
ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Tercero del Grado en Matemáticas

Hugo Marquerie

Profesor: Ana Primo Ramos
Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid
Segundo cuatrimestre 2024 - 2025

28 de enero, 2025

Índice

1	Introducción	1
1.1	Definiciones y ejemplos básicos	1
1.1.1	Homogeneidad	2
2	Ecuaciones de primer orden	3
2.1	Modelos sin aporte externo	3
2.1.1	Modelos de transporte	3
3	EDPs de segundo orden	9
3.1	Clasificación de EDPs lineales de segundo orden	9
3.2	Separación de variables en dimensión 1	10
3.2.1	Ecuación del calor con condiciones Dirichlet	10
3.2.2	Ecuación de ondas con condiciones Dirichlet	11
3.2.3	Ecuación del calor con condiciones Neumann	13
3.3	Estudio de las series trigonométricas	14
3.3.1	Relaciones de ortogonalidad	14
3.3.2	Cálculo de coeficientes	15
3.4	Convergencia de sucesiones de funciones	16
3.4.1	Espacios \mathcal{L}^p y convergencia en \mathcal{L}^p	16
3.4.2	Criterio de Weierstrass	19
3.4.3	Simetrías	20
3.4.4	Notación compleja	20
3.5	Propiedades de las sumas parciales	22
3.6	Ecuación de Laplace en el disco	23
4	El método de separación de variables. Estudio de problemas de contorno	25
5	Comportamiento cualitativo	27
H	Hojas de ejercicios	29
H.1	Introducción: Ecuaciones de primer orden	29
H.1.1	Modelos de tráfico	31
H.1.2	Ecuaciones casi-lineales:	32

1. Introducción

1.1 Definiciones y ejemplos básicos

Definición 1.1.1 (Ecuación en derivadas parciales). Una ecuación en derivadas parciales (EDP) es una ecuación funcional de la forma:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es la función incógnita.

Las variables $u_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$ denotan $\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$ y $F: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada con un número finito de variables.

Definición 1.1.2 (Orden). El orden de una EDP es el orden de la derivada parcial de mayor orden que aparece en la Ecu-derivadas-parciales/Equation (1).

Definición 1.1.3 (Solución clásica). Sea $m \in \mathbb{N}$ el orden de una EDP, diremos que la función $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución clásica de la Ecu-derivadas-parciales/Equation (1) en $\Omega \iff$

(i) $u \in C^m(\Omega)$.

(ii) $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega : F(x, u(x), u_{x_1}(x), \dots, u_{x_n}(x), u_{x_1 x_1}(x), \dots) = 0$.

Definición 1.1.4 (EDP lineal). Una EDP (Ecu-derivadas-parciales/Equation (1)) es lineal $\iff F$ es una función lineal en las variables u y en todas sus derivadas.

Definición 1.1.5 (EDP casi-lineal). Una EDP (Ecu-derivadas-parciales/Equation (1)) es casi-lineal $\iff F$ es una función lineal en las derivadas de orden superior de u , esto es, en las derivadas con orden igual al orden de la EDP.

Observación 1.1.6. Una EDP lineal es casi-lineal, pero no al revés.

Ejemplos 1.1.1 (de ecuaciones en derivadas parciales).

[1] Ecuación de ondas: $u_{tt} = \Delta u$.

[2]

1.1.1 Homogeneidad

Ejemplo 1.1.2. Consideramos la EDP $u_{xx} = 0$ con $u(x, y)$. Entonces $u_x = f(y)$ y $u(x, y) = f(y)x + g(y)$ con f, g arbitrarias.

Ejemplo 1.1.3. Consideramos la EDP $u_{xx} + u = 0$ con $u(x, y)$. Entonces el polinomio característico queda $\lambda^2 + 1$ con raíces $\lambda = \pm i$. Por lo que la solución general es $u(x, y) = f(y) \cos(x) + g(y) \sin(x)$ con f, g arbitrarias.

Ejemplo 1.1.4. Consideramos $u_{xy} = 0$ con $u(x, y)$. Integramos con respecto a x e y fijo: $u_y(x, y) = f(y)$ e integramos con respecto a y con x fijo: $u(x, y) = F(y) + G(x)$ con $F' = f$.

2. Ecuaciones de primer orden

Bibliografía: Este capítulo se ha tomado entero de Salsa et al., 2013 página 179.

2.1 Modelos sin aporte externo

Motivación física: Consideramos $u(x, t)$ = densidad o concentración de una cantidad física Q en el punto x y en el instante t (con unidades $\frac{\text{cantidad}}{\text{espacio}}$).

Entonces $\int_a^b u(x, t) dx$ es la cantidad de Q contenida en el intervalo $[a, b]$ en el instante t . La ley física de conservación determina que en ausencia de fuentes o sumideros, la tasa de cambio de Q por unidad de tiempo en un intervalo es igual al **flujo neto** a través de los extremos del intervalo (lo que entra menos lo que sale).

Por tanto, $\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+h} u(x, t) dx = q(u(x_0, t)) - q(u(x_0 + h, t))$ donde q es la función de flujo, es decir, $q(u(x, t))$ es la cantidad de que se mueve a través del punto x en el instante t “cantidad física que pasa a través de una superficie o un punto” (con unidades $\frac{\text{cantidad}}{\text{tiempo}}$).

Si u y q son lo suficientemente regulares, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+h} u_t(x, t) dx &= - \int_{x_0}^{x_0+h} q(u(x, t))_x dx \\ \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} u_t(x, t) + q(u(x, t))_x dx &= 0 \implies \boxed{u_t + (q(u))_x = 0} \end{aligned}$$

2.1.1 Modelos de transporte

Tenemos un camino donde el tráfico fluye en un único sentido y no se permiten adelantamientos. No tiene cruces con otros caminos. Dada una distribución inicial, a tiempo $t = 0$, de coches en dicho camino, ¿cuál es la distribución de esos coches a tiempo $t = T$? Consideramos $u(x, t)$ = densidad de coches en el punto x en el instante t . Entonces, el sistema que modela este problema es

$$\begin{cases} u_t(x, t) + [q(u(x, t))]_x = 0 & x \in \mathbb{R} \wedge t > 0 \\ u(x, 0) = F(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2.1.1.1 Modelo simple (poco realista)

Consideramos un flujo proporcional a la densidad de coches, es decir, $q(u) = c \cdot u$ con $c \in \mathbb{R}$ constante. Entonces, el sistema se reduce a

$$\begin{cases} u_t(x, t) + cu_x(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R} \wedge t > 0 \\ u(x, 0) = F(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{con } F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ conocida.}$$

Se trata de una EDP de primer orden con coeficientes constantes.

a) Resolución geométrica: Si definimos $\vec{c} := (c, 1)$, se tiene que

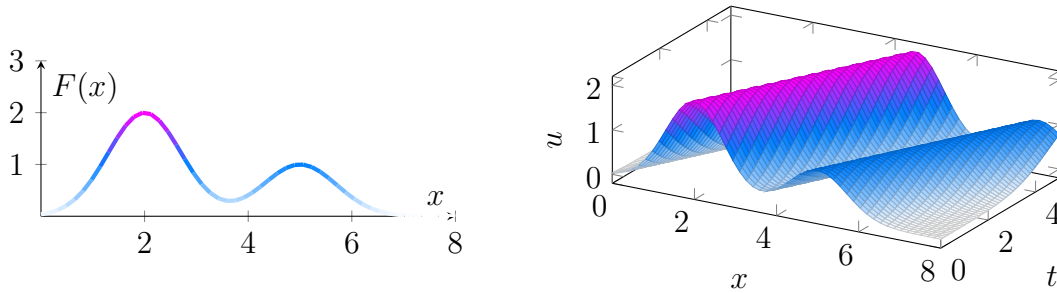
$$u_t(x, t) + cu_x(x, t) = (u_t, u_x) \cdot \vec{c} = \nabla u \cdot \vec{c}$$

luego podemos reescribir la EDP como $\nabla u \cdot \vec{c} = 0$ donde ∇u es el gradiente de u y \cdot representa el producto escalar.

