Cours de mathématiques

Haerearii Metuarea

https://hmetuarea.github.io/

Table des matières

Introduction

La compréhension des phénomènes naturels relève d'études qui se sont réalisées au fil du temps. A l'issue, le public s'est offert sa propre conclusion dont la nature cartésienne est constamment remise en question. Comme le suggère le programme officiel [2], ce cours mène tout d'abord à apporter une compréhension de la nature du savoir scientifique et ses méthodes d'élaboration. Nous nous intéressons en particulier aux techniques qui ont formés les connaissances modernes que l'on dispose aujourd'hui. Aussi, nous allons aussi comprendre et identifier les effets de la science sur les sociétés et sur l'environnement. C'est pourquoi nous mettrons l'accent sur des sujets de biologie, de physique et de chimie dont les mathématiques auront une place qui les décrit en grande partie. Une bonne partie des exemples et exercices est nourrie du contexte polynésien comme l'est demandé par le Ministère [5]

Chapitre 1

Premier trimestre

1.1 Suites arithmétiques

Toute collection de nombres obéit à une règle algébrique précise. Dans certain cas, ces collections obéissent à une règle commune qui nous permet de connaître les termes plus grands efficacement. Nous allons dans ce chapitre travailler sur les collections de nombres dont l'évolution est dite arithmétique.

Objectifs. Connaître les suites arithmétiques et sa formule de récurrence.

Connaître des applications des suites arithmétiques.

Représenter graphiquement des suites arithmétiques.

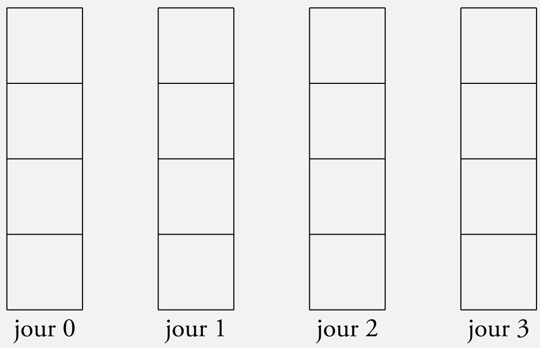
1.1.1 Définition

Commençons par définir heuristiquement ces collections de nombres.

Sous-objectif. Connaître les suites arithmétiques.

Activité de recherche 1. Chaque jour, Uratini reçoit une pièce de son frère.

1. A l'aide des pièces, modéliser le nombre de pièces que Uratini obtient le jour 0, 1, 2 et 3.
2. Dans les cases qui suivent, colorier les cases correspondant au nombre de pièces obtenues chaque jour. Coloriez d'une différente couleur la case pour laquelle Uratini obtient une pièce.



3. Donner une formule permettant d'obtenir le nombre de pièces chaque jour.

La progression de tels nombres est dite arithmétique. Cette progression est comparable à une fonction affine où nous pouvons nous rappeler graphiquement sa tendance.

Définition. Une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ est une collection de nombre noté $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le procédé est défini par

$$u_n = u_0 + nr$$

Cette formule est appelée le terme général de la suite et l'entier n est appelé le rang de la suite.

Les suites arithmétiques modélisent les situations qui évoluent de manière affine. C'est pourquoi obtenir une telle formule est d'une grande importance puisqu'elle nous permet de calculer un terme dont le rang est grand « à la main » et très grand de manière numérique.

Exemple. Les nombres de la collection $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\}$ sont caractérisés par la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 2 de terme général

$$u_n = u_0 + 2n$$

avec $u_0 = 1$.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_4 = 13,\ u_5 = 17,\ u_6 = 8,\ u_7 = 23$$

Justifier que cette suite ne peut pas être arithmétique.

[3, exo 39, p.60]

Fin de la 1ère séance.
Prenez la peine de faire l'exercice suivant.

Devoir 1. Un théâtre est composé de rangée et le nombre de siège à chaque rangée forme une suite arithmétique dont on ne connaît pas le premier terme et la raison.

1. La rangée 6 possède 23 sièges et la rangée 15 en possède 50. Montrer que la rangée 1 possède 5 sièges.
2. Le théâtre possède 20 rangées. Combien de siège possède-t-il au total ?

