Mathématiques élémentaires
3ème

Haerearii Metuarea

https://hmetuarea.github.io/

Table des matières

Introduction

Ce cours de mathématiques de 3ème est basé sur la progression des cours du collège de Pao-pao. Les notions sont introduites de manière concise pour laisser la place à la résolution d'exercice et de problème. Naturellement, le passé mathématiques du public concerné est pris en compte et pour gagner en temps et en effort, j'ai jugé judicieux d'insister sur le raisonnement et la méthode, tant qu'ils sont bien assimilés.

Formellement aux exigences du ministère et des inspecteurs, la recherche est la compétence majeure qui couvre la résolution de problème.

Chapitre 1

Premier trimestre

1.1 Nombres premiers

Certains entiers peuvent avoir plusieurs diviseurs à la fois et d'autre en ont un seul. Ces derniers possèdent des propriétés saisissantes qui ont la particularité de décrire un entier.

1.1.1 Définition

Définition. *Un entier a est premier si les seuls diviseurs de a sont* 1 *et* a.

Exemple. *On peut citer* $1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ *ou encore* 19.

> **Méthode** (Montrer que a est premier ou non)**.** *Raisonner par définition.*
> ***Ce qu'il faut faire.*** *Il suffit de lister les diviseurs de a.*
>
> — *si a admet* 1 *et a comme unique diviseur alors a est premier.*
> — *si a admet* 1*, a et d'autres entiers comme diviseur alors a n'est pas premier.*

Exemple. *On peut citer*

— 4 *n'est pas premier puisque* $4 = 2 \times 2$.
— 6 *n'est pas premier puisque* $6 = 3 \times 2$.
— 20 *n'est pas premier puisque* $20 = 2 \times 10$ *et* $20 = 2 \times 2 \times 5$.

Exercice. *Déterminer si les entiers suivants sont premiers ou non.*
1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 22, 23, 77.

1.1.2 Décomposition en facteurs premiers

L'intérêt fondamental des nombres premiers réside dans la propriété suivante.

Propriété. *Tout entier strictement positif se décompose en produit de nombre premier.*

Exemple. *On peut citer*

— $6 = 2 \times 3$
— $10 = 2 \times 5$
— $30 = 2 \times 3 \times 5$

Il faut garder en mémoire qu'une telle décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. C'est pourquoi, dorénavant, on admettra que 1 n'est pas un nombre premier dans ce cours. Et c'est d'ailleurs pour cette raison qu'on évitera d'écrire les décompositions « idiotes » du type $10 = 1 \times 2 \times 5$ car on peut aussi bien écrire une telle décomposition de cette forme $10 = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5$.

Exemple. *On peut citer*

1. $10 = 2 \times 5$
2. $100 = 2^2 \times 5^2$
3. $645 = 3 \times 5 \times 43$

Exercice. *Décomposer les entiers suivants en produit de facteurs premiers.*

1. 4.
2. 6.
3. 7.
4. 8.
5. 10.
6. 18.
7. 20.
8. 23.
9. 24.
10. 25.
11. 30.
12. 33.

1.1.3 Le crible d'Eratosthène

On dispose d'un algorithme présentant tous les nombres premiers inférieur à un nombre fixé.

Méthode (Crible d'Eratosthène)**.** *Le crible suit la démarche suivante*
ENTREE *: un entier a.*
SORTIE *: la liste des nombres premiers inférieurs ou égale à a.*

1. *écrire la liste des nombres entre* 1 *et* a.
2. *pour* k *allant de* 1 *à* a *:*
3. *si* k *n'est pas barré alors :*
4. *barrer tous les multiples de* k.
5. *si* k *est barré alors :*
6. *ne rien faire.*

Exercice. *Lister tous les nombres premiers inférieur ou égale à chaque entier a.*

1. $a = 6$
2. $a = 8$
3. $a = 10$
4. $a = 13$
5. $a = 20$
6. $a = 28$
7. $a = 40$
8. $a = 50$

1.1.4 Problèmes et exercices

Exercice (Sésamath 3ème, p.16)**.** *Effectuer la décomposition complète en facteur premier de chaque quantité.*

1. $2^2 \times 13 \times 25$.
2. $3 \times 15 \times 66$.
3. $7 \times 3^2 \times 9 \times 21$.
4. $23 \times 49 \times 61$.

Exercice (Sésamath 3ème, p.14)**.** *Déterminer quels entiers sont premiers. Donner la décomposition en facteur premier pour ceux qui ne le sont pas.*

1. 32
2. 59
3. 115
4. 187
5. 227
6. 303

Exercice. *Décomposer en facteur premier chaque entier.*

1. 10
2. 12
3. 20
4. 25
5. 30
6. 6
7. 33
8. 22
9. 11
10. 100
11. 90
12. 80

Exercice. *Déterminer la liste des nombres premiers inférieurs ou égales à chaque entier a indiqué.*

1. $a = 4$
2. $a = 6$
3. $a = 20$
4. $a = 22$
5. $a = 2$
6. $a = 3$
7. $a = 10$
8. $a = 11$
9. $a = 30$
10. $a = 50$
11. $a = 60$
12. $a = 40$

Problème. *Combien il y a de nombre premier compris entre 10 et 20 ?*

Problème. *Déterminer l'entier qui est inférieur ou égale à 10, premier et pair.*

Problème (DNB 2023 centres étrangers, exo 4)**.** *Des élèves organisent, pour leur classe, un jeu au cours duquel il est possible de gagner des lots. Ils placent dans une urne des boules indiscernables au toucher*

— *trois boules noires numérotées de 1 à 3.*
— *quatre boules rouges numérotées de 1 à 4.*

Pour constituer les lots, on dispose de 195 figurines et 234 autocollants. Chaque lot sera composé de figurine ainsi que d'autocollants. Chaque lot est identique et toutes les figurines et autocollants doivent être utilisés.

1. *peut-on faire 3 lots ?*
2. *décomposer 195 en produit de facteurs premiers.*
3. *déterminer le nombre de lot maximum qui peut être constitué.*

Indication. Pour la 3., on utilisera sans justification la décomposition en facteur premier de $234 = 2 \times 3^2 \times 13$.

Problème. *Déterminer le plus grand nombre premier inférieur ou égale à 30.*

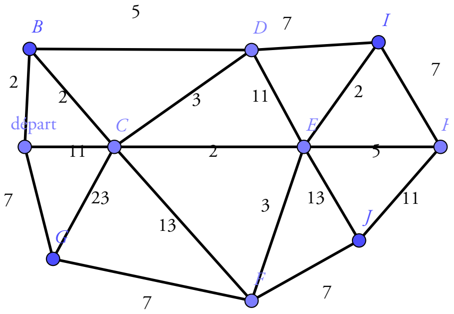
Problème. *On note*

— *A_1 l'aire d'un rectangle de longueur 1 et de largeur 10.*
— *A_2 l'aire d'un rectangle de longueur 5 et de largeur 2.*

Montrer que A_1 et A_2 possèdent la même décomposition en facteur premier.

Problème. *A la position « départ », une troupe de combat cherche un contact dans une zone hostile. Le poste de Commandement leur a fourni, à cette troupe et au contact, une carte, ci-dessous, avec les balises données (notées avec des lettres) et la distance qui les séparent avec des nombres premiers. La recherche du contact est codée. Le contact leur envoie un entier de manière non sécurisé et le chef d'équipe doit déterminer sa décomposition en facteur premier pour savoir quel chemin prendre.*
Par exemple, si le contact envoie l'entier 4. Sa décomposition en facteur premier est $4 = 2^2$ donc la troupe part de « départ » est emprunte les chemins « départ », B et C. Donc le contact est à la position C.

1. *Si le contact envoie l'entier 12, quel chemin la troupe va-t-il emprunter et quelle est la position du contact ?*
2. *Si le contact envoie l'entier 18, quel chemin la troupe va-t-il emprunter et quelle est la position du contact ?*



Devoir maison

Examen

1.2 Réduction et augmentation

Sur le plan ou dans l'espace, certaines figures présentent des similarités sur leur longueur. Cette partie traite des objets géométriques ayant subit des réductions ou augmentations sur leur longueur. Le but étant non-seulement de savoir les reconnaître et les construire, mais surtout de déterminer le coefficient qui permet de passer d'une figure à l'autre.

1.2.1 Définition

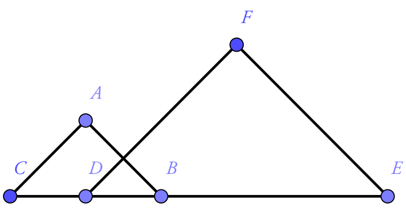
Définition. *On dit qu'une figure (ou encore un solide) est*

1. *agrandie si ses longueurs sont multipliées par un nombre* $k > 1$.
2. *réduite si ses longueurs sont multipliées par un nombre* $0 < k < 1$.

Si tel est le cas, k *est appelé le rapport.*

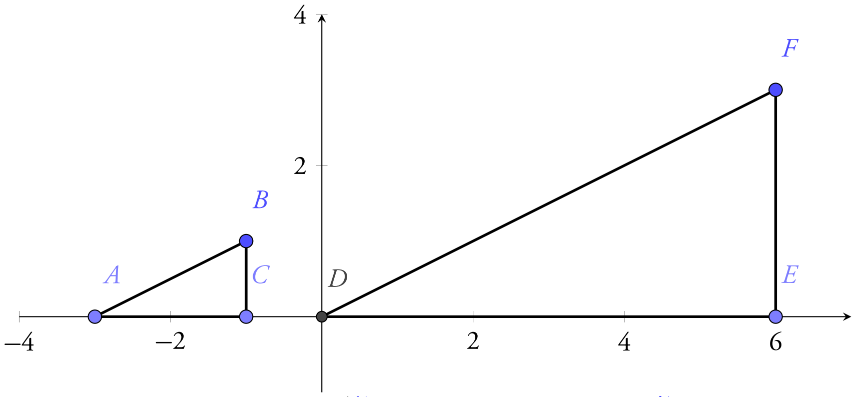
Notons que le cas $k = 1$ n'est rien d'autre qu'une « reproduction » de la figure.

