Mathématiques élémentaires
3ème

Haerearii Metuarea

https://hmetuarea.github.io/

Table des matières

Introduction

Ce cours de mathématiques de 3ème est basé sur la progression des cours du collège de Pao-pao. Les notions sont introduites de manière concise pour laisser la place à la résolution d'exercice et de problème. Un accent est mis sur le thème de la biologie qui, fidèlement aux exigences du programme officiel, permet de concerner le public aux enjeux climatiques actuels.

Formellement aux exigences du ministère et des inspecteurs, la recherche est la compétence majeure qui couvre la résolution de problème.

Chapitre 1

Premier trimestre

Entre arithmétiques et transformation géométrique, ce chapitre fait l'objet de rappel et a pour objectif de faire le point sur les acquis de l'an dernier.

1.1 Nombres premiers

Certains entiers peuvent avoir plusieurs diviseurs à la fois et d'autre en ont un seul. Ces derniers possèdent des propriétés saisissantes qui ont la particularité de décrire un entier.

1.1.1 Définition

Définition. *Un entier a est premier si les seuls diviseurs de a sont* 1 *et a*.

Exemple. *On peut citer* $1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ *ou encore* 19.

Exemple. *On peut citer*

— 4 *n'est pas premier puisque* $4 = 2 \times 2$.

— 6 *n'est pas premier puisque* $6 = 3 \times 2$.

— 20 *n'est pas premier puisque* $20 = 2 \times 10$ *et* $20 = 2 \times 2 \times 5$.

Par comparaison, la notion de nombre premier revient à la notion de couleur primaire. Le vert est issue de la couleur bleu et jaune mais ces derniers sont issues d'aucune autre couleur ; ce sont des couleurs primaires. De même pour les entiers, 6 admet comme diviseur 3 et 2, sans compter 1 et 6, mais ces derniers admettent pas d'autre diviseur qu'eux mêmes.

1.1.2 Décomposition en facteurs premiers

L'intérêt fondamental des nombres premiers réside dans la propriété suivante.

Propriété (admise)**.** *Tout entier se décompose en produit de nombre premier.*

Exemple. *On peut citer*

— $6 = 2 \times 3$

— $10 = 2 \times 5$

— $30 = 2 \times 3 \times 5$

Il faut garder en mémoire qu'une telle décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. C'est pourquoi, dorénavant, on admettra que 1 n'est pas un nombre premier dans ce cours. Et c'est d'ailleurs pour cette raison qu'on évitera d'écrire les décompositions « idiotes » du type $10 = 1 \times 2 \times 5$ car on peut aussi bien écrire une telle décomposition de cette forme $10 = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5$.

Exemple. *On peut citer*

1. $10 = 2 \times 5$
2. $100 = 2^2 \times 5^2$
3. $645 = 3 \times 5 \times 43$

En pratique, en décompose en produit d'entier et la décomposition s'arrêtera une fois que tous les facteurs seront premiers.

1.1.3 Le crible d'Eratosthène

On dispose d'un algorithme présentant tous les nombres premiers inférieur à un nombre fixé.

Méthode (Crible d'Eratosthène)**.** *Le crible suit la démarche suivante*
ENTREE *: un entier a.*
SORTIE *: la liste des nombres premiers inférieurs ou égale à a.*

1. *écrire la liste des nombres entre* 1 *et a.*
2. *pour k allant de* 1 *à a :*
3. *si k n'est pas barré alors :*
4. *barrer tous les multiples de k.*
5. *si k est barré alors :*
6. *ne rien faire.*

Exemple. *La liste des nombres premiers entre 1 et 10 est*

$$1, 2, 3, 5, 7$$

Examen

1.2 Réduction et agrandissement géométrique

On conçoit que les objets comportent des similitudes. Ils sont identiques par leur forme mais différentes dans leur taille par exemple. Ce sujet traite des objets géométriques ayant subit des réductions ou des agrandissements.

Le contexte place la leçon dans le plan et l'espace.

1.2.1 Définition

Définition. *On dit qu'une figure (ou un solide) est*

1. *agrandie si ses longueurs sont multipliées par un nombre $k > 1$.*
2. *réduite si ses longueurs sont multipliées par un nombre $0 < k < 1$.*

Si tel est le cas, k est appelé le rapport.

Notons que le cas $k = 1$ n'est rien d'autre qu'une reproduction de la figure.

Exemple. *On peut citer DFE l'agrandissement du triangle ABC dans 1.1.*

Naturellement, on peut passer d'une figure à une autre en regardant leur longueur en fonction d'un coefficient ; c'est formellement le coefficient de proportionnalité. Ainsi, il s'agit ici d'une application de la proportionnalité et ce coefficient est exactement le rapport.

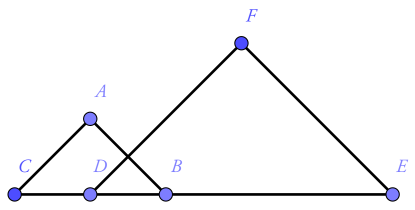


FIGURE 1.1 – Agrandissement et réduction de deux triangles.

1.2.2 Propriétés

Le fait d'agrandir ou de réduire une figure (resp. un solide) a des conséquences non négligeable puisqu'il garanti certaines propriétés sur cette figure (resp. un solide).

Propriété (admise)**.** *De toute figure du plan (ou un solide de l'espace) alors son agrandissement ou sa réduction provoquent les effets qui suivent*

1. *les angles ne changent pas.*
2. *l'aire de la figure réduite (ou augmentée) est égale à l'aire de la figure de départ multipliée par* k^2*.*
3. *le volume du solide réduit (ou augmenté) est égale au volume du solide de départ multiplié par* k^3*.*

Pour les angles, cela signifie que la construction de la figure réduite (ou agrandie) garde les mêmes angles que la figure de départ.

Exemple. *Toute réduction ou agrandissement d'un triangle équilatéral est toujours équilatéral et les angles sont identiques au triangle de départ.*

On profite de ce résultat pour rappeler quelques formules d'aire (voir 1.2) et de volume (voir 1.3).

Figure	Formules
Carré de côté c	c^2
Rectangle de longueur l et de largeur L	$l \times L$
Triangle de hauteur h et de base b	$\frac{b \times h}{2}$
Cercle de rayon r	$\pi \times r^2$

FIGURE 1.2 – Table de quelques formules d'aires de figures.

Examen

1.3 Homothétie

Rappelons que pour réduire ou agrandir un terrain ou une pièce d'une maison, il était nécessaire de multiplier chaque longueur par un nombre. Géométriquement, on transforme la figure sur ses longueurs et cette transformation géométrique porte le nom de homothétie.

Solide	Formules
Cube de côté c	c^3
Pavé de hauteur h, longueur l et de largeur L	$h \times l \times L$
Sphère de rayon r	$\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$
Pyramide de hauteur h et d'aire de base $\mathscr{B}$	$\frac{1}{3} \times h \times \mathscr{B}$
Cylindre de hauteur h et d'aire de base $\mathscr{B}$	$h \times \mathscr{B}$
Cône de hauteur h et d'aire de base $\mathscr{B}$	$\frac{1}{3} \times h \times \mathscr{B}$

FIGURE 1.3 – Table de quelques formules de volume de solides.

Pour ce chapitre, on favorisera la manipulation géométrique de cette transformation à travers la géométrie du plan.

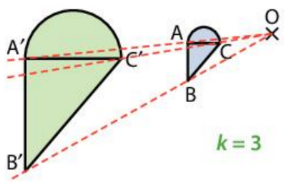
1.3.1 Définition

Définition. *On appelle homothétie de centre O et de rapport* $k > 0$ *d'une figure une transformation géométrique qui agrandie ou réduit cette figure. Précisément, une homothétie*

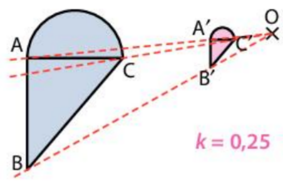
- *agrandie une figure si* $k > 1$ *ou* $-1 > k$.
- *réduit une figure si* $1 > k > 0$ *ou* $0 > k > -1$.

On appelera O le centre d'homothétie.

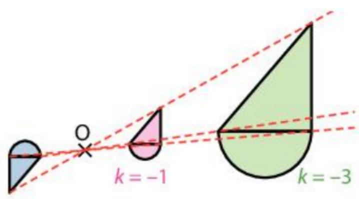
Notons que le cas où le rapport k est négatif est particulier puisque l'homothétie effectue une symétrie dite centrale par rapport au centre d'homothétie.



Agrandissement



Réduction



Symétrie centrale

FIGURE 1.4 – Illustrations géométriques des cas de figure d'une homothétie tirées de [2].

