

Mathématiques spécifiques

Biologie, sciences sociales, physiques et chimies, géopolitique

Haerearii Metuarea

<https://hmetuarea.github.io/>

Table des matières

1	Premier trimestre	4
1.1	Suites arithmétiques	4
1.1.1	Définition	4
1.1.2	Examen	5
1.2	Nombre dérivé	5
1.2.1	Taux d'accroissement	5
1.2.2	Nombre dérivé	7
1.2.3	Examen	7
1.3	Statistique à deux variables	7
1.3.1	Tableau croisé d'effectif	7
1.3.2	Tableau des fréquences	8
1.3.3	Examen	8
2	Deuxième trimestre	9
2.1	Suites géométriques	9
2.1.1	Définition	9
2.1.2	Propriété	10
2.1.3	Examen	11
2.2	Représentations graphiques	11
2.2.1	Analyse de données	11
2.2.2	Représentation des suites	12
2.2.3	Examen	12
2.3	Indépendance et conditionnement	12
2.3.1	Indépendance	13
2.3.2	Conditionnement	13
2.3.3	Examen	14
3	Troisième trimestre	15
3.1	Fonctions affines	15
3.1.1	Définition	15
3.1.2	Propriétés	16
3.1.3	Examen	17
3.2	Fonctions exponentielles	17
3.2.1	Définition	17
3.2.2	Propriétés	17
3.2.3	Examen	18
3.3	Fonctions	18

3.3.1	Fonctions dérivées	18
3.3.2	Formules	19
3.3.3	Tableau de signe et de variation	20
3.3.4	Examen	21

Introduction

La compréhension des phénomènes naturels relève d'études qui se sont réalisées au fil du temps. A l'issue, le public s'est offert sa propre conclusion dont la nature cartésienne est constamment remise en question. Comme le suggère le programme officiel [3], ce cours mène tout d'abord à apporter une compréhension de la nature du savoir scientifique et ses méthodes d'élaboration. Nous nous intéressons en particulier aux techniques qui ont formés les connaissances modernes que l'on dispose aujourd'hui. Aussi, nous allons aussi comprendre et identifier les effets de la science sur les sociétés et sur l'environnement. C'est pourquoi nous mettrons l'accent sur des sujets de biologie, de physique et de chimie dont les mathématiques auront une place qui les décrit en grande partie. Une bonne partie des exemples et exercices est nourrie du contexte polynésien comme l'est demandé par le Ministère [7].

Chapitre 1

Premier trimestre

Ce premier trimestre mobilise les notions élémentaires de mathématiques spécifiques : les suites, la notion de dérivabilité et les statistiques à deux variables.

1.1 Suites arithmétiques

Toute collection de nombres obéit à une règle algébrique précise. Dans certain cas, ces collections obéissent à une règle commune qui nous permet de connaître les termes plus grands efficacement. Nous allons dans ce chapitre travailler sur les collections de nombres dont l'évolution est dite arithmétique.

Objectif(s) d'enseignement.

- Connaître les suites arithmétiques et sa formule de récurrence.
- Connaître des applications des suites arithmétiques.
- Représenter graphiquement des suites arithmétiques.

1.1.1 Définition

Commençons par définir heuristiquement ces collections de nombres.

Définition. Une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ est une collection de nombre noté $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le procédé est défini par

$$u_n = u_0 + nr$$

Cette formule est appelée le terme général de la suite et l'entier n est appelé le rang de la suite.

Les suites arithmétiques modélisent les situations qui évoluent de manière affine. C'est pourquoi obtenir une telle formule est d'une grande importance puisqu'elle nous permet de calculer un terme dont le rang est grand « à la main » et très grand de manière numérique.

Exemple. Les nombres de la collection $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$ sont caractérisés par la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison 2 de terme général

$$u_n = u_0 + 2n$$

avec $u_0 = 1$.

Fin de la 1ère séance.

Prenez la peine de faire l'exercice suivant.

Propriété. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r alors elle peut être définie de manière récurrente par

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on raisonne par définition. On écrit

$$u_{n+1} = (n+1)r + u_0 = nr + r + u_0 = nr + u_0 + r = u_n + r$$

Réciproquement, si une suite vérifie une telle égalité alors on écrit terme par terme pour obtenir la relation en définition. \square

Notons que le raisonnement par récurrence fonctionne ici.

Pour aller plus loin. Pour aller plus loin, nous pouvons consulter les références suivantes.