[1, question 17]

Activité de départ. Résolution de quelques pattern.

Sous-objectif. Connaître la formule de récurrence des suites arithmétiques

Activité de recherche 2. Ce sont les promotions chez Uratini. Il vend des melons à 500 XPF l'unité. Chaque melon est acheté par un client uniquement. Chaque fois qu'un client achète un, Uratini baisse le prix de 50 XPF.

1. Quel est le prix du melon au client 1, 2 et 3.

   On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le prix en XPF du melon.

2. Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison -50 et de premier terme $p_0 = 500$ définie par

$$p_n = 500 - 50n$$

3. De combien le prix varie entre les ventes 1 et 2. Déduire $p_2 - p_1$.
4. Calculer $p_3 - p_2$ et $p_1 - p_0$.
5. Combien vaut $p_{n+1} - p_n$?

[3, p.52]

Activité de recherche 3. Ce sont les promotions chez Uratini. Il vend des melons à 500 XPF l'unité. Chaque melon est acheté par un client uniquement. Chaque fois qu'un client achète un, Uratini baisse le prix de 50 XPF.

1. Quel est le prix du melon le jour 1, le jour 2 et le jour 3.

   On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le prix en XPF du melon.

2. Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison -50 et de premier terme $p_0 = 500$ définie par

$$p_n = 500 - 50n$$

3. Calculer p_3, p_2 et déduire $p_3 - p_2$. Faire pareil pour $p_2 - p_1$ et $p_1 - p_0$.
4. Combien vaut $p_{n+1} - p_n$?

[3, p.52]

Activité de recherche 4. Ce sont les promotions chez Uratini. Il vend des melons à 500 XPF l'unité. Chaque melon est acheté par un client uniquement. Chaque fois qu'un client achète un, Uratini baisse le prix de 50 XPF.

1. Quel est le prix du melon le jour 1, le jour 2 et le jour 3.

   On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le prix en XPF du melon.

2. Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison -50 et de premier terme $p_0 = 500$ définie par

$$p_n = 500 - 50n$$

3. Calculer $p_3 - p_2$, $p_2 - p_1$ et $p_1 - p_0$
4. Combien vaut $p_{n+1} - p_n$?

[3, p.52]

Cela signifie que toute suite arithmétique représente la somme de sa raison avec le terme du rang précédent. On arrive à définir une relation, dite, par récurrence de ces suites.

Propriété. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r alors elle peut être définie de manière récurrente par*

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Pour démontrer proprement un tel résultat, on se privera du raisonnement par récurrence devant une preuve plus limpide.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on raisonne par définition. On écrit

$$u_{n+1} = (n+1)r + u_0 = nr + r + u_0 = nr + u_0 + r = u_n + r$$

Réciproquement, si une suite vérifie une telle égalité alors on écrit terme par terme pour obtenir la relation en définition. □

Fin de la 2ème séance.
Vous pouvez préparer les problèmes qui suivent. La séance qui arrive sera entièrement consacrée à leur résolution.

Activité de départ. Déterminer le terme général d'une suite arithmétique à l'aide du calcul de termes de rangs « petits ».

Objectifs. Savoir ce que les suites arithmétiques décrivent.

Résoudre un problème à l'aide de la pensée algébrique.

Résoudre une équation et une inéquation.

Exercice 2. Calculer les trois premiers termes pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est

1. $u_n = 4n + 3$

2. $u_{n+1} = u_n + 1$ avec $u_0 = 3$.

[3, exo 46, p.60]

Indication. Pour le 2., on pourra calculer un par un u_0, u_1, u_2, etc.

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de premier terme $u_1 = 15$ et de raison $r = 4$.

1. Justifier que le terme général de cette suite est $u_n = 4n + 15$ pour $n = 2, 3, 4, ...$
2. Calculer u_2, u_3 et u_4.

[3, exo 47, p.60]

Exercice 4 (application en économie)**.** Lors de sa première année d'ouverture, le bénéfice net d'une roulotte à Moorea est de 5 500 000 XPF. On modélise ce bénéfice annuel par une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où n désigne la n-ème année d'ouverture. On sait qu'à la 8ème année, il y a eu 1 750 000 000 XPF de bénéfice net.

