Hugo Marquerie 17/03/2025

Convergencia en $\mathcal{L}^p$ implica en probabilidad

Proposición 1. *Sea* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

***Demostración*:** Sea $\varepsilon > 0$, queremos ver que $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$.

1. Si $p < \infty$, entonces, por la desigualdad de Chebyshev

$$0 \leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\|X_n - X\|_p^p}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

2. Si $p = \infty$, veamos dos pruebas distintas:

   - Por un lado, como tenemos que $\|X_n - X\|_2 \leq \|X_n - X\|_\infty$ (ejercicio), entonces

$$0 \leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\|X_n - X\|_2^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{\|X_n - X\|_\infty^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

   - Por otro lado, si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^\infty} X$, entonces $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} X$ uniformemente (ejercicio). Entonces, por la proposición anterior, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

En cualquier caso hemos probado que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. ■