Mathématiques élémentaires
3ème

Haerearii Metuarea

https://hmetuarea.github.io/

Table des matières

Introduction

Ce cours de mathématiques de 3ème est basé sur la progression des cours du collège de Pao-pao. Les notions sont introduites de manière concise pour laisser la place à la résolution d'exercice et de problème. Un accent est mis sur le thème de la biologie qui, fidèlement aux exigences du programme officiel, permet de concerner le public aux enjeux climatiques actuels.

Formellement aux exigences du ministère et des inspecteurs, la recherche est la compétence majeure qui couvre la résolution de problème.

Chapitre 1

Premier trimestre

Entre arithmétiques et transformation géométrique, ce chapitre fait l'objet de rappel et a pour objectif de faire le point sur les acquis de l'an dernier.

1.1 Nombres premiers

Certains entiers peuvent avoir plusieurs diviseurs à la fois et d'autre en ont un seul. Ces derniers possèdent des propriétés saisissantes qui ont la particularité de décrire un entier.

1.1.1 Définition

Définition. *Un entier a est premier si les seuls diviseurs de a sont* 1 *et* a.

Exemple. *On peut citer* $1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ *ou encore* 19.

> **Méthode** (Montrer que a est premier ou non)**.** *Raisonner par définition.*
> **Ce qu'il faut faire.** *Il suffit de lister les diviseurs de a.*
>
> — *si a admet* 1 *et a comme unique diviseur alors a est premier.*
> — *si a admet* 1*, a et d'autres entiers comme diviseur alors a n'est pas premier.*

Exemple. *On peut citer*

— 4 *n'est pas premier puisque* $4 = 2 \times 2$.
— 6 *n'est pas premier puisque* $6 = 3 \times 2$.
— 20 *n'est pas premier puisque* $20 = 2 \times 10$ *et* $20 = 2 \times 2 \times 5$.

1.1.2 Décomposition en facteurs premiers

L'intérêt fondamental des nombres premiers réside dans la propriété suivante.

Propriété. *Tout entier strictement positif se décompose en produit de nombre premier.*

Exemple. *On peut citer*

— $6 = 2 \times 3$
— $10 = 2 \times 5$
— $30 = 2 \times 3 \times 5$

Il faut garder en mémoire qu'une telle décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. C'est pourquoi, dorénavant, on admettra que 1 n'est pas un nombre premier dans ce cours. Et c'est d'ailleurs pour cette raison qu'on évitera d'écrire les décompositions « idiotes » du type $10 = 1 \times 2 \times 5$ car on peut aussi bien écrire une telle décomposition de cette forme $10 = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5$.

Exemple. *On peut citer*

1. $10 = 2 \times 5$
2. $100 = 2^2 \times 5^2$
3. $645 = 3 \times 5 \times 43$

1.1.3 Le crible d'Eratosthène

On dispose d'un algorithme présentant tous les nombres premiers inférieur à un nombre fixé.

Méthode (Crible d'Eratosthène)**.** *Le crible suit la démarche suivante*
ENTREE *: un entier a.*
SORTIE *: la liste des nombres premiers inférieurs ou égale à a.*

1. *écrire la liste des nombres entre* 1 *et a.*
2. *pour k allant de* 1 *à a :*
3. *si k n'est pas barré alors :*
4. *barrer tous les multiples de k.*
5. *si k est barré alors :*
6. *ne rien faire.*

Devoir maison

Examen

1.2 Réduction et augmentation

Sur le plan ou dans l'espace, certaines figures présentent des similarités sur leur longueur. Cette partie traite des objets géométriques ayant subit des réductions ou augmentations sur leur longueur. Le but étant non-seulement de savoir les reconnaître et les construire, mais surtout de déterminer le coefficient qui permet de passer d'une figure à l'autre.

1.2.1 Définition

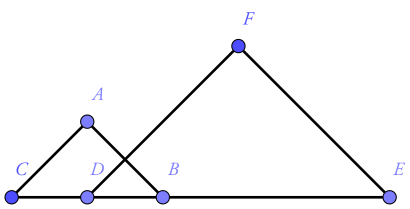
Définition. *On dit qu'une figure (ou encore un solide) est*

1. *agrandie si ses longueurs sont multipliées par un nombre $k > 1$.*
2. *réduite si ses longueurs sont multipliées par un nombre $0 < k < 1$.*

Si tel est le cas, k est appelé le rapport.

Notons que le cas $k = 1$ n'est rien d'autre qu'une « reproduction » de la figure.

Exemple. *On peut citer DFE l'augmentation du triangle ABC dans la figure suivante.*



Méthode (Déterminer le rapport d'un agrandissement ou modification)**.** *Il s'agit de passer par un tableau de proportionnalité.*

1. *Ecrire un tableau avec les longueurs de chaque figure sur chaque ligne.*
2. *Déterminer le coefficient qui permet de passer d'une ligne à l'autre.*

Le coefficient de proportionnalité obtenu est le rapport recherché.

1.2.2 Propriétés

Le fait d'agrandir ou de réduire une figure (resp. un solide) a des conséquences non négligeable puisqu'il garanti certaines propriétés sur cette figure (resp. un solide).

Propriété. *De toute figure du plan (ou un solide de l'espace) alors son agrandissement ou sa réduction provoquent les effets qui suivent*

1. *les angles ne changent pas.*
2. *l'aire de la figure réduite (ou augmentée) est égale à l'aire de la figure de départ multipliée par* k^2.
3. *le volume du solide réduit (ou augmenté) est égale au volume du solide de départ multiplié par* k^3.

Pour les angles, cela signifie que la construction de la figure réduite (ou augmentée) garde les mêmes angles que la figure de départ.

Exemple. *Toute réduction ou agrandissement d'un triangle équilatéral est toujours équilatéral et les angles sont identiques au triangle de départ.*

On profite de ce résultat pour rappeler quelques formules d'aire et de volume.

Figure	Formules
Carré de côté c	c^2
Rectangle de longueur l et de largeur L	$l \times L$
Triangle de hauteur h et de base b	$\frac{b\times h}{2}$
Cercle de rayon r	$\pi \times r^2$

Table des formules d'aires de figures élémentaires du plan.

Solide	Formules
Cube de côté c	c^3
Pavé de hauteur h, longueur l et de largeur L	$h \times l \times L$
Sphère de rayon r	$\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$
Pyramide de hauteur h et d'aire de base $\mathscr{B}$	$\frac{1}{3} \times h \times \mathscr{B}$
Cylindre de hauteur h et d'aire de base $\mathscr{B}$	$h \times \mathscr{B}$
Cône de hauteur h et d'aire de base $\mathscr{B}$	$\frac{1}{3} \times h \times \mathscr{B}$

Table des formules de volume de solides élémentaires de l'espace.

Examen

1.3 Homothétie

Rappelons que pour réduire ou agrandir un terrain ou une pièce d'une maison, il était nécessaire de multiplier chaque longueur par un nombre. Géométriquement, on transforme la figure sur ses longueurs et cette transformation géométrique porte le nom de homothétie.

Pour ce chapitre, on évitera les aspects algébriques des homothéties pour profiter de leur manipulation géométrique. Aussi, le but étant de comprendre cette transformation et de construire des figures avec elle, nous nous restreindrons à la géométrie du plan.

1.3.1 Définition

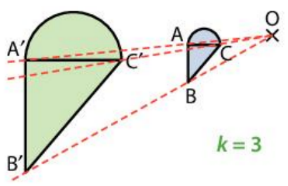
Définition. *On appelle homothétie de centre O et de rapport $k > 0$ d'une figure une transformation géométrique qui agrandie ou réduit cette figure. Précisément, une homothétie*

- *agrandie une figure si $k > 1$ ou $-1 > k$.*
- *réduit une figure si $1 > k > 0$ ou $0 > k > -1$.*

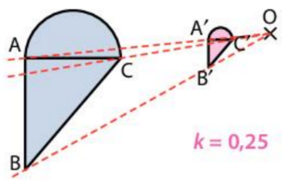
On appelera O le centre d'homothétie.

Notons que le cas où le rapport k est négatif est particulier puisque l'homothétie effectue une symétrie dite « centrale » par rapport au centre d'homothétie.

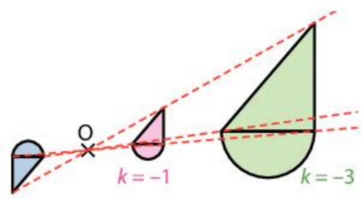
Exemple. *On peut citer les cas suivant où la figure bleue désigne la figure de départ ou si l'on veut « la figure avant transformation ».*



Agrandissement



Réduction



Symétrie centrale

On notera que le centre d'une homothétie d'une figure se situe exactement à l'intersection de toutes les droites qui passent par ses sommets. Donc, construire l'homothétie d'une figure consiste à reproduire une figure suivant les droites passant par ses points et le centre d'homothétie.

