

Consecuencias de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Proposición 1 (Consecuencias de las ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Sea Ω un dominio en \mathbb{C} y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces

1. $\forall z \in \Omega : f'(z) = 0 \implies f$ es constante en Ω .
2. $\forall z \in \Omega : (\Re(f(z)) = \text{cte}) \vee (\Im(f(z)) = \text{cte}) \implies f$ es constante en Ω .
3. $|f(z)|$ es constante en $\Omega \implies f$ es constante en Ω .

Demostración: Consideramos $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = u(z) + iv(z)$ con $u, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Sea $z_0 \in \Omega$, como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f es \mathbb{C} -derivable en z_0 con $f'(z_0) = 0$. Entonces, por el Teorema de Cauchy-Riemann, u, v son \mathbb{R} -diferenciables en z_0 con

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = 0 \implies u_x = v_x = 0 \implies v_y = u_y = 0.$$

Luego u y v son constantes en Ω y, por tanto, f también lo es.

2. Si $\forall z \in \Omega : \Re f(z) = 0 \implies \forall z \in \Omega u(z) = 0 \implies u_x = 0 \wedge u_y = 0$. Entonces, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $v_y = u_x = 0 \wedge v_x = -u_y = 0$, luego u y v son constantes en Ω y, por tanto, f también lo es.
3. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\forall z \in \Omega : |f(z)| = c \in \mathbb{R}$, entonces si $c = 0$ inmediatamente $f \equiv 0$. Supongamos que $c \neq 0$, entonces $|f|^2 = u^2 + v^2$ es constante en Ω .

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2uu_x + 2vv_x = 0 & \text{(I)} \\ 2uu_y + 2vv_y = 0 & \text{(II)} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{C-R}} \left\{ \begin{array}{ll} uu_x - vv_y = 0 & \text{(I)} \\ uv_y + vu_x = 0 & \text{(II)} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{uI + vII} 2(u^2 + v^2)u_x = 0 \implies u_x = 0 \implies v_y = 0 \\ \xrightarrow{vI - uII} -2(u^2 + v^2)u_y = 0 \implies u_y = 0 \implies v_x = 0 \end{array} \right\} \text{ en } \Omega.$$

Luego u, v son constantes en Ω y por tanto f es constante en Ω .

■