

# ETUDE DES LOIS INFINIMENT DIVISIBLES ET DES PROCESSUS DE LEVY

*par*

Haecarii METUAREA

*Un mémoire de mathématiques réalisé sous la direction de*

M. LOIC CHAUMONT

*pour le master de mathématiques de la*

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE D'ANGERS

Mai 2021

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Lois infiniment divisibles</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Lois infiniment divisibles</b>	<b>6</b>
1.1	Définitions . . . . .	6
1.2	Propriétés élémentaires . . . . .	7
1.3	Unicité des lois infiniment divisibles . . . . .	9
1.4	Convergence de loi infiniment divisible . . . . .	11
1.5	Continuité absolue et singularité . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Représentation des lois infiniment divisibles</b>	<b>15</b>
2.1	Formule de Lévy-Khintchine . . . . .	15
2.2	Interprétation de la formule et exemples particuliers . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Le cas des lois stables</b>	<b>21</b>
3.1	Définitions . . . . .	21
3.2	Propriétés et représentation des lois stables . . . . .	22
3.3	Correspondances avec les lois infiniment divisibles . . . . .	23
<b>II</b>	<b>Processus stochastiques de loi infiniment divisible</b>	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>Processus de Lévy</b>	<b>27</b>
4.1	Définitions . . . . .	27
4.2	Propriété spatiale et temporelle élémentaire . . . . .	28
4.3	Propriété de Markov des processus de Lévy . . . . .	29
4.4	Martingalité des processus de Lévy . . . . .	29
4.5	Divisibilité des processus de Lévy . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Représentation des processus de Lévy</b>	<b>31</b>
5.1	Formule de Lévy-Khintchine pour les processus de Lévy . . . . .	31
5.2	Interprétation de la formule de Lévy-Khintchine pour les processus de Lévy et exemples particuliers . . . . .	32
5.2.1	Cas du processus de Poisson . . . . .	32
5.2.2	Cas du mouvement brownien . . . . .	33
5.3	Conséquences de la formule sur les processus de Lévy . . . . .	33
5.3.1	Continuité des processus de Lévy . . . . .	33
5.3.2	Support des lois infiniment divisibles . . . . .	35

# Introduction

Deux parties constituent le sujet de ce mémoire. La première est dédiée à l'étude des lois infiniment divisibles, de leur caractérisation ainsi qu'aux lois stables. La deuxième partie est consacrée à l'étude des processus de Lévy et de leur représentation. Compte tenu de la diversité des notions qui seront abordées, nous donnons une description détaillée de chacune de ces parties.

## Première partie

La théorie de l'addition des variables aléatoires a été développée par Paul Lévy dans les années 60. Elle avait pour origine le problème suivant : sous quelles conditions toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées convergeait ? et si tel est le cas, quelle est cette « loi limite » ? Malgré les recherches actives de A. Cauchy ou encore de A. Khintchine, la résolution de ce problème était loin d'être évidente. La réputation de ces mathématiciens et leurs efforts face à ce problème, l'inscrivent parmi les défis les plus difficiles de son temps. Cependant, les observations et les études effectuées sur ce problème ont permis à Lévy de le résoudre dans le cas général en utilisant ce que nous appelons aujourd'hui l'infinie divisibilité d'une loi de probabilité.

Le but de la première partie de ce mémoire est d'étudier de manière générale les lois de probabilités qui vérifient cette propriété d'infinie divisibilité. Nous étudierons surtout la caractérisation de ces lois et les liens qu'elles possèdent avec les lois dites stables. Trois chapitres feront donc l'objet de cette partie. Dans un premier temps, nous présenterons les lois infiniment divisibles et leurs propriétés à partir du livre de Sato dans [4]. Nous introduirons à la suite la formule de Lévy-Khintchine et nous expliquerons ses richesses avec les livres de Sato dans [4] et de Matheron dans [6]. Enfin, nous étudierons le cas des lois stables et leur lien avec les lois infiniment divisibles à partir des livres de Sato dans [4] et de Samorodnitsky dans [7].

## Deuxième partie

Le mouvement brownien, aussi appelé processus de Wiener, reste, depuis les années 30, l'un des processus stochastiques les plus prisés dans les sciences appliquées des mathématiques. Nous pouvons l'observer en physique quantique, en biologie de l'évolution ou encore en mathématiques financières. Jusqu'alors, au long des années 60, le mouvement brownien fut activement étudié par les personnalités les plus influentes de cette époque, dont A. Einstein ou encore F. Black et M. Scholes présentèrent des découvertes saisissantes. Après que P. Lévy découvrit les lois infiniment divisibles, il étudia le mouvement brownien et dégagera une certaine généralisation

de celui-ci : un processus à accroissements indépendants et stationnaires, appelé aujourd'hui le processus de Lévy.

Le but de cette deuxième partie est d'étudier les processus de Lévy et leurs propriétés élémentaires. Nous tâcherons surtout de diriger cette étude vers le lien que possède ces processus avec les lois infiniment divisibles. Ces lois ayant faits l'objet de la première partie de ce projet de recherche, nous ne reproduirons pas cette étude ici. Deux chapitres composeront donc cette seconde partie. Dans un premier temps, nous définissons les processus de Lévy ainsi que ses propriétés élémentaires avec le livre de Sato dans [4]. Dans un dernier temps, nous étudierons le lien entre les lois infiniment divisibles et les processus de Lévy. Nous détaillerons surtout leur représentation ainsi que ses conséquences à partir du livre de Sato dans [4].

# Notations

$f * g$	le produit de convolution des mesures $f$ et $g$ ,
$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$	l'égalité en loi des variables aléatoires $X$ et $Y$ ,
$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mu$	la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la loi de probabilité $\mu$ ,
$\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mu$	la convergence faible de la suite de loi de probabilité $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la loi $\mu$ ,
$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$	la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction $f$ sur un compact où les fonctions $f_n$ sont définies,
$x_n \downarrow a$	la convergence de manière décroissante de $x_n$ vers $a$ quand $n$ tend vers l'infini,
$f \sim_a g$	l'équivalence des fonctions $f$ et $g$ dans un voisinage de $a$ ,
$\mu \ll \xi$	la continuité absolue des mesures $\mu$ par rapport à $\xi$ ,
$d$	un entier naturel non nul,
$0_E$	l'élément neutre additif de l'espace vectoriel $E$ ,
$(X_i)_{i=1}^d$	une suite de $d$ variables aléatoires $X_1, \dots, X_d$ ,
$(\mu_k)_k$	une suite de mesure de probabilité $\mu_k$ indexée par $k \in \mathbb{N}$ ,
$\hat{\mu}$	la fonction caractéristique de la loi de probabilité $\mu$ ,
$\mu^{*n}$	le produit de convolution $\mu * \dots * \mu$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ fois) de la loi de probabilité $\mu$ ,
$[\mu]_A$	la restriction de la loi de probabilité $\mu$ sur $A$ ,
$\delta_a$	la loi de Dirac concentrée au point $a \in \mathbb{R}$ ,
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^d$ ,
$\ \cdot\ $	la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^d$ ,
$\mathbb{P}(A \mid B)$	la probabilité conditionnelle de l'événement $A$ sachant $B$ ,
$\mathbb{E}(X \mid Y)$	l'espérance conditionnelle de la variable aléatoire $X$ sachant $Y$ ,
$\mathcal{F}_s$	la tribu engendrée par les variables aléatoires $X_u$ avec $u \leq s$ ,

## **Première partie**

# **Lois infiniment divisibles**

# Chapitre 1

## Lois infiniment divisibles

Ce chapitre définit les lois infiniment divisibles et expose en détail les propriétés auxquelles ces lois sont liées.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les mesures et les variables aléatoires sont définies sur l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

### 1.1 Définitions

Commençons par définir les lois infiniment divisibles et tâchons d'avoir une première compréhension de ces lois avec des exemples simples.

**Définition 1.** On dit qu'une loi de probabilité  $\mu$  est infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$  si, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une loi de probabilité  $\mu_n$  définie sur  $\mathbb{R}^d$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu = \underbrace{\mu_n * \cdots * \mu_n}_{n \text{ fois}} = \mu_n^{*n}$$

Par abus de langage, nous appellerons une telle loi de probabilité : une loi infiniment divisible. Maintenant, dans le cas des variables aléatoires, l'infinie divisibilité se définit comme suit.

**Définition 2.** On dit que la loi d'une variable aléatoire  $X$  est infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$  si pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe une suite de variables aléatoires  $(X_i)_{i=1}^n$  indépendantes et identiquement distribuées telle que

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$$

Par abus de langage, nous appellerons une telle variable aléatoire : une variable infiniment divisible.

**Exemple 1.** Nous pouvons citer :

- la loi de Poisson.
- la loi normale.
- la loi de Cauchy.
- la loi exponentielle et, plus généralement, la loi Gamma.
- la loi demi-normale.

En théorie, si  $\mu$  est une loi infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$  de paramètre  $\vec{v} \in \mathbb{R}^k$ , avec  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors le paramètre de la loi  $\mu_n^{*n}$  n'est pas nécessairement  $\vec{v}$  ; l'infinie divisibilité concerne essentiellement la loi de probabilité. De plus, démontrer qu'une loi est infiniment divisible est loin d'être un exercice facile. Nous pouvons nous en convaincre en citant les lois suivantes.

- loi de Pareto (Steutel, 1970)
- loi de Student (Grosswald, 1976)
- loi Gamma de puissance  $c \in \mathbb{R} \setminus ]-1, 0[$  (Bosch, 2013)

Pour avoir une idée des lois qui ne sont pas infiniment divisibles, nous retrouvons la loi binomiale ou encore la loi uniforme pour citer des lois simples. En général, les lois qui ne sont pas infiniment divisible sont les lois, à l'exception de la loi de Dirac, dont le support est borné. Nous démontrerons cela dans la seconde partie de ce mémoire. Maintenant, sauf mention explicite du contraire, toutes les lois infiniment divisibles énoncées dans les sections qui suivent le sont sur  $\mathbb{R}^d$ .

## 1.2 Propriétés élémentaires

Nous dressons les propriétés des lois infiniment divisibles en commençant par les opérations possibles sur elles.

**Proposition 1** (opération). *Si  $\mu$  et  $\varsigma$  sont des lois infiniment divisibles sur  $\mathbb{R}^d$  alors*

1. *leur produit de convolution  $\mu * \varsigma$  est infiniment divisible.*
2. *la loi de probabilité  $\xi : A \mapsto \mu(-A)$  est infiniment divisible.*

*Démonstration.* 1. Supposons que  $\mu$  et  $\varsigma$  soient infiniment divisibles alors il existe respectivement deux mesures de probabilités  $\mu_n$  et  $\varsigma_n$  vérifiant  $\mu = \mu_n^{*n}$  et  $\varsigma = \varsigma_n^{*n}$ . Ainsi  $\mu * \varsigma = (\mu_n^{*n}) * (\varsigma_n^{*n}) = (\mu_n * \varsigma_n)^{*n}$  par commutativité de la convolution des mesures.  
2. Supposons que  $\mu$  soit infiniment divisible alors il existe une loi de probabilité  $\mu_n$  vérifiant  $\mu = \mu_n^{*n}$ . Pour tout ensemble mesurable  $A$ , nous écrivons

$$\xi(A) = \mu(-A) \implies \mu(B) = \mu_n^{*n}(B)$$

avec  $B = -A$ . Nous déduisons alors l'égalité  $\xi(A) = \mu_n^{*n}(-A)$  pour tout ensemble mesurable  $A$ . Ce qui prouve l'infinie divisibilité de  $\xi$ .  $\square$

Pour deux variables aléatoires indépendantes et infiniment divisibles  $X$  et  $Y$ , ce résultat affirme que la variable  $\lambda X + Y$  est nécessairement infiniment divisible pour tout scalaire réel  $\lambda$ . En revanche, cela n'est pas vraie pour le produit  $XY$  et le quotient  $1/X$ .

Poursuivons à présent vers les résultats permettant de savoir si une loi de probabilité (ou une variable aléatoire) est infiniment divisible ou non.

