Hugo Marquerie 26/03/2025

Toda transformación de Möbius manda circunferencias generalizadas a circunferencias generalizadas

Teorema 1. *Toda transformación de Möbius manda circunferencias generalizadas a circunferencias generalizadas. Es decir,* $T(\Gamma) = \Gamma$.

Más aún, si γ *es una circunferencia generalizada,* T *transforma cada uno de los dos dominios complementarios en que* γ *divide a la esfera de Riemann en uno de los dominios complementarios de* $T(\gamma)$.

***Demostración*:** Observamos que todo elemento $\gamma \in \Gamma$ verifica la ecuación

$$\forall (x, y) \in \gamma : A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D = 0 \text{ con } A, B, C, D \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Si $A \neq 0$, la ecuación γ representa una circunferencia. Si $A = 0$, la ecuación γ representa una recta. Por la `Prop-transformacion-mobius-composicion/`Proposición 1, basta estudiar las traslaciones, dilataciones, rotaciones e inversiones.

$\boxed{\subset}$ Si T es una dilatación, rotación o traslación, el resultado es inmediato: $T(\gamma) \in \Gamma$.

Consideramos $T(z) = {}^{1}\!/_{z}$ y $z = x + yi \in \gamma$. Entonces

$$\frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \implies u = \frac{x}{x^2 + y^2} \wedge v = -\frac{y}{x^2 + y^2} \implies u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación (1), obtenemos

$$A\left(\frac{1}{u^2 + v^2}\right) + B\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right) + C\left(\frac{-u}{u^2 + v^2}\right) + D = 0$$
$$\iff A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0 \implies T(\gamma) \in \Gamma.$$

$\boxed{\supset}$ Como T^{-1} también es transformación de Möbius, le podemos aplicar el argumento anterior y $T^{-1}(\Gamma) \subset \Gamma \implies \Gamma \subset T(\Gamma)$.

■