Yvan Monka, *LE COURS : Suites arithmétiques, suites géométriques - Première*, ressource Youtube, 2020.



Fin de la 2ème séance.

Vous pouvez préparer les problèmes qui suivent. La séance qui arrive sera entièrement consacrée à leur résolution.

1.1.2 Examen

1.2 Nombre dérivé

Les phénomènes d'évolutions nous motivent à connaître s'il s'agit d'une évolution croissante ou décroissante. Plusieurs outils sont à notre disposition dont la représentation graphique. Toutefois, cet outil est limité quand on veut savoir à quel moment de tels évolutions changent. Nous allons introduire un nouvel outil permettant de répondre à cette problématique : le nombre dérivé.

Objectif(s) d'enseignement.

- Définir et interpréter un taux d'accroissement et un nombre dérivé.
- Calculer un taux d'accroissement et un nombre dérivé.

On désigne \mathbb{R} comme l'ensemble des nombres réels. Sauf mention explicite du contraire, tous les repères dans ce cours sont orthonormés.

1.2.1 Taux d'accroissement

Comme lorsqu'on franchi une colline, le changement d'évolution d'un phénomène nécessite de connaître la pente. Pour étudier la vitesse moyenne d'un mobile en cinématique, on mesure expérimentalement la distance entre deux temps de ce mobile lorsqu'il se déplace. Formellement, on exploite la sécante à la courbe représentant la vitesse de ce mobile entre deux points. Ainsi, le calcul du coefficient directeur de cette sécante correspond à la vitesse moyenne.

Dans cette partie, on note f une fonction définie sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$ et \mathcal{C}_f désigne sa courbe dans un repère orthonormé.

Définition. On appelle taux d'accroissement aux points A et B sur la courbe \mathcal{C}_f le coefficient directeur de la droite (AB) , appelée la sécante.

Naturellement, la droite qui caractérise le taux d'accroissement est unique par construction [5]. Ce nombre s'interprète en fonction du contexte :

- vitesse moyenne en cinématique. (physique)
- coût marginal en microéconomie. (économie)

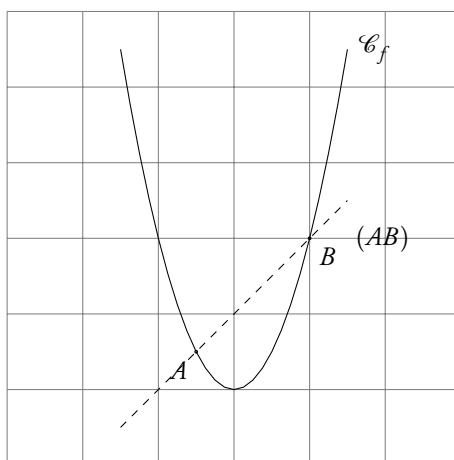


FIGURE 1.1 – Exemple de la sécante (AB) à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$

Propriété. Soient une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et deux nombres $a, b \in I$ vérifiant $a < b$ alors le taux d'accroissement en deux points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ est

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Ce résultat peut se démontrer de deux manières différentes. Une première approche avec les équations : on construit un système à l'aide des coordonnées des points A et B . Le calcul du coefficient directeur fournira la formule attendue. Une seconde approche consiste à construire deux triangles emboîtés et d'établir soit par le théorème de Thalès ou soit la notion d'homothétie (ou agrandissement et réduction), la formule cherchée.

Démonstration. On définit la droite passant par A et B : $x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On résout le système

$$\begin{cases} f(a) = \alpha a + \beta \\ f(b) = \alpha b + \beta \end{cases}$$

On faisant la différence des deux équations, on obtient l'égalité en factorisant par α , le coefficient directeur :

$$f(a) - f(b) = (a - b)\alpha$$

Comme $a > b$ alors $a \neq b$ et on obtient l'expression attendue. \square

Naturellement, nous pouvons démontrer ce résultat géométriquement avec le théorème de Thalès ou les agrandissements et réductions.

Fin de la 1ère séance et de la période 1.

Pour les vacances, vous vous exercerez au calcul littéral.

Le choix du calcul littéral pour ces vacances de fin de période 1 consiste à remettre les élèves à niveau. Nous encourageons les élèves à s'exercer afin de les entraîner à la pensée algébrique et de leur permettre d'écrire des programmes informatiques faisant appels à des formules algébriques.