**Proposition 2.** *Si  $\mu$  est une loi infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$  alors sa fonction caractéristique  $\hat{\mu}$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^d$ .*

*Démonstration.* Par infinie divisibilité de  $\mu$ , il existe une loi de probabilité  $\mu_n$  telle que  $\mu = \mu_n^{*n}$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ . D'une part, comme  $\mu$  est infiniment divisible alors, par la proposition 1, la loi  $\varsigma$ , définie par  $\varsigma : A \mapsto \mu(-A)$ , est infiniment divisible. Ainsi,



$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \widehat{\mu * \varsigma}(t) = |\widehat{\mu}(t)|^2$$

D'autre part, comme  $\mu$  est  $\varsigma$  sont infiniment divisibles alors  $\mu * \varsigma$  l'est aussi par convolution de loi infiniment divisible. Par définition des lois infiniment divisibles, nous pouvons écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \widehat{\mu * \varsigma}(t) = \widehat{\mu_n * \varsigma_n}(t)^n$$

Par égalité, il vient l'implication suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \widehat{\mu_n * \varsigma_n}(t)^n = |\widehat{\mu}(t)|^2 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^d, \widehat{\mu_n * \varsigma_n}(t) = |\widehat{\mu}(t)|^{\frac{2}{n}}$$

Ainsi, par passage à la limite sur  $n$ , nous obtenons

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{\mu_n * \varsigma_n}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\widehat{\mu}(t)|^{\frac{2}{n}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \widehat{\mu}(t) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \widehat{\mu}(t) = 0 \end{cases} = 1_{\{\widehat{\mu}(t) \neq 0\}}(t)$$

Comme  $1_{\{\widehat{\mu}(0) \neq 0\}}(0) = 1$  alors la fonction  $t \mapsto 1_{\{\widehat{\mu}(t) \neq 0\}}(t)$  est continue en  $t = 0$ . Ainsi, puisque  $1_{\{\widehat{\mu}(t) \neq 0\}}$  est continue en 0 et est limite simple de la suite  $(\widehat{\mu_n * \varsigma_n})_n$  alors  $1_{\{\widehat{\mu}(t) \neq 0\}}$  est la fonction caractéristique d'une certaine loi de probabilité. Par continuité des fonctions caractéristiques,  $1_{\{\widehat{\mu}(t) \neq 0\}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^d$ . Comme  $1_{\{\widehat{\mu}(t) \neq 0\}}(t) = 1$  sur  $\mathbb{R}^d$  et est continue sur  $\mathbb{R}^d$  alors  $\widehat{\mu}(t) \neq 0$  sur  $\mathbb{R}^d$ .  $\square$

La proposition précédente est un résultat élémentaire pour savoir si  $\mu$  n'est pas infiniment divisible puisqu'il suffit de prendre sa contraposée.

**Exemple 2.** La loi uniforme  $\mathcal{U}$  n'est pas infiniment divisible sur  $[-a, a]$ , avec  $a > 0$ . En effet, la fonction caractéristique de la loi uniforme est définie par

$$\forall t \in [-a, a] \setminus \{0\}, \widehat{\mu}(t) = \frac{\sin(at)}{at}$$

Cette quantité est nulle si et seulement si  $at \in \pi\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Nous déduisons, qu'il existe des réels  $t \in [-a, a] \setminus \{0\}$  vérifiant l'égalité  $\widehat{\mu}(t) = 0$ . Par la contraposée de la proposition 2,  $\mathcal{U}$  n'est pas infiniment divisible sur  $[-a, a]$ .

De manière analogue, nous pouvons montrer que la loi binomiale n'est pas infiniment divisible.

**Proposition 3.** Toute variable aléatoire  $X$  bornée est infiniment divisible sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $X$  est presque sûrement constante sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Raisonnons par double implication.

( $\Rightarrow$ ) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier non nul et supposons que  $X$  soit infiniment divisible sur  $\mathbb{R}$  alors, pour tout entier positif  $n$ , il existe  $(X_i)_{i=1}^n$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que  $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_1 + \dots + X_n$ . Par indépendance des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ , la variance de  $X$  s'exprime comme la somme des variances des  $X_1, \dots, X_n$ . Aussi, de cette indépendance et en tenant compte que ces variables sont identiquement distribuées alors la variance de  $X$  s'écrit comme le produit  $n\mathbb{V}(X_1)$  avec  $n > 0$ . En appliquant la formule de

Koenig-Huygen sur  $\mathbb{V}(X_1)$  puis en tenant compte de la positivité de  $\mathbb{E}[X_1]^2$  nous obtenons en se plaçant dans l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{V}(X) = n\mathbb{V}(X_1) \leq n\mathbb{E}[X_1^2] = n \int_{\Omega} x_1^2 dP_{X_1^2}(x_1)$$

par le théorème de transfert. Maintenant, en posant  $M = \sup_{\omega \in \Omega} \{|X(\omega)|\}$ , alors les ensembles  $A := \left\{ \omega \in \Omega \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i^2(\omega) \leq \frac{M^2}{n^2} \right\}$  et  $B := \left\{ \omega \in \Omega \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i^2(\omega) > \frac{M^2}{n^2} \right\}$  sont disjoints dans  $\Omega$ , ainsi nous pouvons écrire

$$\mathbb{E}[X_1^2] = \int_A x_1^2 dP_{X_1^2}(x_1) + \int_B x_1^2 dP_{X_1^2}(x_1)$$

Or,  $P(B) = 0$  en raison de l'inclusion suivante  $B = \bigcap_{i=1}^n \{X_i > \frac{M}{n}\} \subset \{X > M\}$  et de la majoration suivante

$$0 \leq P(B) = \prod_{i=1}^n P\left(X_i > \frac{M}{n}\right) \leq P(X > M) = 0$$

Ainsi  $P\left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i^2 \leq \frac{M^2}{n^2}\right) \neq 0$  en prenant le complémentaire de  $B$  et nous obtenons les majorations successives suivantes

$$0 \leq \mathbb{V}(X) \leq n\mathbb{E}[X_1^2] = n \int_A x_1^2 dP_{X_1^2}(x_1) + 0 \leq \frac{M^2}{n^2} \int_{\Omega} dP_{X_1^2}(x_1) = \frac{nM^2}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par infinie divisibilité de la variable aléatoire. Nous déduisons l'égalité  $\mathbb{V}(X) = 0$  par majoration avec une quantité qui tend vers 0. Donc  $P(X = \mathbb{E}[X]) = P(\mathbb{V}(X) = 0) = 1$  et cela termine la preuve de l'implication directe.

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $X$  est une variable aléatoire presque sûrement constante alors, cela signifie qu'il existe une suite  $(X_i)_{i=1}^n$  de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que, pour tout entier  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{a}{n}$ , avec  $a$  une constante réelle. En particulier, pour tout entier  $i$  fixé, nous obtenons les égalités en loi successives  $X_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{X}{n}$  et puis  $nX_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$ . Ainsi, nous déduisons l'égalité en loi suivante  $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_1 + \dots + X_n$  qui permet d'affirmer que  $X$  est une variable infiniment divisible sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

### 1.3 Unicité des lois infiniment divisibles

Cette section présente l'unicité des lois pour lesquelles elles sont infiniment divisibles. En particulier, si une loi de probabilité est infiniment divisible alors la loi de probabilité pour laquelle elle est égale en loi est unique.

**Théorème 1** (d'unicité des lois infiniment divisibles). *Si  $\mu$  est une loi infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$  alors il existe une unique loi  $\mu_n$  vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu = \mu_n^{*n} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}^d, \widehat{\mu_n}(t) = \widehat{\mu}(t)^{\frac{1}{n}}$$

*Démonstration.* Supposons que  $\mu$  soit une loi infiniment divisible. Sous cette hypothèse, la définition d'une loi infiniment divisible affirme l'existence d'une loi de probabilité  $\mu_n$  vérifiant l'égalité  $\mu = \mu_n^{*n}$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ . Dans ces conditions, le théorème de Bochner affirme que  $\hat{\mu}$  est une fonction continue qui vérifie  $\hat{\mu}(0_{\mathbb{R}^d}) = 1$ . D'ailleurs, la proposition 2 affirme que  $\hat{\mu}$  vérifie aussi  $\hat{\mu}(z) \neq 0$  pour tout  $z \neq 0_{\mathbb{R}^d}$ . Maintenant, introduisons un résultat de l'analyse complexe.

**Lemme 1.** Soit  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue vérifiant

$$\varphi(0_{\mathbb{R}^d}) = 1 \text{ et } \forall z \neq 0_{\mathbb{R}^d}, \varphi(z) \neq 0$$

alors il existe une unique fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  qui vérifie

1.  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^d$ .
2.  $f(0_{\mathbb{R}^d}) = 0_{\mathbb{C}}$ .
3.  $e^{f(z)} = \varphi(z)$  sur  $\mathbb{R}^d$ .

*Démonstration.* (Existence) Nous paramétrons la fonction  $\varphi$  en posant  $Z = tz$  avec  $t \in [0, 1]$ , alors  $\varphi$  est une courbe plane sur  $\mathbb{C}^*$ .

Notons  $h(\cdot, z)$  la branche du logarithme complexe paramétrée par  $\varphi(Z)$  définie comme suit

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{C} \\ (t, z) &\mapsto \log_{\mathbb{C}}(\varphi(tz)) = \log(|\varphi(tz)|) + i \arg(\varphi(tz)) \end{aligned}$$

avec  $\arg(\varphi(tz)) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$  avec  $\alpha$  un réel. Comme  $h(\cdot, z)$  est la branche du logarithme alors  $h(\cdot, z)$  est continue sur tout connexe ouvert  $U$  du plan complexe tel que  $h$  est identiquement le logarithme complexe sur  $U$ . Elle vérifie alors  $h(0, z) = 0_{\mathbb{C}}$  et  $h$  est continue par rapport à  $t$  sur  $[0, 1]$ . Maintenant, posons  $f(z) = h(1, z)$ . Par un calcul direct, nous obtenons aisément les égalités suivantes :  $e^{f(z)} = \varphi(z)$  et  $f(0_{\mathbb{R}^d}) = 0_{\mathbb{C}}$ . En revanche, la continuité est moins évidente et nous raisonnerons par construction pour le prouver. Pour tout vecteur  $z_0$ , la fonction suivante est une courbe sur  $\mathbb{R}^d \times [0, 3]$

$$\psi(z, t) = \begin{cases} tz_0 & \text{si } t \in [0, 1] \\ (t-1)z + (2-t)z_0 & \text{si } t \in [1, 2] \\ (3-t)z & \text{si } t \in [2, 3] \end{cases}$$

Le graphe de la fonction  $\psi$  forme un triangle de sommet  $(0_{\mathbb{R}^d}, z_0, z)$ .

Définissons  $\theta : [0, 3] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction désignant la branche de  $\arg(\varphi(\psi(z, t)))$ , alors  $t \mapsto \theta(t, z)$  est une fonction continue et  $\theta(0, z_0) = 0_{\mathbb{C}}$ .

Si  $t \in [0, 1]$  alors  $\varphi(tz_0) \neq 0_{\mathbb{C}}$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout vecteur  $z$  vérifiant  $|z - z_0| < \eta$  nous obtenons  $\max_{t \in [0, 1]} |\varphi(tz) - \varphi(tz_0)| < \epsilon$ . Ainsi, il existe un voisinage  $U$  de  $z_0$  tel que tout couple  $(z, t) \in U \times [0, 3]$  donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^{\circ n}(\psi(z, t))}{n} = 0_{\mathbb{C}}$$

où  $\varphi^{\circ n} = \varphi \circ \dots \circ \varphi$  ( $n \in \mathbb{N}$  fois). Cette quantité correspond au nombre de rotation de  $\varphi$  autour de 0. Ainsi,  $\forall z \in U$ ,  $\theta(3, z_0) = 0_{\mathbb{C}}$  et  $\text{Im} f(z) = \theta(2, z_0)$ . Cela signifie alors que si  $z$  est proche de  $z_0$  alors  $\text{Im} f(z)$  est proche de  $\text{Im} f(z_0)$ . Donc, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $z_0$  tel que  $\forall z \in V$ ,  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ . Cela prouve la continuité et termine la

preuve de l'existence.

(*Unicité*) Supposons qu'il existe  $f$  et  $g$  vérifiant les conditions 1., 2. et 3. de la fonction obtenue dans le lemme 1.

