Hugo Marquerie 25/01/2025

Métrica

Definición 1 (Métrica). Sea $X \neq \varnothing$, $d \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **métrica** $\iff$

(i) $\forall x, y \in X : d(x,y) \geq 0$.

(i)' $\forall x, y \in X : d(x,y) = 0 \iff x = y$.

(ii) Simetría: $\forall x, y \in X : d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) Desigualdad triangular: $\forall x, y, z \in X : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

$\forall x, y \in X$: a la imagen $d(x,y)$ se le llama **distancia** entre x e y.

Teorema 1 (Desigualdad triangular inversa). *Sea (X,d) un espacio métrico*

$$\implies \forall x, y, z \in X : |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$$

***Demostración*:** Sean $x, y, z \in X$, aplicando la desigualdad triangular obtenemos

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \iff d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$$
$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) \iff d(y,z) - d(x,z) \leq d(x,y)$$

Por lo que $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$. ■

Observación 2. La demostración del Teorema 1 es reversible, es decir, la desigualdad triangular inversa es equivalente a la desigualdad triangular.

Referenciado en

- `Limite-fn`
- `Metrica-inducida`
- `Sucesion-cauchy`
- `Con-acotado`
- `Esp-metrizable`
- `Metrica-cordal`
- `Desigualdad-triangular-inversa`

- `Esp-metrico`
- `Completitud-metrica`