Hugo Marquerie 29/01/2025

Números complejos

Definición 1 (Números complejos). Sea $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dotado de las operaciones:

- Suma: $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 : (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
- Producto: $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 : (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

La tripleta $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es el cuerpo de los **números complejos**.

Proposición 1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un cuerpo.*

***Demostración*:** Sean $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$.

(i) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad:

(a) $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo abeliano:

i. Asociatividad de la suma:

$$(a,b) + ((c,d) + (e,f)) = (a+c+e, b+d+f) = ((a,b) + (c,d)) + (e,f)$$

ii. Elemento neutro de la suma: $(0,0) + (a,b) = (a,b) = (a,b) + (0,0)$

iii. Elemento opuesto: $(a,b) + (-a,-b) = (a-a, b-b) = (0,0)$

iv. Conmutatividad de la suma:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c,d) + (a,b)$$

(b) Asociatividad del producto:

$$\begin{aligned}(a,b) \cdot ((c,d) \cdot (e,f)) &= (a,b) \cdot (ce - df, cf + de) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \\ &= ((ac - bd, ad + bc)) \cdot (e,f) = ((a,b) \cdot (c,d)) \cdot (e,f)\end{aligned}$$

(c) Leyes distributivas:

$$\begin{aligned}
(a,b)\cdot((c,d)+(e,f)) &= (a,b)\cdot(c+e,d+f)\\
&= (a(c+e)-b(d+f), a(d+f)+b(c+e))\\
&= (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be)\\
&= (ac-bd, ad+bc)+(ae-bf, af+be)\\
&= (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((a,b)\cdot(c,d))+(e,f) &= (a+c,b+d)\cdot(e,f)\\
&= ((a+c)e-(b+d)f, (a+c)f+(b+d)e)\\
&= (ae+ce-bf-df, af+cf+be+de)\\
&= (ae-bf, af+be)+(ce-df, cf+de)\\
&= (a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)
\end{aligned}$$

(d) Conmutatividad del producto:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc) = (ca-db, cb+da) = (c,d)\cdot(a,b)$$

(e) Elemento neutro del producto: $(1,0)\cdot(a,b)=(a,b)$

(ii) Elemento inverso: si $(a,b)\neq(0,0)$, entonces

$$\begin{aligned}
(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right) &= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{-b^2}{a^2+b^2},\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{ba}{a^2+b^2}\right)\\
&= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},0\right) = (1,0)
\end{aligned}$$

■

Definición 2 (unidad imaginaria). $i=(0,1)\in\mathbb{C}$ es la unidad imaginaria.

Esta unidad imaginaria cumple que $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)=-1\in\mathbb{R}$ y por tanto es solución de la ecuación $x^2+1=0$.

Definición 3 (Parte real e imaginaria). Dado $z=(a,b)\in\mathbb{C}$, definimos la parte real de z como $\Re(z)=a\in\mathbb{R}$ y la parte imaginaria de z como $\Im(z)=b\in\mathbb{R}$.

Entonces, $\forall z=(a,b)\in\mathbb{C}: z=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)\cdot(b,0)=\Re(z)+i\Im(z)$. Por tanto, podemos escribir z en **forma binómica** como $z=a+bi$.

Proposición 2. $\mathbb{C}$ *es una extensión algebraica de* $\mathbb{R}$.

***Demostración*:** Consideramos la aplicación $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\forall a \in \mathbb{R} : \varphi(a) = (a, 0)$.

(i) Compatible con la suma: $\varphi(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \varphi(a) + \varphi(b)$

(ii) Compatible con el producto: $\varphi(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

(iii) Compatible con el neutro multiplicativo: $\varphi(1) = (1, 0) = 1$

Como ϕ cumple las condiciones de la definición, es un morfismo de anillos y, por tanto, $\mathbb{C}$ es una extensión de cuerpos de $\mathbb{R}$. ■

Observación 4. Se tiene que $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con base canónica $(1, i)$.

Referenciado en

- `Num-complejo-conjugado`
- `Teo-fundamental-algebra`
- `Log-complejo`
- `Num-complejo-arg`
- `Plano-complejo-extendido`
- `Fn-holomorfa`
- `Esp-hermitico`
- `Circunferencia-generalizada`
- `Num-complejo-arg-principal`
- `Fn-hiperbolicas-complejas`
- `Rama-principal-log-complejo`
- `Fn-trigonometricas-complejas`
- `Num-complejo-modulo`