Mathématiques élémentaires
4ème

Haerearii Metuarea
https://hmetuarea.github.io/

Table des matières

Introduction

Ce cours de mathématiques de 4ème est basé sur la progression des cours du collège de Pao-pao. Les notions sont introduites de manière concise pour laisser la place à la résolution d'exercice et de problème. Un accent est mis sur le thème de la biologie qui, fidèlement aux exigences du programme officiel, permet de concerner le public aux enjeux climatiques actuels.

Formellement aux exigences du ministère et des inspecteurs, la recherche est la compétence majeure qui couvre la résolution de problème.

Chapitre 1

Premier trimestre

1.1 Divisibilité

L'étude des entiers enrichie la compréhension du système de numérotation et permet de mobiliser ses propriétés lors de calcul notamment la divisibilité.

1.1.1 Définition

Définition. *Soient a et b deux entiers positifs avec $b \neq 0$. S'il existe un entier k tel que $a = b \times k$ alors*

— *b divise a ou encore b est un diviseur de a.*

— *a est divisible par b ou encore a est un multiple de b.*

Naturellement, 1 divise n'importe quel entier et n'importe quel entier est un multiple de 1. De plus, si a divise b alors a est toujours plus petit que b et si a est un multiple de $b > 0$ alors a est toujours plus grand que b.

Exemple. *On peut citer*

— 2 *divise* 10 *car* $10 = 5 \times 2$

— 5 *divise* 10 *car* $10 = 5 \times 2$

— 3 *divise* 33 *car* $33 = 3 \times 11$

— 4 *divise* 20 *car* $20 = 4 \times 5$

Exemple. *On peut citer*

— *8 est un multiple de 4 ou encore 2.*

— *4 est un multiple de 4 ou encore 2.*

— *20 est un multiple de 4,2, ou encore 5.*

— *100 est un multiple de 2,5, ou encore 10.*

— *120 est un multiple de 2,3,4 ou encore 5.*

En pratique, il suffit de trouver un entier k vérifiant $a = b \times k$. Pour montrer le contraire, il suffit de montrer qu'un tel entier n'existe pas en écrivant proprement tous les diviseurs de a. Naturellement, on peut utiliser cette même méthode pour distinguer lequel est le multiple ou le diviseur.

Lorsqu'un entier n'est pas divisible par un autre, on connaît exactement la raison.

Propriété ((admise) division euclidienne)**.** *Soient a, b deux entiers positifs, il existe un unique couple d'entier relatifs (q, r) tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.*
On appelle q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b et on dit qu'on a fait la division euclidienne de a par b.

La condition $0 \leq r < b$ est importante. L'égalité $30 = 7 \times 3 + 9$ correspond bien à la formule mais il ne s'agit pas d'une division euclidienne puisque $r = 9 > 7 = b$. Dans ce cas, on réitère la division euclidienne en faisant la division euclidienne de r par b.

Méthode (Montrer que b ne divise pas a)**.** *Utiliser la division euclidienne.*
Ce qu'il faut faire.

1. *Poser la division euclidienne de a par b.*
2. *Calculer le reste r.*

A partir de là, on distingue deux cas :

— *Si $r = 0$ alors b divise a.*
— *Si $r \neq 0$ alors b ne divise pas a.*

1.1.2 Critères de divisibilité

On dispose de critère de divisibilité pour les entiers 2,3,5 et 9.

Propriété. *Soit a un entier positif.*

entier	*critère*
a est divisible par 2	*le chiffre des unités de a est* $0, 2, 4, 6$ *et* 8.
a est divisible par 3	*la somme des chiffres de a est divisible par* 3.
a est divisible par 5	*le chiffre des unités de a est* 5 *et* 0.
a est divisible par 9	*la somme des chiffres de a est divisible par* 9.
a est divisible par 10	*le chiffre des unités de a est* 0.

Examen

1.2 Triangles rectangles

La géométrie plane exploite très souvent les triangles, tout comme les cercles que l'on verra. C'est pourquoi, leur maîtrise est inévitable et élémentaire, notamment, pour pouvoir modéliser visuellement des situations.

1.2.1 Définition

Définition. *Un triangle ABC est rectangle en B si l'angle $\widehat{ABC}$ vaut* 90 *degré.*
Si tel est le cas, on appelle hypoténuse le côté opposé à B et $\widehat{ABC}$ l'angle droit.

Notons que l'hypoténuse dans un triangle rectangle désigne « le plus grand » côté parmi les deux autres. Une représentation possible d'une telle figure se réalise aussi bien avec « la corde à noeuds ».

Exemple. *On peut citer les triangles suivants*

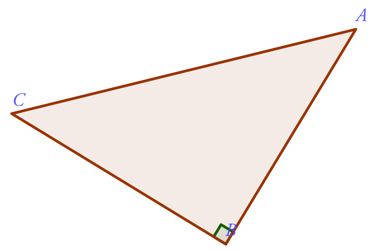
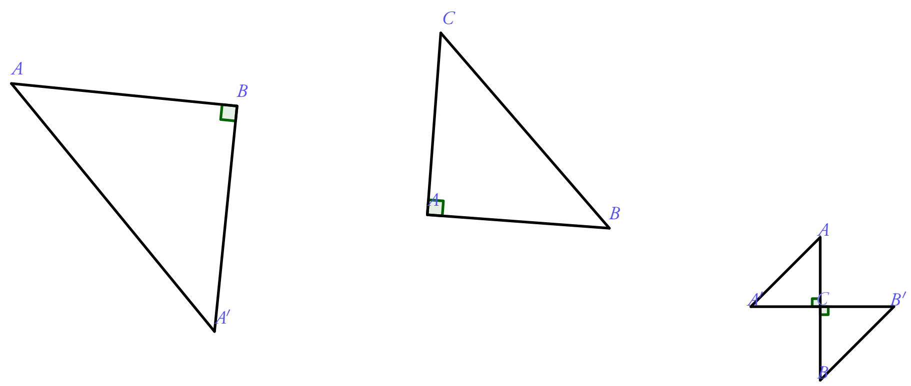


FIGURE 1.1 – Triangle ABC rectangle en B.



1.2.2 Théorème de Pythagore

Compte tenu de l'omniprésence de ces objets, il est aussi intéressant de déterminer la longueur de ses côtés.

Théorème (Pythagore)**.** *Soit ABC un triangle quelconque du plan affine. Si ABC est un triangle rectangle en B alors ses longueurs vérifient la relation suivante*

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Démonstration. On considère des carrés placés du côté des arrêtes du triangle ABC et on calcule leur aire. □

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196

TABLE 1.1 – Exemples de quelques carrés parfaits.

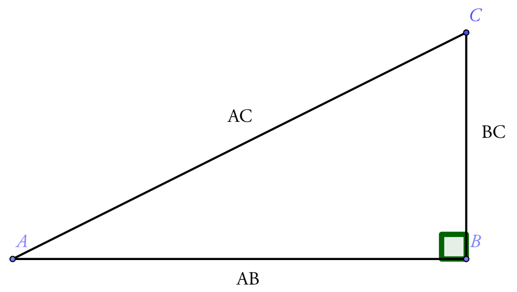


FIGURE 1.2 – Illustration du triangle rectangle énoncé dans le théorème.

Le calcul des longueurs avec une telle formule fait intervenir les nombres qualifiés de « parfait ».

Définition. *Soit a un nombre quelconque. Un nombre a est un carré parfait si c'est le carré d'un entier.*

En d'autre terme, un nombre a est un carré parfait s'il existe un entier n tel que $a = n^2$. De ce fait, calculer la racine d'un tel entier a est exactement égale à n. En particulier, on obtient directement une expression explicite sans avoir recourt à une approximation de cette quantité.

Exemple. *On peut citer 25 et le calcul de sa racine vaut exactement $\sqrt{25} = 5$.*

Méthode (Calculer la longueur d'un triangle rectangle)**.** *L'idée consiste à repérer la longueur à calculer sur le triangle de celles qu'on connaît. Puis, d'appliquer l'égalité que présente le théorème de Pythagore. On se place dans le cas où on a un triangle ABC rectangle en B.*

Ce qu'il faut avoir. *Un triangle ABC rectangle en B.*

Ce qu'il faut faire.

