Mängdlära

Mängder, element, delmängder

intro

Denna föreläsning introducerar ett antal grundläggande begrepp inom mängdlära: den del av matematisk logik som studerar samlingar (mängder) av objekt.

Begreppen är allmänt användbara även inom filosofin för att tydliggöra göra påståenden om sakernas natur: exempelvis frågor om förhållandet mellan olika kategorier (intuitivt, *mängder*) av ting, och frågor om naturen hos relationer mellan ting.

Dessutom är begreppen avgörande för att förstå de idéer om uttrycks' extension (nästa föreläsning), samt meningsläran för det predikatlogiska språket (andra halvan av kursen).

mängder

En mängd är alltså en samling objekt. Dessa objekt kan vara av vilket slag som helst: *tal, människor, hundar, städer, påståenden, idéer, möjliga världar, andra mängder...*

Mängden av skandinaviska länder skrivs såhär:

$$\{\text{Sverige, Norge, Danmark}\}$$

Den kan även skrivas såhär (med *mängdbyggarnotation*):

$$\{x \mid x \text{ är ett skandinaviskt land}\}$$

Utläses: Mängden av alla x sådana att x är ett skandinaviskt land.

element

Objekten som ingår i en mängd kallas för mängdens element.

Elementen i mängden {Sverige, Norge, Danmark} är alltså Sverige, Norge och Danmark.

Detta kan vi också uttrycka såhär:

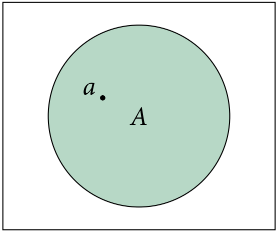
$$\text{Sverige} \in \{\text{Sverige, Norge, Danmark}\}$$

Utläses: Sverige ingår i mängden av skandinaviska länder.

Följande uttrycker att Finland *inte* ingår i mängden av skandinaviska länder:

$$\text{Finland} \notin \{\text{Sverige, Norge, Danmark}\}$$

element



$a \in A$

element

Ordningen som elementen räknas upp i spelar ingen roll:

$$\{\text{Sverige, Norge, Danmark}\} = \{\text{Danmark, Norge, Sverige}\}$$

Antalet gånger ett element räknas upp i spelar heller ingen roll:

$$\{\text{Sverige, Norge, Danmark}\} = \{\text{Sverige, Norge, Danmark, Sverige}\}$$

Vi vet att alla dessa mängder är lika (relaterade med $=$) eftersom vi vet att exakt samma objekt ingår i dem: Sverige, Norge och Danmark.

extensionalitetsprincipen

Detta faktum följer från extensionalitetsprinicpen.

Extensionalitetsprinicpen. Om A och B är mängder, gäller att $A = B$ om och endast om A och B har exakt samma element.

Notera 1: Godtyckliga mängder betecknas ofta med $A, B, C\ldots$, och element med $a, b, c\ldots$ (oftast just x).

Notera 2: I definitioner används ofta *om och endast om* (förkortat *omm*) för att sammankoppla två påståenden. Det betyder att påståendena är sanna exakt samtidigt, och falska exakt samtidigt.

kardinalitet

Antalet element i en mängd kallas för mängdens kardinalitet.

Exempelvis har mängden $\{\text{Sverige, Norge, Danmark}\}$ kardinalitet 3.

Detta kan också uttryckas såhär:

$$|\{\text{Sverige, Norge, Danmark}\}| = 3$$

Fråga: *Vad är kardinaliteten hos mängden* $\{\textit{Sverige, Norge, Danmark, Sverige}\}$*?*

kardinalitet

Antalet element i en mängd kallas för mängdens kardinalitet.

Exempelvis har mängden {Sverige, Norge, Danmark} kardinalitet 3.

Detta kan också uttryckas såhär:

$$|\{\text{Sverige, Norge, Danmark}\}| = 3$$

Fråga: *Vad är kardinaliteten hos mängden {Sverige, Norge, Danmark, Sverige}?*

Svar: 3.

den tomma mängden

En mängd kan också ha kardinalitet 0.

Precis som att det bara finns, exempelvis, en mängd innehållande endast Sverige (nämligen {Sverige}), så finns det bara en mängd innehållande ingenting.

