Hugo Marquerie 07/03/2025

Teorema Cauchy-Riemann

Teorema 1 (de Cauchy-Riemann). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, definimos $u, v\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dados por $u(x,y) = \Re\left(f(x+iy)\right)$ y $v(x,y) = \Im\left(f(x+iy)\right)$, entonces f es $\mathbb{C}$-derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C} \iff$*

1. *u, v son $\mathbb{R}$-diferenciables en (x_0, y_0).*
2. *Se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0):*
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \wedge \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \tag{1}$$

***Demostración*:**

$\boxed{\Rightarrow}$ Tenemos que f es $\mathbb{C}$-derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, entonces
$$\exists f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \tag{2}$$
o, equivalentemente
$$\exists f'(z_0) : \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{h} = 0. \tag{3}$$

Paso 1: Veamos que $\exists u_x(x_0,y_0), u_y(x_0,y_0), v_x(x_0,y_0), v_y(x_0,y_0)$ y que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1). Comenzamos estudiando (2) para $h = h_1 + 0i \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + h_1) - f(x_0+iy_0)}{h_1} \\ &= \lim_{h_1 \to 0} \left[\frac{u(x_0+h_1,y_0) - u(x_0,y_0)}{h_1} + i\frac{v(x_0+h_1,y_0) - v(x_0,y_0)}{h_1} \right] \\ &= u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) =: f_x(z_0). \end{aligned}$$

Repetimos el proceso para $h = 0 + ih_2 \in i\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + ih_2) - f(x_0+iy_0)}{ih_2} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{h_2 \to 0} \left[\frac{u(x_0,y_0+h_2) - u(x_0,y_0)}{h_2} + i\frac{v(x_0,y_0+h_2) - v(x_0,y_0)}{h_2} \right]. \\ &= \frac{1}{i}\left[u_y(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0)\right] =: \frac{1}{i} f_y(z_0) = -if_y(z_0). \end{aligned}$$

Por tanto, $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0)$. Luego se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \wedge v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0).$$

Paso 2: Veamos ahora que las funciones u y v son $\mathbb{R}$-diferenciables. Usando (3) y que $h/|h|$ es una función de h acotada, tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{h} \cdot \frac{h}{|h|} = 0.$$

Como $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ y usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1),

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h) - f(z_0) - h\cdot f'(z_0)}{|h|} &= \frac{u(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0, y_0) - \big(u_x(x_0, y_0)h_1 - v_x(x_0, y_0)h_2\big)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\ &\quad + i\frac{v(x_0+h_1, y_0+h_2) - v(x_0, y_0) - \big(v_x(x_0, y_0)h_1 + u_x(x_0, y_0)h_2\big)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h) - f(z_0) - h\cdot f'(z_0)}{|h|} &= \frac{u(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0, y_0) - \big(u_x(x_0, y_0)h_1 + u_y(x_0, y_0)h_2\big)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\ &\quad + i\frac{v(x_0+h_1, y_0+h_2) - v(x_0, y_0) - \big(v_x(x_0, y_0)h_1 + v_y(x_0, y_0)h_2\big)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.\end{aligned}$$

Si tomamos el límite cuando $h \to 0$, las partes real e imaginaria de esta expresión tienen que tender a 0. Y esto quiere decir exactamente que u y v son diferenciables en (x_0, y_0).

$\boxed{\Leftarrow}$ Como u y v son $\mathbb{R}$-diferenciables en (x_0, y_0), para $(h_1, h_2) \to (0, 0)$ se tiene que:

$$u(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0)h_1 + u_y(x_0, y_0)h_2 + o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right),$$

$$v(x_0+h_1, y_0+h_2) - v(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)h_1 + v_y(x_0, y_0)h_2 + o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right).$$

Por tanto

$$\begin{aligned}f(z_0+h) - f(z_0) &= u(x_0+h_1, y_0+h_2) + iv(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) \\ &= [u(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0, y_0)] + i\big[v(x_0+h_1, y_0+h_2) - v(x_0, y_0)\big].\end{aligned}$$

Sustituyendo, agrupando términos y usando las ecuaciones de C-R para expresar todas las derivadas en términos de x (reescribiendo $-v_x(x_0, y_0) = i^2 v_x(x_0, y_0)$):

$$\begin{aligned}f(z_0+h) - f(z_0) &= \Bigg[u_x(x_0, y_0)h_1 + \underbrace{u_y(x_0, y_0)}_{i^2 v_x(x_0, y_0)} h_2\Bigg] + i\Bigg[v_x(x_0, y_0)h_1 + \underbrace{v_y(x_0, y_0)}_{u_x(x_0, y_0)} h_2\Bigg] + o(|h|) \\ &= [u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)]\, h_1 + \big[i^2 v_x(x_0, y_0) + iu_x(x_0, y_0)\big]\, h_2 + o(|h|) \\ &= (u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0))\,(h_1 + ih_2) + o(|h|)\end{aligned}$$

Por tanto $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$ y existe $f'(z_0)$.

$\blacksquare$

Referenciado en

- `Teo-fn-inversa-holomorfas`
- `Conjugada-armonica`
- `Prop-consecuencias-cauchy-riemann`