1. *Repérer sur le triangle la longueur à calculer.*
2. *Deux cas se présentent, soit le côté à calculer est l'hypoténuse, soit il ne l'est pas.*
3. *Si on doit calculer AC (l'hypoténuse) alors on résout $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$*
4. *Si on doit calculer BC alors on résout $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$*

Examen

1.3 Nombres relatifs

Les entiers naturels, i.e. les entiers positifs, constituent la base de la numération pour représenter des quantités. Il est aussi possible d'obtenir de nouveaux entiers à partir d'eux rien qu'en regardant leur opposé. Cette nouvelle collection d'entier est appelée les nombres relatifs. Les nombres relatifs apparaissent dans énormément de situation : météorologie, mesure, etc.

1.3.1 Définition

Le lien étroit qu'entretienne les entiers positifs et négatifs amènent à définir les nombres relatifs comme l'ensemble des entiers constitués des nombres positifs et de leurs opposés.

Définition. *On appelle nombre relatif tout entier positif* n *qui admet un opposé noté* $-n$.

Exemple. *On peut citer -5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4 ou encore 5.*

Rappelons que l'ensemble noté $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs. Les nombres relatifs forment une collection d'entier notée $\mathbb{Z}$ qui admet une quantité infinie de nombre de signe positif et de signe négatif.

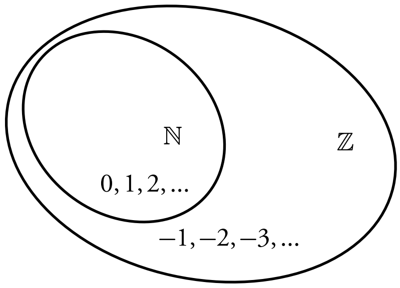


FIGURE 1.3 – Diagramme ensembliste entre les entiers positifs et négatifs.

Méthodiquement, on peut repérer l'opposer en plaçant un entier sur une frise et en l'identifiant **à l'opposer** de lui par rapport à 0.

1.3.2 Règles des signes sur l'addition

Cet ensemble obéit à des propriétés opératoires élémentaires semblables aux entiers $\mathbb{N}$. Toutefois, les propriétés qu'on retiendra concerneront plus particulièrement le signe.

Il est tout à fait naturel de savoir à quel niveau on se trouvera si on monte de 3 niveau à partir du niveau -2 ou encore, quelle température fera-t-il si la température monte de 2 degré s'il fait $-1C^o$.

Propriété (admise)**.** *Soient* a, b *deux entiers positifs alors*

— $-a + (-b) = -(a + b)$

— $-a + b = -(a - b)$

Exemple. *Pour* $a = 2$ *et* $b = 3$ *alors* $-2 + (-3) = -(2 + 3) = -(5) = -5$.

Exemple. *S'il fait -2 degré actuellement et que la température baisse encore de -4 alors il fera* $-2 + (-4) = -(2 + 4) = -6C^o$.

1.3.3 Règles des signes sur le produit

Des règles valent aussi pour les produits.

Propriété (admise)**.** *Soient* a, b *deux entiers positifs alors*

— $(-a) \times (-b) = a \times b$

— $(-a) \times (+b) = -(a \times b)$

— $-(-a) = a$
— $0 \times (-a) = 0$

Exemple. *Pour* $a = 2$ *et* $b = 3$, $(-2) \times (-3) = 2 \times 3 = 6$.

Propriété (admise)**.** *Soient* a, b *deux entiers positifs avec* $b \neq 0$ *alors*
— $\frac{(-a)}{(b)} = -\frac{a}{b}$
— $\frac{(a)}{(-b)} = -\frac{a}{b}$
— $\frac{(-a)}{(-b)} = \frac{a}{b}$
— $a = \frac{a}{b} \times b$

Exemple. *Pour* $a = 100$ *et* $b = 7$, *on a* $\frac{(-100)}{(7)} = -\frac{100}{7}$.

Examen

1.4 Transformations géométriques

Dans un pavage régulier du plan, il est évident qu'une même figure est « répétée » de manière régulière sur le plan indéfiniment. Cette répétition démontre toute la richesse visuelle qu'offre un passage qu'on doit notamment aux transformations géométriques : les symétries et les translations.

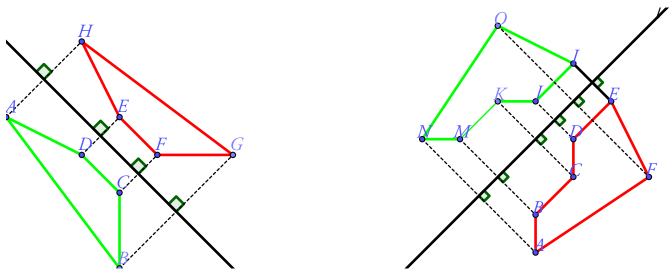
1.4.1 Symétrie axiale

Définition. *Le symétrique de* P *à la droite* $\mathscr{D}$ *est le point* Q *tel que* $\mathscr{D}$ *est la médiatrice du segment* $[PQ]$.

Définition. *La symétrie axiale d'une figure par rapport à la droite* $\mathscr{D}$ *est la figure obtenue en construisant le symétrique de chaque point de la figure.*
Dans ce cas, la droite $\mathscr{D}$ *est appelé « axe de symétrie ».*

Intuitivement, faire la symétrie d'une figure c'est « dessiner son reflet ».

Exemple. *Ci-après des symétries axiales.*



Méthode (Construire une symétrie axiale)**.** *Il est d'abord nécessaire de se munir d'une règle et d'un crayon à papier.*
1. *Tracer les symétriques des points de la figure en plaçant la règle graduée perpendiculairement à l'axe à égale distance.*
2. *Lier les points de sorte que la figure soit superposable à la figure de départ.*

L'exercice que l'on fait pour obtenir une symétrie à partir d'un morceau de papier est explicitement présenté dans la propriété suivante.

Propriété. *Deux figures symétriques par rapport à une droite sont superposables.*

Démonstration. Évident. □

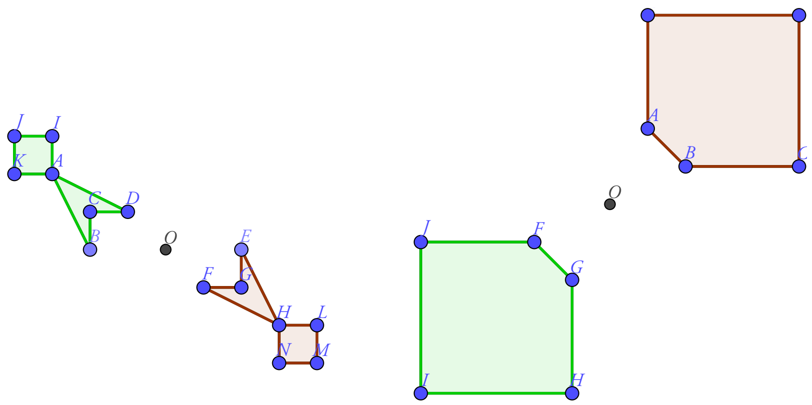
1.4.2 Symétrie centrale

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan.

Définition. *Le symétrique de P à la droite $\mathscr{D}$ est le point Q tel que $\mathscr{D}$ est la médiatrice de $[PQ]$.*

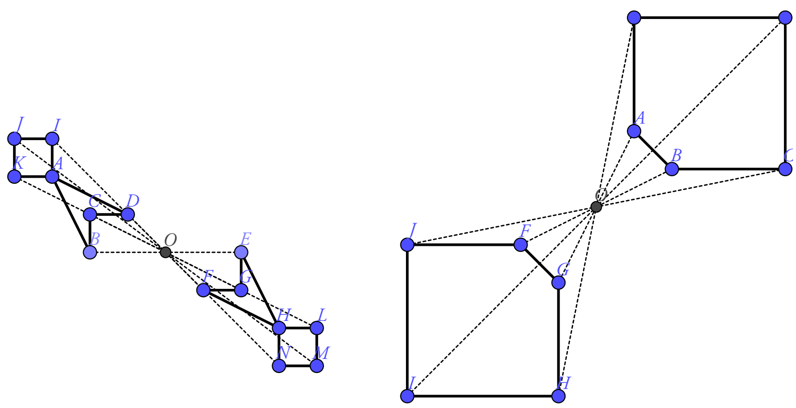
Définition. *La symétrie centrale d'une figure par rapport à un point O est la figure obtenue en construisant le symétrique de chaque point de la figure par rapport à O.*
Dans ce cas, le point O est appelé « centre de symétrie ».

