Hugo Marquerie 27/02/2025

Desigualdad de Hölder

Teorema 1 (Desigualdad de Hölder). *Sea* $1 < p < \infty$ *y* $X \in \mathcal{L}^p(\mathbb{P}), Y \in \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{P})$

$$\implies \mathbb{E}\big[\,|X \cdot Y|\,\big] \leq \|X\|_p \cdot \|Y\|_{p'}$$

donde p' *es el exponente conjugado de* p.

***Demostración*:** Suponemos que $\|Y\|_{p'} \neq 0$ (si no, la desigualdad es trivial).

Definimos una función $h\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y una medida ν en Ω dadas por

$$h(\omega) := \frac{|X(\omega)|}{|Y(\omega)|^{p'-1}} \mathbb{1}_{\{Y \neq 0\}}(\omega) \quad \wedge \quad \mathrm{d}\nu = \frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}} \mathbb{1}_{\{Y \neq 0\}}(\omega)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

donde ν es una medida porque $\frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ por hipótesis.

Además $\nu(\Omega) = \displaystyle\int_\Omega \frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}}\, \mathrm{d}P = \frac{\|Y\|_{p'}^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}} = 1$, luego ν es de probabilidad.

$$\implies \mathbb{E}\left[|X \cdot Y|\right] = \int_\Omega |X(\omega) \cdot Y(\omega)|\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

$$= \|Y\|_{p'}^{p'} \int_\Omega \frac{|X(\omega)|}{|Y(\omega)|^{p-1}} \frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}}\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \|Y\|_{p'}^{p'} \left[\int_\Omega h(\omega)\, \mathrm{d}v(\omega)\right]^{p/p}.$$

Como $p > 1$, $\varphi(t) = |t|^p$ es convexa y por la desigualdad de Jensen se tiene que

$$\mathbb{E}\left[|X \cdot Y|\right] = \|Y\|_{p'}^{p'} \left[\varphi\left(\int_\Omega h(\omega)\, \mathrm{d}\nu(\omega)\right)\right]^{1/p} \leq \|Y\|_{p'}^{p'} \left[\int_\Omega h(\omega)^p\, \mathrm{d}\nu(\omega)\right]^{1/p} =$$

$$\leq \|Y\|_{p'}^{p'} \left[\int_\Omega \frac{|X(\omega)|^p}{\|Y(\omega)\|^{p(p'-1)}} \cdot \frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}}\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\right]^{1/p} = \|X\|_p \|Y\|_{p'}.$$

■