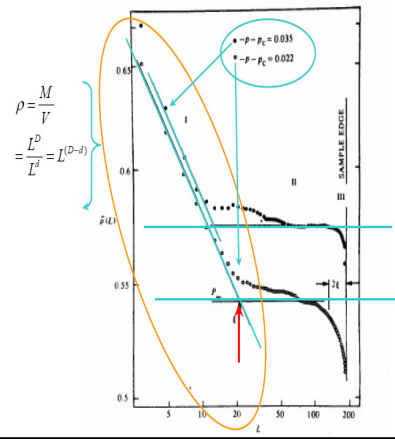
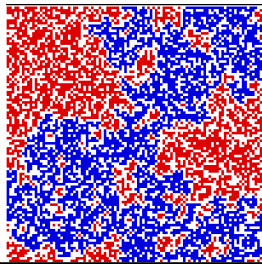


Monte Carlo  
Finite size scaling  
Large Cell Monte Carlo  
etc.

侍



Para  $L < \xi \Rightarrow M(L, \xi) \propto L^D$

Para  $L > \xi \Rightarrow M \propto PL^d$

o sea la fuerza del cluster infinito por el volumen.

Si dividimos el volumen  $L^d$

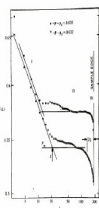
En celdas de volumen  $\xi^d$

La masa en cada celda es  $\xi^{2D}$

Tendremos  $(L/\xi)^d$  celdas

La masa total es  $M \propto (L/\xi)^d \xi^{2D}$

$$M \propto (L/\xi)^d \xi^{2D} \propto PL^d$$



De aquí tenemos que los dos comportamientos se manifiestan por encima y debajo de  $\xi$ , ahora ponemos ambos comportamientos en una sola expresión.

Como el cambio de comportamiento corresponde al cociente  $L/\xi$  luego

$$M(L, \xi) = L^D m(L/\xi)$$

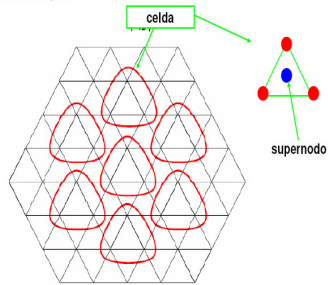
con  $m(L/\xi) = m(x)$  y si  $x \ll 1$ ,  $m(x) = c/x$  y para  $x$   
 $m(x) \propto x^{2-D} = (L/\xi)^{2-D}$ .

Otra forma de escribirlo es (con  $\xi = (p - p_c)^{-\nu}$ )

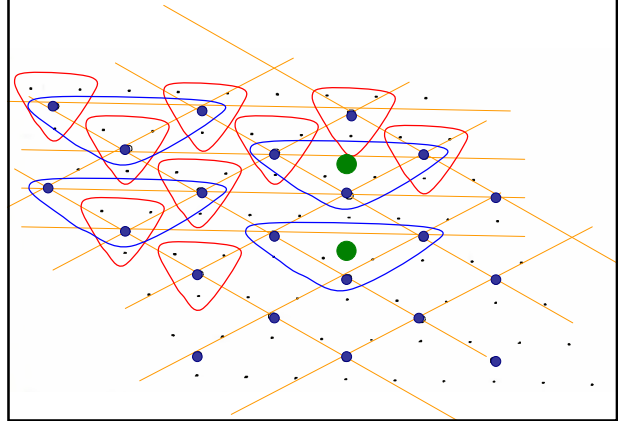
$$M(L, (p - p_c)) = L^D m'((p - p_c)L^{1/\nu})$$

### Renormalizacion en percolacion

Sea una red triangular



### La red triangular y la renormalizacion

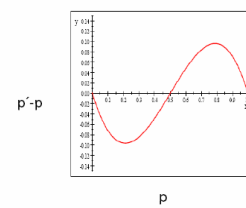


En este caso estamos escalando con una "distancia típica"  $b = \sqrt{3}$  pues  $b^2 = 3$  que es el número de nodos que contiene la celda.

$$b \ll \xi$$

- Pensamos que los nuevos "supernodos" estarán ocupados si la celda original tiene 3 o 2 nodos ocupados, como resultado de este criterio la probabilidad de ocupación de estos nuevos supernodos es

$$p' = p^3 + 3p^2(1-p)$$



De donde se ve que  $p'$  es invariante para  $p = 0$  y  $p = 1$ , que son triviales (la vacía queda vacía y la llena queda llena).

Para la red original

$$\xi \propto (p - p_c)^{-\nu}$$

la red renormalizada debera ser

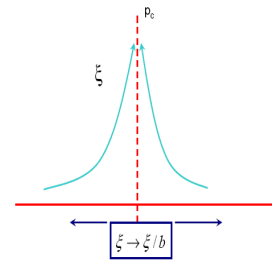
$$\xi' \propto (p' - p_c)^{-\nu}$$

Pero debido a la transformacion de escala

$$\xi' = \xi/b$$

De donde

$$b|p' - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu} \text{ de donde}$$



Pero que pasa si  $\xi$  es finito?

Teniamos :  $M(L, \xi) = b^D M(L/b', \xi/b')$

a) Si  $L \ll \xi$  se itera hasta que  $b' = L$  y toda la lattice se reduce a un punto

$$M(L, \xi) = L^D M(1, x) \propto L^D$$

No depende de  $\xi$

$$\frac{\xi}{b'} \rightarrow \frac{\xi}{L} \text{ con } \xi \gg L$$

b) Si  $L \gg \xi$  y  $p > p_c$

Se itera hasta que

$$b' = \xi \text{ (luego se acaba la autosimilaridad)}$$

En ese punto

$$\xi_{\text{eff}} = \frac{\xi}{b'} = 1$$

Entonces con  $p > p_c \Rightarrow p_{\text{eff}} \rightarrow 1 \Rightarrow$  El sistema se vera uniforme

Observar que  $\xi_{\text{eff}}^{-1}$  es el minimo  $M(L, \xi) = b^D M\left(\frac{L}{b'}, \frac{\xi}{b'}\right)$

En este caso  $b^D \rightarrow \xi^D$  y  $M(L/b', \xi/b') \rightarrow M(L/\xi, 1) \propto (L/\xi)^d$  pues el sistema es "uniforme"

$$M(L, \xi) = \xi^D (L/\xi)^d$$

c) si  $p < p_c$  la  $p_{\text{eff}}$  sera casi 0 y  $M(x, 1)$  corresponde a grandes lattice animales y entonces  $M(L, \xi) = \xi^D (L/\xi)^{D_a}$  con  $D_a$  la dimension fractal de estos animales.

La relación

$$M(L, \xi) = b^{Dp} M(L/b^l, \xi/b^l)$$

Da lugar al escaleo de tamaño finito

Con  $b^l = \xi$

$$M(L, \xi) = \xi^D m(L/\xi)$$

Observar que si tenemos una magnitud que para  $L \gg \xi$  y  $p > p_c$  y se comporta como  $[p - p_c]^\nu$  entonces usando argumentos de Renormalización

Podemos proponer

$$X(L, \xi) = \xi^{x/\nu} x_1(L/\xi)$$

con

$$X(L, \xi) \propto \xi^{x/\nu} \text{ para } L \gg \xi$$

y

$$X(L, \xi) \propto L^{x/\nu} \text{ para } L \ll \xi$$

o

$$M(L, \xi) = b^{Dp} M\left(\frac{L}{b^l}, \frac{\xi}{b^l}\right)$$

si

$$L \gg \xi \text{ y } p > p_c$$

$$M(L, \xi) = \xi^D \left(\frac{L}{\xi}\right)^d$$

$$X(L, p) = (p - p_c)^{-\nu} x_2((p - p_c)L^{1/\nu})$$

## Renormalización de Celda Grande

Hasta ahora vimos la renormalización para celdas pequeñas

En las celdas pequeñas nos fijamos en como tratar los nodos (o bonds) interiores a la celda, pero las relaciones entre celdas están totalmente dejadas de lado.