Méthode (Construire l'homothétie d'une figure). *Il s'agit de la construction géométrique « à la main ». Il est donc naturel de se munir d'une règle graduée et d'un crayon.*

Ce qu'il faut avoir. *Un point O dans le plan et un rapport k.*

Ce qu'il faut faire. *On fait*

1. *A chaque sommets, tracer une droite qui relie chaque point au centre d'homothétie.*
2. *À l'aide d'une règle, mesurer la distance entre chaque sommet de la figure et le centre d'homothétie.*
3. *Multiplier chacune des distances par le rapport d'homothétie.*
4. *En allant du bon côté du centre d'homothétie, marquer les distances obtenues sur les segments de droite respectifs.*
5. *Rejoindre les sommets images correspondants afin de reconstituer la figure image.*

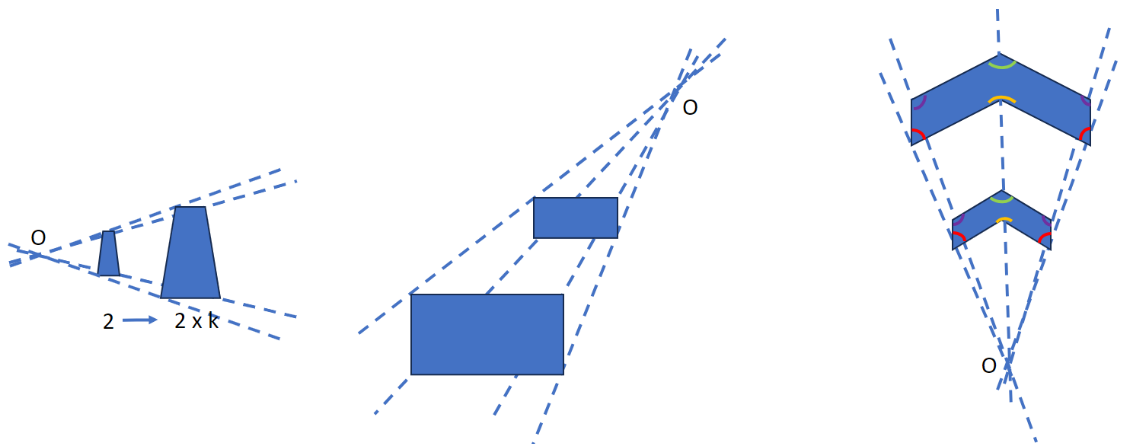
1.3.2 Conséquences

Les figures obtenues par homothétie contiennent des traits particuliers sur leur longueur, leur forme, leur mesure et leur alignement.

Propriété. *On a*

1. *Les longueurs d'une figure obtenue par homothétie de rapport k sont multipliées par k.*
2. *La forme d'une figure avant et après homothétie sont identiques.*
3. *Les mesures des angles et alignements d'une figure avant et après homothétie sont identiques.*

En d'autre terme, on peut représenter les propriétés comme suit :



Devoir maison

Examen

Chapitre 2

Second trimestre

Ce trimestre s'inscrit dans la continuité du précédent. Une grande diversité de sujets sont traités conjuguant géométrie et algèbre.

2.1 Puissances

Les grands nombre présentent souvent une représentation non satisfaisante pour leur manipulation. Pour certain, plusieurs de leur diviseur se répètent et présente alors une écriture plus favorable au calcul : l'écriture sous forme de puissance.

2.1.1 Définition

Soient a un entier positif non nul et n un entier relatif.

Définition. *On appelle puissance de a par n la quantité définie par*

$$\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Ce nombre est noté a^n et se lit « a puissance n ». Dans cette écriture,

- *a est appelé la base.*
- *n est appelé l'exposant.*

On adoptera les conventions $a^1 = a$ et si a est non nul alors $a^0 = 1$. Suivant le signe de a et n, on rappelle que a^n admet plusieurs formes.

	a^n	$(-a)^n$	a^{-n}
Écriture	$\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$	$\underbrace{(-a) \times \cdots \times (-a)}_{n \text{ fois}}$	$\underbrace{\frac{1}{a} \times \cdots \times \frac{1}{a}}_{n \text{ fois}}$

Exemple. *On peut citer les puissances de 10 avec a* $= 10$ *:* $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ *et* $10^4 = 10000$.

Pour $(-a)^n$, les parenthèses ont leurs importances ici car elle est souvent confondu par $-a^n$ où

$$-a^n = -a \times a \times \cdots \times a$$

Donnons un contre-exemple pour démontrer que $(-a)^n \neq -a^n$.

Contre-exemple. *On peut citer les cas qui suivent avec les quantités traitées par la calculatrice*

— $(-3)^6 = (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3) = 729$

— $-3^6 = -3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3 = -729$

D'où $(-3)^6 \neq -3^6$.

De ce fait, une nouvelle règles opératoires s'ajoute. Dorénavant, le calcul d'une expression littéral s'effectue dans l'ordre qui suit :

— les puissances.

— la multiplication et la division.

— l'addition et la soustraction.

Exemple. *Calculons* $A = 1 + 10 \times 3^2$.

1. *On commence par la puissance* $3^2 = 9$ *alors*
$$A = 1 + 10 \times 9$$
2. *On continue par la multiplication* $10 \times 9 = 90$ *alors*
$$A = 1 + 90$$
3. *On termine par la somme* $1 + 90 = 91$ *alors*
$$A = 91$$

Naturellement, la manipulation des puissances dont l'exposant est petit n'a absolument aucun intérêt calculatoire; une calculatrice pourrait le faire. En revanche, quand l'exposant est astronomiquement grand alors on atteint les limites de certaine machine comme la calculatrice ou encore l'ordinateur puisque, donnons un exemple, celles-ci ne peuvent donner un résultat satisfaisant pour 2^{64} :

$$2^{64} = 18446744073709551616$$

C'est ici tout l'intérêt des puissances, « donner un visage » au nombre très grand sans obtenir leur valeur exacte.

2.1.2 Opérations algébriques sur les exposants

Les puissances sont très souvent multipliées et leur calcul est grandement facilité en manipulant leur exposant.

Propriété. *Soient* a, b *deux nombres non nul,* n, m *deux entiers non nuls, alors*

1. $a^n b^n = (ab)^n$
2. $a^n a^m = a^{n+m}$ *(somme)*
3. $(a^n)^m = a^{n\times m}$ *(produit)*
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$ *(quotient)*

Exemple. *On peut citer*

— $10^4 \times 8^4 = (10\times 8)^4 = 80^4$.

— $3^5 \times 3^{10} = 3^{5+10} = 3^{15}$.

— $\left(12^3\right)^{10} = 12^{3\times 10} = 12^{30}$.

— $\frac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$.

En revanche,

— *pour* $10^4 \times 8^2$ *on ne peut rien faire car les exposants sont différents.*

— *pour* $10^8 \times 123^2$ *on ne peut rien faire car les exposants sont différents.*

— *pour* $15789^{123456789} \times 123^2$ *on ne peut rien faire car les exposants sont différents.*

2.1.3 Notation scientifique

En physique, en chimie ou en science du vivant, la manipulation des nombres est omniprésente. Ces nombres peuvent être tellement grands ou tellement petits que l'écriture sous leur forme d'entier n'est pas toujours satisfaisante. C'est pourquoi on dispose d'une écriture plus commode préservant leur comparaison.

Définition. *On appelle notation scientifique d'un nombre décimal A toute écriture de A de la forme*

$$A = a \times 10^n$$

avec $-10 < a < 10$ décimal non nul et n un nombre relatif.

Exemple. *On peut citer :*

— $1.2 = 1.2 \times 10^0$.

— $123456 = 1.23456 \times 10^5$.

— $2.3 \times 10^5 \times 10^{-90} = 2.3 \times 10^{-85}$

— $299000000 \times 10^5 = 2.99 \times 10^{13}$.

En revanche,

— *Pour* 98000, 98×10^3 *n'est pas son écriture scientifique car* $98 > 10$.

— *Pour* 123456, 123.456×10^3 *n'est pas son écriture scientifique car* $123.456 > 10$.

— *Pour* 5.123, 5123×10^{-3} *n'est pas son écriture scientifique car* $5123 > 10$.

En d'autre terme, pour obtenir une écriture scientifique

— n est positif si la virgule progresse vers la gauche.

— n est négatif si la virgule progresse vers la droite.

Examen

2.2 Nombres rationnels

Les nombres rationnels représentent une grande diversité de quantité que l'on retrouve dans plusieurs domaines : les parts ou encore les pourcentages. Une raison d'être des nombres rationnels est leur capacité à partager des mesures, des proportions, des figures semblables ou encore des probabilités.

2.2.1 Définition

Définition. *On dit qu'un nombre a est rationnel si a s'écrit sous la forme fractionnaire*

$$a = \frac{p}{q}$$

avec p, q deux entiers où $q \neq 0$. Si tel est le cas, on appellera

— *p le numérateur.*

— *q le dénominateur.*

En particulier, ce sont des nombres formés par le quotient de deux nombres relatifs. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$ et admet une « quantité » infinie de nombre.

