Hugo Marquerie 01/02/2025

Extensión de cuerpos

Lema 1. *Sea K un cuerpo y A un anillo (no nulo), entonces*

$$\phi\colon K \longrightarrow A \text{ es un morfismo de anillos } \implies \phi \text{ es inyectivo.}$$

***Demostración*:** Sean $a, b \in K$ tales que $\phi(a) = \phi(b)$, entonces

$$\phi(a) - \phi(b) = 0 \implies \phi(a-b) = 0 \implies a - b = 0 \implies a = b.$$

Por tanto, ϕ es inyectivo. ■

Definición 1 (Extensión). Sean K, L cuerpos, L es una extensión de K $\left({}^{L}/_{K}\right)$

$$\iff \exists \phi\colon K \longrightarrow L \text{ morfismo de anillos (que es siempre inyectivo por el Lema 1)}$$

Observación 2. Podemos identificar $\phi(K)$ con K y por tanto $K \subset L$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\sim"] & L \\ \phi(K) \arrow[ur, hook, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

Por tanto, ${}^{L}/_{K}$ es una extensión de cuerpos $\iff$ K es subcuerpo* de L.

$*$ $K \subset L$ $_\wedge$ $+, \cdot$ son las mismas operaciones en K y en L.

Ejemplos 1 (de extensiones de cuerpos).

$\boxed{1}$ ${}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Q}}$ es una extensión de cuerpos $\mathbb{Q}$:

Tenemos que $\mathbb{C} \cong {}^{\mathbb{R}[x]}/_{\langle x^2+1\rangle}$ pero $\mathbb{Q} \not\subset {}^{\mathbb{R}[x]}/_{\langle x^2+1\rangle}$ porque este es un conjunto de clases de equivalencia de polinomios. Tenemos un morfismo de anillos:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} \arrow[r, hook] \arrow[rrr, hook, bend left, "\phi"] & \mathbb{R} \arrow[r, hook] & \mathbb{R}[x] \arrow[r, two heads] & \dfrac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+1\rangle} \cong \mathbb{C} \\ a \arrow[r, mapsto] & a \arrow[r, mapsto] & a \arrow[r, mapsto] & \overline{a} \end{tikzcd}$$

ϕ es un morfismo de cuerpos, luego ${}^{\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+1\rangle}}/_{\mathbb{Q}}$ es una extensión de cuerpos.

$\boxed{2}$ Sea K un cuerpo, el cuerpo de fracciones racionales sobre K

$$K(x) = \left\{ \frac{P(x)}{Q(x)} : P(x), Q(x) \in K[x], Q(x) \neq 0 \right\}$$

Tenemos que $K \subset K(x) \implies {}^{K(x)}\!\big/_{K}$ es una extensión de cuerpos.

Para $K = \mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_2(x)$, ${}^{\mathbb{F}_2(x)}\!\big/_{\mathbb{F}_2}$ es una extensión de cuerpos donde $\mathbb{F}_2(x)$ tiene infinitos elementos mientras que $\mathbb{F}_2$ tiene 2.

$\boxed{3}$ Sea ${}^{L}\!\big/_{K}$ una extensión y $\alpha \in L$, entonces

$$\implies K(\alpha) = \left\{ \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} : P(x), Q(x) \in K[x] \wedge Q(\alpha) \neq 0 \right\} \subset L \text{ es un cuerpo.}$$

Además, se tiene que ${}^{K(\alpha)}\!\big/_{K}$ es la menor extensión de K que contiene a α.

Referenciado en

- `Num-complejos`