Exemple. *Ci-après des symétries centrales.*



> **Méthode** (Construire une symétrie centrale)**.** *Il est d'abord nécessaire de se munir d'une règle, d'un compas et d'un crayon à papier.*
>
> 1. *Tracer les droites entre les sommets de la figure et le centre O.*
> 2. *Tracer avec un compas les demi-cercles entre les sommets et les droites.*
> 3. *Placer les points à l'intersection de chaque demi-cercle et droite.*

De manière analogue, on peut aussi s'en passer du compas. On construira alors les points symétriques en reportant les distances.



De ces transformations, certaines particularités sont conservées dans les figures et facilite grandement leur compréhension.

Propriété. *On a*

1. *Deux figures symétriques par rapport à un point sont superposables.*

2. *Toute symétrie centrale conserve les alignements, les mesures des angles, les longueurs et les aires.*
3. *Si deux droites sont symétriques par rapport à un point alors elles sont parallèles.*

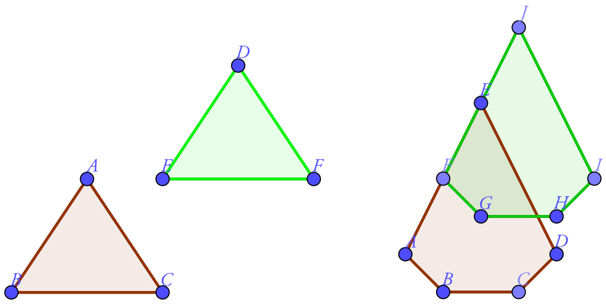
Démonstration. Les points 1. et 3. sont évidentes par définition.
Le point 2. est directement liée à la notion de symétrie □

1.4.3 Translation

Définition. *La translation d'une figure selon une direction $\overrightarrow{v}$ est la figure obtenue en faisant déplacer ses points sur $\overrightarrow{v}$.*
Si tel est le cas, $\overrightarrow{v}$ est appelé « vecteur ».

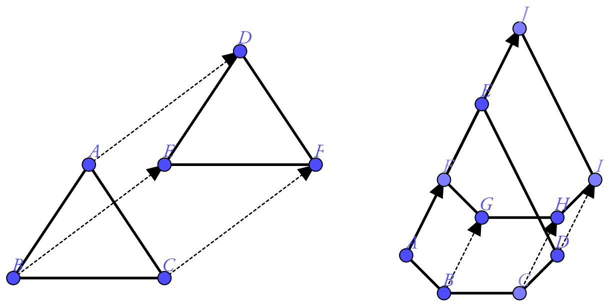
Intuitivement, faire la translation d'une figure c'est la « déplacer » dans une direction donnée.

Exemple. *Ci-après des figures translatées.*



Méthode (Construire une translation)**.** *Il est d'abord nécessaire de se munir d'une règle et d'un crayon à papier.*

1. *Relever les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$.*
2. *Déplacer les points de la figure suivant les coordonnées de $\overrightarrow{v}$.*



De ces transformations, certaines particularités sont conservées dans les figures et facilite grandement leur compréhension.

Propriété. *On a*

1. *Une figure et son image par une translation sont superposables.*
2. *La translation conserve les alignements, les mesures des angles, les longueurs et les aires.*

Démonstration. Évident. □

Examen

Chapitre 2

Second trimestre

2.1 Statistiques

L'analyse des données dispense d'une étude rigoureuse des nombres obtenues dans une enquête ou un recensement. Celles-ci permettent d'estimer, faire de la prévision et surtout pour la bonne prise de décision sur des questions délicates.

Le but de ce cours est de donner un aperçu de la statistique à travers les outils de base.

2.1.1 Séries statistiques

En statistique, on étudie un caractère sur des individus dans une population ; celui-ci étant observé ou mesuré. En particulier, on obtient une collection de nombre, appelé aussi donnée, sur ce caractère qui permettent son étude.

Définition. *Une série statistique est une collection de nombres attribuées à un caractère.*

Exemple. *On peut citer l'étude suivante : sur une plage, on relève la taille des cocotiers* $2, 3, 5, 4, 1, 2, 3, 6, 2, 0, 1, 5, 9$ *mesurée en mètre.*

— *population : les palmiers sur la plage.*
— *individus : les cocotiers.*
— *caractère : la taille des cocotiers.*
— *série statistique (ou donnée) :* $2, 3, 5, 4, 1, 2, 3, 6, 2, 0, 1, 5, 9$.

Exemple. *On peut citer l'étude des couleurs avec la série « bleu,bleu,rouge,rouge,vert,vert,noir,blanc » désignant les couleurs des voitures sur Papeete.*

— *population : les voitures sur Papeete.*
— *individus : les voitures.*
— *caractère : la couleur.*
— *série statistique (ou donnée) : « bleu,bleu,rouge,rouge,vert,vert,noir,blanc ».*

Profitons de ces exemples pour relever les deux familles de données :

— donnée quantitative : tout ce qui peut être mesuré. (exemple 1)
— donnée qualitative : tout ce qui ne peut pas être mesuré. (exemple 2)

2.1.2 Indicateurs statistiques

Pour étudier une série statistique, on dispose de certains outils.

Définition. *On appelle*

1. *effectif d'une donnée dans une série statistique le nombre de répétition de cette donnée dans la série.*
2. *effectif total d'une série statistique la somme des effectifs de cette série.*
3. *fréquence d'une donnée dans une série statistique la division entre l'effectif du caractère par l'effectif total.*
4. *pourcentage d'une donnée dans une série statistique la fréquence de cette donnée multipliée par 100.*

Leur interprétation est cruciale et leur utilisation est essentiellement centrée sur ça :

— l'effectif d'une valeur :

— l'effectif total d'une série :

— la fréquence d'une donnée :

On distingue deux types de tableau :

— le tableau des effectifs : pour peu de données.

— le tableau des classes : pour énormément de données.

Exemple. *Soit la série statistique 150, 160, 160, 170, 170, 170, 170, 170, 180, 190 désignant la taille en centimètre de 10 élèves dans une classe de collège. L'effectif total est la somme des effectifs donc elle veut* 10. *Dans un tableau des effectifs, on obtient*

Taille (en centimètre)	*150*	*160*	*170*	*180*	*190*
Effectif	*1*	*2*	*5*	*1*	*1*
Fréquence	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Exemple. *Soit la série statistique 9, 8, 7, 5, 10, 11, 12, 20, 19, 20, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 11, 6, 8, 9, 9, 10, 11, 3, 5, 8, 10 désignant le poids (en kg) des sacs à dos. Le nombre de donnée étant grand, on propose de faire un tableau des classes :*

Poids (en kg)	$[0,5[$	$[5,10[$	$[10,15[$	$[15,20[$
Effectif	*3*	*15*	*5*	*3*
Fréquence	$\frac{3}{10}$	$\frac{15}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$

Outre ces outils, nous porterons notre attention sur la médiane et la moyenne.