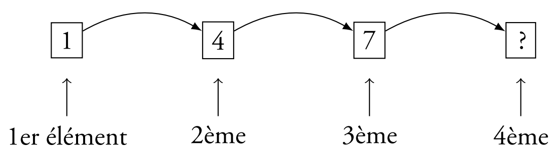
1. Justifier que $u_1 = 5500000$ et $u_8 = 1750000000$.
2. Calculer la raison de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déduire l'expression du terme général.
3. Déterminer l'année à laquelle les bénéfices vont dépasser 17 500 000 000 XPF.

[3, exo 88, p.65]

Fin de la 3ème séance.

1.1.2 Examen

Exercice 1. Considérons la collection de nombres suivante



1. Déterminer le 4ème nombre de cette collection.
2. Trouvez une manière de <u>calculer</u> n'importe quel nombre de cette collection.
3. Est-ce que le nombre 100 appartient à cette collection ?

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_4 = 13,\ u_5 = 17,\ u_6 = 8,\ u_7 = 23$$

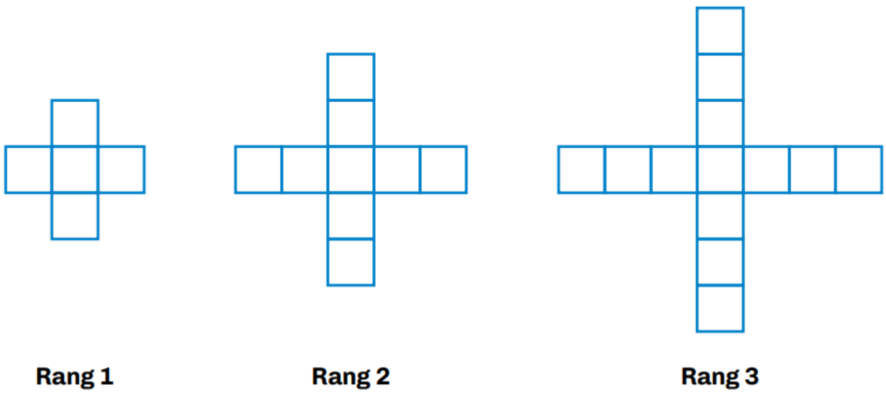
Justifier que cette suite ne peut pas être arithmétique.

Exercice 3. En juin 2022, une rivière de Mayenne a connu une crue exceptionnelle. Son niveau était 1,5m au-dessus de son niveau normal. Lors de la décrue, le niveau a baissé de 30 cm par jour.

1. Quel est le niveau un jour après ?
2. Quel est le niveau deux jours après ?
3. Donner une formule qui permet de calculer le niveau de l'eau n jours après.

4. Quel était le niveau de la rivière après 5 jours de décrue ? Interpréter ce résultat pour cette situation.

Exercice 4. Uratini réalise les motifs ci-dessous avec des carreaux.



Il dit « J'aurais besoin de 250 carreaux pour le motif numéro 50 ». A-t-il raison ? Justifier votre réponse rigoureusement.

1.2 Taux d'accroissement

La vitesse d'une voiture correspond au rapport entre une différence de distance et une différence de temps.

On défini ici $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des nombres réels.

1.2.1 Taux d'accroissement

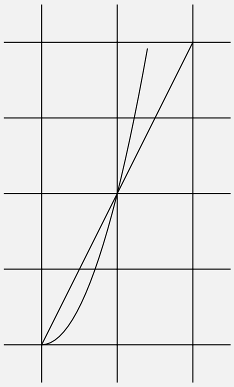
Nous allons définir une telle variation par une approche géométrique.

Pré-requis.Géométrie du plan, fonctions affines, calcul littéral.

Activité de départ. Calcul littéral.

Commençons par définir le taux d'accroissement de manière empirique.

Activité de recherche 1. Soit f une fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$.



1. Déterminer la longueur entre a et b.
2. Déterminer la longueur entre $f(a)$ et $f(b)$.

   On pose $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$ et $C = (b, f(a))$.

