Hugo Marquerie 25/03/2025

Propiedades de la función de distribución

Proposición 1 (Propiedades de F_X). *Sea F_X fn de distribución de X, entonces*

(1) $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1 \wedge \lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0.$

(2) $\forall t \in \mathbb{R} : \lim_{\substack{s\to t\\ s>t}} F_X(s) = F_X(t).$

(3) $\forall t \in \mathbb{R} : \lim_{\substack{s\to t\\ s<t}} F_X(s) = \mathbb{P}(X < t)$

(4) $\forall t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = t) = F_X(t) - \lim_{\substack{s\to t\\ s<t}} F_X(s).$

***Demostración*:** Recordamos la definición: $F_X(t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$

(1) Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to \infty$, definimos $\forall n \in \mathbb{N} : A_n := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t_n\}$ y la sucesión de funciones medibles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $f_n := \mathbb{1}_{A_n}$. Entonces, como $\forall \omega \in \Omega : f_n(\omega) \leq 1$ y $\int_\Omega 1 \, d\mathbb{P} = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ (luego $1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$), podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} F_X(t_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{A_n} \, d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mathbb{P} \overset{\substack{\text{TCD}\\ \downarrow}}{=} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mathbb{P}$$
$$= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} \, d\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Análogamente, si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ cumple que $t_n \to -\infty$, podemos definir A_n y f_n como antes y aplicar el teorema de la convergencia dominada de igual manera:

$$\lim_{n\to\infty} F_X(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mathbb{P} \overset{\substack{\text{TCD}\\ \downarrow}}{=} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$$

(2) Sea $t \in \mathbb{R}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $t_n \to t$ con $\forall n \in \mathbb{N} : t_n > t$. Definimos A_n y f_n como antes y aplicamos el teorema de la convergencia dominada de nuevo:

$$\lim_{n\to\infty} F_X(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mathbb{P} \overset{\substack{\text{TCD}\\ \downarrow}}{=} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$
$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) = \mathbb{P}(X \leq t) = F_X(t).$$

(3) Sea $t \in \mathbb{R}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $t_n \to t$ con $\forall n \in \mathbb{N} : t_n < t$.

■

Referenciado en

- `Prop-fn-exists-var-aleatoria`