Ahora ilustramos el problema en la superficie de la celda

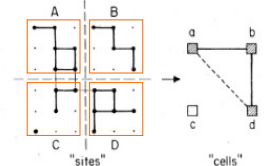
Tenemos las celdas A B C D

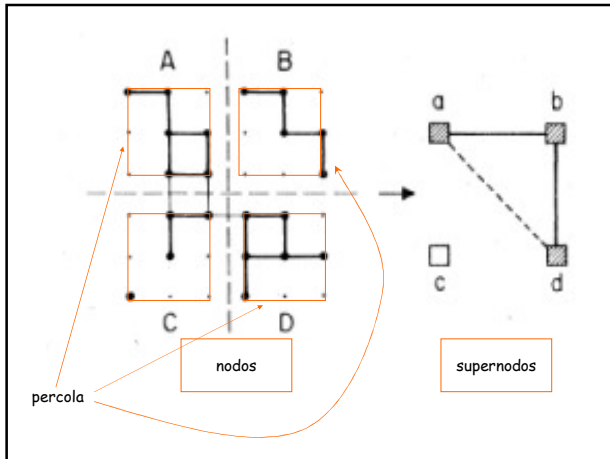
Una celda puede ser reemplazada por un super nodo si "percola"

i) En la estructura original A no está relacionada con B a nivel de "nodos"

Pero si a nivel de celdas

ii) A-C-D están relacionados a nivel de nodos/links pero no a nivel de celdas





O sea hay efectos de superficie que modifica el "estado" del sistema al hacer la renormalizacion

**Cual es la ventaja de usar una celda grande?**

Lo que queremos solucionar es el hecho que aparezcan como desconectadas, luego de la renormalizacion, dos celdas que si lo estaban. (o la contraria)

Focalizamos en la vecindad del punto critico (clusters grandes)

Para que una celda este ocupada luego de la renormalizacion es que es contenga un cluster percolante (para la celda)

-Sea  $X_\alpha$  la fraccion de nodos que pertenecen al cluster percolante en la celda  $\alpha$

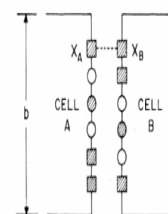
-Sea  $X_\beta$  la fraccion de nodos que pertenecen al cluster percolante en la celda  $\beta$

La celda es de dimension  $b$  contiene  $b^d$  nodos.

Si pensamos en redes "cubicas" en  $d$  dimensiones, "la superficie de contacto" de las celdas involucran  $b^{d-1}$  puntos de "contacto".

- 1) La proba de que un nodo del lado  $\alpha$  de la interface este ocupado es  $X_\alpha$
- 2) del lado  $\beta$  es  $X_\beta$ .
- 3) Ambos deben ser ocupados simultaneamente para que las celdas esten conectadas

- luego la proba de que ambos esten ocupados es  $X_\alpha X_\beta$   
 - la de que esten desconetados es  $(1 - X_\alpha X_\beta)$

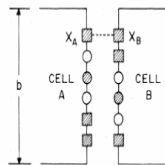


Luego la proba de que las dos celdas no esten conectadas es

$$[(1 - X_a X_b) ** (b^{d-1})]$$

Entonces con  $b \rightarrow \infty$  esto se va a 0 luego cuanto mayor es la celda mejor es el proceso.

$$p' = \left[ (1 - X_a X_b)^{b^{d-1}} \right]$$



### Relaciones de recurrencia

TABLE I. Renormalization-group transformation  $p' = R_p(b; p, h=0)$ , evaluated in closed form on the square lattice, using rule  $R_0$ , for  $b=2, 3, 4$ , and  $5$ . Note  $q=1-p$ .

$b$	$R_p(b; p, h=0)$
2	$p^4 + 4p^3q + 4p^2q^2$
3	$p^9 + 9p^8q + 36p^7q^2 + 82p^6q^3 + 93p^5q^4 + 44p^4q^5 + 6p^3q^6$
4	$p^{16} + 16p^{15}q + 120p^{14}q^2 + 560p^{13}q^3 + 1818p^{12}q^4 + 4296p^{11}q^5 + 7196p^{10}q^6 + 8136p^9q^7 + 5988p^8q^8 + 2784p^7q^9 + 780p^6q^{10} + 120p^5q^{11} + 8p^4q^{12}$
5	$p^{25} + 25p^{24}q + 300p^{23}q^2 + 2300p^{22}q^3 + 12650p^{21}q^4 + 53128p^{20}q^5 + 176992p^{19}q^6 + 478316p^{18}q^7 + 1054923p^{17}q^8 + 1880864p^{16}q^9 + 2666712p^{15}q^{10} + 2963364p^{14}q^{11} + 2556058p^{13}q^{12} + 1699665p^{12}q^{13} + 865132p^{11}q^{14} + 333630p^{10}q^{15} + 95845p^9q^{16} + 19916p^8q^{17} + 2836p^7q^{18} + 248p^6q^{19} + 10p^5q^{20}$

Entonces

Necesitamos usar celdas muy grandes

Necesitamos encontrar el punto fijo de la transformación  $p \rightarrow p'$

Necesitamos hacer las cosas mas manejables

Sea  $p_{av}$  la probabilidad media a la cual por primera vez aparece un cluster percolante.

$$p_{av} = \int p \left( \frac{dP}{dp} \right) dp$$

Con

$$p_{av} - p_c \propto L^{-1/\nu}$$

### Realizacion practica

1) Usando secuencias de numeros aleatorios (entre 0-1) y poblamos los nodos de una celda.

2) Luego variamos el valor de  $p$  por debajo del cual ocupamos cada nodo.

3) Luego nos fijamos para cual valor de  $p$  la celda percola por primera vez

de allí se construye

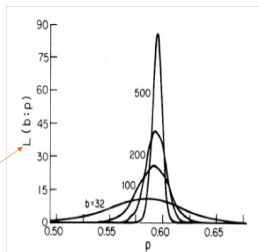
### Volvemos a 1 Celda !

Entonces obtenemos la  
Densidad de probabilidad  
Para 32x32 , 100x100 ,  
200x200, 500x500

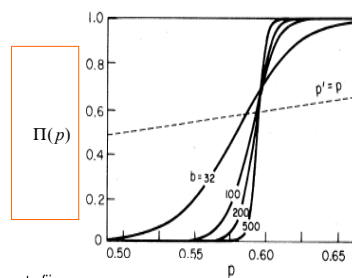
De que percole por primera vez  
A probabilidad  $p$

O sea que obtenemos

$$L = \frac{d\Pi}{dp}$$



A partir de lo anterior se construye la cumulativa  $\Pi(p)$   
y se obtiene



la condicion de punto fijo es

$$p' = \Pi(p)$$

A medida que crece  $b$  la densidad se aproxima a una  $\delta$

Supongamos que entonces aproximamos el comportamiento de la  
densidad a una gaussiana, entonces (para  $b$  muy grande)

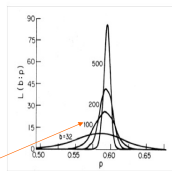
$$\text{con } f(z) \propto \exp(-z^2/2\Delta^2)$$

$$z = (p - p_{av}) / \Delta$$

$$\text{con } \Delta^2 = \left[ \int z^2 f(z) dz \right] / \left[ \int f(z) dz \right]$$

La forma de la densidad es entonces

$$\frac{d\Pi}{dp} = (2\pi)^{-1/2} \Delta^{-1} \exp\left[-\frac{(p - p_{av})^2}{2\Delta^2}\right]$$



Con esto aplicamos la renormalizacion

La condicion de punto fijo es  $\Pi(p^*) = p^*$

$$p^* = \int_{p=0}^{p=p^*} \frac{d\Pi}{dp} dp$$

(la probabilidad total de percolar a  $p$ )

Usando la aproximacion gaussiana y haciendo el cambio de  
coordenadas:

$$z = (p - p_c) / \Delta$$

$$p^* = (2\pi)^{-1/2} \int_{z(p=0)}^{z(p=p^*)} \exp(-z^2/2) dz$$

los limites de integracion son entre  $z = -\infty$  y  $z = (p^* - p_{cr})/\Delta$

La condicion de punto fijo  $\Rightarrow$

$p^*$  debe ser la misma para distintos  $b$ .