On notera que le centre d'une homothétie d'une figure se situe exactement à l'intersection de toutes les droites qui passent par ses sommets. Construire l'homothétie d'une figure consiste donc à reproduire une figure suivant les droites passant par ses points et le centre d'homothétie.

Méthode (Construire l'homothétie d'une figure). *Il s'agit de la construction géométrique « à la main ». Il est donc naturel de se munir d'une règle graduée et d'un crayon.*

Ce qu'il faut avoir. *Un point O dans le plan et un rapport k.*

Ce qu'il faut faire. *On fait*

1. *A chaque sommets, tracer une droite qui relie chaque point au centre d'homothétie.*
2. *À l'aide d'une règle, mesurer la distance entre chaque sommet de la figure et le centre d'homothétie.*
3. *Multiplier chacune des distances par le rapport d'homothétie.*
4. *En allant du bon côté du centre d'homothétie, marquer les distances obtenues sur les segments de droite respectifs.*
5. *Rejoindre les sommets images correspondants afin de reconstituer la figure image.*

1.3.2 Conséquences

Les figures obtenues par homothétie contiennent des traits particuliers sur leur longueur, leur forme, leur mesure et leur alignement.

Propriété (admise). *On a*

1. *Les longueurs d'une figure obtenue par homothétie de rapport k sont multipliées par k.*
2. *La forme d'une figure avant et après homothétie sont identiques.*
3. *Les mesures des angles et alignements d'une figure avant et après homothétie sont identiques.*

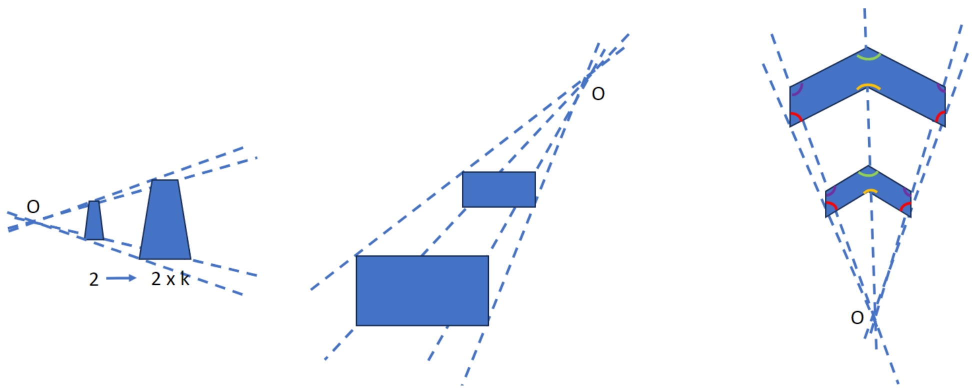


FIGURE 1.5 – Illustration des cas de figure de la propriété.

Examen

Chapitre 2

Second trimestre

Ce trimestre s'inscrit dans la continuité du précédent. Une grande diversité de sujets sont traités conjuguant géométrie et algèbre.

2.1 Puissances

La valeur exacte de certain nombre très grand nécessite une révision de leur écriture dont les puissances en est une plus favorable.

2.1.1 Définition

Soient a un entier positif non nul et n un entier relatif.

Définition. *On appelle puissance de a par n la quantité définie par*

$$\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Ce nombre est noté a^n et se lit « a puissance n ». Dans cette écriture,

— *a est appelé la base.*

— *n est appelé l'exposant.*

Exemple. *On peut citer*

$$2^{64} = 18446744073709551616$$

On adoptera les conventions $a^1 = a$ et si a est non nul alors $a^0 = 1$. Suivant le signe de l'exposant n, on observe pour $a \neq 0$ par définition

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Notons d'ailleurs que les quantités $(-a)^n$ et $-a^n$ ne sont pas égales en général.

$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{n \text{ fois}}$$

Pour $(-a)^n$, les parenthèses ont leurs importances ici car elle est souvent confondu par $-a^n$ où

$$-a^n = -\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Donnons un contre-exemple pour démontrer que $(-a)^n \neq -a^n$.

Contre-exemple. *On pose $a = 3$ et $n = 6$:*

— $(-3)^6 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 729$

— $-3^6 = -3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = -729$

D'où $(-3)^6 \neq -3^6$.

De ce fait, une nouvelle règles opératoires s'ajoute. Dorénavant, le calcul d'une expression littéral s'effectue dans l'ordre qui suit :

— les puissances.

— la multiplication et la division.

— l'addition et la soustraction.

Exemple. *Calculons $A = 1 + 10 \times 3^2$.*

1. *On commence par la puissance $3^2 = 9$ alors*
$$A = 1 + 10 \times 9$$
2. *On continue par la multiplication $10 \times 9 = 90$ alors*
$$A = 1 + 90$$
3. *On termine par la somme $1 + 90 = 91$ alors*
$$A = 91$$

Naturellement, la manipulation des puissances dont l'exposant est petit n'a absolument aucun intérêt calculatoire ; une calculatrice pourrait le faire. En revanche, quand l'exposant est très grand alors on atteint les limites de certaine machine (calculatrice ou encore ordinateur). C'est pourquoi le calcul « à la main » sera le plus favorisé.

2.1.2 Opérations algébriques sur les exposants

Les puissances sont très souvent multipliées et leur calcul est grandement facilité en manipulant leur exposant.

Propriété. *Soient a, b deux nombres non nul, n, m deux entiers non nuls, alors*

1. $a^n b^n = (ab)^n$
2. $a^n a^m = a^{n+m}$ *(somme)*
3. $(a^n)^m = a^{n \times m}$ *(produit)*
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$ *(quotient)*

Démonstration. Évident par définition. □

Exemple. *On peut citer*

— $10^4 \times 8^4 = (10 \times 8)^4 = 80^4$.

— $3^5 \times 3^{10} = 3^{5+10} = 3^{15}$.

— $(12^3)^{10} = 12^{3 \times 10} = 12^{30}$.

— $\frac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$.

En revanche, pour $10^4 \times 8^2$ on ne peut rien faire car les exposants sont différents. Idem pour $10^8 \times 123^2$ et $15789^{123456789} \times 123^2$.

2.1.3 Notation scientifique

Suivant la grandeur d'un nombre, son écriture n'est pas toujours satisfaisante. C'est pourquoi on dispose d'une écriture plus commode préservant leur comparaison.

Définition. *On appelle notation scientifique d'un nombre décimal A toute écriture de A de la forme*

$$A = a \times 10^n$$

avec $-10 < a < 10$ *décimal non nul et n un nombre relatif.*

Certains ouvrages privilégient le terme « écriture » scientifique plutôt que « notation » scientifique ; il s'agit de deux termes signifiants la même chose.

Exemple. *On peut citer :*

— $1.2 = 1.2 \times 10^0$.

— $123456 = 1.23456 \times 10^5$.

— $2.3 \times 10^5 \times 10^{-90} = 2.3 \times 10^{-85}$

— $299000000 \times 10^5 = 2.99 \times 10^{13}$.

En revanche, pour 98000, 98×10^3 *n'est pas sa notation scientifique car* $98 > 10$. *De même pour* 123456, 123.456×10^3 *puisque* $123.456 > 10$ *et pour* 5.123, 5123×10^{-3} *car* $5123 > 10$.

En d'autre terme, pour anticiper le signe de l'exposant de la puissance de 10 dans une notation scientifique :

— n est positif si la virgule progresse vers la gauche.

— n est négatif si la virgule progresse vers la droite.

Examen

2.2 Nombres rationnels

Les nombres rationnels représentent une grande diversité de quantité que l'on retrouve dans plusieurs domaines : les parts ou encore les pourcentages. Une raison d'être des nombres rationnels est leur capacité à partager des mesures, des proportions, des figures semblables ou encore des probabilités.

2.2.1 Définition

Définition. *On dit qu'un nombre a est rationnel si a s'écrit sous la forme fractionnaire*

$$a = \frac{p}{q}$$

avec p, q deux entiers où $q \neq 0$. *Si tel est le cas, on appellera*

— *p le numérateur.*

— *q le dénominateur.*

En particulier, ce sont des nombres formés par le quotient de deux nombres relatifs. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$ et admet une structure algébrique additive identique à nombre relatif avec une « quantité » infinie de nombre.

Exemple. *On peut citer :*

— $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{100}$ *ou encore* $\frac{1}{12345}$ *; en général avec* $n \in \mathbb{Z}$. *(fractions unitaires)*

$$\frac{1}{n}$$

— $\frac{5}{10}$, $\frac{123}{100}$ *ou encore* $\frac{98765}{10000}$ *; en général avec* $n \in \mathbb{Z}$ *et* a *un nombre.* *(fractions décimales)*

$$\frac{a}{10^n}$$

— $\frac{5}{2}$, $\frac{888}{256}$ *ou encore* $\frac{98563}{16}$ *; en général avec* $n \in \mathbb{Z}$ *et* a *un nombre.* *(fractions dyadiques)*

$$\frac{a}{2^n}$$

Notons que tout rationnel de $\mathbb{Q}$ de la forme $\frac{p}{q}$ admet

— un inverse de la forme $\frac{q}{p}$

— un opposé de la forme $-\frac{p}{q}$

Exemple. *Pour* $\frac{7}{8}$*, son inverse est* $\frac{8}{7}$ *et son opposé est* $-\frac{7}{8}$.