Exemple. *On peut citer :*

— $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{100}$ *ou encore* $\frac{1}{12345}$ *; en général avec* $n \in \mathbb{Z}$. *(fractions unitaires)*

$$\frac{1}{n}$$

— $\frac{5}{10}$, $\frac{123}{100}$ *ou encore* $\frac{98765}{10000}$ *; en général avec* $n \in \mathbb{Z}$ *et a un nombre.* *(fractions décimales)*

$$\frac{a}{10^n}$$

— $\frac{5}{2}$, $\frac{888}{256}$ *ou encore* $\frac{98563}{16}$ *; en général avec* $n \in \mathbb{Z}$ *et a un nombre.* *(fractions dyadiques)*

$$\frac{a}{2^n}$$

Notons que la division par un nombre nul n'existe pas ; il s'agit formellement du cas pour $q = 0$. On retiendra accessoirement que pour tout nombre a, on a la relation $a = \frac{a}{1}$; de même, pour $a \neq 0$, $\frac{a}{a} = 1$.

A ce niveau, l'utilisation de la géométrie est très avantageuse pour comprendre les fractions. Elles représentent une portion d'aire de figure géométrique ou encore d'une longueur d'un côté d'un polygone. En particulier, manipuler des nombres rationnels c'est faire de la géométrie. On pourra se rapprocher du livre II de [3] pour des illustrations.

2.2.2 Relations d'ordre

Tout nombre rationnel s'écrit comme une fraction ainsi, pour les comparer, on peut naïvement calculer leur valeur par la calculatrice. Toutefois, on atteint les limites de l'utilisation de la machine lorsque, par exemple, les 10 premiers chiffres après la virgule sont identiques. En effet, comparons $\frac{123456789}{987654321}$ et $\frac{123456789}{987654322}$ qui sont visiblement différent. A la calculatrice on observe qu'ils ont quasiment la même écriture décimale

$$\frac{123456789}{987654321} \simeq 0.124999998 \text{ et } \frac{123456789}{987654322} \simeq 0.124999998$$

Et avec la machine, on conclura naïvement qu'ils sont égaux alors non. Une approche plus astucieuse pour les comparer, sans recourir aux machines, est les règles de comparaison.

Propriété. *Soient* a, b, c, d *quatre nombres avec* $b, d \neq 0$.

1. *si* $b, d > 0$ *alors*
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad < cb$$
2. *si* $b > 0$ *et* $d < 0$ *(ou* $b < 0$ *et* $d > 0$*) alors*
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad > cb$$

En particulier, en multipliant ou en divisant par un nombre non nul positif le sens de l'inégalité ne change pas. Intuitivement, on peut passer d'une comparaison entre des proportions à une comparaison entre des aires ; et réciproquement.

Exemple. *Comparons* $\frac{1}{4}$ *et* $\frac{6}{9}$.
Avec un diagramme, on peut représenter $\frac{1}{4}$ *et* $\frac{6}{9}$ *et les comparer.*
D'une autre manière, par la propriété on peut exploiter une comparaison avec les aires. En fixant les dénominateurs et les numérateurs, on représente deux rectangles, l'un de dimension 4×6 *et l'autre de dimension* 1×9. *Puis, on les compare.*

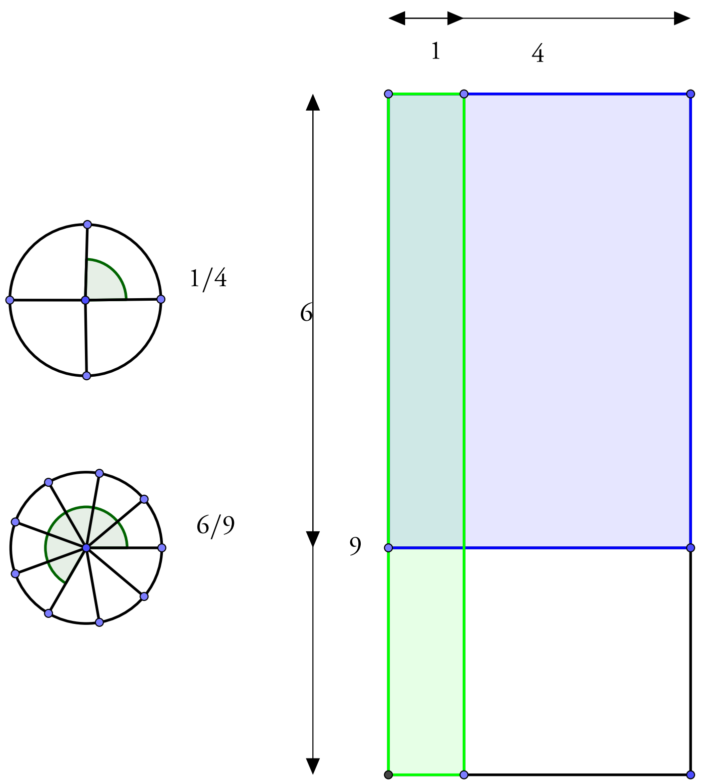


FIGURE 2.2.1 Comparaison géométrique de $\frac{1}{4}$ et $\frac{6}{9}$.

Exemple. *On peut citer*

— $\frac{1}{2} < 1$ *car* $1 < 2$.

— $\frac{1}{205} < \frac{6}{5} = \frac{6}{1230}$ *car* $5 \times 6 < 1230 \times 6$.

— $\frac{123546879}{987654322} < \frac{123546879}{987654321}$ *car* $987654321 < 987654322$.

2.2.3 Arithmétique des rationnels

La structure des nombres rationnels est analogue à celui des nombres relatifs. Il reste possible de construire de nouveau nombre rationnel moyennant les opérations usuelles telles que l'addition et la multiplication.

Propriété. *Soient* a, b, c *quatre nombres avec* $b \neq 0$, *alors*

1. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$. *(produit)*
2. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$. *(division)*
3. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$. *(addition)*

4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$. *(addition - cas général)*

Exemple. *Calculons* $\frac{1}{9} + \frac{3}{4}$.
Par la propriété, on écrit

$$\frac{1}{9} + \frac{3}{4} = \frac{1 \times 4 + 3 \times 9}{9 \times 4} = \frac{31}{32}$$

Autrement, on peut représenter géométriquement chaque fraction comme un rectangle sectionné :

— $\frac{1}{9}$ *comme le rectangle sectionné en 9 parties avec 1 partie colorée.*

— $\frac{3}{4}$ *comme le rectangle sectionné en 4 parties avec 3 parties colorées.*

Leur somme sera alors le rectangle sectionné en 9×4 *parties avec les parties colorées précédemment ajoutées.*

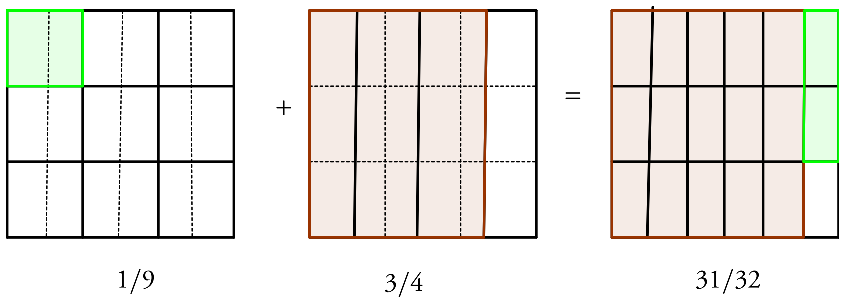


FIGURE 2.2.2 Illustration géométrique de la somme de $\frac{1}{9}$ et $\frac{3}{4}$.

Exemple. *On peut citer*

1. $\frac{85}{412} \times \frac{123}{256} = \frac{85 \times 123}{412 \times 256} = \frac{10455}{105472}$
2. $\frac{\frac{12}{34}}{\frac{56}{78}} = \frac{12}{34} \times \frac{78}{56} = \frac{936}{1904}$
3. $\frac{75}{12345} + \frac{98}{12345} = \frac{75+98}{12345} = \frac{173}{12345}$

En général, l'égalité $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ n'est absolument pas vraie ! On peut s'en convaincre en comparant $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = 1.1$ et $\frac{1+3}{2+5} = \frac{4}{7} \simeq 0.57 \neq 1.1$.

2.2.4 Fractions irréductibles

Une application de ce chapitre se distingue dans l'arithmétique à travers la factorisation des entiers.

Définition. *On dit qu'une fraction* $\frac{a}{b}$ *est irréductible si* a *et* b *n'ont aucun diviseurs en commun.*

Les fractions irréductibles sont utiles pour le calcul des rationnels puisqu'on ramène le calcul fractionnaire sur des entiers plus simples à traiter. Maintenant, on peut naïvement suivre la démarche suivante.

Méthode. *Il suffit de décomposer les entiers en facteur premier et de simplifier au numérateur et dénominateur.*

Bien entendu, cette démarche n'en est qu'une parmi tant d'autre. Nous rappelons qu'une telle écriture en facteur premier est unique ; cela garanti alors que cette démarche est possible avec tout entier même relatif.

Examen

2.3 Parallélisme

2.3.1 Définition

Rappelons qu'une droite n'est rien d'autre qu'un ensemble de point aligné, en quantité infinie et sans épaisseur.

Définition. *On dit que deux droites d et d' sont parallèles si elles ne s'intersectent pas. Si tel est le cas, on note $d \| d'$.*

Visuellement, il s'agit de deux droites qui ne « se toucheront » jamais.

