Hugo Marquerie 22/02/2025

La independencia de π-sistemas implica la independencia de las σ-álgebras generadas

Proposición 1. *Sean $S_1, \dots, S_n$ π-sistemas independientes*

$$\implies \sigma(S_1), \dots, \sigma(S_n) \text{ son independientes.}$$

***Demostración*:** Fijamos $A_2 \in S_2, \dots, A_n \in S_n$ y definimos

$$F := \bigcap_{j=2}^{n} A_j \quad \wedge \quad L_F := \{A \in \Sigma : \mathbb{P}(A \cap F) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(F)\}.$$

Veamos que (a) $S_1 \subset L_F$ y (b) L_F es un λ-sistema:

(a) Sea $A_1 \in S_1$, entonces

$$\mathbb{P}(A_1 \cap F) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) \overset{\substack{\text{indep} \\ \downarrow}}{=} \prod_{j \in \mathbb{N}_n} \mathbb{P}(A_j) \overset{\substack{\text{indep} \\ \downarrow}}{=} \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=2}^{n} A_j\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(F).$$

Luego $A_1 \in L$ y, por tanto, $S_1 \subset L$.

(b) Comprobamos las propiedades de la definición de λ-sistema:

(i) $\mathbb{P}(\Omega \cap F) = \mathbb{P}(F) = 1 \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(\Omega) \cdot \mathbb{P}(F) \implies \Omega \in L.$

(ii) Sean $A, B \in L_F$ tales que $A \subset B$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([B \setminus A] \cap F\big) &= \mathbb{P}\big([B \cap F] \setminus [A \cap F]\big) \underset{\substack{\uparrow \\ A \subset B}}{=} \mathbb{P}(B \cap F) - \mathbb{P}(A \cap F) \\ &\overset{\substack{A,B \in L \\ \downarrow}}{=} \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(B \setminus A) \cdot \mathbb{P}(F) \implies B \setminus A \in L. \end{aligned}$$

(iii) Sea $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L_F$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right] \cap F\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_j \cap F)\right) \overset{\substack{\text{TCM} \\ \downarrow}}{=} \lim_{j \to \infty} \mathbb{P}(A_j \cap F) = \lim_{j \to \infty} \mathbb{P}(A_j) \cdot \mathbb{P}(F) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \cdot \mathbb{P}(F) \implies \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in L. \end{aligned}$$

Entonces, por el teorema π-λ, $\sigma(S_1) \subset L_F$. ■