Notons que la division par un nombre nul n'existe pas ; il s'agit formellement du cas pour $q = 0$. On retiendra accessoirement que pour tout nombre a, on a la relation $a = \frac{a}{1}$; de même, pour $a \neq 0$, $\frac{a}{a} = 1$.

A ce niveau, l'utilisation de la géométrie est très avantageuse pour comprendre les fractions. Elles représentent une portion d'aire de figure géométrique ou encore d'une longueur d'un côté d'un polygone. En particulier, manipuler des nombres rationnels c'est faire de la géométrie. On pourra se rapprocher du livre II de [3] pour des illustrations.

2.2.2 Relations d'ordre

Tout nombre rationnel s'écrit comme une fraction ainsi, pour les comparer, on peut naïvement calculer leur valeur. A la calculatrice, cette démarche a des limites pour $\frac{123456789}{987654321}$ et $\frac{123456789}{987654322}$ par exemple on constate que

$$\frac{123456789}{987654321} \simeq 0.124999998 \text{ et } \frac{123456789}{987654322} \simeq 0.124999998$$

La comparaison à travers leur décimal nous fera croire qu'ils sont égaux alors que non. Une approche plus astucieuse pour les comparer, sans recourir aux machines, est les règles de comparaison.

Propriété. *Soient* a, b, c, d *quatre nombres avec* $b, d \neq 0$.

1. *si* $b, d > 0$ *alors*
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < cb$$
2. *si* $b > 0$ *et* $d < 0$ *(ou* $b < 0$ *et* $d > 0$*) alors*
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad > cb$$

En particulier, en multipliant ou en divisant par un nombre non nul positif le sens de l'inégalité ne change pas. Intuitivement, on peut passer d'une comparaison entre des proportions à une comparaison entre des aires ; et réciproquement.

Exemple. *On peut citer*

— $\frac{1}{2} < 1$ *car* $1 < 2$.

— $\frac{1}{205} < \frac{6}{5} = \frac{6}{1230}$ *car* $5 \times 6 < 1230 \times 6$.

— $\frac{123546879}{987654322} < \frac{123546879}{987654321}$ *car* $987654321 < 987654322$.

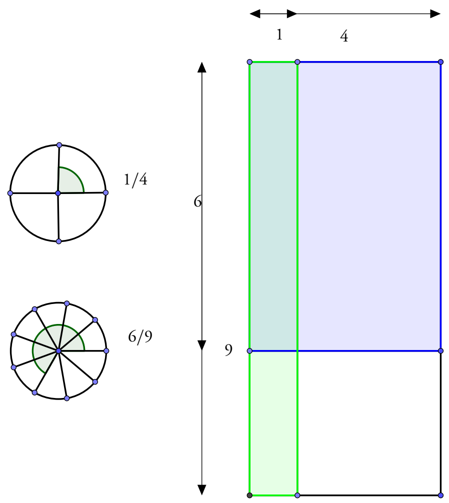


FIGURE 2.1 – Comparaison géométrique de $\frac{1}{4}$ et $\frac{6}{9}$.

2.2.3 Arithmétique des rationnels

La structure des nombres rationnels est analogue à celui des nombres relatifs. On peut construire de nouveau rationnel moyennant les opérations usuelles telles que l'addition et la multiplication.

Propriété. *Soient a, b, c quatre nombres avec $b \neq 0$, alors*

1. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$. *(produit)*
2. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$. *(division)*
3. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$. *(addition)*
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$. *(addition - cas général)*

Démonstration. Évident. □

En général, l'égalité $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ n'est absolument pas vraie ! On peut s'en convaincre en comparant $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = 1.1$ et $\frac{1+3}{2+5} = \frac{4}{7} \simeq 0.57 \neq 1.1$.

Exemple. *On peut citer*

1. $\frac{85}{412} \times \frac{123}{256} = \frac{85 \times 123}{412 \times 256} = \frac{10455}{105472}$
2. $\frac{\frac{12}{34}}{\frac{56}{78}} = \frac{12}{34} \times \frac{78}{56} = \frac{936}{1904}$
3. $\frac{75}{12345} + \frac{98}{12345} = \frac{75+98}{12345} = \frac{173}{12345}$

Géométriquement, calculer $\frac{1}{9} + \frac{3}{4}$ c'est représenter chaque fraction :

— $\frac{1}{9}$ comme le rectangle sectionné en 9 parties avec 1 partie colorée.

— $\frac{3}{4}$ comme le rectangle sectionné en 4 parties avec 3 parties colorées.

Leur somme sera alors le rectangle sectionné en 9×4 parties avec les parties colorées précédemment ajoutées (voir 2.2).

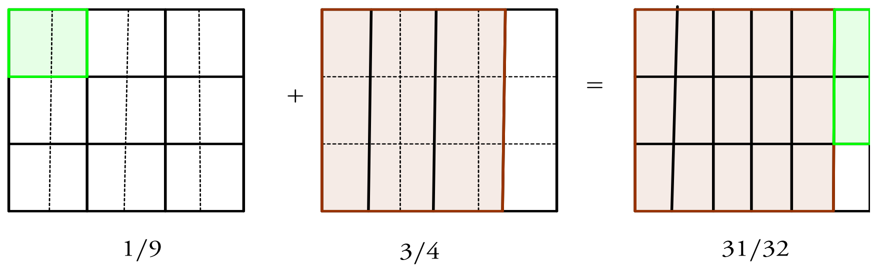


FIGURE 2.2 – Illustration géométrique de la somme de $\frac{1}{9}$ et $\frac{3}{4}$.

2.2.4 Fractions irréductibles

Une application de ce chapitre se distingue dans l'arithmétique à travers la factorisation des entiers.

Définition. *On dit qu'une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si a et b n'ont aucun diviseurs en commun.*

Exemple. *Citons $\frac{11}{2}$ qui est irréductible car 11 et 2 n'ont aucun diviseur commun. Idem pour $\frac{2}{11}$.*

Les fractions irréductibles sont utiles pour le calcul des rationnels puisqu'on ramène le calcul fractionnaire sur des entiers plus simples à traiter. Maintenant, on peut naïvement suivre la démarche suivante.

Méthode (réduire une fraction)**.** *Il suffit de décomposer les entiers en facteur premier et de simplifier au numérateur et dénominateur.*

Exemple. *Citons*

$$\frac{50}{110} = \frac{5^2 \times 2}{11 \times 2 \times 5} = \frac{5}{11}$$

Examen

2.3 Parallélisme

2.3.1 Définition

Rappelons qu'une droite n'est rien d'autre qu'un ensemble de point aligné, en quantité infinie et sans épaisseur.

Définition. *On dit que deux droites d et d' sont parallèles si elles ne s'intersectent pas. Si tel est le cas, on note $d \| d'$.*

Visuellement, il s'agit de deux droites qui ne « se toucheront » jamais.

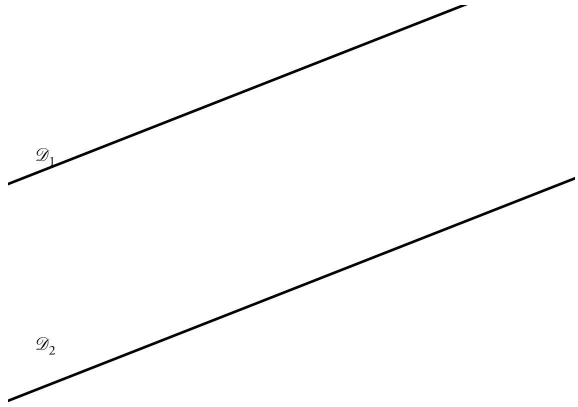


FIGURE 2.3.1 Illustration du parallélisme des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

En convenant que les droites confondues sont parallèles, alors pour toutes droites d, d', d'' on a

— $d \| d$.

— $d \| d' \iff d' \| d$. (symétrie)

— $d \| d'$ et $d' \| d'' \Longrightarrow d \| d''$. (transitivité)

2.3.2 Théorème de Thalès

Une application intéressante des parallélismes intervient dans la géométrie des triangles puisqu'il est possible de quantifier la longueur de ses côtés.