Nous avons les égalités  $\varphi(z) = e^{f(z)} = e^{g(z)}$  qui sont vérifiées sur  $\mathbb{R}^d$  ainsi

$$\forall z \in \mathbb{R}^d, e^{f(z)} = e^{g(z)} \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{R}^d, e^{f(z)-g(z)} = 1$$

Or  $f(0_{\mathbb{R}^d}) = 0_{\mathbb{C}}$  et  $g(0_{\mathbb{R}^d}) = 0_{\mathbb{C}}$  alors  $f(0_{\mathbb{R}^d}) - g(0_{\mathbb{R}^d}) = 0_{\mathbb{C}}$ . Comme  $f$  et  $g$  sont continues sur tout connexe et sont à valeur dans  $\mathbb{C}$  alors  $f(z) = g(z)$  pour tout  $z$  dans un connexe de  $\mathbb{R}^d$ . Ce qui prouve l'unicité et termine la preuve du lemme 1.  $\square$

Observons que les hypothèses du lemme 1 sont réunies sur la fonction  $\widehat{\mu}$ , alors nous obtenons l'existence d'une unique fonction continue  $f$  telle que  $f(0) = 0$  et  $e^{f(z)} = \widehat{\mu}(z)$ . En particulier, l'égalité suivante est vérifiée  $f = \log \widehat{\mu}$  et l'unicité de  $f$  implique l'unicité de  $\log \widehat{\mu}$ ; en d'autre terme l'unicité de  $\widehat{\mu}$ . Maintenant, par infinie divisibilité de  $\mu$ , nous obtenons l'unicité de  $\mu_n$  et nous pouvons écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, f(t) = \log \widehat{\mu}(t) \text{ et } f(t) = \log \widehat{\mu}_n(t)^n$$

Par égalité, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \log \widehat{\mu}(t) = n \log \widehat{\mu}_n(t) \Rightarrow \widehat{\mu}(t)^{1/n} = \widehat{\mu}_n(t)$$

Les fonctions caractéristiques étant égales alors les lois sont identiques. Ce qui termine la démonstration.  $\square$

Ce résultat permet de définir, de manière rigoureuse, le produit de convolution itérée d'une loi de probabilité pour des puissances qui ne sont pas des entiers. Nous définissons alors l'infinie divisibilité d'une loi de probabilité  $\mu$  pour de telles puissances  $a \in \mathbb{R}$  avec sa fonction caractéristique par la quantité  $\widehat{\mu}(t)^a$  pour tout vecteur  $t \in \mathbb{R}^d$ . Nous adoptons la convention  $\mu^{*0} = \delta_0$ .

## 1.4 Convergence de loi infiniment divisible

Cette section présente le résultat de convergence concernant les lois infiniment divisibles.

**Proposition 4.** Si  $(\mu_k)_k$  est une suite de lois infiniment divisibles sur  $\mathbb{R}^d$  qui converge faiblement vers une loi  $\mu$  alors  $\mu$  est une loi infiniment divisible  $\mathbb{R}^d$ .

*Démonstration.* Soit  $(\mu_k)_k$  une suite de lois infiniment divisibles sur  $\mathbb{R}^d$  et convergeant faiblement vers une loi de probabilité  $\mu$ . Nous avons

$$\mu_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu \Rightarrow \widehat{\mu}_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \widehat{\mu}$$

Comme  $\widehat{\mu}$  est continue en 0 et est la limite uniforme d'une suite de mesure alors  $\widehat{\mu}$  est la fonction caractéristique d'une loi de probabilité  $\varsigma$ . Introduisons le lemme suivant.

**Lemme 2.** Soit  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue vérifiant

$$\varphi(0_{\mathbb{R}^d}) = 1 \text{ et } \forall z \neq 0_{\mathbb{R}^d}, \varphi(z) \neq 0_{\mathbb{C}}$$

Si  $(\varphi_k)_k$  est une suite de fonction vérifiant  $\varphi_k(0_{\mathbb{R}^d}) = 1$  et  $\varphi_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \varphi(x)$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}^d$  alors  $\log \varphi_m(x) \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} \log \varphi(x)$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}^d$ .

*Démonstration.* Comme  $\varphi$  est non nul alors nous pouvons écrire

$$\varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \varphi \Rightarrow \frac{\varphi_k}{\varphi} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1 \Rightarrow e^{\log \varphi_k - \log \varphi} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$$

Cela signifie que les valeurs de  $u_k(x) := e^{\log \varphi_k(x) - \log \varphi(x)}$  sont dans  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  contenant 1. En particulier, les valeurs des fonctions  $v_k(x) := \log \varphi_k(x) - \log \varphi(x)$  sont dans  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}(2\pi i k, \alpha)$  avec  $\alpha > 0$  pris arbitrairement petit.

Pour  $\alpha > 0$  et  $k > 0$ , les fonctions  $v_k$  sont continues et  $v_k(0) = 0$  alors, pour tout  $k$ , nous pouvons écrire

$$v_k(x) \in \mathcal{B}(0, \alpha) \Rightarrow \forall x \in V, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, v_k(x) = \log \left( \frac{\varphi_k(x)}{\varphi(x)} \right)$$

Comme les fonctions  $v_k$  sont continues en 0 alors, par définition de la continuité

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - 1| < \eta &\Rightarrow |v_m(x) - v_m(0)| < \epsilon \\ \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \left| \frac{\varphi_m(x)}{\varphi(x)} - 1 \right| < \eta &\Rightarrow \left| \log \frac{\varphi_m(x)}{\varphi(x)} \right| < \epsilon \end{aligned}$$

Cela prouve la convergence uniforme de la suite  $\log \varphi_m(x)$  vers  $\log \varphi(x)$  sur tout compact.  $\square$

Comme  $(\widehat{\mu}_k)_k$  converge uniformément vers  $\widehat{\mu}$ ,  $\widehat{\mu}$  est continue en 0,  $\widehat{\mu}_k(0) = \widehat{\mu}(0) = 1$ ,  $\widehat{\mu}_k(t) \neq 0$  et  $\widehat{\mu}(t) \neq 0$  alors le lemme 2 affirme  $(\log \widehat{\mu}_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \log \widehat{\mu}$  et ainsi  $\widehat{\mu}_k^{1/n} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \widehat{\mu}^{1/n}$ . Comme  $(\widehat{\mu}^{1/n})$  est continue en 0 et est la limite uniforme d'une suite de mesure alors  $(\widehat{\mu}^{1/n})$  est la fonction caractéristique d'une loi de probabilité que nous notons  $\varsigma_n$ . Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \widehat{\varsigma}_n(t) = \widehat{\mu}(t)^{1/n} \Rightarrow \widehat{\mu}(t) = \widehat{\varsigma}_n^n(t) \Rightarrow \varsigma_n^{*n} = \mu$$

Il existe donc une loi de probabilité  $\varsigma_n$  telle que  $\mu = \varsigma_n^{*n}$ . Cela prouve que  $\mu$  est infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$ .  $\square$

**Proposition 5.** Si  $\mu$  est une loi infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$  alors  $\mu^{*a} * \mu^{*b} = \mu^{*(a+b)}$  avec  $a, b$  des réels.

*Démonstration.* La fonction caractéristique de  $\mu^{*(a+b)}$  s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \mu^{*(a+b)}(t) = \widehat{\mu}(t)^{a+b} = e^{(a+b)\log \widehat{\mu}(t)} = e^{a \log \widehat{\mu}(t) + b \log \widehat{\mu}(t)} = \widehat{\mu}(t)^a \widehat{\mu}(t)^b = \widehat{\mu^{*a} * \mu^{*b}}(t)$$

Ici, la proposition 2 donne un sens aux écritures sous forme logarithmique au niveau des égalités précédentes. Ainsi, nous pouvons conclure  $\mu^{*(a+b)} = \mu^{*a} * \mu^{*b}$ .  $\square$

**Proposition 6.** Si  $\mu$  est une loi infiniment divisible alors  $\mu^{*a}$  est bien définie et est infiniment divisible pour tout  $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mu$  une loi infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$  et notons  $\mu_n$  la loi pour laquelle  $\mu$  est infiniment divisible. Comme  $\mu$  est une loi de probabilité alors  $\mu^{*1/n}$  reste une loi de probabilité. Nous écrivons

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \widehat{\mu^{*1/n}}(t) = \left(\widehat{\mu}^{\frac{1}{n}}\right)^k$$

Ceci signifie que  $\mu^{*1/n}$  est une loi infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$ . Par produit de convolution de  $m \in \mathbb{N}$  loi infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mu^{*1/n} * \dots * \mu^{*1/n} = \mu^{*m/n}$  est une loi infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$ .

Considérons un nombre réel  $a \in \mathbb{R}$ . Il existe une suite de nombre rationnels  $(r_n)_n$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = a$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = a$  alors  $\widehat{\mu}^{r_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \widehat{\mu}^a$  sur tout compact de  $\mathbb{R}^d$ . Puisque la convergence suivante est vraie  $\widehat{\mu}^{r_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \widehat{\mu}^a$  et que la loi de probabilité  $\mu^{*r_n}$  est infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$  pour tout entier  $n$  alors  $\mu^{*a}$  est infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$  comme limite d'une loi infiniment divisible.  $\square$

## 1.5 Continuité absolue et singularité

Nous étudions maintenant la continuité absolue des lois infiniment divisibles. Dans toute cette section,  $\lambda$  désigne la mesure de Lebesgue.

L'étude de la continuité absolue et de la singularité des lois de probabilité donnent des résultats différents suivant qu'une loi de probabilité soit discrète ou non. Pour cette raison, nous rappelons rapidement ces principes ici.

**Définition 3.** On dit qu'une loi infiniment divisible  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^d$  est

— *discrète* s'il existe un ensemble dénombrable  $A$  tel que

$$\mu(\mathbb{R}^d \setminus A) = 0$$

— *continue* si l'égalité suivante est vérifiée sur  $\mathbb{R}^d$

$$\mu(\{x\}) = 0$$

En général, ces régularités font référence au comportement asymptotique de la fonction caractéristique de la loi  $\mu$  au voisinage de  $\pm\infty$ . Nous pouvons citer la propriété, propre pour les fonctions caractéristiques, qui énonce que si  $\int |\widehat{\mu}(t)| dt < +\infty$  alors  $\mu \ll \lambda$ . Nous pouvons citer aussi le théorème de Riemann-Lebesgue qui affirme que la fonction caractéristique de toute loi absolument continue tend vers 0 au voisinage de  $\pm\infty$ .

**Proposition 7.** Soit  $\mu = \mu_1 * \mu_2$  avec  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux lois de probabilités. On a les propriétés suivantes

1.  $\mu$  est continue  $\Leftrightarrow \mu_1$  ou  $\mu_2$  est continue.
2.  $\mu$  est discrète  $\Leftrightarrow \mu_1$  et  $\mu_2$  sont discrètes.
3. si  $\mu_1$  ou  $\mu_2$  est absolument continue alors  $\mu$  est absolument continue.

*Démonstration.* Nous démontrons ces deux premiers résultats par double implication.

1.( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $\mu_1$  est continue alors par définition de  $\mu$  nous écrivons

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \mu(\{x\}) = \int \mu_1(\{x-y\}) \mu_2(dy)$$

Nous déduisons que  $\mu$  est finie par continuité de  $\mu_1$  et donc  $\mu$  est continue sur  $\mathbb{R}^d$ . Le raisonnement est analogue pour traiter le cas où  $\mu_2$  est continue en appliquant la commutativité du produit de convolution  $\mu = \mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$  qui donnera

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \mu(\{x\}) = \int \mu_2(\{x-y\}) \mu_1(dy)$$

( $\Rightarrow$ ) Si  $\mu$  est continue alors  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont continues par produit de convolution de fonction continue.

2.( $\Leftarrow$ ) Si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont discrètes alors il existe deux ensembles dénombrables  $A_1$  et  $A_2$  vérifiant

$$\mu_1(\mathbb{R}^d \setminus A_1) = \mu_2(\mathbb{R}^d \setminus A_2) = 0$$

Ainsi,  $A_1 + A_2$  est dénombrable et  $\mu(\mathbb{R}^d \setminus A_1 + A_2) = 0$  et donc  $\mu$  est discrète.

( $\Rightarrow$ ) Si  $\mu$  est discrète alors  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont discrètes par construction de  $\mu$ .

Nous raisonnons par définition de la continuité absolue d'une loi de probabilité.

