Hugo Marquerie 11/03/2025

Quijote infinito

Notación: En esta entrega $\forall N \in \mathbb{N} : \mathbb{N}_N := \{1, 2, \ldots, N\} = \{n \in \mathbb{N} : n \leq N\}$.

1 El *Quijote* finito

Ya sabemos que, dado tiempo infinito, un mono aporreando un teclado escribirá el *Quijote*. Formalmente, sea N el número de caracteres distintos que empleó Miguel de Cervantes para escribir el *Quijote*, L la longitud del libro en esos caracteres, y $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}_L} : \forall j \in \mathbb{N}_L : Q_j \in \mathbb{N}_N$ la secuencia de caracteres de longitud L que constituye el *Quijote*.

Consideramos $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ con $\forall j \in \mathbb{N} : X_j \sim \text{Unif}(\mathbb{N}_N)$. Entonces, si definimos

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_n := \left\{\omega \in \Omega : \forall i \in \mathbb{N}_L : X_{(n-1)L+i} = Q_i\right\},$$

A_n es el suceso en que el mono escribe el *Quijote* entre los caracteres $(n-1)L + 1$ y nL, es decir, en el n-ésimo bloque de longitud L. Como las variables aleatorias son independientes,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}\left(\left\{X_{(n-1)L+1} = Q_1\right\} \cap \cdots \cap \{X_{nL} = Q_L\}\right) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{indep}}}{=} \mathbb{P}\left(X_{(n-1)L+1} = Q_1\right) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}\left(X_{nL} = Q_L\right) = \left(\frac{1}{N}\right)^L.\end{aligned}$$

Además, los A_n son independientes (porque las X_j lo son) y $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{N}\right)^L = \infty$.

Entonces, por el lema de Borel-Cantelli II, $\mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) = 1$.

Es decir, el mono no solo escribirá el *Quijote* una vez, sino que lo hará infinitas veces.

2 Un *Quijote* infinito

Imaginemos por un momento que requerimos una secuencia infinita de caracteres $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall j \in \mathbb{N} : Q_j \in \mathbb{N}_N$ para escribir el *Quijote*. En tal caso, ¿escribiría el mono este *Quijote* infinito?

Debemos precisar esta pregunta antes de tratar de contestarla. Estudiaremos varias posibles interpretaciones y sus respuestas:

2.1 Un *Quijote* con infinitos capítulos finitos

Supongamos que este libro se encuentra dividido en infinitos capítulos $\left(C^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, cada uno con longitud finita $L_k \in \mathbb{N}$. Es decir, $\forall k \in \mathbb{N} : \forall j \in \mathbb{N}_{L_k} : C^k_j = Q_{j+\sum_{l=1}^{k-1} L_l}$.

$$\underbrace{Q_1, Q_2, \ldots, Q_{L_1}}_{C^1}, \underbrace{Q_{L_1+1}, \ldots, Q_{L_1+L_2}}_{C^2}, \ldots, \underbrace{Q_{1+\sum_{l=1}^{k-1} L_l}, \ldots, Q_{\sum_{l=1}^{k} L_l}}_{C^k}, \ldots$$

Supongamos también que nos basta con que el mono escriba cada capítulo al menos una vez, sin importar el orden. Entonces, podemos interpretar cada capítulo como un *Quijote* finito y aplicar el razonamiento de la sección 1:

$$A^k_n := \left\{\omega \in \Omega : \forall i \in \mathbb{N}_{L_k} : X_{(n-1)L_k+i} = C^k_i\right\} \implies \forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \left(A^k_n\right)\right) = 1.$$

Por tanto, el mono escribirá cada capítulo infinitas veces con probabilidad 1.

Ahora bien, no necesariamente lo hará en orden, puede que escriba el capítulo número 39458423 antes que el primero. Además, puede que algunos capítulos aparezcan solapados, por ejemplo si las últimas letras de uno coinciden con las primeras de otro.

En ambos escenarios, hasta que el mono llegue al primer capítulo podremos ignorar todo lo que escriba, de la misma manera hasta que llegue al segundo capítulo y así sucesivamente:

$$A := \left\{\omega \in \Omega : \exists \left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : n_k + L_k \leq n_{k+1} \wedge \omega \in A^k_{n_k}\right\} \implies \mathbb{P}(A) = 1.$$

Es decir, existe (con probabilidad 1) una sucesión de índices $\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que el mono escribe el capítulo k entre los caracteres n_k y $n_k + L_k - 1$, sin que se solape con los demás capítulos. Por tanto, bajo esta interpretación de la pregunta, el mono sí escribirá el *Quijote* infinito.

2.2 Un *Quijote* infinito e indivisible

Ahora bien, si queremos que los capítulos se escriban en orden sin ningún carácter entre ellos, estamos pidiendo que, a partir de algún índice, el mono escriba todo el *Quijote* infinito de seguido. Por tanto, queremos calcular la probabilidad de

$$B := \left\{\omega \in \Omega : \exists n \in \mathbb{N} : \forall j \in \mathbb{N} : X_{n-1+j} = Q_j\right\}.$$

Para ello, definimos B_n como el suceso de que se escriba el *Quijote* a partir del carácter n:

$$\forall n \in \mathbb{N} : B_n := \left\{\omega \in \Omega : \forall j \in \mathbb{N} : X_{n-1+j} = Q_j\right\} \implies B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