Luego la integral debe ser constante cuando variamos  $b$ , al variar  $b$  variamos  $\Delta$  y para que se mantenga cte necesitamos que  $(p^* - p_{cr})$  varíe como  $\Delta$  es decir como  $b^{-1/\nu}$

Usando la tecnica usual de desarrollar en torno del punto fijo :

$$p' - p^* = \lambda(p - p_c)$$

recordando que la condicion de punto fijo es  $\Pi(p^*) = p^* \Rightarrow$

con  $\lambda = \left. \frac{d\Pi}{dp} \right|_{p^*} = (2\pi)^{-1/2} \Delta^{-1} \exp\left[-\frac{(p-p_{cr})^2}{2\Delta^2}\right]$  pero como el exponente es cte por lo que vimos

$$\lambda = (2\pi)^{-1/2} \Delta^{-1} cte$$

de donde recordando que  $[b(p' - p_c)]^{-\nu} = (p - p_c)^{-\nu}$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\ln \lambda}{\ln b}$$

$$\lambda = (2\pi)^{-1/2} \Delta^{-1} cte$$

o sea

$$y(b) = \frac{\ln(1/\Delta)}{\ln b} - \frac{C}{\ln b}$$

determinando  $y(b)$  podemos calcular el valor asintotico para  $1/\nu$  y se obtiene  $1/\nu = 3/4 \Rightarrow \nu = 4/3$

## Resultados

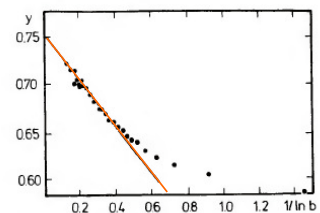


Fig. 23. Results of large cell renormalization for the triangular lattice, using  $b$  up to 10 000 (see Eschbach *et al.*, 1981). The  $b$ -dependent effective exponents  $y$ , determined from the width of the distribution function for the threshold, are plotted versus  $1/\ln b$  (solid circles). A tangent on the values for large  $b$  has the 'true'  $y = 1/\nu$  for infinite systems as intercept. These data are compatible with the intercept being 0.75, corresponding to the supposedly exact  $\nu = 4/3$ .



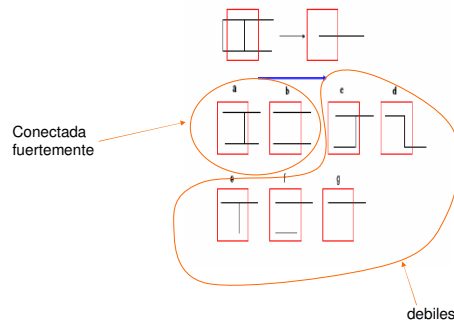
usando la ordenada al origen del fit lineal

$$\frac{1}{\nu} + \frac{C}{\ln b} = \frac{\ln(1/\Delta)}{\ln b}$$

rescatamos entonces

$$\Delta = \exp(-C)b^{-1/\nu}$$

Recordemos el caso de percolacion de links en la red cuadrada



### Una propiedad del cluster percolante

Tenemos relaciones fuertes y relaciones débiles entre celdas

Es probable que existan muchos de estas conexiones simples

Son entonces las "mas debiles"

Es entonces apropiado pensar en que debe estar asociado con  $\nu$

Sea un parámetro  $\pi$  que es la probabilidad de **no remover** un link del sistema

Dado que el cluster percolante en  $p^*$  es "muy tenue", debe romperse con  $\pi < 1$  (es infinito...)

Por lo tanto  $\pi=1$  es el punto fijo de  $\pi$  en  $p=p^*$

Aplicamos renormalizacion y entonces escribimos

$$1 - \pi' = \Lambda(1 - \pi) + \Lambda_2(1 - \pi)^2 + \dots$$

$1 - \pi'$  es la probabilidad de desconectar los lados de las celdas  
 $\Lambda(1 - \pi)$  es entonces el el numero medio de celdas conectadas por un link simple multiplicado por la probabilidad de un link simple  
 $\Lambda = M_{sc}(b)$

Si  $\pi$  se aleja de 1 es lo mismo que alejar  $p$  de  $p^*$  (lo rompemos)

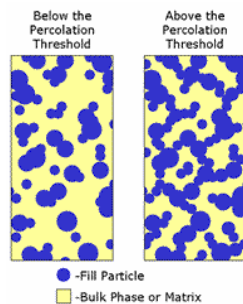
$$\Lambda = \left( \frac{d\pi}{d\pi} \right)_{\pi^*} = \left( \frac{dp'}{dp} \right)_{p^*} = b^{1/\nu}$$

Por lo tanto

$$M_{sc}(b) = b^{1/\nu}$$

Luego el cluster percolante tiene links simples en todas las escalas

## Conductivity



## Conductividad

Sea el siguiente experimento :



Fig. 24 Definition of the conductance of a random conductor network. All copper squares in the topmost row of the lattice are connected to a heavy copper bar (no loss of energy in the bar), and so are all squares in the bottom row. A battery then applies a unit voltage between these two bars. The resulting electrical current is called the conductance.

la lattice completa tiene  $L \times N$  cuadrados y algunos están "llenos de cobre" y los otros vacíos

Si el sistema fuese homogéneo entonces la conductancia sería

- a) proporcional al área  $\Rightarrow N^{d-1}$
- b) inversamente a la longitud  $\Rightarrow 1/L$

Del mismo modo la resistividad es proporcional a

$$R' \propto L/N^{d-1}$$

Entonces con  $I = V/R$  con  $V = 1$  queda  $1/R$

$1/C$

Si definimos la conductividad  $\Sigma$  que depende del material es la proporcionalidad

$$I = 1/R = \Sigma C$$

(no depende del tamaño y la forma)

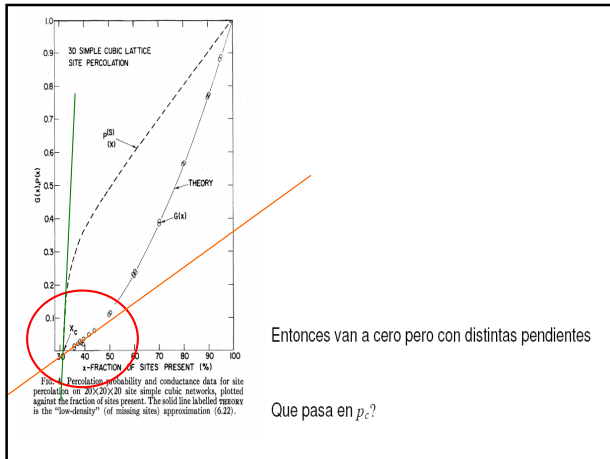
Para  $L = N$  (cuadrada)

$$\Sigma = I/C = I/(L^{d-1}/L) = I \cdot L^{2-d}$$

En una red infinita  $\Sigma(p = 1) = P(p = 1) = 1$

Además  $\Sigma(p < p_c) = P(p < p_c) = 0$

Cálculos detallados dan



### Estructura interna del cluster incipiente

Si nos fijamos en el cluster percolante aparecen los "dangling ends", es decir caminos que no conducen a ningún lado (pero aportan a la masa)

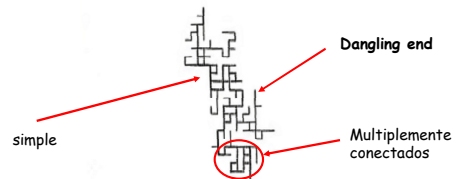


Fig. 26. Section of cluster at  $p_c$  (after Stanley, 1977). Thin lines represent 'dangling' bonds; thick lines represent singly connected bonds; dotted lines show bonds on 'blobs'.