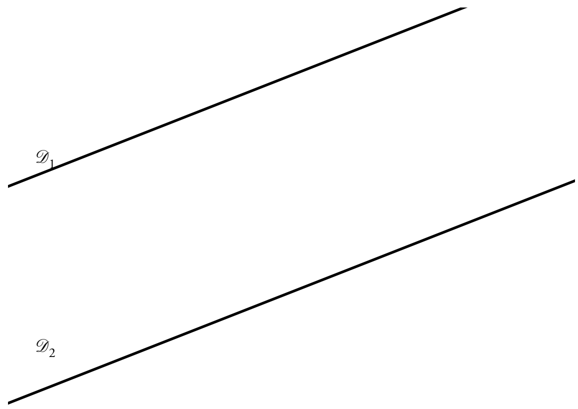


FIGURE 2.3.1 Illustration du parallélisme des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

En convenant que les droites confondues sont parallèles, alors pour toutes droites d, d', d'' on a

- $d \| d$.
- $d \| d' \iff d' \| d$. (symétrie)
- $d \| d'$ et $d' \| d'' \implies d \| d''$. (transitivité)

2.3.2 Théorème de Thalès

Une application intéressante des parallélismes intervient dans la géométrie des triangles puisqu'il est possible de quantifier la longueur de ses côtés.

Théorème (Thalès)**.** *Soient un triangle quelconque ABC et deux points P et Q sur les droites respectifs (AB) et (AC). Si*

1. *(PQ) et (BC) sont parallèles.*

alors

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$

Ce théorème s'applique dans deux configurations géométriques distinctes présentées ci-après. On distingue le premier qui montre le cas d'une homothétie de rapport négatif (le papillon) et l'autre de rapport positif (les triangles emboîtés).

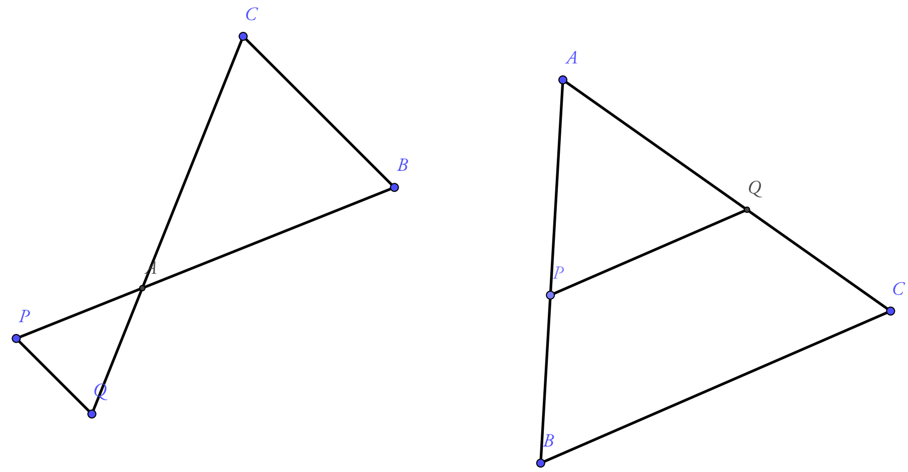


FIGURE 2.3.2 Représentation géométrique d'un papillon et de triangles emboités.

Bien que court, l'intérêt du chapitre consiste à apprécier les richesses de ce résultat à travers des problèmes de niveau d'abstraction progressif.

Examen

2.4 Équations et inéquations

Nous avons pris connaissance de problèmes mettant en jeu des relations de la forme $ax + b = c$ essentiellement. D'autre cas se modélisent accessoirement avec des relations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec les triangles rectangles ou les surfaces par exemples, dont la résolution de certains cas s'obtient en résolvant les équations de la forme $ax + b = c$.

2.4.1 Équations simples

Soit x un nombre quelconque.

Définition. *On appelle équation à une inconnue x toute relation de la forme $ax+b = c$ pour laquelle elle est vérifiée pour certaines valeurs de x.*

Aussi, notons que

— ces égalités peuvent être vues comme des « opérations à trou »

— l'inconnue x est une lettre qui « cache » un nombre qu'on cherche à découvrir.

N'oublions pas que résoudre cette équation c'est **isoler** x. En pratique, dans sa forme générale, résoudre c'est toujours

1. additionner par l'opposé de b.
2. multiplier par l'inverse de a.

Ceci conduit au résultat qui suit.

Propriété. *Soient a, b, c trois nombres avec $a \neq 0$, alors*

$$ax + b = c \Longleftrightarrow x = \frac{c - b}{a}$$

Autrement, et sous certaine condition sur les nombres, notons qu'il est possible de « deviner » la solution (équations diophantiennes). Enfin, ajoutons qu'il est toujours envisageable d'aborder leur résolution numériquement moyennant un tableur.

2.4.2 Équations produits

A présent, nous étudions les équations avec une inconnue où nous pouvons obtenir une ou deux solutions ; sa forme générale étant la suivante $ax^2+bx+c=0$, avec $a\neq 0$, b, c des nombres. La résolution exhaustive des équations de ce type se verra en Lycée. Ici, nous résolvons celle où l'expression se factorise en produit de deux équations en admettant, en amont, que ses solutions existent et qu'il y en a deux.

Énonçons tout d'abord le résultat qui permet restreindre la résolution d'une équation produit en la résolution de deux équations plus simple.

Propriété (admis). *Soient A, B des nombres alors*

$$A\times B=0 \Longrightarrow A=0 \text{ ou } B=0$$

Ce résultat mène au théorème suivant.

Théorème. *Soient x un nombre quelconque et a un nombre non nul positif. On a l'équivalence*

$$(ax+b)(cx+d)=0 \Longrightarrow x=-\frac{b}{a} \text{ ou } x=-\frac{d}{c}$$

De ce résultat, une application naturelle est la propriété suivante en admettant que pour tout nombre positif a, $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$.

Propriété. *Soient x un nombre quelconque et a un nombre non nul positif. On a l'équivalence*

$$x^2=a \Longrightarrow x=\sqrt{a} \text{ ou } x=-\sqrt{a}$$

Exemple. *On peut citer :*

— $x(x+1)=0$ *admet comme solution 0 et -1.*
— $(4x+1)(8x+7)=0$ *admet comme solution* $-1/4$ *et* $-7/8$.
— $4x^2+4x=0$ *admet comme solution 0 et -1.*

2.4.3 Inéquations

Terminons ce chapitre sur les inégalités admettant à l'intérieur de leur expression une inconnue.

Définition. *On appelle inéquation d'inconnue x toute inégalité vérifiée pour certaine valeur de x. Les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité est vérifiée sont appelés solution et elles forment un ensemble.*

Les inéquations rassemblent les inégalités de la forme suivante

Inégalité	$ax+b<c$	$ax+b>c$
Inégalité stricte	$ax+b\leq c$	$ax+b\geq c$

Contrairement aux équations, les solutions d'une inéquation sont nombreuses. Heureusement, leur résolution est identique à la résolution des équations : on isole x dans une partie de l'inégalité ; de plus

Propriété. *Soit $ax+b\leq c$ une inégalité alors*

— *pour tout nombre d,*

$$ax+b\leq c \Longleftrightarrow ax+b\pm d\leq c\pm d$$

— *pour tout nombre négatif c*

$$ax \leq b \Longrightarrow ax \times c \leq b \times c$$

En particulier, lorsqu'on multiplie par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.

Exemple. *On résout* $4x + 0.004 \leq 854$.

1. *on soustrait* 0.004 *dans les deux parties de l'inégalité*

$$4x \leq 854.004$$

2. *on multiplie par l'inverse de* 4 *dans les deux parties de l'inégalité*

$$x \leq \frac{854.004}{4} = 213.50100$$

Donc, l'ensemble des solutions est

$$S =]-\infty, 213.50100]$$

Examen

2.5 Trigonométrie

Dans un triangle rectangle, le théorème de Pythagore fournit une égalité permettant d'apprécier la valeur de ses longueurs. Toutefois, il reste intéressant d'apprécier ses angles surtout celles qui ne valent pas 90^o. Pythagore n'offre pas d'outil pour ce sujet, mais il n'en est rien car l'étude d'un angle couvre l'étude des autres.

Le but de ce chapitre est de saisir la manière d'obtenir la valeur d'un angle et la fonction qui la détermine.

2.5.1 Cosinus

Soit ABC un triangle rectangle en B.

Définition. *On appelle cosinus de l'angle* $\widehat{CAB}$ *le nombre noté* $\cos(\widehat{CAB})$ *définie par*

$$\cos(\widehat{CAB}) = \frac{AB}{AC}$$

Le cosinus d'un angle dans un triangle rectangle ne s'applique pas pour l'angle droite.

Mise en garde. La calculatrice doit être mise en mode « degré » pour calculer correctement le cosinus d'un nombre.

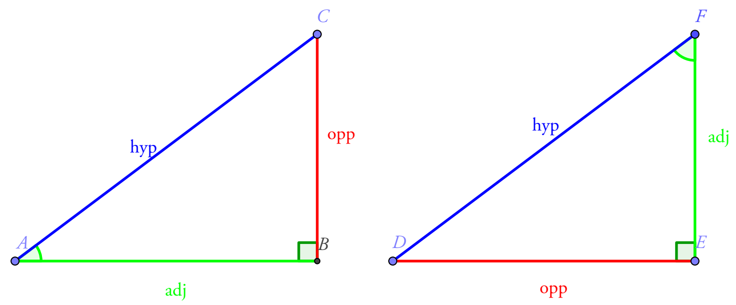


FIGURE 2.5.1 Table des triangles rectangles dénotant les côtés adjacents et opposés.

