

# Estimativa do tempo de perda de 99% da atmosfera terrestre e lunar via modelo exponencial Evaporação atmosférica: uma abordagem ingênua (Resposta à Questão 10 da Lista 4)

Henrique Felix de Souza Machado  
Nº USP: 11554214  
7 de junho de 2024

## RESUMO

## 1 Reconhecimento

## 2 Introdução

Tomarei como base uma série de resultados obtidos nas notas de aula do professor, para os quais não fornecerei demonstração. Tentarei demonstrar todos os demais resultados.

## 3 Enunciado da questão

*(Esta questão é um desafio. Caso a resolva, apresente uma solução em forma de um relatório de pesquisa e defenda sua solução em uma entrevista, você pode ganhar uma bonificação na nota da terceira prova.)*

*Um corpo celeste como um planeta ou um satélite natural que possua atmosfera perde constantemente moléculas dessa atmosfera para o espaço, simplesmente pelo fato de que em um gás sempre há moléculas com velocidades maiores do que a velocidade de escape do campo gravitacional do corpo.*

*(a) Com base nesse fato, estime o tempo necessário para que a Terra perca uma fração de 99% de sua atmosfera. (Não se preocupe em ser excessivamente preciso. Uma estimativa da ordem de grandeza desse tempo é suficiente. Você vai precisar pesquisar dados e fazer diversas hipóteses, que devem ser claramente explicitadas.)*

*(b) Uma das hipóteses mais aceitas para a formação da Lua é a de que ela se desprende da Terra primitiva como consequência da colisão de um outro corpo celeste de dimensões comparáveis às da Terra. Nesse caso, é razoável supor que a Lua primitiva também tivesse uma atmosfera. Adaptando o cálculo do item anterior, estime o tempo que foi necessário para que a Lua perdesse 99% de sua atmosfera original.*

## 4 Hipóteses e contornos gerais

### 4.1 O gás simulado: cinética e densidade

Na resposta aqui proposta, considero a atmosfera como um **gás ideal, diatômico, e não interagente**. **faz diferença ser diatômico??**

Escolho aqui trabalhar com o **limite clássico**, para o qual **DESCREVER n .i. 1E JUSTIFICAR**. Nesse limite, cada molécula tem ao todo **6 graus de liberdade**: 3 de posição  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$  e 3 de momento  $\vec{p}$ , aqui mais convenientemente descrito através da velocidade  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ .

Considero também que toda a atmosfera se encontra sob a atuação de um campo gravitacional aproximadamente constante  $g$ . Essa hipótese não é exatamente verdade para a faixa de atmosfera considerada, do nível do mar até 100km de altitude

As notas de aula trazem o cálculo da distribuição de probabilidades associadas aos graus de liberdade das moléculas de um gás nessas condições. Primeiramente, as notas permitem concluir que essa distribuição pode ser fatorada em dois componentes estatisticamente independentes: um para a distribuição das velocidades e outro para a distribuição das posições.

O componente relativo às velocidades, i.e., a **distribuição de Maxwell das velocidades moleculares**, tem a forma

$$f(\vec{v}) d^3\vec{v} = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} d^3\vec{v} \quad (1)$$

, onde  $m$  é a massa da molécula em questão,  $k_B$  é a constante de Boltzmann,  $T$  é a temperatura do gás,  $\vec{v}$  é a variável aleatória da velocidade (vetorial) da molécula, e  $v$  é o módulo deste vetor aleatório.

Conforme registrado nas notas de aula, a mesma distribuição pode ser usada para descrever gases com moléculas mais complexas que moléculas monoatômicas, desde que a velocidade considerada seja a do centro de massa. É o que faço aqui, pois considero **uma atmosfera composta inteiramente por nitrogênio molecular gasoso** ( $N_2$ ). Essa hipótese se baseia no fato de que **JUSTIFICAR: (1) pesquisar composição da atm; (2) mostrar que massa atômica e raio são parecidos - mesma ordem de grandeza**.

O outro componente da distribuição dos graus de liberdade das moléculas, relativo à posição, também foi desenvolvido nas notas de aula, e também traz algumas hipóteses fundamentais. Seja  $\beta = (k_B T)^{-1}$  e  $mgz$  o potencial gravitacional de uma partícula a uma altura  $z$  do solo, então a distribuição de probabilidades da posição das moléculas na atmosfera é dada por

$$f_r(\vec{r}) = \frac{e^{-\beta mgz}}{\int e^{-\beta mgz} d^3\vec{r}}$$

**PQ AQUI NÃO TEM A DIFERENCIAL EM AMBOS OS LADOS??**

(Ao longo dessas notas, uso  $\int$  como sinônimo da integral definida nos limites de integração de todo o domínio do integrando, que ficam implícitos.)