Den kallas för den tomma mängden (eng. *the empty set*), och betecknas med $\{\}$ eller med $\emptyset$.

fler exempel på mängder

{Platon, 2, Filosofiska institutionens kaffemaskin}

{{Sverige, Norge}, Danmark}

{{{{Guldbron vid Slussen}}}}

$\{x \mid x$ är Sverige eller x är Norge $\}$

$\{x \mid x$ är en fyrkantig triangel $\}$

Fråga: *Vilka är elementen i dessa mängder?*

fler exempel på mängder

{Platon, 2, Filosofiska institutionens kaffemaskin}

element: Platon, 2, Filosofiska institutionens kaffemaskin.

{{Sverige, Norge}, Danmark}

{{{{Guldbron vid Slussen}}}}

$\{x \mid x$ är Sverige eller x är Norge $\}$

$\{x \mid x$ är en fyrkantig triangel $\}$

Fråga: *Vilka är elementen i dessa mängder?*

fler exempel på mängder

{Platon, 2, Filosofiska institutionens kaffemaskin}
element: Platon, 2, Filosofiska institutionens kaffemaskin.

{{Sverige, Norge}, Danmark}
element: {Sverige, Norge}, Danmark.

{{{{Guldbron vid Slussen}}}}

$\{x \mid x$ är Sverige eller x är Norge $\}$

$\{x \mid x$ är en fyrkantig triangel $\}$

Fråga: *Vilka är elementen i dessa mängder?*

fler exempel på mängder

{Platon, 2, Filosofiska institutionens kaffemaskin}
element: Platon, 2, Filosofiska institutionens kaffemaskin.

{{Sverige, Norge}, Danmark}
element: {Sverige, Norge}, Danmark.

{{{{Guldbron vid Slussen}}}}
element: {{{Guldbron vid Slussen}}}.

$\{x \mid x$ är Sverige eller x är Norge $\}$

$\{x \mid x$ är en fyrkantig triangel $\}$

Fråga: *Vilka är elementen i dessa mängder?*

fler exempel på mängder

{Platon, 2, Filosofiska institutionens kaffemaskin}
element: Platon, 2, Filosofiska institutionens kaffemaskin.

{{Sverige, Norge}, Danmark}
element: {Sverige, Norge}, Danmark.

{{{{Guldbron vid Slussen}}}}
element: {{{Guldbron vid Slussen}}}.

$\{x \mid x$ är Sverige eller x är Norge $\}$
element: Sverige, Norge.

$\{x \mid x$ är en fyrkantig triangel $\}$

Fråga: *Vilka är elementen i dessa mängder?*

fler exempel på mängder

{Platon, 2, Filosofiska institutionens kaffemaskin}
element: Platon, 2, Filosofiska institutionens kaffemaskin.

{{Sverige, Norge}, Danmark}
element: {Sverige, Norge}, Danmark.

{{{{Guldbron vid Slussen}}}}
element: {{{Guldbron vid Slussen}}}.

$\{x \mid x \text{ är Sverige eller } x \text{ är Norge}\}$
element: Sverige, Norge.

$\{x \mid x \text{ är en fyrkantig triangel}\}$
element: inga! Detta är $\emptyset$, eftersom det inte finns några fyrkantiga trianglar.

Fråga: *Vilka är elementen i dessa mängder?*

delmängder

Vissa mängder är relaterade på så vis att allt som ingår i den ena, också ingår i den andra.

Till exempel gäller att allt som är ett element i mängden

$$\{1, 2\}$$

även är ett element i mängden

$$\{1, 2, 3\}.$$

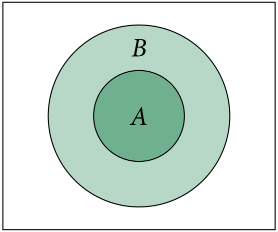
Vi säger då att mängden $\{1, 2\}$ är en delmängd av $\{1, 2, 3\}$:

$$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$$

Följande uttrycker att $\{4, 5\}$ *inte* är en delmängd av $\{1, 2, 3\}$:

$$\{4, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$$

delmängder



$A \subseteq B$

Delmängd. Om A och B är mängder, så är A en *delmängd* av B, uttryckt $A \subseteq B$, om och endast om alla element i A också är element i B.

