PROBABILIDAD II

Tercero del Grado en Matemáticas

Hugo Marquerie

Profesor: José Manuel Conde Alonso
Facultad de Ciencias - Universidad Autónoma de Madrid
Segundo cuatrimestre 2024 - 2025

28 de enero, 2025

Índice

1. Espacios de probabilidad

1.1 Introducción

Definición 1.1.1 (Espacio de probabilidad). La tripleta $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad $\iff$ $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ es un espacio de medida con $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Definición 1.1.2 (Suceso). $A \subset \Omega$ es un suceso $\iff$ $A \in \Sigma$.

Ejemplos 1.1.1 (de espacios de probabilidad).

$\boxed{1}$ $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ y $\mathbb{P}$ dada por $\forall j \in \mathbb{N}_n : \mathbb{P}(j) = \frac{1}{n}$.

Observación 1.1.3. No existe ninguna medida de probabilidad uniforme sobre $\mathbb{N}$[1].

$\boxed{2}$ $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ y $\mathbb{P}$ dada por $\forall j \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(j) = 2^{-j}$.

$\boxed{3}$ $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$, donde m es la medida de Lebesgue.

$\boxed{4}$ $([0,1], \mathcal{L}([0,1]), m)$, donde $\mathcal{L}([0,1])$ es la completación de $\mathcal{B}([0,1])$.

Ejercicio 1.1.2. Comprobar que γ dada por la función de densidad $\mathrm{d}\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$ es una medida de probabilidad.

***Solución*:** Como $\mathrm{d}\gamma$ es una función positiva, basta ver que $\gamma(\mathbb{R}) = 1$, es decir, que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\gamma = 1$ o equivalentemente que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\gamma(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Definimos $I := \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$, entonces $I^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y\right)$.

$$\begin{aligned}
\implies I^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-0 + e^0\right) \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi \implies I = \sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

Como $I = \sqrt{2\pi}$, entonces $\gamma(\mathbb{R}) = \frac{I}{\sqrt{2\pi}} = 1$ y por tanto γ es una medida de probabilidad. ■

Ejercicio 1.1.3. Comprobar que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \gamma_n)$ con $\mathrm{d}\gamma_n(x) = c_n e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} \,\mathrm{d}x$ es un espacio de probabilidad y calcular c_n.

***Solución*:** Tenemos que para $n = 1$, γ_1 es una medida de probabilidad con $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ por el Ejercicio 1.1.2 anterior. Supongamos por inducción que γ_n es una medida de probabilidad

[1] El apartado 21b del ejercicio de ampliación 21 de la Hoja 1 consiste en demostrar este hecho.

con $c_n = (2\pi)^{-n/2}$. Ahora consideramos el caso $n+1$: Sea $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, se tiene que $\mathrm{d}\gamma_{n+1}(x) = c_{n+1} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2} \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{n+1}$ y por tanto

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}) &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^{n+1}} c_{n+1} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2} \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{n+1} \\ &= c_{n+1} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_{n+1}^2}{2}} \,\mathrm{d}x_{n+1} \right) \left(\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \right).\end{aligned}$$

Como, por hipótesis de inducción, $\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = (2\pi)^{n/2}$, entonces

$$\gamma_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}) \overset{\substack{\text{H.I.}\\ \downarrow}}{=} c_{n+1}(2\pi)^{n/2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_{n+1}^2}{2}} \,\mathrm{d}x_{n+1} \right) \overset{\substack{1.1.2\\ \downarrow}}{=} c_{n+1}(2\pi)^{n/2}\sqrt{2\pi} = c_{n+1}(2\pi)^{n+1/2}.$$

Por tanto, $c_{n+1} = (2\pi)^{-n+1/2}$ y γ_{n+1} es una medida de probabilidad. Por inducción, $\forall n \in \mathbb{N} : \gamma_n$ es una medida de probabilidad con $c_n = (2\pi)^{-n/2}$. ■

Ejercicio 1.1.4. Comprobar que la medida α dada por la densidad $\mathrm{d}\alpha(x) = c_0 \frac{1}{|x|} \mathbb{1}_{\{|x|>1\}}(x)$ no es una medida de probabilidad.

***Solución*:** Como $\mathrm{d}\alpha$ es una función positiva (para $c_0 > 0$), basta ver que su integral en $\mathbb{R}$ es infinita para cualquier valor de $c_0 > 0$.

$$\frac{1}{c_0}\alpha(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|} \cdot \mathbb{1}_{\{|x|>1\}}(x) \,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = 2\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = 2\log(x)\Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Como $\forall c_0 > 0 : \alpha(\mathbb{R}) = \infty$, entonces α no es una medida de probabilidad. ■

Ejercicio 1.1.5 (de espacio de probabilidad "nuevo"). Sea $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$ donde $\mu = \mu_1 + \mu_2$ con $\mu_1 = \frac{1}{2} m\big|_{[0,1]}$ y $\mu_2\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = 2^{-n-1}$, $\mu_2(A) = 0$ si $A \cap \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} = \varnothing$. Demuestra que μ es una medida de probabilidad.

***Solución*:** Como μ_1 y μ_2 son medidas positivas, μ también lo es, por tanto, basta ver que $\mu([0,1]) = 1$. Claramente $\mu_1([0,1]) = \frac{1}{2}$, por lo que hay que probar que $\mu_2([0,1]) = \frac{1}{2}$.

$$\mu_2\left([0,1]\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, $\mu([0,1]) = \mu_1([0,1]) + \mu_2([0,1]) = 1$ y μ es una medida de probabilidad. ■

Definición 1.1.4 (Función medible). Sea (X, Σ) un espacio medible, $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función medible $\iff \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \in \Sigma$.

Definición 1.1.5 (Variable aleatoria). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, la aplicación $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria $\iff X$ es medible respecto a $\mathbb{P}$.

A partir de este punto supondremos que estamos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$.

Lema 1.1.1. *Sea X una v.a. y definimos $\mu_X \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$ dada por $\mu_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$*

$$\Longrightarrow \ \mu_X \text{ es una medida de probabilidad en el epacio medible } (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

*a esta medida μ_X se le llama **medida inducida** por X.*

***Demostración*:** Comprobemos las condiciones de la definición de medida:

i) $\mu_X(\varnothing) = \mathbb{P}(X \in \varnothing) = 0$.

ii) Sean $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjuntos dos a dos, entonces

$$\begin{aligned}\mu_X\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= \mathbb{P}\left(X \in \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right\}\right) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{unión disjunta}}}{=} \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_n\}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X \in B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_X(B_n).\end{aligned}$$

Como μ_X es positiva (porque $\mathbb{P}$ lo es), basta ver que $\mu_X([0,1]) = 1$.

$$\mu_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbb{R}\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Por tanto, μ_X es una medida de probabilidad. ■

Definición 1.1.6 (Función de distribución). Sea X una v.a., $F_X \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ es la función de distribución de X $\iff \forall x \in \mathbb{R} : F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Proposición 1.1.2 (Propiedades de F_X). *Sea F_X fn de distribución de X, entonces*

(1) $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1 \wedge \lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$.

(2) $\forall t \in \mathbb{R} : \lim_{\substack{s\to t \\ s>t}} F_X(s) = F_X(t)$.

(3) $\forall t \in \mathbb{R} : \lim_{\substack{s\to t \\ s<t}} F_X(s) = \mathbb{P}(X < t)$

(4) $\forall t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = t) = F_X(t) - \lim_{\substack{s\to t \\ s<t}} F_X(s)$.

***Demostración*:** Recordamos la definición: $F_X(t) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}\right)$

1. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to \infty$, definimos $\forall n \in \mathbb{N} : A_n := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t_n\}$ y la sucesión de funciones medibles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $f_n := \mathbb{1}_{A_n}$. Entonces, como $\forall \omega \in \Omega : f_n(\omega) \leq 1$ y $\int_\Omega 1 \, d\mathbb{P} = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ (luego $1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$), podemos aplicar el

teorema de la convergencia dominada a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} F_X(t_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{A_n}\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mathbb{P} \overset{\substack{\text{TCD}\\ \downarrow}}{=} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}\mathbb{P}$$
$$= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\Omega\right) = 1.$$

Análogamente, si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ cumple que $t_n \to -\infty$, podemos definir A_n y f_n como antes y aplicar el teorema de la convergencia dominada de igual manera:

$$\lim_{n\to\infty} F_X(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mathbb{P} \overset{\substack{\text{TCD}\\ \downarrow}}{=} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\varnothing\right) = 0.$$

2. Sea $t \in \mathbb{R}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $t_n \to t$ con $\forall n \in \mathbb{N} : t_n > t$. Definimos A_n y f_n como antes y aplicamos el teorema de la convergencia dominada de nuevo:

$$\lim_{n\to\infty} F_X(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mathbb{P} \overset{\substack{\text{TCD}\\ \downarrow}}{=} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}\right) = \mathbb{P}\left(X \leq t\right) = F_X(t).$$

3. Sea $t \in \mathbb{R}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $t_n \to t$ con $\forall n \in \mathbb{N} : t_n < t$.

■

Proposición 1.1.3. *Sea* $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *monótona no decreciente que cumple* (1), (2) *y* (3)

$$\Longrightarrow \exists\,(\Omega,\Sigma,\mathbb{P}) \text{ espacio de probabilidad} : \exists X \text{ v.a.} : \forall t \in \mathbb{R} : F_X(t) = F(t).$$

***Demostración*:** Consideramos en el espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$ la variable aleatoria $X\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\forall \omega \in [0,1] : X(\omega) = \sup\{t \in \mathbb{R} : F(t) < \omega\}$.

$$\Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : m\left(\{\omega \in \mathbb{R} : X(\omega) \leq t\}\right) = m\left(\{\omega \in \mathbb{R} : \sup\{s \in \mathbb{R} : F(s) < \omega\} \leq t\}\right)$$
$$= m\left(\{\omega \in \mathbb{R} : \omega \leq F(t)\}\right) = F(t).$$

Por tanto, $\forall t \in \mathbb{R} : F_X(t) = m\left(\{\omega \in \mathbb{R} : X(\omega) \leq t\}\right) = F(t)$[2]. ■

Definición 1.1.7 (Igualdad en distribución). Sean X e Y dos variables aleatorias en dos espacios de probabilidad, son iguales en distribución

$$\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : F_X(t) = F_Y(t) \iff \mu_X = \mu_Y \iff X \overset{d}{=} Y.$$

Ejemplo 1.1.6 (de variables aleatorias iguales en distribución).

[2]También se puede definiendo X como la identidad en el espacio de medida dado por la medida de Lebesgue-Stieltjes.

Consideramos los espacios de probabilidad

$$(\Omega_1, \Sigma_1, \mathbb{P}_1) = (\{1,2\}, \mathcal{P}(\{1,2\}), |\cdot|) \text{ y } (\Omega_2, \Sigma_2, \mathbb{P}_2) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$$

y las variables aleatorias $X\colon \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $X(1) = 0$ y $X(2) = 1$ e $Y\colon \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $Y(\omega) = 0$ si $\omega \leq {}^1\!/_2$ y $Y(\omega) = 1$ si $\omega > {}^1\!/_2$.

Entonces, $X \stackrel{d}{=} Y$.

Definición 1.1.8 (Variable aleatoria continua). Sea X una variable aleatoria en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, X es (absolutamente) continua

$$\iff \mu_X \text{ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue}$$

donde $\mu_X\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$ viene dada por $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mu_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$.

Definición 1.1.9 (Función de densidad). Sea X una v.a. en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, $f_X\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \in \mathcal{L}^1(m)$ es la función de densidad de X

$$\iff \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definición 1.1.10 (Variable aleatoria discreta). Sea X una variable aleatoria en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, X es discreta

$$\iff \exists S \subset \mathbb{R} \text{ numerable } : \mathbb{P}(X \notin S) = 0.$$

Definición 1.1.11 (Función de masa). Sea X una v.a. discreta en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, $p_X\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ es la función de masa de X

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} : p_X(t) = \mathbb{P}(X = t).$$

Lema 1.1.4. *Sea X una v.a. con función de distribución $F_X \in \mathcal{C}^1$*

$$\implies X \textit{ es absolutamente continua con función de densidad } f_X = F_X'.$$

***Demostración*:** Tenemos que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mu_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$. Si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ cumple que $m(E) = 0$, entonces $\mu_X(E) = \mathbb{P}(X \in E) = 0$ ya que F_X es continua y por tanto $\mathbb{P}(X = x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Lema 1.1.5. *Sea X una v.a. continua con función de densidad f_X tal que $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = 1$ y sea $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ estrictamente creciente

$$\Longrightarrow \begin{array}{rl} g(X)\colon \Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto g(X(\omega)) \end{array} \text{ es una v.a. continua con función de densidad } f_{g(X)}(t)$$

donde $\quad \forall t \in \mathbb{R} : f_{g(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{f_X\left(g^{-1}(t)\right)}{g'\left(g^{-1}(t)\right)} & \text{si } g(\alpha) \leq t \leq g(\beta) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

***Demostración*:** ■

Definición 1.1.12. Sea $X \neq \varnothing$ y $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma(f)$ es la σ-álgebra generada por f

$$\Longleftrightarrow \sigma(f) = \left\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\} = \left\{\{x \in X : f(x) \in E\} : E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}.$$

Es decir, $\sigma(f)$ es la σ-álgebra más pequeña que hace a f medible.

Definición 1.1.13 (Vector aleatorio). Sea $(X, \Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, la aplicación $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un vector aleatorio $\iff$ X es medible respecto a $\mathbb{P}$.

Ejercicio 1.1.7. Sean $X_1, \ldots, X_n\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ v.a. en un esp. de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$.

(a) Demuestra que $\begin{array}{rl} X\colon \Omega & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega & \longmapsto (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{array}$ es un vector aleatorio.

(b) Demuestra que $\begin{array}{rl} X_1 + \cdots + X_n\colon \Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega) \end{array}$ es una variable aleatoria.