Exemple. *On peut citer* $\cos(0) = 1$ *ou encore* $\cos(1) \simeq 0.999$.

Notons que la valeur de l'angle dépend de l'unité auquel on l'associe. Il existe deux unités pour l'angle, l'une mesurant l'angle géométriquement tel qu'on le conçoit avec un rapporteur ; l'autre quantifiant cette mesure analytiquement. Pour calculer le cosinus, on privilégiera l'angle en radian. Ainsi, pour calculer le cosinus d'un angle géométriquement obtenu en degré, on pensera à le convertir en radian.

Angle (en degré)	30	45	60	90	120	135	150	180
Angle (en radian)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

TABLEAU 2.5.2 Relation entre angle en radian et angle en degré.

La calculatrice calcule naïvement le cosinus d'un angle en radian. Après mesure avec le rapporteur, il y a un intérêt à convertir du degré au radian. Sinon, il est possible de paramétré les machines, telles que la calculatrice, en mode degré pour s'en passer de la conversion.

Propriété. *Soit ABC un triangle rectangle en B, alors le cosinus d'un angle*

1. *n'a aucune unité.*
2. *est compris entre 0 et 1.*

2.5.2 Trigonométrie et applications

Définition. *On appelle*

— *sinus de l'angle $\widehat{CAB}$ le nombre noté* $\sin(\widehat{CAB})$ *définie par*

$$\sin(\widehat{CAB}) = \frac{BC}{AC}$$

— *tangente de l'angle $\widehat{CAB}$ le nombre noté* $\tan(\widehat{CAB})$ *définie par*

$$\tan(\widehat{CAB}) = \frac{BC}{AB}$$

Ces formules se mémorisent astucieusement avec la formule « SOH-CAH-TOA » pour

$$\sin(\text{angle}) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos(\text{angle}) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \tan(\text{angle}) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

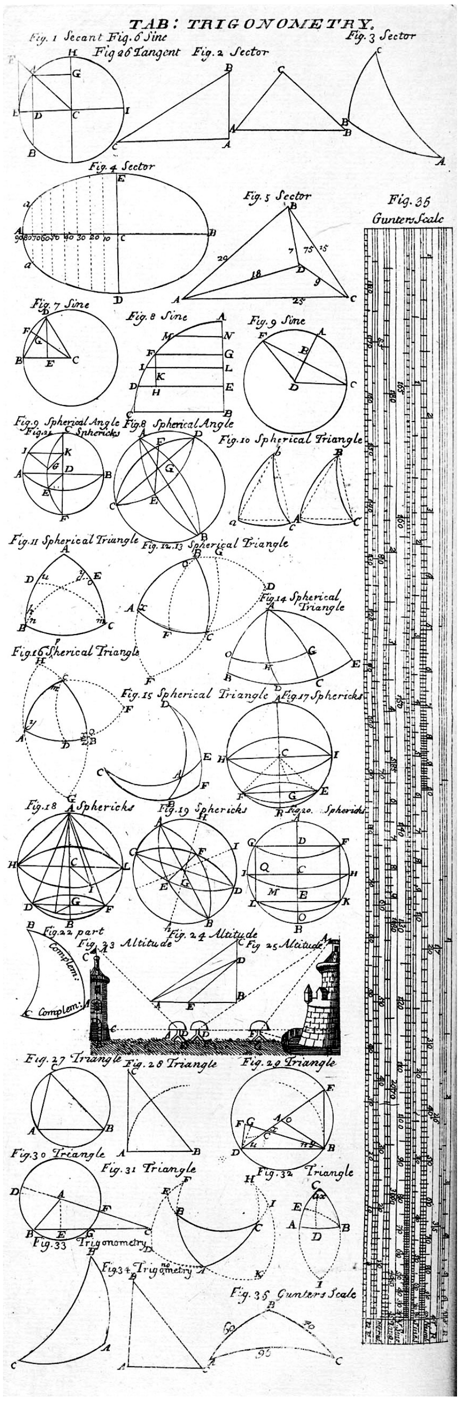


FIGURE 2.5.3 Table de trigonométrie datant de 1728 extrait de [1].

L'une des richesses géométrique de la trigonométrie réside dans le calcul des longueurs et des angles des triangles.

Méthode (recherche de longueur). *Étant donné ABC un triangle rectangle en B, alors déterminer la longueur d'un de ses côtés dépend des hypothèses que l'on a.*

— *soit on connaît au moins deux longueurs, alors on applique Pythagore.*

— *soit on connaît au moins une longueurs et au moins un angle (excepté l'angle droit), alors on applique les identités trigonométriques.*

Méthode (recherche d'angle)**.** *Étant donné ABC un triangle rectangle en B, alors déterminer la mesure d'un de ses angles (excepté l'angle droit) dépend exclusivement des longueurs que l'on connaît.*

— *soit on connaît l'hypoténuse et le côté opposé alors on applique l'identité avec le sinus.*
— *soit on connaît l'hypoténuse et le côté adjacent alors on applique l'identité avec le cosinus.*
— *soit on connaît les côtés opposé et adjacent alors on applique l'identité avec la tangente.*

En pratique, il s'agit d'identifier correctement les objets géométriques (angle ou côté) dont on connaît les mesures de l'objet géométrique que l'on cherche à calculer.

Examen

2.6 Fonctions

L'étude du coefficient de proportionnalité dans un tableau de proportionnalité permet d'obtenir une relation entre les nombres. Cette relation se généralise naturellement à travers une expression qui dépend du nombre de départ : les fonctions.

Ce chapitre est une généralité sur les fonctions où on restreint leur étude graphiquement en appréciant leur omniprésence.

2.6.1 Définition

Soient E et F deux ensembles de nombres.

Définition. *On appelle fonction f définie sur E à valeurs dans F est un objet qui associe chaque élément de E vers un unique élément de F. Formellement, on le note*

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

On dira alors que

— *x est l'antécédent de y par f.*
— *y est l'image de x par f.*

Intuitivement, la fonction qui a un nombre associe un autre nombre c'est « la machine » qui a un nombre « le transforme » à un autre nombre.

Exemple. *On peut citer :*

— *$f : x \mapsto ax$ avec a un nombre.* *(fonction linéaire)*
— *$g : x \mapsto ax + b$ avec a, b deux nombres.* *(fonction affine)*
— *$h : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0, b, c$ trois nombres.* *(fonction du second degré)*

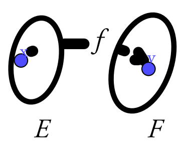


FIGURE 2.6.1 Illustration des relations entre x et y avec f.

Pour finir, notons que l'antécédent d'une fonction est situé dans l'ensemble de départ tandis que l'image est situé dans l'ensemble d'arrivé.

2.6.2 Représentation graphique

Lors d'une étude de fonction, les fonctions sont moins parlantes algébriquement tandis qu'une approche visuelle est beaucoup plus intéressante.

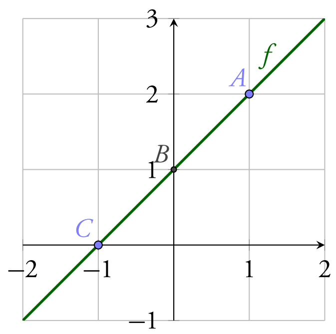
Définition. *On appelle graphe d'une fonction $f : E \to F$ l'ensemble des points de la forme $(x, f(x))$ avec $x \in E$.*

Le graphe est géométriquement un ensemble de points. Graphiquement, il s'agit alors de repérer les coordonnées correspondant à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées.

Méthode (Interpolation)**.** *Il s'agit de tracer f en se donnant un nombre fini de point.*

1. *Déterminer un nombre fini de point $(x, f(x))$.*
2. *Tracer la représentation graphique de f.*

Exemple. *Soit la fonction $f : x \mapsto x+1$ pour $-2 \leq x \leq 2$. Pour $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ et $f(-1) = 0$, les points sont $(0,1)$, $(1,2)$ et $(-1,0)$ donc son graphe est de la forme suivante.*



Examen

Chapitre 3

Troisième trimestre

Ce dernier volet met un terme à la progression de l'année en traitant l'arithmétique et l'analyse.

3.1 Triangles semblables

Nous connaissons un certain nombre de famille de triangle : les triangles rectangles, les triangles isocèles ou encore les triangles équilatéraux. Suivant ses caractéristiques, son étude peut être réduit suivant des critères bien définies. S'ensuit une classification des triangles qui permet de les reconnaître ; on les appelle les triangles semblables.

3.1.1 Définitions

Définition. *On dit que deux triangles sont*

— *semblables si chaque angle sont deux à deux de même mesure.*

— *égaux si chaque côté sont deux à deux de même longueur.*

Évidemment, si au moins une mesure d'angle (resp. de longueur) entre les deux triangles est différent alors ils ne sont pas semblables (resp. égaux).