La conductividad  $\Sigma$  se parametrizan por

$$\Sigma \propto (p - p_c)^\mu$$

Con  $\mu$  un nuevo exponente crítico.

Surgieron entonces distintas versiones respecto a la estructura del cluster percolante

Una era que esta compuesto nodos unidos por "single bonds". Se

manifesto correcto para  $d > 6$  dimensiones

(porque seria esto?)

Pero para dimensiones menores predomina la vision de :

(la proba de tener loops es mas relevante)

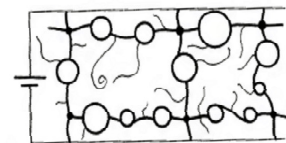


Fig. 28. Schematic picture for the links (one-dimensional chains), nodes (crossing points of the links) and blobs (dense regions with more than one connection between two points; shown as circular here) of the infinite cluster slightly above the threshold. The distance between the nodes as well as the maximum blob diameter are assumed to be of the order of the correlation length. The thin lines are the dead ends, for clarity only very few of them are shown. Most of the material is in the dead ends, the rest is called the backbone. Most of the backbone mass belongs to blobs.

### Algunas dimensiones fractales en el cluster incipiente

Sea  $L \ll \xi$  o  $p = p_c$

La conduccion no depende de los "dangling ends"

Si removemos los "dan....." nos quedamos con el "backbone"

Como en  $p_c$  no hay escalas entonces

$$M_b(L) \propto L^{D_b}$$

Con  $D_b < D < d$

Es una fracción del cluster percolante

Entonces la masa del backbone respecto de la masa del cluster se va a cero.

Como además tenemos que  $M_{sc} \propto L^{D_{sc}}$  resulta que

$$D_{sc} < D_b < D < d$$

Podemos preguntarnos como es el camino minimo entre dos puntos extremos (en los blobs hay muchos caminos)

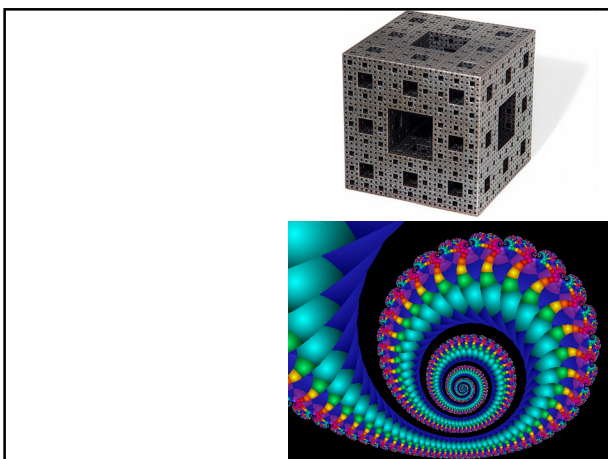
Se ha determinado que

$$l_{min}(L) \propto L^{D_{min}}$$

Resultando

$$D_{sc} < D_{min} < D_b < D < d$$

$$1/\nu = D_{sc} < D_{min} < D_b < D = d - \beta/\nu$$



### Modelos Fractales

#### Definiciones de Fractales

a) Mandelbrot 1982

Una fractal es por definicion un conjunto para el cual la dimension de Hausdorff-Besicovitch supera estrictamente la dimension topologica (muy restrictiva)

b) Mandelbrot 1986

Una fractal es una "forma" compuesta por partes que se parecen al todo de alguna manera

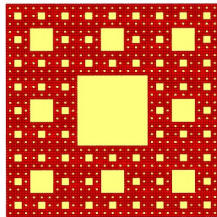
Hasta ahora vimos que:

1) hay pocos resultados exactos para la estructura de los clusters en el punto crítico

2) Fractalidad es "la palabra"

Existen ciertos procesos geométricos determinísticos de construcción de fractales llamados "modelos fractales recursivos geométricos", son fractales no aleatorios.

Primero tenemos la "alfombra de Sierpinski"



Se empieza con un cuadrado lleno de área  $A = 1$ , y Masa  $M = 1$

Un cuadrado lleno se reemplaza por 9 cuadrados con el central vacío (que forman un cuadrado)

Un cuadrado vacío se reemplaza por un cuadrado de área 9 veces mayor (un cuadrado)

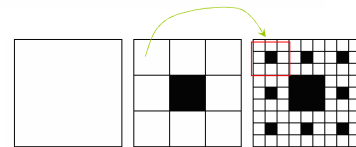


Figure 1:  $n = 0$

Figure 2:  $n = 1$

Figure 3:  $n = 2$

De aquí resulta que la secuencia de áreas es

	$M$	$A$	llenos	vacíos
1	1	1	1	0
2	8	9	8	1
3	64	81	64	$1 \cdot 9 + 8 \cdot 1$
4	$64 \cdot 8$	$81 \cdot 9$	$64 \cdot 8$	$1 \cdot 9 \cdot 9 + 8 \cdot 1 \cdot 9 + 64 \cdot 1$

$$64 \cdot 8 + 81 + 72 + 64 = 729$$

La condición de fractalidad en nuestro caso es

$$M = L^D$$

con  $D < d$

en este caso resulta : para  $n$  pasos

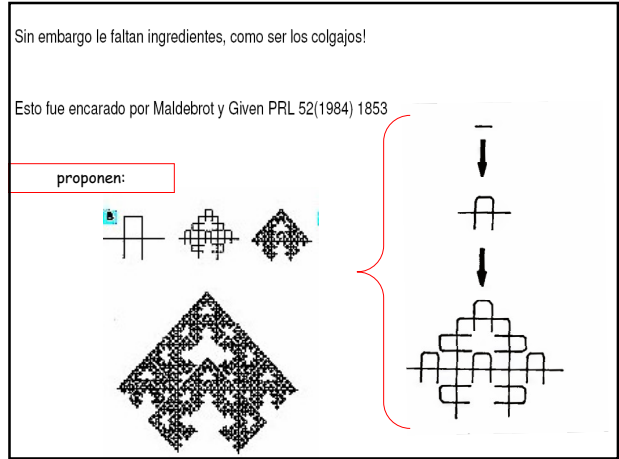
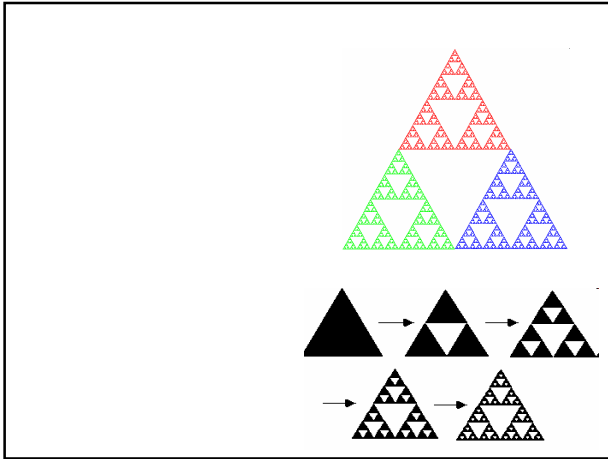
$$L = 3^n$$

$$M = 8^n$$

De donde

$$D = (\ln M) / (\ln L) = \ln(8) / \ln(3) = 1.893$$

Lo interesante es que la dimensión fractal resultante es que la dimensión fractal resultante es muy cercana a 1.896 que se parece mucho a la dimensión fractal del cluster percolante en 2 dimensiones.