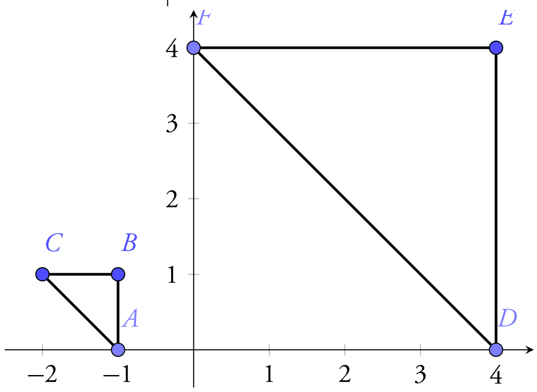
Exemple. *On peut citer* DFE *l'augmentation du triangle* ABC *dans la figure suivante.*

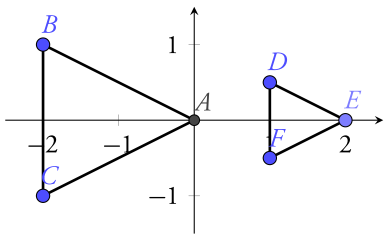


Exercice. *Donner les augmentations de* ABC.

Exercice. *Noter quels cas corresponds à une augmentation et à une réduction pour le triangle* ABC *et donner la valeur du rapport.*







Exercice. *Soient ABC un triangle dont les dimensions en centimètres sont $AB = 1$, $BC = 1$ et $AC = 1$. Représenter sur un plan l'agrandissement de ce triangle pour un rapport de $k = 3$.*

Exercice (Mission Indigo 4ème, p.213, exo 11.)**.** *Tracer un triangle équilatéral de côté 2 cm. Déterminer son agrandissement de rapport 1.5.*

> **Méthode** (Déterminer le rapport d'un agrandissement ou modification)**.** *Il s'agit de passer par un tableau de proportionnalité.*
>
> 1. *Ecrire un tableau avec les longueurs de chaque figure sur chaque ligne.*
> 2. *Déterminer le coefficient qui permet de passer d'une ligne à l'autre.*
>
> *Le coefficient de proportionnalité obtenu est le rapport recherché.*

Exercice. *Soient $ABCD$ et $EFGH$ deux losanges de dimensions*

- $AB = BC = CD = DA = 7$
- $EF = FG = GH = HE = 0.5$

Déterminer le rapport qui sépare les longueurs des losanges.

Exercice. *Soient ABC et EFG deux triangles dont les dimensions en centimètres sont $AB = 2$, $BC = 1$, $AC = 4$, $EF = 4$, $FG = 2$ et $GE = 8$. Déterminer le rapport entre les tailles des deux figures. Conclure que EFG est un agrandissement de ABC.*

1.2.2 Propriétés

Le fait d'agrandir ou de réduire une figure (resp. un solide) a des conséquences non négligeable puisqu'il garanti certaines propriétés sur cette figure (resp. un solide).

Propriété. *De toute figure du plan (ou un solide de l'espace) alors son agrandissement ou sa réduction provoquent les effets qui suivent*

1. *les angles ne changent pas.*
2. *l'aire de la figure réduite (ou augmentée) est égale à l'aire de la figure de départ multipliée par k^2.*
3. *le volume du solide réduit (ou augmenté) est égale au volume du solide de départ multiplié par k^3.*

Pour les angles, cela signifie que la construction de la figure réduite (ou augmentée) garde les mêmes angles que la figure de départ.

Exemple. *Toute réduction ou agrandissement d'un triangle équilatéral est toujours équilatéral et les angles sont identiques au triangle de départ.*

On profite de ce résultat pour rappeler quelques formules d'aire et de volume.

Figure	Formules
Carré de côté c	c^2
Rectangle de longueur l et de largeur L	$l \times L$
Triangle de hauteur h et de base b	$\frac{b \times h}{2}$
Cercle de rayon r	$\pi \times r^2$

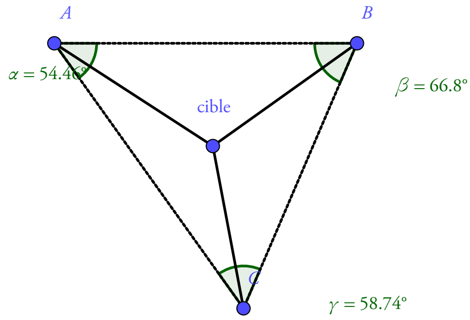
Table des formules d'aires de figures élémentaires du plan.

Solide	Formules
Cube de côté c	c^3
Pavé de hauteur h, longueur l et de largeur L	$h \times l \times L$
Sphère de rayon r	$\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$
Pyramide de hauteur h et d'aire de base $\mathscr{B}$	$\frac{1}{3} \times h \times \mathscr{B}$
Cylindre de hauteur h et d'aire de base $\mathscr{B}$	$h \times \mathscr{B}$
Cône de hauteur h et d'aire de base $\mathscr{B}$	$\frac{1}{3} \times h \times \mathscr{B}$

Table des formules de volume de solides élémentaires de l'espace.

Exercice. *Soit ABC un triangle rectangle en A dont les dimensions en centimètres sont $AB = 3$, $BC = 5$ et $AC = 4$. Construire DFE le triangle réduit de ABC de rapport $\frac{1}{2}$ et déduire que DFE est toujours un triangle rectangle.*

Problème. *Dans un découvert, trois individus se disposent autour d'une cible à 10 mètres sous la forme d'un triangle. Montrer que leur champ de vision est inchangé quand ils se rapprochent à 5 mètres d'elle.*



1.2.3 Problèmes et exercices

Problème. *Dans un jardin, on décide d'agrandir de deux fois une piscine en forme de triangle rectangle de base et hauteur égale à 4 m avec* 90^o *dans un côté. Pour comprendre ce problème, on modélise la piscine dans un plan par un triangle* ABC *rectangle en* A *avec* $\widehat{BAC} = 90^o$ *et* $AB = AC = 4$. *Construire l'agrandissement de* ABC *de rapport* 2.

Exercice (Sésamath 3ème, p.116, exo.14)**.** *Soit* ABC *un triangle avec* $\widehat{ABC} = 70^o$, $\widehat{BAC} = 53^o$ *et* $AB = 14$ *mesuré en mètre. Construire la réduction de* ABC *de rapport* $\frac{1}{200}$ *en centimètre.*

Problème. *On désire agrandir de trois demis une terrasse de forme triangulaire isocèle de base* 4 *et d'angle égale à* 50^o. *Pour comprendre ce problème, on modélise la terrasse en plaçant* ABC *dans un plan avec* $\widehat{BAC} = \widehat{CBA} = 50^o$ *et* $AB = 4$.

1. Montrer que ABC est bien isocèle.
2. Construire l'augmentation de ABC de rapport $\frac{3}{2}$.

Problème (Sésamath 3ème, p. 115, exo. 9)**.** *La pyramide de Gizeh (Egypte) est de forme pyramidale, régulière à base carrée. Sa hauteur est de 137 m et les côtés de sa base valent 230 m.*

1. Déterminer les dimensions de la réduction de cette pyramide de rapport $\frac{1}{1000}$. On donnera les valeurs en centimètres.
2. Calculer le volume de la pyramide initiale.
3. Calculer le volume de la pyramide réduite.
4. Déterminer la différence qui sépare le volume de la pyramide initiale à la pyramide réduite.

Problème. *On modélise la réduction d'un ballon de diamètre 19 cm avec un rapport de* $\frac{1}{2}$.

1. Calculer le volume du ballon arrondie au cm^3.
2. Calculer le volume du ballon réduit arrondie au cm^3.
3. Déterminer la différence qui sépare le volume du ballon initial au ballon réduit arrondie au cm^3.

Problème (Sésamath 3ème, p. 115, exo. 12)**.** *Un cône de révolution de hauteur 10 cm et de rayon 3.2 cm sur sa base.*

1. Calculer le volume du cône arrondie au cm^3.
2. Le cône est réduit et la hauteur de sa réduction vaut 7 cm. Déterminer le coefficient de réduction.
3. Calculer le volume du cône réduit arrondie au cm^3.

1.2.4 Activités informatiques

Sujet (Prise en main Géogébra). *Ce sujet consiste à illustrer la notion d'agrandissement et réduction d'une figure.*

1. *Mettre les points* $A = (0,0)$, $B = (4,0)$ *et* $C = (0,3)$.
2. *Joindre les segments* CB, AB *et* AC.
3. *Créer un curseur noté* k.
4. *Mettre les points* $D = (AB \times k, 0)$ *et* $E = (0, AC \times k)$.
5. *Joindre le polygone* ADE.
6. *Faire varier le curseur.*

Donner les coordonnées du point D *et* E *pour* $k = 5$. *Donner la valeur du curseur quand les positions des points sont* $D = (2.8, 0)$ *et* $E = (0, 2.1)$.

Sujet. *Ce sujet consiste à résoudre un problème d'agrandissement et réduction d'une figure avec Géogébra.*

1. *Mettre les points* $A = (0,0)$, $B = (8,0)$ *et* $C = (4,4)$.
2. *Joindre les segments* CB, AB *et* AC.
3. *Créer un curseur noté* k *avec* $\min = 0$, $\max = 10$ *et incrément*$= 0.1$.
4. *Mettre les points* $D = (8 \times k, 0)$ *et* $E = (4 \times k, 4 \times k)$.
5. *Joindre le polygone* ADE.
6. *Faire varier le curseur.*

Donner les coordonnées du point D *et* E *pour* $k = 5$. *Donner la valeur du curseur quand les positions des points sont* $D = (8.8, 0)$ *et* $E = (4.4, 4.4)$.
Maintenant, on dispose d'un terrain de forme triangulaire de base 8 mètres et de hauteur 4 mètres qu'on veut agrandir sans dépasser 15 mètres sur la base.