Définition. *La moyenne d'une série statistique est égale à la somme des données divisée par l'effectif total.*

Remarque. *Si l'on adopte un tableau des classes, il est nécessaire de manipuler le centre de chaque classe pour calculer la moyenne. Même si un tableau de classe simplifiera les calculs, notons que la moyenne avec lui sera moins précise qu'un tableau des effectifs.*

Exemple. *On s'appuyant sur le tableau de la série statistique 150, 160, 160, 170, 170, 170, 170, 170, 180, 190. La moyenne est de*

$$\frac{1 \times 150 + 2 \times 160 + 5 \times 170 + 1 \times 180 + 1 \times 190}{10} = 169$$

En donnant un tableau des classes, on obtient

Taille (en centimètre)	$[150,170[$	$[170,200[$
Effectif	*3*	*7*
Fréquence	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

Le centre de classe de $[150,170[$ *est* $\frac{170+150}{2} = 160$ *et pour* $[170,200[$ *est* $\frac{200+170}{2} = 185$. *Donc, la taille moyenne vaudra*

$$\frac{3 \times 160 + 7 \times 185}{10} = 177.5$$

Définition. *La médiane correspond à la valeur situé à 50 % des valeurs de la série.*

Remarque. *La moyenne et la médiane sont deux indicateurs différents. La moyenne dépend des données alors que la médiane dépend du nombre de donnée.*

On reprend l'exemple de la première section.

Exemple. *Le tableau de la série statistique 150, 160, 160, 170, 170, 170, 170, 170, 180, 190, désignant la taille en centimètre de 10 élèves dans une classe de collège, est*

Taille (en centimètre)	*150*	*160*	*170*	*180*	*190*
Effectif					
Fréquence					

On écrit :

— *moyenne :*

— *médiane : Il y a 10 valeurs, donc la médiane se situe au milieu (50 % des valeurs) qui est la 5ème valeurs donc 170.*

2.1.3 Représentations

Pour « visualiser » des données, on dispose d'une palette de représentation :

— histogramme.

— diagramme en bar.

— diagramme circulaire.

— diagramme semi-circulaire.

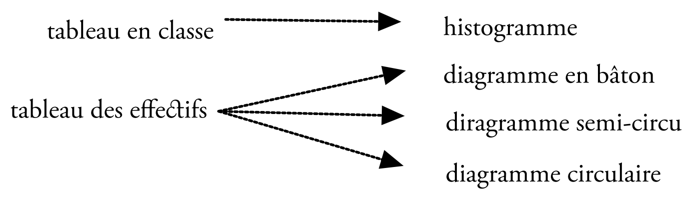


FIGURE 2.1 – Illustration des représentations utilisées suivant le tableau statistique.

On considère une série statistique à $n \in \mathbb{N}^*$ données d'effectif total E.

Méthode. *Pour l'histogramme, on exploite un tableau de N classe.*

Caractère	$[x_1, x_2[$	...	$[x_{N-1}, x_N[$	*Total*
Effectif	e_1	...	e_{N-1}	E

1. *Tracer l'axe des abscisses avec les partitions.*
2. *Tracer l'axe des ordonnées avec les hauteurs.*
3. *Correspondre les hauteurs à chaque classe.*
4. *Tracer les bars.*

Méthode. *Pour le diagramme en bâton, on procède de la même manière que l'histogramme.*

Caractère	x_1	...	x_n	*Total*
Effectif	e_1	...	e_n	E

1. *Tracer l'axe des abscisses avec les* x_i.
2. *Tracer l'axe des ordonnées avec les hauteurs.*
3. *Correspondre les hauteurs à chaque classe.*
4. *Tracer les bars.*

Méthode. *Pour le diagramme semi-circulaire, on calcule les parts pour lesquelles partagerons chaque caractères.*

Caractère	x_1	...	x_n	*Total*
Effectif	e_1	...	e_n	E

1. *Tracer la moitié d'un cercle en notant* O *le centre.*
2. *Pour* i *allant de* 1 *à* n *alors :*
3. *Tracer le segment partant de* O *au bord cercle avec un angle*

$$d_i = \frac{e_i \times 180}{E}$$

Pour le diagramme circulaire, il suffit de faire un cercle complet et en exploitant la formule suivante pour les angles

$$d_i = \frac{e_i \times 360}{E}$$

Examen

2.2 Calcul littéral

Le produit et la somme fonde les bases du calcul. D'autre quantité à calculer dépende du produit de plusieurs sommes comme $4 \times (1+1+1+1)$ et dans ce cas-ci, on applique naivement les règles opératoires. En revanche, quand des lettres sont mises en jeu comme $a \times (x + x + x + x)$, l'exercice devient moins évident et d'autres règles sont nécessaires : la distributivité et le développement.

2.2.1 Développement et factorisation

On rappelle qu'une expression littérale est une expression comportant des nombres et des lettres.

Définition. *On dit qu'on développe une expression lorsque*

$$k(a+b) = ka + kb$$

avec k, a et b trois nombres.

Exemple. *Soient x, y deux nombres, alors on peut citer*
- $2(x+1)+5 = 2x+7$
- $2(x+1)+x = 3x+2$
- $2(x+1)+y = 2x+2+y$

Définition. *On dit qu'on factorise une expression lorsque*

$$ka + kb = k(a+b)$$

avec k, a et b trois nombres.

Exemple. *Soient x, y deux nombres, alors on peut citer*
- $2x+2 = 2(x+1)$
- $2x+4 = 2(x+2)$
- $x^2y + xy = xy(x+1)$

En pratique, il s'agit de repérer les termes qui se répètent et de les réunir en un seul terme où l'exposant correspond au nombre de terme regroupé.

Remarque. *Distribuer c'est appliquer la formule de gauche à droite alors que factoriser c'est appliquer la formule de droite à gauche.*

Bien entendu, « la commutativité des nombres » assure que cette formule vaut également pour la quantité $(a+b)k$.

En pratique, il s'agit simplement de « distribuer » les termes en facteur avec chaque terme « dans la parenthèse ».

2.2.2 Substitution

La particularité des expressions est qu'elles constituent une expression en fonction d'une variable. De ce fait, il est possible d'évaluer cette expression suivant la valeur qu'on donne à cette variable : c'est la substitution.

Définition. *On dit qu'on substitue une variable dans une expression littérale lorsqu'on remplace la variable dans l'expression par sa valeur.*

Exemple. *On peut citer*
- *pour $x = 1$, $2x+2 = 2\times 1+2 = 4$.*
- *pour $x = 2$, $x^2+x = 2\times 2+2 = 6$.*
- *pour $x = 2$, $x(x+4) = 2\times(2+4) = 2\times 6 = 12$.*

Bien que court, ce chapitre constitue une série d'outil de calcul pour la résolution de problème de nature géométrique, arithmétique ou encore sur des domaines extérieurs aux mathématiques.

Examen

2.3 Nombres rationnels

Les nombres rationnels représentent une grande diversité de quantité que l'on retrouve dans plusieurs domaines : les parts ou encore les pourcentages. Une raison d'être des nombres rationnels est leur capacité à partager des mesures, des proportions, des figures semblables ou encore des probabilités.

2.3.1 Définition

Définition. *On dit qu'un nombre a est rationnel si a s'écrit sous la forme fractionnaire*

$$a = \frac{p}{q}$$

avec p, q deux entiers où $q \neq 0$. Si tel est le cas, on appellera
- *p le numérateur.*
- *q le dénominateur.*

En particulier, ce sont des nombres formés par le quotient de deux nombres relatifs. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$ et admet une « quantité » infinie de nombre.

Exemple. *On peut citer :*
- $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{100}$ *ou encore* $\frac{1}{12345}$ *; en général avec $n \in \mathbb{Z}$.* *(fractions unitaires)*
$$\frac{1}{n}$$
- $\frac{5}{10}$, $\frac{123}{100}$ *ou encore* $\frac{98765}{10000}$ *; en général avec $n \in \mathbb{Z}$ et a un nombre.* *(fractions décimales)*
$$\frac{a}{10^n}$$
- $\frac{5}{2}$, $\frac{888}{256}$ *ou encore* $\frac{98563}{16}$ *; en général avec $n \in \mathbb{Z}$ et a un nombre.* *(fractions dyadiques)*
$$\frac{a}{2^n}$$

Notons que la division par un nombre nul n'existe pas ; il s'agit formellement du cas pour $q = 0$. On retiendra accessoirement que pour tout nombre a, on a la relation $a = \frac{a}{1}$; de même, pour $a \neq 0$, $\frac{a}{a} = 1$.