De início, vale notar que essa distribuição, quando ponderada pelo número total  $N$  de moléculas no gás, é igual à densidade numérica de moléculas  $n(\vec{r})$ . As notas

de aula trabalham esse ponto até chegar à seguinte relação:

$$n(\vec{r}) = n_0 e^{-\frac{mg}{k_B T} z} \quad (2)$$

, em que  $n_0$  é a densidade numérica de moléculas na superfície.

## 4.2 Hipóteses adicionais 1: temperatura e fluxos de energia

É de se notar que todas essas relações dependem de haver uma temperatura bem definida para o gás, o que implica que **a temperatura deve ser aproximadamente constante em todos os pontos**. Isso não é condizente com a atmosfera da Terra, pois existem (i) mudanças na temperatura média da atmosfera ao longo do tempo e, dado qualquer momento de tempo, (ii) gradientes horizontais de temperatura (ex.: mais quente nos trópicos e mais frio nos pólos) e (iii) um gradiente vertical bem conhecido pelo qual a temperatura sobe em camadas de maior absorção de radiação solar (superfície, camada de ozônio e ionosfera) e desce nas camadas intermediárias **REFERENCIAS PARA 1, 2 E 3**. Quanto aos dois últimos, nota-se que o gradiente de temperatura está dentro da mesma ordem de magnitude (entre  $2 \text{ e } 4 \times 10^2 \text{ K}$ ), de modo que não espero que essa hipótese influencie substancialmente o resultado, e tomo a média ponderada da temperatura da atmosfera como base.

Justifico a temperatura constante por uma hipótese de **influxo médio de energia solar aproximadamente neutro** ao longo dos anos (**REF DIZENDO QUE A MAIOR PARTE DA ENERGIA INCOMING VEM DO SOL?**). Assim, mesmo que a perda de atmosfera e a radiação de corpo negro impliquem perda de energia, o sistema sempre está em média com um balanço neutro de energia térmica, constantemente repostado pelo Sol e redistribuído em tempo de equilíbrio hábil. À exceção desse influxo, considero a Terra um **sistema isolado a fluxos de fora para dentro**, significando que não há recepção de matéria do exterior (p.ex., asteróides não caem na atmosfera).

Acompanhados da hipótese de temperatura igualmente distribuída vêm, ainda, uma série de **pressupostos sobre o comportamento da atmosfera**. Nesse sentido, desprezo aqui toda e qualquer dinâmica interna adicional, tais como correntes de convecção, gradientes não-verticais de pressão, e outros fenômenos de mecânica de fluidos e do clima da Terra.

Também tomo como pressuposto que a Terra é **geológica e biologicamente inerte** durante o período estudado, implicando que estão ausentes quaisquer efeitos de recomposição da atmosfera por atividade vulcânica, doação de energia geotérmica, forças de maré, mudança de composição da atmosfera ou mudanças climáticas (incluindo aquecimento global antropogênico), etc.

**estudar um pouco essas últimas hipóteses e pensar em ordem de magnitude, justificar**

## 4.3 Hipóteses adicionais 2: configuração espacial

Por fim, adoto uma **configuração espacial** tal que: (i) a Terra é considerada uma esfera, (ii) a casca esférica representada pela atmosfera é esticada em um paralelepípedo de área inferior  $A$  igual à área da superfície esférica mais interior dessa

casca, e (iii) a atmosfera sobe até 100 km de altitude. Quanto a (i), uso o raio médio da Terra para mitigar os efeitos dessa aproximação - de todo modo, como o raio máximo (no equador) é cerca de 0,34% maior que o raio mínimo (polar) **REF**, considero uma aproximação desprezível. Por sua vez, (ii) permite que a distância radial seja convertida em uma coordenada  $z$  de altura e posso definir coordenadas  $x$  e  $y$  que se movem tangencialmente à superfície da esfera. Para fins práticos, a casca esférica da atmosfera é convertida em uma caixa de bordas retas e perpendiculares entre si. Como se sabe do jacobiano de uma transformação como essa, existe uma distorção na área  $A$  conforme a altura radial muda, mas no trecho de 100 km essa mudança é de apenas 1,57%, o que considero uma boa aproximação (**REF raios e abrir contas em algum lugar, se pá remeter à seção de resultados numéricos**). Isso evita o recálculo da nova área de casca esférica a cada passo da simulação. (Adoto a convenção de que  $z = 0$  na superfície da Terra e sobe nos valores positivos conforme nos afastamos radialmente do centro da Terra (alturas maiores).) Já quanto a (iii), a densidade numérica dada pela **Equação (2)** mostra que, em uma camada qualquer da atmosfera entre  $z = a$  e  $z = b$ , há um número  $N$  de partículas tal que