1.2.2 Nombre dérivé

Nous allons définir la notion de nombre dérivée avec un exemple.

Définition. On appelle nombre dérivé en A d'abscisse a sur \mathcal{C} de f le coefficient directeur de l'unique droite, appelé tangente, coupant la courbe en A . On le note $f'(a)$.

Par construction, l'unicité du taux d'accroissement [5] garanti l'unicité du nombre dérivé. En particulier, la tangente en un point est unique.

Propriété (admis). *Soit f une fonction admettant un nombre dérivé en a alors la tangente en ce point est la droite d'équation définie par*

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Fin de la 2ème séance et début de la période 2.

Pour la prochaine fois, vous ferez les exercices suivants.

1.2.3 Examen

1.3 Statistique à deux variables

Pour répondre aux besoins de la société, les statistiques fournissent des indicateurs permettant de prendre des décisions sur une problématique donnée. Au collège, nous avons étudié un caractère (appelé aussi variable) donné dans un échantillon d'une population. Ici, nous étendons cette étude à deux variables.

Objectif(s) d'enseignement.

- Construire un tableau d'effectif et son tableau de fréquence.
- Calculer la fréquence marginale et conditionnelle.

Une grande partie des exercices seront inspirés de [6] et [4].

1.3.1 Tableau croisé d'effectif

En statistique à un caractère, on représentait les données sous forme de tableau. Dans cette partie, on réalise une étude statistique à deux caractères induisant une nouvelle forme de tableau.

Définition. On appelle tableau croisé d'effectif un tableau à double entrée qui présente

- un caractère en colonne.
- un autre caractère en ligne.

Les dernières lignes et colonnes décrivent l'effectif total de chaque caractère.

L'essentiel de la partie consiste à savoir construire un tel tableau. Nous avons traité un tableau à double entrée avec 2 lignes et colonnes. Avec la même technique, ceci peut se généralisé avec un tableau à double entrée avec 2 lignes et 3 colonnes par exemple.


Mathématiques appliquées. Les tableaux croisés d'effectif se rencontrent dans de nombreux domaines :

- Construire des tableaux de fréquences. (Mathématiques)
- Influence du lieu géographique sur le diplôme. (SES)
- Impact de la température ambiante sur la croissance d'une plante. (SVT)
- Étude de la politique économique entre deux pays politiquement différents. (HGGSP)
- Impact de la température sur l'acier. (Physique)

Le tableau de fréquence est nécessaire pour la suite car c'est le moyen plus empirique pour introduire la notion de probabilité conditionnelle [2].

Pour aller plus loin. Pour aller plus loin, nous pouvons consulter les références suivantes.



-  jaicompris Maths, *Savoir faire un tableau croisé d'effectifs • première tronc commun mathématiques*, 2023.

Fin de la 1ère séance.

Vous pouvez faire les exercices 1 et 2 de la feuille de TD accessible sur Moodle et qui sera distribuée pour la séance 2 du chapitre.

1.3.2 Tableau des fréquences

Un tableau croisé d'effectif rassemble les effectifs recensés par rapport à chaque caractère. Toutefois, quand les effectifs sont très grands, il est plus commode de représenter les données sous forme de fréquence.

Définition. On appelle tableau des fréquences le tableau obtenu à partir du tableau croisé des effectifs dont lequel on a calculé les fréquences. Les fréquences situées « au bord » du tableau sont appelés fréquences marginales.

Ce tableau est souvent confondu avec un tableau de pourcentage. Ceci se déduit aisément en multipliant chaque coefficient du tableau de fréquence par 100.

Pour aller plus loin. Pour aller plus loin, nous pouvons consulter les références suivantes.

- zMaths, *Fréquences marginales et conditionnelles*.

Fin de la 2ème séance de fin de la période 2.

Vous pouvez faire les exercices 3 et 4 de la feuille de TD accessible sur Moodle.

1.3.3 Examen

Chapitre 2

Deuxième trimestre

2.1 Suites géométriques

Les suites arithmétiques forment une famille de collection de nombres qui résout des problèmes d'évolution de type linéaire. Cependant, les problèmes caractérisant l'évolution de type exponentielle¹ nécessitent de nouvelles suites : les suites géométriques.

2.1.1 Définition

Commençons par formuler empiriquement la progression de ces nombres à chaque rang.

Définition. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme $a \in \mathbb{R}$ si

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

avec $u_0 = a \in \mathbb{R}$.