Es decir, $\nabla u \perp \vec{c}$ y como ∇u es siempre perpendicular a las curvas de nivel de u , \vec{c} es paralelo a dichas curvas. Por tanto, $u(x, t)$ es constante a lo largo de las rectas con dirección \vec{c} .

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = x_0 + c\mu \\ t = \mu \end{cases} \implies \mu = t = \frac{x - x_0}{c} \implies x_0 = x - ct.$$

Entonces, para cualquier $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $u(x, t)$ tomará el mismo valor que $u(x_0, 0)$ donde $x_0 = x - ct$. La condición inicial $u(x, 0) = F(x)$ implica que $u(x, t) = F(x - ct)$.



En efecto, se cumple el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u(x, t) = F(x - ct) &\implies u_x(x, t) = F'(x - ct) \wedge u_t(x, t) = F'(x - ct)(-c) \\ \implies u_t(x, t) + cu_x(x, t) &= F'(x - ct)(-c) + cF'(x - ct) = 0 \wedge u(x, 0) = F(x). \end{aligned}$$

b) Resolución analítica: Podemos resolver la EDP mediante un cambio de variables:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x' &= cx + t \\ t' &= x - ct \end{aligned} \right\} \implies u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = cu_{x'} + u_{t'} \wedge u_t = u_{x'} - cu_{t'} \\ \implies u_t + cu_x &= u_{x'} - cu_{t'} + c^2 u_{x'} + cu_{t'} = (1 + c^2)u_{x'} = 0 \implies u_{x'} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $u(x, t) = F(x - ct)$ con $F \in C^1(\mathbb{R})$ fijada por el dato inicial como antes.

Para este modelo, observamos que el dato inicial se desplaza a la derecha a velocidad c . Es decir, si $u(x, t)$ es la densidad de coches en el punto x en el instante t , este modelo indica que todos los coches se mueven a la misma velocidad c . Sin embargo, en la realidad, los coches se mueven a velocidades distintas y se producen atascos.

2.1.1.2 Modelo más realista

En el modelo anterior, se consideraba que el flujo de coches era proporcional a la densidad, es decir que $q(u) = u \cdot v(u)$ con $v(u) = c$ constante. Igual que mejorábamos el modelo de crecimiento de Malthus ($P'(t) = kP(t)$) por el de Verhulst ($P'(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{k}\right)$) añadiendo un término, podemos hacer lo mismo con el modelo de transporte.

Ahora consideraremos $v(u) = v_m \cdot \left(1 - \frac{u}{u_m}\right)$ donde u_m y v_m son la densidad y velocidad máxima de los coches respectivamente. Esto hace al modelo más realista ya que si la densidad es muy alta, los coches se verán obligados a parar y si es muy baja, los coches podrán circular a la velocidad máxima.

$$\begin{aligned} [u \cdot v(u)]_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u(t, x) \cdot v_m \left(1 - \frac{u(t, x)}{u_m} \right) \right) = v_m \left(u \cdot \left(-\frac{u_x}{u_m} \right) + u_x \cdot \left(1 - \frac{u}{u_m} \right) \right) \\ &= v_m \left(u_x - \frac{2u_x u}{u_m} \right) = v_m \left(1 - \frac{2u}{u_m} \right) u_x. \end{aligned}$$

Luego la EDP queda $\boxed{u_t + v_m \left(1 - \frac{2u}{u_m} \right) u_x = 0}.$

Siguiendo la estrategia del modelo anterior, buscamos las curvas $(x(t), t)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ donde u es constante. Es decir, $u(x(t), t) = k = u(x(0), 0) = F(x(0))$, luego obtenemos

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t} = u_t + u_x \cdot x'(t) & \text{derivando y, por otra parte,} \\ 0 = u_t + v_m \left(1 - \frac{2u}{u_m} \right) u_x & \text{para ser solución de la EDP.} \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $u_t = -u_x \cdot x'(t)$ y sustituyendo en la segunda

$$x'(t) = v_m \left(1 - \frac{2u(x(t), t)}{u_m} \right) = v_m \left(1 - \frac{2k}{u_m} \right) \implies x(t) = x_0 + v_m \left(1 - \frac{2k}{u_m} \right) t. \quad (2.1)$$

Por tanto, las curvas características son rectas con pendiente $v_m \left(1 - \frac{2F(x_0)}{u_m} \right)$ que depende de la densidad inicial de coches en el punto x_0 .

Observación 2.1.1. Como la pendiente de las rectas características depende de la densidad inicial de coches, si para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ se tiene que $F(a) < u_m/2$ y $F(b) > u_m/2$,

entonces la recta característica que pasa por a tendrá pendiente negativa y la que pasa por b tendrá pendiente positiva.

Por tanto, dichas rectas intersecarán en algún punto (x, t) con $t > 0$ y $x \in (a, b)$. Luego la solución no está definida en ese punto ya que tenemos dos valores distintos de u .

¡Esto puede ocurrir incluso si F es \mathcal{C}^∞ !

2.1.1.3 Atasco (o embotellamiento)

Si $F(x) = \begin{cases} u_m/8 & x < 0 \\ u_m & x > 0 \end{cases}$, entonces $v(u(x, 0)) = v_m \left(1 - \frac{F(x)}{u_m}\right) = \begin{cases} 7v_m/8 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$.

Entonces, por (2.1), las curvas características son $x(t) = \begin{cases} x_0 + 3/4 u_m t & x_0 < 0 \\ x_0 - v_m t & x_0 > 0 \end{cases}$.

Como hemos encontrado una discontinuidad en la solución a lo largo de toda una curva (llamada onda de choque) $s(t)$, debemos volver a la formulación integral del problema:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = q(u(x_1, t)) - q(u(x_2, t)).$$

Veamos ahora que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{s(t)} u(x, t) dx &= \int_{x_1}^{s(t)} u_t(x, t) dx + u^-(s(t), t) \cdot s'(t). \\ \frac{d}{dt} \int_{s(t)}^{x_2} u(x, t) dx &= \int_{s(t)}^{x_2} u_t(x, t) dx - u^+(s(t), t) \cdot s'(t). \end{aligned}$$

donde $u^-(s(t), t) := \lim_{x \nearrow s(t)} u(x, t) \wedge u^+(s(t), t) := \lim_{x \searrow s(t)} u(x, t)$.

Demostración: Sea $F(s, t) = \int_{x_0}^s u(x, t) dx$ y sea $y \in (x_0, s)$, entonces, como para t fijo, $u(x, t)$ es continua en (x_0, y) , podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo

$$\implies F_s(y, t) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_{x_0}^s u(x, t) dx \right) \Big|_{s=y} = u(y, t).$$

Luego $F_s(s, t) = \lim_{y \nearrow s} F_s(y, t) = u^-(s, t)$. Por otro lado, $F_t(s, t) = \int_a^s u_t(x, t) dx$.

