Hugo Marquerie 17/03/2025

Convergencia casi segura implica en probabilidad

Proposición 1. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $X_n \xrightarrow{c.s.} X \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

***Demostración*:** Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que $\exists A \in \Sigma : \mathbb{P}(A) = 1 : \forall \omega \in A^c : X_n(\omega) \to X(\omega)$. Para $\omega \in A^c$, $\limsup_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0$

$$\implies \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Por otro lado, por el lema de Fatou (ejercicio)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right\}\right) &\geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \geq 0.\end{aligned}$$

■