Avec les notations de la définition, nous pouvons proposer une écriture plus commode ; à savoir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ nous avons de manière équivalente

$$u_n = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ q \times u_{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Naturellement, ces collections admettent une relation d'ordre totale permettant de comparer les nombres entre eux. Nous exploiterons cette relation dans le chapitre 2.2.

Exemple. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut citer :

1. $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$ avec $u_0 = 1$ et $q = 1/2$.
2. $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n$ avec $u_0 = 1$ et $q = 1/3$.
3. $u_{n+1} = 5 u_n$ avec $u_0 = 1$ et $q = 5$.

1. Par exponentielle, on entend une évolution de plus en plus rapide. Parmi ces problèmes, nous rencontrons la désintégration du carbone 14 en chimie ou encore la modélisation du taux d'intérêt lors d'un emprunt en économie.

Dans la pratique, vous devrez pouvoir justifier qu'une suite donnée (de motifs ou algébrique) est géométrique.

Mathématiques appliquées. Les suites géométriques sont utilisées pour :

- compter le nombre de motif géométrique dans un procédé. (arts et littérature)
- modéliser le carbone 14. (physique-chimie)
- modéliser les taux d'intérêts et dettes. (économie)

Malheureusement, une telle formule induit un nombre de calculs colossal lorsque l'on veut connaître le terme d'un rang très grand. Une première solution est le calcul algorithmique.

Nous allons construire un programme qui permet de calculer un terme d'une telle suite en s'inspirant de l'équation 2.1. Pour comprendre son implémentation, il faut savoir ce qui se passe « à la main » et après calcul, cela revient à faire algorithmiquement :

```
q = 1 #raison
u0 = 2 #premier terme
def u(n):
    if n == 0:
        return u0
    else:
        return q*u(n-1)
```

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, calculer u_n revient à réaliser n calculs successivement (sans compter les opérations!); c'est beaucoup.

Pour aller plus loin. Pour aller plus loin, nous pouvons consulter les références suivantes.

Yvan Monka, *LE COURS : Suites arithmétiques, suites géométriques - Première*, ressource Youtube, 2020.



Fin de la 1ère séance.

Vous pouvez faire les exercices de la feuille de TD.

2.1.2 Propriété

La formule définie par récurrence est difficile à exploiter lorsque l'on veut calculer des termes d'un rang très grand. Une approche astucieuse est d'établir une nouvelle formule demandant seulement le premier terme et la raison d'une suite géométrique.

Propriété. Le terme général de toute suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est de la forme

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Démonstration. On réalise une liste des termes. En remplaçant les termes connus par ceux qu'on vient de lister. Au final, nous obtenons la formule attendue. \square

Quand on obtient une telle écriture, on dit qu'on a exprimé la suite sous forme explicite. Avec les mêmes notations, numériquement, cela revient à écrire

```
def u(n):
    return u0*q**n
```

Remarquer que les deux étoiles dans `q**n` joue le rôle de la puissance : q^n .

Cette formule réduit instantanément le nombre de calcul. Nous sommes passé à n calculs, avec la formule par récurrence, à 1 seul et unique calcul.

Terminons pour conclure que dans un grand nombre de problèmes impliquant des suites par récurrence, nous sommes souvent amené à expliciter leur terme général; les activités menées tout au long de cette séquence justifie ce fait.

Fin de la 2ème séance.

Vous pouvez faire les exercices de la feuille de TD.

2.1.3 Examen

2.2 Représentations graphiques

Ce chapitre mobilise les notions établies dans les chapitres 1.1, 1.2 et 1.3 en vue de résoudre certaines classes de problèmes.

Nous notons $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ le repère affine orthonormé de \mathbb{R}^2 [1].

Nous rappelons qu'une donnée quantitative est une quantité représentant une donnée mesurable tandis qu'une donnée qualitative ne l'est pas.

2.2.1 Analyse de données

La représentation adéquate dépend du type de données, à savoir :

- une donnée mesurée dans l'étude (données quantitatives)
- une donnée qui n'est pas mesurée dans l'étude (données qualitatives)

	Données quantitatives	Données qualitatives
Nuage de points	○	×
Histogramme	○	×
Diagramme en barre	○	○
Diagramme en circulaire ou semi-circulaire	○	○

Attention, la donnée étudiée dépend de l'analyse que l'on fait d'elle!