Théorème (Thalès)**.** *Soient un triangle quelconque ABC et deux points P et Q sur les droites respectifs (AB) et (AC). Si*

1. (PQ) et (BC) sont parallèles.

alors

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$

Démonstration. Pour la première égalité, l'homothétie de centre A et de rapport $k = \frac{AP}{AB}$ envoie le point Q vers le point C ; en particulier

$$AQ = \lambda AC$$

On raisonne de la même manière pour la seconde égalité. □

Ce théorème s'applique dans deux configurations géométriques distinctes présentées ci-après. On distingue le premier qui montre le cas d'une homothétie de rapport négatif (le papillon) et l'autre de rapport positif (les triangles emboîtés) voir 2.3.

Bien que court, l'intérêt du chapitre consiste à apprécier les richesses de ce résultat à travers des problèmes de niveau d'abstraction progressif.

Examen

2.4 Équations et inéquations

Nous avons pris connaissance de problèmes mettant en jeu des relations de la forme $ax + b = c$ essentiellement. D'autre cas se modélisent accessoirement avec des relations de la forme

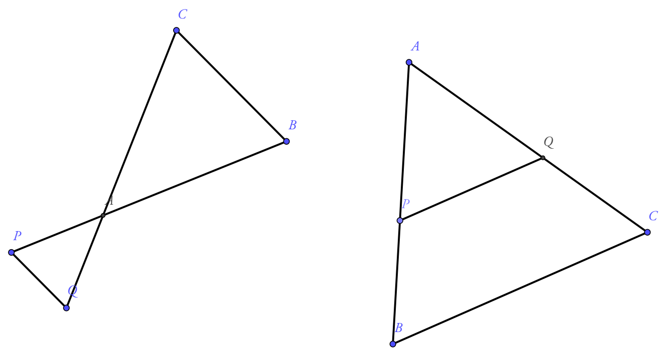


FIGURE 2.3 – Représentation géométrique d'un papillon et de triangles emboités.

$ax^2 + bx + c = 0$, avec les triangles rectangles ou les surfaces par exemples, dont la résolution de certains cas s'obtient en résolvant les équations de la forme $ax + b = c$.

2.4.1 Équations simples

Soit x un nombre quelconque.

Définition. *On appelle équation à une inconnue x toute relation de la forme $ax+b = c$ pour laquelle elle est vérifiée pour certaines valeurs de x.*

Aussi, notons que

— ces égalités peuvent être vues comme des « opérations à trou »

— l'inconnue x est une lettre qui « cache » un nombre qu'on cherche à découvrir.

N'oublions pas que résoudre cette équation c'est **isoler** x. En pratique, dans sa forme générale, résoudre c'est toujours

1. additionner par l'opposé de b.
2. multiplier par l'inverse de a.

Ceci conduit au résultat qui suit.

Propriété. *Soient a, b, c trois nombres avec $a \neq 0$, alors*

$$ax + b = c \Longleftrightarrow x = \frac{c-b}{a}$$

Démonstration. Évident. □

Autrement, et sous certaine condition sur les nombres, notons qu'il est possible de « deviner » la solution (équations diophantiennes). Enfin, ajoutons qu'il est toujours envisageable d'aborder leur résolution numériquement moyennant un tableur.

2.4.2 Équations produits

A présent, nous étudions les équations avec une inconnue où nous pouvons obtenir une ou deux solutions ; sa forme générale étant la suivante $ax^2+bx+c = 0$, avec $a \neq 0$, b, c des nombres. La résolution exhaustive des équations de ce type se verra en Lycée. Ici, nous résolvons celle où l'expression se factorise en produit de deux équations en admettant, en amont, que ses solutions existent et qu'il y en a deux.

Énonçons tout d'abord le résultat qui permet restreindre la résolution d'une équation produit en la résolution de deux équations plus simple.

Propriété (admise)**.** *Soient A, B des nombres alors*

$$A \times B = 0 \Longrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Ce résultat mène au théorème suivant.

Théorème. *Soient x un nombre quelconque et a un nombre non nul positif. On a l'équivalence*

$$(ax+b)(cx+d) = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{a} \text{ ou } x = -\frac{d}{c}$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) On applique la propriété qui restreint l'étude à deux équations $ax+b=0$ et $cx+d=0$. Ensuite, la propriété de la partie 1 donne le résultat attendu.
($\Leftarrow$) Évident par évaluation. □

Exemple. *On peut citer :*

— $x(x+1) = 0$ *admet comme solution 0 et -1.*
— $(4x+1)(8x+7) = 0$ *admet comme solution* $-1/4$ *et* $-7/8$.
— $4x^2 + 4x = 0$ *admet comme solution 0 et -1.*

De ce résultat, une application naturelle est la propriété suivante en admettant que pour tout nombre positif a, $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$.

Corollaire 1. *Soient x un nombre quelconque et a un nombre non nul positif. On a l'équivalence*

$$x^2 = a \Longrightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

Démonstration. Comme a est positif non nul alors

$$x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) = 0$$

□

2.4.3 Inéquations

Terminons ce chapitre sur les inégalités admettant à l'intérieur de leur expression une inconnue.

Définition. *On appelle inéquation d'inconnue x toute inégalité vérifiée pour certaine valeur de x. Les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité est vérifiée sont appelés solution et elles forment un ensemble sous forme d'intervalle.*

Les inéquations rassemblent les inégalités de la forme suivante

Inégalité stricte	:	$ax+b<c$	$ax+b>c$
Inégalité	:	$ax+b\leq c$	$ax+b\geq c$

Contrairement aux équations, les solutions d'une inéquation sont nombreuses. Heureusement, leur résolution est identique à la résolution des équations : on isole x dans une partie de l'inégalité ; de plus

Propriété. *Soit* $ax + b \leq c$ *une inégalité alors*

- *ajouter à gauche et à droite par un nombre ne change pas le sens de l'inégalité.*
- *multiplier à gauche et à droite par un nombre positif ne change pas le sens de l'inégalité.*
- *multiplier à gauche et à droite par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.*

Démonstration. Évident. □

En particulier, il y a des changements sur la multiplication. Multiplier l'inégalité par un nombre positif ne change rien mais si ce nombre est négatif c'est le cas.

Exemple. *On résout* $4x + 0.004 \leq 854$.

1. *on soustrait* 0.004 *dans les deux parties de l'inégalité*
$$4x \leq 854.004$$
2. *on multiplie par l'inverse de* 4 *dans les deux parties de l'inégalité*
$$x \leq \frac{854.004}{4} = 213.50100$$

Donc, l'ensemble des solutions est
$$S =]-\infty, 213.50100]$$

Examen

2.5 Trigonométrie

Dans un triangle rectangle, le théorème de Pythagore fournit une égalité permettant d'apprécier la valeur de ses longueurs. Toutefois, il reste intéressant d'apprécier ses angles surtout celles qui ne valent pas 90^o. Pythagore n'offre pas d'outil pour ce sujet, mais il n'en est rien car l'étude d'un angle couvre l'étude des autres.

Le but de ce chapitre est de saisir la manière d'obtenir la valeur d'un angle et la fonction qui la détermine.

2.5.1 Cosinus

Soit ABC un triangle rectangle en B.

Définition. *On appelle cosinus de l'angle* $\widehat{CAB}$ *le nombre noté* $\cos(\widehat{CAB})$ *définie par*
$$\cos(\widehat{CAB}) = \frac{AB}{AC}$$

Le cosinus d'un angle dans un triangle rectangle ne s'applique pas pour l'angle droite.

Mise en garde. La calculatrice doit être mise en mode « degré » pour calculer correctement le cosinus d'un nombre.

Exemple. *On peut citer* $\cos(0) = 1$ *ou encore* $\cos(1) \simeq 0.999$.

Notons que la valeur de l'angle dépend de l'unité auquel on l'associe. Il existe deux unités pour l'angle,

- l'une mesurant l'angle avec le rapporteur (degré)

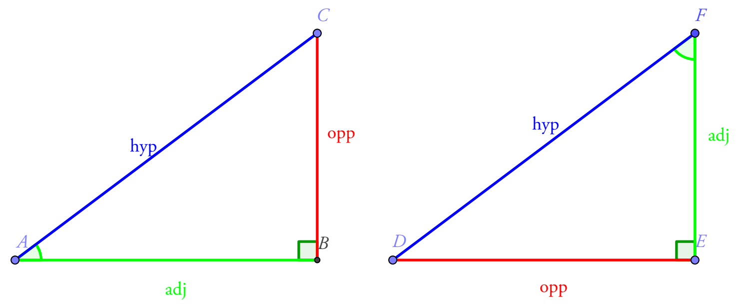


FIGURE 2.4 – Table des triangles rectangles dénotant les côtés adjacents et opposés.

Angle (en degré)	30	45	60	90	120	135	150	180
Angle (en radian)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

FIGURE 2.5 – Relation entre angle en radian et angle en degré.