Exemple. *Considérons les triangles ABB', DCC', EFG et HIJ comme dans la 3.1, alors*

— *les triangles ABB' et DCC' sont semblables.*

— *les triangles EFG et HIJ sont égaux.*

3.1.2 Propriétés

L'intérêt de cette notion réside dans la réduction de l'étude d'un triangle à partir d'un autre encore plus simple.

Tout d'abord, l'étude des triangles égaux est réduite à l'étude des triangles semblables.

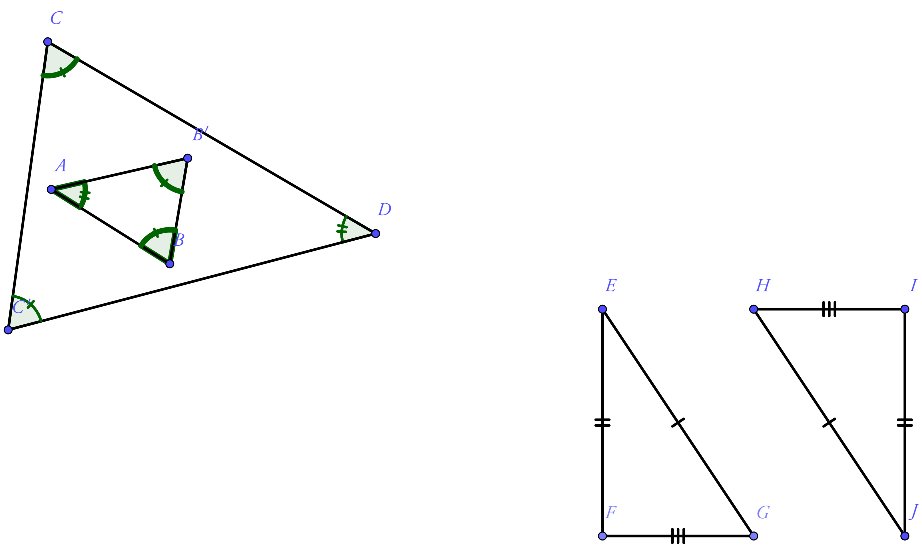
Propriété. *Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ égaux alors $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont semblables.*

La réciproque n'est en revanche pas vraie. On peut s'en convaincre par un contre-exemple donné par la 3.2. Ce sont deux triangles semblables mais non égaux.

Propriété. *Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont semblables alors les longueurs des côtés opposés aux angles de même mesure sont proportionnelles.*

Propriété. *Si chaque longueur des côtés de deux triangles est proportionnelle alors ces triangles sont semblables.*

FIGURE 3.1 – Illustration d'exemples de triangles égaux et semblables.



3.1.3 Conséquence

Une conséquence permet de faire le lien avec les agrandissements et réductions des figures.

Propriété. *Si ABC et DEF sont semblables alors*

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = k$$

De plus, si

- $k > 1$ *alors* DEF *est un agrandissement de* ABC.
- $k < 1$ *alors* DEF *est une réduction de* ABC.

Examen

3.2 Statistiques

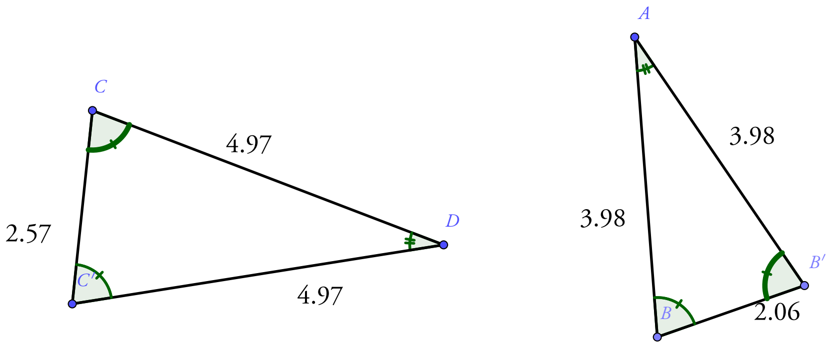
L'analyse des données dispense de l'examen des données en rapport avec un sujet d'étude. Cette discipline exploite les statistiques puisqu'elles permettent de juger ou de prendre de bonne décision sur des questions en rapport à cette étude.

Dans ce chapitre, nous restreindrons cet exercice à des cas simples et à des outils élémentaires.

3.2.1 Définitions

Commençons par rappeler les rudiments élémentaires. On rappelle qu'une série statistique est une collection de nombre associé à un caractère.

Figure 3.2 – Exemples de triangles semblables mais non égaux.



Définition. *On appelle*

- *effectif d'une donnée le nombre de fois que cette donnée se répète dans la série.*
- *effectif total d'une série statistique le nombre total de donnée dans la série.*
- *fréquence d'une donnée le rapport entre l'effectif de cette donnée et l'effectif total de la série.*

Rappelons à cet effet, qu'il existe deux types de série statistique :

- celle où le caractère peut être mesuré : taille, poids, longueur, aire, etc. (données quantitatifs)
- celle où le caractère ne peut pas être mesuré : couleur, sexe, forme géométrique, goût, etc. (données qualitatifs)

Par surcroît, notons qu'on peut construire deux types de tableau suivant le nombre de donnée :

- le tableau en classe si le nombre de donnée est grand.
- le tableau en effectif si le nombre de donnée est petit.

Exemple. *Soit la série statistique « 0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4 » désignant le nombre d'élève ayant été retenu dans une classe de collège. Cette série se rassemble dans le tableau ci-après.*

Nombre de retenu	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Total*
Effectif (nombre d'élève)	*8*	*3*	*3*	*3*	*3*	*20*
Fréquence	*0.4*	*0.15*	*0.15*	*0.15*	*0.15*	*1*
Pourcentage (en %)	*40*	*15*	*15*	*15*	*15*	*100*

3.2.2 Indicateurs statistiques

Pour extraire des informations pertinentes sur une série statistique, on dispose de certains outils pour le faire.

Définition. *On appelle*

- *moyenne de la série la somme du produit entre les effectifs et les données divisée par l'effectif total de la série.*
- *médiane de la série la donnée située à la moitié de la série.*
- *étendue de la série la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.*

Statistiquement, ces indicateurs s'interprètent de la manière suivante

— la moyenne correspond à l'apparition moyen du caractère dans la série statistique.

— la médiane correspond à la donnée qui sépare en deux la série statistique.

— l'étendue correspond au plus grand écart du caractère dans la série statistique.

Remarque. *La moyenne et la médiane sont deux indicateurs différents. La moyenne dépend des données alors que la médiane dépend du nombre de donnée.*

Remarque. *Soit n le nombre de donnée d'une série statistique,*

— *si n est impair alors la médiane est la donnée située au rang $\frac{n}{2}$.*

— *si n est pair alors la médiane est entre les données $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$.*

Naturellement, pour étudier la médiane d'une série il est nécessaire de trier les données dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand).

3.2.3 Représentation des données

Avec les indicateurs statistiques, nous pouvons faire mieux en terme d'étude. Nous pouvons apprécier leur étude moyennant des représentations visuelles suivant le tableau construit.

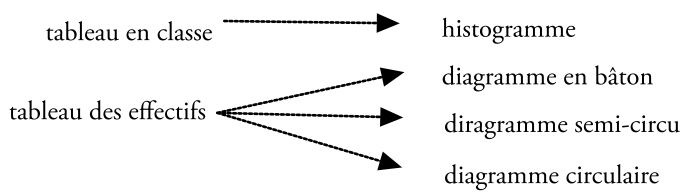


FIGURE. Illustration des représentations utilisées suivant le tableau statistique.

Bien que celles-ci ont déjà été vues, nous rappelons ici leur construction. On considère une série statistique à $n \in \mathbb{N}^*$ données d'effectif total E.

Méthode. *Pour l'histogramme, on exploite un tableau de N classe.*

Caractère	$[x_1, x_2[$	...	$[x_{N-1}, x_N[$
Effectif	e_1	...	e_{N-1}

1. *Tracer l'axe des abscisses avec les partitions.*
2. *Tracer l'axe des ordonnées avec les hauteurs.*
3. *Correspondre les hauteurs à chaque classe.*
4. *Tracer les bars.*

Méthode. *Pour le diagramme en bâton, on procède de la même manière que l'histogramme.*

Caractère	x_1	...	x_n
Effectif	e_1	...	e_n

1. *Tracer l'axe des abscisses avec les x_i.*

2. *Tracer l'axe des ordonnées avec les hauteurs.*
3. *Correspondre les hauteurs à chaque classe.*
4. *Tracer les bars.*

Méthode. *Pour le diagramme semi-circulaire, on calcule les parts pour lesquelles partagerons chaque caractères.*

Caractère	x_1	...	$[x_{n-1}, x_n[$	*Total*
Effectif	e_1	...	e_n	E

1. *Tracer la moitié d'un cercle en notant O le centre.*
2. *Pour i allant de 1 à n alors :*
3. *Tracer le segment partant de O au bord cercle avec un angle*

$$d_i = \frac{e_i \times 180}{E}$$

Pour le diagramme circulaire, il suffit de faire un cercle complet et en exploitant la formule suivante pour les angles

$$d_i = \frac{e_i \times 360}{E}$$

Examen

3.3 Solides de l'espace

Certains objets peuvent être construit de façon systématique « à la main » comme des cubes ou encore des pavés contrairement à d'autre comme les sphères.