Remarque. Une taille peut aussi être à la fois une donnée quantitative (180cm, 170cm, etc.) et à la fois une donnée qualitative aussi (petit, moyen, grand). Dans une étude statistique, ce détail est précisé.

Fin de la 1ère séance.

Vous pouvez commencer à réfléchir sur la première partie de la feuille du TD.

2.2.2 Représentation des suites

Les problèmes exploitant des suites de nombres est grandement accessible à travers des graphiques.²

Nous considérerons que les suites commenceront au rang $n = 0$. Il est possible de généraliser les notions à partir d'un certain rang $n = n_0$ par translation.

Propriété. *Toute suite arithmétique de raison $r \neq 0$ est*

- *croissante si, et seulement si, $r > 0$.*
- *décroissante si, et seulement si, $r < 0$.*

Démonstration. Chaque cas se démontre de la même manière. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_n = u_0 + nr$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par double implication.

Si la suite est croissante alors $u_0 + nr \leq u_0 + (n+1)r$ équivaut à $r \geq 0$ par élimination. Comme $r \neq 0$ alors $r > 0$.

Réciproquement, si $r > 0$ alors l'équivalence précédente mène à la croissance de la suite en inégalité stricte. \square

Propriété. *Toute suite géométrique de raison q est*

- *croissante si $-1 < q$ et $q > 1$.*
- *décroissante si $q \in]-1; 1[$.*

Représenter « à la main » est nécessaire pour comprendre comment obtenir de tels graphiques. En revanche, nous n'allons systématiquement pas le faire pour résoudre des problèmes, sauf mention explicite du contraire. Heureusement, la programmation fournie des graphiques en un temps relativement court et c'est pourquoi sa maîtrise nous sera indispensable.

La calculatrice scientifique Numwork fait mieux en se rendant dans l'application *Sequence*.

Fin de la 2ème séance.

Vous pouvez faire la totalité des exercices de la feuille de TD.

2.2.3 Examen

2.3 Indépendance et conditionnement

Sauf mention explicite du contraire, toutes les expériences dans ce chapitre dépendent du hasard.

Rappelons qu'une telle expérience présente des issues possibles qui, elles, génèrent des événements. Dans ce chapitre, nous étudierons essentiellement des expériences avec un nombre fini d'issues.

2. En particulier, le \mathbb{R} -espace vectoriel sous-jacent au repère affine \mathcal{R} est \mathbb{R}^2 muni de sa base canonique.

2.3.1 Indépendance

Soient A et B deux événements quelconques d'une expérience aléatoire.

Définition. On dit que A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Autrement dit, leur probabilité peuvent se multiplier. Nous pouvons aussi dire qu'il s'agit de deux événements qui ne dépendent pas.

Exemple. Etant donné l'expérience aléatoire : le jeu du pile ou face.

Les événements A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un nombre impair ». Ainsi $A = \{2, 4, 6\}$ (3 éléments) et $B = \{1, 3, 5\}$ (3 éléments) alors $A \cap B = \{\}$ (0 éléments) alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{0}{6} = 0 \text{ et } \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4} \neq 0$$

Il n'y a pas égalité donc A et B sont indépendants.

Fin de la 1ère séance.

Prenez la peine de vous exercer en construisant soigneusement la probabilité conditionnelle dans les exercices puis de résoudre des problèmes.

2.3.2 Conditionnement

La probabilité conditionnelle d'un événement sachant un autre est construite à partir de la fréquence conditionnelle [2] : le rapport entre un sous-ensemble de l'effectif total.

Définition. La probabilité d'un événement A sachant que B est réalisé, est la quantité

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. La quantité $\mathbb{P}_B(A)$ se lit « probabilité de A sachant B ».

La condition $\mathbb{P}(B) \neq 0$ est essentielle. En supposant le contraire, B est un événement impossible et cela contredit la manière dont on l'a construit puisque B doit être réalisable. Accessoirement, cela revient à dire qu'on divise par zéro : ce qui n'a pas de sens mathématiquement parlant.

Exemple. On réalise un test de vaccination sur un échantillon de 500 personnes. Le tableau d'effectif en table ?? présente ces résultats.

