

# Propiedades de la función de distribución

**Proposición 1 (Propiedades de  $F_X$ ).** Sea  $F_X$  fn de distribución de  $X$ , entonces

- $$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) &= 1 \wedge \lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0. & (3) \quad \forall t \in \mathbb{R} : \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s < t}} F_X(s) &= \mathbb{P}(X < t) \\
 (2) \quad \forall t \in \mathbb{R} : \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s > t}} F_X(s) &= F_X(t). & (4) \quad \forall t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = t) &= F_X(t) - \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s < t}} F_X(s).
 \end{aligned}$$

**Demostración:** Recordamos la definición:  $F_X(t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\})$

1. Sea  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tal que  $t_n \rightarrow \infty$ , definimos  $\forall n \in \mathbb{N} : A_n := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t_n\}$  y la sucesión de funciones medibles  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada por  $f_n := \mathbb{1}_{A_n}$ . Entonces, como  $\forall \omega \in \Omega : f_n(\omega) \leq 1$  y  $\int_{\Omega} 1 d\mathbb{P} = \mathbb{P}(\Omega) = 1$  (luego  $1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ ), podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada a  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y obtenemos

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(t_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{A_n} d\mathbb{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mathbb{P} \stackrel{\text{TCD}}{=} \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mathbb{P} \\
 &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n} d\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.
 \end{aligned}$$

Análogamente, si  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  cumple que  $t_n \rightarrow -\infty$ , podemos definir  $A_n$  y  $f_n$  como antes y aplicar el teorema de la convergencia dominada de igual manera:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mathbb{P} \stackrel{\text{TCD}}{=} \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

2. Sea  $t \in \mathbb{R}$  y  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $t_n \rightarrow t$  con  $\forall n \in \mathbb{N} : t_n > t$ . Definimos  $A_n$  y  $f_n$  como antes y aplicamos el teorema de la convergencia dominada de nuevo:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(s_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mathbb{P} \stackrel{\text{TCD}}{=} \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \\
 &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) = \mathbb{P}(X \leq t) = F_X(t).
 \end{aligned}$$

3. Sea  $t \in \mathbb{R}$  y  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $t_n \rightarrow t$  con  $\forall n \in \mathbb{N} : t_n < t$ .

■

## Referenciado en

- Prop-fn-exists-var-aleatoria