Definición 1.1.14 (Probabilidad conticionada). Sean $A, B \in \Sigma$ dos sucesos con $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $\mathbb{P}(A \mid B)$ es la probabilidad condicionada de A dado B

$$\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Teorema 1.1.6 (Probabilidad total). *Sea $(X, \Sigma, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ una partición de Ω tal que $\forall i \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(A_i) \neq 0$*

$$\Longrightarrow \forall B \in \Sigma : \mathbb{P}(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B \mid A_i).$$

***Demostración*:** Sea $B \in \Sigma$, entonces $B = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} B \cap A_i$, y por la `Probabilidad-condicionada/`Definició

$$\mathbb{P}(B) \overset{\substack{\text{aditividad} \\ \downarrow}}{=} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_i) \overset{\substack{\text{def} \\ \downarrow}}{=} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B \mid A_i).$$

■

Teorema 1.1.7 (de Bayes). *Sea* $(X, \Sigma, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* $A, B \in \Sigma$

$$\implies \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

***Demostración*:** Por la `Probabilidad-condicionada/`Definición 1:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \wedge \quad \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Luego despejando $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)$

$$\implies \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

■

1.2 Independencia

Definición 1.2.1 (Sucesos independientes). Sea $(X, \Sigma, \mathbb{P})$ un esp de probabilidad y $A, B \in \Sigma$ dos sucesos, A y B son independientes

$$\iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Definición 1.2.2 (Variables independientes). Sean X e Y dos v.a. en un esp de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, X e Y son independientes

$$\iff \forall E_1, E_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \{X \in E_1\} \text{ y } \{Y \in E_2\} \text{ son independientes.}$$

Definición 1.2.3 ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebras independientes). Sea $(X, \Sigma, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \Sigma$ dos σ-álgebras, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son independientes

$$\iff \forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} : \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Lema 1.2.1. *Sean* X *e* Y *dos variables aleatorias independientes*

$$\iff \sigma(X) \text{ y } \sigma(Y) \text{ son } \sigma\text{-álgebras independientes.}$$

***Demostración*:** Como X e Y son independientes,

$$\forall E_1, E_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mathbb{P}\left((X \in E_1) \cap (Y \in E_2)\right) = \mathbb{P}\left(X \in E_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y \in E_2\right).$$

Sean $A_1 \in \sigma(X) \iff \exists E_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A_1 = X^{-1}(E)$.
Análogamente, sea $A_2 \in \sigma(Y) \iff \exists E_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A_2 = Y^{-1}(E)$.

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right) = \mathbb{P}\left(\{X \in E_1\} \cap \{Y \in E_2\}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indep}}}{=} \mathbb{P}\left(X \in E_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y \in E_2\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}\left(A_2\right)$$

$\blacksquare$

Lema 1.2.2. *Sean $\Sigma, \mathcal{F}$ dos σ-álgebras independientes y $X, Y : \Omega, \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos v.a.*

$$\Longrightarrow X \text{ e } Y \text{ son variables independientes.}$$

***Demostración*:** Tenemos que $\forall E_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \{X \in E_1\} \in \mathcal{F}$ y $\forall E_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \{Y \in E_2\} \in \Sigma$ y $\forall A \in \mathcal{F}, B \in \Sigma : \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{X \in E_1\} \cap \{X \in E_2\}) = \mathbb{P}(X \in E_1) \cdot \mathbb{P}(Y \in E_2) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

$\blacksquare$

Definición 1.2.4 (Sucesos independientes). Sean $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ sucesos en $(X, \Sigma, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $A_1, \ldots, A_n$ son independientes

$$\Longleftrightarrow \forall J \subset \{1, \ldots, n\} : \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in I} \mathbb{P}(A_j).$$

Definición 1.2.5 (σ-álgebras independientes). Sea $(X, \Sigma, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, las σ-álgebras $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \subset \Sigma$ son independientes

$$\Longleftrightarrow \forall A_1 \in \Sigma_1, \ldots, A_n \in \Sigma_n : \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)^3.$$

Definición 1.2.6 (Varieables independientes). Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, $X_1, \ldots, X_n$ son independientes

$$\Longleftrightarrow \sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_n) \text{ son independientes.}$$

Definición 1.2.7. Una familia de objetos (σ-álgebras, variables aleatorias, sucesos) es independiente $\Longleftrightarrow$ cada subfamilia finita lo es.

Definición 1.2.8. Una familia de objetos (σ-álgebras, variables aleatorias, sucesos) es independiente 2 a 2 $\Longleftrightarrow$ cada subfamilia de 2 elementos lo es.

1.2.1 Criterios de independencia

Definición 1.2.9 (π-sistema). Sea $P \subset \mathcal{P}(\Omega)$, es un π-sistema $\Longleftrightarrow$

(i) $P \neq \varnothing$.

[3] Esta definición es equivalente a pedir que $\forall J \subset \{1, \ldots, n\} : \forall A_j \in \Sigma_j : \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$ ya que $\Omega \in \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$.

(ii) Cerrado bajo intersección: $\forall A, B \in P : A \cap B \in P$.

Definición 1.2.10 (π-sistemas independientes). Sea $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ un esp de probabilidad, los π-sistemas $S_1, \ldots, S_n \subset \Sigma$ son independientes

$$\iff \forall A_1 \in S_1, \ldots, A_n \in S_n : \forall J \subset \mathbb{N}_n : \{A_j\}_{j \in J} \text{ son independientes.}$$

Definición 1.2.11 (λ-sistema). Sea $L \subset \mathcal{P}(\Omega)$, es un λ-sistema $\iff$

(i) $\Omega \in L$.

(ii) $A, B \in L \wedge A \subset B \implies B \setminus A \in L$.

(iii) $\forall \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L$ creciente : $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in L$.

Teorema 1.2.3. *Sea P un π-sistema y L un λ-sistema de Ω con $P \subset L \implies \sigma(P) \subset L$.*

***Demostración*:** En **durrettProbabilityTheoryExamples2019** apéndice 1. ■

Proposición 1.2.4. *Sean $S_1, \ldots, S_n$ π-sistemas independientes*

$$\implies \sigma(S_1), \ldots, \sigma(S_n) \textit{ son independientes.}$$

***Demostración*:** Fijamos $A_2 \in S_2, \ldots, A_n \in S_n$ y definimos

$$F := \bigcap_{j=2}^{n} A_j \quad \wedge \quad L_F := \{A \in \Sigma : \mathbb{P}(A \cap F) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\}.$$

Veamos que (i) $S_1 \subset L$ y (ii) L es un λ-sistema:

(i) Sea $A_1 \in S_1$, entonces

$$\mathbb{P}(A_1 \cap F) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) \overset{\text{indep.}}{\overset{\downarrow}{=}} \prod_{j \in \mathbb{N}_n} \mathbb{P}(A_j) \overset{\text{indep.}}{\overset{\downarrow}{=}} \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=2}^{n} A_j\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(F).$$

Luego $A_1 \in L$ y, por tanto, $S_1 \subset L$.

(ii) Comprobamos las propiedades de la definición de λ-sistema:

(a) $\mathbb{P}(\Omega \cap F) = \mathbb{P}(F) = 1 \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(\Omega) \cdot \mathbb{P}(F) \implies \Omega \in L$.

(b) $\mathbb{P}([B \setminus A] \cap F) = \mathbb{P}([B \cap F] \setminus [A \cap F]) = \mathbb{P}(B \cap F) - \mathbb{P}(A \cap F) \overset{A, B \in L}{\overset{\downarrow}{=}} \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(B \setminus A) \cdot \mathbb{P}(F) \implies B \setminus A \in L$.

(c) $\mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right] \cap F\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_j \cap F)\right) = \lim_{j \to \infty} \mathbb{P}(A_j \cap F) = \lim_{j \to \infty} \mathbb{P}(A_j) \cdot \mathbb{P}(F) =$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right)\cdot\mathbb{P}(F) \implies \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in L.$$

■

Corolario 1.2.5. *Sean $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias, entonces $\forall t_1,\dots,t_n\in\mathbb{R}$:*

$$\mathbb{P}\left(\{X_1\le t_1\}\cap\cdots\cap\{X_n\le t_n\}\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i\le t_i\right) \iff \{X_j\}_{j=1}^{n} \text{ son independientes.}$$

***Demostración*:** Definimos $S_j=\{\{X_j\in(-\infty,t]\} : t\in\mathbb{R}\}$, entonces

1. $\forall j\in\mathbb{N}_n : S_j$ es un π-sistema y
2. los S_j son independientes.

Por la `Prop-indep-pi-sistemas-imp-indep-sigma-algebras/`Proposición 1, $\sigma(S_1),\dots,\sigma(S_n)$ son independientes. Por otro lado, $\forall j\in\mathbb{N}_n : \sigma(S_j)=\sigma(X_j)$. Por tanto, $X_1,\dots,X_n$ son independientes. ■

Corolario 1.2.6. *Sea $n\in\mathbb{N}$ y $\forall i\in\mathbb{N} : m(i)\in\mathbb{N}$, entonces*

1. $\{X_{i,j}\}_{i,j=1}^{n,m(i)}$ *son variables aleatorias independientes*

2. $\forall i\in\mathbb{N}_n : f_i\colon \mathbb{R}^{m(i)}\longrightarrow\mathbb{R}$ *medible.*

$$\implies \left\{f_i(X_{i,1},\dots,X_{i,m(i)})\right\}_{i=1}^{n} \text{ son independientes.}$$

***Demostración*:** Se deja como ejercicio. ■

2. Esperanza matemática

2.1 Definiciones y propiedades básicas

Definición 2.1.1 (Esperanza). Sea $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ una variable aleatoria, $\mathbb{E}[X]$ es la esperanza de X

$$\iff \mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega).$$

Proposición 2.1.1. *Sea $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ medible (Borel) y $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria*

$$\implies \mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_\mathbb{R} g(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t).$$

***Demostración*:** Dividiremos la demostración en pasos:

1. Consideramos primero $g = \mathbb{1}_A$, con $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces $g(X) = \mathbb{1}_A(X)$

$$\begin{aligned}\implies \mathbb{E}[g(X)] &= \int_\Omega \mathbb{1}_A(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \mathbb{1}_{\{X(\omega)\in A\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\\ &= \mathbb{P}(X\in A) = \mu_X(A) = \int_\mathbb{R} \mathbb{1}_A(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t) = \int_\mathbb{R} g(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t).\end{aligned}$$

2. Por tanto, si $g = \sum_j \alpha_j \mathbb{1}_{E_j}$ es simple, entonces por linealidad de la integral:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g(X)\right] &= \int_\Omega g(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{E_j}(X(\omega))\right)\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_\Omega \mathbb{1}_{E_j}(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_\mathbb{R} \mathbb{1}_{E_j}(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t) = \int_\mathbb{R}\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{E_j}(t)\right)\mathrm{d}\mu_X(t) = \int_\mathbb{R} g(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t).\end{aligned}$$

3. Entonces, si g es medible no negativa, por un lema técnico, $\exists\,(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión no decreciente de funciones simples tales que $\forall t \in \mathbb{R} : \lim s_n(t) = g(t)$, entonces por convergencia monótona:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g(X)\right] &= \int_\Omega g(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int \lim_{n\to\infty} s_n(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\\ &\overset{\substack{\text{TCM}\\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty}\int s_n(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \lim_{n\to\infty}\int s_n(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t) \overset{\substack{\text{TCM}\\ \downarrow}}{=} \int g(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t).\end{aligned}$$

4. Finalmente, si g es medible arbitraria, entonces $g = g^+ - g^-$, con g^+, g^- medibles no

negativas, y por linealidad de la integral:

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t) = \int_{\mathbb{R}} g^+(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t) - \int_{\mathbb{R}} g^-(t)\,\mathrm{d}\mu_X(t) = \mathbb{E}\left[g^+(X)\right] - \mathbb{E}\left[g^-(X)\right] = \mathbb{E}\left[g(X)\right].$$

■

Corolario 2.1.2. $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t\,\mathrm{d}\mu_X(t)$.

***Demostración*:** Tomamos $g(t) = t$ en la `Prop-esperanza-fn/`Proposición 1 anterior. ■

Definición 2.1.2 (Varianza). Sea $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria con $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, $\mathbb{V}(X)$ es la varianza de $X \iff \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big[\,|X - \mathbb{E}[X]|^2\,\big]$.

Observación 2.1.3. La varianza es siempre no negativa. **(Motivo de excomunión)**

Proposición 2.1.3 (Fórmula de la varianza). *Sea $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria con $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$*

$$\implies \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2.$$

***Demostración*:** Se deja como ejercicio. ■

Definición 2.1.4 (Momento). Sea $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria, $\mathbb{E}[|X|^p]$ es el momento de orden p de X.

Definición 2.1.5 (Norma p-ésima). Sea $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria y $p \in \mathbb{R}^+$, $\|X\|_p$ es la norma p-ésima de X

$$\iff \|X\|_p = \left(\mathbb{E}[|X|^p]\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definición 2.1.6 (Espacio $\mathcal{L}^p$). Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $p \in [1, \infty]$, definimos

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{f\colon X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible} \wedge \|f\|_p < \infty\right\}.$$

Definición 2.1.7 (Función convexa). Sea $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, ϕ es convexa

$$\iff \forall a, b \in \mathbb{R}, \lambda \in [0,1] : \varphi\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leq (1-\lambda)\varphi(a) + \lambda\varphi(b).$$

Proposición 2.1.4. *Sea $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función*

1. $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \implies \varphi$ *es convexa* $\iff \varphi'$ *es creciente.*
2. $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \implies \varphi$ *es convexa* $\iff \varphi'' \geq 0$.

Proposición 2.1.5 (Desigualdad de Jensen). *Sea $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y*

$\varphi, \varphi(X) \in \mathcal{L}^1(\mu_X)$ *con* $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *una variable aleatoria* $\implies \varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$.

***Demostración*:** Vamos a asumir que $\varphi \in \mathcal{C}^1$. Sea A la recta tangente a φ en $t_0 = \mathbb{E}[X]$. Como φ es convexa, $\forall t \in \mathbb{R} : A(t) \leq \varphi(t)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(X)] &= \int_\Omega \varphi(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) \geq \int_\Omega A(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[A(X)] \\ &= \mathbb{E}[aX+b] = a\,\mathbb{E}[X] + b = A(\mathbb{E}[X]) = A(t_0) = \varphi(t_0) = \varphi(\mathbb{E}[X]).\end{aligned}$$

Luego $\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}[X])$. ■

Corolario 2.1.6. *Sean* $q, p \in \mathbb{R}^+$ *con* $q \geq p$ *y* $X \in \mathcal{C}^p(\mathbb{P}) \implies X \in \mathcal{L}^q(\mathbb{P}) \wedge \|X\|_q \leq \|X\|_p$.

***Demostración*:** Sea $\varphi(t) := \begin{cases} t^{q/p} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$, entonces $q > p \implies \varphi$ es $\mathcal{C}^1$ y convexa.

$$\implies \varphi(\mathbb{E}[|X|^p]) \leq \mathbb{E}[\varphi(|X|^p)] = \mathbb{E}[|X|^q] = \|X\|_q^q$$

Ahora bien, como $\varphi(\mathbb{E}[|X|^p]) = (\mathbb{E}[|X|^p])^{q/p} = \|X\|_p^q$, se tiene que $\|X\|_q \leq \|X\|_p$. ■

Definición 2.1.8 (Exponente conjugado). Sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p < \infty$, $p' \in \mathbb{R}$ es el exponente conjugado de $p \iff {}^1\!/_p + {}^1\!/_{p'} = 1$.