$$\begin{aligned} N &= \iiint_a^b n(\vec{r}) d^3\vec{r} \\ &= n_0 \int dx \int dy \int_a^b e^{-\frac{mg}{k_B T} z} dz \\ &= n_0 A \frac{k_B T}{mg} \left( e^{-\frac{mg}{k_B T} a} - e^{-\frac{mg}{k_B T} b} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Assim, na camada inferior aqui considerada (entre 0 e 100 km =  $10^5$  m), temos

$$N_1 = n_0 A \frac{k_B T}{mg} \left( 1 - e^{-\frac{mg}{k_B T} 10^5} \right) \quad (4)$$

moléculas, enquanto na camada exterior (de 100  $\rightarrow \infty$  km), temos

$$N_2 = n_0 A \frac{k_B T}{mg} \left( e^{-\frac{mg}{k_B T} 10^5} \right)$$

Comparando os dois números, e sabendo que  $\mathcal{O}(mg/k_B T) = 10^{-4}$  **REF OU REMETER A SEÇÃO**, vemos que a camada externa possui

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{e^{-\frac{mg}{k_B T} 10^5}}{1 - e^{-\frac{mg}{k_B T} 10^5}} = \frac{1}{e^{\frac{mg}{k_B T} 10^5} - 1} \approx \frac{1}{e^{10^{-4} \cdot 10^5} - 1} \approx \frac{1}{e^{10} - 1} \approx 0,005\%$$

do número de partículas da camada inferior, o que nos indica que a faixa dos primeiros 100 km de atmosfera dá conta de quase toda a sua massa e fornece uma boa aproximação.

## 4.4 Abordagem computacional

A estratégia para atacar o problema foi baseada na percepção de que seria possível realizar uma simulação retirando moléculas da camada exterior da atmosfera sucessivamente, em vários pequenos passos, e registrar o número de passos decorridos

até restar 1% de atmosfera. Bastaria, então conhecer o tempo de duração de cada passo.

Nosso critério principal foi a capacidade de um computador pessoal digerir a complexidade computacional do modelo. Após testarmos algumas abordagens de resolução por sua complexidade computacional e analítica, decidimos considerar uma camada exterior muito simples, cuja altura radial  $dz$  seja tal que, em média, as moléculas com velocidade maior que a de escape poderiam escapar livremente, sem encontrar outras moléculas em seu caminho. Conhecendo essa distância e usando a velocidade média de escape, podemos encontrar o tempo médio de escape. Dessa forma, não precisamos simular todas as moléculas da camada externa a cada passo, mas apenas retirar, desta camada, o percentual esperado de suas moléculas que satisfazem a condição de escape (velocidade suficiente), dado pela distribuição de Maxwell.

Antes de especificar essa abordagem em mais detalhes, obtenho abaixo alguns resultados que serão necessários.

## 5 Obtenção de resultados necessários

### 5.1 Altura total em função do número de moléculas

Uma hipótese adicional importante para o presente exercício é a de que a densidade numérica de moléculas na atmosfera não varia com o número total de moléculas. Em outras palavras, a densidade superficial  $n_0$  se mantém constante mesmo perante a perda de moléculas na atmosfera com o tempo. Essa hipótese pode não ser inteiramente realista porque a coluna de ar acima da superfície exerce pressão sobre o ar abaixo, o que implica que, à medida que moléculas são perdidas, a pressão no solo decaia e, constante  $T$ , o volume médio ocupado por uma única molécula aumente.

