Hugo Marquerie 27/03/2025

Corolario del orden de las normas $\mathcal{L}^p$

Corolario 1. *Sean $q, p \in [1, \infty)$ con $p \leq q$ y $X \in \mathcal{L}^p(\mathbb{P})$*

$$\implies X \in \mathcal{L}^q(\mathbb{P}) \wedge \|X\|_p \leq \|X\|_q .$$

***Demostración*:** El caso $p = q$ es trivial. Supongamos $p < q$ y definimos

$$\varphi(t) := \begin{cases} t^{q/p} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \overset{\substack{q>p \\ \downarrow}}{\implies} \varphi \text{ es } \mathcal{C}^1 \text{ y convexa.}$$

Entonces, por la desigualdad de Jensen, tenemos que

$$\varphi\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[\varphi\left(|X|^p\right)\right] = \mathbb{E}\left[|X|^q\right] = \|X\|_q^q$$

Ahora bien, como $\varphi\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right) = \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{q/p} = \|X\|_p^q$, se tiene que $\|X\|_p \leq \|X\|_q$. ■