Le but de ce chapitre est la construction progressive de certain solide.

3.3.1 Définition

Rappelons la définition des solides et donnons quelques exemples sur eux.

Définition. *On appelle solide de l'espace tout ensemble de points situés à l'intérieur d'une partie fermée de l'espace.*

Exemple. *On peut citer le cube, le pavé, la pyramide, etc.*

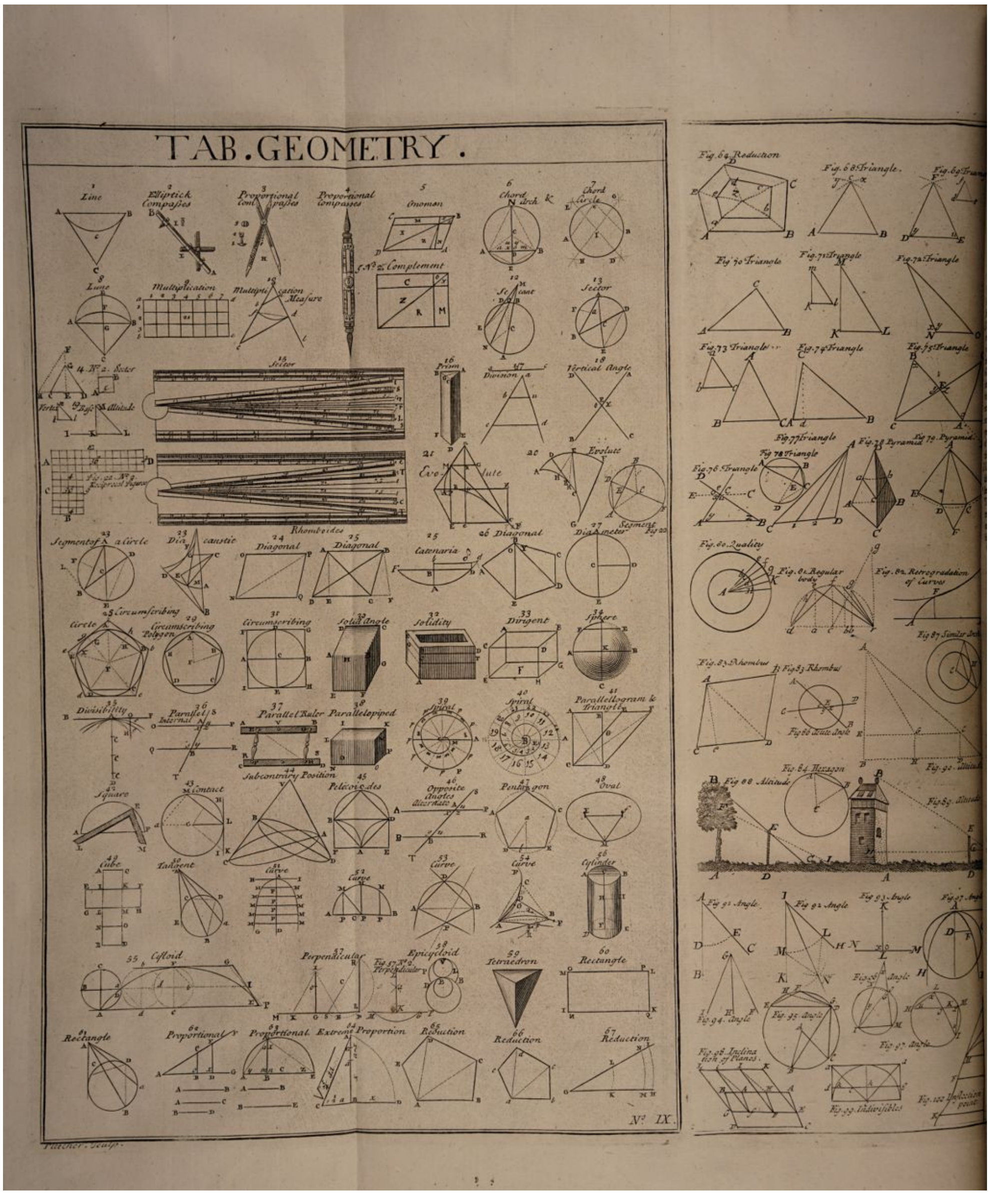


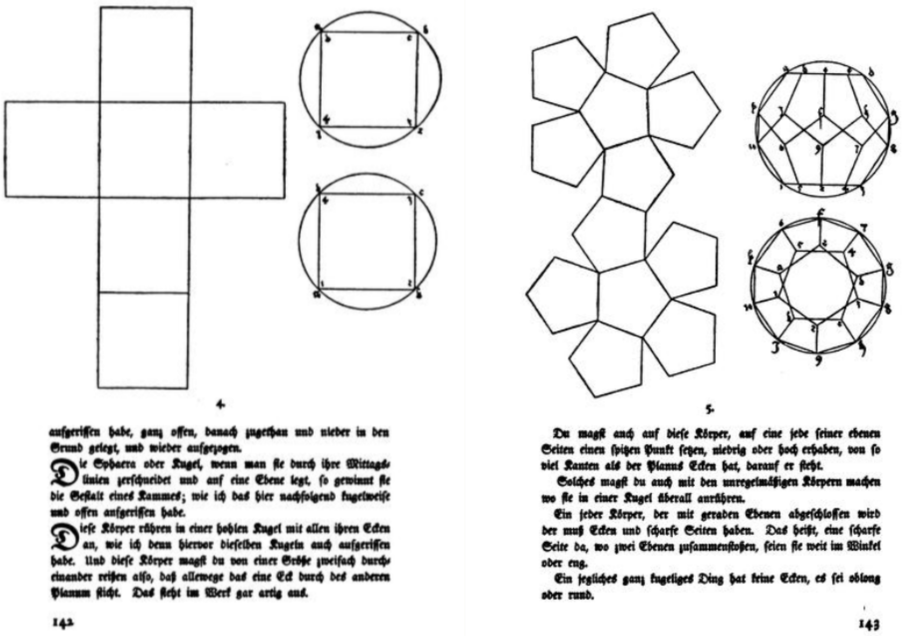
FIGURE 3.2.1 Formulaire des figures géométriques avec les solides datant de 1782 extrait de [1] p. 856.

La construction de solide peut naïvement se faire à partir de feuilles de papiers en « collant » morceaux par morceaux. Cette approche n'étant pas la plus économe matériellement, il existe une autre approche nécessitant un seul papier et en ne faisant que des plies : c'est la construction de patron.

Définition. *On appelle patron toute surface plane permettant de construire un solide par pliage et sans recouvrement.*

Naturellement, on sera ramener à décomposer le solide à construire en plusieurs sous-solides élémentaires. De surcroît, notons qu'un solide peut être obtenu avec plusieurs patrons différents.

Exemple. *On peut citer un patron du cube et du dodécaèdre.*


4

aufgerissen habe, ganz offen, danach zugethan und nieder in den Grund gelegt, und wieder aufgezogen.

Die Sphaera oder Kugel, wenn man sie durch ihre Mittags-linien zerschneidet und auf eine Ebene legt, so gewinnt sie die Gestalt eines Kammes; wie ich das hier nachfolgend kugelweise und offen aufgerissen habe.

Diese Körper rühren in einer hohlen Kugel mit allen ihren Ecken an, wie ich denn hiervor dieselben Kugeln auch aufgerissen habe. Und diese Körper magst du von einer Größe zweifach durcheinander reißen also, daß allewege das eine Eck durch des anderen Planum sticht. Das steht im Werk gar artig aus.

142

5

Du magst auch auf diese Körper, auf eine jede seiner ebenen Seiten einen spitzen Punkt setzen, niedrig oder hoch erhaben, von so viel Kanten als der Planus Ecken hat, darauf er steht.

Solches magst du auch mit den unregelmäßigen Körpern machen wo sie in einer Kugel überall anrühren.

Ein jeder Körper, der mit geraden Ebenen abgeschlossen wird der muß Ecken und scharfe Seiten haben. Das heißt, eine scharfe Seite da, wo zwei Ebenen zusammenstoßen, seien sie weit im Winkel oder eng.

Ein jegliches ganz kugeliges Ding hat keine Ecken, es sei oblong oder rund.

143

FIGURE 3.2.2 *Représentation d'un patron du cube et du dodécaèdre datant de 1525 extrait de [4], p.142-143.*

Pour un solide nécessitant une construction plus consistante, il est possible de décomposer sa construction en des figures que l'on connaît pertinemment le patron.

Terminons cette partie pour ajouter la possibilité d'obtenir un patron d'un solide numériquement avec le logiciel GSolaar.

3.3.2 Repérage spatiale

Dans le plan, on exploite le rectangle pour situé un point. Dans l'espace, on exploite le pendant du rectangle : le parallélépipède rectangle.

Définition. *On appelle point de l'espace tout triplet noté* (x, y, z) *avec*

— x *désignant la coordonnée sur l'axe des* x.

— y *désignant la coordonnée sur l'axe des* y.

— z *désignant la coordonnée sur l'axe des* z.

Avec de tels coordonnées, il est possible de connaître la position d'un point visuellement dans l'espace. Pour obtenir cette position visuelle, on considère un repère orthonormée, et le point se place en identifiant chacune de ses coordonnées.