**pensar se é possível relaxar essa hipótese**

Porém, essa hipótese nos permite adaptar a **Equação (3)** para o caso em que  $a = 0$  e  $b = z$ , chegando a uma fórmula para o número de moléculas dada uma atmosfera com altura  $z$ :

$$N(z) = n_0 A \frac{k_B T}{mg} \left( 1 - e^{-\frac{mg}{k_B T} z} \right) \quad (5)$$

Isolando  $z$ , é possível obter uma fórmula para a altura de uma atmosfera com  $N$  moléculas:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{Nmg}{n_0 A k_B T} &= 1 - e^{-\frac{mg}{k_B T} z} \\ \Leftrightarrow e^{-\frac{mg}{k_B T} z} &= 1 - \frac{Nmg}{n_0 A k_B T} \\ \Leftrightarrow -\frac{mg}{k_B T} z &= \ln \left( 1 - \frac{Nmg}{n_0 A k_B T} \right) \\ \Leftrightarrow z &= -\frac{k_B T}{mg} \ln \left( 1 - \frac{Nmg}{n_0 A k_B T} \right) \end{aligned}$$

Como  $z$  é positivo, convém deixar essa relação no formato abaixo:

$$z(N) = \frac{k_B T}{mg} \ln \left( \frac{n_0 A k_B T}{n_0 A k_B T - N m g} \right) \quad (6)$$

me certificar de que eu posso tirar o  $\ln$ , se não tem numero negativo no argumento

## 5.2 Distribuição das componentes cartesianas das velocidades

A distribuição de Maxwell para velocidades moleculares (**Equação (1)**) tem a forma de um meio isotrópico onde não existe correlação entre direções, o que implica independência estatística mútua. Assim, é de se supor que a distribuição conjunta  $f(\vec{v}) d^3\vec{v} = f(v_x, v_y, v_z) dx dy dz$  seja fatorável em cada coordenada. Portanto, se denotarmos por  $i$  a coordenada de interesse e por  $j$  e  $k$  as demais coordenadas, é de se esperar que  $f(\vec{v}) d^3\vec{v} = [f_i(v_i) dv_i] [f_j(v_j) dv_j] [f_k(v_k) dv_k]$ . Neste tópico, comprovo esse resultado.

Por marginalização, temos que

$$\begin{aligned} f_i(v_i) dv_i &= \left( \iint f(\vec{v}) dv_j dv_k \right) dv_i \\ &= \left[ \iint \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2k_B T} (v_i^2 + v_j^2 + v_k^2)} dv_j dv_k \right] dv_i \\ &= \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \left( \int e^{-\frac{m}{2k_B T} v_j^2} dv_j \int e^{-\frac{m}{2k_B T} v_k^2} dv_k \right) e^{-\frac{m}{2k_B T} v_i^2} dv_i \right] \\ &= \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2\pi k_B T}{m} e^{-\frac{m}{2k_B T} v_i^2} dv_i \end{aligned} \quad (7)$$

, sendo que na última passagem faço uso do resultado conhecido e amplamente usado nas notas de aula da integral gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Vale notar que o uso dos limites de integração em  $\pm\infty$  é uma aproximação, pois fisicamente só faria sentido ter limites na velocidade da luz  $\pm c$ . Essa escolha foi feita por dois motivos: (i) a distribuição de Maxwell para as velocidades moleculares é normalizada para limites no infinito e (ii) a probabilidade de encontrar uma partícula com  $v_i \in (c, +\infty)$  é extremamente baixa, dada por

**CALCULAR**

Simplificando o resultado obtido em (7), chega-se a:

$$f_i(v_i) dv_i = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{m}{2k_B T} v_i^2} dv_i \quad (8)$$

Com isso, verifica-se que  $f(\vec{v}) d^3\vec{v} = [f_i(v_i) dv_i] [f_j(v_j) dv_j] [f_k(v_k) dv_k]$  e as direções são independentes, conforme cogitado inicialmente.

### 5.3 Percentual de partículas com velocidade suficiente para escape

Um conjunto de condições necessárias (mas não suficientes) para que uma molécula escape da atmosfera é que ela tenha (i) velocidade na direção  $z$ , (ii) sentido  $+z$ , e (iii) componente  $v_z > v_{\text{esc}}$ , sendo  $v_{\text{esc}}$  a velocidade de escape. À velocidade que satisfaz essas condições chamo de  $v_s \equiv$  **velocidade suficiente**. A probabilidade de uma molécula da atmosfera ter  $v_s$  é obtida da **Equação (8)** como:

$$P_s(v_{\text{esc}}) = \int_{v_{\text{esc}}}^{\infty} f_z(v_z) dv_z$$

No entanto, manipulando essa expressão, chega-se a uma integral não trivial:

$$\begin{aligned} P_s(v_{\text{esc}}) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{v_{\text{esc}}}^{\infty} e^{-\frac{m}{2k_B T} v_z^2} dv_z \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \int_{v_z=v_{\text{esc}}}^{\infty} e^{-u^2} du \quad , \text{ onde } u = \sqrt{\frac{m}{2k_B T}} v_z \\ &\quad \text{e } du = \sqrt{\frac{m}{2k_B T}} dv_z \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{v_z=v_{\text{esc}}}^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \int_{v_z=v_{\text{esc}}}^{\infty} \frac{2e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} du \end{aligned}$$

