2.** Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y  $p \in [1, \infty]$

$\implies L^p := \mathcal{L}^p / \sim$  es un espacio vectorial normado con la norma  $p$ -ésima  $\|\cdot\|_p$

donde  $\forall f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) : f \sim g \iff f = g \text{ c.t.p.}$

**Demostración:** El Lem-esp-lp-vectorial/Lema 1 nos dice que  $\mathcal{L}^p(\mu)$  es un espacio vectorial. Por lo tanto,  $L^p$  también lo es (con las operaciones bien definidas inducidas).

Basta comprobar las propiedades de la definición de norma:

$$(i) \quad \forall f \in L^p : \|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \geq 0 \wedge \|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ c.t.p.}$$

$$(ii) \quad \forall f \in L^p : \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C} : \|\lambda f\|_p = \left( \int_X |\lambda f|^p d\mu \right)^{1/p} = |\lambda| \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} = |\lambda| \|f\|_p.$$

$$(iii) \quad \forall f, g \in L^p : \|f + g\|_p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Minkowski}}}{\leq} \|f\|_p + \|g\|_p.$$

■

**Teorema 3.4.3.** Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y  $p \in [1, \infty]$

$$\implies L^p := \mathcal{L}^p / \sim \text{ es un espacio de Banach con la norma } p\text{-ésima } \|\cdot\|_p$$

donde  $\forall f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) : f \sim g \iff f = g \text{ c.t.p.}$ .

**Demostración:** Por Lem-esp-lp-normado/Lema 1 sabemos que  $L^p$  es un espacio vectorial normado. Por lo tanto, basta probar que la métrica inducida por la norma  $p$ -ésima es completa.

Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$  una sucesión de Cauchy, es decir, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ . Queremos demostrar que existe  $f \in L^p$  tal que  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^p} f$  en la norma  $p$ -ésima. ■

*Observación 3.4.6 (Comparación de tipos de convergencias).*

1. Puntual  $\not\Rightarrow$  Uniforme.
2. Uniforme  $\implies$  Puntual.
3. Puntual  $\not\Rightarrow$  en  $\mathcal{L}^2$ .
4. En  $\mathcal{L}^2 \not\Rightarrow$  Puntual.
5. En  $\mathcal{L}^2 \implies \exists$  subsucesión convergente en casi todo punto.
6. Uniforme  $\implies$  en  $\mathcal{L}^2$ .

### 3.4.2 Criterio de Weierstrass

**Teorema 3.4.4 (Criterio de Weierstrass).** Sea  $\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x)$  una serie de funciones donde  $\forall k \in \mathbb{N} : \forall x \in [a, b] : |\phi_k(x)| \leq M_k$ . Suponemos que  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$  converge

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \text{ converge uniformemente en } [a, b].$$

**Demostración:** Consideramos la sucesión de sumas parciales  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  donde  $\forall N \in \mathbb{N} : S_N = \sum_{k=1}^N \phi_k(x)$ . ■

**Proposición 3.4.5.** Sea  $f \in \mathcal{C}^2([-L, L])$  con  $f(-L) = f(L)$ , entonces tenemos convergencia uniforme de la serie trigonométrica en  $[-L, L]$ .

**Demostración:** Integrando dos veces por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx = \frac{1}{L} \left[ f(x) \frac{\sin \frac{k\pi}{L} x}{\frac{k\pi}{L}} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L f'(x) \frac{\sin \frac{k\pi}{L} x}{\frac{k\pi}{L}} \, dx \right] \\ &= -\frac{1}{L} \left[ f'(x) \frac{-\cos \frac{k\pi}{L} x}{\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2} \Big|_{-L}^L + \int_{-L}^L f''(x) \frac{\cos \frac{k\pi}{L} x}{\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2} \, dx \right] \\ \implies |a_k| &= \frac{L/\pi^2}{k^2} \left| (f'(-L) - f'(L)) \cos k\pi + \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx \right| \\ &\leq \frac{L/\pi^2}{k^2} \left[ |f'(L)| + |f'(-L)| + \int_{-L}^L |f''(x)| \, dx \right] \leq \frac{c}{k^2}. \end{aligned}$$

Análogamente,  $|b_k| \leq c/k^2$  y, como  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$  (problema de Basilea), la serie trigonométrica converge uniformemente en  $[-L, L]$ . ■