Luego si definimos $g(t) := F(s(t), t)$, al derivar, la regla de la cadena nos da

$$g'(t) = F_s(s(t), t) \cdot s'(t) + F_t(s(t), t) = u^-(s(t), t) \cdot s'(t) + \int_{x_0}^{s(t)} u_t(x, t) dx.$$

■

Entonces, la ley de la conservación nos da

$$\begin{aligned} q(u(x_1, t)) - q(u(x_2, t)) &= \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = \frac{d}{dt} \left[\int_{x_1}^{s(t)} u(x, t) dx + \int_{s(t)}^{x_2} u(x, t) dx \right] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} u_t(x, t) dx + (u^-(s(t), t) - u^+(s(t), t)) \cdot s'(t). \end{aligned}$$

Si hacemos tender $x_1 \rightarrow s(t)$ y $x_2 \rightarrow s(t)$, obtenemos

$$q(u^-(s(t), t)) - q(u^+(s(t), t)) = (u^-(s(t), t) - u^+(s(t), t)) \cdot s'(t).$$

Despejando $s'(t)$, llegamos a la **condición de Rankine-Hugoniot**:

$$\boxed{s'(t) = \frac{q(u^+(s(t), t)) - q(u^-(s(t), t))}{u^+(s(t), t) - u^-(s(t), t)}}.$$

En nuestro caso concreto, $u^+ = u_m$ y $u^- = u_m/8$, luego $q(u^+) = 0$ y $q(u^-) = 7/64 \cdot u_m v_m$.

$$\implies s'(t) = \frac{q(u^+) - q(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{-7/64 \cdot u_m v_m}{7/8 \cdot u_m} = -\frac{1}{8} v_m.$$

Es decir, el atasco del punto $(0, 0)$ se desplaza a la izquierda (hacia atrás según la dirección de los coches) a velocidad $v_m/8$ en el tiempo. Por tanto, la solución queda:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_m/8 & x < -v_m t/8 \\ u_m & x > -v_m t/8 \end{cases}.$$

2.1.1.4 Semáforo (green light problem)

Consideramos un semáforo en el punto $x = 0$ que se pone en verde en el instante $t = 0$. En ese instante, todos los coches (que estaban parados en) $x < 0$ comienzan a moverse.

$$\text{Es decir, } F(x) = \begin{cases} u_m & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \text{ luego } v(u(x, 0)) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ v_m & x > 0 \end{cases}.$$

$$\implies x(t) = \begin{cases} x_0 - v_m t & x_0 < 0 \\ x_0 + v_m t & x_0 > 0 \end{cases}$$

Observamos un vacío en la solución, una región $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ donde no se ha definido la solución ya que el dato inicial F presenta una discontinuidad.

Estudiamos la rarefacción en este modelo de tráfico haciendo un cambio de variables: $w(x, t) =$

$v_m \left(1 - \frac{u(x,t)}{u_m}\right)$. Entonces, la EDP se convierte en

$$w_x = -\frac{2}{u_m}v_mu_x \wedge w_t = -\frac{2}{u_m}v_mu_t \implies \boxed{w_t + w \cdot w_x = 0}.$$

Esta es la llamada **ecuación de Burgers**, en este caso el flujo $q(w) = w^2/2$.

Si $F(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ entonces tenemos una zona de rarefacción $R = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : x > 0 \wedge t > x\}$ en la que la solución no está definida.

Para solucionar este problema, estudiamos su causa: la discontinuidad del dato inicial F . Podemos entonces regularizar este dato inicial con una función continua dada por

$$F_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/\varepsilon & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ 1 & x > \varepsilon \end{cases}$$

Entonces las curvas características son $x(t) = x_0 + F_\varepsilon(x_0)t = \begin{cases} x_0 & x_0 < 0 \\ x_0 + x_0/\varepsilon t & 0 \leq x_0 \leq \varepsilon \\ x_0 + t & x_0 > \varepsilon \end{cases}$.

Si $0 < x_0 < \varepsilon$, entonces $x = x_0 + x_0/\varepsilon t$, luego $x_0 = \frac{\varepsilon x}{\varepsilon + t}$ y $\forall (x,t) : 0 < x \leq \varepsilon + t : u(x,t) = F_\varepsilon(x_0) = \frac{x}{\varepsilon + t}$. Tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, tenemos la solución final:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/t & 0 \leq x \leq t \\ 1 & x > t \end{cases}$$

Teorema 2.1.1 (Existencia y unicidad local para EDP casilineal de primer orden).

Sean $a, b, c: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones \mathcal{C}^1 en un entorno de $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y sean $\alpha, \beta, \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones \mathcal{C}^1 en un intervalo $I \ni 0$ con $\alpha(0) = x_0, \beta(0) = y_0, \gamma(0) = z_0$, entonces

En un entorno de (x_0, y_0) , $\exists! z = u(x, y) :$

$$\begin{vmatrix} a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \\ \alpha'(0) & \beta'(0) \end{vmatrix} \neq 0 \implies \begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \\ u(\alpha(s), \beta(s)) = \gamma(s) \end{cases}$$

3. EDPs de segundo orden

Recordamos del Tema 1 que una EDP de segundo orden es una ecuación de la forma

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_n x_n}) = 0.$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $F: \Omega \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ conocida.

3.1 Clasificación de EDPs lineales de segundo orden

Consideramos el caso lineal general:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = c_0(x) \quad (3.1)$$

donde $\forall i, j \in \mathbb{N}_n : a_{ij}, b_i, c, c_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \wedge a_{ij} = a_{ji}$. Entonces, si $n = 2$, tenemos

$$a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + d(x, y) u_x + e(x, y) u_y + f(x, y) u = g(x, y).$$

donde $a, b, c, d, e, f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Nos enfocamos en los coeficientes de las derivadas parciales de mayor orden (coeficientes principales).

1. Caso de coeficientes constantes. Para $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$ tenemos una forma cuadrática asociada con la siguiente expresión matricial:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, entonces

(a) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \vee \lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 \rightarrow$ Problema **elíptico**.

(b) $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \vee \lambda_1 \leq \lambda_2 = 0 \rightarrow$ Problema **parabólico**.

(c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \rightarrow$ Problema **hiperbólico**.

Observación 3.1.1. Para saber en qué caso estamos basta con saber $\text{sgn}(\det(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}))$:

(a) $\det > 0 \rightarrow$ Problema **elíptico** ($b^2 < ac$), e.g., la ecuación de Laplace.

(b) $\det = 0 \rightarrow$ Problema **parabólico** ($b^2 = ac$), e.g., la ecuación del calor.

(c) $\det < 0 \rightarrow$ Problema **hiperbólico** ($b^2 > ac$), e.g., la ecuación de ondas.

2. Caso de coeficientes variables. Tenemos la misma clasificación que para el caso anterior pero ahora la EDP puede ser de distintos tipos en distintas regiones del dominio.

Ejemplos 3.1.1 (de clasificación de EDPs lineales de segundo orden en dim 2).

Para casos con coeficientes constantes el cálculo es muy sencillo:

1 $u_{xx} - 5u_{xy} = 0$ es un problema hiperbólico ya que $(-5/2)^2 - (1)(0) = 25/4 > 0$.

2 $4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_y = 0$ es un problema parabólico ya que $(-6)^2 - (4)(9) = 0$.

3 $4u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$ es un problema elíptico ya que $(3)^2 - (4)(9) = 9 - 36 < 0$.

Para casos con coeficientes variables, deberemos separar el dominio en regiones:

4 $yu_{xx} - 2u_{xy} + xu_{yy} = 0 \implies b^2 - ac = (-1)^2 - (y)(x) = 1 - xy$.

Por tanto, la EDP es parabólica en la hipérbola $xy = 1$, elíptica en las dos regiones convexas $xy > 1$ e hiperbólica en la región cóncava $xy < 1$.

3.2 Separación de variables en dimensión 1

3.2.1 Ecuación del calor con condiciones Dirichlet

Consideramos la EDP de segundo orden en dimensión 1 con coeficientes constantes

$$\forall x \in (0, L) : u_t - u_{xx} = 0 \text{ con dato de contorno Dirichlet } \forall t > 0 : u(0, t) = u(L, t)$$

y condiciones iniciales $\forall x \in (0, L) : u(x, 0) = f(x)$ con f conocida.