1. La fréquence marginal des personnes infectés est de

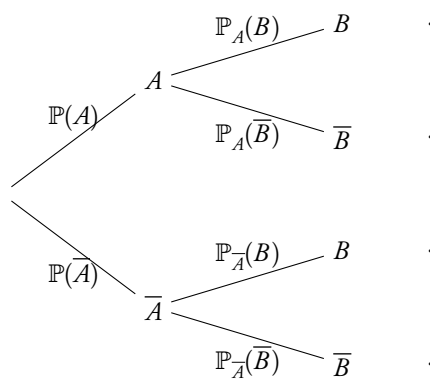
$$\frac{168}{500}$$

2. La fréquence conditionnelle des personnes infectés sachant qu'elles étaient positifs.

$$\frac{168}{500}$$

	Infecté	Non infecté	Total
Test positif	100	60	160
Test négatif	68	272	340
Total	168	332	500

TABLE 2.1 – Tableau croisé d'effectif



Fin de la 2ème séance.

Prenez la peine de vous exercer en construisant soigneusement la probabilité conditionnelle dans les exercices puis de résoudre des problèmes.

2.3.3 Examen

Chapitre 3

Troisième trimestre

Ce dernier trimestre couvre une grande partie de l'analyse mathématiques. Nous étudions différentes classes de fonction et les phénomènes qu'elles modélisent.

3.1 Fonctions affines

Les suites arithmétiques permettent de modéliser des problèmes évoluant discrètement. Pour des problèmes évoluant de manière continue, les suites ne sont plus adaptées et on utilise les fonctions : les fonctions affines.

Les courbes des fonctions mentionnées dans ce chapitre seront représentées dans le plan orthonormé ayant pour repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et I désigne un intervalle non-vide de \mathbb{R} .

3.1.1 Définition

Commençons par (re)définir les fonctions affines.

Définition. On dit qu'une fonction $f : x \mapsto f(x)$ est affine sur I si pour tout $x \in I$

$$f(x) = ax + b$$

avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$ deux paramètres. Ainsi

- \mathcal{C}_f désignera la courbe représentative de f dans le repère \mathcal{R} .
- a désigne le coefficient directeur de \mathcal{C}_f .
- b s'appelle l'ordonnée à l'origine¹ de \mathcal{C}_f .

Si $b = 0$ alors f est de la forme $x \mapsto f(x) = ax$ et on dit que f est linéaire.

Ainsi, la modélisation avec de tels outils permet d'approcher beaucoup d'étude de certains phénomènes naturels plus aisément.

Exemple. On peut citer

► $x \mapsto x$

(identité)

1. Il s'agit du point de coordonnées $(0; b)$ sur lequel \mathcal{C}_f coupe l'axe verticale

► $x \mapsto -x$ (opposé)

Contre-exemple. On peut citer

► $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (puissance)

► $x \mapsto \frac{1}{x}$ (inverse)

Pour aller plus loin. Pour aller plus loin, nous pouvons consulter les références suivantes.

Yvan Monka, <i>LE COURS : Fonctions affines - Troisième - Seconde</i> , ressource Youtube, 2017.	
--	--

3.1.2 Propriétés

En particulier, le coefficient directeur est un indicateur de tendance.

Propriété. Une fonction affine f de la forme $f(x) = ax + b$ sur I , avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$, est :

1. croissante sur I si a est strictement positif.
2. décroissante sur I si a est strictement négatif.

Démonstration. Si $a > 0$ alors pour tout $x \in I$ le nombre dérivé de $f'(x) = a > 0$.
Raisonnement identique pour le cas $a < 0$. \square

Corollaire 1. La représentation graphique de f est une droite.


Exemple. Les fonctions affines suivantes sont croissantes

- $x \mapsto x$
- $x \mapsto 2x + 5$
- $x \mapsto 0,002x - 875$

Les fonctions affines suivantes sont décroissantes

- $x \mapsto -x$
- $x \mapsto -2x + 5105$
- $x \mapsto -0,002x - 875$

Pour aller plus loin. Pour aller plus loin, nous pouvons consulter les références suivantes.

Yvan Monka, <i>LE COURS : Suites arithmétiques, suites géométriques - Première</i> , ressource Youtube, 2020.	
---	---

Fin de la 2ème séance.

Vous pouvez préparer les problèmes qui suivent. La séance qui arrive sera entièrement consacrée à leur résolution.

3.1.3 Examen

3.2 Fonctions exponentielles

L'évolution d'une population de lapins ou encore d'une bactérie peut être modélisé par une fonction pour en comprendre la manière dont elle évolue : on l'appelle la fonction exponentielle. Elle représente la version continue d'une suite géométrique.