1. *Peut-on agrandir le terrain pour un ratio de* $k = 1.4$ *?*
2. *Donner la valeur du curseur pour* $D = (14.4, 0)$.
3. *Peut-on agrandir le terrain pour un ratio de* $k = 1.8$ *?*

Devoir maison

Examen

1.3 Équation à une inconnue

La recherche d'une longueur d'un terrain en forme de triangle rectangle, du nombre de pain obtenu après achat, etc. sont des situations où on recherche à expliciter un inconnu. Semblables à des opérations à trous, les équations consistent à déterminer un terme précis dans une formule et de modéliser des problèmes.

1.3.1 Introduction

Une introduction sur ce thème mérite certainement de passer par les illustrations du cours *Solving Equations : Introduction* de

`https://brilliant.org/`

Outre ces animations, la notion d'équation rapproche étroitement une myriade de notions vues les années précédentes :

— quatrième proportionnelle.
— théorème de Pythagore.
— divisibilité.
— géométrie du plan.
— etc.

Pour revenir aux exemples, retenons qu'une raison d'être de cette théorie est la modélisation des situations et de leur compréhension.

1.3.2 Définition

Suite aux exemples traités, une première définition empirique d'une équation est une relation entre des quantités connues et une quantité inconnue. Cette dernière est notée par des lettres; dont le x de manière conventionnelle.

Définition. *Une équation d'inconnue x est une égalité de la forme*

$$a \times x + b = c$$

où a, b, c sont des nombres quelconques avec $a \neq 0$. On appellera
— *l'inconnue de l'équation : x la lettre qui « cache » un nombre.*
— *la solution de l'équation : la valeur de x.*

Sauf mention explicite du contraire, privilégions l'écriture de $a \times x$ par ax dans le cas où l'on manipule des lettres. Ainsi, l'équation de la définition s'écrit simplement

$$ax + b = c$$

Exemple. *En observant l'équation $x + 1 = 5$, 4 est une solution.*
De la même manière, pour l'équation $4x = 2$, 2 est une solution.

Dans certains cas, il est possible de « deviner » la solution en comparant l'équation à une « opération à trou ».

Exercice. *Donner la solution à chaque équation.*

1. $2x = 4$
2. $2x = 8$
3. $2x = 10$
4. $7x = 14$
5. $7x = 21$
6. $9x = 81$
7. $x + 1 = 2$
8. $x + 1 = 3$
9. $x + 1 = 10$
10. $x + 2 = 1$
11. $x + 2 = 3$
12. $x + 3 = 10$
13. $2x + 4 = 10$
14. $2x + 6 = 10$
15. $2x + 8 = 12$

Dans le même esprit, ces « opérations à trou » se retrouvent aussi dans les formules mathématiques.

Problème. *Soit $ABCD$ un rectangle dont l'air vaut 14 et la longueur vaut 2. Déterminer la largeur de ce rectangle.*

Problème. *Sur une piste de 10 km, on arrive à 2 km depuis le départ. Déterminer la distance restante à parcourir avant la fin.*

1.3.3 Règles sur les égalités

« Deviner » des solutions a ses limites devant des équations moins évidentes ; citons par exemple $\frac{x}{4}+2=5$. Fort heureusement, il est toujours possible de les obtenir en les « recherchant » de manière rigoureuse. Cette approche exploite les propriétés opératoires des nombres relatifs sur les égalités.

Propriété. *Soient A, B deux nombres vérifiant l'égalité $A = B$ et soit k une constante quelconque alors $A = B$ équivaut à*

1. $A + k = B + k$. *(addition)*
2. $A - k = B - k$. *(soustraction)*
3. $A \times k = B \times k$. *(produit)*
4. *si k est non nul alors* $\frac{A}{k} = \frac{B}{k}$. *(quotient)*

Pour des raisons de rigueur, notons que deux étapes constituent une résolution :

1. la recherche de la solution : utiliser cette propriété pour trouver x.
2. la vérification de la solution : « remplacer » le x trouvé dans l'équation.

Le chapitre se concentrant sur la recherche des solutions, nous admettrons que de telles équations admettent une solution et que cette solution est unique.

En pratique, rechercher la solution revient à appliquer l'algorithme suivant.

Méthode. *On exploite la propriété successivement suivant la forme de l'équation. L'équation de départ étant de la forme $ax+b=c$, la résolution consiste à obtenir $x =$ « un nombre ».*

ENTREE *L'équation $ax+b=c$*

SORTIE *La solution x*

1. *Si $b=0$ alors :*
2. *Si a est une fraction de la forme $a=\frac{D}{E}$ avec E non nul alors :*
3. *Multiplier à gauche et à droite par $\frac{E}{D}$.*
4. *Si a n'est pas une fraction alors :*
5. *Multiplier à gauche et à droite par $\frac{1}{a}$.*
6. *Simplifier.*
7. *Sortir x*
8. *Si $b \neq 0$ alors :*
9. *Soustraire à gauche et à droite par b.*
10. *Simplifier.*
11. *Si a est une fraction de la forme $a=\frac{D}{E}$ avec E non nul alors :*
12. *Multiplier à gauche et à droite par $\frac{E}{D}$.*
13. *Si a n'est pas une fraction alors :*
14. *Multiplier à gauche et à droite par $\frac{1}{a}$.*
15. *Simplifier.*
16. *Sortir x*

Exemple. *On va montrer que l'équation $\frac{13x}{10}+1=5$ a pour solution $x=-\frac{1}{4}$. Avec $ax+b=c$, on identifie $a=\frac{13}{10}$, $b=1$ et $c=5$.*
Recherche des solutions : On écrit

$$\frac{13x}{10}+1=5 \qquad \text{on a } b=1\neq 0 \qquad (1.1)$$

$$\Rightarrow \frac{13x}{10}+1-1=5-1 \qquad \text{Soustraire à gauche et à droite par } b=1 \qquad (1.2)$$

$$\Rightarrow \frac{13x}{10}=4 \qquad \text{Simplification} \qquad (1.3)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{13x}{10}\right)\times\frac{10}{13}=(4)\times\frac{10}{13} \qquad \text{Multiplier à gauche et à droite par } \frac{10}{13} \qquad (1.4)$$

$$\Rightarrow x=\frac{40}{13} \qquad \text{Simplification} \qquad (1.5)$$

Vérification des solutions : *En posant $x=\frac{40}{13}$ alors on écrit*

$$\frac{13}{10}\times\left(\frac{40}{13}\right)+1=4+1=5$$

Exercice. *1. Montrer que l'équation* $4x = 0$ *a pour solution* $x = 0$.

2. *Montrer que l'équation* $\frac{x}{2} = 0$ *a pour solution* $x = 0$.
3. *Montrer que l'équation* $\frac{x}{400} = 0$ *a pour solution* $x = 0$.
4. *Montrer que l'équation* $4x = 1$ *a pour solution* $x = \frac{1}{4}$.
5. *Montrer que l'équation* $\frac{x}{4} = 8$ *a pour solution* $x = 32$.
6. *Montrer que l'équation* $7x = 11$ *a pour solution* $x = \frac{11}{7}$.

Exercice. *1. Montrer que l'équation* $4x + 2 = 0$ *a pour solution* $x = -\frac{1}{2}$.

2. *Montrer que l'équation* $\frac{x}{5} + 2 = 0$ *a pour solution* $x = -10$.
3. *Montrer que l'équation* $7x + 1 = 0$ *a pour solution* $x = -\frac{1}{7}$.
4. *Montrer que l'équation* $\frac{x}{2} + 1 = 7$ *a pour solution* $x = 12$.
5. *Montrer que l'équation* $x + 2 = 1$ *a pour solution* $x = -1$.
6. *Montrer que l'équation* $\frac{3x}{2} + 2 = 7$ *a pour solution* $x = \frac{10}{3}$.

Exercice. *Soit x un nombre quelconque. Résoudre les équations suivantes.*

1. $2x = 1$	5. $2x = 7$	9. $2x = 0$	13. $2x = 0$
2. $4x = 5$	6. $4x = 4$	10. $4x = 0$	14. $4x = 0$
3. $x + 1 = 0$	7. $6x + 1 = 0$	11. $\frac{x}{7} + 1 = 10$	15. $6x + 1 = 11$
4. $\frac{4x}{3} - 1 = 0$	8. $\frac{7x}{13} - 11 = 0$	12. $x - 1 = 9$	16. $7x - 11 = 11$

1.3.4 Problèmes et exercices

Problème (Sésamath 3e, p.38, exo.3)**.** *Soient x un nombre quelconque et* ABC *un triangle rectangle en* B *avec* $AB = 6$, $BC = x$ *et* $AC = x + 3$.

1. *Déterminer la valeur de x en modélisant avec le théorème de Pythagore.*
2. *Sachant que l'aire de* ABC *vaut 27, déterminer la valeur de x en modélisant avec l'aire de* ABC.

Exercice. *Soit* $ABCD$ *un rectangle dont l'aire vaut 14 avec* $AB = CD = 7$.

1. Modéliser la situation en faisant intervenir une équation dont on précisera l'inconnue.
2. Résoudre cette équation et interpréter le résultat.
3. A partir des questions précédentes, montrer que $AD = BC$ est égale à un nombre premier.