Idea de separación de variables: Estamos buscando soluciones para u de la forma $\forall (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}_+ : u(x, t) = X(x)T(t)$. Entonces, la EDP se convierte en

$$XT' - X''T = 0 \implies \forall (x, t) : \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} \text{ con } X(0) = X(L) = 0.$$

Entonces, necesariamente, $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}$ y obtenemos dos PVI:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \wedge \quad X(0) = X(L) = 0 \tag{3.2}$$

$$T' - \lambda T = 0 \quad \wedge \quad T(0) = f(x). \tag{3.3}$$

Las λ admisibles se denominan **autovalores** (o valores propios) y las soluciones admisibles se denominan **autofunciones** (o autovectores). Veamos cuáles son en cada PVI.

(3.2) Consideramos $\boxed{\lambda = 0}$, entonces $X'' = 0 \implies X(x) = ax + b$ y como $X(0) = X(L) = 0$,

obtenemos $X(x) \equiv 0$. Luego este valor de λ no es admisible.

Si $\boxed{\lambda > 0}$, podemos escribir $\lambda = \mu^2$ y tenemos $X'' = \mu^2 X$ que es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes y polinomio característico $r^2 - \mu^2 = 0$. Por tanto, $X(x) = ae^{\mu x} + be^{-\mu x}$ y como $X(0) = X(L) = 0$, obtenemos $a = b = 0$. Luego este valor de λ no es admisible.

Por último, si $\boxed{\lambda < 0}$, podemos escribir $\lambda = -\mu^2$ y el polinomio característico de la EDO que resulta es $r^2 + \mu^2 = 0$. Por tanto, $X(x) = a \cos(\mu x) + b \sin(\mu x)$ y como $X(0) = X(L) = 0$, obtenemos $a = 0$ y $b \sin(\mu L) = 0 \implies b = 0 \vee \mu = k\pi/L$ con $k \in \mathbb{N}$. Luego este valor de $\lambda = -(k\pi/L)^2$ es admisible.

Entonces las soluciones de (3.2) son $X_k(x) = b \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ con $k \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{R}$.

$$(3.3) \quad T' - \lambda T = 0 \implies T'_k(t) = -(k\pi/L)^2 T(t), \text{ luego } T_k(t) = c_k e^{-(k\pi/L)^2 t} \text{ con } c_k \in \mathbb{R}.$$

Como el problema es lineal, cualquier combinación lineal (finita) de las $u_k = X_k(x)T_k(t)$ también es solución de la EDP

$$\forall m \in \mathbb{N} : u(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k e^{-(k\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Solo falta ajustar para que se cumplan las condiciones iniciales, es decir, despejar los a_k de

$$\forall x \in (0, L) : u(x, 0) = \sum_{k=1}^m a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = f(x).$$

Sin embargo, no está claro que esto se vaya a poder hacer para cualquier f y con un m finito. La idea de Fourier fue recuperar el dato inicial f mediante una serie infinita de senos. Pero,

- (i) ¿cómo encontramos los coeficientes a_k dada f ?
- (ii) ¿cómo es la convergencia de esta serie infinita?
- (iii) ¿cómo podríamos justificar poder derivarla?
- (iv) ¿cómo extendemos este razonamiento para otras condiciones de contorno?
- (v) ¿cómo nos aseguramos de que no hay otras soluciones?

3.2.2 Ecuación de ondas con condiciones Dirichlet

Consideramos la EDP de segundo orden en dimensión 1 con coeficientes constantes

$$\forall x \in (0, L) : u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ con dato de contorno } \mathbf{Dirichlet} \quad \forall t > 0 : u(0, t) = u(L, t)$$

con datos iniciales $\forall x \in (0, L) : u(x, 0) = f(x) \wedge u_t(x, 0) = g(x)$ con f, g conocidas.

Nota: este se conoce como el problema de la cuerda vibrante con posición f e impulso g .

Al igual que para la ecuación del calor, usamos el método de separación de variables para encontrar soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Entonces, la EDP se convierte en

$$XT'' = X''T \implies \forall(x, t) : \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ con } X(0) = X(L) = 0.$$

Obtenemos de nuevo dos PVI:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \wedge \quad X(0) = X(L) = 0 \quad (3.4)$$

$$T'' - \lambda T = 0 \quad \wedge \quad T(0) = f(x) \wedge T'(0) = g(x). \quad (3.5)$$

(3.4) Es igual que (3.2) y las soluciones son $X_k(x) = b \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ con $k \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{R}$.

$$(3.5) \quad T'' + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 T = 0 \implies T_k(t) = \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \text{ con } \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}.$$

$$\implies \forall(x, t) : u_k(x, t) = \left(\alpha_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Siguiendo la idea de Fourier, tomamos sumas infinitas $u = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$ y suponemos que podemos derivarla término a término (ya lo justificaremos luego). Entonces, tenemos que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad \wedge \quad g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{L} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Para encontrar los coeficientes a_k y b_k definimos las siguientes funciones:

$$u^1(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad \wedge \quad u^2(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

que satisfacen $u(x, t) = u^1(x, t) + u^2(x, t)$. Entonces, usando las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin A \cos B &= \frac{1}{2} (\sin(A + B) + \sin(A - B)) \quad \text{y} \\ \sin A \sin B &= \frac{1}{2} (\cos(A - B) - \cos(A + B)), \text{ obtenemos} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^1(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} \left(\sin\frac{k\pi}{L}(x+t) + \sin\frac{k\pi}{L}(x-t) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}(x+t)\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}(x-t)\right) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^2(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2} \left(\cos\frac{k\pi}{L}(x-t) - \cos\frac{k\pi}{L}(x+t) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}(x-t)\right) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}(x+t)\right) \right].
\end{aligned}$$

$$\text{Sea } G(\xi) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) \implies G'(\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\pi}{L} \sin\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) = -g(\xi)$$

$$\implies G(\xi) = -\int_0^{\xi} g(s) \, ds$$

$$\implies u^2(x, t) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{x+t} g(s) \, ds - \int_0^{x-t} g(s) \, ds \right) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) \, ds$$

Así, hemos llegado a la **fórmula de D'Alembert**:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) \, ds.$$

Observación 3.2.1. En el cálculo de $u(x, t)$ solo intervienen los valores de (i) f en $x \pm t$ y (ii) g en $[x-t, x+t]$, lo que ocurre fuera con los datos iniciales de $[x-t, x+t]$ no afecta.

Por eso, al intervalo $[x-t, x+t]$ se le llama **dominio de influencia** de (x, t) .

Por otro lado, los puntos (x, t) tales que $u(x, t)$ depende del valor de los datos iniciales en x_0 son los que cumplen $|x - x_0| \leq t$, este es el **dominio de influencia** de x_0 .

3.2.3 Ecuación del calor con condiciones Neumann

Resumen:

1. **Dirichlet** en $[0, l] \rightarrow \begin{cases} u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ t > 0 \end{cases} \rightarrow \text{Desarrollo de los datos iniciales en serie de senos.}$

2. **Neumann** en $[0, l] \rightarrow \begin{cases} u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \\ t > 0 \end{cases} \rightarrow \text{Desarrollo de los datos iniciales en serie de cosenos.}$

3. **Periódicas** en $[-l, l] \rightarrow \begin{cases} u(-l, t) = u(l, t) \\ u_x(-l, t) = u_x(l, t) \\ t > 0 \end{cases} \rightarrow \text{Desarrollo de los datos iniciales en serie de senos y cosenos.}$

3.3 Estudio de las series trigonométricas

Ventajas de las funciones trigonométricas:

- Regularidad.
- Simetría: coseno par y seno impar.
- Periodicidad.