A ce niveau, l'utilisation de la géométrie est très avantageuse pour comprendre les fractions. Elles représentent une portion d'aire de figure géométrique ou encore d'une longueur d'un côté d'un polygone. En particulier, manipuler des nombres rationnels c'est faire de la géométrie. On pourra se rapprocher du livre II de [3] pour des illustrations.

2.3.2 Relations d'ordre

Tout nombre rationnel s'écrit comme une fraction c'est pourquoi on peut naïvement calculer leur valeur par la calculatrice. Toutefois, cette approche porte ses limites quand deux rationnels admettent des écritures décimales quasi-identiques. Par exemple, comparons $\frac{123456789}{987654321}$ et $\frac{123456789}{987654322}$, on a

$$\frac{123456789}{987654321} \simeq 0.124999998 \text{ et } \frac{123456789}{987654322} \simeq 0.124999998$$

On aurait conclut qu'ils sont identiques alors qu'ils sont différents.

Propriété (admise)**.** *Soient* a, b, c, d *quatre nombres avec* $b, d \neq 0$.

1. *si* $b, d > 0$ *(ou* $b, d < 0$*) alors*

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad < cb$$

2. *si* $b > 0$ *et* $d < 0$ *(ou* $b < 0$ *et* $d > 0$*) alors*

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad > cb$$

Exemple. *On peut citer*

— $\frac{1}{2} < 1$ *car* $1 < 2$.

— $\frac{1}{205} < \frac{6}{5} = \frac{6}{1230}$ *car* $5 \times 6 < 1230 \times 6$.

— $\frac{123546879}{987654322} < \frac{123546879}{987654321}$ *car* $987654321 < 987654322$.

En particulier, en multipliant ou en divisant par un nombre non nul positif le sens de l'inégalité ne change pas. Intuitivement, on peut passer d'une comparaison entre des proportions à une comparaison entre des aires ; et réciproquement.

2.3.3 Arithmétique des rationnels

La structure des nombres rationnels est analogue à celui des nombres relatifs. Il reste possible de construire de nouveau nombre rationnel moyennant les opérations usuelles telles que l'addition et la multiplication.

Propriété (admise)**.** *Soient* a, b, c *quatre nombres avec* $b \neq 0$*, alors*

1. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$. *(produit)*
2. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$. *(division)*
3. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$. *(addition)*
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$. *(addition - cas général)*

Exemple. *On peut citer*

1. $\frac{85}{412} \times \frac{123}{256} = \frac{85 \times 123}{412 \times 256} = \frac{10455}{105472}$
2. $\frac{\frac{12}{34}}{\frac{56}{78}} = \frac{12}{34} \times \frac{78}{56} = \frac{936}{1904}$
3. $\frac{75}{12345} + \frac{98}{12345} = \frac{75+98}{12345} = \frac{173}{12345}$

En général, l'égalité $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ n'est absolument pas vraie ! On peut s'en convaincre en comparant $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = 1.1$ et $\frac{1+3}{2+5} = \frac{4}{7} \simeq 0.57 \neq 1.1$.

2.4 Triangles rectangles et caractérisation

Les triangles rectangles sont des objets présents dans énormément de situation explicitement et implicitement. Quand elle se présente comme telle, on peut obtenir des informations sur elles : ses longueurs. Quand elle se présente implicitement, il est possible de ramener l'étude d'un triangle à celui d'un triangle rectangle et pour obtenir un tel triangle il faut la caractériser.

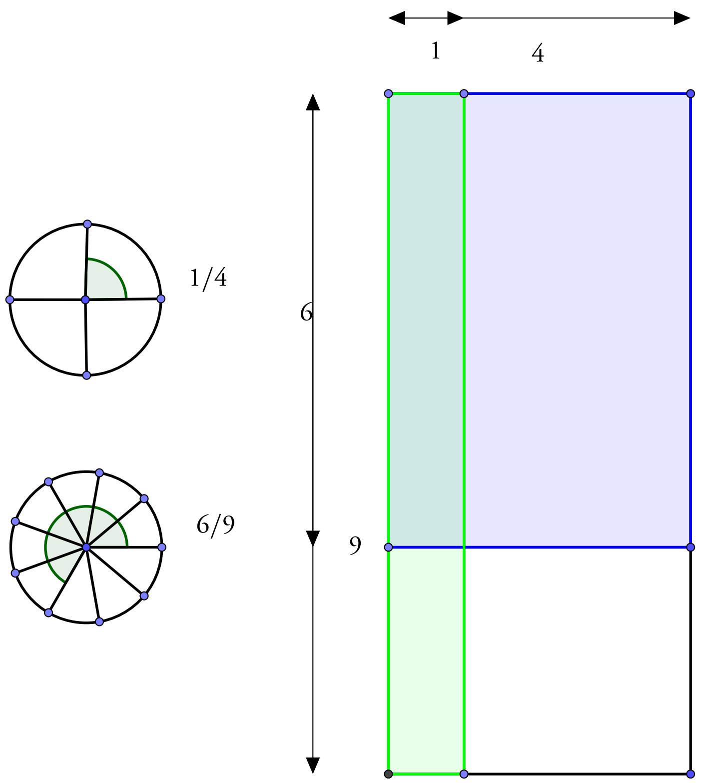


FIGURE 2.2 – Comparaison géométrique de $\frac{1}{4}$ et $\frac{6}{9}$.

2.4.1 Définitions

Ce chapitre traitera de deux sujets : les triangles rectangles et les carrés parfaits qu'on redéfinit une nouvelle fois.

Définition. *On dit qu'un triangle ABC est rectangle en A si l'angle $\widehat{ABC} = 90^o$. Si tel est le cas, on dit que $\widehat{ABC}$ est un angle droit et BC est appelé l'hypoténuse de ABC.*

On rappelle que le carré d'un nombre a est la quantité noté a^2 définie par $a^2 = a \times a$.

Définition. *On dit qu'un entier x est un carré parfait s'il existe un entier a tel que*

$$a^2 = x$$

En plus d'anticiper un carré à l'avance sans le calculer numériquement, les carrés parfaits expriment une racine carré comme un entier au lieu d'un nombre décimal.

Exemple. *On peut citer*

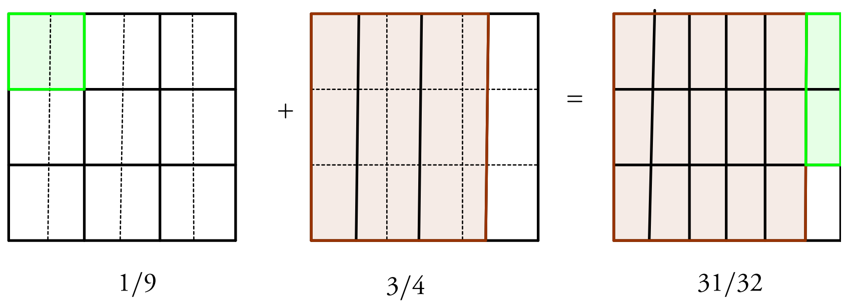


Figure 2.3 – Illustration géométrique de la somme de $\frac{1}{9}$ et $\frac{3}{4}$.

— *25 car* $25 = 5^2$.
— *121 car* $121 = 11^2$.

2.4.2 Théorème de Pythagore

Rappelons le théorème qui donne une relation entre les longueurs d'un triangle rectangle.

Théorème (Pythagore)**.** *Soit ABC un triangle. Si ABC est rectangle en B alors*

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Démonstration. Considérons un triangle rectangle sur lequel des carrés sont représentés sur leur côté. Un calcul d'aire établit la relation attendue. □

Pour savoir si un triangle est rectangle ou non, on sait exactement pourquoi.

Théorème (Réciproque de Pythagore)**.** *Soit ABC un triangle. Si les longueurs des côtés de ABC vérifient*

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

alors ABC est rectangle en B.

2.5 Proportionnalité

2.5.1 Rappels

Définition. *On dit qu'un tableau est de proportionnalité s'il existe un nombre α pour lequel chaque nombre de la ligne 1 multiplié par α vaut chaque nombre de la ligne 2.*
Si tel est le cas, on dit que α est le coefficient de proportionnalité.