*Observación 3.4.7 (de la aplicación del criterio de Weierstrass).*

1. Si  $f \in \mathcal{C}^R([-L, L])$  y cumple las condiciones de periodicidad exigidas en los cálculos, entonces los coeficientes  $a_k, b_k$  decaen como  $C/k^R$ .
2. Si  $\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x)$  converge uniformemente en  $[a, b]$ , entonces (ejercicio)

$$\int_a^b \left( \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_a^b \phi_k(x) dx \right).$$

**Problema:** Hemos demostrado que la serie trigonométrica converge uniformemente, pero no hemos identificado su límite.

Es decir, hemos probado que  $\exists$  una función  $g$  continua tal que

$$\forall x \in [-L, L] : g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right) + b_k \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) \right).$$

Por 2, podemos justificar rigurosamente, los cambios de orden entre sumatorio e integral en la serie, de manera que  $a_0$ ,  $a_k$  y  $b_k$  son los coeficientes de Fourier de  $g$ .

¿Quiere esto decir que  $f$  y  $g$  son la misma función?

### 3.4.3 Simetrías

### 3.4.4 Notación compleja

De la fórmula de euler podemos expresar las funciones trigonométricas en términos de exponenciales complejas:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \wedge \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{i\frac{k\pi}{L} x} \, dx + \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{k\pi}{L} x} \, dx \\ ib_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x \, dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{i\frac{k\pi}{L} x} \, dx - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{k\pi}{L} x} \, dx. \end{aligned}$$

$$\text{Luego } \alpha_k := \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{i\frac{k\pi}{L} x} \, dx \text{ y } \alpha_{-k} := \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{k\pi}{L} x} \, dx.$$

Entonces, podemos escribir la suma trigonométrica con exponenciales:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{L} x + b_k \sin \frac{k\pi}{L} x &= \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left( \cos \frac{k\pi}{L} x + i \sin \frac{k\pi}{L} x \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k} \left( \cos \frac{k\pi}{L} x - i \sin \frac{k\pi}{L} x \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{i\frac{k\pi}{L} x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{i\frac{k\pi}{L} x}. \end{aligned}$$

Recordamos que  $\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x) \overline{g(x)} \, dx$ , entonces

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \, dx = \frac{1}{L} \langle f, 1 \rangle \\ a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx = \frac{1}{L} \left\langle f, \cos \frac{k\pi}{L} x \right\rangle \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x \, dx = \frac{1}{L} \left\langle f, \sin \frac{k\pi}{L} x \right\rangle \end{aligned} \right\} \longrightarrow \alpha_k = \frac{1}{2L} \left\langle f, e^{i\frac{k\pi}{L} x} \right\rangle$$



Recordamos que, en dimensión finita,  $\forall x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$  donde  $\{e_j\}$  es la base canónica. Entonces,  $\forall i \in \mathbb{N}_n : x_i = \langle x, e_i \rangle$  es la proyección en la coordenada  $i$ -ésima. Además,

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} x_i^2.$$

¿Se tiene algo análogo en  $\mathcal{L}^2$ , es decir,  $\|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\text{coeficientes})^2$ ?

Podemos reescribir las relaciones de ortogonalidad:

$$\left\langle \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), 1 \right\rangle = \left\langle \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), 1 \right\rangle = 0 \wedge \left\langle \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \cos\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \right\rangle = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ L, & k = j \end{cases}$$

$$\left\langle e^{i\frac{k\pi}{L}x}, e^{i\frac{j\pi}{L}x} \right\rangle = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 2L, & k = j \end{cases}$$

Tenemos los sistemas ortogonales de  $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ :

$$\left\{ 1, \cos \frac{k\pi}{L}x, \sin \frac{k\pi}{L}x \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \left\{ e^{i\frac{k\pi}{L}x} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Calculamos las normas de estas funciones:

$$\|1\|_{\mathcal{L}^2} = \left( \int_{-L}^L 1 \, dx \right)^{1/2} = \sqrt{2L} \wedge \left\| \cos \frac{k\pi}{L}x \right\|_{\mathcal{L}^2} = \left\| \sin \frac{k\pi}{L}x \right\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{L} \wedge \left\| e^{i\frac{k\pi}{L}x} \right\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{2L}.$$

Entonces tenemos los siguientes sistemas ortonormales de  $\mathcal{L}^2([-L, L])$ :

