Hugo Marquerie March 17, 2025

Lema de Fatou

Lema 1 (de Fatou). *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones medibles no negativas en un espacio de medida* (X,Σ,μ)

$$\implies \int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

***Demostración*:** Tenemos que $\liminf_{n\to\infty} f_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} f_k\right)$. Consideramos $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $g_n := \inf_{k\geq n} f_k \geq 0$. Entonces, $\forall n\in\mathbb{N} : g_n \leq g_{n+1} \wedge \lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$.

$$\begin{aligned}\implies \int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu &= \int \lim_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu \overset{\substack{\text{TCM}\\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \inf_{k\geq n} f_k \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \text{ porque } \int \inf_{k\geq n} f_k \,\mathrm{d}\mu \leq \inf_{k\geq n} \int f_k \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

■

Referenciado en

- `Teo-convergencia-dominada`
- `Convergencia-casi-segura-imp-probabilidad`