Hugo Marquerie 14/03/2025

Todo espacio L^p es una espacio normado

Lema 1. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $p \in [1, \infty]$*

$$\implies L^p := \mathcal{L}^p/\sim \text{ es un espacio vectorial normado con la norma } p\text{-ésima } \|\cdot\|_p$$

donde $\forall f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) : f \sim g \iff f = g$ c.t.p..

***Demostración*:** El `Lem-esp-lp-vectorial/??` nos dice que $\mathcal{L}^p(\mu)$ es un espacio vectorial. Por lo tanto, L^p también lo es (con las operaciones bien definidas inducidas).

Basta comprobar las propiedades de la definición de norma:

(i) $\forall f \in L^p : \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \geq 0 \wedge \|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ c.t.p.}$

(ii) $\forall f \in L^p : \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C} : \|\lambda f\|_p = \left(\int_X |\lambda f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = |\lambda| \, \|f\|_p.$

(iii) $\forall f, g \in L^p : \|f + g\|_p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Minkowski}}}{\leq} \|f\|_p + \|g\|_p.$

■

Referenciado en

- `Teo-esp-lp-banach`