

Espacio proyectivo real

Tenemos que \mathbb{R}^n es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n y $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es un espacio topológico con la topología de subespacio de \mathbb{R}^n , que, como es de Hausdorff y segundo numerable, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ también lo es. Veamos que $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ también hereda estas propiedades.

1. Como \sim es abierta, por el **Lem-relacion-equivalencia-abierta-segundo-numerable**/Lema 1, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ es segundo numerable.
2. Veamos que $\mathcal{R} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : x \sim y\}$ es un conjunto cerrado con la topología producto. Podemos escribir

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) : \forall i, j \in \mathbb{N}_n : i \neq j : \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = 0 \right\}.$$

Luego si definimos $f : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sum_{i \neq j} |x_i y_j - x_j y_i|$, $\mathcal{R} = f^{-1}(\{0\})$ es la preimagen de un cerrado por una función continua, por lo que \mathcal{R} es cerrado. Como \sim es abierta y \mathcal{R} es cerrado, por el **Lem-relacion-equivalencia-abierta-hausdorff**, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ es de Hausdorff.

Notación: $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : [x] = [(x_1, \dots, x_n)] =: [x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$.

Dotemos a $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ de una estructura diferenciable. Sea $\mathcal{A} = \{(U_i, \psi_i) : i \in \mathbb{N}_n\}$ con

$$\forall i \in \mathbb{N}_n : U_i = \{ [x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) : x_i \neq 0 \}$$

y $\forall [x] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) : \psi_i([x_1 : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces

1. $\forall (U_i, \psi_i) \in \mathcal{A} : (U_i, \psi_i)$ es una carta de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$:
 - (a) $\forall i \in \mathbb{N}_n : U_i$ es un abierto de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ porque, por definición de topología cociente, lo es $\iff \pi^{-1}(U_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x_i \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es abierto.
 - (b) Veamos que $\forall i \in \mathbb{N}_n : \psi_i$ es un homeomorfismo:
 - i. Primero veamos que ψ_i está bien definida. Sean $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ distintos representantes de la misma clase ($[x] = [y]$). Entonces, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^* : x = \lambda y$

$$\implies \psi([x]) = \left(\frac{\lambda y_1}{\lambda y_i}, \dots, \frac{\lambda y_{i-1}}{\lambda y_i}, \frac{\lambda y_{i+1}}{\lambda y_i}, \dots, \frac{\lambda y_n}{\lambda y_i} \right) = \psi([y]).$$

- ii. Por la **Prop-fn-continua-cociente-iff-composicion-continua**/Proposición 1 ψ_i es continua $\iff \psi_i \circ \pi|_{\pi^{-1}(U_i)} : \pi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ es continua.

$$(\psi_i \circ \pi)(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

donde cada componente es continua porque $\forall x \in \pi^{-1}(U_i) : x_i \neq 0$.

- iii. Observamos que $\text{Im}(\psi_i) = \mathbb{R}^{n-1}$ y que $\psi_i^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ viene dada por

$$\psi_i^{-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) = [a_1 : \dots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \dots : a_{n-1}]$$

que es continua por ser composición de funciones continuas.

2. Como $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_n} U_i = \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ y $\forall (U_i, \psi_i) \in \mathcal{A} : (U_i, \psi_i)$ es una carta de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, \mathcal{A} es un atlas de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$. Veamos que \mathcal{A} es diferenciable. Sean $(U_i, \psi_i), (U_j, \psi_j) \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned} \psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) &\rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j) \\ (a_1, \dots, a_{n-1}) &\mapsto \psi_j([a_1 : \dots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \dots : a_{n-1}]) \\ &= \left(\frac{a_1}{a_j}, \dots, \frac{a_{j-1}}{a_j}, \frac{a_{j+1}}{a_j}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_j} \right) \end{aligned}$$

que es \mathcal{C}^∞ porque cada componente es \mathcal{C}^∞ ya que $\forall a \in \psi_i(U_i \cap U_j) : a_j \neq 0$. Análogamente, $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ es \mathcal{C}^∞ , luego las cartas de \mathcal{A} son \mathcal{C}^∞ -compatibles.

3. Por el **Teo-existencia-unicidad-estructura-diferenciable**/Teorema 1, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ es una variedad diferenciable de dimensión $n - 1$.

Definición 1 (Espacio preproyectivo real). A la variedad diferenciable $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ la llamamos espacio proyectivo real de dimensión n y la denotamos por \mathbb{RP}^n .