

# Mathématiques élémentaires 3ème

Haerearii Metuarea

<https://hmetuarea.github.io/>

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Premier trimestre</b>	<b>5</b>
1.1	Nombres premiers . . . . .	5
1.1.1	Définition . . . . .	5
1.1.2	Décomposition en facteurs premiers . . . . .	5
1.1.3	Le crible d'Eratosthène . . . . .	6
1.1.4	Problèmes et exercices . . . . .	6
1.2	Réduction et augmentation . . . . .	7
1.2.1	Définition . . . . .	7
1.2.2	Propriétés . . . . .	9
1.2.3	Problèmes et exercices . . . . .	10
1.2.4	Activités informatiques . . . . .	11
1.3	Équation à une inconnue . . . . .	12
1.3.1	Définition . . . . .	12
1.3.2	Règles sur les égalités . . . . .	13
1.3.3	Méthodes de résolution . . . . .	13
1.3.4	Problèmes . . . . .	20
1.4	Homothétie . . . . .	21
1.4.1	Définition . . . . .	21
1.4.2	Propriétés . . . . .	21
1.4.3	Problèmes . . . . .	21
1.4.4	Activités informatiques . . . . .	21
1.5	Équations produits . . . . .	21
1.5.1	Définitions et rappels . . . . .	21
1.5.2	Résolution des équations produits . . . . .	21
1.6	Puissances . . . . .	21
1.6.1	Définition . . . . .	21
1.6.2	Opérations algébriques sur les exposants entiers . . . . .	21
1.6.3	Notation scientifique . . . . .	21
1.6.4	Problèmes . . . . .	21
1.6.5	Activités informatiques . . . . .	21
1.7	Parallélisme . . . . .	21
1.7.1	Introduction . . . . .	21
1.7.2	Notion de parallélisme . . . . .	21
1.7.3	Théorème de Thalès . . . . .	21
1.7.4	Problèmes et exercices . . . . .	21
1.7.5	Activités informatiques . . . . .	21

<b>2</b>	<b>Second trimestre</b>	<b>22</b>
2.1	Nombre rationnel . . . . .	23
2.1.1	Introduction . . . . .	23
2.1.2	Définition . . . . .	23
2.1.3	Comparaison des rationnels . . . . .	23
2.1.4	Opération sur les rationnels . . . . .	23
2.1.5	Problèmes . . . . .	23
2.1.6	Activités informatiques . . . . .	23
2.2	Cosinus . . . . .	23
2.2.1	Introduction . . . . .	23
2.2.2	Définition . . . . .	23
2.2.3	Construction des angles élémentaires . . . . .	23
2.2.4	Utilisation du cosinus . . . . .	23
2.2.5	Problèmes et exercices . . . . .	23
2.2.6	Activités informatiques . . . . .	23
2.3	Fonctions . . . . .	23
2.3.1	Introduction . . . . .	23
2.3.2	Définition . . . . .	23
2.3.3	Représentation graphique . . . . .	23
2.3.4	Propriétés . . . . .	23
2.3.5	Problèmes et exercices . . . . .	23
2.3.6	Activités informatiques . . . . .	23
2.4	Triangles semblables . . . . .	23
2.4.1	Introduction . . . . .	23
2.4.2	Définition . . . . .	23
2.4.3	Propriétés . . . . .	23
2.4.4	Problèmes et exercices . . . . .	23
2.4.5	Activités informatiques . . . . .	23
2.5	Trigonométrie . . . . .	23
2.5.1	Introduction . . . . .	23
2.5.2	Définition . . . . .	23
2.5.3	Relations trigonométriques . . . . .	23
2.5.4	Applications . . . . .	23
2.5.5	Problèmes et exercices . . . . .	23
2.5.6	Activités informatiques . . . . .	23
2.6	Nombres premiers . . . . .	23
2.6.1	Introduction . . . . .	23
2.6.2	Rappels . . . . .	23
2.6.3	Décomposition en facteurs premiers . . . . .	23
2.6.4	Fractions irréductibles . . . . .	23
2.6.5	Problèmes et exercices . . . . .	23
2.6.6	Activités informatiques . . . . .	23
2.7	Réciproque de Thalès . . . . .	23
2.7.1	Introduction . . . . .	23
2.7.2	Rappels . . . . .	23
2.7.3	Réciproque du théorème de Thalès . . . . .	23
2.7.4	Problèmes et exercices . . . . .	23
2.7.5	Activités informatiques . . . . .	23