En este caso tenemos:

a) empezamos con un segmento de longitud 1

b) en el siguiente paso tenemos una celda de :

uniones  $\Rightarrow 8$

camino minimo  $\Rightarrow 3$

camino maximo  $\Rightarrow 5$

suellos  $N_{sc} \Rightarrow 2$

la resistencia entre nodos se multiplica por :

$$2 + 1 / (\frac{1}{3} + 1) = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

De aqui podemos calcular diversas dimensiones fractales

a) para el "Bulk"

la masa se incrementa en factor 8

el tamaño va por 3

De donde resulta  $D_B = \ln 8 / \ln 3 = 1.893$

b) para el camino minimo

el camino crece en 3

el tamaño crece en 3

De donde resulta  $D_{min} = \ln 3 / \ln 3 = 1$

L=1 M=1

L=3 M=8

L=9 M=64

c) para el maximo

el camino crece en 5

el tamaño crece en 3

De donde resulta  $D_{\max} = \ln 5 / \ln 3 = 1.465$

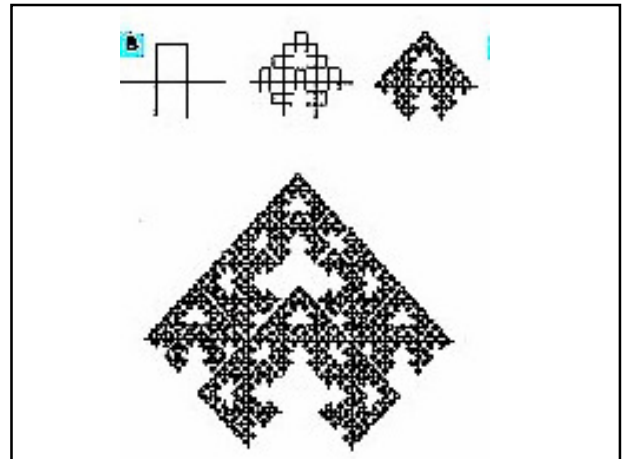
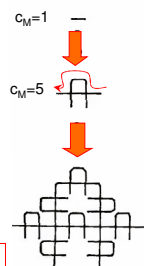
d) para los simplemente conectados

los sc crecen en 2

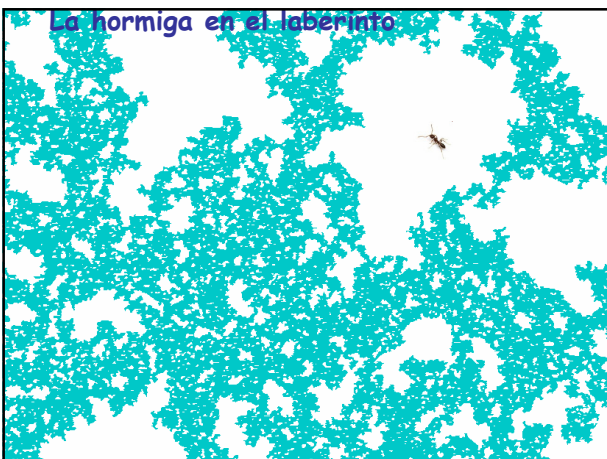
el tamaño crece en 3

De donde resulta  $D_{sc} = \ln 2 / \ln 3 = 0.631$

Resulta que cuando se hace crecer la dimension, mas se parecen a los "experimentales"



## La hormiga en el laberinto



## La hormiga

### Distribucion Binomial

Sea una secuencia de  $N$  realizaciones independientes con dos posibles resultados  $+1$  o  $-1$ .

$p$	proba de	$+1$
$q$	"	$-1$
$p + q = 1$		



Si se hacen  $N$  realizaciones y entonces

$$\begin{cases} n \leftrightarrow 1 \text{ y } m \leftrightarrow -1 \\ n + m = N \end{cases}$$

La probabilidad de una dada permutacion es

$$p^n q^m$$

La probabilidad de una dada combinacion de  $n$  salidas +1 y de  $m$  salidas -1.

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!m!} p^n q^m$$

esto es la distribucion binomial

$$\sum_{n=0}^N P_N(n) = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(por teorema del binomio)} \\ = (p+q)^N \\ = 1 \end{array} \right.$$

Para el  $\langle n \rangle$

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=0}^N P_N(n) n \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{nN!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^N P_N(n) = p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N \\ &= pN \end{aligned}$$

del mismo modo

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0}^N P_N(n) n^2 \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2 N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} \left[ p \frac{\partial}{\partial p} \left( \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \right) \right] = \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} \left[ p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N \right] = p \frac{\partial}{\partial p} Np(p+q)^{N-1} = pN + p^2 N(N-1) \\ &= pN + (Np)^2 - p^2 N = (Np)^2 + Npq \end{aligned}$$

De donde

$$\sigma_N^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = (Np)^2 + Npq - (Np)^2 \Rightarrow \sigma_N = \sqrt{Npq}$$

$$\frac{\sigma_N}{\langle n \rangle} = \sqrt{Npq} \frac{1}{Np} = \sqrt{\frac{q}{p}} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Que pasa si el experimento se hace sin reemplazo?

Bolas rojas y azules

$$P(X=k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Donde

N=numero maximo de "bolitas"  
k=numero de exitos  
n-k=numero de fracasos  
n=numero de experimentos  
m=numero maximo de exitos  
N-m=numero maximo de fracasos

	drawn	not drawn	total
successes	k	m - k	m
failures	n - k	N + k - n - m	N - m
total	n	N - n	N

Estoy sacando  $n$  bolitas y quiero  $k$  rojas de un total de  $N$  bolitas con  $m$  rojas y  $n$  azules



### Distribucion normal

Sea la binomial bajo las siguientes condiciones

$N$  es grande

$pN$  es grande

entonces los factoriales se escriben (aprox. de Stirling)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Entonces

$$\begin{aligned} P_N(n) &= \frac{N!}{n!m!} p^n q^m = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{(N-n)} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi(N-n)} \left(\frac{N-n}{e}\right)^{(N-n)}} p^n (1-p)^{(N-n)} \\ &= p^n (1-p)^{(N-n)} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \left(\frac{n}{N}\right)^{-n-1/2} \left(\frac{N-n}{N}\right)^{n-N-1/2} \right] \end{aligned}$$

Esto puede ser reescrito

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp \left[ -(n + \frac{1}{2}) \ln\left(\frac{n}{N}\right) - (N - n + \frac{1}{2}) \ln\left(\frac{N-n}{N}\right) \right. \\ &\quad \left. + n \ln p + (N - n) \ln(1 - p) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp \left[ -n \ln\left(\frac{n}{N}\right) - (N - n) \ln\left(\frac{N-n}{N}\right) + n \ln p + (N - n) \ln(1 - p) \right] \end{aligned}$$