Además, definimos $B_{n,k}$ como el suceso en que el mono escribe los primeros k caracteres del *Quijote* infinito a partir del n-ésimo:

$$\forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} : B_{n,k} := \{\omega \in \Omega : \forall j \in \mathbb{N}_k : X_{n-1+j} = Q_j\} \implies B_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{n,k}.$$

(1) Como $(B_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente y estamos en un espacio de medida finito, por el teorema de convergencia monótona, tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{n,k}\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(B_{n,k}\right).$$

(2) Como además las X_j son independientes, sabemos que

$$\mathbb{P}(B_{n,k}) = \mathbb{P}\big(\{X_n = Q_1\} \cap \cdots \cap \{X_{n+k} = Q_k\}\big) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}\left(X_{n+j} = Q_j\right) = \left(\frac{1}{N}\right)^k.$$

Entonces, podemos calcular la probabilidad de cada B_n:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{n,k}\right) \overset{\substack{(1)\\ \downarrow}}{=} \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(B_{n,k}) \overset{\substack{(2)\\ \downarrow}}{=} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{N}\right)^k = 0.$$

Por tanto, por subaditividad de la medida, tenemos que

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n) = 0.$$

Es decir, es casi seguro que el mono no escribirá el *Quijote* infinito de seguido.

3 Conexión con la medida de Lebesgue en $[0, 1]$

Se puede dibujar una conexión entre este problema y la medida de Lebesgue en el intervalo $[0, 1]$ que nos ofrece una forma alternativa de demostrar el resultado de la subsección 2.2. Podemos interpretar la sucesión de variables aleatorias $(X_j - 1)_{j\in\mathbb{N}}$ como la expresión en base N de un número real en el intervalo $[0, 1]$ (sin incluir el 0 inicial).

Por ejemplo, $0 = 0.000\ldots$ vendría de la observación $(X_k(\omega))_{j\in\mathbb{N}} = (1)_{j\in\mathbb{N}}$ y $1 = 0.(N-1)\ldots$ vendría de la observación $(X_k(\omega))_{j\in\mathbb{N}} = (N)_{j\in\mathbb{N}}$. Por tanto, definimos

$$\begin{aligned} Y : \Omega &\longrightarrow [0, 1] \\ \omega &\longmapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} (X_j(\omega) - 1) \cdot N^{-j} = 0.(X_1(\omega) - 1)(X_2(\omega) - 1)\ldots \text{ en base } N. \end{aligned}$$

Veamos que entonces $Y \sim \text{Unif}([0, 1])$. Sea $y \in [0, 1]$, basta probar que $\mathbb{P}\left(Y \leq y\right) = y$.

Definimos $Y_k \colon \Omega \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$\forall k \in \mathbb{N} : Y_k := \sum_{j=1}^{k} (X_j - 1)\, N^{-j},$$

$$\implies \forall k \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega : Y_k(\omega) \in \left\{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N^k - 1}{N^k}\right\} \text{ con } \forall r \in \mathbb{N}_{N^k} : \mathbb{P}\left(Y_k = \frac{r-1}{N^k}\right) = \frac{1}{N^k}.$$

Además, el máximo valor de Y_k que no excede y es $\lfloor N^k y \rfloor / N^k$, donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función suelo

$$\implies \mathbb{P}\left(Y_k \leq y\right) = \sum_{r=1}^{\lfloor N^k y \rfloor} \mathbb{P}\left(Y_k = \frac{r-1}{N^k}\right) = \frac{\lfloor N^k y \rfloor}{N^k}.$$

Como $Y_1 \leq Y_2 \leq \dots$, la sucesión de conjuntos $(\{Y_k \leq y\})_{k \in \mathbb{N}}$ es decreciente y podemos aplicar el teorema de convergencia monótona (porque estamos en un espacio de medida finito)

$$\implies \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}\left(Y_k \leq y\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{k \to \infty} Y_k \leq y\right) = \mathbb{P}\left(Y \leq y\right).$$

Por tanto, concluimos que $\mathbb{P}\left(Y \leq y\right) = \lim_{k \to \infty} \dfrac{\lfloor N^k y \rfloor}{N^k} = y$. Es decir, $Y \sim \mathrm{Unif}([0,1])$

$$\implies \forall E \in \mathcal{B}([0,1]) : \mathbb{P}\left(Y \in E\right) = m(E) \text{ donde } m \text{ es la medida de Lebesgue en } [0,1].$$

Entonces, al reinterpretar el resultado de la subsección 2.2, estamos diciendo que, si escogemos aleatoria y uniformemente un número real en $[0,1]$, hay probabilidad nula de que su expresión en base N sea, a partir de algún punto, de una forma dada.

Observamos ahora que, efectivamente, solo hay una cantidad numerable de elementos en $[0,1]$ que tienen esta propiedad ya que, determinados todos los dígitos de la expresión a partir del n-ésimo, solo hay $N^{(n-1)}$ posibles elecciones para los primeros $n-1$ dígitos:

$$0.\ d_1\ d_2\ d_3 \dots\ d_{n-1}\ \underbrace{d_n\ d_{n+1}\ \dots}_{\text{fijos}}$$

$$\begin{aligned} \implies \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(Y = 0.d_1 d_2 \dots : \exists n \in \mathbb{N} : \forall j \geq n : d_j + 1 = Q_j\right) \\ &= m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{0.d_1 d_2 \dots : \forall j \geq n : d_j + 1 = Q_j\}}_{\text{contiene } N^{(n-1)} \text{ elementos}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Así, hemos encontrado una forma alternativa de demostrar el resultado de la subsección 2.2 mediante una relación con la medida de Lebesgue en $[0,1]$.