Objetivo: Estudio de las series trigonométricas

$$\forall x \in [-L, L] : \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \right)$$

3.3.1 Relaciones de ortogonalidad

$$(1) \quad \forall k \in \mathbb{N} : \int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx = \int_{-L}^L \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx = 0 \text{ (calculando primitivas).}$$

$$(2) \quad \forall k, j \in \mathbb{N} : \int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \sin \left(\frac{j\pi}{L} x \right) dx = 0 \text{ (por ser una función impar).}$$

$$(3) \quad \forall k \neq j \in \mathbb{N} : \int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{j\pi}{L} x \right) dx = \int_{-L}^L \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \sin \left(\frac{j\pi}{L} x \right) dx = 0.$$

Demostración: Aplicamos la fórmula del coseno de la suma de ángulos

$$\implies \cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{j\pi}{L} x \right) dx &= \frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \cos \frac{(k+j)\pi}{L} x dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-L}^L \cos \frac{(k-j)\pi}{L} x dx \right] = \begin{cases} L & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Para el caso de senos, aplicamos la fórmula del seno de la suma de ángulos

$$\implies \sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)).$$

■

$$(4) \quad \forall k \in \mathbb{N} : \int_{-L}^L \left(\cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \right)^2 dx = \int_{-L}^L \left(\sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \right)^2 dx = L \text{ (porque son pares).}$$

Recordamos de Álgebra lineal que, dada (e_1, \dots, e_n) base de \mathbb{R}^n y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \text{ donde } \forall i \in \mathbb{N} : x_i = \langle x, e_i \rangle.$$

3.3.2 Cálculo de coeficientes

Queremos usar las relaciones de ortogonalidad para calcular los coeficientes del desarrollo. Primero supongamos que tenemos una suma finita:

$$\forall x \in [-L, L] : f_M(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \right).$$

Fijamos $j \in \mathbb{N}_M$, multiplicamos por $\cos \left(\frac{j\pi}{L} x \right)$ e integramos:

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L \cos \left(\frac{j\pi}{L} x \right) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \right) \right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-L}^L \cos \left(\frac{j\pi}{L} x \right) dx}_0 + \sum_{k=1}^M a_k \underbrace{\int_{-L}^L \cos \left(\frac{j\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx}_{L \text{ si } k=j \vee 0 \text{ si } k \neq j} \\ & \quad + \sum_{k=1}^M b_k \underbrace{\int_{-L}^L \cos \left(\frac{j\pi}{L} x \right) \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx}_0 \\ &= a_j L \implies a_j = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_M(x) \cos \left(\frac{j\pi}{L} x \right) dx. \end{aligned}$$

Si, en lugar de multiplicar por $\cos \left(\frac{j\pi}{L} x \right)$, multiplicamos por $\sin \left(\frac{j\pi}{L} x \right)$, obtenemos

$$b_j = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_M(x) \sin \left(\frac{j\pi}{L} x \right) dx.$$

Luego, en resumen, hemos obtenido $\forall k \in \mathbb{N}_M$:

$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_M(x) dx$	$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_M(x) \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx$	$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_M(x) \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx.$
---	--	---

La idea ahora es trasladar este tipo de cálculos al caso de series trigonométricas (sumas infinitas), el problema es que no sabemos si podemos intercambiar la integral y el sumatorio.

En cualquier caso, dada una función f continua en $[-L, L]$, podemos definir los **coeficientes de Fourier** de f como $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \wedge a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx \wedge b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx \quad (3.6)$$

y considerar la serie formal asociada

$$\forall x \in [-L, L] : \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \right).$$

La **gran pregunta** sería ¿en qué sentido y bajo qué hipótesis esta serie es igual a f ?

Es decir, si definimos $\forall N \in \mathbb{N} : S_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \right)$,

¿En qué sentido y bajo qué hipótesis $S_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{f}$?

Tenemos, por tanto, que estudiar la noción de convergencia de sucesiones de funciones.

3.4 Convergencia de sucesiones de funciones

Repasemos las distintas nociones de convergencia de sucesiones de funciones:

Definición 3.4.1 (Convergencia puntual). Sean $\forall n \in \mathbb{N} : f, f_n : X \longrightarrow Y$ con (Y, d) un espacio métrico, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a f

$$\iff \forall x \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

$$\iff \forall x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Definición 3.4.2 (Convergencia uniforme). Sean $\forall n \in \mathbb{N} : f, f_n : X \longrightarrow Y$ con (Y, d) un espacio métrico, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en X

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \forall x \in X : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \iff f_n \rightrightarrows f$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left\{ d(f_n(x), f(x)) \right\} = 0.$$

3.4.1 Espacios \mathcal{L}^p y convergencia en \mathcal{L}^p

Definición 3.4.3 (Norma \mathcal{L}^p). Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, $p \in [1, \infty]$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ medible, $\|f\|_p$ es la norma \mathcal{L}^p de f

$$\iff \begin{cases} \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} & \text{si } p \in [1, \infty) \\ \|f\|_\infty = \text{ess sup } |f| = \inf_{\substack{A \in \Sigma \\ \mu(A)=0}} \left\{ \sup_{x \in A^c} |f(x)| \right\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Definición 3.4.4 (Espacio \mathcal{L}^p). Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $p \in [1, \infty]$, definimos

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible} \wedge \|f\|_p < \infty \right\}.$$

Definición 3.4.5 (Convergencia en \mathcal{L}^p). Sea (X, Σ, μ) un esp medida y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$

una sucesión de funciones medibles, f_n converge en $\mathcal{L}^p(\mu)$ a f

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0 \iff f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^p} f.$$

Lema 3.4.1. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $p \in [1, \infty]$

$\implies \mathcal{L}^p(\mu)$ es un \mathbb{R} o \mathbb{C} -espacio vectorial con las operaciones:

- Suma: $\forall f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) : \forall x \in X : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Producto por escalar: $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall f \in \mathcal{L}^p(\mu) : \forall x \in X : (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Demostración: Veamos que la suma es cerrada. Sean $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$. Por la desigualdad de Minkowski,

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p < \infty \implies f + g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu).$$

Veamos ahora que la multiplicación por escalar es cerrada. Sea $f \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si $1 \leq p < \infty$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_p &= \left(\int_X |\alpha f|^p d\mu \right)^{1/p} = \left(\int_X |\alpha|^p |f|^p d\mu \right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &= |\alpha| \cdot \|f\|_p < \infty \end{aligned}$$

2. Si $p = \infty$, tenemos que

$$\|\alpha f\|_\infty = \text{ess sup } |\alpha f| = |\alpha| \cdot \text{ess sup } |f| = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty < \infty$$

Los axiomas restantes de espacio vectorial (asociatividad, elemento neutro, etc.) se cumplen trivialmente porque las funciones heredan estas propiedades de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar en el cuerpo de los números reales o complejos.

Por lo tanto, $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} . ■

Lema 3.4.2. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $p \in [1, \infty]$

$\implies L^p := \mathcal{L}^p / \sim$ es un espacio vectorial normado con la norma p -ésima $\|\cdot\|_p$

donde $\forall f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) : f \sim g \iff f = g \text{ c.t.p.}$

Demostración: El Lem-esp-lp-vectorial/Lema 1 nos dice que $\mathcal{L}^p(\mu)$ es un espacio vectorial. Por lo tanto, L^p también lo es (con las operaciones bien definidas inducidas).