Problème. *Une boîte de conserve cylindrique a pour hauteur 10.5* cm *et pour volume 465* cm^3. *Déterminer le rayon de la base en donnant une valeur arrondie au millimètre près.*

Problème (Tournoi de mathématiques de Berkeley)**.** *Soit* $\mathscr{T}$ *un triangle équilatéral inscrit dans un cercle* $\mathscr{C}$ *de rayon 2. Déterminer l'aire complémentaire au triangle dans le cercle.*

Exercice. *On dispose d'une piscine dont l'aire vaut* 70cm^2 *et de longueur* 10cm. *Montrer que la largeur de cette piscine est un nombre premier.*

Problème (Mission indigo 3e, p.97, exo. 91)**.** *L'aire d'un carré augmente de* 40cm^2 *si l'on augmente chacun de ses côtés de* 4cm. *Déterminer la longueur initiale d'un côté de ce carré.*

1.3.5 Activités informatiques

Sujet (Prise en main sur scratch)**.** *Ce sujet consiste à construire un algorithme pour résoudre une équation de la forme $ax = c$ avec a, c deux nombres où $a \neq 0$.*

1. Donner les étapes sur papier qui permettent de résoudre $ax = c$ puis l'implémenter sur scratch.
2. Résoudre les équations

$$4x = 2 \quad \frac{x}{1+\frac{1}{2}} = 7 \quad \frac{x}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} = 11$$

Sujet. *Ce sujet consiste à construire un algorithme pour résoudre une équation de la forme $ax + b = c$ avec a, b, c trois nombres où $a \neq 0$.*

1. Donner les étapes sur papier qui permettent de résoudre $ax + b = c$ puis l'implémenter sur scratch.
2. Résoudre les équations

$$4x + 5 = 2 \quad \frac{x}{1+\frac{1}{2}} + 2 = 7 \quad \frac{x}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} + 3 = 11$$

Devoir maison

Examen

1.4 Homothétie

Rappelons que pour réduire ou agrandir un terrain, ou une pièce d'une maison, il était nécessaire de multiplier chaque longueur par un nombre. Géométriquement, on transforme la figure sur ses longueurs et cette transformation s'appelle une homothétie.

1.4.1 Introduction

L'introduction de ce sujet est certainement plus judicieuse en empruntant des expériences de la physique et des sciences du vivant.

Ombre chinoise. Par expérience, on projette sur un mur avec un faisceau lumineux des ombres produites par du papier ou nos mains. Pour illustrer ça géométriquement, on modélise ce qu'il se passe par un agrandissement des figures par rapport à un point désignant le faisceau lumineux.

Illustration. Ombre chinoise censée représenter un oiseau.

Fonctionnement de l'œil humain. Étant donné un objet qu'un œil humain visualise, il est reflété dans l'iris pour être inversé à l'intérieur avant le cerveau traite l'image correctement. Géométriquement, on modélise ce qu'il se passe par une réduction de l'image par rapport à un point désignant l'iris.

Retenons de ces exemples qu'une raison d'être des homothéties est l'agrandissement et la réduction de figure.

1.4.2 Définition

Pour commencer par donner une définition empirique d'une homothétie, il s'agit d'une transformation qui agrandie ou réduit une figure. Sans rentrer aux aspects algébriques de cette transformation, nous réduirons ce chapitre aux aspects géométriques en réservant l'aspect algébrique aux calculs du rapport.

Définition. *L'homothétie de centre O et de rapport k d'un point M est le point N situé à une distance k fois entre O et M sur la droite (OM).*

En d'autre terme, une homothétie provoque une transformation d'une figure en faisant glisser ses points le long de certains nombres de droites passant par le point O. Notons que pour reporter les distances, l'utilisation de la règle ou du compas sont d'usages.

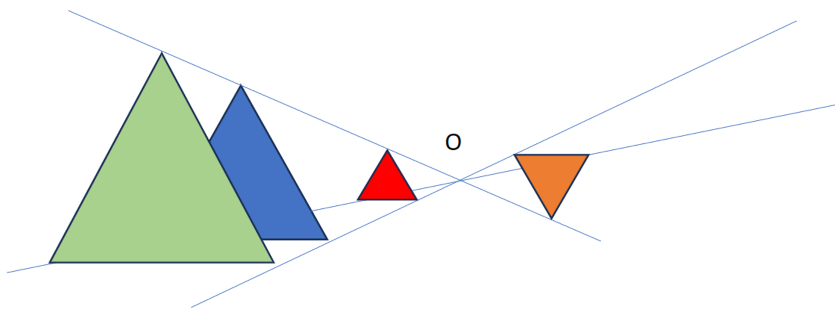
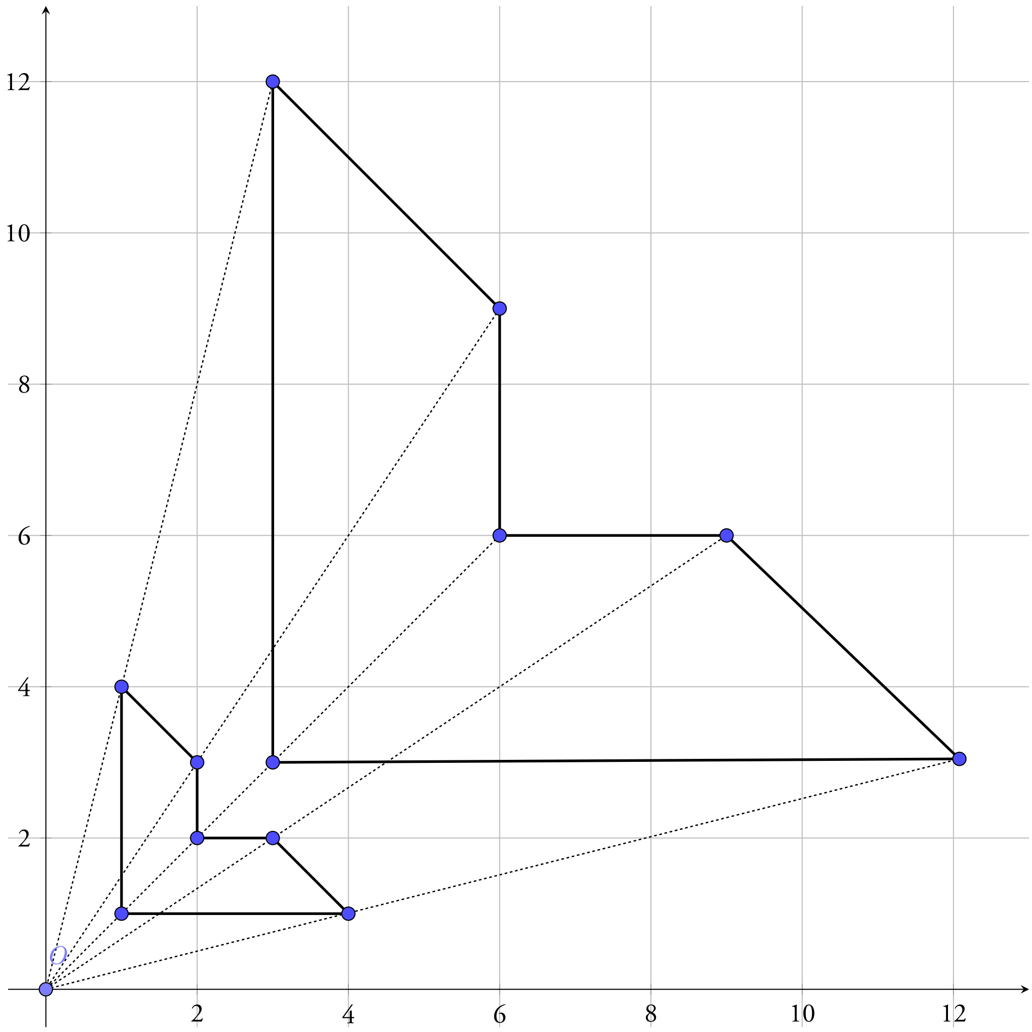


Illustration. Homothétie par rapport au point O du triangle bleu : le triangle vert désigne son augmentation, le triangle rouge désigne sa réduction et le triangle orange son retournement.

Exemple. *La figure suivante est une homothétie de rapport 2 par rapport au point O.*



Pour résumer, construire une homothétie consiste à reproduire une figure suivant les droites passant par ses points et le point O ; on rassemble les étapes dans la méthode qui suit en détail.

Méthode (Construire l'homothétie d'une figure)**.** *On a*

Ce qu'il faut avoir. *Un point O et un rapport k.*

Ce qu'il faut faire. *On fait*

1. *Tracer la droite passant par O et les sommets de la figure.*
2. *Si $k > 0$ alors*
4. *Se placer du même côté que la figure de départ au point O.*
5. *Placer les points à une distance de k par rapport à O.*
6. *Si $k < 0$ alors*
7. *Se placer du côté opposé que la figure de départ au point O.*
8. *Placer les points à une distance de k par rapport à O.*

Cette transformation est étroitement liée aux agrandissements et réductions de figures du plan. Pour une figure donnée et un rapport k fixé, l'homothétie d'un centre O quelconque obtenue par cette figure le fait grandir (resp. réduire) suivant la valeur de k.

Exercice. *Construire l'homothétie de centre $O = (0,0)$ et de rapport $k = 2$ du triangle de sommets $M = (1,2)$, $N = (2,2)$ et $L = (3,2)$.*

Exercice. *Construire l'agrandissement de centre $O = (0,0)$ et de rapport $k = 2$ du losange $ABCD$ de dimension $AB = BC = CD = DA = 5$.*

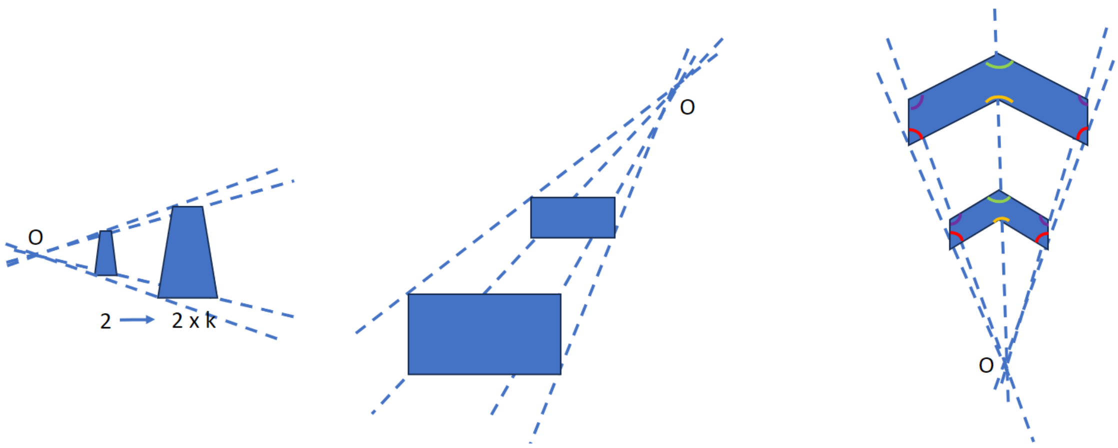
1.4.3 Propriétés

En observant les figures obtenues par homothétie, on constate des traits particuliers qu'ils ont avec leur figure de départ, notamment sur
- leur longueur.
- leur forme.
- leur mesure.
- leur alignement.

