

Teorema de convergencia monótona

Teorema 1 (de convergencia monótona para conjuntos). Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ una sucesión creciente (i.e. $\forall n \in \mathbb{N} : E_n \subset E_{n+1}$)

$$\implies \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcap_{i=1}^n E_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

Demostración: Definimos $F_1 = E_1$ y $\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+1} = E_{n+1} \setminus E_n$. Entonces la sucesión $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de conjuntos μ -medibles disjuntos. Si definimos $E_0 = \emptyset$, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mu(E_n) &= \mu((E_n \setminus E_{n-1}) \sqcup E_{n-1}) \stackrel{\text{aditividad}}{=} \mu(E_n \setminus E_{n-1}) + \mu(E_{n-1}) \\ \iff \mu(E_n) - \mu(E_{n-1}) &= \mu(E_n \setminus E_{n-1}) = \mu(F_n) \end{aligned}$$

Por tanto, como $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n$:

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \mu \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \stackrel{\text{aditividad}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(E_n) - \mu(E_{n-1})) \stackrel{\text{suma telescópica}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

■

Teorema 2 (de convergencia monótona para funciones). Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones medibles no negativas

$$\implies \forall E \in \Sigma : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

Demostración: $\forall x \in X, n \in \mathbb{N} : f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \implies \forall x \in X : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x)$ y f es medible por serlo todas las f_n . ■

Referenciado en

- Quijote-infinito
- Lem-fatou
- Prop-esperanza-fn

- Prop-indep-pi-sistemas-imp-indep-sigma-algebras