Basta comprobar las propiedades de la definición de norma:

$$(i) \quad \forall f \in L^p : \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \geq 0 \wedge \|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ c.t.p.}$$

$$(ii) \quad \forall f \in L^p : \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C} : \|\lambda f\|_p = \left(\int_X |\lambda f|^p d\mu \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} = |\lambda| \|f\|_p.$$

$$(iii) \quad \forall f, g \in L^p : \|f + g\|_p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Minkowski}}}{\leq} \|f\|_p + \|g\|_p.$$

■

Teorema 3.4.3. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $p \in [1, \infty]$

$$\implies L^p := \mathcal{L}^p / \sim \text{ es un espacio de Banach con la norma } p\text{-ésima } \|\cdot\|_p$$

donde $\forall f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) : f \sim g \iff f = g \text{ c.t.p.}$

Demostración: Por Lem-esp-lp-normado/Lema 1 sabemos que L^p es un espacio vectorial normado. Por lo tanto, basta probar que la métrica inducida por la norma p -ésima es completa.

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$ una sucesión de Cauchy, es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. Queremos demostrar que existe $f \in L^p$ tal que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^p} f$ en la norma p -ésima. ■

Observación 3.4.6 (Comparación de tipos de convergencias).

1. Puntual $\not\Rightarrow$ Uniforme.
2. Uniforme \implies Puntual.
3. Puntual $\not\Rightarrow$ en \mathcal{L}^2 .
4. En $\mathcal{L}^2 \not\Rightarrow$ Puntual.
5. En $\mathcal{L}^2 \implies \exists$ subsucesión convergente en casi todo punto.
6. Uniforme \implies en \mathcal{L}^2 .

3.4.2 Criterio de Weierstrass

Teorema 3.4.4 (Criterio de Weierstrass). Sea $\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x)$ una serie de funciones donde $\forall k \in \mathbb{N} : \forall x \in [a, b] : |\phi_k(x)| \leq M_k$. Suponemos que $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \text{ converge uniformemente en } [a, b].$$

Demostración: Consideramos la sucesión de sumas parciales $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ donde $\forall N \in \mathbb{N} : S_N = \sum_{k=1}^N \phi_k(x)$. ■

Proposición 3.4.5. Sea $f \in \mathcal{C}^2([-L, L])$ con $f(-L) = f(L)$, entonces tenemos convergencia uniforme de la serie trigonométrica en $[-L, L]$.

Demostración: Integrando dos veces por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx = \frac{1}{L} \left[f(x) \frac{\sin \frac{k\pi}{L} x}{\frac{k\pi}{L}} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L f'(x) \frac{\sin \frac{k\pi}{L} x}{\frac{k\pi}{L}} \, dx \right] \\ &= -\frac{1}{L} \left[f'(x) \frac{-\cos \frac{k\pi}{L} x}{\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2} \Big|_{-L}^L + \int_{-L}^L f''(x) \frac{\cos \frac{k\pi}{L} x}{\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2} \, dx \right] \\ \implies |a_k| &= \frac{L/\pi^2}{k^2} \left| (f'(-L) - f'(L)) \cos k\pi + \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx \right| \\ &\leq \frac{L/\pi^2}{k^2} \left[|f'(L)| + |f'(-L)| + \int_{-L}^L |f''(x)| \, dx \right] \leq \frac{c}{k^2}. \end{aligned}$$

Análogamente, $|b_k| \leq c/k^2$ y, como $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ (problema de Basilea), la serie trigonométrica converge uniformemente en $[-L, L]$. ■

Observación 3.4.7 (de la aplicación del criterio de Weierstrass).

1. Si $f \in \mathcal{C}^R([-L, L])$ y cumple las condiciones de periodicidad exigidas en los cálculos, entonces los coeficientes a_k, b_k decaen como C/k^R .
2. Si $\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$, entonces (ejercicio)

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b \phi_k(x) dx \right).$$

Problema: Hemos demostrado que la serie trigonométrica converge uniformemente, pero no hemos identificado su límite.

Es decir, hemos probado que \exists una función g continua tal que

$$\forall x \in [-L, L] : g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \right).$$

Por 2, podemos justificar rigurosamente, los cambios de orden entre sumatorio e integral en la serie, de manera que a_0 , a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de g .

¿Quiere esto decir que f y g son la misma función?

3.4.3 Simetrías

3.4.4 Notación compleja

De la fórmula de euler podemos expresar las funciones trigonométricas en términos de exponenciales complejas:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \wedge \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{i\frac{k\pi}{L} x} \, dx + \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{k\pi}{L} x} \, dx \\ ib_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x \, dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{i\frac{k\pi}{L} x} \, dx - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{k\pi}{L} x} \, dx. \end{aligned}$$

$$\text{Luego } \alpha_k := \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{i\frac{k\pi}{L} x} \, dx \text{ y } \alpha_{-k} := \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{k\pi}{L} x} \, dx.$$

Entonces, podemos escribir la suma trigonométrica con exponenciales:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{L} x + b_k \sin \frac{k\pi}{L} x &= \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\cos \frac{k\pi}{L} x + i \sin \frac{k\pi}{L} x \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k} \left(\cos \frac{k\pi}{L} x - i \sin \frac{k\pi}{L} x \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{i\frac{k\pi}{L} x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{i\frac{k\pi}{L} x}. \end{aligned}$$

Recordamos que $\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x) \overline{g(x)} \, dx$, entonces

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \, dx = \frac{1}{L} \langle f, 1 \rangle \\ a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx = \frac{1}{L} \left\langle f, \cos \frac{k\pi}{L} x \right\rangle \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x \, dx = \frac{1}{L} \left\langle f, \sin \frac{k\pi}{L} x \right\rangle \end{aligned} \right\} \longrightarrow \alpha_k = \frac{1}{2L} \left\langle f, e^{i\frac{k\pi}{L} x} \right\rangle$$

Recordamos que, en dimensión finita, $\forall x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ donde $\{e_j\}$ es la base canónica. Entonces, $\forall i \in \mathbb{N}_n : x_i = \langle x, e_i \rangle$ es la proyección en la coordenada i -ésima. Además,

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} x_i^2.$$

¿Se tiene algo análogo en \mathcal{L}^2 , es decir, $\|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\text{coeficientes})^2$?

Podemos reescribir las relaciones de ortogonalidad:

$$\left\langle \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), 1 \right\rangle = \left\langle \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), 1 \right\rangle = 0 \wedge \left\langle \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \cos\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \right\rangle = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ L, & k = j \end{cases}$$

$$\left\langle e^{i\frac{k\pi}{L}x}, e^{i\frac{j\pi}{L}x} \right\rangle = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 2L, & k = j \end{cases}$$

Tenemos los sistemas ortogonales de $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$:

$$\left\{ 1, \cos \frac{k\pi}{L}x, \sin \frac{k\pi}{L}x \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \left\{ e^{i\frac{k\pi}{L}x} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Calculamos las normas de estas funciones:

$$\|1\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\int_{-L}^L 1 \, dx \right)^{1/2} = \sqrt{2L} \wedge \left\| \cos \frac{k\pi}{L}x \right\|_{\mathcal{L}^2} = \left\| \sin \frac{k\pi}{L}x \right\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{L} \wedge \left\| e^{i\frac{k\pi}{L}x} \right\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{2L}.$$

Entonces tenemos los siguientes sistemas ortonormales de $\mathcal{L}^2([-L, L])$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{\cos \frac{k\pi}{L}x}{\sqrt{L}}, \frac{\sin \frac{k\pi}{L}x}{\sqrt{L}} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{k\pi}{L}x} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}. \\ \Rightarrow & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \\ & = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2L}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2L}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle f(x), \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}{\sqrt{L}} \right\rangle \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}{\sqrt{L}} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle f(x), \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}{\sqrt{L}} \right\rangle \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}{\sqrt{L}}. \\ \Rightarrow & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{i\frac{k\pi}{L}x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle f(x), \frac{e^{i\frac{k\pi}{L}x}}{\sqrt{2L}} \right\rangle \frac{e^{i\frac{k\pi}{L}x}}{\sqrt{2L}} \end{aligned}$$

Definición 3.4.8. Sea $\{\phi_k\}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{L}^2([a, b])$ y sea $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$

- $\langle f, \phi_k \rangle \phi_k$ es la **proyección** de f sobre ϕ_k .
- $\langle f, \phi_k \rangle$ es el k -ésimo **coeficiente** de Fourier respecto al sistema ortonormal $\{\phi_k\}$.
- $\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k$ es la **serie de Fourier** de f respecto a $\{\phi_k\}$.
- $S_N = \sum_{k=1}^N \langle f, \phi_k \rangle \phi_k$ es la N -ésima **suma parcial** de f .