<b>3</b>	<b>Troisième trimestre</b>	<b>24</b>
3.1	Statistiques . . . . .	25
3.1.1	Introduction . . . . .	25
3.1.2	Définition . . . . .	25
3.1.3	Représentation des données . . . . .	25
3.1.4	Problèmes et exercices . . . . .	25
3.1.5	Activités informatiques . . . . .	25
3.2	Problèmes de géométrie . . . . .	25
3.2.1	Longueurs et angles . . . . .	25
3.2.2	Superficie . . . . .	25
3.2.3	Modélisation . . . . .	25
3.2.4	Problèmes et exercices . . . . .	25
3.2.5	Activités informatiques . . . . .	25
3.3	Fonction linéaire et affine . . . . .	25
3.3.1	Introduction . . . . .	25
3.3.2	Définition . . . . .	25
3.3.3	Propriétés . . . . .	25
3.3.4	Utilisation . . . . .	25
3.3.5	Problèmes et exercices . . . . .	25
3.3.6	Activités informatiques . . . . .	25
3.4	Calcul littéral . . . . .	25
3.4.1	Problèmes et exercices . . . . .	25
3.4.2	Activités informatiques . . . . .	25
3.5	Probabilités . . . . .	25
3.5.1	Introduction . . . . .	25
3.5.2	Définitions . . . . .	25
3.5.3	Théorie des ensembles . . . . .	25
3.5.4	Modélisation . . . . .	25
3.5.5	Problèmes et exercices . . . . .	25
3.5.6	Activités informatiques . . . . .	25
3.6	Solide de l'espace . . . . .	25
3.6.1	Introduction . . . . .	25
3.6.2	Définition . . . . .	25
3.6.3	Propriétés . . . . .	25
3.6.4	Problèmes et exercices . . . . .	25
3.6.5	Activités informatiques . . . . .	25

# Introduction

Ce cours de mathématiques de 3ème est basé sur la progression des cours du collège de Pao-pao. Les notions sont introduites de manière concise pour laisser la place à la résolution d'exercice et de problème. Un accent est mis sur le thème de la biologie qui, fidèlement aux exigences du programme officiel, permet de concerner le public aux enjeux climatiques actuels.

Formellement aux exigences du ministère et des inspecteurs, la recherche est la compétence majeure qui couvre la résolution de problème.

# Chapitre 1

## Premier trimestre

### 1.1 Nombres premiers

Certains entiers peuvent avoir plusieurs diviseurs à la fois et d'autre en ont un seul. Ces derniers possèdent des propriétés saisissantes qui ont la particularité de décrire un entier.

#### 1.1.1 Définition

**Définition.** *Un entier  $a$  est premier si les seuls diviseurs de  $a$  sont 1 et  $a$ .*

**Exemple.** *On peut citer 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ou encore 19.*

**Méthode** (Montrer que  $a$  est premier ou non). *Raisonner par définition.*

**Ce qu'il faut faire.** *Il suffit de lister les diviseurs de  $a$ .*

— *si  $a$  admet 1 et  $a$  comme unique diviseur alors  $a$  est premier.*

— *si  $a$  admet 1,  $a$  et d'autres entiers comme diviseur alors  $a$  n'est pas premier.*

**Exemple.** *On peut citer*

— *4 n'est pas premier puisque  $4 = 2 \times 2$ .*

— *6 n'est pas premier puisque  $6 = 3 \times 2$ .*

— *20 n'est pas premier puisque  $20 = 2 \times 10$  et  $20 = 2 \times 2 \times 5$ .*

**Exercice.** *Déterminer si les entiers suivants sont premiers ou non.*

*1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 22, 23, 77.*

#### 1.1.2 Décomposition en facteurs premiers

L'intérêt fondamental des nombres premiers réside dans la propriété suivante.

**Propriété.** *Tout entier strictement positif se décompose en produit de nombre premier.*

**Exemple.** *On peut citer*

—  $6 = 2 \times 3$

—  $10 = 2 \times 5$

—  $30 = 2 \times 3 \times 5$

Il faut garder en mémoire qu'une telle décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. C'est pourquoi, dorénavant, on admettra que 1 n'est pas un nombre premier dans ce cours. Et c'est d'ailleurs pour cette raison qu'on évitera d'écrire les décompositions « idiotes » du type  $10 = 1 \times 2 \times 5$  car on peut aussi bien écrire une telle décomposition de cette forme  $10 = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5$ .

**Exemple.** On peut citer

1.  $10 = 2 \times 5$
2.  $100 = 2^2 \times 5^2$
3.  $645 = 3 \times 5 \times 43$

**Exercice.** Décomposer les entiers suivants en produit de facteurs premiers.

- |       |        |        |         |
|-------|--------|--------|---------|
| 1. 4. | 4. 8.  | 7. 20. | 10. 25. |
| 2. 6. | 5. 10. | 8. 23. | 11. 30. |
| 3. 7. | 6. 18. | 9. 24. | 12. 33. |

### 1.1.3 Le crible d'Eratosthène

On dispose d'un algorithme présentant tous les nombres premiers inférieur à un nombre fixé.

**Méthode** (Crible d'Eratosthène). *Le crible suit la démarche suivante*

ENTREE : un entier  $a$ .

SORTIE : la liste des nombres premiers inférieurs ou égale à  $a$ .

1. écrire la liste des nombres entre 1 et  $a$ .
2. pour  $k$  allant de 1 à  $a$  :
3. si  $k$  n'est pas barré alors :
4. barrer tous les multiples de  $k$ .
5. si  $k$  est barré alors :
6. ne rien faire.

**Exercice.** Lister tous les nombres premiers inférieur ou égale à chaque entier  $a$ .

- |            |             |             |             |
|------------|-------------|-------------|-------------|
| 1. $a = 6$ | 3. $a = 10$ | 5. $a = 20$ | 7. $a = 40$ |
| 2. $a = 8$ | 4. $a = 13$ | 6. $a = 28$ | 8. $a = 50$ |

### 1.1.4 Problèmes et exercices

**Exercice** (Sésamath 3ème, p.16). Effectuer la décomposition complète en facteur premier de chaque quantité.

- |                                |                              |  |                               |
|--------------------------------|------------------------------|--|-------------------------------|
| 1. $2^2 \times 13 \times 25$ . | 2. $3 \times 15 \times 66$ . | 3. $7 \times 3^2 \times 9 \times 21$ . | 4. $23 \times 49 \times 61$ . |
|--------------------------------|------------------------------|--|-------------------------------|

**Exercice** (Sésamath 3ème, p.14). Déterminer quels entiers sont premiers. Donner la décomposition en facteur premier pour ceux qui ne le sont pas.