3. Supposons que  $\mu_1 \ll \lambda$  alors  $\lambda(B) = 0$  pour tout ensemble mesurable  $B$ . Ainsi  $\lambda(B-y) = 0$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^d$  et ensemble mesurable  $B$ . Par conséquent,

$$\forall B \in \mathcal{F}, \mu(B) = \int \mu_1(B-y) \mu_2(dy) = \int 0 \cdot \mu_2(dy) = 0$$

Nous observons que l'implication suivante est établie :  $\lambda(B) = 0 \Rightarrow \nu(B) = 0$  pour tout ensemble mesurable  $B$ . Donc  $\mu \ll \lambda$  par définition de la continuité absolue. Nous raisonnons de manière identique pour le cas  $\mu_2 \ll \lambda$  en appliquant cette fois-ci l'égalité

$$\forall B \in \mathcal{F}, \mu(B) = \int \mu_2(B-y) \mu_1(dy)$$

justifiée par la commutativité du produit de convolution  $\mu = \mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$ . □

## Chapitre 2

# Représentation des lois infiniment divisibles

Ce chapitre expose une propriété fondamentale des lois infiniment divisibles permettant de les caractériser : la formule de Lévy-Khintchine.

### 2.1 Formule de Lévy-Khintchine

Nous disons qu'une mesure  $\nu$  est une mesure de Lévy si elle vérifie

$$\nu(\{0\}) = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} \min(\|x\|^2, 1) \nu(dx) < \infty$$

Dans le cas des lois de probabilités définies sur  $\mathbb{R}^d$ , la formule de Lévy-Khintchine s'énonce comme suit.

**Théorème 2** (Formule de Lévy-Khintchine (pour les lois de probabilités)). *Si  $\mu$  est une mesure de probabilité infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$  alors il existe une unique*

1. *matrice symétrique définie positive  $A \in M_d(\mathbb{R})$ .*
2. *mesure de Lévy  $\nu$ .*
3. *vecteur  $\gamma \in \mathbb{R}^d$ .*

*telles que l'exposant caractéristique de  $\mu$  soit déterminée par l'unique triplet  $(A, \nu, \gamma)$  et soit donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \log \hat{\mu}(t) = -\frac{1}{2} \langle t, At \rangle + i \langle \gamma, t \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \left( e^{i \langle t, x \rangle} - 1 - i \langle t, x \rangle 1_{\{\|x\| \leq 1\}}(x) \right) \nu(dx) \quad (2.1)$$

*Si tel est le cas, on dit que  $\mu$  admet une représentation de Lévy-Khintchine et on appelle  $(A, \nu, \gamma)$  le triplet générateur de  $\mu$ .*

Nous nous inspirerons de la preuve de Sato, dans [4, p.44], qui utilise la notion de mesure tendue qui sera admise pour démontrer le théorème 2.

*Démonstration.* Soit  $\mu$  une loi infiniment divisible sur  $\mathbb{R}^d$  et soit  $(u_n)_n$  une suite de nombres strictement positive vérifiant  $u_n \downarrow 0$ . Soit  $\mu_n$  une loi de Poisson composée de paramètre  $c = \frac{1}{u_n}$  et  $\sigma = \mu^{u_n}$ , qui est une loi infiniment divisible. Nous avons



$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \widehat{\mu}(t)^{u_n} = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}} (e^{i\langle t, x \rangle} - 1) \mu^{*u_n}(dx) \quad \widehat{\mu}_n(t) = \exp\left(\frac{1}{u_n} (\widehat{\mu}(t)^{u_n} - 1)\right)$$

Puisque la fonction caractéristique de toute loi infiniment divisible ne s'annule jamais alors nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^d, \log(\widehat{\mu}_n(t)) &= \frac{1}{u_n} (\widehat{\mu}(t)^{u_n} - 1) = \frac{1}{u_n} \left( \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}} (e^{i\langle t, x \rangle} - 1) \mu^{*u_n}(dx) - 1 \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}} (e^{i\langle t, x \rangle} - 1) \frac{\mu^{*u_n}}{u_n}(dx) - \frac{1}{u_n} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle t, x \rangle} - 1 - i\langle t, x \rangle 1_{\{\|x\| \leq 1\}}) \frac{\mu^{*u_n}}{u_n}(dx) = -\frac{1}{2} \langle t, 0_{M_n(\mathbb{R})} t \rangle + i\langle 0_{\mathbb{R}^d}, t \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x) \nu_n(dx) \end{aligned}$$

moyennant une réécriture adéquate du terme à gauche de l'égalité, avec  $\nu_n(dx) = \frac{\mu^{*u_n}(dx)}{u_n}$  et  $g(t, x) = e^{i\langle t, x \rangle} - 1 - i\langle t, x \rangle c(x)$  où  $c$  désigne une fonction continue bornée. Observons que l'exposant caractéristique de la fonction  $\widehat{\mu}$  vérifie le comportement asymptotique suivant

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \log(\widehat{\mu}_n(t)) = \frac{1}{u_n} (\widehat{\mu}(t)^{u_n} - 1) = \frac{e^{u_n \log \widehat{\mu}(t)} - 1}{u_n} = \frac{u_n \log \widehat{\mu}(t) + o_{+\infty}(u_n^2)}{u_n} \longrightarrow \log \widehat{\mu}(t)$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ . Maintenant, posons  $A_n = 0_{M_d(\mathbb{R})}$ ,  $\beta_n = 0_{\mathbb{R}^d}$  et  $E = \{\epsilon > 0 \mid \int_{\{\|x\|=\epsilon\}} \min(\|x\|^2, 1) \nu_n(dx) = 0\}$ . Ces variables permettent de réécrire l'exposant caractéristique sous cette forme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \epsilon \in E, \forall t \in \mathbb{R}^d, \log \widehat{\mu}_n(t) = -\frac{1}{2} \langle t, A_n t \rangle + i\langle \beta_n, t \rangle + I_{n,\epsilon} + J_{n,\epsilon}$$

avec  $I_{n,\epsilon} = \int_{\{\|x\| \leq \epsilon\}} (g(t, x) + \frac{1}{2} \langle t, x \rangle^2) \nu_n(dx)$  et  $J_{n,\epsilon} = \int_{\{\|x\| > \epsilon\}} g(t, x) \nu_n(dx)$ . Pour continuer la démonstration, nous appliquons, en l'admettant, le résultat sur la mesure de Lévy qui précise que la mesure  $\min(\|x\|^2, 1) \nu_n$  est tendue, voir [4, p.42]. Sous cette affirmation, nous pouvons appliquer le théorème de sélection, voir [3, Chapitre 6, Théorème 1], sur la suite  $(\min(\|x\|^2, 1) \nu_n)_n$  affirmant l'existence d'une sous-suite de loi  $(\min(\|x\|^2, 1) \nu_{n_k})_k$  convergeant vers  $\min(\|x\|^2, 1) \nu$ . Nous pouvons alors raisonner avec les sous-suites. Étudions les quantités  $I_{n_k, \epsilon}$  et  $J_{n_k, \epsilon}$ .

Étude de  $J_{n_k, \epsilon}$ .

Nous écrivons

$$\forall \epsilon \in E, \lim_{k \rightarrow +\infty} J_{n_k, \epsilon} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\{\|x\| > \epsilon\}} g(t, x) \nu_{n_k}(dx) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{\|x\| > \epsilon\}}(x) g(t, x) \nu_{n_k}(dx)$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1_{\{\|x\| > \epsilon\}}(x) g(t, x)}{\min(\|x\|^2, 1)} \min(\|x\|^2, 1) \nu_{n_k}(dx)$$

Comme la fonction  $\varphi : x \mapsto 1_{\{\|x\| > \epsilon\}}(x) \min(\|x\|^2, 1)$  est bornée, car une étude évidente de la fonction  $\varphi$  établit l'inégalité  $|\varphi(x)| \leq \max(1, \frac{1}{\epsilon^2})$  sur  $\mathbb{R}^d$ , alors la fonction  $x \mapsto \frac{1_{\{\|x\| > \epsilon\}}(x) g(t, x)}{\min(\|x\|^2, 1)}$  est bornée par produit de fonctions bornées. Par conséquent, nous obtenons, par passage à la limite sur  $\epsilon \downarrow 0$ ,  $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} J_{n_k, \epsilon} = \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x) \nu(dx)$ .

Étude de  $I_{n_k, \epsilon}$ .

Nous écrivons

$$\forall \epsilon \in E, I_{n_k, \epsilon} = \int_{\{\|x\| < \epsilon\}} \left( g(t, x) + \frac{1}{2} \langle t, x \rangle^2 \right) \nu_{n_k}(dx) = \int_{\{\|x\| < \epsilon\}} \frac{(g(t, x) + \frac{1}{2} \langle t, x \rangle^2)}{\min(\|x\|^2, 1)} \min(\|x\|^2, 1) \nu_{n_k}(dx)$$

A partir l'égalité précédente, nous obtenons la majoration suivante

$$\forall \epsilon \in E, |I_{n_k, \epsilon}| \leq \sup_{\|x\| \leq \epsilon} \left( g(t, x) + \frac{\langle t, x \rangle^2}{2 \min(\|x\|^2, 1)} \right) \sup_{n_k \in \mathbb{N}^*} \min(\|x\|^2, 1) \nu_{n_k}(\mathbb{R}^d)$$

Comme la quantité majorée à gauche tend vers 0 et la quantité majorée à droite est finie, car  $\min(1, \|x\|^2) \nu_n$  est une mesure tendue, alors le majorant converge vers 0 quand  $\epsilon \downarrow 0$ . Par majoration par une quantité qui converge vers 0 alors  $|I_{n_k, \epsilon}|$  converge vers 0. Par passage à la limite sur  $k \rightarrow +\infty$ , nous obtenons  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} |I_{n_k, \epsilon}| = 0$ .

Synthèse des études effectuées.

Nous avons obtenu  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} |I_{n_k, \epsilon}| = 0$  et  $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} J_{n_k, \epsilon} = \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x) \nu(dx)$ . Ainsi, nous venons d'établir l'égalité suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \log \hat{\mu}(t) = - \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2} \langle t, A_{n_k, \epsilon} t \rangle + \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} i \langle \beta_{n_k, \epsilon}, t \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x) \nu(dx)$$

Concernant la convergence des éléments  $A_{n_k, \epsilon}$  et  $\beta_{n_k, \epsilon}$ , observons que les applications  $t \mapsto \langle t, A_{n_k, \epsilon} t \rangle$  et  $t \mapsto \langle \beta_{n_k, \epsilon}, t \rangle$  sont respectivement une forme quadratique strictement positive et une forme linéaire. Ainsi, il existe une unique matrice symétrique positive  $A$  vérifiant l'égalité  $\langle t, A_{n_k, \epsilon} t \rangle = \langle t, A t \rangle$  sur  $\mathbb{R}^d$  et un unique vecteur  $\beta$  vérifiant  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \beta_{n_k, \epsilon}, t \rangle = \langle \beta, t \rangle$ . D'une part, il vient  $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_{n_k, \epsilon} = \beta$ . D'autre part, puisque  $\min(\|x\|^2, 1) \nu$  est une mesure finie alors  $E^c$  est un ensemble au plus dénombrable. De fait,  $E$  possède une suite convergente vers 0, et en tenant compte que  $\epsilon \mapsto \langle t, A_{n_k, \epsilon} t \rangle$  est une fonction croissante alors  $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} A_{n_k, \epsilon} = A$ .

Par conséquent, nous obtenons

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \log \hat{\mu}(t) = -\frac{1}{2} \langle t, A t \rangle + i \langle \beta, t \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x) \nu(dx)$$

Nous venons de montrer que  $\hat{\mu}$  vérifie l'égalité attendue et les conditions voulues en exprimant  $\mu$  comme la loi limite d'une loi de Poisson composée dont nous savons pertinemment que c'est une loi infiniment divisible. Ce qui termine la preuve de ce théorème.  $\square$

Dans la démonstration, beaucoup de résultats intermédiaires ont été adoptés pour faciliter son écriture et sa compréhension. En effet, le nombre de lemme, divers et très technique ayant nécessité la preuve de cette formule, étant énorme, nous avons adopté une stratégie visant à appliquer et à adapter ces lemmes aux niveaux de la démonstration. Citons [4, Théorème 8.7] qui généralise l'étude des sous-suites et citons [4, p42] qui formalise la notion de mesure tendue.

Le théorème 2 possède une réciproque et une unicité déterminée par la loi de probabilité  $\mu$ , i.e que les éléments du triplet générateur se déterminent par  $\mu$ . Cependant, la longueur des preuves ne seront pas raisonnable devant la limite de page imposée pour ce projet de recherche. Nous nous référons respectivement aux références [4, p40] et [4, p44] pour une démonstration exhaustive.

Dans le cas des lois de probabilité qui sont de carré intégrable, cette formule s'écrit plus simplement comme suit.