3.5 Propiedades de las sumas parciales

Proposición 3.5.1. Sea $\{\phi_k\}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{L}^2([a, b])$ y $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$

$$\implies \langle S_n f, f \rangle = \sum_{k=1}^n |\langle f, \phi_k \rangle|^2.$$

Demostración: Dividimos en dos casos: f real o compleja.

$$\begin{aligned} - \langle S_N g, f \rangle &= \int_a^b (S_N g(x)) \cdot f(x) \, dx = \sum_{k=1}^N \langle f, \phi_k \rangle \int_a^b \phi_k(x) g(x) \, dx = \sum_{k=1}^N |\langle f, \phi_k \rangle|^2. \\ - \langle S_N f, f \rangle &= \int_a^b (S_N f(x)) \cdot \overline{f(x)} \, dx = \sum_{k=1}^N \langle f, \phi_k \rangle \int_a^b \phi_k(x) \overline{f(x)} \, dx \\ &= \sum_{k=1}^N \langle f_1, \phi_k \rangle \cdot \langle \phi_k, f \rangle = \sum_{k=1}^N \langle f_1, \phi_k \rangle \cdot \overline{\langle f, \phi_k \rangle} = \sum_{k=1}^N |\langle f, \phi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

■

Proposición 3.5.2. Sea $\{\phi_k\}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{L}^2([a, b])$ y $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$

$$\implies \langle S_N f, S_N f \rangle = \sum_{k=1}^N |\langle f, \phi_k \rangle|^2.$$

Demostración:

■

Proposición 3.5.3. Sea $\{\phi_k\}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{L}^2([a, b])$ y $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$

$$\implies S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k \text{ en } \mathcal{L}^2([a, b]).$$

3.6 Ecuación de Laplace en el disco

Consideramos la siguiente EDP con condiciones Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0 & \text{en } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \\ u = f & \text{en } \partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \end{cases}$$

donde f es una función continua y Δ es el operador laplaciano.

La simetría radial del dominio sugiere pasar a coordenadas polares: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Entonces definimos $\tilde{u}(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ y el problema se convierte en

$$\begin{cases} \tilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta} = 0 & \text{con } 0 < r < 1 \wedge \theta \in [0, 2\pi) \\ \tilde{u}(1, \theta) = f(\cos \theta, \sin \theta) =: \tilde{f}(\theta) & \text{con } \theta \in [0, 2\pi) \rightsquigarrow 2\pi\text{-periódica y continua.} \end{cases}$$

Ejercicio 3.6.1. Comprobar que $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \tilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta}$.

Buscamos una solución: $\tilde{u}(r, \theta)$ continua en $[0, 1] \times [0, 2\pi)$ que sea armónica y 2π -periódica.

Aplicamos separación de variables y buscamos $\tilde{u}(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$ con R continua y Φ continua y 2π -periódica. Entonces la ecuación queda

$$\begin{aligned} R''\Phi + \frac{R'}{r}\Phi + \frac{R}{r^2}\Phi'' = 0 & \iff \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda \implies \begin{cases} r^2R'' + rR' = \lambda R \\ -\Phi'' = \lambda\Phi \end{cases} \\ & \implies \begin{cases} \Phi'' = -\lambda\Phi \\ \Phi \text{ es } 2\pi\text{-periódica} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Si $\lambda = 0$, entonces $\Phi_0(\theta) = a\theta + b$

Definición 3.6.1 (Núcleo de Poisson). $P: [0, 1) \times [-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ es el núcleo de Poisson

$$\iff P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} r^{|k|} = \frac{1}{2\pi} \Re \left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right)$$

Definición 3.6.2 (Integral de Poisson).

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(s) P(r, \theta - s) ds$$

Teorema 3.6.1 (de Poisson). Sea f continua y 2π -periódica

$$\implies \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cdot P(r, \theta - s) ds \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f(\theta) \text{ uniformemente en } [-\pi, \pi].$$

Demostración: Queremos probar que $\sup_{\theta \in [-\pi, \pi]} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P(r, \theta - s) ds - f(\theta) \right| \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P(r, \theta - s) ds - f(\theta) \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P(r, \theta - s) ds - f(\theta) \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) ds \right| \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(s) - f(\theta)) P(r, \theta - s) ds \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(s) - f(\theta)| P(r, \theta - s) ds. \end{aligned}$$

Para r próximo a 1, P es muy grande si $|\theta - s| \sim 0$ y P es muy pequeño si $|\theta - s|$ grande. Por tanto, el argumento debe ser distinto en cada una de las regiones.

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\int_{|\theta-s| \leq \alpha} |f(s) - f(\theta)| P(r, \theta - s) ds}_{(A)} + \underbrace{\int_{|\theta-s| > \alpha} |f(s) - f(\theta)| P(r, \theta - s) ds}_{(B)}. \\ &\quad (A) = \end{aligned}$$

■

Observación 3.6.3.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(s) P(r, \theta - s) ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k r^{|k|} e^{ik\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) r^k$$

Por tanto el teorema de Poisson es el primer teorema de convergencia en el que podemos **identificar el límite**.

4. El método de separación de variables. Estudio de problemas de contorno

5. Comportamiento cualitativo

H. Hojas de ejercicios

H.1 Introducción: Ecuaciones de primer orden

Bibliografía: Ejercicios extraídos de los libros de Salsa et al., 2013.

1. Estudiar la linealidad y establecer el orden para cada una de las EDP siguientes:

$$u_t - u_{xx} + 1 = 0$$

$$u_t - u_{xx} + xu = 0$$

$$u_t - u_{xxt} + uu_x = 0$$

$$u_{tt} - u_x + x^2 = 0$$

$$iu_t - u_{xx} + u_x = 0$$

$$u_x \sqrt{1 + u_x^2} + u_y \sqrt{1 + u_y^2} = 0$$

$$u_x + e^y u_y = 0$$

$$u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1 + u} = 0$$

2. Encontrar la evolución de la densidad $u(x, t)$ de una sustancia contaminante en un canal con velocidad constante del agua de 5 m/s que está limpio en tiempo $t = 0$ y con un aporte externo $f(x, t) = e^{-t} \sin x$ (utilizar el principio de Duhamel).

3. Resolver el modelo de evolución de la contaminación en un río, incluyendo un término de depuración natural proporcional a la concentración, que se rige por la ecuación

$$u_t + cu_x = -\gamma u,$$

donde γ es una constante positiva, con condiciones

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{si } x > 0, \quad u(0, t) = \beta(t) \quad \text{si } t > 0.$$

4. Considera el siguiente problema (con $c > 0$):

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x, t), & 0 < x < R, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < R. \end{cases}$$

Demostrar la siguiente estimación de estabilidad:

$$\int_0^R u^2(x, t) dx \leq e^t \int_0^t \int_0^R f^2(x, s) dx ds, \quad t > 0.$$

5. Estudiar el problema (Ecuación de Burgers):

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde los datos iniciales $g(x)$ son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad g(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} & \text{(c)} \quad g(x) &= \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases} \\ \text{(b)} \quad g(x) &= \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

6. Dibujar las características y describir la evolución cuando $t \rightarrow +\infty$ de la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x \leq 0 \text{ o } x \geq \pi. \end{cases} \end{cases}$$

7. Se da la ley de conservación

$$u_t + u^3 u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

asociada a la condición inicial:

$$u(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Encontrar la solución utilizando el método de las características (destacando ondas de rarefacción o de choque).