Para $p = 1$, $p' = \infty$ es su exponente conjugado.

Teorema 2.1.7 (Desigualdad de Hölder). *Sea* $1 < p < \infty$ *y* $X \in \mathcal{L}^p(\mathbb{P}), Y \in \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{P})$

$$\implies \mathbb{E}\big[\,|X \cdot Y|\,\big] \leq \|X\|_p \cdot \|Y\|_{p'}$$

donde p' *es el exponente conjugado de* p.

***Demostración*:** Suponemos que $\|Y\|_{p'} \neq 0$ (si no, la desigualdad es trivial).

Definimos una función $h\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y una medida ν en Ω dadas por

$$h(\omega) := \frac{|X(\omega)|}{|Y(\omega)|^{p'-1}} \mathbb{1}_{\{Y \neq 0\}}(\omega) \quad \wedge \quad \mathrm{d}\nu = \frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}} \mathbb{1}_{\{Y \neq 0\}}(\omega)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

donde ν es una medida porque $\frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ por hipótesis.

Además $\nu(\Omega) = \displaystyle\int_\Omega \frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}}\,\mathrm{d}P = \frac{\|Y\|_{p'}^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}} = 1$, luego ν es de probabilidad.

$$\begin{aligned}\implies \mathbb{E}\left[|X\cdot Y|\right] &= \int_\Omega |X(\omega)\cdot Y(\omega)|\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\\ &= \|Y\|_{p'}^{p'}\int_\Omega \frac{|X(\omega)|}{|Y(\omega)|^{p-1}}\frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \|Y\|_{p'}^{p'}\left[\int_\Omega h(\omega)\,\mathrm{d}v(\omega)\right]^{p/p}.\end{aligned}$$

Como $p>1$, $\varphi(t)=|t|^p$ es convexa y por la desigualdad de Jensen se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X\cdot Y|\right] = \|Y\|_{p'}^{p'}\left[\varphi\left(\int_\Omega h(\omega)\,\mathrm{d}\nu(\omega)\right)\right]^{1/p} &\leq \|Y\|_{p'}^{p'}\left[\int_\Omega h(\omega)^p\,\mathrm{d}\nu(\omega)\right]^{1/p} =\\ \leq \|Y\|_{p'}^{p'}\left[\int_\Omega \frac{|X(\omega)|^p}{\|Y(\omega)\|^{p(p'-1)}}\cdot\frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\right]^{1/p} &= \|X\|_p\,\|Y\|_{p'}\,.\end{aligned}$$

■

Definición 2.1.9 (Norma ∞). Sea $X\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ una v.a., $\|X\|_\infty$ es la norma ∞ de X

$$\iff \|X\|_\infty := \inf_{\substack{A\in\Sigma\\ \mathbb{P}(A)=0}}\ \sup_{\omega\in A^c}|X(\omega)|\,.$$

Proposición 2.1.8 (Desigualdad de Hölder generalizada). *Sea $1\leq p<\infty$ y $X\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})\,, Y\in\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{P}) \implies \mathbb{E}\big[\,|X\cdot Y|\,\big]\leq\|X\|_p\cdot\|Y\|_{p'}$ con p' el exponente conjugado de p.*

***Demostración*:** Se deja como ejercicio. ■

Proposición 2.1.9 (Desigualdad de Minkowski). *Sea $1\leq p\leq\infty$ y $X,Y\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$*

$$\implies \|X+Y\|_p\leq\|X\|_p+\|Y\|_p\,.$$

***Demostración*:** Dividimos la demostración en tres casos:

1. Si $p=1$, entonces

$$\begin{aligned}\|X+Y\|_1 = \int_\Omega |X(\omega)+Y(\omega)|\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) &\overset{\substack{\triangle\\ \downarrow}}{\leq} \int_\Omega \left[|X|+|Y|\right]\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\\ &\overset{\substack{\text{lineal}\\ \downarrow}}{=} \int_\Omega |X|\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)+\int_\Omega |Y|\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \|X\|_1+\|Y\|_1\,.\end{aligned}$$

2. Si $1<p<\infty$, entonces

$$\begin{aligned}|X(\omega)+Y(\omega)|^p &= |X(\omega)+Y(\omega)|\,|X(\omega)+Y(\omega)|^{p-1}\\ &\leq |X(\omega)|\,|X(\omega)+Y(\omega)|^{p-1}+|Y(\omega)|\,|X(\omega)+Y(\omega)|^{p-1}\,.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Integrando en el lado derecho, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |X(\omega)|\,|X(\omega)+Y(\omega)|^{p-1}\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) &\overset{\overset{\text{Hölder}}{\downarrow}}{\leq} \|X\|_p \left\| |X+Y|^{p-1} \right\|_{p'} = \\ &\leq \|X\|_p \left[\int_\Omega |X+Y|^{(p-1)p'}\,\mathrm{d}P \right]^{1/p'} = \\ &\leq \|X\|_p \left[\int_\Omega |X+Y|^{p}\,\mathrm{d}P \right]^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p'}} = \|X\|_p \|X+Y\|_p^{p/p'} .\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\|X+Y\|_p^p &\overset{\overset{(2.1)}{\downarrow}}{=} \left[\int_\Omega |X(\omega)|\,|X(\omega)+Y(\omega)|^{p-1}\,\mathrm{d}P(\omega) + \int_\Omega |Y(\omega)|\,|X(\omega)+Y(\omega)|^{p-1}\,\mathrm{d}P(\omega) \right]^{p/p'} \\ &\overset{\overset{(2.2)}{\downarrow}}{\leq} \|X\|_p \|X+Y\|_p^{p/p'} + \|Y\|_p \|X+Y\|_p^{p/p'} = \|X+Y\|_p^{p/p'} \left[\|X\|_p + \|Y\|_p \right]. \\ \iff & \|X+Y\|_p^{p-p/p'} = \|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p .\end{aligned}$$

3. Si $p=\infty$, entonces tomamos

$$A_1 \subset \Omega : \|X\|_\infty = \sup_{\omega\in A_1^c} |X(\omega)| \quad \text{y} \quad A_2 \subset \Omega : \|Y\|_\infty = \sup_{\omega\in A_2^c} |Y(\omega)| .$$

Definimos $A := A_1 \cup A_2$, entonces

$$\begin{aligned}\|X\|_\infty + \|Y\|_\infty &= \sup_{\omega\in A_1^c} |X(\omega)| + \sup_{\omega\in A_2^c} |Y(\omega)| \geq \sup_{\omega\in A^c} |X(\omega)| + \sup_{\omega\in A^c} |Y(\omega)| \\ &\geq \sup_{\omega\in A^c} \left[|X(\omega)| + |Y(\omega)| \right] \underset{\underset{\triangle}{\uparrow}}{\geq} \sup_{\omega\in A^c} |X(\omega)+Y(\omega)| \\ &\geq \inf_{\substack{B\in\Sigma \\ \mathbb{P}(B)=0}} \sup_{\omega\in B^c} |X(\omega)+Y(\omega)| = \|X+Y\|_\infty .\end{aligned}$$

Como se ha demostrado en los tres casos, se tiene que $\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$. ■

Observación 2.1.10. Sea $X \in \mathcal{L}^\infty$ y $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\begin{aligned}\|X\|_p^p = \int_\Omega |X(\omega)|^p\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) &= \int_{\left\{w:|X(\omega)|>\|X\|_\infty\right\}} |X(\omega)|^p\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) + \int_{\left\{w:|X(\omega)|\leq\|X\|_\infty\right\}} |X(\omega)|^p\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega). \\ &\leq \|X\|_\infty^p \int_{\left\{w:|X(\omega)|>\|X\|_\infty\right\}} \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \leq \|X\|_\infty^p\,\mathbb{P}(\Omega) = \|X\|_\infty^p . \\ &\implies \|X\|_p \leq \|X\|_\infty .\end{aligned}$$

Proposición 2.1.10 (Desigualdad de Chebyshev). *Sea X una v.a. y $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ medible y no negativa, definimos $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : i_A := \inf_{t\in A} \varphi(t)$*

$$\implies i_A \cdot \mathbb{P}(X\in A) \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X\in A\}} \cdot \varphi(X) \right].$$

***Demostración*:** Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces $\forall \omega \in \Omega : X(\omega) \in A : i_A \leq \varphi(t) \leq \varphi(X(\omega))$

$$\implies i_A \mathbb{1}_{\{X\in A\}}(\omega) \leq \mathbb{1}_{\{X\in A\}}(\omega) \cdot \varphi(X(\omega))$$

$$\text{integrando } i_A \cdot \mathbb{P}\left(X \in A\right) \leq \mathbb{E}\left[i_A \cdot \mathbb{1}_{\{X\in A\}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X\in A\}} \cdot \varphi(X)\right].$$

■

Corolario 2.1.11 (Desigualdad de Markov). *Sea $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ una v.a.y $1 \leq p < \infty$*

$$\implies \forall t > 0 : \mathbb{P}\left(|X| \geq t\right) \leq \frac{\|X\|_p^p}{t^p}.$$

***Demostración*:** Tomamos $\varphi(t) = |t|^p$ y $A = \{|X| \geq t\}$, por la desigualdad de Chebyshev:

$$t^p \mathbb{P}\left(|X| \geq t\right) \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{|X|\geq t\}} \cdot |X|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[|X|^p\right] = \|X\|_p^p.$$

■

Corolario 2.1.12. *Sea $X \in \mathcal{L}^2\left(\mathbb{P}\right)$ una variable aleatoria*

$$\implies \forall \varepsilon > 0 : \mathbb{P}\big(\,|X - \mathbb{E}\left[X\right]| > \varepsilon\big) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

***Demostración*:** Se deja como ejercicio. ■

2.2 Comportamiento a largo plazo

Sea $(A_n) \subset \Sigma$ una sucesión de subconjuntos de Ω. En general, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ no se puede definir.

1. $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \subset A_{n+1} \implies$ podemos definir $\lim\limits_{n\to\infty} A_n := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n \implies$ podemos definir $\lim\limits_{n\to\infty} A_n := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Sin embargo, estos casos son muy limitados, queremos ser capaces de tomar límites de más tipos de sucesiones de conjuntos. Además, son muy dependientes de cada elemento de la sucesión.

Por ello, vamos a buscar una defición a partir de $\limsup$ y $\liminf$.

Ejemplo 2.2.1. Sea la sucesión (A_n) dada por $A_n = \begin{cases} \{1,2\} \text{ si } n \text{ es par} \\ \{2,3\} \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$ entonces (nos gustaría que) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{2\}$ porque 2 está en todos los conjuntos y $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{1,2,3\}$ porque 1 y 3 están en infinitos conjuntos.

Esto motiva las siguientes definiciones:

Definición 2.2.1 (Límite superior). Sea $(A_n) \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una sucesión de conjuntos, $\limsup A_n$ es el límite superior de (A_n)

$$\iff \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Definición 2.2.2 (Límite inferior). Sea $(A_n) \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una sucesión de conjuntos, $\liminf A_n$ es el límite inferior de (A_n)

$$\iff \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Ejercicio 2.2.2. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos, demuestra que

(a) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

(b) $\mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$.

Lema 2.2.1 (de Borel-Cantelli I). *Sea* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ *una sucesión de sucesos tal que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$

$$\implies \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

***Demostración*:** Definimos $N\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ dada por $N(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)$, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : N(\omega) = \infty\}.$$

Por tanto, $\mathbb{E}[N] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fubinni}}}{=} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_n}\right] = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty.$

$$\implies N \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \implies \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : N(\omega) = \infty\}) = 0.$$

■

Ejemplo 2.2.3 (de falsedad del recíproco del Lema de Borel-Cantelli I). Sea $(A_n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ una sucesión de conjuntos dada por $A_n = \left[0, 1/n\right]$, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{0\} \implies \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

Sin embargo, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 1/n = \infty.$

Lema 2.2.2 (de Borel-Cantelli II). *Sea* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset$

Σ *una sucesión de sucesos independientes*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \infty \implies \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$$

***Demostración*:** Sean $M < N < \infty$, entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=M}^{N} A_n^c\right) = \prod_{n=M}^{N} \mathbb{P}\left(A_n^c\right) = \prod_{n=M}^{N} \left(1-\mathbb{P}\left(A_n\right)\right) \leq \prod_{n=M}^{N} e^{-\mathbb{P}(A_n)} \text{ porque } 1-x \leq e^{-x}$$
$$\leq e^{-\sum_{n=M}^{N}\mathbb{P}(A_n)} \xrightarrow{N\to\infty} 0, \quad \forall M < \infty.$$

Como $\Omega = \bigcup_{n=M}^{\infty} A_n \sqcup \bigcap_{n=M}^{\infty} A_n^c$, hemos visto que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=M}^{\infty} A_n^c\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=M}^{N} A_n^c\right) = 0.$

$$\implies \forall M < \infty : \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=M}^{\infty} A_n\right) = 1 \implies \mathbb{P}\left(\bigcap_{M=1}^{\infty}\bigcup_{n=M}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

Entonces, concluimos que $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$ ■

Definición 2.2.3 ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de Cola). Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias, $T \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es la σ-álgebra de cola de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\iff T := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma\left(X_n, X_{n+1}, \ldots\right).$$

Ejemplos 2.2.4 (de elementos que (no) están en la $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de cola).

$\boxed{1}$ $A = \{X_2 \geq 0\} \notin T$ en general.

$\boxed{2}$ $\forall \left(B_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \limsup_{n\to\infty} \{X_n \in B_n\} \in T$.

$\boxed{3}$ Si $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$ entonces $\left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} S_n(\omega)\right\} \in T$.

$\boxed{4}$ $\left\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} S_n(\omega) > 0\right\} \notin T$.

Intuitivamente, un suceso estará en la σ-álgebra de cola si depende de infinitas de las X_i.