- |        |        |
|--------|--------|
| 1. 32  | 4. 187 |
| 2. 59  | 5. 227 |
| 3. 115 | 6. 303 |

**Exercice.** Décomposer en facteur premier chaque entier.

- |       |       |       |         |
|-------|-------|-------|---------|
| 1. 10 | 4. 25 | 7. 33 | 10. 100 |
| 2. 12 | 5. 30 | 8. 22 | 11. 90  |
| 3. 20 | 6. 6  | 9. 11 | 12. 80  |

**Exercice.** Déterminer la liste des nombres premiers inférieurs ou égales à chaque entier  $a$  indiqué.

- |             |             |             |              |
|-------------|-------------|-------------|--------------|
| 1. $a = 4$  | 4. $a = 22$ | 7. $a = 10$ | 10. $a = 50$ |
| 2. $a = 6$  | 5. $a = 2$  | 8. $a = 11$ | 11. $a = 60$ |
| 3. $a = 20$ | 6. $a = 3$  | 9. $a = 30$ | 12. $a = 40$ |

**Problème.** Combien il y a de nombre premier compris entre 10 et 20?

**Problème.** Déterminer l'entier qui est inférieur ou égale à 10, premier et pair.

**Problème** (DNB 2023 centres étrangers, exo 4). Des élèves organisent, pour leur classe, un jeu au cours duquel il est possible de gagner des lots. Ils placent dans une urne des boules indiscernables au toucher

- trois boules noires numérotées de 1 à 3.
- quatre boules rouges numérotées de 1 à 4.

Pour constituer les lots, on dispose de 195 figurines et 234 autocollants. Chaque lot sera composé de figurine ainsi que d'autocollants. Chaque lot est identique et toutes les figurines et autocollants doivent être utilisés.

1. peut-on faire 3 lots?
2. décomposer 195 en produit de facteurs premiers.
3. déterminer le nombre de lot maximum qui peut être constitué.

**Indication.** Pour la 3., on utilisera sans justification la décomposition en facteur premier de  $234 = 2 \times 3^2 \times 13$ .

**Problème.** Déterminer le plus grand nombre premier inférieur ou égale à 30.

## Devoir maison

### Examen

## 1.2 Réduction et augmentation

Sur le plan ou dans l'espace, certaines figures présentent des similarités sur leur longueur. Cette partie traite des objets géométriques ayant subi des réductions ou augmentations sur leur longueur. Le but étant non-seulement de savoir les reconnaître et les construire, mais surtout de déterminer le coefficient qui permet de passer d'une figure à l'autre.

### 1.2.1 Définition

**Définition.** On dit qu'une figure (ou encore un solide) est

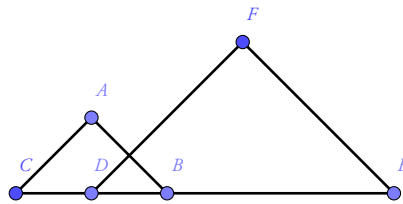
1. agrandie si ses longueurs sont multipliées par un nombre  $k > 1$ .
2. réduite si ses longueurs sont multipliées par un nombre  $0 < k < 1$ .

Si tel est le cas,  $k$  est appelé le rapport.

Notons que le cas  $k = 1$  n'est rien d'autre qu'une « reproduction » de la figure.