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{\cos \frac{k\pi}{L}x}{\sqrt{L}}, \frac{\sin \frac{k\pi}{L}x}{\sqrt{L}} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{k\pi}{L}x} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}. \\ \Rightarrow & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \\ & = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2L}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2L}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle f(x), \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}{\sqrt{L}} \right\rangle \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}{\sqrt{L}} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle f(x), \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}{\sqrt{L}} \right\rangle \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}{\sqrt{L}}. \\ \Rightarrow & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{i\frac{k\pi}{L}x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle f(x), \frac{e^{i\frac{k\pi}{L}x}}{\sqrt{2L}} \right\rangle \frac{e^{i\frac{k\pi}{L}x}}{\sqrt{2L}} \end{aligned}$$

**Definición 3.4.8.** Sea  $\{\phi_k\}$  un sistema ortonormal en  $\mathcal{L}^2([a, b])$  y sea  $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$

- $\langle f, \phi_k \rangle \phi_k$  es la **proyección** de  $f$  sobre  $\phi_k$ .
- $\langle f, \phi_k \rangle$  es el  $k$ -ésimo **coeficiente** de Fourier respecto al sistema ortonormal  $\{\phi_k\}$ .
- $\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k$  es la **serie de Fourier** de  $f$  respecto a  $\{\phi_k\}$ .
- $S_N = \sum_{k=1}^N \langle f, \phi_k \rangle \phi_k$  es la  $N$ -ésima **suma parcial** de  $f$ .

### 3.5 Propiedades de las sumas parciales

**Proposición 3.5.1.** Sea  $\{\phi_k\}$  un sistema ortonormal en  $\mathcal{L}^2([a, b])$  y  $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$

$$\implies \langle S_n f, f \rangle = \sum_{k=1}^n |\langle f, \phi_k \rangle|^2.$$

**Demostración:** Dividimos en dos casos:  $f$  real o compleja.

$$\begin{aligned} - \langle S_N g, f \rangle &= \int_a^b (S_N g(x)) \cdot f(x) \, dx = \sum_{k=1}^N \langle f, \phi_k \rangle \int_a^b \phi_k(x) g(x) \, dx = \sum_{k=1}^N |\langle f, \phi_k \rangle|^2. \\ - \langle S_N f, f \rangle &= \int_a^b (S_N f(x)) \cdot \overline{f(x)} \, dx = \sum_{k=1}^N \langle f, \phi_k \rangle \int_a^b \phi_k(x) \overline{f(x)} \, dx \\ &= \sum_{k=1}^N \langle f_1, \phi_k \rangle \cdot \langle \phi_k, f \rangle = \sum_{k=1}^N \langle f_1, \phi_k \rangle \cdot \overline{\langle f, \phi_k \rangle} = \sum_{k=1}^N |\langle f, \phi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.5.2.** Sea  $\{\phi_k\}$  un sistema ortonormal en  $\mathcal{L}^2([a, b])$  y  $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$

$$\implies \langle S_N f, S_N f \rangle = \sum_{k=1}^N |\langle f, \phi_k \rangle|^2.$$

**Demostración:**

■

**Proposición 3.5.3.** Sea  $\{\phi_k\}$  un sistema ortonormal en  $\mathcal{L}^2([a, b])$  y  $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$

$$\implies S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k \text{ en } \mathcal{L}^2([a, b]).$$

### 3.6 Ecuación de Laplace en el disco

Consideramos la siguiente EDP con condiciones Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0 & \text{en } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \\ u = f & \text{en } \partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \end{cases}$$

donde  $f$  es una función continua y  $\Delta$  es el operador laplaciano.

La simetría radial del dominio sugiere pasar a coordenadas polares:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ .

Entonces definimos  $\tilde{u}(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$  y el problema se convierte en

$$\begin{cases} \tilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta} = 0 & \text{con } 0 < r < 1 \wedge \theta \in [0, 2\pi) \\ \tilde{u}(1, \theta) = f(\cos \theta, \sin \theta) =: \tilde{f}(\theta) & \text{con } \theta \in [0, 2\pi) \rightsquigarrow 2\pi\text{-periódica y continua.} \end{cases}$$

**Ejercicio 3.6.1.** Comprobar que  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \tilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta}$ .

Buscamos una solución:  $\tilde{u}(r, \theta)$  continua en  $[0, 1] \times [0, 2\pi)$  que sea armónica y  $2\pi$ -periódica.