Propriété. *On a*

1. *Les longueurs d'une figure obtenue par homothétie de rapport k sont multipliées par k.*
2. *La forme d'une figure avant et après homothétie sont identiques.*
3. *Les mesures des angles et alignements d'une figure avant et après homothétie sont identiques.*

En d'autre terme, on peut représenter les propriétés comme suit :



Exercice. *Soit DEF l'agrandissement du triangle ABC avec $AB = 3$, $BC = 4$ et $AC = 5$ de rapport 3. Montrer que DEF est un triangle rectangle.*

Exercice. *Soit $EFGH$ la réduction du losange $ABCD$ avec $AB = BC = CD = DA = 2$ de rapport $\frac{1}{2}$. Montrer que $EF = 1$.*

Problème. *Le problème consiste à réduire le sol d'un parking de forme rectangulaire avec 400 mètres de longueur et 200 mètres de largeur de rapport $\frac{1}{2}$.*

1. Représenter géométriquement le problème.
2. Donner les nouvelles dimensions du parking en précisant : angles et longueurs.

1.4.4 Problèmes

Problème. *Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles qui s'intersectent en un point P. Soient A (resp. B) un point de $\mathscr{C}_1$ (resp. $\mathscr{C}_2$), on note*

- *$\mathscr{D}$ une droite qui coupe $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en A et B.*
- *$\mathscr{T}_A$ la tangente en A sur $\mathscr{C}_1$.*
- *$\mathscr{T}_B$ la tangente en B sur $\mathscr{C}_2$.*

Démontrer que $\mathscr{T}_A$ et $\mathscr{T}_B$ sont parallèles.

Problème. *Soient $A = (1,1)$, $B = (5,1)$ et $C = (3,4)$ forment un triangle qu'on note $\mathscr{T}$.*

1. Donner l'homothétie au point O et de rapport $k = -2$ de $\mathscr{T}$. Faire de même pour $k = 4$ et $k = -\frac{1}{2}$.
2. Donner l'homothétie au point $X = (0,3)$ et de rapport $k = -2$ de $\mathscr{T}$. Faire de même pour $k = 4$ et $k = -\frac{1}{2}$.

Problème (Mission Indigo 3e, p.217, exo.63)**.** *2 Juillet 2019, une éclipse solaire a duré 4 min 33 s et était visible en Argentine et au Chili. Une éclipse est un phénomène qui se produit lorsque la lune se place devant le Soleil. On rappelle que*

- *la distance terre et lune vaut 3.75×10^5 km.*
- *la distance terre et soleil vaut 1.5×10^8 km.*
- *le rayon de la Lune vaut 1 750 km.*
- *le rayon de la Soleil vaut 700 000 km.*

1. Faire un schéma de la situation.
2. Déterminer le rapport et le point O permettant de passer du Soleil à la Lune.

Problème. *Dans le ciel, l'ombre d'un nuage de forme sphérique est projeté sur le sol par le soleil avec un rapport 10. Sur le sol, on constate que l'aire de l'ombre est égale à 50.3km^2*

1. Faire un schéma de la situation.
2. Déterminer le rayon de l'ombre.
3. Déterminer le rayon du nuage.
4. Déterminer le rapport.

Problème (Olympiade Internationale de Mathématiques 1978, Problème 4)**.** *Soient ABC un triangle isocèle avec $AB = AC$, on note $\mathscr{C}$ un cercle inscrit tangent à AB en P et AC en Q.*

Montrer que le milieu de $[PQ]$ est le milieu du barycentre de ABC.

Problème. *Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles qui ne s'intersectent pas. On note*

- *$\mathscr{D}_1$ une tangente à $\mathscr{C}_1$ en A et en $\mathscr{C}_2$ en B.*
- *$\mathscr{D}_2$ une tangente à $\mathscr{C}_1$ en P et en $\mathscr{C}_2$ en Q.*
- *O le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.*

Montrer que APO est l'homothétie de rapport -1 de centre O de BQO.

1.4.5 Activités informatiques

Sujet. *Construire avec un logiciel informatique la symétrie centrale par rapport à un point arbitrairement choisi.*

Devoir maison

Examen

1.5 Puissances

« $\mathscr{X}$ *puissance vous* ».

En histoire-géographie, une puissance est définie comme une nation qui règne sur un domaine. En physique, une puissance est définie comme un produit de deux facteurs : l'intensité (mesurée en ampère) et la tension (mesurée en volt). En mathématiques, il s'agit du résultat de la multiplication d'un même nombre.

Le but de ce chapitre est le calcul de la puissance d'un nombre, de son utilisation et de son interprétation.

1.5.1 Introduction

La notion de puissances se rencontre dans plusieurs situations de la vie actuelle ou dans l'histoire.

Combinatoire. Étant donné un cadenas codé avec 3 chiffres allant de 0 à 9, le nombre de code possible à entrer dans le cadenas se dénombre au nombre de $10 \times 10 \times 10 = 1000$; ce nombre est noté 10^3. Étant donné un mot de passe de composé de 8 lettres de l'alphabet francophone, le nombre de mot possible à entrer se dénombre au nombre de

$$26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 208827064576$$

; ce nombre est noté 26^8.

Le mythe du brahmane Sissa. Pour combler son ennui, le roi de l'Inde Belkib sollicite toute personne lui proposant une distraction. Le sage Sissa proposa une table de jeu d'échec (composée de 64 cases) dans laquelle le roi devra déposer 1 grain de riz sur la première case (noté 2^0), 2 grains sur la deuxième case (noté 2^1), 4 grains sur la troisième (noté 2^2), etc. jusqu'à la 64ème case. Tenter par le jeu, le roi Belkib n'attend pas pour essayer et il ne tarda pas à remarquer que le nombre de grain pour la dernière case dépasse largement les grains de riz de son pays :

$$9223372036854775808$$

; ce nombre est noté 2^{63}. Sans entrer dans les détails, le nombre de grain de riz nécessaire pour achevé ce jeu est la somme de tous les grains de riz sur chaque case et est égale à

$$18446744073709551615$$

Rendons-nous compte que ce chiffre est tellement élevé qu'il représente 1000 fois la production mondiale annuelle de blé en 2012.

De ces exemples, retenons qu'une raison d'être des puissances est l'écriture de quantité allant au milliard voire encore plus.

1.5.2 Définition

Soient a un entier positif non nul et n un entier supérieur ou égale à 2.

Définition. *La puissance de a par n est la quantité définie par*

$$\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Ce nombre est noté a^n et se lit « a puissance n ». Dans cette écriture,
- *a est appelé la base.*
- *n est appelé l'exposant.*

On adoptera les conventions $a^1 = a$ et si a est non nul alors $a^0 = 1$. Profitons de cette définition, pour rappeler l'écriture de la puissance d'un nombre négatif.

$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times \cdots \times (-a)}_{n \text{ fois}}$$

Les parenthèses ont leurs importances ici car le résultat d'un calcul d'une puissance d'un nombre négatif est très souvent biaisé. La confusion provient surtout de l'écriture suivante où les parenthèses sont négligées

$$-a^n = -a \times a \times \cdots \times a$$

Exemple. *On peut citer les puissances de 10 avec $a = 10$:*
- $10^1 = 10$.
- $10^2 = 100$.
- $10^3 = 1000$.
- $10^4 = 10000$.

De ce fait, une nouvelle règles opératoires s'ajoute. Dorénavant, le calcul d'une expression littéral s'effectue dans l'ordre qui suit :
- les puissances.
- la multiplication et la division.
- l'addition et la soustraction.

Exemple. *Dans l'expression $A = 1 + 10 \times 3^2$, on calcul $3^2 = 9$ donc on obtient $A = 1 + 10 \times 9$. Puis, on calcul $10 \times 9 = 90$ pour obtenir $A = 1 + 90 = 91$. Conclusion, $A = 91$.*

Exercice (Sésamath 3e, p.49)**.** *Calculer $A = -3^2 + 5 \times 2^{-3}$ et $B = (-3)^2 + (5 \times 2)^3$.*

Problème. *Une résidence contient 5 maisons. La première contient 1 personnes, la seconde contient deux personnes, la troisième quatre personnes, la quatrième huit personnes et la cinquième contient seize personnes. Déterminer le nombre total de personne qui occupe la résidence.*

1.5.3 Opérations algébriques sur les exposants entiers

Les puissances sont très souvent multipliées et leur calcul est grandement facilité en manipulant leur exposant.

Propriété. *Soient a, b un nombre non nul, n un entier non nul et positif, on a*

$$a^n b^n = (ab)^n$$

Exemple. *On peut citer $10^4 \times 8^4 = (10 \times 8)^4 = 80^4$ ou encore*

$$(5!)^3 = 1 \times 2^3 \times 3^3 \times 4^3 \times 5^3$$

Exercice (Mission Indigo 3e, p.55, exo.45)**.** *Calculer*

1. -3^4 2. $(-3)^4$ 3. 3×2^3

Dans une majorité des cas, on calcule des puissances quand les bases sont les **mêmes**.

Propriété. *Soient a un nombre non nul, n, m deux entiers non nuls et positifs, alors*

1. $a^n a^m = a^{n+m}$ *(somme)*
2. $(a^n)^m = a^{nm}$ *(produit)*
3. $a^{n-m} = \frac{a^m}{a^n}$ *(quotient)*

Notons que, par rapport à la propriété précédente, on dispose de d'une formule permettant de calculer deux expressions de bases et de puissances identiques. De plus, retenons la différence entre a^{nm} et a^{n^m} puisque $10^{2\times3} = 10^6$ alors que $10^{2^3} = 10^8$ d'où $10^8 = 10^{2^3} \neq 10^{2\times3} = 10^6$.

Exemple. *On peut citer* $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0.001$.