, pois a integral da direita é a função erro  $\text{erf}(u)$ , que pode não obstante ser calculada numericamente usando ferramentas computacionais. Tem-se então:

$$P_s(v_{\text{esc}}) = \frac{1}{2} \text{erf} \left( \sqrt{\frac{m}{2k_B T}} v_z \right) \Big|_{v_{\text{esc}}}^{\infty}$$

Usando a propriedade da função erro segundo a qual  $\text{erf}(\infty) = 1$  e incorporando a fórmula para  $v_{\text{esc}} = \sqrt{2gR}$  (**REF MOYÉS 1 P. 177**), chega-se a:

$$\boxed{P_s(v_{\text{esc}}) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \text{erf} \left( \sqrt{\frac{mgR}{k_B T}} \right) \right]} \quad (9)$$

Ressalta-se que, como a distribuição de posições é independente da distribuição de velocidades, a relação acima vale para qualquer altura da atmosfera. Vale lembrar que suponto a aceleração da gravidade  $g$  constante ao longo da atmosfera e tomo seu valor à distância do raio médio  $R$  da Terra.

### 5.4 Espessura da camada externa

Nosso interesse reside apenas na camada exterior da atmosfera, definida aqui como a camada em que, em média, não há nenhuma outra molécula acima. É preciso

definir um parâmetro de distância que as moléculas com velocidade suficiente vão percorrer nessa camada para saírem da atmosfera.

Uma aproximação seria identificar esta distância como simplesmente a raiz cúbica do recíproco da densidade numérica local, pois um cubo de volume  $dV$  e arestas de comprimento infinitesimal  $dl$  teria em tese um número de moléculas

$$N = n dV = n dl^3 \Leftrightarrow dl = \left( \frac{N}{n} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Se o cubo só possui uma molécula ( $N=1$ ), então isso se reduz a:

$$dl = n^{-\frac{1}{3}}$$

Nas notas de aula é demonstrado que a altura característica de uma atmosfera semelhante à estudada aqui é de  $\sim 9$  km, muitas ordens de magnitude maior que  $dl$  (**comprovar**). Portanto, considero que um volume elementar com uma única molécula tem densidade numérica  $n$  aproximadamente constante, ou seja, a distribuição de posições dentro desse volume é aproximadamente uniforme. Se for feita uma partição da atmosfera em cubículos de volumes elementares, é razoável supor que a posição média de uma molécula seria seu centro – portanto, a meia distância de qualquer dos lados. Na camada externa da atmosfera, as moléculas estão em média à meia distância  $dz = dl/2$ , no sentido  $+z$ , de saírem da atmosfera, ou seja:

$$dz = \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{3}} \quad (10)$$

Vale lembrar que  $n$  é uma função de  $z$ , e posso explicitá-la retomando e integrando a **Equação (2)** em  $dxdy$ :

$$n(z) = \iint n(\vec{r}) dxdy = A n_0 e^{-\frac{mg}{k_B T} z} \quad (11)$$

Nesta relação, como  $x$  e  $y$  são limitados,  $A$  é a área da superfície da Terra, segundo as hipóteses e aproximações do modelo discutidas anteriormente. Substituindo (11) em (10):

$$dz = \frac{1}{2} \left( A n_0 e^{-\frac{mg}{k_B T} z} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

Levando em conta que  $A = 4\pi(R+z)^2$  com  $R \equiv$  raio médio da Terra,

$$\boxed{dz = \frac{1}{2} (A n_0)^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{mg}{3k_B T} z}} \quad (12)$$

Essa forma parece fazer sentido porque, sendo uma exponencial, quando  $z \rightarrow \infty$ ,  $dz \rightarrow \infty$ , que é o que espero do recíproco de uma densidade com rarefação exponencial.



