**Universidad Nacional de Colombia**

Facultad de Ingeniería

# Matemática discreta ii

*Taller 1*

Autor:
Haider Andres Mayorga Vela

Profesor:
Francisco Albeiro Gomez Jaramillo

Febrero 2023

## 1. : G $\rightarrow$ H es homomorfismo, entonces Img($\theta$) y kernel($\theta$) es subgrupo de H.

Demostracion de: kernel($\theta$) y Img($\theta$) son subgrupos, Para tal fin las propiedades que deben cumplir para un subgrupo: cerradura, inversos y el elemento neutro.

Inicialmente kernel($\theta$). Sea $a, b \in$ kernel($\theta$), es decir, $\theta(a) = \theta(b) = 1$. por tanto,

$$\theta(ab) = \theta(a)\theta(b) = 1 \cdot 1 = 1$$

asi que $ab$ ademas estaria en kernel($\theta$), y por lo tanto, kernel($\theta$) es cerrado bajo la operación del grupo $G$.

ademas si $a$ está dentro de kernel($\theta$), entonces $\theta(a) = 1$, y por lo tanto, $\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1} = 1^{-1} = 1$. Asi que, el inverso de $a$ también está en kernel($\theta$), y kernel($\theta$) es cerrado bajo inversos.

la ultima propiedad se demostraria de la siguiente manera, el elemento neutro del grupo $G$, que se identifica como $1_G$, está en kernel($\theta$) porque $\theta(1_G) = 1_H$ (porque es un homomorfismo), y por lo tanto kernel($\theta$) contiene el elemento neutro. Por consiguiente es subgrupo de $H$. por tales razones, kernel($\theta$) cumple propiedades de un subgrupo y por lo tanto es un subgrupo de $G$.

ya en segundo lugar, Img($\theta$). Sea $c, d \in$ Img($\theta$), o en otras palabras, existen $a, b \in G$ tales que $\theta(a) = c$ y $\theta(b) = d$. Entonces,

en Img($\theta$), y Img($\theta$) es cerrado bajo inversos.

Finalmente, el elemento neutro del grupo $H$, denotado como $1_H$, está en Img($\theta$) porque $\theta(1_G) = 1_H$ (ya que es un homomorfismo), y por lo tanto Img($\theta$) contiene el elemento neutro.

Entonces, Img($\theta$) cumple todas las propiedades de un subgrupo y por lo tanto es un subgrupo de $H$.

## 2. Sea $X \subseteq G$. Entonces, existe un subgrupo $S$ de $G$ tal que $X \subseteq S$.

para la demostración se entiende que $X \subseteq G$ que conlleva a que existe un subgrupo $S$ tal que $X \subseteq S$, y para cualquier otro subgrupo $T$ que contenga a $X$, se tiene que $S \subseteq T$.

Además, dado que $S$ es un subconjunto que contiene a $X$, es posible definir el subgrupo $T = G$, tal que por definición de subgrupo ya dicha en el punto anterior, $X \subseteq T$. Por lo tanto, se cumple que $X \subseteq T$ y $S \subseteq T$ para cualquier subgrupo $T$ que contenga a $X$.