3.2.1 Définition

Commençons par définir la fonction exponentielle.

Définition. On appelle fonction exponentielle en base $a > 0$ la fonction notée \exp_a : $[0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \geq 0$ par

$$\exp_a(x) = b \times a^x$$

Les nombres a et b sont des paramètres.

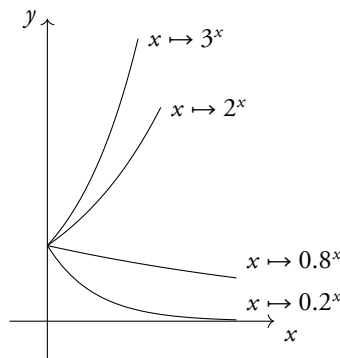


FIGURE 3.1 – Représentation graphique de la fonction exponentielle dans différentes bases avec $b = 1$.

Il s'agit de la version continue des suites géométriques.

Fin de la 1ère séance.

La prochaine fois, nous étudierons la régularité et les variations de cette fonction.

3.2.2 Propriétés

Si un problème donné, modélisé par une fonction exponentielle, décrit une variation croissante et régulière rapide, on sait exactement pourquoi.

Propriété (admise). Soit $a > 0$, alors

1. Les variations de \exp_a sont

$$x \mapsto a^x \begin{cases} \text{croissante} & \text{pour } a > 1 \\ \text{décroissante} & \text{pour } a \in]0; 1[\end{cases}$$

2. Pour tous $x, y \geq 0$,

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour $x = \frac{1}{n}$ on a

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

On exploitera cette propriété en séance d'exercices.

Fin de la 2ème séance.

Commencer à traiter la feuille de TD pour la suite.

3.2.3 Examen

3.3 Fonctions

Etant donné un phénomène, on est souvent amené à étudier son évolution en fonction d'un paramètre². Pour ce faire, nous modélisons la situation avec des fonctions et nous étudions sa tendance avec le nombre dérivé : à quel moment est-elle croissante ? Jusqu'à quand ? etc. Toutefois, de telles études nécessitent un calcul colossal de nombre dérivé que le calcul de fonction dérivée arrive à résoudre.

On désigne par \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels et on note I un intervalle non-vide de \mathbb{R} .

3.3.1 Fonctions dérivées

Rappelons qu'un nombre dérivé d'une fonction en un point a représente géométriquement la pente de la courbe représentative de cette fonction en a .

Définition. On dit qu'une fonction $f : x \mapsto f(x)$ est dérivable sur un intervalle I si f admet un nombre dérivé en chaque point de I .

Si tel est le cas, f' désigne la fonction dérivée de f et est définie par

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

où $f'(x)$ désigne le nombre dérivée de f au point $x \in I$.

Cette définition, non formelle, est très utile pour démontrer qu'une fonction n'est pas dérivable.

Pour plus de commodité, nous dirons qu'une fonction dérivable est une fonction qui admet une fonction dérivée.

Exemple. On peut citer les fonctions dérivables classiques

2. Pensez à l'évolution du prix en fonction des quantités ou encore à l'évolution du niveau de l'eau en fonction du temps en heure, etc.

- $f : x \mapsto \alpha \in \mathbb{R}$, où α est une constante, est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$ (constante)

$$f'(x) = 0$$

- $g : x \mapsto x$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$ (identité)

$$g'(x) = 1$$

- $h : x \mapsto x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$ (carré)

$$h'(x) = 2x$$

- $i : x \mapsto x^3$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$ (cube)

$$i'(x) = 3x^2$$

Mise en garde. L'intervalle d'étude I est importante. Une fonction peut être dérivable dans un intervalle qui contient aucun point de dérivabilité.

Contre-exemple. La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ mais pas sur $[0; +\infty[$ car 0 est un point de non dérivabilité de cette fonction.

Rappelons que nous pouvons vérifier qu'un point est de non dérivabilité pour une fonction en vérifiant numériquement

$$\left. \frac{d}{dx}(\text{abs}(x)) \right|_x = 0$$

undef

Fin de la 1ère séance.

Commencer à traiter la feuille de TD pour la suite.

3.3.2 Formules

Pour extraire la dérivée d'une fonction, on est souvent amené à la calculer. Pour ce faire, nous disposons de certaines formules facilitant les étapes opératoires.

Propriété (admis). Soient f et g deux fonctions dérivables sur I alors

1. $f + g$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

2. λf est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

Ainsi, nous pouvons calculer la dérivée d'une fonction polynomiale plus aisément.

