Hugo Marquerie 26/01/2025

Teorema de convergencia monótona

Teorema 1 (de convergencia monótona para conjuntos). *Sea* (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ *una sucesión creciente (i.e.* $\forall n \in \mathbb{N} : E_n \subset E_{n+1}$*)*

$$\implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right)$$

***Demostración*:** Definimos $F_1 = E_1$ y $\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+1} = E_{n+1} \setminus E_n$. Entonces la sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de conjuntos μ-medibles disjuntos. Si definimos $E_0 = \varnothing$, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &\mu(E_n) = \mu((E_n \setminus E_{n-1}) \sqcup E_{n-1}) \overset{\substack{\text{aditividad} \\ \downarrow}}{=} \mu(E_n \setminus E_{n-1}) + \mu(E_{n-1}) \\ \iff\ &\mu(E_n) - \mu(E_{n-1}) = \mu(E_n \setminus E_{n-1}) = \mu(F_n) \end{aligned}$$

Por tanto, como $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n$:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \overset{\substack{\text{aditividad} \\ \downarrow}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(E_n) - \mu(E_{n-1})\right) \overset{\substack{\text{suma telescópica} \\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

■

Teorema 2 (de convergencia monótona para funciones). *Sea* (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión creciente de funciones medibles no negativas*

$$\implies \forall E \in \Sigma : \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu$$

***Demostración*:** $\forall x \in X, n \in \mathbb{N} : f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \implies \forall x \in X : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ y f es medible por serlo todas las f_n. ■

Referenciado en

- `Quijote-infinito`
- `Lem-fatou`
- `Prop-esperanza-fn`