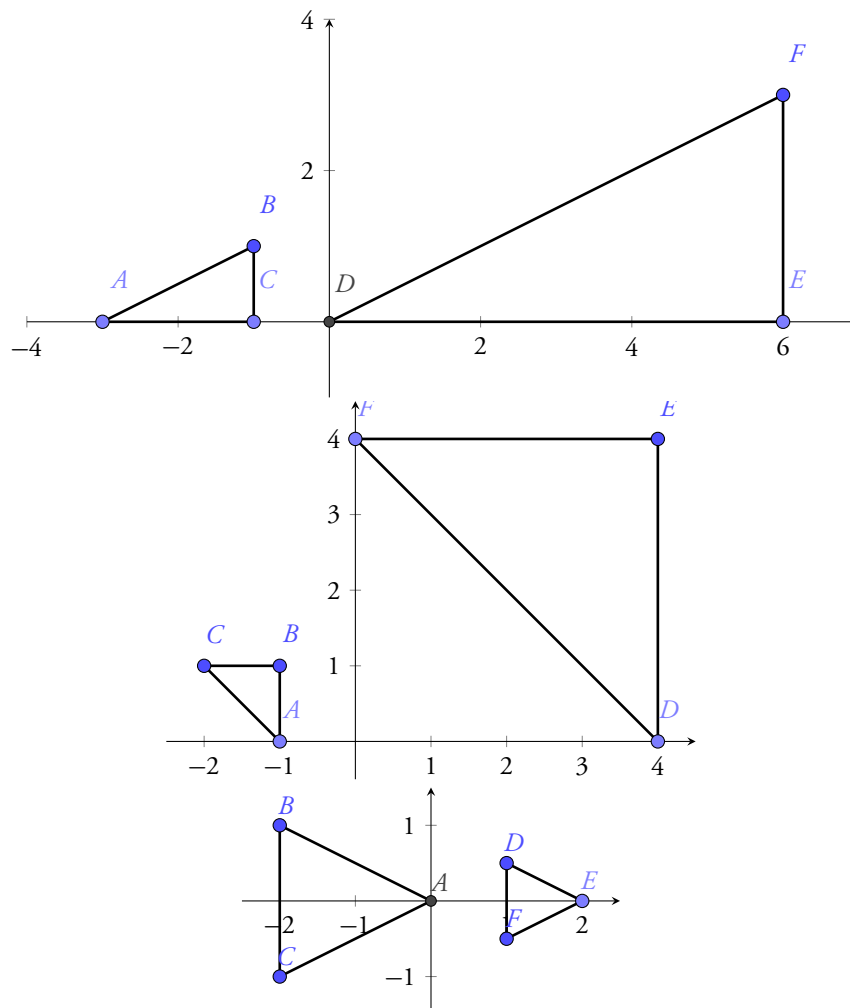


**Exemple.** On peut citer  $DFE$  l'augmentation du triangle  $ABC$  dans la figure suivante.



**Exercice.** Donner les augmentations de  $ABC$ .

**Exercice.** Noter quels cas corresponds à une augmentation et à une réduction pour le triangle  $ABC$  et donner la valeur du rapport.



**Exercice.** Soient  $ABC$  un triangle dont les dimensions en centimètres sont  $AB = 1$ ,  $BC = 1$  et  $AC = 1$ . Représenter sur un plan l'agrandissement de ce triangle pour un rapport de  $k = 3$ .

**Exercice** (Mission Indigo 4ème, p.213, exo 11.). Tracer un triangle équilatéral de côté 2 cm. Déterminer son agrandissement de rapport 1.5.

**Méthode** (Déterminer le rapport d'un agrandissement ou modification). *Il s'agit de passer par un tableau de proportionnalité.*

1. *Ecrire un tableau avec les longueurs de chaque figure sur chaque ligne.*
2. *Déterminer le coefficient qui permet de passer d'une ligne à l'autre.*

*Le coefficient de proportionnalité obtenu est le rapport recherché.*

**Exercice.** Soient  $ABCD$  et  $EFGH$  deux losanges de dimensions

—  $AB = BC = CD = DA = 7$

—  $EF = FG = GH = HE = 0.5$

Déterminer le rapport qui sépare les longueurs des losanges.

**Exercice.** Soient  $ABC$  et  $EFG$  deux triangles dont les dimensions en centimètres sont  $AB = 2$ ,  $BC = 1$ ,  $AC = 4$ ,  $EF = 4$ ,  $FG = 2$  et  $GE = 8$ . Déterminer le rapport entre les tailles des deux figures. Conclure que  $EFG$  est un agrandissement de  $ABC$ .

### 1.2.2 Propriétés

Le fait d'agrandir ou de réduire une figure (resp. un solide) a des conséquences non négligeable puisqu'il garanti certaines propriétés sur cette figure (resp. un solide).

**Propriété.** De toute figure du plan (ou un solide de l'espace) alors son agrandissement ou sa réduction provoquent les effets qui suivent

1. *les angles ne changent pas.*
2. *l'aire de la figure réduite (ou augmentée) est égale à l'aire de la figure de départ multipliée par  $k^2$ .*
3. *le volume du solide réduit (ou augmenté) est égale au volume du solide de départ multiplié par  $k^3$ .*

Pour les angles, cela signifie que la construction de la figure réduite (ou augmentée) garde les mêmes angles que la figure de départ.

**Exemple.** Toute réduction ou agrandissement d'un triangle équilatéral est toujours équilatéral et les angles sont identiques au triangle de départ.

On profite de ce résultat pour rappeler quelques formules d'aire et de volume.

Figure	Formules
Carré de côté $c$	$c^2$
Rectangle de longueur $l$ et de largeur $L$	$l \times L$
Triangle de hauteur $h$ et de base $b$	$\frac{b \times h}{2}$
Cercle de rayon $r$	$\pi \times r^2$

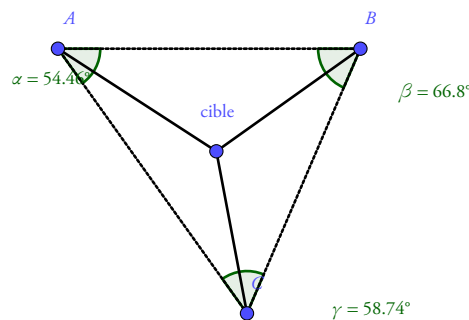
Table des formules d'aires de figures élémentaires du plan.

Solide	Formules
Cube de côté $c$	$c^3$
Pavé de hauteur $h$ , longueur $l$ et de largeur $L$	$h \times l \times L$
Sphère de rayon $r$	$\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$
Pyramide de hauteur $h$ et d'aire de base $\mathcal{B}$	$\frac{1}{3} \times h \times \mathcal{B}$
Cylindre de hauteur $h$ et d'aire de base $\mathcal{B}$	$h \times \mathcal{B}$
Cône de hauteur $h$ et d'aire de base $\mathcal{B}$	$\frac{1}{3} \times h \times \mathcal{B}$

Table des formules de volume de solides élémentaires de l'espace.