Teorema 2.2.3 (Ley 0-1 de Kolmogorov). *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a.i. y $A \in T$*

$$\implies \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}.$$

***Demostración*:** Sea $A \in T$, veamos que A es independiente de sí mismo:

1. Veamos que $E \in \sigma\left(X_1, \ldots, X_k\right)$ y $F \in \sigma\left(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots\right) \implies E$, F son indep.

a. Si $F \in \sigma\left(X_{k+1,\dots,X_{k+l}}\right)$ por el teorema Π-λ E y F son independientes.

b. Si no, consideramos los π-sistemas siguientes:

$$\Pi_1 = \sigma\left(X_1, \dots, X_k\right) \quad \wedge \quad \Pi_2 = \bigcup_{j \geq 1} \sigma\left(X_{k+1}, \dots, X_{k+l}\right).$$

Entonces por el caso 1a, Π_1, Π_2 son independientes, luego por el teorema Π-λ $\sigma(\Pi_1)$, $\sigma(\Pi_2)$ son independientes. Como $\sigma(X_{k+1}, \dots) \subset \sigma(\Pi_2)$, se tiene que E y F son indep.

2. Veamos que $E \in \sigma\left(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ y $F \in T \implies E$, F son independientes.

a. Si $E \in \sigma\left(X_1, \dots, X_k\right)$, tomamos $F \in \sigma\left(X_{k+1}, \dots\right)$ (en particular), por el paso 1 E, F son independientes.

b. Si no, consideramos los π-sistemas siguientes:

$$\Pi'_1 = \bigcup_{k \geq 1} \sigma\left(X_1, \dots, X_k\right) \quad \wedge \quad \Pi'_2 = T.$$

Entonces Π'_1, Π'_2 son independientes, luego por el teorema Π-λ $\sigma(\Pi'_1)$, $\sigma(\Pi'_2)$ son independientes. Como $\sigma\left(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) \subset \sigma(\Pi'_1)$, se tiene que E y F son indep.

3. En conclusión, $T \subset \sigma\left(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ y por tanto $A \in T \implies A \in \sigma\left(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Como T es independiente de $\sigma\left(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$, se tiene que A es independiente de A.

Por tanto $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A) \implies \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. ■

Observación 2.2.4. Si definimos $T'_m := \bigcap_{n=m}^{\infty} \sigma\left(X_n, X_{n+1}, \dots\right)$, entonces $\forall m \in \mathbb{N} : T'_m = T$.

***Demostración*:** Definimos $\forall m \in \mathbb{N} : \Sigma_m := \sigma\left(X_m, X_{m+1}, \dots\right)$, entonces $\Sigma_m \subset \Sigma_{m-1}$.

$$\implies T = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n \quad \wedge \quad T \subset T'_m = \bigcap_{n=m}^{\infty} \Sigma_n.$$

Por tanto, $T'_m = \bigcap_{n=m}^{\infty} \Sigma_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Sigma_n = T$. ■

Ejemplo 2.2.5 (mono escritor). Tomamos $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ v.a.i.i.d. dadas por $\forall j \in \mathbb{N} : X_j \sim \mathrm{Unif}\left(\{1, \dots, 40\}\right)$. Definimos

$$A_n = \{\text{que se escriba el Quijote con las variables } (n-1)L + 1 \text{ hasta } nL\}$$

donde L es la longitud del Quijote en caracteres. Entonces

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=(n-1)L+1}^{nL} \{X_j = Q_j\}\right) \overset{\substack{\text{indep} \\ \downarrow}}{=} \prod_{j=(n-1)L+1}^{nL} \mathbb{P}\left(X_j = Q_j\right) = \left({}^{1}\!/_{40}\right)^L.$$

Además, los A_n son independientes y $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Por tanto, por el `Lem-borel-cantelli-ii/Lema`

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$$

Es decir, el mono escribirá el Quijote infinitas veces.

Ejercicio 2.2.6. ¿Qué pasa si el Quijote es de longitud infinita?

Ejemplo 2.2.7 (un juego en el que se gana siempre).

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } {}^{2^n}\!/_{2^n+1} \\ -2^n & \text{con probabilidad } {}^{1}\!/_{2^n+1} \end{cases}$$

Este es un juego equilibrado, es decir, $\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{2^n}{2^n+1} - \frac{2^n}{2^n+1} = 0$. Sin embargo, veamos que, si jugamos infinitas veces, ganaremos siempre. Definimos A como el suceso de perder infinitas veces. Entonces $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$ donde A_n es perder en la n-ésima partida.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(X_n = -2^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n+1} < 1.$$

Por tanto, por el `Lem-borel-cantelli-ii/`**??** $\mathbb{P}(A) = 0$ y ganaremos siempre.

Teorema 2.2.4 (desigualdad maximal de Kolmogorov). *Sean $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}_n}$ variables aleatorias independientes y centradas (i.e. $\forall j \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[X_j] = 0$) y $\forall j \in \mathbb{N}_n : X_j \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$*

$$\Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n} |S_k| > t\right) \le \frac{\mathbb{V}\left(S_n\right)}{t^2} \qquad \textit{donde} \qquad S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j.$$

***Demostración*:** Definimos $\forall k \in \mathbb{N}_n, t \in \mathbb{R}_+ :$

$$A_k(t) = \left\{\omega \in \Omega : |S_k(\omega)| > t \wedge \forall j < k : |S_j(\omega)| \le t\right\}.$$

Entonces, $\left\{\omega \in \Omega : \max\limits_{1\le k\le n} |S_k(\omega)| > t\right\} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k(t)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \int_\Omega S_n^2(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) &\ge \int_{\left\{\max_{1\le k\le n}|S_n|>t\right\}} S_n^2(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=1}^{n}\int_{A_k(t)} S_n^2(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \\
&\ge \sum_{k=1}^{n}\int_{A_k(t)} \left(S_n - S_k + S_k\right)^2\mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{n}\int_{A_k(t)} S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \;\; (*) \\
&\ge \sum_{k=1}^{n}\int_{A_k(t)} S_k^2\,\mathrm{d}\mathbb{P} + \cancel{\sum_{k=1}^{n} 2\int_\Omega \mathbb{1}_{A_k(t)} \cdot S_k(S_n - S_k)\,\mathrm{d}\mathbb{P}} \\
&\ge \sum_{k=1}^{n} t^2 \cdot \mathbb{P}\left(A_k(t)\right) = t^2 \cdot \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n} S_k\right)
\end{aligned}$$

$(*)$ Tenemos que $\mathbb{1}_{A_k(t)} \cdot S_k$ es $\sigma\left(X_1, \ldots, X_k\right)$-medible y, además, $S_n - S_k = \sum_{j=k+1}^{n} X_j$ es $\sigma\left(X_{k+1}, \ldots, X_n\right)$-medible. Por el teorema Π-λ, $\mathbb{1}_{A_k} S_K$ y $S_n - S_k$ son independientes

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_k(t)} S_k \cdot \left(S_n - S_k\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_k(t)} S_k\right] \cdot \mathbb{E}\left[S_n - S_k\right] = 0.$$

■

3. Convergencia de sucesiones de variables aleatorias

3.1 Diferentes tipos de convergencia

Definición 3.1.1 (Convergencia en probabilidad). Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias, X_n converge en probabilidad a X

$$\iff \forall\varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0 \iff X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X.$$

Definición 3.1.2 (Convergencia casi segura). Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias, X_n converge casi seguro a X

$$\iff \exists A \in \Sigma : \mathbb{P}(A) = 0 \wedge \forall\omega \in A^c : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \iff X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.s.}} X.$$

Definición 3.1.3 (Convergencia en $\mathcal{L}^p$). Sea (X, Σ, μ) un esp medida y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ una sucesión de funciones medibles, f_n converge en $\mathcal{L}^p(\mu)$ a f

$$\iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \iff f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} f.$$

Definición 3.1.4 (convergencia en distribución). Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias, X_n converge en distribución a X

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \text{ punto de continuidad de } F_X : \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t) \iff X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{d}} X.$$

Vamos a probar el siguiente diagrama de implicaciones entre los diferentes tipos de convergencia de sucesiones de variables aleatorias:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^p(\mathbb{P}) \arrow[rr, Rightarrow, "\text{subsucesión}"] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{casi segura} \arrow[dl, Rightarrow, shift right] \\
& \text{probabilidad} \arrow[ur, Rightarrow, shift right, "\text{subsucesión}"'] \arrow[d, Rightarrow] & \\
& \text{distribución} &
\end{tikzcd}$$

Las flechas que no están es porque no se dan en general (veremos contraejemplos).

Proposición 3.1.1. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X_n \xrightarrow{c.s.} X \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.*

***Demostración*:** Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que $\exists A \in \Sigma : \mathbb{P}(A) = 1 : \forall\omega \in A^c : X_n(\omega) \to X(\omega)$.

Para $\omega \in A^c$, $\limsup_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0$

$$\implies \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Por otro lado, por el lema de Fatou (ejercicio)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right\}\right) &\geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \geq 0.\end{aligned}$$

■

Proposición 3.1.2. *Sea* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$*.*

***Demostración*:** Sea $\varepsilon > 0$, queremos ver que $\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \to 0$.

1. Si $p < \infty$, entonces, por la desigualdad de Chebyshev

$$0 \leq \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \leq \frac{\|X_n - X\|_p^p}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

2. Si $p = \infty$, veamos dos pruebas distintas:

   – Por un lado, como tenemos que $\|X_n - X\|_2 \leq \|X_n - X\|_\infty$ (ejercicio), entonces

$$0 \leq \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \leq \frac{\|X_n - X\|_2^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{\|X_n - X\|_\infty^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

   – Por otro lado, si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^\infty} X$, entonces $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} X$ uniformemente (ejercicio). Entonces, por la proposición anterior, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

En cualquier caso hemos probado que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. ■

Proposición 3.1.3. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \implies X_n \xrightarrow{d} X$*.*

***Demostración*:** Sea $t \in \mathbb{R}$ punto de continuidad de F_X y $\varepsilon > 0$, veamos que

$$F_{X_n}(t) \leq F_X(t+\varepsilon) + \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \tag{3.1}$$

$$F_{X_n}(t) \geq F_X(t-\varepsilon) - \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right). \tag{3.2}$$

Si aceptamos (3.1) y (3.2), entonces

$$F_X(t-\varepsilon) - \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \leq F_{X_n}(t) \leq F_X(t+\varepsilon) + \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right).$$

Como $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, entonces $\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\implies F_X(t-\varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) \leq F_X(t+\varepsilon).$$

Tomando límites en ε, $\lim_{\varepsilon\to 0} F_X(t-\varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} F_X(t+\varepsilon)$, como F_X es continua en t, entonces concluimos que $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$, luego $X_n \xrightarrow{d} X$.

Veamos que se cumplen las desigualdades

(3.1) Basta ver que $\{X_n \leq t\} \subset \{X \leq t+\varepsilon\} \cup \{|X_n - X| > \varepsilon\}$, operamos

$$\begin{aligned}\{X_n \leq t\} &= \Big[\{X_n \leq t\} \cap \{|X_n - X| \leq \varepsilon\}\Big] \cup \Big[\{X_n \leq t\} \cap \{|X_n - X| > \varepsilon\}\Big] \\ &\subset \{X \leq t+\varepsilon\} \cup \{|X_n - X| > \varepsilon\}.\end{aligned}$$

(3.2) Se hace de forma análoga.

■

Proposición 3.1.4. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X \implies \exists\, (X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{c.s.} X$.*

***Demostración*:** Definimos $\forall k \in \mathbb{N} : n_k = \min\left\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}\left(|X_n - X| > 2^{-k}\right) \leq 2^{-k}\right\}$ y llamaremos $A_k := \left\{|X_{n_k} - X| > 2^{-k}\right\}$. Como $\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\forall k \in \mathbb{N} : \exists n_k \in \mathbb{N}$

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty.$$

Entonces, por el Lema de Borel-Cantelli I, $\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right) = 0$.

Por otro lado, afirmamos que $\left\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} |X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| \neq 0\right\} \subset \limsup_{k\to\infty} A_k$.

En efecto, si $\omega \in \Omega$ es tal que $\limsup_{n\to\infty} |X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| \neq 0$, entonces $\exists$ infinitos índices k tales que $\omega \in A_k$. Por tanto, $\omega \in \limsup_{k\to\infty} A_k$. ■

Proposición 3.1.5 (de Borel-Cantelli III). *Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de sucesos independientes dos a dos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$*

$$\implies \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j}}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)} \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 1.$$

***Demostración*:** Denotamos $S_N := \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{A_j}$, entonces por la independencia dos a dos

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{V}(\mathbb{1}_{A_j}) \leq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j). \tag{3.3}$$

Por otro lado, $\mathbb{V}(\mathbb{1}_{A_j}) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}^2_{A_j}\right] - \mathbb{E}^2[\mathbb{1}_{A_j}] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}^2_{A_j}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_j}]$. Sea $\varepsilon > 0$, por la

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_j}}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)} - 1\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_j} - \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)\right| > \varepsilon \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)\right)$$

$$\overset{\substack{\text{Chebyshev}\\ \downarrow}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^2 \left(\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)\right)^2} \mathbb{V}\left(S_n\right) \overset{\substack{3.3\\ \downarrow}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^2 \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Por tanto, $\dfrac{\sum_{j=1}^\infty \mathbb{1}_{A_j}}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1$.

Definimos $\forall k \in \mathbb{N} : n_k := \min\left\{n : \mathbb{E}\left[S_n\right] \geq k^2\right\}$ y $T_k := S_{n_k}$, entonces, $k^2 \leq \mathbb{E}\left[T_k\right] \leq k^2 + 1$.

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\underbrace{\left\{\left|T_k . \mathbb{E}\left[T_k\right]\right| > \varepsilon \mathbb{E}\left[T_k\right]\right\}}_{A_k^\varepsilon}\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 k^2}.$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(A_k^\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} < \infty \overset{\substack{\text{B-C I}\\ \downarrow}}{\Longrightarrow} \mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} A_k^\varepsilon\right) = 0.$$

Por el argumento de la demostración de la `Convergencia-probabilidad-imp-subsucesion-casi-segur`
$\dfrac{T_k}{\mathbb{E}\left[T_k\right]} \xrightarrow[k\to\infty]{c.s.} 1$. Sea n tal que $n_k \leq n \leq n_{k+1}$, entonces

$$\frac{T_k}{\mathbb{E}\left[T_{k+1}\right]} \leq \frac{S_n}{\mathbb{E}\left[S_n\right]} \leq \frac{T_{k+1}}{\mathbb{E}\left[T_k\right]}$$

y basta probar que (a) $\dfrac{T_k}{\mathbb{E}\left[T_{k+1}\right]} \xrightarrow[k\to\infty]{c.s.} 1$ y (b) $\dfrac{T_{k+1}}{\mathbb{E}\left[T_k\right]} \xrightarrow[k\to\infty]{c.s.} 1$.