Aplicamos separación de variables y buscamos  $\tilde{u}(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$  con  $R$  continua y  $\Phi$  continua y  $2\pi$ -periódica. Entonces la ecuación queda

$$\begin{aligned} R''\Phi + \frac{R'}{r}\Phi + \frac{R}{r^2}\Phi'' = 0 & \iff \frac{r^2 R'' + r R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda \implies \begin{cases} r^2 R'' + r R' = \lambda R \\ -\Phi'' = \lambda \Phi \end{cases} \\ & \implies \begin{cases} \Phi'' = -\lambda \Phi \\ \Phi \text{ es } 2\pi\text{-periódica} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Si  $\lambda = 0$ , entonces  $\Phi_0(\theta) = a\theta + b$

**Definición 3.6.1 (Núcleo de Poisson).**  $P: [0, 1) \times [-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$  es el núcleo de Poisson

$$\iff P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} r^{|k|} = \frac{1}{2\pi} \Re \left( \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right)$$

**Definición 3.6.2 (Integral de Poisson).**

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(s) P(r, \theta - s) ds$$

**Teorema 3.6.1 (de Poisson).** Sea  $f$  continua y  $2\pi$ -periódica

$$\implies \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cdot P(r, \theta - s) ds \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f(\theta) \text{ uniformemente en } [-\pi, \pi].$$

**Demostración:** Queremos probar que  $\sup_{\theta \in [-\pi, \pi]} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P(r, \theta - s) ds - f(\theta) \right| \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$ .

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P(r, \theta - s) ds - f(\theta) \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P(r, \theta - s) ds - f(\theta) \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) ds \right| \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(s) - f(\theta)) P(r, \theta - s) ds \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(s) - f(\theta)| P(r, \theta - s) ds. \end{aligned}$$

Para  $r$  próximo a 1,  $P$  es muy grande si  $|\theta - s| \sim 0$  y  $P$  es muy pequeño si  $|\theta - s|$  grande. Por tanto, el argumento debe ser distinto en cada una de las regiones.

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\int_{|\theta-s| \leq \alpha} |f(s) - f(\theta)| P(r, \theta - s) ds}_{(A)} + \underbrace{\int_{|\theta-s| > \alpha} |f(s) - f(\theta)| P(r, \theta - s) ds}_{(B)}. \\ &\quad (A) = \end{aligned}$$

■

*Observación 3.6.3.*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(s) P(r, \theta - s) ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k r^{|k|} e^{ik\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) r^k$$

Por tanto el teorema de Poisson es el primer teorema de convergencia en el que podemos **identificar el límite**.

## 4. El método de separación de variables. Estudio de problemas de contorno



## 5. Comportamiento cualitativo





# H. Hojas de ejercicios

## H.1 Introducción: Ecuaciones de primer orden

**Bibliografía:** Ejercicios extraídos de los libros de Salsa et al., 2013.

1. Estudiar la linealidad y establecer el orden para cada una de las EDP siguientes:

$$u_t - u_{xx} + 1 = 0$$

$$u_t - u_{xx} + xu = 0$$

$$u_t - u_{xxt} + uu_x = 0$$

$$u_{tt} - u_x + x^2 = 0$$

$$iu_t - u_{xx} + u_x = 0$$

$$u_x \sqrt{1 + u_x^2} + u_y \sqrt{1 + u_y^2} = 0$$

$$u_x + e^y u_y = 0$$

$$u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1 + u} = 0$$

2. Encontrar la evolución de la densidad  $u(x, t)$  de una sustancia contaminante en un canal con velocidad constante del agua de 5 m/s que está limpio en tiempo  $t = 0$  y con un aporte externo  $f(x, t) = e^{-t} \sin x$  (utilizar el principio de Duhamel).