Exemple. *On peut citer le tableau qui suit présentant le prix d'un produit en fonction de leur nombre ; il s'agit d'un tableau de proportionnalité de coefficient 12.*

Nombre de produit	1	2	4	11
Prix (en FCP)	12	24	48	132

Pour la suite, les lignes et les colonnes étant liées, on peut réduire l'étude d'un tableau de proportionnalité à deux colonnes et deux lignes.

Propriété. *Soient a, b, A, B quatre nombres et considérons le tableau de proportionnalité de coefficient α*

a	b
A	B

alors

1. $aB = bA$ *(produit en croix)*
2. *la ligne 2 est égale à la ligne 1 multiplié par* α.

a	b
$a \times \alpha$	$b \times \alpha$

3. *la ligne 2 est égale à la ligne 1 divisé par* α.

$A \div \alpha$	$B \div \alpha$
A	B

2.5.2 Quatrième proportionnelle

Ce chapitre traite d'un cas où un élément du tableau est inconnu soit dans la ligne 1 ou soit dans la ligne 2.

Définition. *On appelle quatrième proportionnelle du tableau de proportionnalité le nombre inconnu dans une case du tableau.*

Le calcul d'une quatrième proportionnelle se fait de plusieurs manières :

— utilisation du coefficient de proportionnalité.

— application de la règle de trois.

— multiplication ou addition de quantité.

Méthode (règle de trois)**.** *Considérons le tableau de proportionnalité*

a	b
A	x

Il suffit d'appliquer la propriété

$$ax = bA$$

En multipliant par l'inverse de a on obtient

$$x = \frac{bA}{a}$$

Évidemment, on ne peut se restreindre à un seul cas car plusieurs situations peuvent être mises en jeu.

Une belle application géométrique concerne les agrandissements et réductions de figure. On rappelle qu'une figure est agrandie (ou réduite) par un rapport k si $k > 1$ (ou $k < 1$).

Propriété. *Pour toute figure dans un agrandissement ou une réduction de rapport* k *alors*

— *les longueurs sont multipliées par* k.

— *les mesures d'angles sont conservées.*

— *l'aire d'une surface est multipliée par* k^2.

— *le volume d'un solide est multipliée par* k^3.

Démonstration. En établissant un tableau rassemblant les longueurs, alors ce tableau est un tableau de proportionnalité de coefficient k.
On démontre les assertions suivantes de la même manière. □

2.6 Parallélisme

2.6.1 Rappels

Les objets traités dans ce chapitre sont dans le plan.

On rappelle qu'une droite du plan est une collection de point aligné, en quantité infinie et sans extrémité.

Définition. *On dit que deux droites d et d' sont parallèles si elles ne s'intersectent pas. Si tel est le cas, on note $d \| d'$*

Par convention, toute droite est parallèle à elle même.

Propriété. *Soient d et d' deux droites du plan, alors*

1. $d \| d' \iff d' \| d$ *(symétrie)*
2. $d \| d'$ *et* $d' \| d'' \Longrightarrow d \| d''$ *(transitivité)*

2.6.2 Théorème de Thalès

La notion de parallélisme est bien illustrée en manipulant les triangles. Deux types de triangles retiendront notre attention qui sont les suivantes.

Théorème (Thalès)**.** *Soient ABC un triangle du plan. Si*

1. $P \in [AB]$ *et* $Q \in AC$
2. $PC \| BC$

alors

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$

Démonstration. Pour la première égalité, l'homothétie de centre A et de rapport $k = \frac{AP}{AB}$ envoie le point Q vers le point C ; en particulier

$$AQ = \lambda AC$$

On raisonne de la même manière pour la seconde égalité. □

Ce théorème s'applique dans deux configurations géométriques distinctes présentées ci-après. On distingue le premier qui montre le cas d'une homothétie de rapport négatif (le papillon) et l'autre de rapport positif (les triangles emboîtés) voir 2.4.

Si deux droites sont parallèles on sait exactement pourquoi.

Théorème (réciproque de Thalès)**.** *Soient A, B, C, P, Q quatre points du plan. Si*

1. *les points A, P, B et A, Q, C sont alignés exactement dans cet ordre.*
2. $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC}$

alors (PQ) et (BC) sont parallèles.

Bien que court, l'intérêt du chapitre consiste à apprécier les richesses de ce résultat à travers des problèmes de niveau d'abstraction progressif.

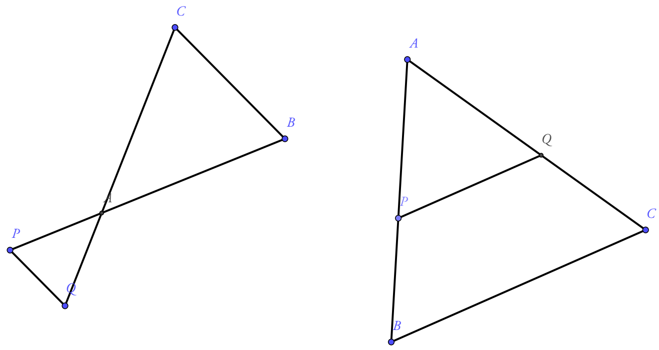


FIGURE 2.4 – Représentation géométrique d'un papillon et de triangles emboités.

2.7 Géométrie spatiale

Certains objets peuvent être construit de façon systématique « à la main » comme des cubes ou encore des pavés contrairement à d'autre comme les sphères.

Le but de ce chapitre est la construction progressive de certain solide.

2.7.1 Solide et construction

On rappelle qu'un solide est un objet dont les faces ont une forme géométrique plane. Commençons par citer un solide élémentaire : le pavé droit.

Définition. *On appelle pavé droit tout solide admettant 6 faces rectangulaires.*

Exemple. *On peut citer le cube.*

Pour représenter un pavé droit, ou même un solide en général, on utilise une technique de représentation des objets en trois dimensions sur une feuille de papier en deux dimensions tout en conservant leur proportion : c'est la perspective cavalière.