3. Justifier que ABC est un triangle rectangle en C.
4. Calculer l'hypoténuse de ABC.

Note professeur. *Il est possible de différencier cette activité en le traitant de manière numérique avant de le traiter abstraitement.*

Dans cette partie, on note f une fonction définie sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\mathscr{C}_f$ désigne sa courbe.

Formaliser une variation sur une courbe nécessite l'utilisation des droites qui coupent la courbe.

Définition. On appelle taux d'accroissement aux points A et B sur la courbe $\mathscr{C}_f$ le coefficient directeur de la droite (AB).

Naturellement, la droite qui caractérise le taux d'accroissement est unique [4]. En particulier, la tangente en un point est unique aussi par construction.

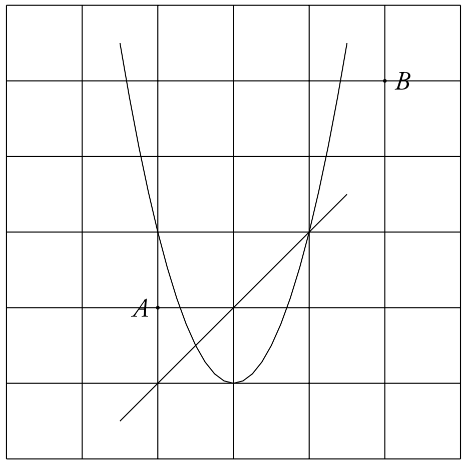
Accessoirement, le taux d'accroissement détermine en physique la vitesse moyenne d'un objet sur une distance donnée.

Propriété. *Soit f une fonction dont la courbe est tracée sans « lever le stylo » alors le taux d'accroissement en deux points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ avec $a > b$ est*

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Un exercice empirique pour démontrer cette propriété par généralisation.

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$ une fonction et les points $A(1; 2)$ et $B(0; 1)$. On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = ax + b$ avec a, b deux constantes.



1. Résoudre le système d'inconnue (α, β)

$$\begin{cases} 2 & = \alpha + \beta \\ 1 & = \beta \end{cases}$$

2. Justifier que l'équation (1) correspond à l'équation de la droite passant par le point A.
3. Justifier que l'équation (2) correspond à l'équation de la droite passant par le point B.

Démonstration. On définit la droite passant par A et B : $x \mapsto \alpha x + \beta$. On résout le système

$$\begin{cases} f(a) & = a\alpha + \beta \\ f(b) & = b\alpha + \beta \end{cases}$$

On faisant la différence des deux équations, on obtient l'égalité en factorisant par α le coefficient directeur

$$f(a) - f(b) = (a - b)\alpha$$

Comme $a > b$ alors $a \neq b$ et on obtient l'expression attendue. □

Naturellement, nous pouvons démontrer ce résultat géométriquement avec le théorème de Thalès ou les agrandissements et réductions.

Fin de la 1ère séance.
Pour la prochaine séance, vous ferez le devoir qui suit dont vous aurez la correction à faire.

Pré-requis.Géométrie du plan, équations, fonctions affines, calcul littéral.

Activité de départ. Calcul littéral.

Devoir 2. Déterminer l'équation de la droite passant par la courbe représentant la fonction $f : x \mapsto x^3 + x^2$ et les points $A(2;12)$ et $B(0,0)$.

Note professeur. *Ce devoir maison invite l'élève à mobiliser les notions vues en séance.*
Correction. Vérification que $A, B \in \mathscr{C}_f$.

$A(2;12) = (2, f(2))$ *? On écrit* $f(2) = 2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12$.
On note $y = ax + b$ *une droite du plan. On écrit l'équation quand elle passe par A et B*

$$\left\{\begin{array}{ll} y_A & = ax_A + b \\ y_B & = ax_B + b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 12 & = 2a + b \\ 0 & = b \end{array}\right.$$

On résout pour obtenir $(a, b) = (6, 0)$.

Exercice 2. Dans chaque cas, calculer le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b.

1. $f : x \mapsto 3x - 5$ avec $a = 1$ et $b = 3$.
2. $f : x \mapsto x^3 + 4x + 6$ avec $a = 5$ et $b = -3$.
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ avec $a = 2$ et $b = 4$.