**Exercice.** Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$  dont les dimensions en centimètres sont  $AB = 3$ ,  $BC = 5$  et  $AC = 4$ . Construire  $DFE$  le triangle réduit de  $ABC$  de rapport  $\frac{1}{2}$  et déduire que  $DFE$  est toujours un triangle rectangle.

**Problème.** Dans un découvert, trois individus se disposent autour d'une cible à 10 mètres sous la forme d'un triangle. Montrer que leur champ de vision est inchangé quand ils se rapprochent à 5 mètres d'elle.



### 1.2.3 Problèmes et exercices

**Problème.** Dans un jardin, on décide d'agrandir de deux fois une piscine en forme de triangle rectangle de base et hauteur égale à 4 m avec  $90^\circ$  dans un côté. Pour comprendre ce problème, on modélise la piscine dans un plan par un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  avec  $\widehat{BAC} = 90^\circ$  et  $AB = AC = 4$ . Construire l'agrandissement de  $ABC$  de rapport 2.

**Exercice** (Sésamath 3ème, p.116, exo.14). Soit  $ABC$  un triangle avec  $\widehat{ABC} = 70^\circ$ ,  $\widehat{BAC} = 53^\circ$  et  $AB = 14$  mesuré en mètre. Construire la réduction de  $ABC$  de rapport  $\frac{1}{200}$  en centimètre.

**Problème** (Sésamath 3ème, p. 115, exo. 9). La pyramide de Gizeh (Egypte) est de forme pyramidale, régulière à base carrée. Sa hauteur est de 137 m et les côtés de sa base valent 230 m.

1. Déterminer les dimensions de la réduction de cette pyramide de rapport  $\frac{1}{1000}$ . On donnera les valeurs en centimètres.
2. Calculer le volume de la pyramide initiale.
3. Calculer le volume de la pyramide réduite.

4. Déterminer la différence qui sépare le volume de la pyramide initiale à la pyramide réduite.

**Problème.** On modélise la réduction d'un ballon de diamètre 19 cm avec un rapport de  $\frac{1}{2}$ .

1. Calculer le volume du ballon arrondi au  $\text{cm}^3$ .
2. Calculer le volume du ballon réduit arrondi au  $\text{cm}^3$ .
3. Déterminer la différence qui sépare le volume du ballon initial au ballon réduit arrondi au  $\text{cm}^3$ .

**Problème** (Sésamath 3ème, p. 115, exo. 12). Un cône de révolution de hauteur 10 cm et de rayon 3.2 cm sur sa base.

1. Calculer le volume du cône arrondi au  $\text{cm}^3$ .
2. Le cône est réduit et la hauteur de sa réduction vaut 7 cm. Déterminer le coefficient de réduction.
3. Calculer le volume du cône réduit arrondi au  $\text{cm}^3$ .

### 1.2.4 Activités informatiques

**Sujet** (Prise en main Géogébra). Ce sujet consiste à illustrer la notion d'agrandissement et réduction d'une figure.

1. Mettre les points  $A = (0, 0)$ ,  $B = (4, 0)$  et  $C = (0, 3)$ .
2. Joindre les segments  $CB$ ,  $AB$  et  $AC$ .
3. Créer un curseur noté  $k$ .
4. Mettre les points  $D = (AB \times k, 0)$  et  $E = (0, AC \times k)$ .
5. Joindre le polygone  $ADE$ .
6. Faire varier le curseur.

Donner les coordonnées du point  $D$  et  $E$  pour  $k = 5$ . Donner la valeur du curseur quand les positions des points sont  $D = (2.8, 0)$  et  $E = (0, 2.1)$ .

**Sujet.** Ce sujet consiste à résoudre un problème d'agrandissement et réduction d'une figure avec Géogébra.

1. Mettre les points  $A = (0, 0)$ ,  $B = (8, 0)$  et  $C = (4, 4)$ .
2. Joindre les segments  $CB$ ,  $AB$  et  $AC$ .
3. Créer un curseur noté  $k$  avec  $\min = 0$ ,  $\max = 10$  et  $\text{incrément} = 0.1$ .
4. Mettre les points  $D = (8 \times k, 0)$  et  $E = (4 \times k, 4 \times k)$ .
5. Joindre le polygone  $ADE$ .
6. Faire varier le curseur.

Donner les coordonnées du point  $D$  et  $E$  pour  $k = 5$ . Donner la valeur du curseur quand les positions des points sont  $D = (8.8, 0)$  et  $E = (4.4, 4.4)$ .

Maintenant, on dispose d'un terrain de forme triangulaire de base 8 mètres et de hauteur 4 mètres qu'on veut agrandir sans dépasser 15 mètres sur la base.

1. Peut-on agrandir le terrain pour un ratio de  $k = 1.4$ ?
2. Donner la valeur du curseur pour  $D = (14.4, 0)$ .
3. Peut-on agrandir le terrain pour un ratio de  $k = 1.8$ ?