Esto tiene un maximo en  $n = \langle N \rangle = Np$

Desarrollando en serie el exponente de la exponencial alrededor de  $n = \langle n \rangle$

$$P_N(n) = P_N(\langle n \rangle) \exp \left[ \frac{1}{2} B_2 (n - \langle n \rangle)^2 + \frac{1}{6} B_3 (n - \langle n \rangle)^3 + \dots \right]$$

$$P_N(n) = P_N(\langle n \rangle) \exp \left[ \frac{1}{2} B_2 \epsilon^2 + \frac{1}{6} B_3 \epsilon^3 + \dots \right]$$

$$\text{Con } B_k = \left( \frac{d^k \ln[\sqrt{2\pi N} P_N(n)]}{dn^k} \right)_{n=\langle n \rangle}$$

Calculando  $B_2$  y  $B_3$  se obtiene

$$B_2 = \frac{-1}{Npq}$$

$$B_3 = \frac{1}{N^2 p^2 q^2} (q^2 - p^2)$$

Se puede ver que

$$|B_k| < \frac{1}{(Npq)^{k-1}}$$

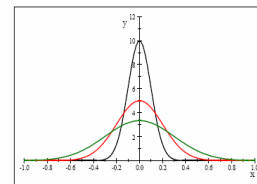
si  $\epsilon \ll Npq$  se pueden despreciar terminos de orden superior a  $\epsilon^2$

$$P_N(n) \approx P_N(\langle n \rangle) \exp \left[ -\frac{1}{2} |B_2| \epsilon^2 \right]$$

$P_N(\langle n \rangle)$  se determina por normalizacion

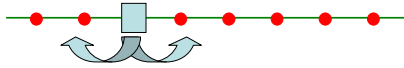
$$P_N(n) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(n - \langle n \rangle)^2}{\sigma_N^2} \right]$$

$$P_N(n) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(n)^2}{\sigma_N^2} \right]$$



## Caminata al azar

Sea el problema unidimensional de la caminata aleatoria



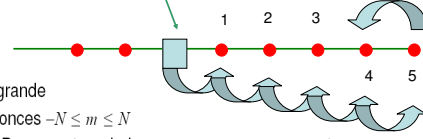
Se movera con pasos de tamaño fijo y tendra una probabilidad  $p = 1/2$  de moverse a la derecha y  $(1-p) = q = 1/2$  de hacerlo a la izquierda.

Supongamos que da  $N$  pasos.

$n_1$  sera el numero de pasos asociados a  $p$  o sea los que da a la derecha y  $(N - n_1) = n_2$  los que dara a la izquierda.

El desplazamiento neto sera  $m = (n_1 - n_2)$

Sean 6 pasos a partir de



Sea  $N$  grande

Entonces  $-N \leq m \leq N$

Pero  $m$  estara dado por  $m = N, N-2, N-4$ , etc.

Tomando en cuenta que

$$m = (n_1 - n_2) = (n_1 - N + n_1) \Rightarrow$$

$$n_1 = (m + N)/2$$

Reemplazamos en

$$P_N(n_1) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(n_1 - \langle n_1 \rangle)^2}{\sigma_N^2}\right]$$

Obtenemos con

$$\langle n_1 \rangle = \langle m/2 \rangle + N/2$$

$$\langle m \rangle = 0 \text{ por simetría}$$

$$(n_1 - \langle n_1 \rangle)^2 = m^2/4$$

$$\sigma_N^2 = Npq = \frac{1}{4}N$$

Entonces

$$P_N(m) = \left[ \frac{2}{\pi N} \right]^{1/2} \exp\left[ -\frac{m^2}{2N} \right]$$

$$P_N(n_1) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[ -\frac{1}{2} \frac{(n_1 - \langle n_1 \rangle)^2}{\sigma_N^2} \right]$$

Ahora lo pensamos en terminos del desplazamiento neto tomando en cuenta que cada paso es de longitud  $l$

$$x = ml$$

Sea  $\Delta x \gg l$

entonces la proba de que la partícula este entre  $x \rightarrow x + \Delta x$  luego de

$N$  pasos es

$$P_N(x)\Delta x = P_N(m)(\Delta x/2l)$$

pues las posiciones accesibles estan separadas  $2l$

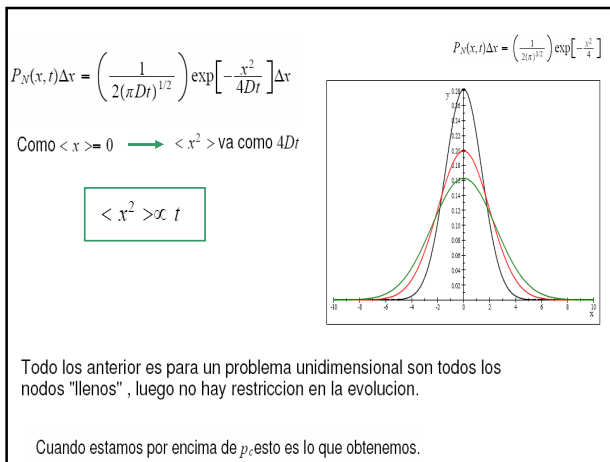
quedara entonces

$$P_N(x) = \left[ \frac{1}{2\pi Nl^2} \right]^{1/2} \exp\left[ -\frac{1}{2N} \left( \frac{x^2}{l^2} \right) \right]$$

Si la partícula da  $n$  pasos por unidad de tiempo, en  $t$

$$P_N(x, t)\Delta x = \left[ \frac{1}{2\pi ntl^2} \right]^{1/2} \exp\left[ -\frac{1}{2nt} \left( \frac{x^2}{l^2} \right) \right]\Delta x$$

Si  $D = \frac{1}{2}nl^2$



### Ecuacion Maestra

Para la probabilidad de ocupacion de un nodo tenemos:

$$P_i(t+\tau) - P_i(t) = \sum_j [\sigma_{ji}P_j(t) - \sigma_{ij}P_i(t)] \quad (\text{"a la Pauli"})$$

Donde

$P_i(t+\tau)$  = densidad de proba de ocupacion del estado  $i$  en tiempo  $t+\tau$

$\sigma_{ji}$  = densidad de probabilidad de transicion de  $j \rightarrow i$  en  $\tau$

De donde podemos definir los siguientes modelos de hormiga

Las hormigas saltan de nodo ocupado a nodo ocupado pues se mueven en un cluster

Sea  $z$  el numero de vecinos inmediatos

Hormiga ciega  $\Rightarrow$

$$\sigma_{ji} = 1/z \text{ si } i \text{ es accesible (ocupado) y}$$

$$\sigma_{ji} = 0 \text{ si } i \text{ es inaccesible (vacio)}$$

Hormiga miope  $\Rightarrow \sigma_{ji} = 1/z_j$  donde  $z_j$  es el numero de vecinos ocupados.

Para tiempos largos

$$dP_i/dt = \sum_j [\sigma_{ji}P_j(t) - \sigma_{ij}P_i(t)]$$

Donde ahora  $\sigma_{ji}$  es por unidad de tiempo.

Si estamos debajo de  $p_c$  los clusters seran finitos.

Luego debemos llegar a un estado estacionario, en este caso  $dP_i/dt = 0$ , entonces

$$0 = \sum_j [\sigma_{ji}P_j(t) - \sigma_{ij}P_i(t)]$$

Sea  $s$  el tamaño del cluster

si la hormiga es

$$\text{ciega} \Rightarrow \sigma_{ji} = \sigma_{ij} = 1/z \Rightarrow P_j(t) = P_i(t) = 1/s$$

$$\text{miope } P_i(t) \rightarrow z_i/s.$$

Entonces para la hormiga ciega:

todos los nodos son equivalentes y de alli la distancia asintotica  $R$ , es la distancia media entre nodos del cluster lo que pasa a ser  $R_s$ .