(a) Sea $\omega \in \Omega$ tal que $\dfrac{T_k(\omega)}{\mathbb{E}\left[T_k\right]} \xrightarrow{k\to\infty} 1 \Longrightarrow \dfrac{T_k(\omega)}{\mathbb{E}\left[T_{k+1}\right]} = \dfrac{T_k(\omega)}{\mathbb{E}\left[T_k\right]} \cdot \dfrac{\mathbb{E}\left[T_k\right]}{\mathbb{E}\left[T_{k+1}\right]}$ y además

$$\frac{k^2}{(k+1)^2 + 1} \leq \frac{\mathbb{E}\left[T_k\right]}{\mathbb{E}\left[T_{k+1}\right]} \leq \frac{k^2 + 1}{(k+1)^2}$$

con cada uno de estos términos tendiendo a 1. Por tanto, $\dfrac{T_k}{\mathbb{E}\left[T_{k+1}\right]} \xrightarrow[k\to\infty]{c.s.} 1$.

(b) Se hace de forma análoga.

Como $\dfrac{T_k}{\mathbb{E}\left[T_{k+1}\right]} \leq \dfrac{S_n}{\mathbb{E}\left[S_n\right]} \leq \dfrac{T_{k+1}}{\mathbb{E}\left[T_k\right]}$, entonces $\dfrac{S_n}{\mathbb{E}\left[S_n\right]} \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 1$. ■

Observación 3.1.5. Esta es una forma más fuerte del Lema de Borel-Cantelli II porque la independencia implica la independencia dos a dos (pero no al revés).

Además $\limsup_{n\to\infty} A_n = \left\{\omega \in \Omega : \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \infty\right\}$.

Proposición 3.1.6. *Sean* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *v.a.i. y centradas tal que* $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}(X_n)<\infty$*.*

$$\implies \exists X \text{ variable aleatoria}: \sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} X.$$

***Demostración*:** Definimos $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$ y fijamos $M<N$

$$\mathbb{P}\left(\max_{M\le n\le N}|S_n-S_M|>\varepsilon\right) \overset{\text{máx Kolmogorov}}{\overset{\downarrow}{\le}} \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{V}\left(S_N-S_M\right) \overset{\text{indep}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=M}^{N}\mathbb{V}(X_j) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=M}^{\infty}\mathbb{V}(X_j) \xrightarrow{M\to\infty} 0.$$

$$\implies \lim_{M\to\infty}\mathbb{P}\left(\sup_{n\ge M}|S_n-S_M|>\varepsilon\right)=0.$$

Definimos $W_M=\sup_{n,k\ge M}|S_n-S_k|$, entonces veamos que $W_M \xrightarrow[\mathbb{P}]{M\to\infty} 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(W_M>\varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{n,k\ge M}|S_n-S_l|>\varepsilon\right)\\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{n\ge M}|S_n-S_M|>\frac{\varepsilon}{2}\right)+\mathbb{P}\left(\sup_{k\ge M}|S_k-S_M|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\end{aligned}$$

ya que, por desigualdad triangular y subaditividad de la medida,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{n,k\ge M}|S_n-S_k|>\varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{n,k\ge M}|S_n-S_M+S_M-S_k|>\varepsilon\right)\\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{n\ge M}|S_n-S_M|+\sup_{k\ge M}|S_k-S_M|>\varepsilon\right)\\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{n\ge M}|S_n-S_M|>\frac{\varepsilon}{2}\right)+\mathbb{P}\left(\sup_{k\ge M}|S_k-S_M|>\frac{\varepsilon}{2}\right).\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbb{P}\left(W_M>\varepsilon\right)\le 2\mathbb{P}\left(\sup_{n\ge M}|S_n-S_M|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\xrightarrow{M\to\infty} 0$. Como $\forall\omega\in\Omega:(W_M(\omega))_{M\in\mathbb{N}}$ es decreciente, entonces $W_M \xrightarrow[\text{c.s.}]{M\to\infty} 0$.

Entonces, para todo ω en un conjunto de probabilidad 1, $W_M(\omega)\xrightarrow{M\to\infty} 0 \implies S_n(\omega)$ es de Cauchy (en $\mathbb{R}$ espacio completo) y por tanto, $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} X$. ∎

4. Esperanza condicional y Martingalas

Proposición 4.0.1 (Esperanza condicionada). *Sea* $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ *en* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *espacio de probabilidad y* $\mathcal{F} \subset \Sigma$ *una* σ*-álgebra*

$$\Longrightarrow \ \exists! \text{ (c.s.) } Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) : Y \textit{ es } \mathcal{F}\textit{-medible} \wedge \forall Z \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{P}) : \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[XZ].$$

Esta Y *se denomina* ***esperanza condicionada*** *de* X *dada* $\mathcal{F}$ *y se denota por* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$*.*

***Demostración*:** Definimos $\nu \colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\nu(A) := \int_A X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$, entonces es una medida con signo (ejercicio). Además, $\nu \ll \mathbb{P}$ en $\mathcal{L}$ porque si $A \in \mathcal{F}$ es tal que $\mathbb{P}(A) = 0$, entonces $\nu(A) = \int_A X\,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0$.

Por tanto, por el teorema de Radon-Nikodym,

$$\exists! Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) : Y \text{ es } \mathcal{F}\text{-medible} \wedge \forall A \in \mathcal{F} : \nu(A) = \int_A Y\,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Veamos ahora que $\forall Z \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{P}) : \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[XZ]$:

1. Si Z es una función indicatriz, $Z = \mathbb{1}_A$ con $A \in \mathcal{F}$, entonces
$$\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A] = \int_A Y\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \nu(A) = \int_A X\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A].$$
2. Si Z es una función simple, se tiene por linealidad de la integral (ejercicio).
3. Si $Z \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{P})$ se tiene por el teorema de la convergencia dominada.

■

Observación 4.0.1. $\forall Z \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{P}) : \mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\,Z]$.

Lema 4.0.2 (Propiedades de la esperanza condicionada).
Sean $X, Y, Z \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ *y* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ *la esperanza condicionada de* X *dada* $\mathcal{F} \subset \Sigma$*, entonces*

(1) $X \geq 0 \implies \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \geq 0$ *c.s.*

(2) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]] = \mathbb{E}[X]$.

(3) $\mathbb{E}[X \mid \Sigma] = X$.

(4) $\mathbb{E}[X \mid \{\varnothing, \Omega\}] = \mathbb{E}[X]$.

(5) $\mathbb{E}[cX + dY \mid \mathcal{F}] = c \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] + d \cdot \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$.

(6) Z *es* $\mathcal{F}$*-medible* $\implies \mathbb{E}[ZX \mid \mathcal{F}] = Z \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$.

***Demostración*:**

(1) Para todo $A \in \mathcal{F}$, tenemos que $0 \leq \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \mathbb{1}_A]$.

Si $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] < 0$ en un conjunto B, como $\{\omega \in \Omega : \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}](\omega) < 0\} \in \mathcal{F}$

$$\implies \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \mathbb{1}_B] < B \vee \mathbb{P}(B) = 0.$$

(2) Se hace tomando $Z = \mathbb{1}_A$ en la definición (ejercicio).

El resto se dejan como ejercicio. ∎

Lema 4.0.3. *Sea Z una variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible*

$$\implies \mathbb{E}\left[|X - Z|^2\right] \geq \mathbb{E}\left[|X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]|^2\right] \geq 0.$$

***Demostración*:** Sumamos y restamos $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ dentro de $|X - Z|^2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X - Z|^2\right] &= \mathbb{E}\left[|X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] + \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] - Z|^2\right] \\ &= \mathbb{E}\Big[\,|X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]|^2\,\Big] + \mathbb{E}\Big[\,|Z - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]|^2\,\Big] \\ &\quad + 2\mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\big)\big(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] - Z\big)\Big]\end{aligned}$$

∎

5. Comportamiento a largo plazo de sucesiones de variables aleatorias

H. Hojas de ejercicios

H.0 Repaso de teoría de la medida

$\boxed{1.}$ Define con precisión los siguientes conceptos:

(a) σ-álgebra.

(b) σ-álgebra de Borel.

(c) σ-álgebra de Lebesgue.

(d) Medida.

(e) Espacio de medida.

(f) Función medible.

(g) Función simple.

(h) Función integrable.

(i) Integral de una función integrable.

(j) Espacio de medida producto.

(k) Medida absolutamente continua.

(l) Medidas mutuamente singulares.

***Solución*:**

Definición H.0.1 ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra). Sea $X \neq \varnothing$, $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra de $X \iff$

(a) $X \in \Sigma$

(b) $E \in \Sigma \implies E^c = X \setminus E \in \Sigma$

(c) $\left\{E_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$

Definición H.0.2 ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de Borel). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\mathcal{B}(X)$ es la σ-álgebra de Borel de X

$$\iff \mathcal{B}(X) \text{ es la } \sigma\text{-álgebra generada por } \mathcal{T} \iff \mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{T}).$$

.

Definición H.0.3 (Medida). Sea $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra de un conjunto $X \neq \varnothing$, una aplicación $\mu\colon \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ es una medida $\iff$

(a) $\mu(\varnothing) = 0$.

(b) Aditividad: $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ disjuntos dos a dos $\implies \mu\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Definición H.0.4 (Función medible). Sea (X, Σ) un espacio medible, $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función medible $\iff \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \in \Sigma$.

Definición H.0.5 (Función simple). Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función simple

$$\iff \left(\exists \{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R} \wedge \exists \{E_i\}_{i=1}^n \subset \Sigma \text{ medibles bajo } \mu\right) : f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i}$$

Definición H.0.6 (Función integrable). Sea $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible en un espacio de medida (X, Σ, μ), f es integrable respecto de μ en $E \in \Sigma$

$$\iff f \in \mathcal{L}^1(\mu, E) := \left\{g\colon X \longrightarrow \mathbb{R} : g \text{ es medible} \wedge \int_E |g| \, \mathrm{d}\mu < \infty\right\}$$

Definición H.0.7 (Integral de fn simple). Sea $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ una fn simple en un espacio de medida (X, Σ, μ), $I \in \mathbb{R}$ es la integral de φ respecto de μ en $E \in \Sigma$

$$\iff I = \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) \quad \text{donde} \quad \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i}$$

Definición H.0.8 (Integral de fn no negativa). Sea $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ una fn medible no negativa en un espacio de medida (X, Σ, μ), $I \in \mathbb{R}$ es la integral de f respecto de μ en $E \in \Sigma$

$$\iff I = \int_E f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{\int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu : \varphi \text{ simple} \wedge 0 \leq \varphi \leq f\right\}$$

Definición H.0.9 (Integral). Sea $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible en un espacio de medida (X, Σ, μ), $I \in \mathbb{R}$ es la integral de f respecto de μ en $E \in \Sigma$

$$\iff I = \int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu \quad \text{donde} \quad f^+ = \max\{f, 0\} \wedge f^- = \max\{-f, 0\}$$

.

.

.

Para el resto de la hoja, sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ la recta real con la σ-álgebra de Borel y la medida de Lebesgue.

$\boxed{2.}$ Enuncia y demuestra los siguientes resultados:

(a) Teorema de la convergencia monótona.

(b) Teorema de la convergencia dominada.

(c) Lema de Fatou.

(d) Teorema de Fubini.

(e) Teoremas de Carathéodory.

(f) Teorema de Radon-Nikodym.

Solución:

Teorema H.0.1 (de convergencia monótona para conjuntos). *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ una sucesión creciente (i.e. $\forall n \in \mathbb{N} : E_n \subset E_{n+1}$)*

$$\implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

Demostración: Definimos $F_1 = E_1$ y $\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+1} = E_{n+1} \setminus E_n$. Entonces la sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de conjuntos μ-medibles disjuntos. Si definimos $E_0 = \varnothing$, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mu(E_n) = \mu((E_n \setminus E_{n-1}) \sqcup E_{n-1}) \overset{\substack{\text{aditividad} \\ \downarrow}}{=} \mu(E_n \setminus E_{n-1}) + \mu(E_{n-1})$$

$$\iff \mu(E_n) - \mu(E_{n-1}) = \mu(E_n \setminus E_{n-1}) = \mu(F_n)$$

Por tanto, como $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n$:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \overset{\substack{\text{aditividad} \\ \downarrow}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(E_n) - \mu(E_{n-1})) \overset{\substack{\text{suma telescópica} \\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

■

Teorema H.0.2 (de convergencia monótona para funciones). *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones medibles no negativas*

$$\implies \forall E \in \Sigma : \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Demostración: $\forall x \in X, n \in \mathbb{N} : f_n(x) \le f_{n+1}(x) \implies \forall x \in X : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ y f es medible por serlo todas las f_n. ■

Teorema H.0.3 (de la convergencia dominada). *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de fns medibles en un espacio de medida (X, Σ, μ) tal que $\exists \lim f_n =: f \wedge \exists g$ integrable : $\forall n \in \mathbb{N}$: $|f_n| \le g$*[1]

$$\implies \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0, \quad \textit{en particular,} \qquad \int \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración: Consideramos $\left(\hat{f}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $\forall n \in \mathbb{N} : \hat{f}_n = f_n - f \implies \hat{f}_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

[1] Se dice que g "domina" a todas las f_n.

Definimos $\forall n \in \mathbb{N} : h_n := g - \left|\hat{f}_n\right| \geq 0 \overset{\text{Fatou}}{\overset{\downarrow}{\implies}} \int \liminf_{n\to\infty} h_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int h_n \,\mathrm{d}\mu$.

Ahora, como $\liminf_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} g - \left|\hat{f}_n\right| = g$ porque $\hat{f}_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, entonces

$$\int g \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int \left(g - \left|\hat{f}_n\right|\right) \mathrm{d}\mu \overset{\text{linealidad}}{\overset{\downarrow}{=}} \liminf_{n\to\infty} \left(\int g \,\mathrm{d}\mu - \int \left|\hat{f}_n\right| dmu\right)$$

$$\implies \int g \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int \left|\hat{f}_n\right| \mathrm{d}\mu$$

Como $\liminf_{n\to\infty} \int g \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu \wedge g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, podemos cancelar y nos queda

$$\cancel{\int g \,\mathrm{d}\mu} \leq \cancel{\int g \,\mathrm{d}\mu} - \limsup_{n\to\infty} \int \left|\hat{f}_n\right| \mathrm{d}\mu \implies \limsup_{n\to\infty} \int \left|\hat{f}_n\right| \mathrm{d}\mu \leq 0$$

Lo que implica que $\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$.

$$\text{y como} \quad \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = \begin{cases} \int (f_n - f) \,\mathrm{d}\mu = \int f_n \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\mu & \text{si } f_n \geq f \\ \int (f - f_n) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu - \int f_n \,\mathrm{d}\mu & \text{si } f_n < f \end{cases}$$

se tiene $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu$. ■

Lema H.0.4 (de Fatou). *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas en un espacio de medida (X, Σ, μ)*

$$\implies \int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

***Demostración*:** Tenemos que $\liminf_{n\to\infty} f_n := \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} f_k\right)$. Consideramos $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $g_n := \inf_{k\geq n} f_k \geq 0$. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N} : g_n \leq g_{n+1} \wedge \lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$.

$$\implies \int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{TCM}}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \inf_{k\geq n} f_k \,\mathrm{d}\mu$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \text{ porque } \int \inf_{k\geq n} f_k \,\mathrm{d}\mu \leq \inf_{k\geq n} \int f_k \,\mathrm{d}\mu$$

■

.

