Hugo Marquerie 24/03/2025

# Esperanza condicionada a una $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra

**Proposición 1 (Esperanza condicionada).** *Sea* $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ *en* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *espacio de probabilidad y* $\mathcal{F} \subset \Sigma$ *una* $\sigma$*-álgebra*

$$\Longrightarrow \exists! \text{ (c.s.) } Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) : Y \text{ es } \mathcal{F}\text{-medible} \wedge \forall Z \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{P}) : \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[XZ].$$

*Esta* $Y$ *se denomina* ***esperanza condicionada*** *de* $X$ *dada* $\mathcal{F}$ *y se denota por* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$.

***Demostración*:** Definimos $\nu\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\nu(A) := \int_A X(\omega)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$, entonces es una medida con signo (ejercicio). Además, $\nu \ll \mathbb{P}$ en $\mathcal{L}$ porque si $A \in \mathcal{F}$ es tal que $\mathbb{P}(A) = 0$, entonces $\nu(A) = \int_A X\, \mathrm{d}\mathbb{P} = 0$.

Por tanto, por el teorema de Radon-Nikodym,

$$\exists! Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) : Y \text{ es } \mathcal{F}\text{-medible} \wedge \forall A \in \mathcal{F} : \nu(A) = \int_A Y\, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Veamos ahora que $\forall Z \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{P}) : \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[XZ]$:

1. Si $Z$ es una función indicatriz, $Z = \mathbb{1}_A$ con $A \in \mathcal{F}$, entonces
$$\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A] = \int_A Y\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \nu(A) = \int_A X\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A].$$
2. Si $Z$ es una función simple, se tiene por linealidad de la integral (ejercicio).
3. Si $Z \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{P})$ se tiene por el teorema de la convergencia dominada.

$\blacksquare$