Hugo Marquerie 17/03/2025

Convergencia en probabilidad implica en distribución

Proposición 1. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \implies X_n \xrightarrow{d} X$.

***Demostración*:** Sea $t \in \mathbb{R}$ punto de continuidad de F_X y $\varepsilon > 0$, veamos que

$$F_{X_n}(t) \leq F_X(t+\varepsilon) + \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \tag{1}$$

$$F_{X_n}(t) \geq F_X(t-\varepsilon) - \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right). \tag{2}$$

Si aceptamos (1) y (2), entonces

$$F_X(t-\varepsilon) - \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \leq F_{X_n}(t) \leq F_X(t+\varepsilon) + \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right).$$

Como $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, entonces $\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\implies F_X(t-\varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) \leq F_X(t+\varepsilon).$$

Tomando límites en ε, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_X(t-\varepsilon) \leq \lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(t) \leq \lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_X(t+\varepsilon)$, como F_X es continua en t, entonces concluimos que $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$, luego $X_n \xrightarrow{d} X$.

Veamos que se cumplen las desigualdades

(1) Basta ver que $\{X_n \leq t\} \subset \{X \leq t+\varepsilon\} \cup \{|X_n - X| > \varepsilon\}$, operamos

$$\begin{aligned}\{X_n \leq t\} &= \Big[\{X_n \leq t\} \cap \{|X_n - X| \leq \varepsilon\}\Big] \sqcup \Big[\{X_n \leq t\} \cap \{|X_n - X| > \varepsilon\}\Big] \\ &\subset \{X \leq t+\varepsilon\} \cup \{|X_n - X| > \varepsilon\}.\end{aligned}$$

(2) Se hace de forma análoga.

■