— l'autre numériquement (radian)

Pour calculer le cosinus, on privilégiera l'angle en degré. Toutefois, le tableau de 2.5 donne les relations entre ces unités.

Propriété (admise)**.** *Soit ABC un triangle rectangle en B, alors le cosinus d'un angle*

1. *n'a aucune unité.*
2. *est compris entre 0 et 1.*

2.5.2 Trigonométrie et applications

Définition. *On appelle*

— *sinus de l'angle $\widehat{CAB}$ le nombre noté $\sin(\widehat{CAB})$ définie par*

$$\sin(\widehat{CAB}) = \frac{BC}{AC}$$

— *tangente de l'angle $\widehat{CAB}$ le nombre noté $\tan(\widehat{CAB})$ définie par*

$$\tan(\widehat{CAB}) = \frac{BC}{AB}$$

Ces formules se mémorisent astucieusement avec la formule « SOH-CAH-TOA » pour

$$\sin(\text{angle}) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos(\text{angle}) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \tan(\text{angle}) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

L'une des richesses géométrique de la trigonométrie réside dans le calcul des longueurs et des angles des triangles.

Méthode (recherche de longueur)**.** *Étant donné ABC un triangle rectangle en B, alors déterminer la longueur d'un de ses côtés dépend des hypothèses que l'on a.*

— *soit on connaît au moins deux longueurs, alors on applique Pythagore.*

— *soit on connaît au moins une longueurs et au moins un angle (excepté l'angle droit), alors on applique les identités trigonométriques.*

Méthode (recherche d'angle)**.** *Étant donné ABC un triangle rectangle en B, alors déterminer la mesure d'un de ses angles (excepté l'angle droit) dépend exclusivement des longueurs que l'on connaît.*

— *soit on connaît l'hypoténuse et le côté opposé alors on applique l'identité avec le sinus.*
— *soit on connaît l'hypoténuse et le côté adjacent alors on applique l'identité avec le cosinus.*
— *soit on connaît les côtés opposé et adjacent alors on applique l'identité avec la tangente.*

En pratique, il s'agit d'identifier correctement les objets géométriques (angle ou côté) dont on connaît les mesures de l'objet géométrique que l'on cherche à calculer.

Examen

2.6 Fonctions

L'étude du coefficient de proportionnalité dans un tableau de proportionnalité permet d'obtenir une relation entre les nombres. Cette relation se généralise naturellement à travers une expression qui dépend du nombre de départ : les fonctions.

Ce chapitre est une généralité sur les fonctions où on restreint leur étude graphiquement en appréciant leur omniprésence.

2.6.1 Définition

Soient E et F deux ensembles de nombres.

Définition. *On appelle fonction f définie sur E à valeurs dans F est un objet qui associe chaque élément de E vers un unique élément de F. Formellement, on le note*

$$\begin{array}{cccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

On dira alors que

— *x est l'antécédent de y par f.*
— *y est l'image de x par f.*

Intuitivement, la fonction qui a un nombre associe un autre nombre c'est « la machine » qui a un nombre « le transforme » à un autre nombre.

Exemple. *On peut citer :*

— *$f : x \mapsto ax$ avec a un nombre.* *(fonction linéaire)*
— *$g : x \mapsto ax + b$ avec a, b deux nombres.* *(fonction affine)*
— *$h : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0, b, c$ trois nombres.* *(fonction du second degré)*

Pour finir, notons que l'antécédent d'une fonction est situé dans l'ensemble de départ tandis que l'image est situé dans l'ensemble d'arrivé.

2.6.2 Représentation graphique

Lors d'une étude de fonction, les fonctions sont moins parlantes algébriquement tandis qu'une approche visuelle est beaucoup plus intéressante.

Définition. *On appelle graphe d'une fonction* $f : E \to F$ *l'ensemble des points de la forme* $(x, f(x))$ *avec* $x \in E$.

Le graphe est géométriquement un ensemble de points. Graphiquement, il s'agit alors de repérer les coordonnées correspondant à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées.

Méthode (Interpolation)**.** *Il s'agit de tracer* f *en se donnant un nombre fini de point.*

1. *Déterminer un nombre fini de point* $(x, f(x))$.
2. *Tracer la représentation graphique de* f.

Exemple. *Soit la fonction* $f : x \mapsto x+1$ *pour* $-2 \leq x \leq 2$. *Pour* $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ *et* $f(-1) = 0$, *les points sont* $(0,1)$, $(1,2)$ *et* $(-1,0)$ *donc son graphe est de la forme présentée dans 2.6.*

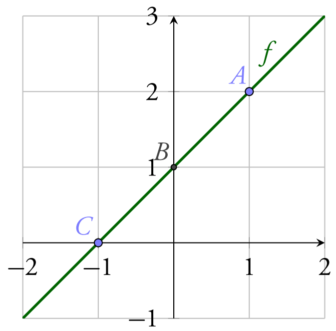


FIGURE 2.6 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto x+1$ sur $[-2, 2]$

Examen

Chapitre 3

Troisième trimestre

Ce dernier volet met un terme à la progression de l'année en traitant l'arithmétique et l'analyse.

3.1 Triangles semblables

Nous connaissons un certain nombre de famille de triangle : les triangles rectangles, les triangles isocèles ou encore les triangles équilatéraux. Suivant ses caractéristiques, son étude peut être réduit suivant des critères bien définies. S'ensuit une classification des triangles qui permet de les reconnaître ; on les appelle les triangles semblables.

3.1.1 Définitions

Définition. *On dit que deux triangles sont*

— *semblables si chaque angle sont deux à deux de même mesure.*

— *égaux si chaque côté sont deux à deux de même longueur.*

Évidemment, si au moins une mesure d'angle (resp. de longueur) entre les deux triangles est différente alors ils ne sont pas semblables (resp. égaux).

Exemple. *Considérons les triangles ABB', DCC', EFG et HIJ comme dans la* **??**, *alors*

— *les triangles ABB' et DCC' sont semblables.*

— *les triangles EFG et HIJ sont égaux.*

3.1.2 Propriétés

L'intérêt de cette notion réside dans la réduction de l'étude d'un triangle à partir d'un autre encore plus simple.

Tout d'abord, l'étude des triangles égaux est réduite à l'étude des triangles semblables.

Propriété. *Si $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ égaux alors $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ sont semblables.*

Démonstration. Évident. □

La réciproque n'est en revanche pas vraie. On peut s'en convaincre par un contre-exemple donné par la **??**. Ce sont deux triangles semblables mais non égaux.

Propriété. *Si $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ sont semblables alors les longueurs des côtés opposés aux angles de même mesure sont proportionnelles.*

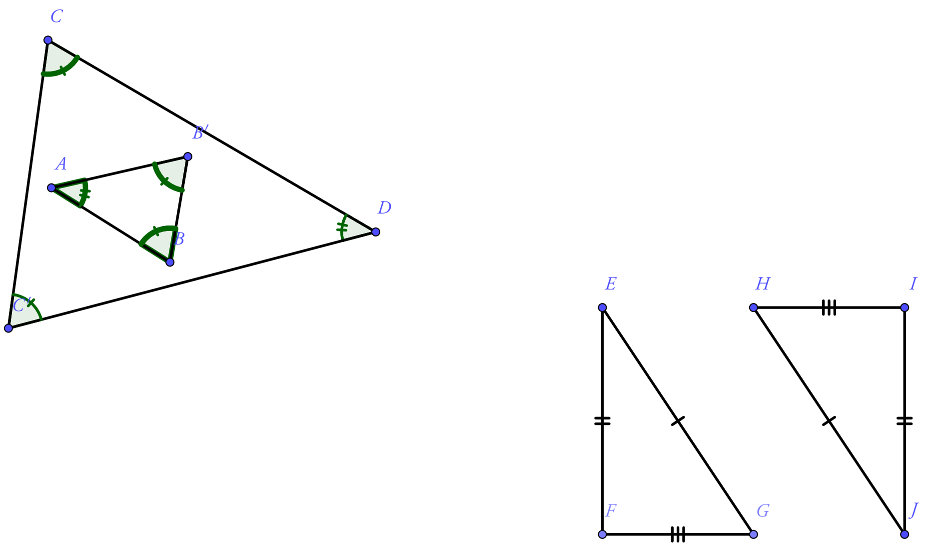


FIGURE 3.1 – Illustration d'exemples de triangles égaux et semblables.

Démonstration. Évident. □

Propriété. *Si chaque longueur des côtés de deux triangles est proportionnelle alors ces triangles sont semblables.*

Démonstration. Évident. □

3.1.3 Conséquence

Une conséquence permet de faire le lien avec les agrandissements et réductions des figures.