Note professeur. *Ce devoir est repris du manuel exercice 40 p.142. Il s'agit encore d'une simple application des notions mobilisées dans la séance.*

Exercice 3. Une voiture effectue des essais de freinage. A l'instant $t = 0$ seconde (début du freinage) jusqu'à $t = 5$ secondes, la distance parcourue par la voiture en mètre (noté m) est modélisée par la fonction

$$d : t \mapsto d(t) = -4t^2 + 40t$$

1. Calculer $d(2) - d(1,9)$ et $\frac{d(2)-d(1,9)}{2-1,9}$.
2. Déterminer la distance et la vitesse moyenne de la voiture entre $1,9$ et 2 secondes.
3. Déterminer la distance et la vitesse moyenne de la voiture entre 2 et $2,1$ secondes.

Fin de la 2ème séance.
Pour la prochaine séance, vous ferez le devoir qui suit dont vous aurez la correction à faire.

1.2.2 Examen

1.3 Probabilité conditionnelle

Certaines expériences aléatoires sont constituées de plusieurs épreuves. Leur compréhension exploite les arbres de probabilité mais l'usage de cet outil est limité par le nombre d'épreuves.

Note professeur. *Nous considérons dans toute cette partie l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1.3.1 Définition

Commençons par rappeler les notions ensemblistes et probabilistes élémentaires.

Pré-requis. Probabilité élémentaire, théorie des ensembles, proportionnalité.

Nous allons définir algébriquement la notion de probabilité conditionnelle au moyen de la proportionnalité.

Activité de recherche 1. Lors d'une pandémie, on a réalisé des tests sur un échantillon de 500 personnes. On note

- T (resp. $\overline{T}$) l'événement « la personne est positive (resp. négative) au test ».
- I (resp. $\overline{I}$) l'événement « la personne est infectée (resp. non infectée) ».

	Infectée I	Non infectée $\overline{I}$	Total
Test positif T	100	60	160
Test négatif $\overline{T}$	68	272	340
Total	168	332	500

1. Décrire $T \cap I$.
2. Calculer $\mathbb{P}(T \cap I)$ avec le tableau.
3. Calculer $\mathbb{P}(T)$ avec le tableau.
4. Montrer que la probabilité qu'une personne soit infectée sachant qu'elle est positive au test est de $\frac{2}{3}$.
5. Montrer que $\mathbb{P}(T \cap I)$ et $\mathbb{P}(T)$ sont proportionnelles.

[**?** , p.16-p.17]

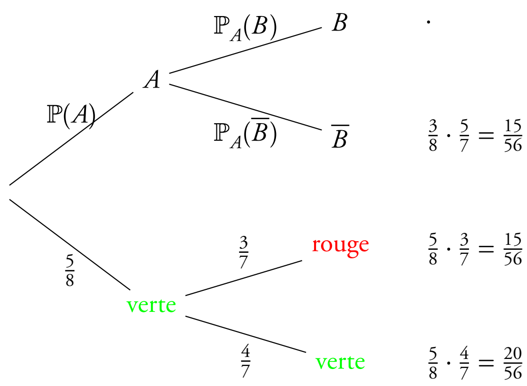
Note professeur. *Dans cette activité, les intentions sont didactiquement claires. Nous invitons aux élèves de prendre connaissance du tableau et de l'utiliser. L'objectif étant de donner du sens à la notion de probabilité conditionnelle, ils calculent les probabilités $\mathbb{P}(T)$ et $\mathbb{P}(T \cap I)$ séparément pour déduire leur « colinéarité ». Moyennant la question 4, cette question est utile pour qu'ils puissent comprendre qu'ils recherchent « à faire apparaître » $\frac{2}{3}$.*

Ainsi, la probabilité conditionnelle d'un événement A sachant que l'événement B se réalise correspond au coefficient de proportionnalité entre la probabilité de B et celle de $A \cap B$. En pratique, nous définissons cette quantité comme le rapport de ces probabilités.

Définition. La probabilité d'un événement A sachant que B est réalisé est la quantité

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

La quantité $\mathbb{P}_B(A)$ se lit « probabilité de A sachant B ».



Exemple. .

