Hugo Marquerie 26/03/2025

Transformación de Möbius dados tres puntos

Teorema 1. *Sean $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{C}$ distintos y $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{C}$ distintos*

$$\implies \exists! T \text{ transformación de Möbius} : \forall k \in \mathbb{N}_3 : T(z_k) = w_k.$$

Además, la fórmula para fijar estos puntos es:

$$G(w) := \frac{(w_2 - w_3)(w - w_1)}{(w_2 - w_1)(w - w_3)} = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)} =: F(z) \quad \textit{(fórmula de la } \textbf{\textit{razón doble}}\textit{).}$$

***Demostración*:** La existencia viene dada por la fórmula de la razón doble. En efecto,

(i) $w = w_1 \iff G(w) = 0 \iff F(z) = 0 \iff z = z_1$.

(ii) $w = w_3 \iff G(w) = \infty \iff F(z) = \infty \iff z = z_3$.

(iii) $w = w_2 \iff G(w) = 1 \iff F(z) = 1 \iff z = z_2$.

Para la unicidad, supongamos que existen dos transformaciones de Möbius T_1 y T_2 que cumplen las condiciones del teorema. Entonces, $T_1 \circ T_2^{-1}(w_k) = w_k$ para $k = 1, 2, 3$.

Por tanto, como $T_1 \circ T_2^{-1}$ tiene tres puntos fijos distintos, el `Cor-transformacion-mobius-3-pnt-fijos/?` nos dice que $T_1 \circ T_2^{-1} = \mathrm{id}$ y, en consecuencia, $T_1 = T_2$. ∎

Observación 1. El comportamiento de las transformaciones de Möbius viene completamente determinado por su acción sobre tres puntos distintos en $\widehat{\mathbb{C}}$.