## Devoir maison

## Examen

### 1.3 Équation à une inconnue

La recherche d'une longueur d'un terrain en forme de triangle rectangle, du nombre de pain obtenu après achat, etc. sont des situations où on recherche à expliciter un inconnu. Semblables à des opérations à trous, les équations consistent à déterminer un terme précis dans une formule et de modéliser des problèmes.

#### Introduction

Une introduction sur ce thème mérite certainement de passer par les illustrations du cours *Solving Equations : Introduction* de

<https://brilliant.org/>

Outre ces animations, la notion d'équation rapproche étroitement une myriade de notions vues les années précédentes :

- quatrième proportionnelle.
- théorème de Pythagore.
- divisibilité.
- géométrie du plan.
- etc.

Pour revenir aux exemples, retenons qu'une raison d'être de cette théorie est la modélisation des situations et de leur compréhension. Le but de ce chapitre se restreindra aux résolutions des équations à une inconnue de la forme  $ax + b = c$  ; nous discuterons des équations produits dans un chapitre antérieur constituant le cœur de ce sujet.

#### 1.3.1 Définition

Suite aux exemples traités, une première définition empirique d'une équation est une relation entre des quantités connues et une quantité inconnue. Cette dernière est notée par des lettres ; dont le  $x$  de manière conventionnelle.

**Définition.** Une équation d'inconnue  $x$  est une égalité de la forme

$$a \times x + b = c$$

où  $a, b, c$  sont des nombres quelconques avec  $a \neq 0$ . On appellera

- l'inconnue de l'équation :  $x$  la lettre qui « cache » un nombre.
- la solution de l'équation : la valeur de  $x$ .

Sauf mention explicite du contraire, privilégions l'écriture de  $a \times x$  par  $ax$  dans le cas où l'on manipule des lettres. Ainsi, l'équation de la définition s'écrit simplement

$$ax + b = c$$

**Exemple.** En observant l'équation  $x + 1 = 5$ , 4 est une solution.

De la même manière, pour l'équation  $4x = 2$ ,  $\frac{1}{2}$  est une solution.

Dans certains cas, il est possible de « deviner » la solution en comparant l'équation à une « opération à trou ».

**Exercice.** Donner la solution à chaque équation.

- |              |                 |                   |
|--------------|-----------------|-------------------|
| 1. $2x = 4$  | 6. $9x = 81$    | 11. $x + 2 = 3$   |
| 2. $2x = 8$  | 7. $x + 1 = 2$  | 12. $x + 3 = 10$  |
| 3. $2x = 10$ | 8. $x + 1 = 3$  | 13. $2x + 4 = 10$ |
| 4. $7x = 14$ | 9. $x + 1 = 10$ | 14. $2x + 6 = 10$ |
| 5. $7x = 21$ | 10. $x + 2 = 1$ | 15. $2x + 8 = 12$ |

Dans le même esprit, ces « opérations à trou » se retrouvent aussi dans les formules mathématiques.

**Problème.** Soit  $ABCD$  un rectangle dont l'aire vaut 14 et la longueur vaut 2. Déterminer la largeur de ce rectangle.

**Problème.** Sur une piste de 10 km, on arrive à 2 km depuis le départ. Déterminer la distance restante à parcourir avant la fin.

### 1.3.2 Règles sur les égalités

« Deviner » des solutions a ses limites devant des équations moins évidentes ; citons par exemple  $\frac{x}{4} + 2 = 5$ . Fort heureusement, il est toujours possible de les obtenir en les « recherchant » de manière rigoureuse. Cette approche exploite les propriétés opératoires des nombres relatifs sur les égalités.

**Propriété.** Soient  $A, B$  deux nombres vérifiant l'égalité  $A = B$  et soit  $k$  une constante quelconque alors  $A = B$  équivaut à

- |   |                |
|---|----------------|
| 1. $A + k = B + k$ .                                      | (addition)     |
| 2. $A - k = B - k$ .                                      | (soustraction) |
| 3. $A \times k = B \times k$ .                            | (produit)      |
| 4. si $k$ est non nul alors $\frac{A}{k} = \frac{B}{k}$ . | (quotient)     |

Cette propriété est d'une grande importance dans la suite car elle justifie toutes les opérations que l'on fera sur des égalités. Rappelons que le chapitre se concentre sur la recherche des solutions, nous admettrons que de telles équations admettent une solution et que cette solution est unique.

### 1.3.3 Méthodes de résolution

Pour des raisons de rigueur, notons que deux étapes constituent une résolution :

- la recherche de la solution : utiliser cette propriété pour trouver  $x$ .
- la vérification de la solution : « remplacer » le  $x$  trouvé dans l'équation et vérifier si l'égalité est vérifiée.

Nous aborderons la recherche méthodique en résolvant l'équation en deux temps. Nous allons établir la forme général dans le cas où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fractions.

**Méthode** (Résolution de  $ax = c$ ). Cette méthode consiste à isoler  $x$  d'un côté de l'égalité pour obtenir la solution. On considère le cas où  $a$  et  $c$  sont de formes fractionnaires :  $a = \frac{A}{B}$  et  $c = \frac{E}{F}$ .