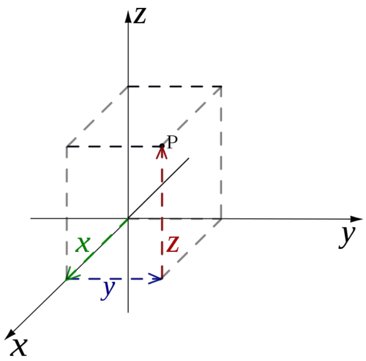


FIGURE 3.2.3 Repère dans l'espace et d'un point $P = (x, y, z)$.

Une application intéressante du repérage spatiale est sans doute le repérage sphérique. Positionner un point sur une sphère c'est intuitivement reconnaître un point sur une planète, qu'on peut librement l'identifier comme la planète terre.

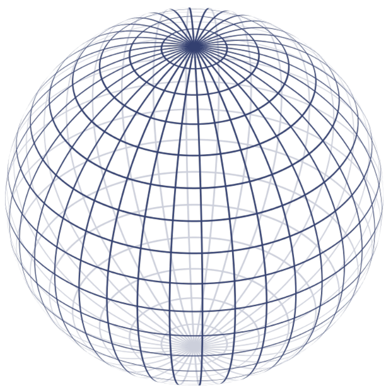


FIGURE 3.2.4 Repère sur une sphère.

L'essentiel de cette partie est de savoir placer des points sur ce repère et surtout de les placer sur la sphère.

Examen

3.4 Fonctions linéaires et affines

L'étude du coefficient de proportionnalité dans un tableau de proportionnalité permet d'obtenir une relation entre les nombres. Cette relation se généralise naturellement à travers une expression qui dépend du nombre de départ : les fonctions linéaires et affines.

Ce chapitre étudie les fonctions linéaires, plus généralement les fonctions affines, concernant leur utilité dans les problèmes.

3.4.1 Définition

Définition. *On dit qu'une fonction f est*

— *linéaire si f est de la forme $x \mapsto ax$ avec a un nombre.*

— *affine si f est de la forme $x \mapsto ax + b$ avec a, b deux nombres.*

Si tel est le cas, on appellera a le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

Exemple. *Les fonctions suivantes sont linéaires*

$$x \mapsto x \quad x \mapsto -x \quad x \mapsto -\frac{3}{5}x \quad x \mapsto \frac{2^3 \times 3^6}{5^2}x$$

Les fonctions suivantes sont affines

$$x \mapsto x+1 \quad x \mapsto -x \quad x \mapsto x+5 \quad x \mapsto -\frac{11}{15}x + \frac{4}{5}$$

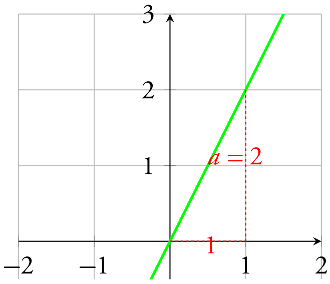


FIGURE 3.3.1 Représentation graphique de $x \mapsto 2x$

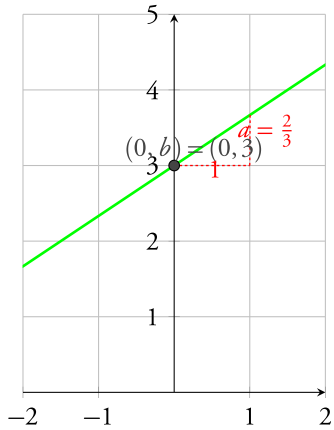


FIGURE 3.3.2 Représentation graphique de $x \mapsto \frac{2}{3}x + 3$

Remarque. *Toute fonction linéaire est affine, en revanche la réciproque n'est pas vraie. (voir figure 3.3.1)*

Contre-exemple. *La fonction $x \mapsto x+1$ est affine mais n'est pas linéaire. En effet, son expression ne dépend pas seulement que de la variable x.*

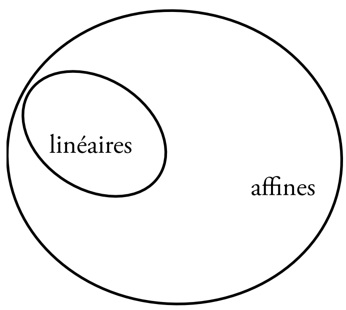


FIGURE 3.3.1 Diagramme ensemble entre les fonctions affines et linéaires.

3.4.2 Propriétés

Propriété. *On a*

1. *pour $x_1 \neq x_2$, le coefficient directeur est*

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2. *Le graphe des fonctions linéaires et affines est une droite.*

Examen

3.5 Probabilités

Le but de ce cours est de mesurer les chances que des issues se réalisent.

3.5.1 Expérience et évènement

Définition. *On appelle*

- *expérience aléatoire toute réalisation qui dépend du hasard.*
- *issues toute possibilité sortant de l'expérience.*
- *événement une collection d'issue.*

Exemple. *On peut citer le lancer d'une pièce à deux faces parfaitement équilibrée , alors*

- *« obtenir pile », « obtenir face » sont les issues de cette expérience.*
- *« obtenir pile » est un événement possible il s'agit de la collection à une issue « obtenir pile ».*

Exemple. *On peut citer le tir à l'arc sur une cible circulaire de rayon 4 cm, alors*

- *l'aire du cercle de rayon 4 cm correspond aux issues de cet expérience.*
- *« tirer au centre de la cible » est un événement possible, il s'agit de la collection d'issue décrit comme l'aire du centre de la cible.*

Naturellement, toute issue d'une expérience est un événement de cette expérience. En revanche, la réciproque n'est pas vraie.

Contre-exemple. *On peut citer le lancer d'un dé parfaitement équilibré à 6 faces, alors*

- *« obtenir 1 », « obtenir 2 », « obtenir 3 », « obtenir 4 », « obtenir 5 », « obtenir 6 » sont les issues de cet expérience.*
- *« obtenir un nombre pair » est un événement possible il s'agit de la collection des issues « obtenir 2 », « obtenir 4 », « obtenir 6 ».*

Notons qu'une expérience aléatoire doit proprement être énoncé. Même si l'évidence pèse sur une expérience connue, une donnée non énoncé ou mal énoncé ne doit pas être négligée ! Citons par exemple une expérience de pile ou face sans préciser que la pièce est bien équilibré. Sous ce fait, il faut étudier le cas où la pièce est équilibré et celui où elle ne l'est pas.

3.5.2 Probabilité

Définition. *On appelle probabilité d'un événement le nombre qui mesure la réalisation d'un événement.*

La construction de la probabilité d'un événement n'est pas du tout fastidieux. Pour l'obtenir, nous étudions un événement en répétant l'expérience de manière indépendante. Ainsi, nous voyons la fréquence à laquelle cet événement se répète et plus l'expérience se répète, plus cette fréquence se rapproche d'une valeur : cette valeur n'est rien d'autre que la probabilité de cet événement.

Définition. *On dit que des événements sont équiprobables s'ils ont tous la même probabilité de se réaliser. Si tel est le cas, alors tout événement équiprobable A admet une probabilité égale à*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n}{N}$$

avec

— *n le nombre d'issues concernées.*
— *N le nombre d'issues total.*

Exemple. *Considérons une pièce parfaitement équilibré alors les issues possibles de cette expérience se noterons*

— *A : « obtenir pile ».*
— *B : « obtenir face ».*

On compte 2 issues possibles ainsi $N = 2$ donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$$

Dans le cas d'une situation non-équiprobable, on ne peut pas écrire cette probabilité.

Contre-exemple. *Considérons une pièce non-équilibré qui tombe toujours sur pile et jamais sur face, alors les issues possibles de cette expérience se noterons*

— *A : « obtenir pile ».*
— *B : « obtenir face ».*

On compte 2 issues possibles ainsi $N = 2$ donc

$$\mathbb{P}(A) = 1 \textit{ et } \mathbb{P}(B) = 0$$

Méthode (arbre de probabilité)**.** *Pour une expérience donnée ayant deux issues possibles, on peut la représenter avec un arbre de probabilité. Pour la construire, on suit la démarche suivante*

1. *Tracer deux branches.*
2. *Tracer deux branches à partir des racines précédentes.*
3. *Réitéré la démarche encore.*

Examen

Bibliographie

[1] Ephraim Chambers (1728) *Cyclopædia : or, An Universal Dictionary of Arts and Sciences*, vol. 1.

[2] Nadine Billa, Virginie Blanc, Marion Convert, Emilie Elkine, Mathieu Fernandez, Amaïa Flous, Aurélie Laulhere, Marie-Christine Layan, Siegfried Maillard, Marion Larrieu, Marion Robertou, Agnès Villattes (2020) *Mission indigo : maths 3e*, série Mission indigo, ISBN : 9782017025467, Hachette éducation.

[3] Euclide (IIIe siècle av. J-C) *Éléments*.

[4] Albrecht Dürer (1525), *Unterweysung der Messung mit dem Zyrkel und Rychtscheyd, Nürnberg : München, Süddeutsche Monatsheft*, English translation with commentary in Strauss, Walter L. (1977), The Painter's Manual, New York