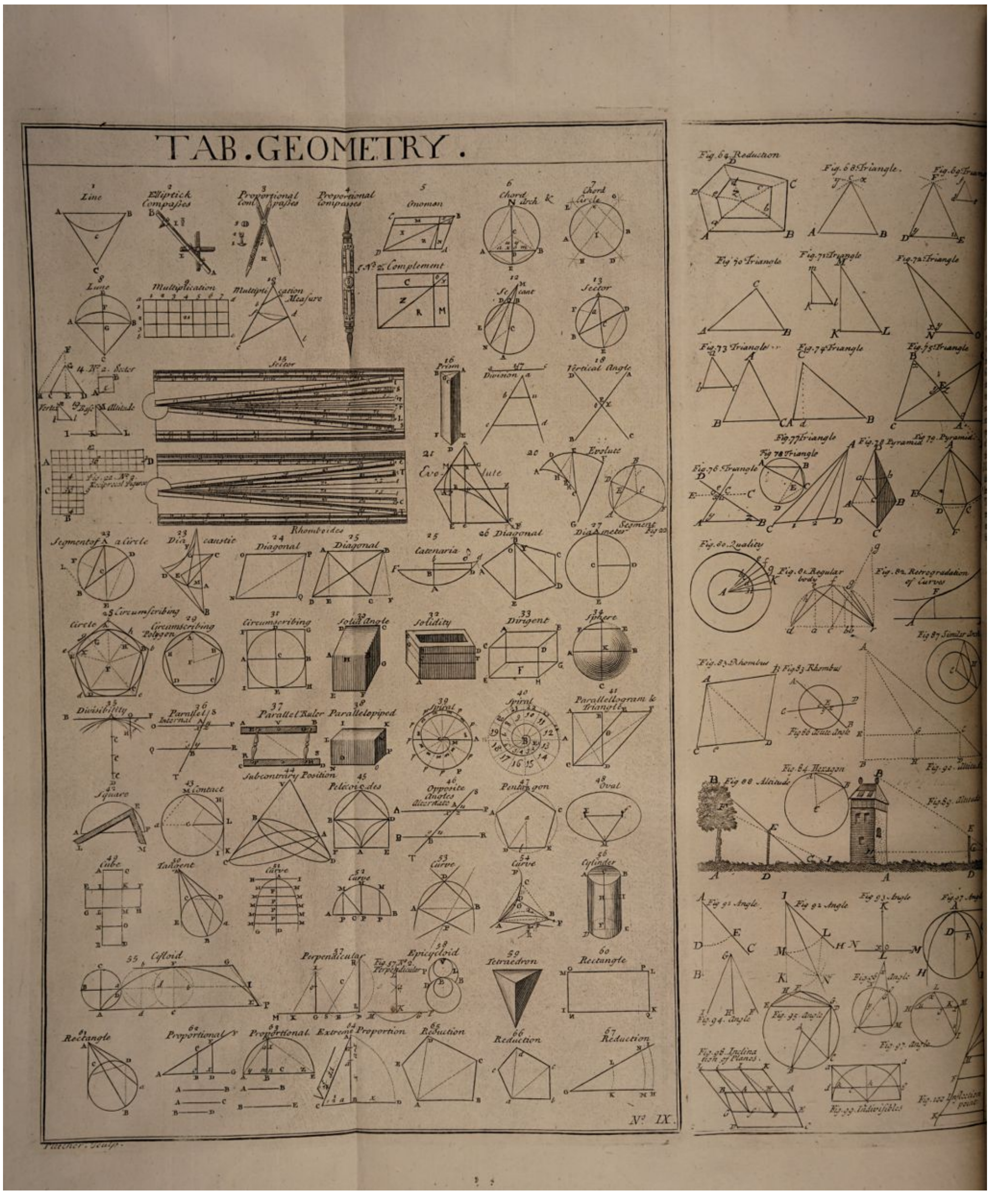


FIGURE 3.2.1 Formulaire des figures géométriques avec les solides datant de 1782 extrait de [1] p. 856.

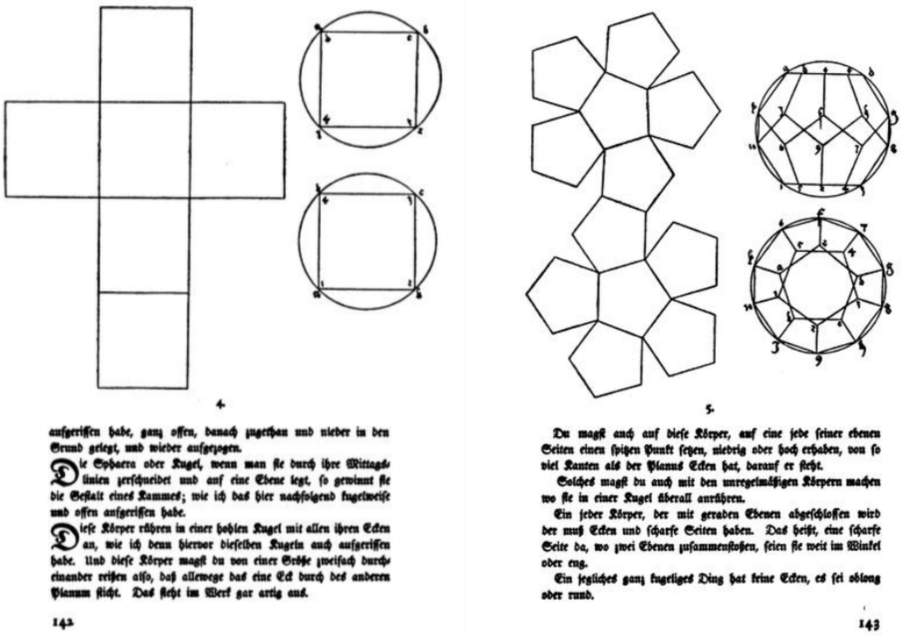
La construction de solide peut s'effectuer de plusieurs manières. La plus naïve consiste à coller à partir de feuilles de papiers morceaux par morceaux ou encore, en un seul papier, en ne faisant que des plies : c'est la construction de patron.

Définition. *On appelle patron toute surface plane permettant de construire un solide par pliage et sans recouvrement.*

Exemple. *Citons le patron d'une pyramide et d'un cône.*

Naturellement, on sera ramener à décomposer le solide à construire en plusieurs sous-solides élémentaires. De surcroît, notons qu'un solide peut être obtenu avec plusieurs patrons différents.

Exemple. *On peut citer un patron du cube et du dodécaèdre.*



4

aufgerissen habe, ganz offen, danach zugethan und nieder in den Grund gelegt, und wieder aufgezogen.

Die Sphaera oder Kugel, wenn man sie durch ihre Mittags-linien zerschneidet und auf eine Ebene legt, so gewinnt sie die Gestalt eines Kammes; wie ich das hier nachfolgend kugelweise und offen aufgerissen habe.

Diese Körper rühren in einer hohlen Kugel mit allen ihren Ecken an, wie ich denn hiervor dieselben Kugeln auch aufgerissen habe. Und diese Körper magst du von einer Größe zweifach durch-einander reißen also, daß allewege das eine Eck durch des anderen Planum sticht. Das steht im Werk gar artig aus.

142

5.

Du magst auch auf diese Körper, auf eine jede seiner ebenen Seiten einen spitzen Punkt setzen, niedrig oder hoch erhaben, von so viel Kanten als der Planus Ecken hat, darauf er steht.

Solches magst du auch mit den unregelmäßigen Körpern machen wo sie in einer Kugel überall anrühren.

Ein jeder Körper, der mit geraden Ebenen abgeschlossen wird der muß Ecken und scharfe Seiten haben. Das heißt, eine scharfe Seite da, wo zwei Ebenen zusammenstoßen, seien sie weit im Winkel oder eng.

Ein jegliches ganz kugeliges Ding hat keine Ecken, es sei oblong oder rund.

143

FIGURE 3.2.2 *Représentation d'un patron du cube et du dodécaèdre datant de 1525 extrait de [4], p.142-143.*

Pour un solide nécessitant une construction plus consistante, il est possible de décomposer sa construction en des figures que l'on connaît pertinemment le patron.

Terminons cette partie pour ajouter la possibilité d'obtenir un patron d'un solide numériquement avec le logiciel GSolaar.

2.7.2 Repérage spatiale

Dans le plan, on exploite le rectangle pour situé un point.

Définition. *On appelle repère spatial trois arêtes issus d'un point commun dans un pavé droit.*
On appelle coordonnée d'un point P de l'espace tout triplet noté $P(x, y, z)$ repéré sur le pavé droit avec

- *x l'abscisse.*
- *y l'ordonnée.*
- *z l'altitude.*

Si aucun quadrillage n'est mentionné, le sommet à chaque arrête formant le repère vaut 1 unités. Formellement, le point qui forme le repère situé sur l'axe

- des abscisses vaut $(1, 0, 0)$.
- des ordonnées vaut $(0, 1, 0)$.
- des altitudes vaut $(0, 0, 1)$.

Exemple. *Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit.*
Le repère formé par les arêtes $[AB]$, $[AD]$ et $[AE]$ a pour origine le point A, ainsi

- $A(0, 0, 0)$
- $B(1, 0, 0)$
- $D(0, 1, 0)$

— $E(0,0,1)$

Avec de tels coordonnées, il est possible de connaître la position d'un point visuellement dans l'espace.

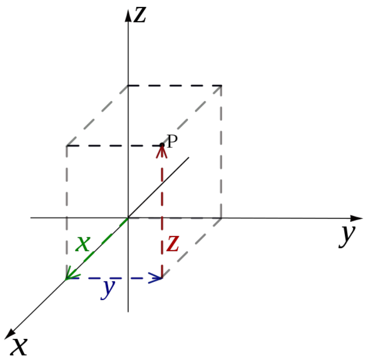


FIGURE 3.2.3 Repère dans l'espace et d'un point $P = (x, y, z)$.

Examen

Chapitre 3

Troisième trimestre

Ce dernier trimestre achève les notions de géométrie et les dernières notions d'analyse.

3.1 Probabilité

Ce chapitre introductif met en jeu la notion de hasard et de probabilité dans des cas très simples. Il se veut modeste sans aller jusqu'aux situations équiprobables.