**Théorème 3.** *Toute mesure de probabilité  $\mu$  de carré intégrable est infiniment divisible si et seulement s'il existe un unique couple de réel  $(\alpha, \gamma)$  et une unique mesure de Lévy  $\nu$  telle que la fonction caractéristique, notée  $\hat{\mu}$ , de  $\mu$  s'écrit explicitement*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \hat{\mu}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha t^2 + i\gamma t + \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx 1_{\{|x| \leq 1\}}(x)) \nu(dx)\right)$$

Pour le théorème 3, nous nous inspirerons de la preuve de Matheron, dans [6, p.12].

*Démonstration.* Raisonnons par double implication.

( $\Leftarrow$ ) Observons que la fonction  $\hat{\mu}$  s'écrit comme le produit des fonctions

$$t \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha t^2 + i\gamma t\right) \text{ et } t \mapsto \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx 1_{\{|x| \leq 1\}}(x)) \nu(dx)\right)$$

Le premier terme du produit correspond à la fonction caractéristique de la loi normale, de paramètre  $(\gamma, \alpha)$ , qui est une loi infiniment divisible. Pour le second terme, observons qu'il peut se réécrire comme suit

$$\exp\left(\int_{|x| \leq 1} (e^{itx} - 1 - itx) \nu(dx)\right) \exp\left(\int_{|x| > 1} (e^{itx} - 1) \nu(dx)\right)$$

En écrivant ceux-ci comme une somme avec les intégrales de Riemann-Stieltjes puis en utilisant la propriété de l'exponentielle, nous pouvons écrire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \exp(e^{it u_k} - 1 - it u_k) \prod_{k=1}^n \exp(e^{it v_k} - 1)$$

Le terme premier correspond à la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 1$  prenant les valeurs  $t n + t$ . Le terme second correspond à la fonction caractéristique d'une

loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 1$ . Par convergence en loi, nous déduisons que la limite loi est une loi de Poisson, qui est une loi infiniment divisible. En définitive,  $\widehat{\mu}$  est le produit de fonction caractéristique désignant : l'une, une loi normale et l'autre, une loi de Poisson. Le produit de fonctions caractéristiques de deux lois infiniment divisibles étant équivalent au produit de convolution de ces deux lois, nous déduisons que  $\mu$  est infiniment divisible par produit de convolution de deux lois infiniment divisibles.

( $\Rightarrow$ ) Si  $\mu$  est une loi infiniment divisible alors sa fonction caractéristique  $\widehat{\mu}$  ne s'annule jamais. Pour  $n$  assez grand, la quantité  $\widehat{\mu}_n(t)^n$  converge vers 1 et nous pouvons, moyennant une réécriture de  $\widehat{\mu}$ , effectuer un développement limité à l'ordre 2.

$$\log \widehat{\mu}(t) = n \log \widehat{\mu}_n(t) = {}_{+\infty} n \left( -1 + \widehat{\mu}_n(t) - (1 - \widehat{\mu}_n(t))^2 + o_{+\infty}(n^2) \right)$$

En posant  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$  et en remarquant que  $-itx1_A(x) + itx1_A(x) = 0$  alors le premier terme s'écrit comme suit

$$-1 + \widehat{\mu}_n(t) = it\gamma + \int_{\mathbb{R}} e^{itx} - 1 - itx\mu_n(dx)$$

après application de la linéarité de l'intégrale avec  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \int x\mu_n(dx)$  et de la définition de l'espérance. Comme  $\mu_n$  est la loi de probabilité pour laquelle  $\mu$  est infiniment divisible alors nous pouvons écrire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int x\mu_n(dx) = \int x\mu(dx) = \gamma$ . De la même manière, en remarquant que  $-it(x-m)^2 + it(x-m)^2 = 0$ , que les termes, en tenant pas compte de  $\frac{t^2\sigma^2}{2}$ , sont négligeables devant  $o_{+\infty}(n^2)$  et en utilisant la définition de la variance alors le second terme s'écrit comme suit

$$(1 - \widehat{\mu}_n(t))^2 = \frac{t^2\sigma^2}{2} + o_{+\infty}(n^2)$$

En effectuant le changement de variable  $\nu_n(dy) = \int_{-\infty}^x y^2 \mu_n(dy)$  puis en faisant tendre  $n$  dans l'intégrale, nous obtenons le résultat attendu en appliquant le théorème de Helly.  $\square$

## 2.2 Interprétation de la formule et exemples particuliers

Sur  $\mathbb{R}$ , comme sur  $\mathbb{R}^d$ , la formule de Lévy-Khintchine peut se décomposer en une loi normale et en une loi de Poisson. Cette remarque est plus approfondie par Matheron dans [6, p.16]. En effet, sur  $\mathbb{R}$ , il affirme que cette formule se décompose comme une loi normale, la limite d'une loi de Poisson à valeur positive et la limite d'une loi de Poisson à valeur négative. Les lois infiniment divisibles sont alors essentiellement constituées de la loi normale et de la loi de Poisson.

Le *cut-off* désigné par la fonction  $1_{\{\|x\| \leq 1\}}$  peut-être changé. Généralement, ce sont les fonctions  $c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mesurables et bornées vérifiant

$$c(x) \underset{\|x\| \rightarrow 0}{=} 1 + o(\|x\|) \text{ et } c(x) \underset{\|x\| \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\|x\|}\right)$$

Ainsi, moyennant une réécriture de la formule (2.1), celle-ci se réécrit comme suit

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \log \widehat{\mu}(t) = -\frac{1}{2} \langle t, At \rangle + i \langle \gamma_c, t \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i \langle t, x \rangle} - 1 - i \langle t, x \rangle c(x)) \nu(dx)$$

avec  $\gamma_c = \gamma + \int_{\mathbb{R}^d} x (c(x) - 1_{\|x\| \leq 1}) \nu(dx)$ . En pratique, les fonctions  $c$ , qui sont souvent utilisées, sont

$$\begin{aligned} \text{Sur } \mathbb{R}^d, \quad c(x) &= 1_{\{\|x\| \leq \epsilon\}}(x) \text{ avec } \epsilon > 0 \\ c(x) &= \frac{1}{1 + \|x\|^2} \\ c(x) &= 1_{\{\|x\| \leq 1\}}(x) + 1_{\{1 < \|x\| \leq 2\}}(x)(2 - \|x\|) \\ \text{Sur } \mathbb{R}, \quad c(x) &= 1_{[-1,1]}(x) + \frac{1}{x} 1_{]1,+\infty[}(x) - \frac{1}{x} 1_{]-\infty,-1[}(x) \\ c(x) &= \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

Loi de probabilité	Paramètre	Triplet générateur
Loi normale centrée réduite	$(0, 1)$	$(1, 0, 0)$
Loi de Poisson composée	$(c, \sigma)$	$(0, c\sigma, 0)$
Loi Gamma	$(c, \alpha)$	$\left(0, \frac{c}{x} 1_{]0,+\infty[}(x) dx, 0\right)$
Loi $\frac{1}{2}$ -stable	$c$	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1_{]0,+\infty[}(x)^c}{\sqrt{x}} dx, 0\right)$
Loi de Poisson	$c$	$(0, c\delta_1, 0)$

LISTE DE TRIPLET GENERATEUR ASSOCIE A LEUR LOI DE PROBABILITE

## Chapitre 3

# Le cas des lois stables

Ce dernier chapitre est consacré à l'étude du lien entre les lois stables et les lois infiniment divisibles.

### 3.1 Définitions

**Définition 4.** On dit qu'une loi de probabilité  $\mu$  est stable sur  $\mathbb{R}^d$  si

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \exists b \in \mathbb{R}, \widehat{\mu}(t)^a = \widehat{\mu}(bt) e^{i\langle t, c \rangle}$$

avec  $c > 0$  un nombre réel.

Du point de vue des variables aléatoires, cette stabilité est nettement mieux comprise puisqu'il s'agit essentiellement d'une égalité en loi de somme de variable aléatoire.

**Définition 5.** On dit que la loi  $\mu$  d'une variable aléatoire  $X$  est stable dans  $\mathbb{R}$  si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $c_n > 0$  et  $\gamma_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$X_1 + \dots + X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} c_n X + \gamma_n$$

avec  $(X_k)_{k=1}^n$  une suite de variable aléatoire indépendante et identiquement distribuée dans  $\mu$ .

Par abus de langage, nous dirons qu'une variable aléatoire est stable.

**Exemple 3.** Nous pouvons citer les lois à densité suivantes :

— la loi normale de paramètre  $(\mu, \sigma^2)$ , qui est absolument continue de densité

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

— la loi de Cauchy de paramètre  $(t_0, a)$ , qui est absolument continue de densité

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\pi a \left(1 + \left(\frac{t-t_0}{a}\right)^2\right)}$$

— la loi de Landau de paramètre  $(c, \mu)$ , qui est absolument continue de densité

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{s \ln(s) + ts} ds$$

— la loi de Lévy de paramètre  $(\mu, c)$ , qui est absolument continue de densité

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \frac{1}{(t - \mu)^{3/2}} e^{-\frac{c}{2(t-\mu)}}$$

Pour citer une loi ne vérifiant pas une telle stabilité, c'est-à-dire une loi qui se perd par addition de variables aléatoires, nous pouvons citer la loi de Bernoulli. En effet, il est connu que toute somme de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli suit une loi binomiale.

Comme les lois infiniment divisibles, la stabilité ne concerne pas les paramètres de la loi mais essentiellement la loi de probabilité elle-même. De plus, la stabilité présentée ici signifie que la loi d'une variable aléatoire  $X_1$  est préservée par addition de variables aléatoires, définies à l'origine et à l'échelle. Préciser que cette stabilité est par addition a une importance mathématique puisqu'elle ne doit pas être confondue avec les autres stabilités. Citons par exemple la loi log-normale (stable par rapport au produit) ou encore la loi de Weibull (stable par rapport au maximum).

## 3.2 Propriétés et représentation des lois stables

Les propriétés relatives aux lois stables sont nombreuses, nous citons quelques-unes qui sont incontournables dans la théorie des lois stables et des lois infiniment divisibles.

**Théorème 4.** Si  $\mu$  est stable dans  $\mathbb{R}$  alors

$$\exists \alpha \in ]0, 2], c_n^\alpha = n$$

Si tel est le cas, on appelle  $\alpha$  l'indice de stabilité de la loi et on dit que la loi est  $\alpha$ -stable.

La démonstration possédant une longueur qui dépassera la limite de pages imposée pour ce travail, nous pouvons consulter le livre de Feller [3, chap 6., sec. 1] pour avoir une preuve détaillée.

**Exemple 4.** La loi normale est 2-stable, la loi de Lévy est 1/2-stable. La loi de Cauchy et la loi de Landau sont 1-stable.

En prenant la contraposée du résultat précédent, ceci fait de lui un critère de stabilité efficace d'une loi de probabilité. De plus, il permet de montrer que la variance d'une loi stable est finie ou non.

**Proposition 8.** Soit  $X$  est  $\alpha$ -stable alors on a les résultats suivants.

1. si  $\alpha < 2$  alors la variance de  $X$  est non finie.
2. si  $\alpha < 1$  alors la variance et la moyenne de  $X$  est non finie.

Le nombre  $\alpha$  est un paramètre de la loi de probabilité, il décrit sa stabilité. En général, quatre paramètres définissent une loi stable,

- $\alpha \in ]0, 2]$  (indice de stabilité)
- $\beta \in [-1, 1]$  (paramètre d'asymétrie)
- $m \in \mathbb{R}$  (moyenne)
- $\sigma \geq 0$  (paramètre d'échelle)

Les paramètres sont donnés par la fonction caractéristique de la loi de probabilité, voir [7, chap 1]. La fonction caractéristique de cette loi étant complexe dans le cas général, nous citons un cas simple.

**Théorème 5.** *Toute loi stable d'indice de stabilité  $\alpha \in ]0, 2[ \setminus \{1\}$  admet une fonction caractéristique de la forme*

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \log \hat{\mu}(t) = - \int_S |\langle t, \xi \rangle|^\alpha \left( 1 - i \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \operatorname{sgn}\langle t, \xi \rangle \right) \lambda_1(d\xi) + i\langle \tau, t \rangle$$

avec  $\tau \in \mathbb{R}$  un nombre et  $S$  la sphère de  $\mathbb{R}^d$ .