3. Resolver el modelo de evolución de la contaminación en un río, incluyendo un término de depuración natural proporcional a la concentración, que se rige por la ecuación

$$u_t + cu_x = -\gamma u,$$

donde  $\gamma$  es una constante positiva, con condiciones

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{si } x > 0, \quad u(0, t) = \beta(t) \quad \text{si } t > 0.$$

4. Considera el siguiente problema (con  $c > 0$ ):

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x, t), & 0 < x < R, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < R. \end{cases}$$

Demostrar la siguiente estimación de estabilidad:

$$\int_0^R u^2(x, t) dx \leq e^t \int_0^t \int_0^R f^2(x, s) dx ds, \quad t > 0.$$

5. Estudiar el problema (Ecuación de Burgers):

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde los datos iniciales  $g(x)$  son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad g(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} & \text{(c)} \quad g(x) &= \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases} \\ \text{(b)} \quad g(x) &= \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

6. Dibujar las características y describir la evolución cuando  $t \rightarrow +\infty$  de la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x \leq 0 \text{ o } x \geq \pi. \end{cases} \end{cases}$$

7. Se da la ley de conservación

$$u_t + u^3 u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

asociada a la condición inicial:

$$u(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Encontrar la solución utilizando el método de las características (destacando ondas de rarefacción o de choque).

**Solución:** En este caso, como  $u_t + u^3 u_x = u_t + [q(u(x, t))]_x$  se tiene que el flujo es  $q(u) = u^4/4$ . Por tanto, las características son las curvas  $x(t)$  para las que  $u'(x(t), t) = 0$ ,

es decir:

$$\begin{cases} u_t(x(t), t) + u^3(x(t), t)u_x(x(t), t) = 0, \\ u_x(x(t), t) \cdot x'(t) + u_t(x(t), t) = 0. \end{cases} \implies x'(t) = u^3(x(t), t) = [g(x_0)]^3.$$

Luego las rectas características son  $x(t) = x_0 + t[g(x_0)]^3$ :

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & t = 0, \\ x_0 + t, & x_0 \in (0, 1), \\ x_0, & x_0 \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

### H.1.1 Modelos de tráfico

[8.] Apertura de un semáforo (en verde): Considera la siguiente modelización del tráfico con un semáforo en  $x = 0$ :

$$\begin{cases} u_t + \alpha \left(1 - \frac{2u}{\beta}\right) u_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = g(x) = \begin{cases} \beta, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

donde  $u(x, t)$  representa la densidad de coches,  $\alpha = v_m$  (máxima velocidad) y  $\beta = u_m$  (máxima densidad). Hallar la densidad de coches  $u$  en el semáforo para  $t > 0$ . Calcular el tiempo que le lleva a un coche ubicado en  $x_0 = -v_m t_0$  en llegar al semáforo ( $x = 0$ ).

[9.] Atasco: Usar la dinámica del tráfico descrita en el problema anterior para describir la densidad  $u(x, t)$  de los coches en una carretera recta, suponiendo que la densidad inicial es:

$$u_0(x) = \begin{cases} au_m, & x < 0, \\ \frac{u_m}{2}, & x > 0, \end{cases}$$

donde  $a \in [0, 1]$ . Describe, con respecto al parámetro  $a$ , la evolución de  $u$  para  $t > 0$ . Encuentra las características, la curva de choque y encuentra una solución en el semiplano  $(x, t)$  para  $t > 0$ . Dar una interpretación del resultado.

[10.] Tráfico en un túnel: Un modelo estándar que describe la velocidad del tráfico en un túnel viene dado por

$$v(u) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq u \leq \beta_0, \\ \lambda \log\left(\frac{\beta}{u}\right), & \beta_0 \leq u \leq \beta, \end{cases}$$

donde, como siempre,  $u$  indica la densidad del tráfico (medida en coches/km),  $\alpha$  es la veloci-

dad máxima (km/h) y  $\beta$  la densidad máxima. Aquí  $\beta_0$  es una densidad intermedia crítica (normalmente  $\beta_0 < \beta/10$ ) por debajo de la cual los conductores pueden alcanzar la velocidad máxima y  $\lambda$  se toma para que  $v$  sea continua en  $u = \beta_0$ , es decir,

$$\alpha = \lambda \log \left( \frac{\beta}{\beta_0} \right).$$

Se supone que hay un semáforo a la entrada del túnel (en  $x = 0$ ) y que, por tanto, la densidad inicial en el momento de ponerse en verde ( $t = 0$ ) es

$$u(x, 0) = g(x) = \begin{cases} \beta, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

- Escribe la ecuación en derivadas parciales que verifica la función de densidad de acuerdo al principio de conservación de masa.
- Describe las regiones del semiplano  $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$  que quedan cubiertas por las rectas características y determina el valor de  $u$  en cada una de ellas.
- Tras un proceso de rarefacción, determina los valores de  $u$  en la región no cubierta por las características (es posible que necesites dividir dicha región en subregiones).
- Para este último apartado usaremos los siguientes datos:

$$\alpha = 90 \text{ km/h}, \quad \beta = 110 \text{ coches/km}, \quad \beta_0 = 7 \text{ coches/km}, \quad \frac{\alpha}{\lambda} = 2.75.$$

Si un coche se encuentra parado a una distancia de 100 m del túnel:

- ¿Cuánto tardará en empezar a moverse después de que se abra el semáforo?
- Si  $x(t)$  denota la trayectoria del coche anterior, describe la EDO que verifica antes de llegar al túnel.
- ¿Cuánto tardará en llegar a la entrada del túnel?