3.1.1 Définition

Définition. *On appelle expérience aléatoire toute expérience qui dépend du hasard.*
On appelle issue de l'expérience toute éventualité qui découle de l'expérience.
On appelle événement de l'expérience toute combinaison d'issue de l'expérience.

Exemple. *Considérons le jeu du pile ou face avec une pièce parfaitement équilibrée.*

- *l'expérience est le jeu du pile ou face.*
- *les issues sont « obtenir pile » et « obtenir face ».*
- *un événement de l'expérience est « ne pas obtenir pile ».*

3.1.2 Probabilité

Dans cette section, on considère une expérience aléatoire.

Définition. *On appelle probabilité d'un événement A la quantité $\mathbb{P}(A)$ compris entre 0 et 1, définie par*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'issue concerné}}{\text{nombre d'issue total}}$$

Exemple. *Considérons le jeu de pile ou face, on compte deux issues :*

- *« obtenir pile »*
- *« obtenir face »*

L'événement A : « obtenir pile » est composée d'une issue et donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$$

Exemple. *Considérons le jeu d'un lancé de dé, on compte six issues :*

- *« obtenir 1 »*

— *« obtenir 2 »*

L'événement A : « obtenir un nombre pair » est composée des issues « obtenir 2 », « obtenir 4 » et « obtenir 6 » et donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3.2 Équations à une inconnue à une solution

Certains problèmes consistent à trouver un nombre caché. Suivant la présentation du problème, on exploite divers techniques pour trouver ce nombre et très souvent on retire une relation entre des quantités connues et le nombre cherché : les équations.

3.2.1 Définition

Soit x un nombre quelconque.

Définition. *On appelle équation à une inconnue x toute relation vérifiée pour une certaine valeur de x.*
Les valeurs de x qui vérifieront une telle équation sont appelées « solution » de l'équation.

Parmi les équations, celles qui seront étudiées sont celles de la forme suivante

$$ax + b = c$$

avec a non nul et b, c des nombres. On admettra que ces équations possèdent des solutions et qu'il y en a qu'une et une seule. Le but étant trouver cette solution.

Dans certain cas de figure, il est possible de « deviner » ces solutions.

Exemple. *L'équation $x + 1 = 2$ admet 1 comme solution.*

Exemple. *L'équation $x + 5 = 2$ admet -3 comme solution.*

3.2.2 Propriété

Pour d'autre cas de figure, « deviner » a ses limites ; citons par exemple $\frac{44}{123}x = \frac{78}{11}$. C'est pourquoi une démarche totalement nouvelle est nécessaire.

Commençons d'abord par quelque propriété.

Propriété. *Soient A, B deux nombres quelconques et l'égalité $A = B$, alors pour tout nombre α*

1. $A = B \iff A \pm \alpha = B \pm \alpha$
2. *si* $\alpha \neq 0$ *alors* $A = B \iff A \times \alpha = B \times \alpha$

Méthode. *Pour résoudre une équation de la forme $ax + b = c$, il s'agit d'isoler x dans une partie de l'égalité.*

1. *On ajoute à gauche et à droite par l'opposé de b et on simplifie.*
2. *On multiple à gauche et à droite par l'inverse de a et on simplifie.*

Exemple. *On résout* $4x + 2 = 1$

1. *On ajoute à gauche et à droite par l'opposé de $+2$ et on simplifie.*

$$4x + 2 = 1 \iff 4x = 1 - 2 \iff 4x = -1$$

2. *On multiple à gauche et à droite par l'inverse de* 4 *et on simplifie.*

$$4x = -1 \iff x = -\frac{1}{4}$$

Comme x est isolé et qu'on a bien obtenu un nombre alors la résolution est terminée.

Exemple. *On résout* $1.02x - 0.04 = 1.5$

1. *On ajoute à gauche et à droite par l'opposé de* -0.04 *et on simplifie.*

$$1.02x - 0.04 = 1.5 \iff 1.02x = 1.5 + 0.04 \iff 1.02x = 1.54$$

2. *On multiple à gauche et à droite par l'inverse de* 1.02 *et on simplifie.*

$$x = \frac{1.54}{1.02}$$

Comme x est isolé et qu'on a bien obtenu un nombre alors la résolution est terminée.

3.3 Nombres premiers

L'arithmétique est le domaine qui étudie les entiers et les relations qu'il y a entre eux. Les nombres premiers, comme nous le verrons, forment les éléments fondateurs des entiers car elles ont la caractéristique de les définir.

Ce chapitre se concentre sur l'utilisation des nombres premiers et en particulier à la résolution de problème à partir des nombres premiers.

3.3.1 Définition

Définition. *On dit qu'un nombre n est premier si ses diviseurs sont n et* 1.

Par convention, on admet que 1 n'est pas premier.

Là où les couleurs primaires sont des couleurs où on ne peut pas avoir d'autre couleur qu'eux, les nombres premiers sont, par comparaisons, des nombres dont on ne peut pas extraire plus de diviseur que 1 et lui-même.

Pour obtenir la liste des nombres premiers entre 1 et n, on dispose d'un algorithme.

Méthode (crible d'Eratosthène)**.** *On fait*

1. *Lister les nombres de 2 à n.*
2. *pour i allant de* 1 *à n :*
3. *Si i n'est pas barré alors :*
4. *Barrer tous les multiples de i.*
5. *Si i est barré alors :*
6. *Ne rien faire.*

Exemple. *Entre 1 et 10, les nombres premiers sont 1,2,3,5 et 7.*

Le but étant, au niveau quatrième, de connaître les nombres premiers entre 1 et 100, il est naturellement inutile de retenir par coeur cette liste ; à moins d'avoir une bonne mémoire. En particulier, retenir cet algorithme est beaucoup plus avantageux que de retenir la liste.

3.3.2 Décomposition en facteur premier

Le coeur du chapitre est le résultat suivant

Théorème (admis)**.** *Tout entier non nul peut être écrit de manière unique comme produit de nombre premier.*

En pratique, il s'agit de décomposer nombre par nombre en produit de nombre premier (ou aussi dit en facteur premier).

Exemple. *Décomposons* 45*, on écrit*

$$45 = 3^2 \times 5$$

3.4 Grandeurs et mesures

3.4.1 Aire

Définition. *On appelle aire d'une figure la portion limitée dans une surface.*

Figure	Formule
Carré de côté c	c^2
Rectangle de longueur l et largeur L	$l \times L$
Triangle de hauteur h et de base b	$\frac{b \times h}{2}$
Cercle de rayon r	$\pi \times r^2$

FIGURE 3.4.1 Table des formules d'aires de figure du plan.

3.4.2 Volume

Définition. *On appelle volume d'un solide la portion qu'occupe un solide dans un espace.*

Figure	Formule
Cube de côté c	c^3
Pavé droit de hauteur h, longueur l et largeur L	$h \times l \times L$
Pyramide de hauteur h et d'aire base $\mathscr{B}$	$\frac{\mathscr{B} \times h}{2}$
Sphère de rayon r	$\frac{4}{3} \times \pi \times r^2$

FIGURE 3.4.1 Table des formules de volume de solide de l'espace.

Examen

Bibliographie

[1] Ephraim Chambers (1728) *Cyclopædia : or, An Universal Dictionary of Arts and Sciences*, vol. 1.

[2] Nadine Billa, Virginie Blanc, Marion Convert, Emilie Elkine, Mathieu Fernandez, Amaïa Flous, Aurélie Laulhere, Marie-Christine Layan, Siegfried Maillard, Marion Larrieu, Marion Robertou, Agnès Villattes (2020) *Mission indigo : maths 3e*, série Mission indigo, ISBN : 9782017025467, Hachette éducation.

[3] Euclide (IIIe siècle av. J-C) *Éléments*.

[4] Albrecht Dürer (1525), *Unterweysung der Messung mit dem Zyrkel und Rychtscheyd, Nürnberg : München, Süddeutsche Monatsheft*, English translation with commentary in Strauss, Walter L. (1977), The Painter's Manual, New York