Exercice (Mission Indigo 3e, p.55, exo.44)**.** *Calculer*

1. $5^3 \times 5^8$ 2. $(-2)^6 \times (-2)^3$ 3. $\frac{10^5}{10^9}$

Naturellement, ces formules sont aussi valables pour les nombres négatifs mais le calcul de leur puissance prête souvent à confusion. Une démarche simple pour ce calcul est présentée ci-après.

Méthode (Calcul de puissance d'un nombre négatif)**.** *Il s'agit de décomposer le nombre en deux parties de signe différent. On note a un nombre strictement positif.*

Ce qu'il faut avoir.

$$(-a)^n$$

Ce qu'il faut faire.

$$(-a)^n \tag{1.6}$$
$$=(-1)^n \times a^n \tag{1.7}$$

Deux cas se présentent :

— *si n est paire alors* $(-1)^n = 1$ *donc* $(-a)^n = a^n$.

— *si n est impaire alors* $(-1)^n = -1$ *donc* $(-a)^n = -a^n$.

Exemple. *On peut citer*

— $(-7)^6 = 7^6$ *car* $(-7)^6 = (-1)^6 \times 7^6 = 7^6$ *car 6 est paire.*

— $(-100)^{11} = -100^{11}$ *car* $(-100)^{11} = (-1)^{11} \times 100^{11} = -100^{11}$ *car 11 est impaire.*

Exercice (Mission Indigo 3e, p.55, exo.44)**.** *Calculer*

1. $5^3 \times 5^8$ 2. $(-2)^6 \times (-2)^3$ 3. $\frac{10^5}{10^9}$

1.5.4 Notation scientifique

En physique, en chimie ou en science du vivant, la manipulation des nombres est omniprésente. Ces nombres peuvent être tellement grands ou tellement petits que l'écriture sous leur forme d'entier n'est pas toujours convenable. C'est pourquoi on dispose d'une autre écriture qui reste correct tout en préservant leur comparaison.

Définition. *Une notation scientifique d'un nombre décimal est de la forme* $a \times 10^n$ *avec* $-10 < a < 10$ *décimal non nul et* $n \in \mathbb{Z}$ *un nombre relatif.*

En d'autre terme, pour obtenir une écriture scientifique
— n est positif si la virgule avance vers la gauche.
— n est négatif si la virgule avance vers la droite.

Exemple. *On peut citer* 17000000000 *qui s'écrit* 1.7×10^{10} *ou encore* 0.05 *qui s'écrit* 5×10^{-2}.

Cette notation permet de connaitre immédiatement l'ordre de grandeur du nombre. Son utilité se démontre pour les quantités physiques dont les valeurs sont souvent encadrées avec une marge d'erreur. On se restreint souvent aux chiffres significatifs, par exemple, la notation scientifique 1.2340×10^6 signifie que la valeur est comprise entre 1 233 950 et 1 234 050.

Exercice (Mission Indigo 3e, p.49)**.** *Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.*

1. 5100.
2. 365 000 000.
3. 10 000.
4. 110 000.
5. 0.0000257.
6. 0.05.
7. 0.156.
8. 0.000000000001.

Plus loin, dans le calcul des fractions, elle permet également de simplifier la multiplication et la division, en procédant aux produits des mantisses d'une part, et à la somme des exposants d'autre part.

1.5.5 Problèmes et exercices

Problème.

Exercice.

Problème (Mission Indigo 3e, exo.92, p.60)**.** *Une balle tombe d'une hauteur de 1 m. A chaque rebond, elle remonte de $\frac{3}{4}$ de la hauteur précédente. On arrondira les résultats au cm.*

1. Déterminer la hauteur de la balle au premier rebond. Faire pareil au 5ème rebond et au 10ème rebond.
2. Déterminer le nombre de rebond pour que la balle remonte à moins de 10 cm.

Problème. *Soient $\mathcal{T}$ un triangle dont l'aire vaut 14 et $\mathcal{T}'$ la réduction de $\mathcal{T}$ de rapport $\frac{1}{200}$. Exprimer l'aire de $\mathcal{T}'$ en écriture scientifique.*

Exercice.

Problème (Vente pyramidale)**.** *Une compagnie de transport aérien dispose*
— *d'un pilote.*
— *deux copilotes.*
— *quatre hôtesses.*
— *huit passagers.*

Chaque semaine,
— *le pilote prend l'argent des billets des passagers.*
— *les copilotes deviennent pilotes de leur avion.*
— *les hôtesses deviennent copilotes.*
— *les passagers deviennent stewards et recrutent chacun deux passagers.*

Montrer qu'à la 30ème semaine, la compagnie disposera de 536870912 *avions.*

1.5.6 Activités informatiques

Sujet. *Virus.*

Sujet (Mission Indigo 3e, p.62, exo.101)**.** *Utiliser un tableur pour calculer le nombre de grain de riz total pour achevé le jeu de Sissa.*

Devoir maison

Examen

1.6 Parallélisme

En mécanique automobile, l'importance du parallélisme intervient sur l'ouverture des roues. C'est pourquoi, un mauvais parallélisme entraîne un risque élevé d'accidents et souligne l'importance de cette notion.

1.6.1 Introduction

L'illustration d'une telle notion passe certainement par *Geogebra* et *Brilliant*.

`https://brilliant.org/`

1.6.2 Définition

Définition. *Soient d et d' deux droites du plan.*
d et d' sont parallèles si elles ne s'intersectent pas.

Cette définition est analogue à celle qui fait intervenir les vecteurs directeurs. Rappelons qu'une droite est définie par un point et un vecteur directeur. Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Exemple. *Les droites suivantes sont parallèles.*

Notons que le parallélisme de droites, en convenant que les droites confondues sont parallèles :
- qu'une droite est parallèle à elle-même.
- qu'une droite d parallèle à une droite d' entraîne que d' est parallèle à d.
- qu'une droite d parallèle à une droite d' et d' parallèle à une droite d'' entraîne que d est parallèle à d''.

1.6.3 Théorème de Thalès

La notion de parallélisme intervient à travers les triangles emboités ou encore semblables. Il est toujours possible de quantifier la longueur de ces côtés.

Théorème (Thalès)**.** *Soient un triangle quelconque ABC et deux points P et Q sur les segments respectifs AB et AC. Si*

1. *PQ et BC sont parallèles.*

alors

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$

La maîtrise de ce résultat nécessite naturellement la maîtrise des nombres rationnels et surtout des équations de la forme $ax = b$. En problème ou en exercice, la recherche de la valeur d'une longueur dans les conditions que remplissent le théorème fait intervenir une inconnue qu'on cherche à connaître.

Exemple. *Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments parallèles avec les points A, C alignés, B, D alignés, $AB = 5$ et $CD = 10$. Soit E un point du plan tel que $AE = 3$, les droites (AE) et (AB) soient perpendiculaires.*

1.6.4 Problèmes et exercices

Problème (Mission Indigo 3e, exo 51, p.236)**.** *On mesure la profondeur d'un puits en plaçant un oeil à 1m50 de hauteur et à 1m du bord d'un puits de 1m20 de diamètre. Déterminer la profondeur du puits.*

1.6.5 Activités informatiques

Sujet (Mission Indigo 3e, exo 48, p.233)**.** *Construction du triangle de Sierpinski.*

1. *Construire un triangle ABC quelconque.*
2. *Placer les points D, E, F les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$. Tracer le triangle EDF.*
3. *Placer les points G, H, I milieux respectifs de $[DF]$, $[AD]$ et $[AF]$. Tracer le triangle HIG.*
4. *Placer les points J, L, K milieux respectifs de $[AH]$, $[HI]$ et $[AI]$. Tracer le triangle JKL.*

Le problème est le suivant

1. *ABC et DEF sont-ils semblables ?*
2. *DEF et HIG sont-ils semblables ?*
3. *HIG et JKL sont-ils semblables ?*
4. *JKL est-il la réduite de DEF ? Si oui, préciser le rapport de réduction.*

Devoir maison

Examen

Chapitre 2

Second trimestre

Ce second trimestre complète des notions vues au trimestre précédent, à savoir les triangles et nombres premiers. De nouveaux concepts arrivent bien qu'elles font l'objet de complément et rappels.

2.1 Nombre rationnel

Les nombres nécessitent souvent une représentation convenable pour les comparer et les traiter ; les fractions offrent une écriture exceptionnelle.

Le but de ce chapitre consiste à savoir utiliser et manipuler les fractions dans divers contextes.

2.1.1 Introduction

Les nombres rationnels représentent une grande diversité de quantité que l'on retrouve dans plusieurs domaines.

Parts. Étant donné un carré blanc découpé en 9 morceaux dont on noirci le morceaux au centre. Montrer que la couleur blanche recouvre 8 neuvième du carré.

Pourcentage. Dans une classe de 10 personnes, il y en a neuf qui ont la moyenne. Montrer que 10 pourcents des élèves n'ont pas la moyenne.

Retenons qu'une raison d'être des nombres rationnels est leur capacité à partager des mesures, des proportions, des figures semblables, des probabilités, etc.

2.1.2 Définition

Des exemples, on peut empiriquement comprendre qu'un nombre rationnel s'écrit comme une fraction.

Définition. *On dit qu'un nombre a est rationnel si a s'écrit sous la forme*

$$a = \frac{p}{q}$$

avec p, q deux entiers avec $q \neq 0$. Si tel est le cas, on appellera
- *p le numérateur.*
- *q le dénominateur.*

Exemple. *On peut citer* $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{50}$ *ou encore* $\frac{1}{33}$.

Naturellement, la division par un nombre nul n'existe pas ; il s'agit formellement du cas pour $q = 0$. On retiendra surtout que pour tout nombre a, on a $a = \frac{a}{1}$.

2.1.3 Comparaison des rationnels

Un nombre rationnel est une fraction. Cela signifie que pour les comparer, on peut naïvement calculer leur valeur par la calculatrice. Le même exercice sans recourir à la calculatrice reste possible en moyennant les règles de comparaison.

Propriété. *Soient* a, b, c, d *quatre nombres avec* $b, d \neq 0$.