Propriété. *Si ABC et DEF sont semblables alors*

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = k$$

De plus, si

- $k > 1$ *alors DEF est un agrandissement de ABC.*
- $k < 1$ *alors DEF est une réduction de ABC.*

Démonstration. Évident par définition et le théorème de Thalès. □

Examen

3.2 Statistiques

L'analyse des données dispense de l'examen des données en rapport avec un sujet d'étude. Cette discipline exploite les statistiques puisqu'elles permettent de juger ou de prendre de bonne

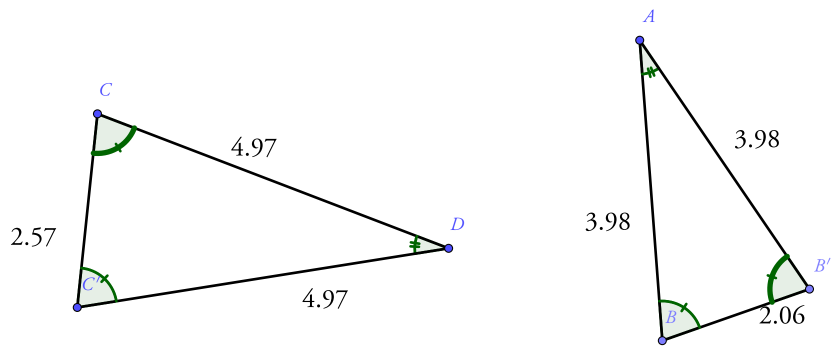


FIGURE 3.2 – Exemples de triangles semblables mais non égaux.

décision sur des questions en rapport à cette étude.

Dans ce chapitre, nous restreindrons cet exercice à des cas simples et à des outils élémentaires.

3.2.1 Définitions

Commençons par rappeler les rudiments élémentaires. On rappelle qu'une série statistique est une collection de nombre associé à un caractère.

Définition. *On appelle*

— *effectif d'une donnée le nombre de fois que cette donnée se répète dans la série.*

— *effectif total d'une série statistique le nombre total de donnée dans la série.*

— *fréquence d'une donnée le rapport entre l'effectif de cette donnée et l'effectif total de la série.*

Rappelons qu'il existe deux types de série statistique :

— celles dont le caractère peut être mesuré : taille, poids, longueur, aire, etc. (données quantitatifs)

— celles dont le caractère ne peut pas être mesuré : couleur, sexe, forme géométrique, goût, etc. (données qualitatifs)

De surcroît, notons qu'on peut construire deux types de tableau suivant le nombre de donnée :

— le tableau en classe si le nombre de donnée est grand.

— le tableau en effectif si le nombre de donnée est petit.

Exemple. *Soit la série statistique « 0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4 » désignant le nombre d'élève ayant été retenu dans une classe de collège. Cette série se rassemble dans le tableau suivant.*

Nombre de retenu	0	1	2	3	4	Total
Effectif (nombre d'élève)	8	3	3	3	3	20
Fréquence	0.4	0.15	0.15	0.15	0.15	1
Pourcentage (en %)	40	15	15	15	15	100

3.2.2 Indicateurs statistiques

Pour extraire des informations pertinentes sur une série statistique, on dispose de certains outils pour le faire.

Définition. *On appelle*

- *moyenne de la série la somme du produit entre les effectifs et les données divisée par l'effectif total de la série.*
- *médiane de la série la donnée située à la moitié de la série.*
- *étendue de la série la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.*

Statistiquement, ces indicateurs s'interprètent de la manière suivante

- la moyenne correspond à l'apparition moyen du caractère dans la série statistique.
- la médiane correspond à la donnée qui sépare en deux la série statistique.
- l'étendue correspond au plus grand écart du caractère dans la série statistique.

Remarque. *La moyenne et la médiane sont deux indicateurs différents. La moyenne dépend des données alors que la médiane dépend du nombre de donnée.*

Remarque. *Soit n le nombre de donnée d'une série statistique,*

- *si n est impair alors la médiane est la donnée située au rang $\frac{n}{2}$.*
- *si n est pair alors la médiane est entre les données $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$.*

Naturellement, pour étudier la médiane d'une série il est nécessaire de trier les données dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand).

3.2.3 Représentation des données

Avec les indicateurs statistiques, nous pouvons faire mieux en terme d'étude. Nous pouvons apprécier leur étude moyennant des représentations visuelles suivant le tableau construit.

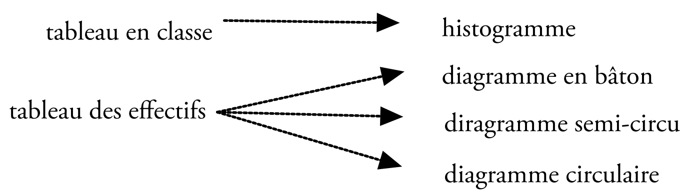


Figure 3.3 – Illustration des représentations utilisées suivant le tableau statistique.

Bien que celles-ci ont déjà été vues, nous rappelons ici leur construction. On considère une série statistique à $n \in \mathbb{N}^*$ données d'effectif total E.

Méthode. *Pour l'histogramme, on exploite un tableau de N classe.*

Caractère	$[x_1, x_2[$	...	$[x_{N-1}, x_N[$
Effectif	e_1	...	e_{N-1}

1. *Tracer l'axe des abscisses avec les partitions.*

2. *Tracer l'axe des ordonnées avec les hauteurs.*
3. *Correspondre les hauteurs à chaque classe.*
4. *Tracer les bars.*

Méthode. *Pour le diagramme en bâton, on procède de la même manière que l'histogramme.*

Caractère	x_1	...	x_n
Effectif	e_1	...	e_n

1. *Tracer l'axe des abscisses avec les* x_i.
2. *Tracer l'axe des ordonnées avec les hauteurs.*
3. *Correspondre les hauteurs à chaque classe.*
4. *Tracer les bars.*

Méthode. *Pour le diagramme semi-circulaire, on calcule les parts pour lesquelles partagerons chaque caractères.*

Caractère	x_1	...	$[x_{n-1}, x_n[$	*Total*
Effectif	e_1	...	e_n	E

1. *Tracer la moitié d'un cercle en notant* O *le centre.*
2. *Pour* i *allant de* 1 *à* n *alors :*
3. *Tracer le segment partant de* O *au bord cercle avec un angle*

$$d_i = \frac{e_i \times 180}{E}$$

Pour le diagramme circulaire, il suffit de faire un cercle complet et en exploitant la formule suivante pour les angles

$$d_i = \frac{e_i \times 360}{E}$$

Examen

3.3 Géométrie spatiale

Certains objets peuvent être construit de façon systématique « à la main » comme des cubes ou encore des pavés contrairement à d'autre comme les sphères.

Le but de ce chapitre est la construction progressive de certain solide.

3.3.1 Solide et construction

On rappelle qu'un solide est un objet dont les faces ont une forme géométrique plane. Commençons par citer un solide élémentaire : le pavé droit.

Définition. *On appelle pavé droit tout solide admettant 6 faces rectangulaires.*

Notons que certains ouvrages citent pavé droit par parallélépipède rectangle ; il s'agit de solide partageant la même forme.

Exemple. *On peut citer le cube.*

Pour représenter un pavé droit, ou même un solide en général, on utilise une technique de représentation des objets en trois dimensions sur une feuille de papier en deux dimensions tout en conservant leur proportion : c'est la perspective cavalière.

