Hugo Marquerie 27/02/2025

Desigualdad de Minkowski

Proposición 1 (Desigualdad de Minkowski). *Sea* $1 \le p \le \infty$ *y* $X, Y \in \mathcal{L}^p(\mathbb{P})$

$$\Longrightarrow \|X+Y\|_p \le \|X\|_p + \|Y\|_p .$$

***Demostración*:** Dividimos la demostración en tres casos:

I. Si $p = 1$, entonces podemos aplicar directamente la desigualdad triangular de $|\cdot|$:

$$\|X+Y\|_1 = \int_\Omega |X(\omega)+Y(\omega)| \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \overset{\overset{\triangle}{\downarrow}}{\le} \int_\Omega \big[\, |X| + |Y| \,\big] \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$
$$\overset{\overset{\text{lineal}}{\downarrow}}{=} \int_\Omega |X| \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) + \int_\Omega |Y| \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \|X\|_1 + \|Y\|_1 .$$

II. Si $1 < p < \infty$, entonces

$$\begin{aligned} |X(\omega)+Y(\omega)|^p &= |X(\omega)+Y(\omega)|\,|X(\omega)+Y(\omega)|^{p-1} \\ &\le |X(\omega)|\,|X(\omega)+Y(\omega)|^{p-1} + |Y(\omega)|\,|X(\omega)+Y(\omega)|^{p-1} . \end{aligned} \tag{1}$$

Integrando en el lado derecho, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |X(\omega)|\,|X(\omega)+Y(\omega)|^{p-1} \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) &\overset{\overset{\text{Hölder}}{\downarrow}}{\le} \|X\|_p \left\| |X+Y|^{p-1} \right\|_{p'} = \\ &\le \|X\|_p \left[\int_\Omega |X+Y|^{(p-1)p'} \,\mathrm{d}P \right]^{1/p'} = \\ &\le \|X\|_p \left[\int_\Omega |X+Y|^{p} \,\mathrm{d}P \right]^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p'}} = \|X\|_p \|X+Y\|_p^{p/p'} . \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \|X+Y\|_p^p &\overset{\overset{(1)}{\downarrow}}{=} \left[\int_\Omega |X(\omega)|\,|X(\omega)+Y(\omega)|^{p-1} \,\mathrm{d}P(\omega) + \int_\Omega |Y(\omega)|\,|X(\omega)+Y(\omega)|^{p-1} \,\mathrm{d}P(\omega) \right]^{p/p'} \\ &\overset{\overset{(2)}{\downarrow}}{\le} \|X\|_p \|X+Y\|_p^{p/p'} + \|Y\|_p \|X+Y\|_p^{p/p'} = \|X+Y\|_p^{p/p'} \left[\|X\|_p + \|Y\|_p \right] . \end{aligned}$$
$$\Longleftrightarrow \|X+Y\|_p^{p-p/p'} = \|X+Y\|_p \le \|X\|_p + \|Y\|_p .$$

III. Si $p = \infty$, entonces tomamos

$$A_1 \subset \Omega : \|X\|_\infty = \sup_{\omega \in A_1^c} |X(\omega)| \quad \text{y} \quad A_2 \subset \Omega : \|Y\|_\infty = \sup_{\omega \in A_2^c} |Y(\omega)| .$$

Definimos $A := A_1 \cup A_2$, entonces

$$\begin{aligned}
\|X\|_\infty + \|Y\|_\infty &= \sup_{\omega \in A_1^c} |X(\omega)| + \sup_{\omega \in A_2^c} |Y(\omega)| \geq \sup_{\omega \in A^c} |X(\omega)| + \sup_{\omega \in A^c} |Y(\omega)| \\
&\geq \sup_{\omega \in A^c} \big[\, |X(\omega)| + |Y(\omega)| \,\big] \underset{\substack{\uparrow \\ \triangle}}{\geq} \sup_{\omega \in A^c} |X(\omega) + Y(\omega)| \\
&\geq \inf_{\substack{B \in \Sigma \\ \mathbb{P}(B)=0}} \sup_{\omega \in B^c} |X(\omega) + Y(\omega)| = \|X + Y\|_\infty .
\end{aligned}$$

Como se ha demostrado en los tres casos, se tiene que $\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$. ■

Referenciado en

- `Lem-esp-lp-vectorial`
- `Lem-esp-lp-normado`