( $R_s$  es el radio del cluster)

Si promediamos sobre todos los tamaños de cluster obtenemos :

$$R^2 = \sum_s n_s s R_s^2 \propto (p - p_c)^{\beta - 2\nu} \quad (t \rightarrow \infty, p < p_c)$$

Momento de orden  $1 + 2\nu\sigma$

1) Para  $p = 1$

$$R^2 \propto Dt \quad \text{Con } D=1$$

2) Cuando nos alejamos de  $p = 1$  como sigue siendo "compacto" la ley sera igual pero con  $D = D(p)$

3) Como debajo de  $p_c$  no hay difusión  $\Rightarrow D$  debe irse a 0

Se ha demostrado que  $D = \Sigma \Rightarrow R^2 \propto \Sigma t$

De donde cerca de  $p_c \Rightarrow D \propto (p - p_c)^\mu$ . Con  $\mu$  el exponente de la conductibilidad

$$M_k = \sum s^k n_s \propto e^{(\tau-1-k)/\sigma}$$

$$\sum s R_s^2 n_s \Rightarrow k = 1 + \frac{2}{D} = 1 + 2\sigma\nu \Rightarrow$$

$$\frac{\tau-1-k}{\sigma} = \frac{\tau-1-1-2\sigma\nu}{\sigma} = \frac{\tau-1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} - 2\nu$$

$$= \beta + (\beta + \gamma) - \frac{1}{\sigma} - 2\nu = \beta + \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} - 2\nu$$

$$= \beta - 2\nu$$

Si promediamos sobre todos los tamaños de cluster obtenemos :

$$R^2 = \sum_s n_s s R_s^2 \propto (p - p_c)^{\beta - 2\nu} \quad (t \rightarrow \infty, p < p_c)$$

Momento de orden  $1 + 2\nu\sigma$

1) Para  $p = 1$

$$R^2 \propto Dt \quad \text{Con } D=1$$

2) Cuando nos alejamos de  $p = 1$  como sigue siendo "compacto" la ley sera igual pero con  $D = D(p)$

3) Como debajo de  $p_c$  no hay difusión  $\Rightarrow D$  debe irse a 0

Se ha demostrado que  $D = \Sigma \Rightarrow R^2 \propto \Sigma t$

De donde cerca de  $p_c \Rightarrow D \propto (p - p_c)^\mu$ . Con  $\mu$  el exponente de la conductibilidad

Como se combinan estos comportamientos?

proponemos

$$R = t^k r[(p - p_c)t^\nu]$$

aquí aparece el tiempo!!!!

a) para  $p > p_c$

$$R \propto t^k (p - p_c)^{\mu/2} t^{\nu\mu/2} \propto t^{k+\nu\mu/2} D^{1/2}$$

de donde obtenemos el  $D^{1/2}$   
pero además  $t$  debe ir como  $t^{1/2}$  de donde  $k = (1 - \mu\nu/2)$

b) para  $p < p_c$

$R$  varia como  $(p - p_c)^{\beta - 2\nu}$

b) para  $p < p_c$   
 $R$  varia como  $(p - p_c)^{\beta-2\nu}$

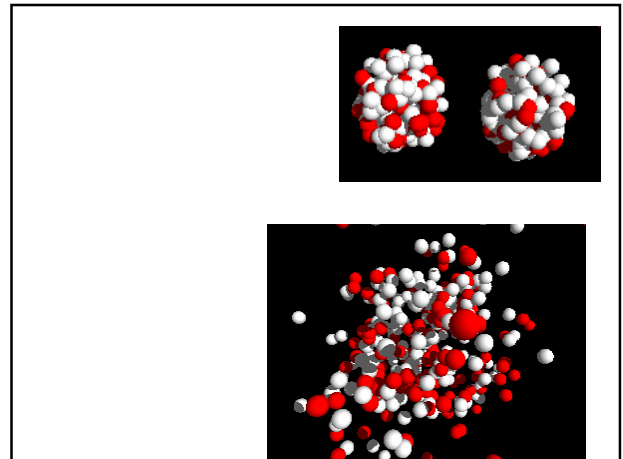
c) para  $p = p_c$   
 nos queda

con un exponente anómalo ( $k < 1/2$ ). con  $k = 0.33$  para 2 dimensiones y  $k \sim 0.2$  en 3 dimensiones

$R = r^k r[(p - p_c)r^\nu] \rightarrow$

Para que esto ajuste necesitamos que  
 $x = \frac{1}{2\nu + \mu - \beta}$   
 y  
 $k = \frac{\nu - \beta/2}{2\nu + \mu - \beta}$

$R \propto r^k$



**Señales estadísticas de comportamiento crítico en sistemas finitos**

J.B.Elliott PRC 62 (2000) 064603

Supongamos que queremos estudiar comportamiento crítico en sistemas finitos.

Multifragmentación de clusters metálicos, núcleos atómicos, etc.

**Sistemas que estudian**

a) Reacciones nucleares de Au+ C a 1.0A GeV

Au= (Z,A)=(79 , 197)  
 C=(Z,N)=(6,12)

Producida la colisión hay una serie de nucleones emitidos tempranamente resultando (hipotéticamente) un sistema

Luego masa total varia (en función de la energía) de  $A_0 \sim 92$  ( $E^*/A_0 \sim 2\text{MeV/nucleon}$ ) a  $A_0 \sim 194$ . ( $E^*/A_0 \sim 16\text{MeV/nucleon}$ )

Experimentalmente se determina la carga de los fragmentos y se usa que para  $Z < 2$  le corresponde una masa  $= Z \cdot A_0/Z_0$  donde el cociente varia entre 2.55 y 2.36 para multiplicidades pequeñas y grandes, respectivamente.

b) percolacion de redes cubicas de  $6 \times 6 \times 6 = 216$  nodos, la percolacion es de links pues el proceso experimental es a masa total constante

c) Particiones aleatorias

Se trabaja con sistemas de  $A = 79$  "elementos", que corresponde a la carga

Se hace del siguiente modo :

- i) se fija la multiplicidad (random entre  $[1, A]$ )
- ii) Se fija el valor del maximo fragmento (que es funcion de  $[A, m]$ ),  $A_{\max}^1$  esta en  $(1, A - m + 1)$
- iii) se sigue de este modo.

#### Aplicamos el modelo de Fisher.

Sea  $A$  la masa de los fragmentos

$$n_A = q_0 A^{-\tau} f(z) g(\mu, T)^A$$

Con

$$z = \epsilon A^\sigma$$

y  $\epsilon$  es la distancia al punto critico

En el punto critico

$$n_A = q_0 A^{-\tau}$$

Que debe satisfacer (no es un power law cualesquiera)

Normalizamos  $M_1$

$$M_1(\epsilon = 0) = \sum A q_0 A^{-\tau} = q_0 \sum A^{1-\tau} = 1.0$$

pues trabajamos con cosas por nodo.