**Théorème 6.** *Toute loi stable d'indice de stabilité  $\alpha = 1$  admet une fonction caractéristique de la forme*

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \log \hat{\mu}(t) = - \int_S \left( |\langle t, \xi \rangle| + i \frac{2}{\pi} \langle t, \xi \rangle \log |\langle t, \xi \rangle| \right) \lambda_1(d\xi) + i\langle \tau, t \rangle$$

avec  $\tau \in \mathbb{R}$  un nombre et  $S$  la sphère de  $\mathbb{R}^d$ .

En dimension 1, la formule de cette caractérisation s'écrit simplement comme suit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \log \hat{\mu}(t) = \lambda \left( i t \gamma - |t|^\alpha - i t \beta \frac{2}{\pi} \log |t| \right) \text{ pour } \alpha = 1 \quad (3.1)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \log \hat{\mu}(t) = \lambda \left( i t \gamma - |t|^\alpha + i t |t|^{\alpha-1} \beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \text{ pour } \alpha \in ]0, 2[ \setminus \{1\} \quad (3.2)$$

avec  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  et  $\lambda > 0$ . La preuve de ces formules se retrouvent dans [8, Théorème C.2].

### 3.3 Correspondances avec les lois infiniment divisibles

Ces dernières sections étudient les liens entre les lois stables et les lois infiniment divisibles.

**Théorème 7.** *Toute loi stable sur  $\mathbb{R}$  est infiniment divisible sur  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Si  $X$  est stable il vient l'égalité en loi :  $X_1 + \dots + X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} a_n + b_n X$ . Donc, en réarrangeant les termes, nous obtenons

$$\frac{1}{b_n} \left( \sum_{k=1}^n X_k - a_n \right) = \sum_{k=1}^n \frac{X_k - \frac{a_n}{n}}{b_n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$$

Cette dernière égalité en loi montre que  $X$  est infiniment divisible.  $\square$

En général, ce résultat est vrai dans  $\mathbb{R}^d$  mais, malheureusement, sa réciproque n'est pas vraie, que l'on soit dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^d$ . La loi exponentielle en est un contre-exemple. Elle est infiniment divisible mais elle n'est pas stable sur  $\mathbb{R}$ .



Ce premier lien consiste à dire que les lois stables possèdent toutes les propriétés des lois infiniment divisibles. Pour dire plus, par infinie divisibilité des lois stables, la formule de Lévy-Khintchine peut s'appliquer aisément. Cette formule permet de justifier l'existence des lois stables, effectuée par Feldheim dans [2, p.28] ou encore Lévy dans [5, p.356].

Ensuite, pour le second lien, il est possible d'établir l'existence des lois stables à partir des lois infiniment divisibles. Précisément et simplement, nous démontrerons certains résultats d'existence en utilisant les propriétés des lois infiniment divisibles. Les preuves originales étant longues, nous verrons que les choses sont susceptibles d'être plus « simples » avec les lois infiniment divisibles.

**Théorème 8.** *Soit  $\mu$  une loi de probabilité, soit  $(X_k)_{k=1}^n$  une suite finie variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi  $\mu$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1.  $\mu$  est stable.
2. si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$  et  $\lambda_{n+1} \sim_{+\infty} \lambda_n$  alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\lambda_n} - m_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mu$$

où  $m_n$  désigne une suite de nombre réel.

*Démonstration.* Raisonnons par double implication. L'implication réciproque, i.e. 1.  $\Leftrightarrow$  2., est évidente par définition des lois stables. Nous démontrons l'implication directe, i.e 1.  $\Rightarrow$  2.. Soit  $\mu$  une loi de probabilité que nous supposons stable et soit  $(X_k)_{k=1}^n$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dans  $\mu$ . Supposons que les égalités suivantes sont vérifiées  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$  et  $\lambda_{n+1} \sim_{+\infty} \lambda_n$ . Puis, posons  $Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\lambda_n} - m_n$  avec  $n$  prit arbitrairement grand. Nous étudions la fonction caractéristique de  $Z_n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \phi_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_n}\left(\frac{t}{\lambda_n}\right) e^{-it m_n} = \prod_{k=1}^n \hat{\mu}\left(\frac{t}{\lambda_n}\right) e^{-it m_n} = \hat{\mu}(t b_n)^n e^{-it m_n}$$

avec  $b_n = 1/\lambda_n$ . Observons que la quantité  $\phi_{Z_n}(t)$  s'écrit comme la fonction caractéristique d'une loi stable. Maintenant, la loi que les variables  $X_1, \dots, X_n$  suivent est une loi supposée stable. Comme les lois stables sont infiniment divisibles alors les variables  $X_1, \dots, X_n$  suivent une loi infiniment divisible sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $(\phi_{Z_n})_n$  est une suite fonction caractéristique d'une loi infiniment divisible. Par le résultat de convergence des lois infiniment divisibles, la suite  $(\phi_{Z_n})_n$  converge vers la fonction caractéristique d'une loi infiniment divisible. En particulier, la loi limite  $\mu$  est une loi infiniment divisible.  $\square$

Ce théorème a une place importante parmi les résultats des lois stables. Il nous apprend que ces lois apparaissent comme des « lois limites » de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à coefficient près. La forme de cette somme, et de sa convergence en loi, est l'homologue du théorème central limite; en particulier, ce théorème généralise le théorème central limite. Par ailleurs, ce résultat permet de classer les « lois limites » en déterminant les lois de probabilité qui sont stables. Heureusement, nous les connaissons toutes puisque ce sont les lois dont la fonction caractéristique est donnée par le théorème 5 pour  $\alpha \neq 1$  et le

théorème 6 pour  $\alpha = 1$ .

Ceci fait découler deux corollaires importants qui sont présentés comme des théorèmes dans les cours de probabilité « élémentaires ».

**Corollaire 1.** *La loi normale est l'unique loi stable à variance finie non nulle.*

**Corollaire 2** (dit « théorème central limite »). *Soit  $(X_k)_{k=1}^n$  une suite de variable aléatoire indépendante et identiquement distribuée, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. (domaine d'attraction)

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - \mu_n}{\lambda_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

2.  $\mathbb{V}(X_1) < +\infty$ ,  $\lambda_n = \sigma \sqrt{n}$  et  $\mu_n = nM$

Ces deux résultats forment les bases solides de la théorie des probabilités puisqu'elles permettent de comprendre des phénomènes mathématiques et d'anticiper, par exemple, des phénomènes sociaux. Précisément, les lois stables forment une classe importante de lois infiniment divisibles et sont incontournables en probabilité.

## **Deuxième partie**

# **Processus stochastiques de loi infiniment divisible**

## Chapitre 4

# Processus de Lévy

Ce chapitre définit les processus de Lévy et expose en détail les propriétés auxquelles ces processus sont liés.

Sauf mention explicite du contraire,  $T$  désigne un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  et toutes les lois de probabilité sont définies sur l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

### 4.1 Définitions

Commençons par définir les processus de Lévy et tâchons d'avoir une première compréhension de ces processus avec des exemples simples.

**Définition 6.** On appelle processus de Lévy toute famille indexée dans  $T \subset \mathbb{R}^+$  de variable aléatoire  $(X_t)_{t \in T}$  dont toutes les variables sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  qui vérifie

1.  $X_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -presque sûrement.
2. pour tout  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_d < \infty$  on obtient (indépendance)

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_d} - X_{t_{d-1}} \text{ sont indépendants}$$

3. pour tout réel  $s < t$  alors les variables  $X_t - X_s$  et  $X_{t-s}$  sont de même lois. (stationnarité)
4. pour tous réels  $\epsilon > 0$  et  $t \geq 0$  on obtient (continuité en probabilité)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0$$

5. il existe un ensemble  $A \in \{E \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(E) = 1\}$  tel que (càdlàg)

$$\forall \omega \in A, X_t(\omega) \begin{cases} \text{est continue à droite pour } t \geq 0 \\ \text{admet une limite à gauche pour } t > 0 \end{cases}$$

Si tel est le cas, on appelle

- $t$  la variable de temps.
- $T$  l'espace de temps du processus.
- $E := X_t(\Omega)$  l'espace d'état.
- $\forall \omega \in \Omega, t \mapsto X_t(\omega)$  la trajectoire du processus.

Précisément, nous dirons qu'un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  est

- un processus de Lévy en loi si  $(X_t)_{t \geq 0}$  vérifie 1,2,3 et 4.
- un processus additif si  $(X_t)_{t \geq 0}$  vérifie 1,2,4 et 5.
- un processus additif en loi si  $(X_t)_{t \geq 0}$  vérifie 1,2 et 4.

Sachons d'abord que l'existence de ce processus, comme tout autre processus stochastique, repose sur le théorème de Kolmogorov. Aussi, observons que la famille des processus stochastiques « en loi » est vérifiée si le processus stochastique n'est pas càdlàg, abrégé « continue à droite et limite à gauche » ; en particulier, si la trajectoire du processus n'est pas dans l'espace de Skorokhod. De plus, la définition de ces processus ne demande pas que l'espace d'état  $T$  soit discret ou non. Ces processus sont imprévisibles : ils peuvent être soit discret ou soit continue. Pour cette raison, toutes leurs propriétés peuvent être étendues sur des processus qui sont discrets ou non ; permettant de les comprendre beaucoup mieux.

**Exemple 5.** Les processus de Lévy « classiques » sont les suivants :

- le processus de Poisson.
- le processus de Wiener, appelé le mouvement brownien.

## 4.2 Propriété spatiale et temporelle élémentaire

Pour commencer, étudions la propriété des processus de Lévy leur rendant invariant par changement d'échelle et de temps.

**Proposition 9.** Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy alors le processus stochastique  $(Y_t)_{t \in T}$  définie par

$$\forall t \in T, Y_t = X_{t+\tilde{t}} - X_{\tilde{t}}$$

avec  $\tilde{t} \in T$  un temps fixe, est un processus de Lévy vérifiant

- $X_t - X_0$  et  $Y_t - Y_0$  sont de même loi.
- $(Y_t)_{t \in T}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{\tilde{t}}$ .

Pour résumé, ce résultat signifie que tout processus de Lévy est invariant par changement de temps ; c'est-à-dire, nous pouvons revenir au temps  $t = 0$  même si nous sommes au temps  $t = 50$  en moyennant un changement d'indice.

*Démonstration.* Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy et posons  $Y_t = X_{t+\tilde{t}} - X_{\tilde{t}}$  pour tout  $t \in T$ . Un calcul direct de  $Y_0$  donne directement la condition  $Y_0 = 0$ . Nous montrons la stationnarité du processus. Nous écrivons

$$\forall t > s, Y_t - Y_s = X_{t+\tilde{t}} - X_{s+\tilde{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_{t-s} + X_0 = Y_{t-s}$$

Nous montrons la condition d'indépendance du processus, pour  $t_0 < t_1 < \dots < t_d < +\infty$  nous avons

$$\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}} = X_{t_k+\tilde{t}} - X_{t_{k-1}+\tilde{t}} = X_{t_k-t_{k-1}} + X_{t_{k-1}+\tilde{t}} - X_{t_{k-1}+\tilde{t}} = X_{t_k-t_{k-1}}$$

Or, pour des entiers  $k < K$ , les variables  $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$  et  $X_{t_K} - X_{t_{K-1}}$  sont indépendantes. D'où le résultat. Maintenant, la continuité est triviale puisque la trajectoire de  $(X_t)_{t \geq 0}$  est càdlàg et la continuité d'une fonction ne change pas par linéarité. Pour finir, nous démontrons l'indépendance avec la tribu  $\mathcal{F}_{\tilde{t}}$ . Il suffit de remarquer l'égalité suivante

$$\mathbb{E} \left[ Z g(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}) \right] = \mathbb{E} \left[ Z g(X_{t_1+\tilde{t}} - X_{\tilde{t}}, \dots, X_{t_k+\tilde{t}} - X_{\tilde{t}}) \right] = \mathbb{E}[Z] \mathbb{E} \left[ g(X_{t_1+\tilde{t}} - X_{\tilde{t}}, \dots, X_{t_k+\tilde{t}} - X_{\tilde{t}}) \right]$$

avec  $g$  une fonction mesurable strictement positive et  $Z$  une variable aléatoire strictement positive. D'où le résultat.  $\square$

### 4.3 Propriété de Markov des processus de Lévy

Nous disons que tout processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  vérifie la propriété de Markov si, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tous nombres  $x_1, \dots, x_n, x, y$  dans  $E$  l'univers images du processus, pour tous les indices  $0 \leq t_1 < \dots < t_n < s < t$  nous obtenons « informellement »

$$\mathbb{P}(X_t \in dy \mid X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n, X_s \in dx) = \mathbb{P}(X_t \in dy \mid X_s \in dx)$$

**Proposition 10.** *Tout processus de Lévy vérifie la propriété de Markov.*

*Démonstration.* Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier,  $x_1, \dots, x_n, x, y \in E$  une suite de nombre réel,  $0 \leq t_1 < \dots < t_n < s < t$  une suite d'indice réel. Nous calculons

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_t \in dy \mid X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n, X_s \in dx) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n, X_s \in dx, X_t \in dy)}{\mathbb{P}(X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n, X_s \in dx)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{t_1} \in dx_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in d(x_2 - x_1), \dots, X_s - X_{t_n} \in d(x - x_n), X_t - X_s \in d(y - x))}{\mathbb{P}(X_{t_1} \in dx_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in d(x_2 - x_1), \dots, X_s - X_{t_n} \in d(x - x_n))} \end{aligned}$$

Ensuite, nous appliquons l'indépendance des accroissements du processus qui donne un produit de probabilité qui se simplifie avec le dénominateur. Après cette simplification, nous observons que nous avons établie l'égalité suivante

$$\mathbb{P}(X_t \in dy \mid X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n, X_s \in dx) = \mathbb{P}(X_t - X_s \in d(y - x))$$

En appliquant la stationnarité des accroissements du processus, alors nous pouvons écrire la quantité  $\mathbb{P}(X_{t-s} \in d(y - x))$  au membre de droite de l'égalité. Ce qui termine la preuve.  $\square$

### 4.4 Martingalité des processus de Lévy

Une propriété importante pour les processus de Lévy est celle qui fait d'eux une martingale. Puisque les processus de Lévy peuvent être discret ou continue alors nous verrons qu'ils peuvent être des martingales à temps discret ou continue.