1. *si* $b, d > 0$ *alors*
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longrightarrow ad < cb$$
2. *si* $b > 0$ *et* $d < 0$ *(ou* $b < 0$ *et* $d > 0$*) alors*
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longrightarrow ad > cb$$

Exemple. *On a* $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ *car* $1 \times 5 < 4 \times 2$ *en particulier* $5 < 8$.

Exercice. *Montrer chaque inégalité.*

1. $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.
2. $\frac{1}{10} < \frac{1}{2}$.
3. $\frac{3}{50} < \frac{15}{2}$.
4. $\frac{700}{100} < \frac{11}{25}$.

Problème. *Deux sociétés sont en concurrence sur le marché de l'immobilier,*

— *la première entreprise possède 100 parts sur 3.*
— *la seconde entreprise possède 5 parts sur 70.*

Montrer que la première entreprise possède plus de parts que la deuxième entreprise.

2.1.4 Opération sur les rationnels

Propriété (de simplification)**.** *Soient* a, b, c *trois nombres avec* $b \neq 0$*, alors*

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

Cette propriété de simplification permet d'écrire une fraction de manière plus simples.

Exemple. *Les fractions* $\frac{20}{40}$ *et* $\frac{1}{2}$ *sont égales car*

$$\frac{20}{40} = \frac{\cancel{2} \times 10}{\cancel{2} \times 20} = \frac{10}{20} = \frac{\cancel{10} \times 1}{\cancel{10} \times 2} = \frac{1}{2}$$

Exercice. *Simplifier les fractions suivantes.*

1. $\frac{4}{40}$.
2. $\frac{14}{7}$.
3. $\frac{50}{150}$.
4. $\frac{20}{4}$.

Propriété. *Soient* a, b, c, d *quatre nombres avec* $b, d \neq 0$*, alors*

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$ *(somme)*
2. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - c \times b}{b \times d}$ *(différence)*
3. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ *(produit)*
4. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ *(quotient)*

En d'autre terme, calculer le produit de fraction consiste à faire le produit sur chaque partie de la fraction. Concernant le quotient, il s'agit de l'écrire comme un produit et on revient à calculer le produit de fraction. Toutefois, on gardera notre attention sur la somme, accessoirement la différence, car une grande difficulté persiste sur son calcul. On présente une méthode détaillé pour y aboutir.

Méthode (Calculer la somme de fraction)**.** *Il s'agit d'utiliser les règles sur les fractions. On part de la quantité*

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \tag{2.1}$$
$$=\frac{a\times d}{b\times d}+\frac{c\times b}{d\times b} \tag{2.2}$$
$$=\frac{a\times d+c\times b}{b\times d} \tag{2.3}$$
$$\tag{2.4}$$

Retenons que l'égalité $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ n'est absolument pas vraie ! On peut s'en convaincre en comparant $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=1.1$ et $\frac{1+3}{2+5}=\frac{4}{7}\simeq 0.57$. Seulement un cas particulier peut être retenu.

Propriété. *Soient a, b, c quatre nombres avec $b\neq 0$, alors*

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Exercice. *Calculer les fractions.*

1. $1+\frac{1}{2}$.
2. $\frac{4}{5}-\frac{1}{2}$.
3. $\frac{3}{50}+\frac{15}{2}$.
4. $\frac{7}{8}+\frac{1}{25}-\frac{4}{7}$.
5. $1\times\frac{1}{2}$.
6. $\frac{4}{5}\times\frac{8}{2}$.
7. $\frac{15}{5}\times\frac{5}{2}$.
8. $\frac{3}{9}\times\frac{15}{5}\times\frac{7}{1}$.
9. $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}}$
10. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}$

2.1.5 Problèmes et exercices

Exercice. *Calculer*

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

Exercice (semi produit de Wallis)**.** *Calculer la fraction.*

$$\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}$$

Problème. *Soit $\mathscr{L}$ un losange, on effectue un agrandissement de rapport $\frac{7}{3}$, puis 6 successivement. Ensuite, on le réduit de $\frac{3}{5}$ et enfin de $\frac{1}{2}$. Montrer que le losange a été agrandi avec un rapport égale à $\frac{283}{30}$.*

Projet de recherche (irrationalité de $\sqrt{2}$)**.** *Un nombre est rationnel s'il s'écrit sous la forme d'une fraction, sinon on dit qu'il est irrationnel. Ce sujet consiste à démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ en exploitant un raisonnement par l'absurde et les éléments d'arithmétiques.*

2.1.6 Activités informatiques

Sujet (fractions continues)**.** *Ce sujet consiste à approximer un irrationnel avec les fractions continues sur un tableau.*

1. *Entrer la formule* `sqrt(2)` *en cellule* `A1`.

Devoir maison

Examen

2.2 Cosinus

Dans un triangle rectangle, le théorème de Pythagore fournit une égalité permettant d'apprécier la valeur de ses longueurs. Toutefois, il reste intéressant d'apprécier ses angles surtout celles qui ne valent pas 90^o. Pythagore n'offre pas d'outil pour ce sujet, mais il n'en est rien car l'étude d'un angle couvre l'étude des autres.

Le but de ce chapitre est de saisir la manière d'obtenir la valeur d'un angle et la fonction qui la détermine.

2.2.1 Introduction

Une activité introductive à ce chapitre vaut le détoure avec *Geogebra*. Soit a un nombre compris entre -1 et 1. On pose sur le plan les points $A = (0,0)$, $B = (a,0)$ et $C = (a, \sqrt{1-a^2})$. On note ABC le triangle rectangle en B avec $\widehat{BAC} = \alpha$ un nombre positif plus petit que 180^o. On définie un point du plan $P = (\alpha, \frac{AB}{AC})$.

En faisant varier a, le déplacement du point P décrit une « oscillation ». Avec ce mouvement, la seconde coordonnée de P est étroitement liée à la valeur de α. Cette seconde coordonnée est notée $\cos(\alpha)$, en référence avec le lien qu'elle possède avec α, et elle se lit « cosinus de alpha ».

dessin

Pour en savoir davantage sur cette modélisation, le lecteur intéressé gagnera en compréhension en accédant au lien qui suit.

`https://mathlets.org/mathlets/trigonometric-id/`

2.2.2 Définition

Définition. *Le cosinus d'un nombre α est le rapport entre le côté adjacent et l'hypoténuse situé à l'angle α dans un triangle rectangle.*
Ce rapport est noté $\cos(\alpha)$.

Cette quantité se comprend comme le calcul de l'angle α.

Exemple. *On peut citer* $\cos(0) = 1$ *ou encore* $\cos(1) \simeq 0.999$.

dessin

Notons que la valeur de l'angle dépend de l'unité auquel on l'associe.

tableau de relation entre angle en radian et angle en degré.

Le mouvement d'oscillation de cosinus offre une merveille mathématique dans la modélisation des phénomènes périodiques comme les ondes sonores ou lumineuses ou encore les variations de température au cours de l'année.

2.2.3 Construction des angles élémentaires

A partir de cette définition, il est possible de définir d'autre fonction.

Propriété. *Soient a, b des nombres quelconques, alors*

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

Propriété (loi des cosinus)**.** *Soient ABC un triangle quelconques avec $a = BC, b = AC, c = BA$ trois nombres, alors*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{BCA})$$

2.2.4 Utilisation du cosinus

Méthode (Calculer le cosinus d'un angle)**.** *Il s'agit d'appliquer la définition.*

Ce qu'il faut avoir. *Un triangle ABC rectangle en B et $\alpha = \widehat{BAC}$*

Ce qu'il faut faire.

1. *Repérer a la longueur du côté adjacent à α dans ABC.*
2. *Repérer h la longueur de l'hypoténuse dans ABC.*
3. *Calculer $x = \frac{a}{h}$.*

Ce qu'il faut dire. *On conclut que $\cos(\alpha) = x$.*

Méthode (Calculer l'angle)**.** *Il s'agit d'appliquer la réciproque de la fonction cosinus.*

Ce qu'il faut avoir. *Un triangle ABC rectangle en B et $\alpha = \widehat{BAC}$*

Ce qu'il faut faire.

1. *Repérer a la longueur du côté adjacent à α dans ABC.*
2. *Repérer h la longueur de l'hypoténuse dans ABC.*
3. *Calculer $x = \arccos\left(\frac{a}{h}\right)$.*

Ce qu'il faut dire. *On conclut que $\alpha = x$.*

Méthode (Calculer une longueur)**.** *On dispose de deux outils suivant les éléments à disposition. L'approche la plus naturelle concerne le cas où l'on connait uniquement les longueurs et seulement dans ce cas, utiliser le théorème de Pythagore est très pertinent. Une deuxième approche concerne le cas où l'on connait un angle et quelques longueurs et seulement dans ce cas, on utilise la définition de cosinus.*

Ce qu'il faut avoir. *Un triangle ABC rectangle en B et $\alpha = \widehat{BAC}$. A priori, on connaît les valeurs de α et a la longueur du côté adjacent à α dans ABC.*

Ce qu'il faut faire.

1. *Repérer a.*
2. *Calculer $x = \frac{a}{\cos(\alpha)}$.*

Ce qu'il faut dire. *On conclut que la longueur de l'hypoténuse vaut $h = x$.*

2.2.5 Problèmes et exercices

Projet de recherche.

2.2.6 Activités informatiques

Sujet.

Devoir maison

Examen

2.3 Fonctions

L'étude du coefficient de proportionnalité dans un tableau de proportionnalité permet d'obtenir une relation entre les nombres.

2.3.1 Introduction

Étant donné un tableau de proportionnalité entre le prix (en xpf) et la superficie de quelques terrains (en m^2) sur Moorea.

Superficie (en m^2)	190	240	300	450	500
Prix (en cfp)	76 000	96 000	120 000	180 000	200 000

TABLEAU. Représentation de la valeur d'un terrain suivant sa superficie sur Moorea.

Il est évident que 400 décrit le coefficient de proportionnalité de ce tableau. En particulier, cela le prix est égale à la superficie multipliée par 400. En représentant ces chiffres sur le plan, où le prix est en abscisse et la superficie en ordonnée, on obtient une droite qui permet d'anticiper le prix du terrain suivant n'importe quelle superficie.