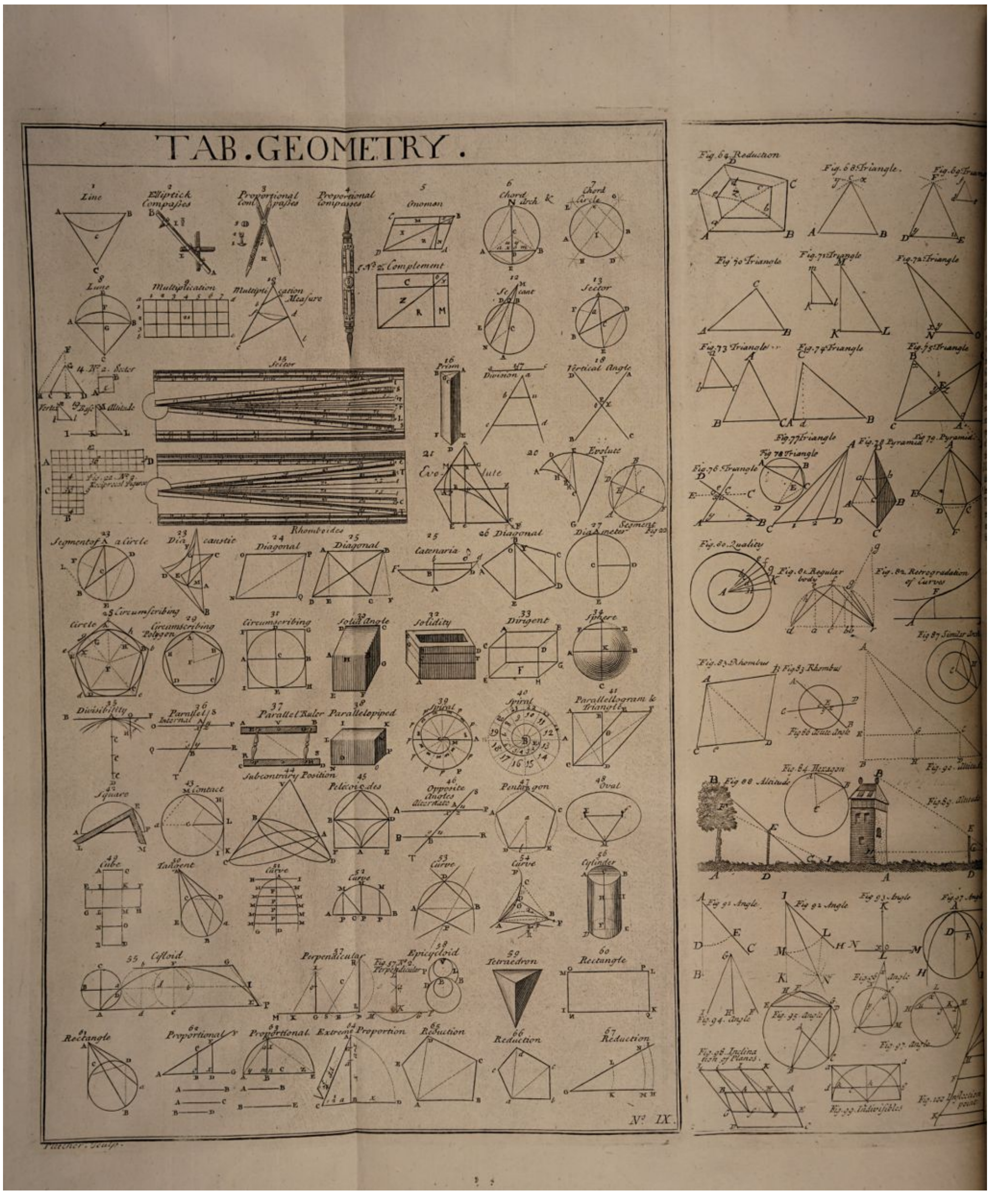


FIGURE 3.4 – Formulaire des figures géométriques avec les solides datant de 1782 extrait de [1] p. 856.

La construction de solide peut s'effectuer de plusieurs manières. La plus naïve consiste à coller à partir de feuilles de papiers morceaux par morceaux ou encore, en un seul papier, en ne faisant que des plies : c'est la construction de patron.

Définition. *On appelle patron toute surface plane permettant de construire un solide par pliage et*

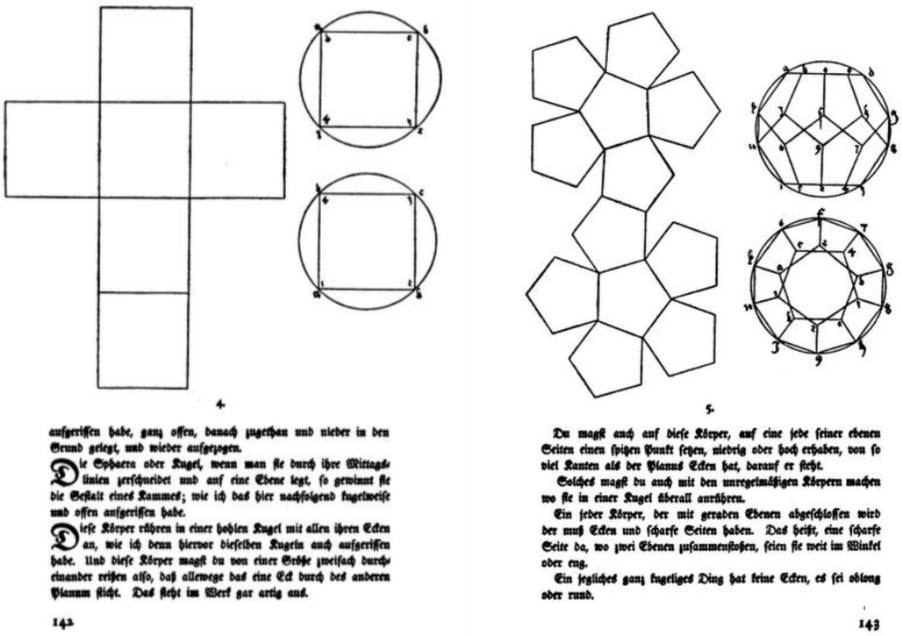


FIGURE 3.5 – Représentation d'un patron du cube et du dodécaèdre datant de 1525 extrait de [4], p.142-143.

sans recouvrement.

Exemple. *Citons le patron d'une pyramide et d'un cône.*

Naturellement, on sera ramener à décomposer le solide à construire en plusieurs sous-solides élémentaires. De surcroît, notons qu'un solide peut être obtenu avec plusieurs patrons différents.

Exemple. *On peut citer un patron du cube et du dodécaèdre.*

Pour un solide nécessitant une construction plus consistante, il est possible de décomposer sa construction en des figures que l'on connaît pertinemment le patron.

Terminons cette partie pour ajouter la possibilité d'obtenir un patron d'un solide numériquement avec le logiciel GSolaar.

3.3.2 Repérage spatiale

Dans le plan, on exploite le rectangle pour situé un point.

Définition. *On appelle repère spatial trois arêtes issus d'un point commun dans un pavé droit.*
On appelle coordonnée d'un point P de l'espace tout triplet noté $P(x, y, z)$ repéré sur le pavé droit avec

- — *x l'abscisse.*
- — *y l'ordonnée.*
- — *z l'altitude.*

Si aucun quadrillage n'est mentionné, le sommet à chaque arrête formant le repère vaut 1 unités. Formellement, le point qui forme le repère situé sur l'axe

- — des abscisses vaut $(1, 0, 0)$.

— des ordonnées vaut $(0,1,0)$.

— des altitudes vaut $(0,0,1)$.

Exemple. *Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit.*
Le repère formé par les arêtes $[AB]$, $[AD]$ et $[AE]$ a pour origine le point A, ainsi

— $A(0,0,0)$

— $B(1,0,0)$

— $D(0,1,0)$

— $E(0,0,1)$

Avec de tels coordonnées, il est possible de connaître la position d'un point visuellement dans l'espace.

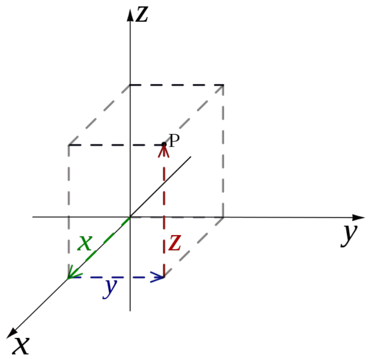


FIGURE 3.6 – Repère dans l'espace et d'un point $P = (x, y, z)$.

3.3.3 Repérage sphérique

Positionner un point sur une sphère c'est intuitivement reconnaître un point sur une planète, qu'on peut librement l'identifier comme la planète terre.

Définition. *On appelle point de la sphère P tout couple $P(x, y)$ avec*

— *x désignant la longitude ; comprise entre 0 et 180 degré Est ou Ouest.*

— *y désignant la latitude ; comprise entre 0 et 90 degré Nord ou Sud.*

Les coordonnées d'un tel point est assimilées aux mesures d'angles partant du centre de la sphère. Pour identifier la latitude et la longitude, on utilise

— des cercles dont les points ont la même longitude. (les méridiens)

— des cercles dont les points ont la même latitude. (les parallèles)

Exemple. *On a*

— *le méridien de Greenwich : méridien de référence dont les points sont de la forme $(x,0)$*

— *l'Équateur : parallèle de référence dont les points sont de la forme $(x,0)$*

En pratique, on repère toujours par rapport aux méridiens et parallèles de référence.
L'essentiel de cette partie est de savoir placer des points sur ce repère et surtout de les placer sur la sphère.

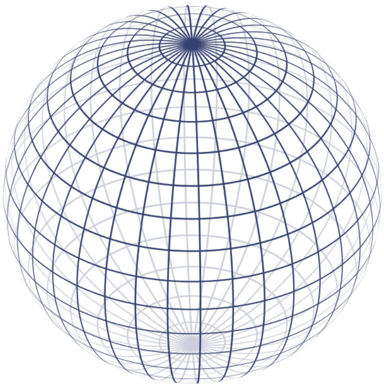


FIGURE 3.7 – Illustration des latitudes et longitudes sur une sphère.