Teorema H.0.5 (de Caratheodory I). *Sea μ^* una medida exterior en $X \neq \varnothing$, entonces*

(a) $\mathcal{A}^* := \{E \subset X : E$ *es μ^*-medible*$\}$ *es una σ-álgebra.*

(b) $\mu^*\big|_{\mathcal{A}^*}$ *es una medida completa.*

Teorema H.0.6 (de Caratheodory II). *Sea* $X \neq \varnothing$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ *un álgebra y* $\mu_0 \colon \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ *una premedida, entonces*

(a) $\mathcal{A}^*$ *es una* σ*-álgebra que contiene a* $\mathcal{A}$*.*

(b) $\mu^*\big|_{\mathcal{A}^*}$ *es una medida que extiende a* μ_0*.*

.

$\boxed{3.}$ Demuestra que la intersección de una familia de σ-álgebras es una σ-álgebra.

Proposición H.0.7. *Sean* Σ_1, Σ_2 *dos* σ*-álgebras en un conjunto* $X \neq \varnothing$

$$\implies \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \text{ es una } \sigma\text{-álgebra en } X.$$

***Demostración*:** Comprobamos las propiedades de la `sigma-algebra/`Definición 1:

(i) Se tiene que $X \in \Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ porque $X \in \Sigma_1, \Sigma_2$.

(ii) $E \in \Sigma \implies E \in \Sigma_1, \Sigma_2 \implies E^c \in \Sigma_1, \Sigma_2 \implies E^c \in \Sigma$.

(iii) Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma \implies \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma_1, \Sigma_2 \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma_1, \Sigma_2 \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$.

Concluimos que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ es una σ-álgebra en X. ■

$\boxed{4.}$ Decide si la unión de dos σ-álgebras es una σ-álgebra.

$\boxed{5.}$ Demuestra que la familia de intervalos $\{(a, b] : a < b\}$ genera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\boxed{6.}$ Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Demuestra:

(a) $\max\{f, g\}$ es medible.

(b) $f + g$ es medible.

(c) Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $h \circ f$ es medible.

$\boxed{7.}$ Sean $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funciones medibles. Demuestra:

(a) $\inf_n f_n$ es medible.

(b) $\liminf_n f_n$ es medible.

$\boxed{8.}$ Sea f medible. Demostrar que existe un conjunto $A \subseteq \mathcal{F}$ tal que $f^{-1}(A) \subseteq \{0\}$ y $f^{-1}(A^c) \subseteq \{0\}$. Decide si A es necesariamente único.

$\boxed{9.}$ Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ una colección creciente, es decir, $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo n. Demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

$\boxed{10.}$ Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ una colección decreciente, es decir, $B_{n+1} \subseteq B_n$ para todo n.

(a) Si existe k tal que $\mu(B_k) < \infty$, demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right).$$

(b) Si no existe ese valor de k, demuestra que la fórmula de arriba puede ser falsa.

$\boxed{11.}$ Demuestra que si $f \geq 0$ y además $\int f\, d\mu = 0$, entonces $f(x) = 0$ en casi todo punto.

$\boxed{12.}$ Demuestra que si $f \geq 0$ es una función medible, la fórmula

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathcal{F},$$

define una medida sobre $\mathcal{F}$.

$\boxed{13.}$ Demuestra el lema de Fatou usando el teorema de la convergencia monótona.

Ejercicio H.0.1. Demuestra que para Σ una σ-álgebra no finita $\implies$ Σ es no numerable.

H.1 Espacios de probabilidad

En todos los ejercicios, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad.

H.1.1 Ejercicios básicos

$\boxed{1.}$ (Principio de inclusión-exclusión) Sea $\{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{F}$. Demostrar

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) &= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) \\ &= \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \sum_{\substack{I \subset \mathbb{N}_n \\ |I|=m}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in I} A_j\right).\end{aligned}$$

***Solución*:** Observamos que para $n = 1$ se cumple trivialmente. Para $n = 2$ podemos expresar $A_1 \cup A_2$ como la unión de sus partes disjuntas: $A_1 \setminus A_2$, $A_1 \cap A_2$ y $A_2 \setminus A_1$

$$\begin{aligned}\implies \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1 \setminus A_2) + \mathbb{P}(A_2 \setminus A_1) + 2\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \setminus A_2 \sqcup A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_2 \setminus A_1 \sqcup A_1 \cap A_2) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2).\end{aligned}$$

Luego despejando obtenemos $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$.

Supongamos por inducción que se cumple para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, entonces para $n + 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right) = \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cup \bigcup_{j=1}^n A_j\right) &\overset{\substack{\text{caso } n=2 \\ \downarrow}}{=} \mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) - \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \bigcup_{j=1}^n A_j\right) \\ &\overset{\substack{\text{caso inductivo} \\ \downarrow}}{=} \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \sum_{\substack{I \subset \mathbb{N}_n \\ |I|=m}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in I} A_j\right) - \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \bigcap_{j\in I} A_j\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^{m-1} \sum_{\substack{I \subset \mathbb{N}_{n+1} \\ |I|=m}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in I} A_j\right).\end{aligned}$$

■

$\boxed{2.}$ (Desigualdades de Bonferroni) Sea $\{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{F}$. Demostrar

(a) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)$.

(b) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$.

(c) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k)$.

(d) $\cdots$

***Solución*:**

(a)

$\boxed{3.}$ Sean X e Y v.a. Sea $A \in \mathcal{F}$. Definimos

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & \omega \in A, \\ Y(\omega), & \omega \in A^c. \end{cases}$$

Demostrar que Z es una v.a.

***Solución*:** Basta ver que Z es una función medible, es decir que $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : Z^{-1}(E) \in \mathcal{F}$. Sea $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} Z^{-1}(E) \overset{\overset{\text{def}}{\downarrow}}{=} \{\omega \in \Omega : Z(\omega) = E\} &= \{\omega \in A : X(\omega) \in E\} \cup \{\omega \in A^c : Y(\omega) \in E\} \\ &= A \cap X^{-1}(E) \cup A^c \cap Y^{-1}(E). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{F}$ es σ-álgebra, $A^c \in \mathcal{F}$ y como X e Y son variables aleatorias, $X^{-1}(E), Y^{-1}(E) \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $Z^{-1}(E) \in \mathcal{F}$. ■

$\boxed{4.}$ Decide si la siguiente afirmación es cierta. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ e $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ son variables aleatorias si y solo si $X + Y$ lo es.

***Solución*:** Es falsa, basta considerar $X = \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ en el esp de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$ donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de Cantor e $Y = -X$. Entonces $X + Y = 0$ que sí es una variable aleatoria, pero ni X ni Y lo son.

En la otra dirección la afirmación sí es cierta porque la suma de funciones medibles es medible (`Prop-suma-fn-medibles/`Proposición 1).

$\boxed{5.}$ Enunciar y demostrar:

(a) La fórmula de la probabilidad total.

(b) La regla de Bayes.

***Solución*:**

(a) Se puede encontrar en `Probabilidad-total/`Teorema 1.

(b) Se puede encontrar en `Teo-bayes/`Teorema 1.

$\boxed{6.}$ Probar que si A y B son independientes, entonces también lo son A y B^c, A^c y B, y A^c y B^c.

***Solución*:**

(a) $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \overset{\substack{\text{indep} \\ \downarrow}}{=} \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\,(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$.

(b) De forma completamente análoga al apartado anterior, $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$.

(c) $\mathbb{P}\left(A^c \cap B^c\right) = \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(A^c \cap B) \overset{\substack{\text{(b)} \\ \downarrow}}{=} \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$.

$\boxed{7.}$ Sean $A, B \in \mathcal{F}$.

(a) Probar que A y B son independientes si y solo si $\mathbb{1}_A$ y $\mathbb{1}_B$ son independientes.

(b) Probar que si $\{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{F}$ son independientes, entonces $\{\mathbb{1}_{A_j}\}_{j=1}^n$ son independientes.

***Solución*:**

(a) Como $X = \mathbb{1}_A$ e $Y = \mathbb{1}_B$ solo toman valores en $\{0, 1\}$, se tiene que $\forall E_1, E_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$: $\{\mathbb{1}_A \in E_1\}, \{\mathbb{1}_B \in E_2\} \in \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}, \{\varnothing, B, B^c, \Omega\}$ respectivamente.

Como ya sabemos del ejercicio anterior que A y B son independientes $\iff$ A y B^c, A^c y B, A^c y B^c son independientes y $\varnothing$ y Ω son trivialmente independientes, se tiene que $\mathbb{1}_A$ y $\mathbb{1}_B$ son independientes $\iff$ A y B lo son. ■

(b) La otra implicación del enunciado también es cierta, probemos la equivalencia:

Sean $S_1 \in \sigma\left(\mathbb{1}_{A_1}\right), \ldots, S_n \in \sigma\left(\mathbb{1}_{A_n}\right)$, entonces, por definición de σ-álgebra generada por una variable aleatoria, $\exists E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tales que $\forall j \in \mathbb{N}_n : S_j = \left\{\mathbb{1}_{A_j} \in E_j\right\}$.

Igual que el apartado anterior, $\forall j \in \mathbb{N}_n : \forall E_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \left\{\mathbb{1}_{A_j} \in E_j\right\} \in \left\{\varnothing, A_j, A_j^c, \Omega\right\}$. Luego todo se reduce a probar que $\left\{A_j\right\}_{j \in \mathbb{N}_n}$ son independientes

$$\iff \forall I \subset \mathbb{N}_n : \left\{A_j\right\}_{j \in I} \cup \left\{A_j^c\right\}_{j \in \mathbb{N}_n \setminus I} \text{ son independientes.}$$

$\boxed{8.}$ Sean A, B, C, D, E sucesos independientes. Probar o refutar las afirmaciones siguientes:

(a) Los sucesos $A \cap B$ y $C^c \cup (D \cap E^c)$ son independientes.

(b) $A \cup B$ y $A \cap C$ son independientes.

(c) $\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C)$ (se supone que $\mathbb{P}(C) > 0$).

***Solución*:**

(a) Sean los π-sistemas $\Pi_1 = \{A, B, A\cap B\}$ y $\Pi_2 = \{C, D, E, C\cap D, C\cap E, D\cap E\}$, son independientes por serlo A, B, C, D, E. Entonces, por la `Prop-indep-pi-sistemas-imp-indep-sigma-al` $\sigma(\Pi_1)$ y $\sigma(\Pi_2)$ son independientes. Como $A \cap B \in \sigma(\Pi_1)$ y $C^c \cup (D \cap E^c) \in \sigma(\Pi_2)$, se tiene que son independientes. ■

(b) Observamos que $(A \cup B) \cap (A \cap C) = (A \cap C) \cup (A \cap B \cap C) = A \cap C$ luego

$$\mathbb{P}\left((A \cup B) \cap (A \cap C)\right) = \mathbb{P}(A \cap C)$$

que es distinto de $\mathbb{P}(A \cup B) \cdot \mathbb{P}(A \cap C)$ para $\mathbb{P}(A \cup B) \neq 1$. Por ejemplo, consideramos $\Omega = \mathbb{N}_8$ con $\forall j \in \mathbb{N}_8 : \mathbb{P}(\{j\}) = 1/8$ y $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$, $C = \{1, 3, 5, 7\}$, entonces A, B, C son independientes porque

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C)\mathbb{P}\left(\{1\}\right) = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

Sin embargo, $\mathbb{P}\left((A \cup B) \cap (A \cap C)\right) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}\left(\{1, 3\}\right) = 1/4$ y

$$\mathbb{P}(A \cup B) \cdot \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}\left(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\right) \cdot \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \neq \frac{1}{4}.$$

(c) Al condicionar por un suceso independiente no se altera la probabilidad:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B \mid C) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indep}}}{=} \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\
&= \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)} \cdot \frac{\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indep}}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \cdot \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \\
&= \mathbb{P}(A \mid C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C)
\end{aligned}$$

luego la afirmación es cierta. ■

$\boxed{9.}$ Resolver el ejercicio anterior suponiendo solamente que los cinco sucesos son independientes dos a dos.

Solución:

(a) El argumento expuesto en el ejercicio anterior ya no funcionaría puesto que la independencia dos a dos no implica la independencia de los π-sistemas definidos.

(b) La afirmación sigue siendo falsa y el mismo contraejemplo lo prueba ya que independencia $\implies$ independencia dos a dos.

(c) Es falsa y basta considerar el ejemplo del ejercicio 18 donde A, B, C son independientes dos a dos pero no lo son los tres a la vez. Entonces,

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(\{1\})}{\mathbb{P}(\{1,4\})} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \mid C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \cdot \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(\{1\})}{\mathbb{P}(\{1,4\})} \cdot \frac{\mathbb{P}(\{1\})}{\mathbb{P}(\{1,2\})} = \frac{1/4}{1/2} \cdot \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{4}$$

Luego $\mathbb{P}(A \cap B \mid C) \neq \mathbb{P}(A \mid C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C)$.

$\boxed{10.}$ Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. que toman valores en conjuntos numerables $S_1, \ldots, S_n$ respectivamente. Demostrar que si para todos $x_j \in S_j$, $1 \leq j \leq n$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j = x_j), \tag{H.1}$$

entonces las X_j son independientes.

