Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería

Matemática discreta ii

Taller 1

Autor:
Haider Andres Mayorga Vela

Profesor:
Francisco Albeiro Gomez Jaramillo

Febrero 2023

Ejercicios 1

febrero 2023

Índice

I. Ejercicios 13/02/23

I. asociatividad - tabla de productos

G es un conjunto finito de n elementos, entonces M se puede escribir como la tabla. Demuestre la asociatividad

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

1. $(d * c) * b$
$c * b$
b
2. $d * (c * b)$
$d * b$
a
(1) $b \neq$ (2) a

Por contraejemplo el conjunto G sobre la operación M no es asociativa

II. asociatividad - producto de matrices cuadrada

Dado la matriz cuadradas 2x2 A,B y C. Demuestre que el producto de las matrices es es asociativa

a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l $\in$ R

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

1. $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} iae + ibg + kaf + kbh & jae + jbg + laf + lbh \\ ice + idg + kcf + kdh & jce + jdg + lcf + ldh \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} iae + kaf + ibg + kbh & jae + laf + jbg + lbh \\ ice + kcf + idg + kdh & jce + lcf + jdg + ldh \end{pmatrix}$$

$reorganizamos\ terminos,\ (Como\ los\ los\ elementos\ son\ pertenecientes\ R\ \ son\ conmutativos)$

$$\begin{pmatrix} iae + ibg + kaf + kbh & jae + jbg + laf + lbh \\ ice + idg + kcf + kdh & jce + jdg + lcf + ldh \end{pmatrix}$$

$Como\ ambas\ matrices\ resultantes\ son\ iguales\ es\ asociativo\ el\ producto\ de\ matrices\ cuadradas\ 2x2$

III. Demuestre la asociatividad en números complejos

$$
\begin{gathered}
1).\ (a+bi)*((c+di)*(e+fi)) \\
(a+bi)*\left(ce+cfi+dei+dfi^2\right) \\
ace+acf+\ adei\ +\ adfi^2\ +\ bcei\ +\ bcfi^2\ +\ bdei^2\ +\ bdfi^3
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
2).\ ((a+bi)*(c+di))(e+fi) \\
\left(ac+adi+bci+bdi^2\right)*(e+fi) \\
ace\ +adei\ +\ bcei\ +\ bdei^2+\ acfi\ +\ adfi^2\ +\ bcfi^2+bdfi^3 \\
reorganizamos\ terminos \\
ace+acf+\ adei\ +\ adfi^2\ +\ bcei\ +\ bcfi^2\ +\ bdei^2\ +\ bdfi^3
\end{gathered}
$$

Por tanto al ser iguales la ecuación 1 y 2, la multiplicación de complejos es asociativa

IV. Grupo - números complejos

Demuestre que los números complejos son grupo

$$
\begin{gathered}
es\ cerrado\ para\ la\ operacion * \ :\ a,b \in\ C\ \Longrightarrow a\ *\ b\ \in\ C \\
a+bi, c+di\ \in\ C \\
(a+bi)*(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i \\
(ac-bd)+(ad+bc)i\ \in\ C \\
la\ operacion\ es\ asociativa:\ a,b,c \in\ C\ \Longrightarrow\ (a*b)*c\ \ = a*(b*c) \\
Ejercicio\ anterior \\
existe\ un\ elemento\ identidad:\ a\ \in\ C\ \ \Longrightarrow a\ *id\ =\ id*a\ =\ a \\
a+bi, 1\ \in\ C\ ,\ (a+bi)*1 = 1*(a+bi) = (1*a)+(1*b)i = a+bi \\
todo\ elemento\ tiene\ un\ inverso:\ a\ \in\ C\ \ \Longrightarrow\ a*b = b*a = id \\
a+bi\ \in\ C,\ \frac{1}{c+di}\ \ c+di\ \in\ C,\ \ \ c+di\ \neq\ 0\ ,\ \frac{1}{c+di}*a+bi\ = a+bi*\frac{1}{c+di} = 1
\end{gathered}
$$

$$multiplicamos\ por\ 1\ y\ operamos$$

$$\frac{1}{a+bi} * \frac{a-bi}{a-bi}$$

$$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

$$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{abi-abi}{a^2+b^2}i$$

$$quedamos\ con\ un\ imaginario\ por\ cero\ y\ un\ 1$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{0}{a^2+b^2}i$$

$$1 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$$

Por tanto al haberse cumplido las 4 propiedades los números complejos son grupo sobre la multiplicación