Propriété. Soit P un polynôme de degré $n \leq 3$ à coefficients dans \mathbb{R} alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

1. si $P(x) = d$ alors $P'(x) = 0$.
2. si $P(x) = cx + d$ alors $P'(x) = c$.

3. si $P(x) = bx^2 + cx + d$ alors $P'(x) = 2bx + c$.

4. si $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ alors $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

Démonstration. Notons que P est un polynôme alors P est dérivable par la propriété 3.3.2 sur \mathbb{R} . Maintenant, les cas $n = 0$ et 1 sont clairs par l'exemple 3.3.1. Pour $n = 2$, les égalités suivantes sont vraies pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P'(x) &= (bx^2 + cx + d)' \\ &= (bx^2)' + (cx)' + (d)' \\ &= 2bx + c + 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat. Le cas $n = 3$ se traite de la même manière. □

Fin de la 2ème séance.

Vous pouvez expliciter la démonstration de cette propriété. Accessoirement, vous pouvez étudier la fonction dérivée des polynômes de degré 100, voire $n \in \mathbb{N}$ dans le cas général.

3.3.3 Tableau de signe et de variation

La compréhension des situations concrètes est facilitée par leur modélisation à travers les fonctions. Dans ce chapitre, nous allons résoudre des problèmes dont nous connaissons les fonctions qui les modélisent en les représentant graphiquement.

Dans cette partie, f est une fonction dérivable sur un intervalle non-vide I et on note f' sa dérivée sur I .

Avant de représenter graphiquement la courbe d'une fonction, il est d'abord nécessaire d'étudier le signe de sa dérivée.

Définition. Le tableau de signe de la fonction f' sur I est un tableau présentant le signe de f' .

Définition. Le tableau de variation de la fonction f sur I est un tableau présentant les variations de f .

Déterminer le signe d'une fonction peut se faire graphiquement ou, mieux encore, à travers la résolution d'inéquation.

Exemple. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = 4x + 2$. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 4 \geq 0$$

Donc f' est positive sur \mathbb{R} . On obtient le tableau 3.1.

Tout l'intérêt de la partie précédente est présenté dans le résultat qui suit.

Propriété (admis). Soit f une fonction dérivable sur I .

1. si $f'(x) \geq 0$ sur I alors f est croissante sur I .
2. si $f'(x) \leq 0$ sur I alors f est décroissante sur I .
3. si $f'(x) = 0$ sur I alors f est constante sur I .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	

TABLE 3.1 – Tableau de signe de la fonction f

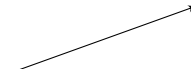
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

TABLE 3.2 – Tableau de signe et de variation de la fonction f

Nous pouvons restreindre les inégalités. Si f' est strictement positive alors f est strictement croissante. De plus, f' est de signe constant tant qu'elle ne s'annule pas. En particulier, le signe de f' change seulement entre les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

Exemple. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = 4x + 2$. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 4 \geq 0$$

Ainsi, f' est positive sur \mathbb{R} donc, f est croissante sur \mathbb{R} . On obtient le tableau de variation 3.2.

Nous obtenons la méthode suivante.

Méthode (admis). Pour construire la représentation graphique d'une fonction.

1. Justifier que f est dérivable sur I .
2. Calculer la dérivée f' sur I qu'on notera f' .
3. Construire le tableau de signe de f' .
4. Construire le tableau de variation de f .

Fin de la 3ème séance.

Vous pouvez achever la feuille d'exercice pour la prochaine séance et vous préparez pour l'examen.

3.3.4 Examen

Bibliographie

- [1] Marcel Berger. *Geometrie I*. Springer, 1987.
- [2] Candelpergher. *Théorie des probabilités*. Calvage et Mounet.

- [3] Ministère de l'éducation national et de la Jeunesse. *Programme d'enseignement scientifique de première générale*. Bulletin officiel, 2023.
- [4] Laurent Gilbert et Nicolas Krzewina. *TechMaths premiere - voie technologique - enseignement commun*. Nathan, 2019.
- [5] Euclide. *Les Elements*. 300 av. J-C.
- [6] Joël Malaval. *Enseignement spécifique de mathématiques 1ère*. Nathan, 2022.
- [7] Ronny Teriipaia. Lettre de rentrée. *Ministère de l'éducation.*, 2024.