**Proposition 11.** *Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus à accroissements indépendants et intégrable dans  $L^1$  alors la famille  $(X_t - \mathbb{E}[X_t])_{t \geq 0}$  est une martingale.*

Pour résumé, ce résultat signifie que tout processus de Lévy est une martingale.

*Démonstration.* Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy que nous supposons intégrable. Nous écrivons

$$\forall t < s, \mathbb{E}[X_t - \mathbb{E}[X_t] | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t - X_s + X_s - \mathbb{E}[X_t] | \mathcal{F}_s]$$

La linéarité de l'espérance conditionnelle permet de séparer cette quantité en trois termes comme suit pour tout  $t < s$

$$\mathbb{E}[X_t - X_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X_s | \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t] | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t - X_s] + X_s - \mathbb{E}[X_t] = X_s - \mathbb{E}[X_s]$$

D'où le résultat.  $\square$

Ainsi, toutes les propriétés relatives aux martingales s'appliquent naturellement aux processus de Lévy. La généralisation de la proposition précédente affirme que la famille  $(X_t^p - \mathbb{E}[X_t^p])_{t \geq 0}$  est une martingale pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus à accroissements indépendants et intégrable dans  $L^p$ .

## 4.5 Divisibilité des processus de Lévy

Dans cette dernière section, nous nous intéresserons à la propriété qui fait l'objet de cette partie : la divisibilité des processus de Lévy.

**Proposition 12.** Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy en loi sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  alors

- la loi  $\mathbb{P}$  du processus est infiniment divisible.
- $\forall t \geq 0$ , la loi de la variable  $X_t$  est donnée par  $P_{X_t} = \mathbb{P}^{*t}$ .

Pour résumé, ce résultat signifie que la loi de tout processus de Lévy est infiniment divisible.

*Démonstration.* Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy en loi sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Nous écrivons

$$\forall t \geq 0, X_t = X_{\frac{t}{n}} - X_0 + \dots + X_t - X_{\frac{t(n-1)}{n}} = \sum_{k=1}^n (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})$$

avec  $t_k = \frac{kt}{n}$ . Posons  $\mu_n = \mathbb{P}_{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , désignant la loi de la variable  $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ . Par l'écriture précédente, la loi de  $X_t$  s'écrit

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_{X_{t_1} - X_{t_0}} * \dots * \mathbb{P}_{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}} = \mu_n * \dots * \mu_n = \mu_n^{*n}$$

Cela prouve l'infinie divisibilité de la loi du processus.  $\square$

La proposition précédente possède une réciproque qui est donnée par le résultat suivant.

**Proposition 13.** Si  $\mathbb{P}$  est une loi infiniment divisible alors il existe un processus de Lévy en loi  $(X_t)_{t \geq 0}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  tel que

$$P_{X_1} = \mathbb{P}$$

La preuve de ce résultat étant longue, nous n'allons pas la rédiger ici. Pour citer les étapes, l'existence du processus nécessite l'application du théorème de Kolmogorov. Ce théorème construit un processus dont nous pouvons aisément vérifier les axiomes d'un processus de Lévy en loi.

Ce résultat est d'une importance cruciale car il représente un lien avec les lois infiniment divisibles. Ces lois ayant été examinées dans la précédente partie, nous pouvons étudier les lois de processus de Lévy.

## Chapitre 5

# Représentation des processus de Lévy

Nous étudions la représentation des lois des processus de Lévy et les conséquences de cette représentation sur elles. Ce chapitre sera bref car la plupart des propriétés sont relatives aux lois infiniment divisibles que nous avons déjà étudiées dans la première partie de ce mémoire.

### 5.1 Formule de Lévy-Khintchine pour les processus de Lévy

Le lien entre les lois des processus de Lévy et les lois infiniment divisibles est donné par la proposition 12 et la proposition 13. Ce lien est bijectif et démontre que la représentation des lois des processus de Lévy est analogue à la représentation des lois infiniment divisibles. Précisément, nous pouvons prédire la représentation de la loi des processus de Lévy qui est, comme celle des lois infiniment divisibles, donnée par la formule de Lévy-Khintchine.

**Théorème 9** (Formule de Lévy-Khintchine (pour les processus de Lévy)). *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy alors il existe une unique*

- *matrice définie-positive  $A$ .*
- *mesure de Lévy  $\nu$ .*
- *vecteur  $\gamma$ .*

*vérifiant*

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \log \widehat{\mathbb{P}}(t) = -\frac{1}{2} \langle t, At \rangle + i \langle \gamma, t \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \left( e^{i \langle t, x \rangle} - 1 - i \langle t, x \rangle 1_S(x) \right) \nu(dx)$$

avec  $S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\}$ .

*Si tel est le cas, on dit que  $(X_t)_{t \geq 0}$  admet une représentation de Lévy-Khintchine et on appelle  $(A, \nu, \gamma)$  le triplet générateur du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ .*

La démonstration étant analogue à celle du théorème 2, nous ne répéterons pas cet exercice ici. Nous faisons quelques commentaires sur cette formule du point de vue des processus de Lévy. Pour une telle formule, les processus de Lévy sont associés à un triplet générateur  $(A, \nu, \gamma)$ . Aussi, comme les lois infiniment divisibles, la réciproque de ce résultat reste toujours vraie. Pour la terminologie concernant les objets du triplet générateur, à l'exception de la mesure  $\nu$ , la matrice  $A$  est appelée la *matrice Gaussienne de covariance* et le vecteur  $\gamma$  prend plusieurs terminologies que nous définissons ici.

**Définition 7.** *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy de triplet générateur  $(A, \nu, \gamma)$ . On dit que  $\gamma$  est*



- *un drift* si  $\int_{\{|x| \leq 1\}} |x| \nu(dx) < +\infty$ .
- *un centre* si  $\int_{\{|x| > 1\}} |x| \nu(dx) < +\infty$ .

De plus, cette formule permet de classer les processus de Lévy suivant la matrice  $A$  et  $\nu$ .

**Définition 8.** On dit qu'un processus de Lévy  $(X_t)_{t \geq 0}$  de triplet générateur  $(A, \nu, \gamma)$  est

- *purement non-Gaussien* si

$$A = 0_{M_n(\mathbb{R})}$$

- *de type A* si

$$A = 0_{M_n(\mathbb{R})} \text{ et } \nu(\mathbb{R}^d) < +\infty$$

- *de type B* si

$$A = 0_{M_n(\mathbb{R})}, \nu(\mathbb{R}^d) = +\infty \text{ et } \int_{\{|x| \leq 1\}} |x| \nu(dx) < +\infty$$

- *de type C* si

$$A \neq 0_{M_n(\mathbb{R})} \text{ ou } \int_{\{|x| \leq 1\}} |x| \nu(dx) = +\infty$$

## 5.2 Interprétation de la formule de Lévy-Khintchine pour les processus de Lévy et exemples particuliers

Directement, la formule permet de comprendre le comportement des processus de Lévy. Observons que la formule est composée de trois éléments : une matrice définie-positive  $A$ , un vecteur  $\gamma$  et une mesure de Lévy  $\nu$ . Chaque objet représente un comportement particulier du processus.

- le vecteur  $\gamma$  représente la partie linéaire du processus, il est appelé « terme de dérive ».
- la matrice  $A$  représente la composante brownienne du processus.
- la mesure  $\nu$  représente l'attitude du processus à sauter.

En ce qui concerne le saut du processus, on dit qu'il « ne saute pas vers le bas » si  $\nu(]-\infty, 0]) = 0$ , on dit qu'il « ne saute pas vers le haut » si  $\nu([0, +\infty[) = 0$ . Respectivement, le processus est dit « spectralement positif » et « spectralement négatif ». Tachons de comprendre cela avec des exemples de processus standard : le processus de Poisson et le mouvement brownien.

### 5.2.1 Cas du processus de Poisson

Disons que  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson de paramètre  $c > 0$ . La fonction caractéristique d'un tel processus est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \widehat{\mathbb{P}}(t) = \exp(c t (e^{iu} - 1))$$

Nous observons que le triplet générateur du processus de Poisson est  $(0, c \delta_1, 0)$  et nous pouvons comprendre que le processus de Poisson est sans composante brownienne, sans drift et avec saut de taille  $c$ .

Une construction standard d'un tel processus revient à considérer une suite de variable aléatoire  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$$

avec  $Y_1, \dots, Y_n$  des variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . La suite de variable aléatoire définie par

$$\forall t \geq 0, X_t = \sum_{n=1}^{+\infty} 1_{T_n \leq t}$$

définit un processus de Poisson en  $t \geq 0$  de paramètre  $\lambda > 0$ . La loi d'un tel processus est donnée par la relation suivante, voir [1, chap. 2, sec 2.1.2, prop 2.1.3] :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Ainsi, le calcul de la fonction caractéristique se déduit directement par définition.

### 5.2.2 Cas du mouvement brownien

Disons que  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Wiener, le mouvement brownien standard. La fonction caractéristique d'un tel processus est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \widehat{\mathbb{P}}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

Nous observons que le triplet générateur du mouvement brownien est  $(1, 0, 0)$  et nous pouvons comprendre que le mouvement brownien est de composante brownienne 1, sans drift et sans sauts.

Le mouvement brownien est un objet incontournable en probabilité. Naturellement, ce processus apparaît dans la notion de vecteur Gaussien ou bien de processus stochastique. Surtout, c'est un objet qui couvre de nombreux thèmes scientifiques, notamment

- en biologie, dans la modélisation des particules dans un fluide. (Brown, 1827)
- en finance, dans la modélisation des cours de la Bourse. (Bachelier, 1900)
- en physique, dans la modélisation du phénomène de diffusion. (Einstein, 1905)

## 5.3 Conséquences de la formule sur les processus de Lévy

Dans cette dernière section nous étudions les conséquences que la formule de Lévy-Khintchine provoque sur les processus de Lévy :

- la continuité absolue.
- la singularité.
- le support.