Solución: En este caso, como $u_t + u^3 u_x = u_t + [q(u(x, t))]_x$ se tiene que el flujo es $q(u) = u^4/4$. Por tanto, las características son las curvas $x(t)$ para las que $u'(x(t), t) = 0$,

es decir:

$$\begin{cases} u_t(x(t), t) + u^3(x(t), t)u_x(x(t), t) = 0, \\ u_x(x(t), t) \cdot x'(t) + u_t(x(t), t) = 0. \end{cases} \implies x'(t) = u^3(x(t), t) = [g(x_0)]^3.$$

Luego las rectas características son $x(t) = x_0 + t[g(x_0)]^3$:

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & t = 0, \\ x_0 + t, & x_0 \in (0, 1), \\ x_0, & x_0 \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

H.1.1 Modelos de tráfico

[8.] Apertura de un semáforo (en verde): Considera la siguiente modelización del tráfico con un semáforo en $x = 0$:

$$\begin{cases} u_t + \alpha \left(1 - \frac{2u}{\beta}\right) u_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = g(x) = \begin{cases} \beta, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

donde $u(x, t)$ representa la densidad de coches, $\alpha = v_m$ (máxima velocidad) y $\beta = u_m$ (máxima densidad). Hallar la densidad de coches u en el semáforo para $t > 0$. Calcular el tiempo que le lleva a un coche ubicado en $x_0 = -v_m t_0$ en llegar al semáforo ($x = 0$).

[9.] Atasco: Usar la dinámica del tráfico descrita en el problema anterior para describir la densidad $u(x, t)$ de los coches en una carretera recta, suponiendo que la densidad inicial es:

$$u_0(x) = \begin{cases} au_m, & x < 0, \\ \frac{u_m}{2}, & x > 0, \end{cases}$$

donde $a \in [0, 1]$. Describe, con respecto al parámetro a , la evolución de u para $t > 0$. Encuentra las características, la curva de choque y encuentra una solución en el semiplano (x, t) para $t > 0$. Dar una interpretación del resultado.

[10.] Tráfico en un túnel: Un modelo estándar que describe la velocidad del tráfico en un túnel viene dado por

$$v(u) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq u \leq \beta_0, \\ \lambda \log\left(\frac{\beta}{u}\right), & \beta_0 \leq u \leq \beta, \end{cases}$$

donde, como siempre, u indica la densidad del tráfico (medida en coches/km), α es la veloci-

dad máxima (km/h) y β la densidad máxima. Aquí β_0 es una densidad intermedia crítica (normalmente $\beta_0 < \beta/10$) por debajo de la cual los conductores pueden alcanzar la velocidad máxima y λ se toma para que v sea continua en $u = \beta_0$, es decir,

$$\alpha = \lambda \log \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right).$$

Se supone que hay un semáforo a la entrada del túnel (en $x = 0$) y que, por tanto, la densidad inicial en el momento de ponerse en verde ($t = 0$) es

$$u(x, 0) = g(x) = \begin{cases} \beta, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

- Escribe la ecuación en derivadas parciales que verifica la función de densidad de acuerdo al principio de conservación de masa.
- Describe las regiones del semiplano $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ que quedan cubiertas por las rectas características y determina el valor de u en cada una de ellas.
- Tras un proceso de rarefacción, determina los valores de u en la región no cubierta por las características (es posible que necesites dividir dicha región en subregiones).
- Para este último apartado usaremos los siguientes datos:

$$\alpha = 90 \text{ km/h}, \quad \beta = 110 \text{ coches/km}, \quad \beta_0 = 7 \text{ coches/km}, \quad \frac{\alpha}{\lambda} = 2.75.$$

Si un coche se encuentra parado a una distancia de 100 m del túnel:

- ¿Cuánto tardará en empezar a moverse después de que se abra el semáforo?
- Si $x(t)$ denota la trayectoria del coche anterior, describe la EDO que verifica antes de llegar al túnel.
- ¿Cuánto tardará en llegar a la entrada del túnel?

H.1.2 Ecuaciones casi-lineales:

[11.] Resolver el problema de Cauchy $u_x + u_y = u^2$, $u(x, 0) = 1$.

[12.] Resolver el problema de Cauchy $xu_x - yu_y = u - y$, $u(y^2, y) = y$. Estudiar si puede existir alguna solución definida en un entorno del origen.

Solución: Lo primero es prestar atención a la curva dato: $x = y^2$ o $\Gamma(s) = (s^2, s, s)$. Por

tanto, la condición de transversalidad es

$$\begin{vmatrix} s^2 & -s \\ 2s & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \iff s \neq 0.$$

Entonces, salvo en el origen, tenemos que el teorema de existencia y unicidad garantiza la existencia de una solución única en un entorno de Γ .

Para resolver la ecuación, estudiamos el sistema de características:

$$\begin{cases} x'(t) = x, \\ y'(t) = -y, \\ z'(t) = z - y. \end{cases} \implies \begin{cases} x(t, s) = s^2 e^t \\ y(t, s) = s e^{-t} \\ z(t, s) = \frac{s}{2} (e^t + e^{-t}) \end{cases} \quad \text{con } (x_0, y_0, z_0) = (s^2, s, s).$$

Como $x \cdot y = s^3$, las curvas características son hipérbolas. Entonces, cuando $s = 0$, tenemos que $x = 0 \vee y = 0$. Entonces, en un entorno del origen la curva dato corta a los dos ejes, que son características con distintos valores de u , por lo que no existe solución \mathcal{C}^1 en un entorno del origen.

- [13.] Resolver la ecuación $u_x + 3y^{213}u_y = 2$ sujeta a la condición inicial $u(x, 0) = \psi(x)$.
- [14.] Resolver la ecuación $(y + u)u_x + yu_y = x - y$ sujeta a la condición inicial $u(x, 1) = 1 + x$.
- [15.] Se considera la ecuación $yu_x - xu_y = 0$ ($y > 0$). Para cada uno de los siguientes datos iniciales:
- (a) $u(x, 0) = x^2$,
 - (b) $u(x, 0) = x$,
 - (c) $u(x, 0) = x, x > 0$,
- comprobar si el problema tiene solución. Si la tiene, encontrarla; si no la tiene, explicar por qué.
- [16.] Resolver la ecuación $u_y + u^2u_x = 0$ en $x > 0$ bajo la condición inicial $u(x, 0) = \sqrt{x}$. ¿Cuál es el dominio de existencia de la solución?
- [17.] Resolver el problema de Cauchy $xu_x + yu_y = -u, u(\cos s, \sin s) = 1, 0 \leq s \leq \pi$. ¿Está la solución definida en todas partes?
- [18.] (a) Encontrar una función $u = u(x, y)$ que resuelva el problema de Cauchy $(x + y^2)u_x + yu_y + \left(\frac{x}{y} - y\right)u = 1, u(x, 1) = 0, x \in \mathbb{R}$.
- (b) Comprobar si se cumple la condición de transversalidad.

- (c) Dibujar las proyecciones sobre el plano (x, y) de las condiciones iniciales y de las características que emanan de los puntos $(2, 1, 0)$ y $(0, 1, 0)$.
- (d) ¿Está la solución obtenida en (a) definida en el origen $(x, y) = (0, 0)$? ¿Contradice esto al teorema de existencia-unicidad?

Bibliografía

Salsa, S., Vegni, F. M. G., Zaretti, A., & Zunino, P. (2013). *A Primer on PDEs: Models, Methods, Simulations*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-88-470-2862-3>

Referenciado en

- Asignaturas