Donner un graphique.

La manière dont cette courbe a été obtenue illustre le fait qu'en partant de la superficie, on obtient son prix suivant un calcul donné : c'est la notion de fonction. Cette courbe offre une illustration visuelle du comportement du prix en fonction de la superficie ; en d'autre terme, le problème est exhaustivement cerné. Ceci constitue la raison d'être de ce chapitre : les fonctions permettent la modélisation de problème. on obtient « une machine ».

Une autre activité introductive intéressante est proposée dans *Brilliant.org* :

`https://brilliant.org/courses/graphing-and-modeling/`

2.3.2 Définition

Une définition empirique de fonction est que chaque nombre est obtenu par « une démarche » donnée suivant un nombre proposé. Ceci donne aussi l'image qu'une fonction joue le rôle d'une « machine » en transformant un nombre en un nouveau ; mais formellement

Définition. *Une fonction f définie sur un ensemble E à valeurs dans F est un objet f qui associe chaque élément x dans I un unique élément y dans F. Formellement, on le note*

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

On dira alors que

— *x est l'antécédent de y par f.*
— *y est l'image de x par f.*

Exemple. *On peut citer $x \mapsto \cos(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.*

Méthode (Représenter graphiquement une fonction f)**.**

2.3.3 Représentation graphique

Définition. *Le graphe d'une fonction $f : E \to F$ est l'ensemble des points $(x, f(x))$ avec $x \in E$.*

2.3.4 Propriétés

2.3.5 Problèmes et exercices

Propriété (point d'équilibre)**.**

Projet de recherche (théorie du consommateur)**.**

2.3.6 Activités informatiques

Sujet.

Devoir maison

Examen

2.4 Triangles semblables

Nous connaissons un certain nombre de famille de triangle : les triangles rectangles, les triangles isocèles, les triangles équilatéraux, etc. Suivant sa présentation, l'étude d'un triangle peut être réduit suivant des critères bien définies. S'ensuit une classification des triangles qui permet de les reconnaître; on les appelle les triangles semblables.

2.4.1 Introduction

Étant donné un triangle ABA_1 rectangle en A avec $AB = AA_1 = 1$. On construit un triangle BA_1A_2 avec $A_2A_1 = 1$ et $BA_1 \perp A_2A_1$. De la même manière, pour chaque entier n, on construit successivement des triangles BA_nA_{n+1} avec $A_{n+1}A_n = 1$ et $BA_n \perp A_{n+1}A_n$ sur l'hypoténuse de chaque triangle.

Schéma escargot de Pythagore.

De cette manière, tous les triangles construis sont de la même forme.

2.4.2 Définition

Définition. *Deux triangles $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont semblables si chaque angle sont deux à deux identiques.*

Méthode (Montrer que deux triangles sont égaux). *Il s'agit d'identifier les angles.*

Ce qu'il faut faire.

1. *Lister les angles des deux triangles.*
2. *Identifier la valeur de chaque angle.*

Deux cas se présentent :

— *si trois angles sont identiques alors les triangles sont semblables.*

— *si au moins un angle est différent alors les triangles ne sont pas semblables.*

2.4.3 Propriétés

Propriété. *Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont semblables alors*

1. *les longueurs des côtés opposés aux angles de même mesure sont proportionnelles.*
2. *l'un est un agrandissement de l'autre.*

Propriété. *Si chaque longueur des côtés de deux triangles est proportionnelle alors ces triangles sont semblables.*

2.4.4 Problèmes et exercices

Projet de recherche.

2.4.5 Activités informatiques

Sujet.

Devoir maison

Examen

2.5 Trigonométrie

Dans un triangle rectangle, l'étude d'un angle à été saisi en regardant ses côtés. De la même manière, il est possible de définir les autres angles de ce triangle.

Le but de ce chapitre est de saisir la manière d'obtenir la valeur d'un angle et la fonction qui la détermine.

2.5.1 Introduction

Une activité introductive à ce chapitre vaut le détoure avec *Geogebra*. Soit a un nombre compris entre -1 et 1. On pose sur le plan les points $A = (0,0)$, $B = (a,0)$ et $C = (a, \sqrt{1-a^2})$. On note ABC le triangle rectangle en B avec $\widehat{BAC} = \alpha$ un nombre positif plus petit que 180^o. On définie un point du plan $P = (\alpha, \frac{AB}{AC})$.

En faisant varier a, le déplacement du point P décrit une « oscillation ». Avec ce mouvement, la seconde coordonnée de P est étroitement liée à la valeur de α. Cette seconde coordonnée est notée $\cos(\alpha)$, en référence avec le lien qu'elle possède avec α, et elle se lit « cosinus de alpha ».

dessin

Pour en savoir davantage sur cette modélisation, le lecteur intéressé gagnera en compréhension en accédant au lien qui suit.

Lien brilliant.

2.5.2 Définition

Définition. *Le cosinus d'un nombre* α *est définie comme le rapport entre le côté adjacent et l'hypoténuse. Cette quantité se note* $\cos(\alpha)$.
Le sinus d'un nombre α *est définie comme le rapport entre le côté opposé et l'hypoténuse. Cette quantité se note* $\sin(\alpha)$. *La tangente d'un nombre* α *est définie comme le rapport entre le côté opposé et le côté adjacente. Cette quantité se note* $\tan(\alpha)$.

soh cah toa

2.5.3 Relations trigonométriques

Propriété. *Soient* a, b *deux nombres alors*

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
2. $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$

Tableau de relation entre sinus, cosinus et tangente.

2.5.4 Applications

Méthode (Calcul d'angle).

Méthode (Calcul trigonométrique).

Méthode (Calcul de longueur).

2.5.5 Problèmes et exercices

Projet de recherche.

2.5.6 Activités informatiques

Sujet.

Devoir maison

Examen

2.6 Nombres premiers

L'importance des nombres premiers est cerné dans la représentation unique de tout entier comme le produit de nombre premier.

2.6.1 Introduction

2.6.2 Rappels

On rappelle qu'un nombre premier est un entier admettant 1 et lui-même comme diviseur. Par convention, on notera que 1 n'est pas premier.

2.6.3 Décomposition en facteurs premiers

Théorème. *Tout entier non nul et différent de 1 peut être écrit de manière unique comme produit de nombre premier.*

2.6.4 Fractions irréductibles

Méthode (Irréductibilité d'une fraction)**.**

2.6.5 Problèmes et exercices

Projet de recherche.

2.6.6 Activités informatiques

Sujet.

Devoir maison

Examen

2.7 Réciproque de Thalès

2.7.1 Introduction

Étant donné deux triangles semblables, le théorème de Thalès garanti le calcul de ses longueurs. Toutefois, une question est de savoir si sa réciproque est vraie.

2.7.2 Rappels

Définition. *On dit que d et d' sont parallèles si d et d' ne se croisent jamais.*

Théorème (Thalès)**.**

Illustration.

2.7.3 Réciproque du théorème de Thalès

Théorème (réciproque de Thalès)**.**

Illustration.

2.7.4 Problèmes et exercices

Projet de recherche.

2.7.5 Activités informatiques

Sujet.

Devoir maison

Examen

Chapitre 3

Troisième trimestre

3.1 Statistiques

3.1.1 Introduction

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	0	1	0	0	2	3	7	2	0	1	0

TABLEAU. Notes d'un examen d'une classe de collège.

Inflation du Vénézuela.

3.1.2 Définition

Définition. *On appelle*

- *effectif*
- *moyenne*
- *fréquence*

3.1.3 Représentation des données

3.1.4 Problèmes et exercices

Projet de recherche.

3.1.5 Activités informatiques

Sujet.

Devoir maison

Examen

3.2 Problèmes de géométrie

3.2.1 Longueurs et angles

3.2.2 Superficie

3.2.3 Modélisation

3.2.4 Problèmes et exercices

Projet de recherche.

3.2.5 Activités informatiques

Sujet.

Devoir maison

Examen

3.3 Fonction linéaire et affine

3.3.1 Introduction

Proportionnalité en physique $u = ri$.

3.3.2 Définition

Définition. *On appelle fonction affine toute fonction de la forme* $x \mapsto ax + b$.
On appelle fonction linéaire toute fonction de la forme $x \mapsto ax$.

Naturellement, toute fonction linéaire est affine. La réciproque n'est pas vraie.

patate avec affine et linéaire.

3.3.3 Propriétés

3.3.4 Utilisation

3.3.5 Problèmes et exercices

Problème (point d'équilibre)**.**

Projet de recherche (théorie du consommateur)**.**

3.3.6 Activités informatiques

Sujet.

Devoir maison

Examen

3.4 Calcul littéral

3.4.1 Problèmes et exercices

Problème (point d'équilibre)**.**

Projet de recherche (théorie du consommateur)**.**

3.4.2 Activités informatiques

Sujet.

Devoir maison

3.5 Probabilités

3.5.1 Introduction

Pile ou face.

Tir à l'arc.

3.5.2 Définitions

Définition. *On appelle*

- — *expérience aléatoire toute expérience qui dépend du hasard.*
- — *événement toute possibilité sortant de l'expérience.*
- — *probabilité d'un événement le nombre désignant la réalisation que cette événement se réalise.*

3.5.3 Théorie des ensembles

Diagramme de Venn.

3.5.4 Modélisation

3.5.5 Problèmes et exercices

3.5.6 Activités informatiques

Sujet.

Devoir maison

3.6 Solide de l'espace

3.6.1 Introduction

3.6.2 Définition

3.6.3 Propriétés

3.6.4 Problèmes et exercices

3.6.5 Activités informatiques

Sujet.

Devoir maison

Chapitre 4

Complément : Calcul mental

Ce chapitre complémentaire rassemble des techniques intéressantes pour le calcul mental. Il regroupe une myriade de méthode :

- méthode de Trachtenberg.
- Multiplication par jalousie.
- Multiplication par glissement, etc.

4.1 Multiplication entre entiers inférieur strictement à 100

4.2 Multiplication entre entiers inférieur strictement à 10 000

4.3 Multiplication avec petits entiers