Hugo Marquerie date

Teorema de existencia y unicidad de una estructura diferenciable

Teorema 1. *Sea $\mathcal{A}$ un atlas diferenciable en $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico*

$$\implies \exists! \mathcal{B} \text{ estructura diferenciable en } X \text{ que lo contiene.}$$

***Demostración*:** Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las cartas de M que son C^∞-compatibles con todas las cartas de $\mathcal{A}$. Veamos que $\mathcal{D}$ es una estructura diferenciable y que es única.

Está claro que $\mathcal{D}$ cubre a M porque $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ y $\mathcal{A}$ ya cubría a M:

$$M = \bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{A}} U \subset \bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{D}} U.$$

Veamos que las cartas de $\mathcal{D}$ son C^∞-compatibles entre sí: Sean (U_1, ψ_1) y (U_2, ψ_2) dos cartas de $\mathcal{D}$. Tenemos que ver que la composición

$$\psi_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\psi_2\circ\psi_1^{-1}} \psi_2(U_1 \cap U_2)$$

es diferenciable. Sea $p \in U_1 \cap U_2$, y sea $(V, \varphi) \in \mathcal{A}$ una carta que contiene a p. Entonces, como (U_1, ψ_1) y (U_2, ψ_2) son compatibles con (V, φ), tenemos que la composición

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_1 \cap U_2 \cap V) \xrightarrow{\varphi\circ\psi_1^{-1}} \varphi(U_1 \cap U_2 \cap V) \xrightarrow{\psi_2\circ\varphi^{-1}} \psi_2(U_1 \cap U_2 \cap V)$$

es diferenciable, y por tanto $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ es diferenciable en $\psi_1(p)$. Como esto es cierto para todo $p \in U_1 \cap U_2$ (Ojo: al cambiar de p quizá haya que cambiar la carta (V, φ)), deducimos que $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_1 \cap U_2) \to \psi_2(U_1 \cap U_2)$ es diferenciable.

Veamos ahora que $\mathcal{D}$ es maximal: Si $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ es otro atlas que contiene a $\mathcal{D}$, entonces cualquier carta de $\mathcal{D}'$ tiene que ser C^∞-compatible con el resto de las cartas de $\mathcal{D}'$, en particular lo ha de ser con las cartas de $\mathcal{A}$, y por tanto será una carta de $\mathcal{D}$, así que $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.

Si $\mathcal{D}'$ es otro atlas maximal que contiene a $\mathcal{A}$, entonces todas sus cartas son C^∞-compatibles con $\mathcal{A}$ y por tanto son cartas de $\mathcal{D}$, así que $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}'$ es maximal, tenemos que $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$. ∎

Referenciado en

- `Esp-proyectivo-real`