Examen

3.4 Fonctions linéaires et affines

L'étude du coefficient de proportionnalité dans un tableau de proportionnalité permet d'obtenir une relation entre les nombres. Cette relation se généralise naturellement à travers une expression qui dépend du nombre de départ : les fonctions linéaires et affines.

Ce chapitre étudie les fonctions linéaires, plus généralement les fonctions affines, concernant leur utilité dans les problèmes.

3.4.1 Définition

Définition. *On dit qu'une fonction f est*

- *linéaire si f est de la forme $x \mapsto ax$ avec a un nombre.*
- *affine si f est de la forme $x \mapsto ax + b$ avec a, b deux nombres.*

Si tel est le cas, on appellera a le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

Exemple. *Les fonctions suivantes sont linéaires*

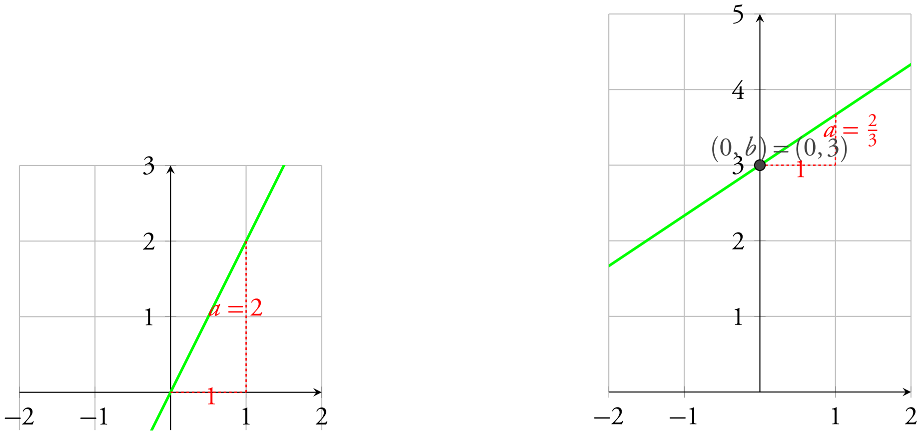
$$x \mapsto x \quad x \mapsto -x \quad x \mapsto -\frac{3}{5}x \quad x \mapsto \frac{2^3 \times 3^6}{5^2}x$$

Les fonctions suivantes sont affines

$$x \mapsto x+1 \quad x \mapsto -x \quad x \mapsto x+5 \quad x \mapsto -\frac{11}{15}x + \frac{4}{5}$$

Remarque. *Toute fonction linéaire est affine, en revanche la réciproque n'est pas vraie. (voir figure 3.3.1)*

Contre-exemple. *La fonction $x \mapsto x+1$ est affine mais n'est pas linéaire. En effet, son expression ne dépend pas seulement que de la variable x.*



(a) $x \mapsto 2x$

(b) $x \mapsto \frac{2}{3}x + 3$

FIGURE 3.8 – Représentation graphique de $x \mapsto 2x3$ et de $x \mapsto \frac{2}{3}x + 3$.

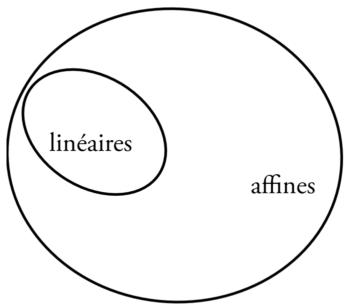


FIGURE 3.9 – Diagramme ensembliste entre l'ensemble des fonctions affines et celles qui sont linéaires.

3.4.2 Propriétés

Sans recourir au graphique, il est possible de déterminer algébriquement le coefficient directeur d'une fonction affine ou linéaire.

Propriété. *On a*

1. *pour $x_1 \neq x_2$, le coefficient directeur est*

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2. *Le graphe des fonctions linéaires et affines est une droite.*

Démonstration. On admet 2.
On montre 1. dans le cas des fonctions linéaires. Le cas affine se démontre de manière analogue. On écrit pour deux points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ avec $x_1 \neq x_2$. On pose $f(x_1) = ax_1$ et $f(x_2) = ax_2$ et on fait la différence des deux pour obtenir après factorisation

$$a(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

□

Examen

3.5 Probabilités

Le but de ce cours est de mesurer les chances que des issues se réalisent.

3.5.1 Expérience et évènement

Définition. *On appelle*

- *expérience aléatoire toute réalisation qui dépend du hasard.*
- *issues toute possibilité sortant de l'expérience.*
- *événement une collection d'issue.*

Exemple. *On peut citer le lancer d'une pièce à deux faces parfaitement équilibrée , alors*

- *« obtenir pile », « obtenir face » sont les issues de cette expérience.*
- *« obtenir pile » est un événement possible il s'agit de la collection à une issue « obtenir pile ».*

Exemple. *On peut citer le tir à l'arc sur une cible circulaire de rayon 4 cm, alors*

- *l'aire du cercle de rayon 4 cm correspond aux issues de cet expérience.*
- *« tirer au centre de la cible » est un événement possible, il s'agit de la collection d'issue décrit comme l'aire du centre de la cible.*

Naturellement, toute issue d'une expérience est un événement de cette expérience. En revanche, la réciproque n'est pas vraie.

Contre-exemple. *On peut citer le lancer d'un dé parfaitement équilibré à 6 faces, alors*

- *« obtenir 1 », « obtenir 2 », « obtenir 3 », « obtenir 4 », « obtenir 5 », « obtenir 6 » sont les issues de cet expérience.*
- *« obtenir un nombre pair » est un événement possible il s'agit de la collection des issues « obtenir 2 », « obtenir 4 », « obtenir 6 ».*

Notons qu'une expérience aléatoire doit proprement être énoncé. Même si l'évidence pèse sur une expérience connue, une donnée non énoncé ou mal énoncé ne doit pas être négligée ! Citons par exemple une expérience de pile ou face sans préciser que la pièce est bien équilibré. Sous ce fait, il faut étudier le cas où la pièce est équilibré et celui où elle ne l'est pas.

3.5.2 Probabilité

Définition. *On appelle probabilité d'un événement le nombre qui mesure la réalisation d'un événement.*

La construction de la probabilité d'un événement n'est pas du tout fastidieux. Pour l'obtenir, nous étudions un événement en répétant l'expérience de manière indépendante. Ainsi, nous voyons la fréquence à laquelle cet événement se répète et plus l'expérience se répète, plus cette fréquence se rapproche d'une valeur : cette valeur n'est rien d'autre que la probabilité de cet événement.

Définition. *On dit que des événements sont équiprobables s'ils ont tous la même probabilité de se réaliser. Si tel est le cas, alors tout événement équiprobable A admet une probabilité égale à*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n}{N}$$

avec

— *n le nombre d'issues concernées.*
— *N le nombre d'issues total.*

Exemple. *Considérons une pièce parfaitement équilibré alors les issues possibles de cette expérience se noterons*

— *A : « obtenir pile ».*
— *B : « obtenir face ».*

On compte 2 issues possibles ainsi $N = 2$ donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$$

Dans le cas d'une situation non-équiprobable, on ne peut pas écrire cette probabilité.

Contre-exemple. *Considérons une pièce non-équilibré qui tombe toujours sur pile et jamais sur face, alors les issues possibles de cette expérience se noterons*

— *A : « obtenir pile ».*
— *B : « obtenir face ».*

On compte 2 issues possibles ainsi $N = 2$ donc

$$\mathbb{P}(A) = 1 \text{ et } \mathbb{P}(B) = 0$$

Méthode (arbre de probabilité)**.** *Pour une expérience donnée ayant deux issues possibles, on peut la représenter avec un arbre de probabilité. Pour la construire, on suit la démarche suivante*

1. *Tracer deux branches.*
2. *Tracer deux branches à partir des racines précédentes.*
3. *Réitéré la démarche encore.*

Examen

Bibliographie

[1] Ephraim Chambers (1728) *Cyclopædia : or, An Universal Dictionary of Arts and Sciences*, vol. 1.

[2] Nadine Billa, Virginie Blanc, Marion Convert, Emilie Elkine, Mathieu Fernandez, Amaïa Flous, Aurélie Laulhere, Marie-Christine Layan, Siegfried Maillard, Marion Larrieu, Marion Robertou, Agnès Villattes (2020) *Mission indigo : maths 3e*, série Mission indigo, ISBN : 9782017025467, Hachette éducation.

[3] Euclide (IIIe siècle av. J-C) *Éléments*.

[4] Albrecht Dürer (1525), *Unterweysung der Messung mit dem Zyrkel und Rychtscheyd, Nürnberg : München, Süddeutsche Monatsheft*, English translation with commentary in Strauss, Walter L. (1977), The Painter's Manual, New York