Fin de la 1ère séance.
Donnez-vous la peine de faire l'exercice qui suit.

Devoir 3. .

1.3.2 Formule de Bayes

L'étude des chances pour qu'un événement se réalise ou non couvre une grande diversité de problèmes allant de la biologie en passant par la physique. De tels problèmes se modélisent efficacement par un arbre, dit, de probabilité et nous pouvons déterminer exactement la probabilité que des événements se réalisent ou non.

1.3.3 Examen

1.4 Statistique

Chapitre 2

Deuxième trimestre

2.1 Suites géométriques

2.2 Nombre dérivé

Pré-requis.Géométrie du plan, fonctions affines, calcul littéral.

Activité de départ. Calcul littéral.

Définition. On appelle tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A l'unique droite sécante coupant $\mathscr{C}_f$ en A.
On appelle nombre dérivé en a la pente de la tangente à la courbe de f au point $(a, f(a))$. Ce nombre est noté $f'(a)$ et se lit « f prime de a ».

L'intérêt de ce nombre est qu'il quantifie la pente en un point. L'unicité de la tangente garanti l'unicité du nombre dérivé.

Exemple. Le nombre dérivée en 2 à la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ est la pente de la tangente passant par le point $A(2,4)$.

Propriété (admis)**.** *L'équation de la tangente en a à la courbe f est*

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exercice 1. Dans chaque cas, identifier quelle droite correspond à la tangente au point A de chaque courbe.

Fin de la 2ème séance.
Pour la prochaine séance, vous ferez le devoir qui suit dont vous aurez la correction à faire.

Une grande partie des exercices à maîtriser ont une approche graphique.

Exercice 2. Chaque mois, les frères de Uratini fabrique jusqu'à 100 tonnes de planches de bois à Papenoo. Après calcul, ils trouvent que le coût total de production de planches de $x \in [0; 100]$ tonnes est

$$C(x) = 0.04x^2 + 0.15x + 25.3 \text{ en millier d'euros}$$

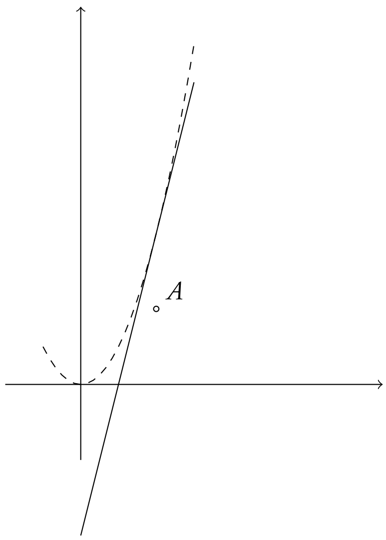


FIGURE 2.1 – Tangente à la courbe de $x \mapsto x^2$ au point A

Le coût marginal désigne le coût supplémentaire engendré par la production de la dernière tonne produite après $x-1$ tonnes de planches produites. Ainsi, pour tout $x \in [0;100]$ on a

$$C_m(x) = C(x) - C(x-1)$$

1. Montrer que le taux d'accroissement de C est C_m entre $x-1$ et x.
2. Calculer le coût marginal à la 50^e tonnes produites et à la 100^e tonnes produites.
3. Calculer $C'(50)$ et $C'(100)$.
4. Comparer $C'(50)$ et $C_m(50)$.

Exercice 3.

Fin de la 3ème séance.
Pour la prochaine séance, vous ferez le devoir qui suit dont vous aurez la correction à faire.

2.3 Probabilité et indépendance

2.4 Statistique bivariée

Chapitre 3

Troisième trimestre

3.1 Fonctions affines

3.2 Fonctions dérivées

3.3 Fonctions exponentielles

Bibliographie

[1] Arithmetic series.

[2] Ministère de l'éducation national et de la Jeunesse. *Programme d'enseignement scientifique de première générale*. Bulletin officiel, 2023.

[3] Déclic. *Maths Enseignement Scientifique 1re*. Hachette, 2023.

[4] Euclide. *Les Elements*. 300 av. J-C.

[5] Ronny Teriipaia. Lettre de rentrée. *Ministère de l'éducation.*, 2024.