## 5.5 Número de moléculas na camada externa

Sendo a camada externa uma partição de meios-cubos da casca esférica na fronteira da atmosfera, o centro de cada cubo (posição esperada de uma molécula) é um ponto pertencente à face mais interna do meio-cubo externo. Pressuponho que a contagem desses pontos é o número  $N_c$  de moléculas na camada externa, que pode ser aproximada como a densidade linear  $n(z)$  vezes o comprimento radial da camada externa:

$$\begin{aligned} N_c &= n(z) dz \\ &= n(z) \frac{1}{2} n(z)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2} n(z)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{2} (An_0)^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{2mg}{3k_B T} z} \end{aligned}$$

, onde no último passo faço uso das **Equações (11) e (12)**. Para facilitar cálculos computacionais, deixo esta expressão no seguinte formato:

$$\boxed{N_c = \frac{1}{2} (An_0)^{\frac{2}{3}} \left( e^{\frac{mg}{3k_B T} z} \right)^{-2}} \quad (13)$$

## 5.6 Tempo do passo

A partir das fórmulas para  $v_{t\text{extesc}}$  e  $dz$ , pode-se definir o tempo  $dt$  necessário para que uma molécula com velocidade de escape na camada exterior efetivamente percorra a distância  $dz$ :

$$\boxed{dt(z) = \frac{dz}{v_{\text{esc}}}} \quad (14)$$

Aqui faço a hipótese adicional de que a mudança na velocidade causada pelo potencial gravitacional durante o percurso  $dz$  é desprezível e que, uma vez percorrida essa distância, a partícula está livre e não mais "pertence" à atmosfera.

Vale mencionar que ponderamos sobre qual velocidade seria mais apropriada no denominador da fração acima: a velocidade de escape ou uma velocidade suficiente média  $\langle v_s \rangle$ . É que as moléculas com velocidade suficiente  $v_s$  têm componente  $z$  da velocidade ainda aleatória, porém seguindo uma distribuição calculável a partir da renormalização do trecho  $(v_{\text{esc}}, \infty)$  da distribuição de Maxwell. O que nos pareceu mais adequado é usar  $v_{\text{esc}}$  para garantir que todas as moléculas de cada camada tenham tempo suficiente para escapar.

# 6 Especificação do modelo

## 6.1 Linhas gerais do algoritmo

Vou agora juntar os resultados obtidos acima e demonstrar como foi possível especificá-los em forma de simulação. Os passos da simulação são os seguintes:

1. A atmosfera começa em um instante  $t=0$  com altura  $z=10^5\text{m}$  e um número de moléculas  $N=N(z)$ , calculado de acordo com a **Equação (5)**;
2. Passado tempo  $dt(z)$ , incrementado a  $t$  e obtido das **Equações (12)** e **(14)**, a atmosfera perde  $N_c P_s$  moléculas, sendo  $N_c(z)$  calculada pela **Equação (13)** e  $P_s$  constante dado pela **Equação (9)**;
3. Com isso, a altura da atmosfera é reduzida a um novo  $z(N)$ , calculável pela **Equação (6)**;
4. Repetimos os passos com o novo valor das variáveis  $t$ ,  $z$  e  $N$ .

Como mantemos registro das variáveis  $t$  e  $N$  a cada passo, podemos fazer um loop que só para de executar quando  $N = 0.01 N(10^5\text{m})$  e saberemos o valor de  $t$  final.

## 6.2 Constantes e resultados numéricos

intro

- Massa da molécula de nitrogênio  $m =$
- $k_B =$  e  $T =$
- Aceleração da gravidade  $g = XXXXX$ , de acordo com...
- Raio médio da Terra  $R = XXXX$  .....
- Velocidade de escape  $v_s = \sqrt{2gR} =$
- Número inicial de moléculas da atmosfera  $N(10^5\text{m}) = XXXX$ , (validar)
- $mg/k_B T$  (vou precisar disso calculado em cada passo da simulação)
- Percentual de moléculas com velocidade suficiente  $P_s =$ , de acordo com a **Equação (9)** e usando as constantes  $m$ ,  $k_B$ ,  $T$  e  $v_{\text{esc}}$  definidas acima
- 

Quanto a  $P_s$ , este se mostrou muito pequeno para sistemas computacionais calcularem. Assim, recorri à aproximação

dada em (fonte), encontrando ..., e então multipliquei por  $N_c$

## 6.3 Coleta de dados e algumas otimizações

Para evitar