Hugo Marquerie March 2, 2025

Relación de orden

Definición 1 (Relación de orden). Sea X un conjunto, la relación $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ es de orden $\iff$

(i) Reflexividad: $\forall x \in X : x \mathcal{R} x$.

(ii) Antisimetría: $\forall x, y \in X : x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \implies x = y$.

(iii) Transitividad: $\forall x, y, z \in X : x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \implies x \mathcal{R} z$.

Al par $(X, \mathcal{R})$ se le llama **conjunto ordenado**.

Definición 2 (Máximo y mínimo). Sea $(X, \preceq)$ un conjunto ordenado y $A \subseteq X$, $x \in A$ es el máximo de A ($x = \max A$) $\iff \forall a \in A : a \preceq x$.

Análogamente, $x \in A$ es el mínimo de A ($x = \min A$) $\iff \forall a \in A : x \preceq a$.

Definición 3 (Supremo e ínfimo). Sea $(X, \preceq)$ un conjunto ordenado y $A \subseteq X$, $x \in X$ es el supremo de A ($x = \sup A$) $\iff$ x es la menor de las cotas superiores de A

$$\iff \forall a \in A : a \preceq x \quad \wedge \quad \forall y \in X : \forall a \in A : a \preceq y : x \preceq y.$$

Análogamente, $x \in X$ es el ínfimo de A ($x = \inf A$)

$$\iff \forall a \in A : x \preceq a \quad \wedge \quad \forall y \in X : \forall a \in A : y \preceq a : y \preceq x.$$

Definición 4 (Maximal y minimal). Sea $(X, \preceq)$ un conjunto ordenado y $A \subseteq X$, $x \in A$ es un elemento maximal de $A \iff \forall a \in A : x \preceq a \implies x = a$.

Análogamente, $x \in A$ es un elemento minimal de $A \iff \forall a \in A : a \preceq x \implies x = a$.

Definición 5 (Orden total). Sea $(X, \preceq)$ un conjunto ordenado, $\preceq$ es de orden total

$$\iff \forall x, y \in X : x \preceq y \vee y \preceq x.$$

Ejemplos 1 (de relaciones de orden).

$\boxed{1}$ La relación de menor o igual en $\mathbb{R}$ es de orden total.

$\boxed{2}$ La relación de divisibilidad en $\mathbb{Z}$ es de orden parcial.

Referenciado en

- `Estructura-diferenciable`