ENTREE L'équation  $\frac{A}{B}x = \frac{E}{F}$

SORTIE La solution  $x$

- Multiplier par  $\frac{B}{A}$  à gauche et à droite de l'égalité.
- Simplifier

Rappelons toutefois que la forme fractionnaire d'un entier  $a$  est toujours  $\frac{a}{1}$  et n'oublions pas que la règle du calcul de produit de deux fraction est

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

où  $a, b, c, d$  sont des nombres avec  $b, d \neq 0$ . Appliquons cette méthode dans le cas suivant.

**Exemple.** On va montrer que l'équation  $\frac{7}{3}x = 5$  a pour solution  $x = \frac{15}{7}$ .  
*Recherche des solutions :*

*Vérification des solutions :*

**Exercice.** Résoudre chaque équation.

1.  $2x = 1$

4.  $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$

2.  $2x = 0$

5.  $\frac{5}{4}x = 0$

3.  $7x = 7$

6.  $4x = 4$

7.  $5x = 5$

12.  $2x = 0$

8.  $1000x = 1$

13.  $\frac{5}{4}x = 5$

9.  $2^2x = 1$

14.  $\frac{2}{7}x = 7$

10.  $5^2x = 1$

15.  $\frac{1}{2}x = 0$

11.  $12x = 1$

16.  $5x = 4$



17.  $3^2x = 1$

19.  $1000!x = 0$

18.  $5!x = 0$

20.  $(5!)^3x = 0$

**Commentaire.** On rappelle que  $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$  et  $1000! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 998 \times 999 \times 1000$ .

Les équations de ce type apparaissent dans les conversions d'unité.

**Application** (SVT 3e, p.20-21). *La terre est composée de plaques lithosphériques mobiles contenant sur leur bord des volcans. Ces plaques se déplacent sous l'effet de convection et on estime que*

- *les plaques se rapprochent des fosses de 0.000 000 317 097 92 cm chaque seconde.*
- *les plaques s'éloignent des dorsales de 0.000 000 031 709 792 cm chaque seconde.*

1. Montrer que les plaques se rapprochent des fosses de 10 cm chaque année.
2. Montrer que les plaques se rapprochent des dorsales de 1 cm chaque année.

**Indication.** Une année équivaut à 31 536 000 secondes.

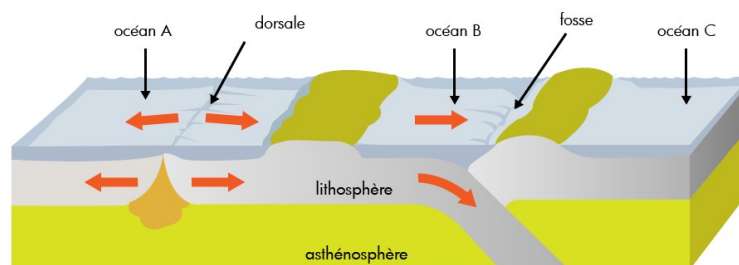


IMAGE. Principe des mouvements de convection (échelles non respectées).

**Méthode** (Résolution de  $ax + b = c$ ). Cette méthode consiste à isoler  $x$  d'un côté de l'égalité pour obtenir la solution. On considère le cas où  $a$  et  $c$  sont de formes fractionnaires :  $a = \frac{A}{B}$  et  $c = \frac{E}{F}$ .

ENTREE    L'équation  $\frac{A}{B}x + \frac{C}{D} = \frac{E}{F}$

SORTIE    La solution  $x$

1.    Soustraire par  $\frac{C}{D}$  à gauche et à droite de l'égalité.
2.    Simplifier
3.    Multiplier par  $\frac{B}{A}$  à gauche et à droite de l'égalité.
4.    Simplifier

Rappelons toutefois la règle du calcul de la somme de deux fractions

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

où  $a, b, c, d$  sont des nombres avec  $b, d \neq 0$ .

**Exemple.** On va montrer que l'équation  $\frac{7}{3}x + \frac{1}{2} = 5$  a pour solution  $x = \frac{27}{14}$ .  
Recherche des solutions :

Vérification des solutions :

**Exercice.** Résoudre chaque équation.

1.  $2x + 1 = 10$

2.  $x - 1 = 9$

3.  $6x + 1 = 11$

8.  $7x - \frac{40}{5} = \frac{15}{3}$

4.  $2x + \frac{4}{5} = 10$

9.  $7x - \frac{20}{30} = \frac{11}{12}$

5.  $x - \frac{6}{5} = 9$

10.  $\frac{2}{5}x + \frac{4}{5} = \frac{10}{5}$

6.  $6x + \frac{2}{3} = 11$

11.  $\frac{7}{3}x - \frac{40}{5} = \frac{15}{3}$

7.  $x - \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$

12.  $\frac{2}{5}x - \frac{20}{30} = \frac{11}{12}$

**Application** (SVT 3e, p.18-19). *La quantité d'énergie libérée sous forme de chaleur sur terre est présente au niveau des fonds océaniques. La courbe suivante est appelée « gradient thermique » et montre l'augmentation de la température avec la profondeur dans le sous-sol de la terre. On estime que la température augmente d'environ 3 degrés tous les 100 m.*

1. Déterminer à combien la température a augmenté à 1000 m sous la surface.
2. Montrer qu'une augmentation du gradient entraîne une augmentation de la perte d'énergie thermique.