### H.1.2 Ecuaciones casi-lineales:

[11.] Resolver el problema de Cauchy  $u_x + u_y = u^2$ ,  $u(x, 0) = 1$ .

[12.] Resolver el problema de Cauchy  $xu_x - yu_y = u - y$ ,  $u(y^2, y) = y$ . Estudiar si puede existir alguna solución definida en un entorno del origen.

**Solución:** Lo primero es prestar atención a la curva dato:  $x = y^2$  o  $\Gamma(s) = (s^2, s, s)$ . Por

tanto, la condición de transversalidad es

$$\begin{vmatrix} s^2 & -s \\ 2s & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \iff s \neq 0.$$

Entonces, salvo en el origen, tenemos que el teorema de existencia y unicidad garantiza la existencia de una solución única en un entorno de  $\Gamma$ .

Para resolver la ecuación, estudiamos el sistema de características:

$$\begin{cases} x'(t) = x, \\ y'(t) = -y, \\ z'(t) = z - y. \end{cases} \implies \begin{cases} x(t, s) = s^2 e^t \\ y(t, s) = s e^{-t} \\ z(t, s) = \frac{s}{2} (e^t + e^{-t}) \end{cases} \quad \text{con } (x_0, y_0, z_0) = (s^2, s, s).$$

Como  $x \cdot y = s^3$ , las curvas características son hipérbolas. Entonces, cuando  $s = 0$ , tenemos que  $x = 0 \vee y = 0$ . Entonces, en un entorno del origen la curva dato corta a los dos ejes, que son características con distintos valores de  $u$ , por lo que no existe solución  $\mathcal{C}^1$  en un entorno del origen.

- [13.] Resolver la ecuación  $u_x + 3y^{213}u_y = 2$  sujeta a la condición inicial  $u(x, 0) = \psi(x)$ .
- [14.] Resolver la ecuación  $(y + u)u_x + yu_y = x - y$  sujeta a la condición inicial  $u(x, 1) = 1 + x$ .
- [15.] Se considera la ecuación  $yu_x - xu_y = 0$  ( $y > 0$ ). Para cada uno de los siguientes datos iniciales:
- (a)  $u(x, 0) = x^2$ ,
  - (b)  $u(x, 0) = x$ ,
  - (c)  $u(x, 0) = x, x > 0$ ,
- comprobar si el problema tiene solución. Si la tiene, encontrarla; si no la tiene, explicar por qué.
- [16.] Resolver la ecuación  $u_y + u^2u_x = 0$  en  $x > 0$  bajo la condición inicial  $u(x, 0) = \sqrt{x}$ . ¿Cuál es el dominio de existencia de la solución?
- [17.] Resolver el problema de Cauchy  $xu_x + yu_y = -u, u(\cos s, \sin s) = 1, 0 \leq s \leq \pi$ . ¿Está la solución definida en todas partes?
- [18.] (a) Encontrar una función  $u = u(x, y)$  que resuelva el problema de Cauchy  $(x + y^2)u_x + yu_y + \left(\frac{x}{y} - y\right)u = 1, u(x, 1) = 0, x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Comprobar si se cumple la condición de transversalidad.

- (c) Dibujar las proyecciones sobre el plano  $(x, y)$  de las condiciones iniciales y de las características que emanan de los puntos  $(2, 1, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ .
- (d) ¿Está la solución obtenida en (a) definida en el origen  $(x, y) = (0, 0)$ ? ¿Contradice esto al teorema de existencia-unicidad?

# Bibliografía

Salsa, S., Vegni, F. M. G., Zaretti, A., & Zunino, P. (2013). *A Primer on PDEs: Models, Methods, Simulations*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-88-470-2862-3>

## Referenciado en

- Asignaturas