***Solución*:** Sean $A_1 \in \sigma(X_1), \ldots, A_n \in \sigma(X_n)$ entonces $\exists E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tales que $\forall j \in \mathbb{N}_n : A_j = \{X_j \in E_j\}$ y como las X_j son discretas, $\{X_j \in E_j\} = \bigsqcup_{x_j \in S_j \cap E_j} \{X_j = x_j\}$.

$$\begin{aligned}
\implies \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \in E_j\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} \bigsqcup_{x_j \in S_j \cap E_j} \{X_j = x_j\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{x_1 \in S_1 \cap E_1} \left[\{X_1 = x_1\} \cap \bigcap_{j=2}^{n} \bigsqcup_{x_j \in S_j \cap E_j} \{X_j = x_j\}\right]\right) \\
&= \sum_{x_1 \in S_1 \cap E_1} \mathbb{P}\left(\{X_1 = x_1\} \cap \bigcap_{j=2}^{n} \bigsqcup_{x_j \in S_j \cap E_j} \{X_j = x_j\}\right) \\
&= \sum_{x_1 \in S_1 \cap E_1} \cdots \sum_{x_n \in S_n \cap E_n} \mathbb{P}\left(\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}\right) \\
&\overset{\overset{\text{(H.1)}}{\downarrow}}{=} \sum_{x_1 \in S_1 \cap E_1} \cdots \sum_{x_n \in S_n \cap E_n} \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_j = x_j\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{11.}$ Demostrar que una variable aleatoria no discreta puede no tener densidad.

***Solución*:** Basta considerar una variable aleatoria que no sea ni discreta ni absolutamente continua. Consideramos en $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$ la variable aleatoria $X(\omega) = \omega \cdot \mathbb{1}_{[1/2,1]}(\omega)$.

(a) Para ver que X no es discreta, supongamos por reducción al absurdo que $\exists S \subset [0,1]$

numerable tal que $\mathbb{P}(X \notin S) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \in [1/2, 1] \setminus S\right) &= \mathbb{P}\left(X \in \left[1/2, 1\right]\right) - \sum_{x \in S \cap \left[1/2,1\right]} \mathbb{P}(X = x) \\ &= \mathbb{P}\left(X \in \left[1/2, 1\right]\right) - \sum_{x \in S \cap \left[1/2,1\right]} m(\{x\}) = \mathbb{P}\left(X \in \left[1/2, 1\right]\right) = 1/2 \neq 0.\end{aligned}$$

(b) Veamos ahora que X no tiene densidad: Supongamos que sí la tiene, entonces $\exists f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall E \in \mathcal{B}([0,1]) : \mathbb{P}(X \in E) = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$. Sin embargo, si consideramos $E = \{0\}$, se tiene que

$$\mathbb{P}(X = 0) = m\left(\left[0, 1/2\right)\right) = 1/2 \neq 0 = m(\{0\}) \cdot f(0) = \int_{\{0\}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

H.1.2 Problemas

$\boxed{12.}$ Sean X e Y variables aleatorias, sean $E, F \in \mathcal{F}$ disjuntos, y

$$Z(\omega) = \begin{cases} Y(\omega), & \omega \in E, \\ 1, & \omega \in F, \\ X(\omega), & \omega \in (E \cup F)^c. \end{cases}$$

(a) Demostrar que Z es una variable aleatoria.

(b) Describir $\sigma(Z)$ (en términos de X, Y, E y F).

Solución:

(a) Basta ver que Z es una función medible, es decir que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : Z^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

$$Z^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in B\} = \left(Y^{-1}(B) \cap E\right) \cup F \cup \left(X^{-1}(B) \cap (E \cup F)^c\right).$$

Como X e Y son variables aleatorias, $X^{-1}(B), Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ y como $E, F \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es σ-álgebra, toda combinación numerable de complementarios, intersecciones y uniones de conjuntos en $\mathcal{F}$ también está en $\mathcal{F}$. Por lo tanto, $Z^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. ■

(b) Por definición, la σ-álgebra generada por Z es

$$\sigma(Z) = \left\{Z^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$$

$\boxed{13.}$ Construir una función $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ tal que:

(a) $F(x,y) = 1$ si $x > x_0$, $y > y_0$, $F(x,y) = 0$ si $x < x_1$, $y < y_1$,

(b) $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$ implica $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$,

(c) F es continua por la derecha (en cada variable),

y tal que $\mu(\{(-\infty, a] \times (-\infty, b]\}) := F(a, b)$ no define una medida de probabilidad.

***Solución*:** Para definir una medida sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ en $\mathbb{R}^2$ basta con definirla para rectángulos. En este caso, suponiendo que F define una medida, la medida del rectángulo de (x_1, y_1) a (x_2, y_2) es $\mu\left((x_1, x_2] \times (y_1, y_2]\right) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$.

Consideramos el siguiente ejemplo para F:

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 1 \wedge y \geq 1 \\ 2/3 & \text{si } (0 \leq x < 1 \wedge y \geq 1) \vee (0 \leq y < 1 \wedge x \geq 1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que cumple las propiedades del enunciado.

Sin embargo, la medida del rectángulo $(1/2, 3/2] \times (1/2, 3/2]$ es $-1/3 \notin [0, 1]$, por lo que F no define una medida de probabilidad.

$\boxed{14.}$ Demostrar que si a una F que cumpla (a), (b) y (c) se le suma la condición

$$F(y_1, y_2) - F(x_1, y_2) - F(y_1, x_2) + F(x_1, x_2) \geq 0 \quad \text{para todos } x_1, x_2, y_1, y_2,$$

entonces $\mu(\{(-\infty, a] \times (-\infty, b]\}) := F(a, b)$ define una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^2$.

***Solución*:** Para definir una medida sobre $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ en $\mathbb{R}^2$ basta con definirla para rectángulos. Igual que el el ejercicio anterior, se tiene que la medida del rectángulo de (x_1, y_1) a (x_2, y_2) es $\mu\left((x_1, x_2] \times (y_1, y_2]\right) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$.

Como μ se define para cumplir las propiedades de la definición de medida, ya sabemos que es una medida y sabemos que es positiva porque lo es para rectángulos (por la propiedad del enunciado). Solo falta ver que $\mu(\mathbb{R}^2) = 1$:

Sea la sucesión creciente de conjuntos $(R_n := (-n, n] \times (-n, n])_{n \in \mathbb{N}}$, entonces $R_n \xrightarrow{n \to \infty} \mathbb{R}^2$ y, por el teorema de convergencia monótona, tenemos que

$$\mu(\mathbb{R}^2) = \lim_{n \to \infty} \mu(R_n) = \lim_{n \to \infty} F(n, n) - F(-n, n) - F(n, -n) + F(-n, -n) = 1.$$

Por tanto, μ es una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^2$. ∎

$\boxed{15.}$ Sea X una v.a. Demostrar que si F_X es continua, entonces $Y = F_X(X)$ tiene distribución uniforme en $[0, 1]$. Demostrar que la condición de continuidad es necesaria en general.

***Solución*:** Basta ver que $\mathbb{P}\,(Y \leq t) = t$ para $t \in (0,1)$. Como $F_X(x)$ es continua, tenemos

$$\{Y \leq t\} = \{F_X(X) \leq t\} = \{X \leq a : F_X(a) = t\}$$

porque la continuidad de F_X implica la existencia de algún $a \in \mathbb{R}$ tal que $F_X(a) = t$ para cualquier $t \in (0,1)$. Por lo tanto, $\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(a) = t$.

La condición de continuidad es necesaria porque tomado $X \equiv 1$ constante, $F_X(x) = \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$ que no es continua. En este caso, $Y = F_X(X) = 1$ con probabilidad 1, que no tiene distribución uniforme en $[0,1]$.

$\boxed{16.}$ Sean X e Y v.a. Demostrar que Y es medible con respecto a $\sigma(X)$ si y solo si $Y = f(X)$ para alguna función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible.

***Solución*:** Queremos ver que Y $\sigma(X)$ medible $\iff \exists f$ medible tal que $Y = f(X)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $Y = f(X)$ con f Borel medible y $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces

$$Y^{-1}(E) = \{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) \in E\} = (f \circ X)^{-1}(E) = X^{-1}\left(f^{-1}(E)\right) \in \sigma(X).$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea Y $\sigma(X)$-medible, entonces $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : Y^{-1}(E) \in \sigma(X)$. Dividimos en casos:

Caso 1: Sea $Y = \mathbb{1}_A$ con $A \in \sigma(X)$, entonces $\exists E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $A = X^{-1}(E)$

$$\implies \forall \omega \in \Omega : Y(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) = \mathbb{1}_{X^{-1}(E)}(\omega) = \mathbb{1}_E(X(\omega)).$$

Luego hemos encontrado una función $f = \mathbb{1}_E$ medible tal que $Y = f(X)$.

Caso 2: Para $Y = \sum_{j=1}^n a_j \mathbb{1}_{A_j}$ simple, por linealidad, $Y = f(X)$ con $f = \sum_{j=1}^n a_j \mathbb{1}_{E_j}$.

Caso 3: Para Y función no negativa, $\exists\,(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente de funciones simples tal que $s_n \xrightarrow{n\to\infty} Y$. Por lo tanto

$$Y(\omega) = \liminf_{n\to\infty} f_n(X(\omega)) \implies Y = \liminf_{n\to\infty} f_n(X).$$

$\boxed{17.}$ Fijado C con $\mathbb{P}(C) > 0$, decimos que A y B son condicionalmente independientes con respecto a C si $\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C)$. Probar que si $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$,

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C) \iff \mathbb{P}(A \mid C) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C).$$

***Solución*:** Aplicando la `Probabilidad-condicionada`/Definición 1, tenemos

$$\mathbb{P}\,(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}\,(A \mid C) \cdot \mathbb{P}\,(B \mid C) \iff \frac{\mathbb{P}\,(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \mathbb{P}\,(A \mid C) \cdot \frac{\mathbb{P}\,(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \cancel{\mathbb{P}(C)} \cdot \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\cancel{\mathbb{P}(C)}} = \mathbb{P}(A \mid C) \cdot \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\cancel{\mathbb{P}(C)}} \cdot \cancel{\mathbb{P}(C)} \quad \text{porque} \quad \mathbb{P}(C) > 0 \\
&\iff \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)} = \mathbb{P}(A \mid C) \cdot \frac{\cancel{\mathbb{P}(B \cap C)}}{\cancel{\mathbb{P}(B \cap C)}} \quad \text{porque} \quad \mathbb{P}(B \cap C) > 0 \\
&\iff \mathbb{P}(A \mid B \cap C) = \mathbb{P}(A \mid C) \quad \text{por definición de probabilidad condicionada.}
\end{aligned}
$$

■

$\boxed{18.}$ Dar un ejemplo de tres eventos A, B, C independientes dos a dos, que no sean independientes.

***Solución*:** Basta considerar $\Omega = \{1,2,3,4\}$ con $\mathbb{P}(\{j\}) = 1/4$ y $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{1,4\}$. Se tiene que A, B, C son independientes dos a dos porque

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/4 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 1/2 \cdot 1/2 \\
\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/4 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = 1/2 \cdot 1/2 \\
\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/4 = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = 1/2 \cdot 1/2.
\end{aligned}
$$

Sin embargo, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/4 \neq 1/8 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$.

$\boxed{19.}$ Sea $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\{j\}) = \frac{1}{4}$. Encontrar $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}$ que sean independientes[2] pero no generen σ-álgebras independientes.

***Solución*:** Basta tomar $\mathcal{A}_1 = \{\{1,2\}, \{1,3\}\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{\{1,4\}\}$ que son independientes:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{1,2\} \cap \{1,4\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2 = \mathbb{P}(\{1,2\}) \cdot \mathbb{P}(\{1,4\}) \\
\mathbb{P}(\{1,3\} \cap \{1,4\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2 = \mathbb{P}(\{1,3\}) \cdot \mathbb{P}(\{1,4\}).
\end{aligned}
$$

Sin embargo, $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{P}(\Omega)$ y $\sigma(\mathcal{A}_2) = \{\varnothing, \{1,4\}, \{2,3\}, \Omega\}$ que no son independientes porque tienen sucesos en común, por ejemplo $\{1,4\}$: $\mathbb{P}(\{1,4\}) = 1/2 \neq 1/4 = (\mathbb{P}(\{1,4\}))^2$.

$\boxed{20.}$ Sea $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, donde p es un número primo. Supongamos que los elementos de Ω son equiprobables. Demostrar que dos sucesos A y B no pueden ser independientes salvo que $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \in \{0,1\}$.

***Solución*:** Sean $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sucesos independientes, entonces $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. Como los elementos de Ω son equiprobables,

$$
\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{p} = \frac{|A| \cdot |B|}{p^2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \implies |A \cap B| = \frac{1}{p} |A| \cdot |B|.
$$

Si suponemos que $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \notin \{0,1\}$ (es decir, $|A|, |B| \neq 0, p$), entonces como p es primo, $|A|, |B| \nmid p$ y $|A \cap B| \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ lo cual es absurdo.

[2] Se define la independencia para dos conjuntos de sucesos como: $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ son independientes $\iff \forall A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2 : A_1, A_2$ son sucesos independientes.

Por tanto, A y B no pueden ser independientes salvo que $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \in \{0,1\}$. ■

H.1.3 Problema para ampliar

$\boxed{21.}$ (Medida uniforme en $\mathbb{N}$) Sea $\Omega = \mathbb{N}$. Decimos que $A \subset \Omega$ tiene densidad asintótica $\mu(A)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1,2,3,\dots,n\}|}{n} = \mu(A).$$

(a) Decidir si μ define una medida de probabilidad en Ω.

(b) Decidir si puede haber una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ en $\mathbb{N}$ que sea uniforme, es decir, tal que $\mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}(\{m\})$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$.

***Solución*:**

(a) Comprobamos las propiedades de la definición de medida:

i. La primera se cumple: $\mu(\varnothing) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\varnothing \cap \{1,2,3,\dots,n\}|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{n} = 0.$

ii. Sin embargo, la aditividad no se cumple: Sean $\{A_j := \{j\}\}_{j\in\mathbb{N}}$, entonces los A_j son disjuntos dos a dos y $\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\mu\left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \mu(\mathbb{N}) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\mathbb{N} \cap \{1,2,3,\dots,n\}|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1.$$

Ahora bien, $\forall j \in \mathbb{N} : \mu(A_j) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1,2,3,\dots,n\}|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Por tanto, $\mu\left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = 1 \neq 0 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$.

Luego $\underline{\mu \text{ no define una medida en } \Omega}$.

(b) Suponemos por contradicción que existe $\mathbb{P}$ medida de probabilidad uniforme en $\mathbb{N}$, entonces $\forall n, m \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}(\{m\})$, en particular $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}(\{1\})$.

Entonces, por aditividad, como $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}$, se tiene que

$$\mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{1\}).$$

Como $\mathbb{P}$ es medida de probabilidad, esta suma debe converger, pero al ser todos los sumandos iguales e infinitos de ellos, $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\{n\}) = 0$. Entonces $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 0$ y $\mathbb{P}$ no es medida de probabilidad.

Por tanto, $\underline{\text{no puede haber una medida de probabilidad uniforme en } \mathbb{N}}$.