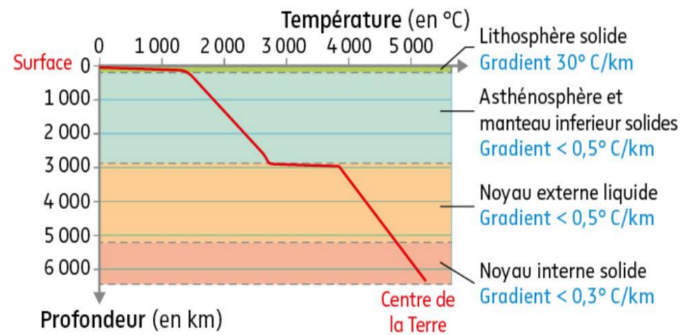


IMAGE. Évolution de la température interne de la Terre en fonction de la profondeur.

### 1.3.4 Problèmes

**Problème** (Mission indigo 3e, p.97, exo. 91). Une boîte de conserve cylindrique a pour hauteur 10.5 cm et pour volume  $465 \text{ cm}^3$ . Déterminer le rayon de la base en donnant une valeur arrondie au millimètre près.

**Indication.** Le volume d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  est la quantité  $V = \pi \times r^2 \times h$ .

**Problème** (Berkeley Math Tournament). Une éclipse se produit lorsque la lune s'intercale entre la terre et le soleil. La terre et la lune sont séparées à une distance de 384 000 km et le diamètre de la lune vaut 3 474.8 km. Sur le plan, déterminer l'aire de la zone d'ombre de l'éclipse.

**Indication.** L'aire d'un cercle de rayon  $r$  est  $\pi \times r^2$  et celui d'un triangle de hauteur  $h$  et de base  $b$  vaut  $\frac{b \times h}{2}$ .

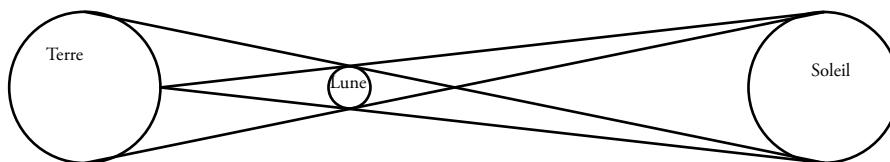


IMAGE. Illustration d'une éclipse solaire (échelles non respectées).

**Devoir maison**

**Examen**

## **1.4 Homothétie**

**Introduction**

**1.4.1 Définition**

**1.4.2 Propriétés**

**1.4.3 Problèmes**

**1.4.4 Activités informatiques**

**Devoir maison**

**Examen**

## **1.5 Équations produits**

**Introduction**

**1.5.1 Définitions et rappels**

**1.5.2 Résolution des équations produits**

**Devoir maison**

**Examen**

## **1.6 Puissances**

**Introduction**

**1.6.1 Définition**

**1.6.2 Opérations algébriques sur les exposants entiers**

**1.6.3 Notation scientifique**

**1.6.4 Problèmes**

**1.6.5 Activités informatiques**

**Devoir maison**

**Examen**

## **1.7 Parallélisme**

**1.7.1 Introduction**

**1.7.2 Notion de parallélisme**

**1.7.3 Théorème de Thalès**

**1.7.4 Problèmes et exercices**

**1.7.5 Activités informatiques**

**Devoir maison**

**Examen**



# **Chapitre 2**

## **Second trimestre**

### **2.1 Nombre rationnel**

#### **2.1.1 Introduction**

#### **2.1.2 Définition**

#### **2.1.3 Comparaison des rationnels**

#### **2.1.4 Opération sur les rationnels**

#### **2.1.5 Problèmes**

#### **2.1.6 Activités informatiques**

**Devoir maison**

**Examen**

### **2.2 Cosinus**

#### **2.2.1 Introduction**

#### **2.2.2 Définition**

#### **2.2.3 Construction des angles élémentaires**

#### **2.2.4 Utilisation du cosinus**

#### **2.2.5 Problèmes et exercices**

#### **2.2.6 Activités informatiques**

**Devoir maison**

**Examen**

### **2.3 Fonctions**

#### **2.3.1 Introduction**

#### **2.3.2 Définition**

#### **2.3.3 Représentation graphique**

#### **2.3.4 Propriétés**

#### **2.3.5 Problèmes et exercices**

#### **2.3.6 Activités informatiques**

**Devoir maison**

**Examen**





# **Chapitre 3**

## **Troisième trimestre**

### **3.1 Statistiques**

#### **3.1.1 Introduction**

#### **3.1.2 Définition**

#### **3.1.3 Représentation des données**

#### **3.1.4 Problèmes et exercices**

#### **3.1.5 Activités informatiques**

**Devoir maison**

**Examen**

### **3.2 Problèmes de géométrie**

#### **3.2.1 Longueurs et angles**

#### **3.2.2 Superficie**

#### **3.2.3 Modélisation**

#### **3.2.4 Problèmes et exercices**

#### **3.2.5 Activités informatiques**

**Devoir maison**

**Examen**

### **3.3 Fonction linéaire et affine**

#### **3.3.1 Introduction**

#### **3.3.2 Définition**

#### **3.3.3 Propriétés**

#### **3.3.4 Utilisation**

#### **3.3.5 Problèmes et exercices**

#### **3.3.6 Activités informatiques**

**Devoir maison**

**Examen**

### **3.4 Calcul littéral**

#### **3.4.1 Problèmes et exercices**