### 5.3.1 Continuité des processus de Lévy

**Théorème 10** (condition suffisante). *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy de triplet générateur  $(A, \nu, \gamma)$  avec  $\nu(\mathbb{R}^d) = +\infty$ . On pose*

$$\forall E \in \mathcal{F}, \tilde{\nu}(E) = \int_E \min(\|x\|^2, 1) \nu(dx)$$

*S'il existe un entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\tilde{\nu}^N \ll \lambda$  alors, pour tout  $t \geq 0$ ,  $P_{X_t}$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $c_n = \nu_n(\mathbb{R}^d)$  et notons  $(Y_n(t))_{t \geq 0}$  le processus de Poisson de mesure de Lévy  $\nu_n = \nu_{\{\|x\| > \frac{1}{n}\}}$ . Soit  $t > 0$  un réel, soit  $X(t)$  une variable aléatoire suivant la loi  $\mu$  et  $Y_n(t)$  suivant la loi  $\mu_n$ . Par la propriété des processus de Poisson, la loi  $\mu_n$  s'écrit

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-t c_n} \frac{t^k}{k!} \nu_n^k + \sum_{k=N}^{+\infty} e^{-t c_n} \frac{t^k}{k!} \nu_n^k$$

Comme  $\nu_n \ll \lambda$  alors  $\sum_{k=N}^{+\infty} e^{-t c_n} \frac{t^k}{k!} \nu_n^k \ll \lambda$  par la proposition 7. Nous appliquons la décomposition de Lebesgue sur  $\mu_n$  qui donne

$$\mu_{n,d}(\mathbb{R}^d) + \mu_{n,s}(\mathbb{R}^d) \leq \sum_{k=0}^{N-1} e^{-t c_n} \frac{t^k}{k!} \nu_n^k \longrightarrow 0$$

quand  $n \rightarrow +\infty$  avec  $\mu_{n,s}$  désignant la partie singulière continue et  $\mu_{n,d}$  désignant la partie discrète de la décomposition. Ainsi,

$$\mu_d(\mathbb{R}^d) + \mu_s(\mathbb{R}^d) \leq \mu_{n,d}(\mathbb{R}^d) + \mu_{n,s}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow 0$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ . Donc  $\mu_d(\mathbb{R}^d) + \mu_s(\mathbb{R}^d) = 0$  et par conséquent  $\mu \ll \lambda$ , en particulier,  $P_{X_t} \ll \lambda$ .  $\square$

L'étude de la continuité absolue et la singularité d'une loi infiniment divisible est étroitement liée à l'étude de la mesure de Lévy  $\nu$  situé sur son triplet générateur  $(A, \nu, \gamma)$ .

**Théorème 11** (de Hartman-Wintner). *Si  $\mu$  est infiniment divisible de triplet générateur  $(0_{M_n(\mathbb{R})}, \nu, \gamma)$  tel que  $\nu$  est une mesure de Lévy discrète vérifiant  $\nu(\mathbb{R}^d) = +\infty$  alors  $\mu$  est absolument continue ou singulière continue.*

*Démonstration.* Si  $\gamma = 0_{\mathbb{R}^d}$  alors, par infinie divisibilité de  $\mu$ , il existe une loi de probabilité  $\mu_n$  de triplet générateur  $(0_{M_n(\mathbb{R})}, \nu_n, 0_{\mathbb{R}^d})$ . Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy dont chaque variable suit la loi  $\mu_n = P_{X_n}$ . Puisque c'est un processus de Lévy alors  $\mu_n$  est discrète et  $X_1 + \dots + X_n$  converge en loi vers  $\mu$ . Comme la convergence en loi implique la convergence presque sûre, alors  $X_1 + \dots + X_n$  converge presque sûrement vers  $\mu$ . Comme  $\mu_n$  est discrète alors nous notons  $N$  l'ensemble désignant les valeurs possibles de la variable aléatoire  $X_n$ . Nous utilisons la continuité en probabilité du processus, supposons qu'il existe  $\Omega_0$  avec  $P(\Omega_0) = 1$  tel que  $X_n(\omega) \in N$  et  $\sum_{k=1}^n X_k(\omega) = X(\omega)$  sur  $\Omega_0$ . Posons

$$M = \left\{ x = \sum_{j=1}^n m_j x_j \mid x_j \in N \text{ et } m_j \in \mathbb{Z} \right\}$$

L'ensemble  $M$  est clairement dénombrable. Deux cas se présentent.

cas 1 : Soit  $\mu$  n'est pas singulière alors  $\mu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda$ .

En effet, fixons un ensemble mesurable  $B$  et supposons que  $\lambda(B) = 0$  alors  $\lambda(B + M) = 0$ . Ainsi  $\mu(B + M) = P_X(B + M) < 1$ . Nous pouvons écrire

$$C := \{\omega \mid X(\omega) \in B + M\} = \left\{ \omega \mid \sum_{j=1}^{+\infty} X_j(\omega) \in B + M \right\}$$

Nous appliquons la loi du 0-1 de Kolmogorov qui assure que  $P(C) = 0$  ou  $1$ . Or  $P(C) = \mu(B + M)$  alors  $\mu(B + M) = 0$  ainsi  $\mu(B) = 0$ . Donc  $\mu$  est absolument continue par rapport à  $\lambda$ .

cas 2 : Soit  $\mu$  est singulière alors  $\mu$  est soit discrète, soit singulière continue.

En effet, le fait que  $\mu$  est discrète est évident nous démontrons que  $\mu$  est continue. Supposons que  $\mu = P_X$  n'est pas discrète alors, pour tout singleton  $B$ , l'ensemble  $B + M$  est dénombrable. Ainsi,  $\mu(B + M) < 1$  pour tout singleton  $B$ . En utilisant le loi du 0-1 de Kolmogorov nous obtenons  $\mu(B + M) = 0$  ou  $1$  pour tout singleton  $B$ . Par un raisonnement analogue au cas 1, nous déduisons que  $\mu(B) = 0$  et donc  $\mu$  est continue.

Maintenant, rappelons que  $\nu(\mathbb{R}^d) = +\infty$  alors  $\mu$  ne peut pas être discrète. Ainsi,  $\mu$  est soit absolument continue, soit singulière continue.  $\square$

**Théorème 12** (de Watanabe). Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy de triplet générateur  $(0_{M_n(\mathbb{R})}, \nu, \gamma)$  avec  $\nu(\mathbb{R}^d) = +\infty$ ,  $\int_{[-1,1]} |x| \nu(dx) < +\infty$  et

$$\forall E \in \mathcal{F}, \nu(E) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_{1,n} \delta_{b^n}(E) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_{2,n} \delta_{-b^n}(E)$$

avec  $b > 1$  un entier,  $k_{N,n} \geq 0$  et  $\sup_{N,n} k_{N,n} < +\infty$ , alors  $P_{X_t}$  est singulière continue.

*Démonstration.* En posant  $\mu = P_{X_1}$ , nous obtenons alors pour tout  $r > 0$

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \log |\hat{\mu}(t)^r| = r \sum_{N=1}^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\cos(b^n t) - 1) k_{N,n}$$

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ , nous avons  $b \geq 2$  et si nous posons  $t_m = 2\pi b^m$  alors

$$\log |\hat{\mu}(t_m)^r| = -r \sum_{N=1}^2 \sum_{n \leq -m-1} (1 - \cos(2\pi b^{m+n})) k_{N,n} \geq -\frac{2\pi^2 r}{b^2 - 1} \sup_{N,n} k_{N,n}$$

L'inégalité étant déduite à partir de celle-ci  $1 - \cos u \leq \frac{1}{2} u^2$  sur  $\mathbb{R}$ . Cette inégalité affirme que  $P_{X_t}$  n'est pas absolument continue. En effet, en raisonnant par l'absurde alors  $P_{X_t}$  est absolument continue à  $\lambda$ . Mais le théorème de Riemann-Lebesgue fera nécessairement tendre la quantité  $\log |\hat{\mu}(t_m)^r|$  vers 0. Ce qui contredit l'inégalité obtenue.

Par conséquent,  $P_{X_t}$  n'est pas absolument continue et le théorème de Hartman-Wintner affirme qu'elle est singulière continue.  $\square$

### 5.3.2 Support des lois infiniment divisibles

Rappelons que le support d'une loi de probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\mathbb{R}^d$  est un fermé définie par

$$S_{\mathbb{P}} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \text{pour tout ouvert } E \text{ contenant } x, \mathbb{P}(E) > 0\}$$

Nous mentionnons ici une conséquence importante que nous avons soulevé dans la première partie : les lois de support bornées ne sont pas infiniment divisibles.

**Théorème 13.** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy non trivial alors le support de ce processus n'est pas bornée.

*Démonstration.* Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy associé à son triplet générateur  $(A, \nu, \gamma)$ . Puisque le processus n'est pas trivial alors la loi du processus n'est pas une loi de Dirac. Ainsi, soit  $A$  n'est pas la matrice nulle, soit  $\nu$  n'est pas la mesure nulle. Nous raisonnons par disjonction de cas suivant que  $A$  ou  $\nu$  ne soit pas nul.

Supposons que  $A$  n'est pas la matrice nulle alors  $\text{rg}(A) \geq 1$ .

**Lemme 3.** Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendants alors  $S_{X+Y}$ , le support de  $X + Y$ , est la fermeture de  $\{x + y \mid (x, y) \in S_X \times S_Y\}$ .

$$S_{X+Y} = \overline{S_X + S_Y}$$

*Démonstration.* Nous raisonnons par double inclusion.

$\supset$  : soit  $x \in S_X$  et soit  $y \in S_Y$  alors  $x + y \in S_{X+Y}$ . Mais, pour tout  $\epsilon > 0$  nous écrivons

$$P(|X + Y - x - y| < \epsilon) \geq P\left(|X - x| < \frac{\epsilon}{2}\right) P\left(|Y - y| < \frac{\epsilon}{2}\right) > 0$$

Par conséquent,  $\overline{S_X + S_Y} \subset S_{X+Y}$ .

$\subset$  :  $S_X$  et  $S_Y$  sont compacts alors  $S_X + S_Y$  est un borélien par union dénombrable d'ensemble compact. Nous écrivons

$$P(X + Y \in S_X + S_Y) \geq P(X \in S_X) P(Y \in S_Y) = 1$$

Par conséquent  $\overline{S_X + S_Y}$  est un fermé de  $P_{X+Y}$ -mesure 1. Donc,  $S_{X+Y} \subset \overline{S_X + S_Y}$ .  $\square$

Citons une conséquence du lemme 3.

**Corollaire 3.** Si  $\mu = \mu_1 * \mu_2$  est une mesure finie avec  $\mu_1, \mu_2$  deux mesures finies et si le support de  $\mu_1$  n'est pas bornée alors le support de  $\mu$  n'est pas bornée.

Fixons  $t \geq 0$  un réel et notons  $\rho_t$  la loi normale sur  $\mathbb{R}^d$  de matrice de covariance  $tA$  et de moyenne 0. Le support de la loi  $\rho_t$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $\text{rg}(A)$  qui n'est pas bornée. Comme la loi d'un processus de Lévy est infiniment divisibles et puisque ces lois sont construites avec la loi normale alors la loi d'un processus de Lévy est aussi construite avec la loi normale. De ce fait et comme le support de la loi normale n'est pas bornée, nous déduisons que le support de la loi du processus n'est pas bornée par le lemme 3 et le corollaire 3.

Supposons que  $\nu$  n'est pas nulle alors, en fixant  $\epsilon > 0$  tel que

$$\int_{\{|x| > \epsilon\}} \nu(dx) = c > 0$$

Soit  $(Y_t)_t$  un processus de Poisson composé de mesure de Lévy  $\nu_1 = [\nu]_{\{|x| > \epsilon\}}$  alors la loi du processus  $P_{Y_t}$  est un facteur de convolution de la loi  $P_{X_t}$  du processus  $(X_t)_t$ . Comme

$$P_{Y_t} = \frac{1}{e^{ct}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\nu_1)^n}{n!}$$

alors le support de  $Y_t$  vérifie  $S_{Y_t} \subset S_{Y_t}$ . Or,  $nx \in S_{Y_t}$  pour tout  $x \in S_{\nu_1}$ . Ainsi,  $S_{Y_t}$  n'est pas bornée par le lemme 3. Donc,  $S_{X_t}$  n'est pas bornée par le corollaire 3.  $\square$

# Bibliographie

- [1] Loic Chaumont. *Modélisation stochastique 2*. Université d'Angers, 2021.
- [2] Ervin Feldheim. *Etude de la stabilité des lois de probabilité*. PhD thesis, Imprimerie et librairie de la ville, 1937.
- [3] William Feller. An introduction to probability theory and its applications. 1957.
- [4] Sato Ken-Iti. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge university press, 1999.
- [5] Paul Lévy. Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 3(3-4) :337–366, 1934.
- [6] Georges Matheron. *Cours de processus stochastiques*. Ecole national supérieure des mines de Paris, 1969.
- [7] Gennady Samorodnitsky, Murad S Taqqu, and RW Linde. Stable non-gaussian random processes : stochastic models with infinite variance. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 28(134) :554–555, 1996.
- [8] Vladimir M Zolotarev. *One-dimensional stable distributions*, volume 65. American Mathematical Soc., 1986.