Hugo Marquerie 14/03/2025

# Todo espacio $\mathcal{L}^p$ es un espacio vectorial

**Lema 1.** *Sea $(X, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida y $p \in [1, \infty]$*

$$\implies \mathcal{L}^p(\mu) \text{ es un } \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}\text{-espacio vectorial con las operaciones:}$$

- *Suma:* $\forall f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) : \forall x \in X : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- *Producto por escalar:* $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall f \in \mathcal{L}^p(\mu) : \forall x \in X : (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

***Demostración*:** Veamos que la suma es cerrada. Sean $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$. Por la desigualdad de Minkowski,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p < \infty \implies f + g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu).$$

Veamos ahora que la multiplicación por escalar es cerrada. Sea $f \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si $1 \leq p < \infty$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_p &= \left(\int_X |\alpha f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \left(\int_X |\alpha|^p |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \\ &= |\alpha| \cdot \|f\|_p < \infty \end{aligned}$$

2. Si $p = \infty$, tenemos que

$$\|\alpha f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |\alpha f| = |\alpha| \cdot \operatorname{ess\,sup} |f| = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty < \infty$$

Los axiomas restantes de espacio vectorial (asociatividad, elemento neutro, etc.) se cumplen trivialmente porque las funciones heredan estas propiedades de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar en el cuerpo de los números reales o complejos.

Por lo tanto, $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. ■

## Referenciado en

- `Lem-esp-lp-normado`