De donde

$$q_0 = 1 / \sum A^{1-\tau}$$

Valido si vale la aproximacion de FDM

El segundo momento diverge con  $\gamma = (3 - \tau)/\sigma$

#### Señales de transiciones de fase en las distribuciones de clusters.

##### 1) Fluctuaciones

En el punto critico hay fluctuaciones de todos los tamaños

Esta desaparicion de escalas caracteristicas puede ser estudiada

Tener en cuenta que para fluidos en el punto critico se anula la tension superficial

### i) Estudio de $\Delta(A_{\max}/A_0)$

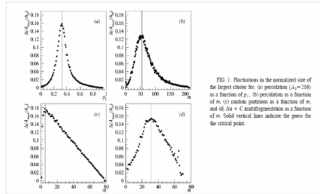


FIG. 1. Fluctuations in the normalized size of the largest cluster for (a) percolation ( $L=256$ ) as a function of  $p_c$ , (b) percolation as a function of  $m$ , (c) random partitions as a function of  $m$ , and (d)  $A_0 \rightarrow C$  configurations as a function of  $m$ . Solid vertical lines indicate the guess for the critical point.

Lo interesante es que la curva c) que corresponde a particiones aleatorias tiene un maximo que no tiene nada que ver con una transicion de fase de segundo orden. Observar que aparece la multiplicidad

Esto se entiende porque en  $m = 1$  la flustuaciones son 0 por condiciones de contorno y lo mismo para  $m = 79$

### ii) Fluctuaciones en el tamaño medio del maximo fragmento

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum A^2 \right) - \langle A \rangle^2$$

tomando en cuenta que

$$\langle A \rangle = \left( \sum n_A A \right) / \left( \sum n_A \right) = M_1 / M_0$$

Entonces

$$\sigma^2 = \frac{M_2}{M_0} - \left( \frac{M_1}{M_0} \right)^2$$

En general se usa

$$\gamma_2 = \frac{\sigma^2}{\langle A \rangle^2} + 1 = \frac{M_2 M_0}{M_1^2}$$

Que se denoomina la variancia reducida.

Hay diversos modos de medirla...

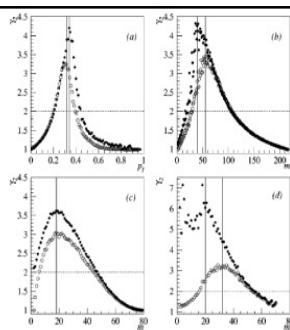


FIG. 2. Fluctuations as measured by  $\gamma_2$  for (a) percolation as a function of  $p_c$ , (b) percolation as a function of  $m$ , (c) random partitions as a function of  $m$ , and (d)  $A_0 \rightarrow C$  configurations as a function of  $m$  (at low  $m$   $\gamma_2$  is affected by fission events not completely filtered). Open circles show  $\gamma_2$ , while filled circles show  $\gamma_2$  (see text for details). Solid vertical lines indicate the guess for the critical point. A dotted horizontal line shows the value of  $\gamma_2=2$ .

Nuevamente aun para particiones aleatorias encontramos un maximo.

### Divergencia de los momentos

Hemos visto que en percolacion diversos momentos divergen (los con  $k > 1$ ) como

$$M_k = (p - p_c)^{-(k+1-\tau)/\sigma}$$

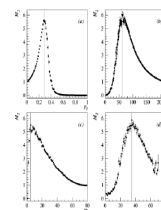


FIG. 3. The normalized moment  $(1/k)$  of the cluster distribution for (a) percolation as a function of  $p_c$ , (b) percolation as a function of  $m$ , (c) random partitions as a function of  $m$ , and (d)  $A_0 \rightarrow C$  configurations as a function of  $m$ . Solid vertical lines indicate the guess for the critical point.

Atencion, esto se calcula removiendo el cluster maximo pues FDM es sobre los clusters del gas.

Para calcular esto es necesario conocer la posicion de  $p_c$  o  $m_c$

Siguiendo a Phys. Rev. C 49(1994) 3185

### Calculo de $\tau_{eff}$ minimo

Si estudio el espectro de masa veo que este es del tipo :

$$n_A = q_0 A^{-\tau} f(\epsilon A^\sigma)$$

De donde se puede suponer que para todo  $p$  distinto de  $p_c$  la distribucion de fragmentos pequeños sera mas empinada que en el punto critico.

Pero ....

Si intentamos un fit con dos parametros :

$$\tau_{eff} = -\frac{\partial \ln n_A(\epsilon)}{\partial A}$$

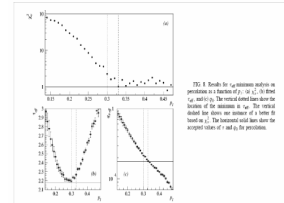
entonces

$$\tau_{eff} = \tau - A \frac{\partial \ln f}{\partial A}$$

luego

$$\frac{\partial \tau_{eff}}{\partial \epsilon} = -A \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\partial \ln f}{\partial A}$$

Entonces  $\tau_{eff}$  depende de  $f$  !



### Señales buenas

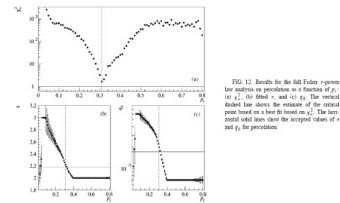
### El power law de Fisher

Como vimos antes no se puede fitear  $\tau$  usando dos parametros como si fuese un power law cualesquiera.

El metodo consiste entonces en fitear solo  $\tau$  usando

$$q_0 = 1 / \sum A^{1-\tau}$$

Que es la  $\zeta$  de Riemann





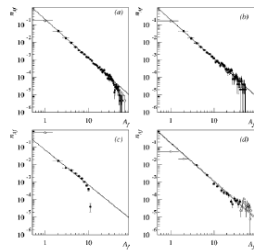


FIG. 16. Best fit Fisher  $\alpha$ -power laws for (a) percolation ( $p_c$ ), (b) percolation ( $p_c$ ), (c) random percolation, and (d)  $A_0 = 0.5$  unidirectional. Solid circles were included in the fit, open circles were excluded. Solid lines show the best fit power law, dotted lines indicate error in the power law based on errors in the fitted parameters.

## NVM

Otra propuesta para detectar el punto critico es:

C.O.Dorso et al. PRC 60 (1999)034606

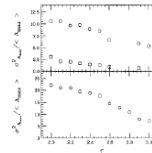


FIG. 2. Normalized variance for the random percolation model. The plot shows the normalized variance (sigma^2 / A\_max^2) as a function of the bond activation probability (p). The y-axis ranges from 0 to 0.05, and the x-axis ranges from 0.2 to 0.8. Data points are shown for different system sizes: 10x10 (circles), 10x20 (squares), 10x30 (triangles), 10x40 (diamonds), 10x50 (crosses), 10x60 (asterisks), 10x70 (plus), 10x80 (x), 10x90 (dot), 10x100 (open circle).

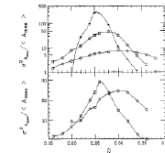


FIG. 4. Normalized variance for bond percolation in finite systems as a function of the bond activation probability (p). The y-axis ranges from 0 to 0.05, and the x-axis ranges from 0.2 to 0.8. Data points are shown for different system sizes: 10x10 (circles), 10x20 (squares), 10x30 (triangles), 10x40 (diamonds), 10x50 (crosses), 10x60 (asterisks), 10x70 (plus), 10x80 (x), 10x90 (dot), 10x100 (open circle).

Donde se grafica :

$$\sigma_{NVM} = \frac{\langle A_{max}^2 \rangle - \langle A_{max} \rangle^2}{\langle A_{max} \rangle}$$

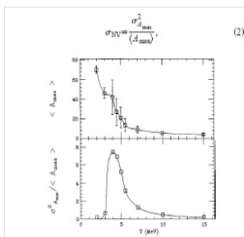


FIG. 6. The upper part shows the average mass of the maximum fragment while the lower part the NVM as a function of the initial temperatures displayed in Fig. 5. It can be seen that the NVM displays a sharp maximum for events with initial temperature of  $T=4.34\text{eV}$ .