H.2 Esperanza matemática

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

H.2.1 Ejercicios básicos

$\boxed{1.}$ Demostrar $\mathbb{1}_{\bigcup_{j=1}^n A_j} = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - \mathbb{1}_{A_j})$. Tomar esperanzas para demostrar:

(a) El principio de inclusión-exclusión.

(b) Las desigualdades de Bonferroni.

***Solución*:**

$\boxed{2.}$ Demostrar que dos variables aleatorias son incorreladas siempre que sean independientes.

***Solución*:**

$\boxed{3.}$ Demostrar que $\operatorname{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$.

$\boxed{4.}$ Demostrar que si $\{X_j\}_{j=1}^n$ son variables aleatorias independientes dos a dos, entonces

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Var}(X_j).$$

$\boxed{5.}$ Sean $X, Y \in L^1(P)$ tales que para todo conjunto $A \in \mathcal{F}$,

$$\int_A X\, dP = \int_A Y\, dP.$$

Decidir razonadamente si $X = Y$ en casi todo punto.

$\boxed{6.}$ Decidir si la siguiente afirmación es cierta: sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. Si $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, entonces $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente.

$\boxed{7.}$ Sea $a \in \mathbb{R}$. Si X tiene varianza finita, demostrar que $a\,|X|^3 \in L^1(P)$.

$\boxed{8.}$ Decide si existe una sucesión de variables aleatorias $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, independientes y no negativas, tales que $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n < \infty$ en un conjunto de probabilidad $1/2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n = \infty$ en un conjunto de probabilidad $1/2$.

***Solución*:** Que una serie de variables aleatorias independientes converja es un evento de la σ-álgebra de cola, luego por la ley 0-1 de Kolmogorov, la probabilidad de que converja es 0 o 1. Por tanto, no existe tal sucesión.

H.2.2 Problemas

$\boxed{9.}$ Sea $X \geq 0$ c.s. una variable aleatoria, y $p > 0$. Demostrar

$$E[X^p] = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(X > t)\,dt.$$

$\boxed{10.}$ Demostrar que si $X \geq 0$ c.s. es una variable aleatoria integrable,

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq n) \leq E[X] \leq \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(X \geq n).$$

$\boxed{11.}$ (a) Encontrar dos variables aleatorias incorreladas que no sean independientes.

(b) Decidir si existe un número natural $n \geq 2$ tal que si n variables aleatorias son incorreladas entonces dos de ellas son independientes.

(c) Decidir si en toda sucesión infinita de variables aleatorias incorreladas hay dos que son independientes.

Solución:

(a) Sea $X = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 1/3 \\ 0 & \text{con probabilidad } 1/3 \\ -1 & \text{con probabilidad } 1/3 \end{cases}$, entonces $E\left[X^2X\right] = 0$ y $E[X] = 0$

$$\implies X \text{ y } X^2 \text{ son incorreladas pero no independientes.}$$

(b) Definimos en $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$, $\forall n \in \mathbb{N}, x \in [0,1] : X_n(x) = \sin(2\pi n x)$

$$\implies \forall\varepsilon > 0 : \mathbb{P}(X_n \geq 1-\varepsilon) > 0 \wedge \mathbb{P}(X_k \geq 1-\varepsilon) > 0$$

$\{X_n \geq 1-\varepsilon\} \cap \{X_n \geq 1-\varepsilon\} \neq \varnothing$

$\boxed{12.}$ Sea ϕ una función estrictamente convexa, es decir,

$$\phi(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda\phi(a) + (1-\lambda)\phi(b), \quad \lambda \in (0,1),\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que $E[\phi(X)] = \phi(E[X])$ implica que $X = E[X]$ casi seguro.

$\boxed{13.}$ Sea $\epsilon > 0$. Decidir si existe un $\delta > 0$ tal que para toda variable aleatoria $X \in L^2(P)$ con $E[X] = 0$, $\operatorname{Var}(X) = 1$, se tiene

$$\mathbb{P}(|X| > \epsilon) \geq \delta.$$

$\boxed{14.}$ Probar que si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} x\mathbb{P}(|X| \geq x) = 0.$$

Solución: Escribimos la expresión como una integral:

$$\forall t \in \mathbb{R} : t\mathbb{P}(|X| \geq t) = \int_{\{|X|\geq t\}} t \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \leq \int_{\{|X|\geq t\}} |X| \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\Omega} |X| \,\mathbb{1}_{\{|X|\geq t\}} \,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Como $|X| \,\mathbb{1}_{\{|X|\geq t\}} \leq |X|$ y $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ (porque $\mathbb{E}[|X|] < \infty$), por el teorema de convergencia dominada

$$\implies \lim_{t\to\infty} \int_{\Omega} |X| \,\mathbb{1}_{\{|X|\geq t\}} \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\Omega} |X| \lim_{t\to\infty} \mathbb{1}_{\{|X|\geq t\}} \,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

$\boxed{15.}$ Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indep y $\mathbb{P}(A_n) < 1$ para todo n. Demostrar que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty.$$

Solución: Como $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$, entonces $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 0$ y por la independencia

$$0 = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_n)).$$

Tenemos que $\mathbb{P}(A_n) \leq 1/2$ salvo en un número finito de n (o el problema es trivial).

$$0 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_n)) = \prod_{n:\mathbb{P}(A_n) > 1/2} (1 - \mathbb{P}(A_n)) \prod_{n:\mathbb{P}(A_n) \leq 1/2} (1 - \mathbb{P}(A_n)).$$

Entonces, usando que $\forall x \in \left[-1/2, 0\right] : x \leq \frac{1}{2}\log(1+x)$, tenemos

$$\prod_{n:\mathbb{P}(A_n) < 1/2} e^{\frac{2}{2}\log(1-\mathbb{P}(A_n))} \geq e^{2\left(-\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)\right)} \geq 0 \implies \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M} \mathbb{P}(A_n) = \infty.$$

$\boxed{16.}$ Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathbb{P}(A_n) \to 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c \cap A_{n+1}) < \infty$.

(a) Probar que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

(b) Encontrar una sucesión que cumpla las hipótesis del apartado anterior pero a la que no se le pueda aplicar el lema de Borel-Cantelli.

$\boxed{17.}$ Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ y X una variable aleatoria.

(a) Si $0 \le X \in L^2(P)$, demuestra

$$\mathbb{P}(X > 0) \ge \frac{(E[X])^2}{E[X^2]}.$$

(b) Demuestra que

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right).$$

(c) Supón que $\sum_j \mathbb{P}(A_j) = \infty$ y existe una constante $0 < \beta$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=m}^{n} \mathbb{P}(A_j) \ge \beta \quad \text{y} \quad \sum_{m\le i,j\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \le \beta.$$

Aplica (a) a $\sum_n \mathbb{1}A_n$ y usa (b) para demostrar que $\mathbb{P}(\limsup A_n) \ge \beta$.

(d) Decide si en las condiciones de (c) se puede concluir, usando algún resultado de clase, que de hecho $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

$\boxed{18.}$ Sea $X \in L^1(P)$.

(a) Demuestra que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$E[X] = E[X\mathbb{1}X > \alpha] + E[X\mathbb{1}X \le \alpha].$$

(b) Explica si las fórmulas

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X\mathbb{1}X > \alpha) + \mathrm{Var}(X\mathbb{1}X \le \alpha),$$

$$E[X^2] = E[X^2\mathbb{1}X > \alpha] + E[X^2\mathbb{1}X \le \alpha],$$

son ciertas para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Sea $0 \le X \in L^2(P)$. Demuestra que existe una constante c tal que

$$\mathbb{P}\left(X > E[X^2]\right) \le c\frac{(E[X])^2}{E[X^2]}.$$

$\boxed{19.}$ Sea $M(\omega) = \sup_{n\ge1} X_n(\omega)$. Mostrar que:

(a) Si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > x) < \infty,$$

entonces $\mathbb{P}(M < \infty) = 1$.

(b) Si $X_1, X_2, \dots$ son independientes dos a dos y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > x) = \infty \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

entonces $\mathbb{P}(M = \infty) = 1$.

H.2.3 Problemas para ampliar

$\boxed{20.}$ (Hölder implica Jensen)

(a) Demostrar la desigualdad de Young: si a, b son positivos,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(b) Usar la desigualdad de Young para dar una prueba de la desigualdad de Hölder que no utilice la desigualdad de Jensen.

$\boxed{21.}$ (Jensen implica Hölder) Deducir la desigualdad de Jensen en el caso particular $\phi(t) = |t|^p$ de la desigualdad de Hölder.

$\boxed{22.}$ Demostrar el siguiente (importante) corolario de la desigualdad de Hölder: si $f \in L^p$ para algún $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\|f\|_p = \sup_{\{g : \|g\|_{p'} = 1\}} \int fg.$$

$\boxed{23.}$ Demostrar las desigualdades de Hölder y Minkowski en los casos $p = 1$ y $p = \infty$.

$\boxed{24.}$ Decimos que una constante c es la mejor aproximación a X en $L^{\mathbb{P}}(P)$ si

$$E[|X - c|^p] = \inf_{s \in \mathbb{R}} E[|X - s|^p].$$

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.

(a) Sea $X := 2\mathbb{1}[0, 1/3] - \mathbb{1}[2/3, 1]$. Hallar una constante c que mejor aproxime a X en $L^1(P)$. Hacer lo mismo con $L^2(P)$ y $L^\infty(P)$.

(b) Repetir con $Y := 2\mathbb{1}[0, 1/2] - \mathbb{1}[1/2, 1]$. ¿Es c única?

H.3 Convergencia de sucesiones de variables aleatorias

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

$\boxed{1.}$ Encontrar una sucesión $(X_n)_n$ que converja en probabilidad pero que no converja en ningún punto.

***Solución*:** Consideramos la sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$X_1 = \mathbb{1}_{[0,1]},\ X_2 = \mathbb{1}_{[0,1/2]},\ X_3 = \mathbb{1}_{[1/2,1]},\ X_4 = \mathbb{1}_{[0,1/4]},\ X_5 = \mathbb{1}_{[1/4,1/2]},\ \ldots$$

$\boxed{2.}$ Encontrar una sucesión $(X_n)_n$ que converja en probabilidad pero que no converja en $L^{\mathbb{P}}(P)$.

***Solución*:**

$\boxed{3.}$ Encontrar una sucesión $(X_n)_n$ que converja en distribución pero que no converja en probabilidad. Pista: dos variables aleatorias con la misma distribución pueden ser muy diferentes punto a punto.

***Solución*:** Consideramos $\{1,2\}$ con $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = 1/2$ y la sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $\forall n \in \mathbb{N} : X_{2n} = \mathbb{1}_{\{1\}}$ y $X_{2n+1} = \mathbb{1}_{\{2\}}$.

$\boxed{4.}$ Demostrar que si una sucesión $(X_n)_n$ converge en distribución a una constante C, entonces converge en probabilidad.

$\boxed{5.}$ Demostrar que si una sucesión monótona $(X_n)_n$ converge en probabilidad entonces converge casi seguro.

$\boxed{6.}$ Demostrar que si $1 \leq p < q$ y $(X_n)_n$ converge en $L^q(P)$, entonces converge en $L^{\mathbb{P}}(P)$.

$\boxed{7.}$ Decide si la siguiente afirmación es cierta o falsa: sea $s > 0$. La sucesión $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^s}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^s},$$

converge en $\mathcal{L}^2(P)$ si y solo si converge en probabilidad.

***Solución*:** Observamos que X_n tiende en probabilidad a 0 para todo valor de $s > 0$:

$$\mathbb{P}\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^s} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Sin embargo, para que X_n converja en $\mathcal{L}^2(P)$, es necesario que $s \geq 0$:

$$\|X_n - 0\|_2^2 = \left[n^2 \cdot \mathbb{P}\left(X_n = 0\right) + 0 \cdot \mathbb{P}\left(X_n = 0\right)\right]^{1/2} = \left(n^2 \cdot \frac{1}{n^s}\right)^{1/2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff s \geq 2.$$

Por lo tanto, la afirmación es falsa.

$\boxed{8.}$ Asume que $X_n \in L^2(P)$ para todo n. Sea $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, $A_n = \mathbb{E}[S_n]$ y $B_n = \mathrm{Var}(S_n)$. Demuestra que $\lim_{n\to\infty} B_n = \sigma_n^2 = 0$ implica $\dfrac{S_n - A_n}{\sigma_n} \to 0$ en probabilidad.

***Solución*:** Por la desigualdad de Chebyshev, tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - A_n}{\alpha_n}\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|S_n - A_n| > \varepsilon\alpha_n\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2\alpha_n^2}\mathbb{V}(S_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$\boxed{9.}$ Si Ω es numerable y $\mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega)$, demostrar que la convergencia en probabilidad implica la convergencia casi seguro en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

***Solución*:** Supongamos por contradicción que $\exists A \subset X(\Omega) : \mathbb{P}(A) > 0$ donde X no converge casi seguro. Entonces, A es numerable ($X(\Omega)$ lo es) y, como $\mathbb{P}(A) > 0$, existe un $\omega \in A : \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ tal que $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge.

Sea X tal que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$ (que existe por hipótesis).

$\boxed{10.}$ Si $(X_n)_n$ son independientes y $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$, demostrar que $X_n \to 0$ casi seguro si y solo si $\sum_n p_n < \infty$.

***Solución*:** Vamos a hacer ambas implicaciones a la vez dado que, bajo independencia, el lema de borel Cantelli es un si y solo si.

Definimos $A_n = \{X_n = 1\}$, entonces, como las X_n son independientes, los A_n son independientes. Por el lema de Borel-Cantelli, $\displaystyle\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \sum_n p_n < \infty \iff \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$

$$\iff \text{ para casi todo } \omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0 \iff X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.s.}} 0.$$

$\boxed{11.}$ Asume que $X_n = Y_n$ en distribución para todo n. Demuestra que aunque $X_n \to 0$ casi seguro, puede ser que Y_n no converja en ningún punto.

***Solución*:** Consideramos la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la solución del ejercicio 1 y $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$Y_1 = \mathbb{1}_{[0,1]},\ Y_2 = \mathbb{1}_{[0,1/2]},\ Y_3 = \mathbb{1}_{[1/2,1]},\ Y_4 = \mathbb{1}_{[0,1/4]},\ Y_5 = \mathbb{1}_{[1/4,1/2]},\ \ldots$$

$\boxed{12.}$ Si X_n es independiente de Y_n para todo n, $X_n \to X$ e $Y_n \to Y$ en distribución, y X e Y son independientes, demuestra que $X_n + Y_n \to X + Y$ en distribución.

Referenciado en

- `Asignaturas`