delmängder

Eftersom allt som är ett element i en godtycklig mängd A är ett element i just A, så är alla delmängder av sig själva.

$$A \subseteq A$$

Eftersom den tomma mängden $\emptyset$ inte innehåller några element, så är den en delmängd av alla mängder.

$$\emptyset \subseteq A$$

delmängder

För att detta ska gälla krävs ju att:

$$\text{Om } x \in \emptyset, \text{ så } x \in A.$$

Men nu ingår ju inga objekt i $\emptyset$, dvs. villkoret för att vi ska kräva att någonting även är ett element i A uppfylls aldrig.

Då är det standard (inom filosofi/logik/matematik) att läsa hela *om* ... *så*-påståendet som sant (mer specifikt: "tomt sant"/"vacuously true"). Vi kommer att prata mer om detta sätt att läsa *om* ... *så*-påståenden under andra halvan av kursen.

Fråga: *Gäller det också att* $\emptyset \in A$*?*

delmängder

För att detta ska gälla krävs ju att:

$$\text{Om } x \in \emptyset, \text{ så } x \in A.$$

Men nu ingår ju inga objekt i $\emptyset$, dvs. villkoret för att vi ska kräva att någonting även är ett element i A uppfylls aldrig.

Då är det standard (inom filosofi/logik/matematik) att läsa hela *om* ... *så*-påståendet som sant (mer specifikt: "tomt sant"/"vacuously true"). Vi kommer att prata mer om detta sätt att läsa *om* ... *så*-påståenden under andra halvan av kursen.

Fråga: *Gäller det också att* $\emptyset \in A$*?*

Svar: Nej, della gäller inte för alla mängder A. Till exempel: $\emptyset \notin \{1\}$, eftersom det enda elementet i $\{1\}$ är 1.

äkta delmängder

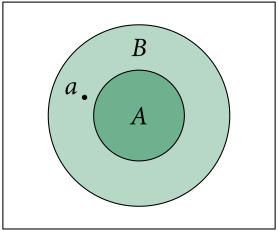
Mängden $\{1, 2\}$ är inte bara en delmängd av mängden $\{1, 2, 3\}$, utan en äkta delmängd.

Detta innebär att det finns något element i $\{1, 2, 3\}$ som inte finns i $\{1, 2\}$ (nämligen 3).

Vi uttrycker att A är en äkta delmängd av B såhär:

$$A \subset B$$

äkta delmängd



$A \subset B$

Äkta delmängd. Om A och B är mängder, så är A en *äkta delmängd* av B, betecknat $A \subset B$, om och endast om $A \subseteq B$, och något ingår i B som inte ingår i A.

summering

element

$x \in A$ betyder att x är ett element i (ingår i) mängden A.

$$\text{Paris} \in \{\text{Paris, Berlin}\}$$

likhet

$A = B$ betyder att A och B har exakt samma element.

$$\{\text{Paris, Berlin}\} = \{\text{Berlin, Paris}\}$$

delmängd

$A \subseteq B$ betyder att allt som ingår i A ingår i B.

$$\{\text{Paris, Berlin}\} \subseteq \{\text{Berlin, Paris}\}$$

äkta delmängd

$A \subset B$ betyder att $A \subseteq B$ och något ingår i B som inte ingår i A

$$\{\text{Paris}\} \subset \{\text{Berlin, Paris}\}$$

Mängdlära

Relationer

ordnade par

En ordnat par är en ordnad samling av två objekt. Exempelvis:

$$\langle \text{Paris, Berlin} \rangle$$

Till skillnad från i mängder, spelar ordningen på (förekomsterna av) objekten roll i ett ordnat par.

Paret ovan är därmed inte samma par som

$$\langle \text{Berlin, Paris} \rangle.$$

relationer

Mängder kan innehålla ordnade par. (Och omvänt — men detta intresserar oss inte här.)

$$\{\langle \text{Paris, Berlin} \rangle, \langle \text{Berlin, London} \rangle\}$$

Mängder som innehåller ordnade par kallas (binära) relationer.

relationer

Om ett par av två objekt a, b ingår i en relation R säger vi att R relaterar a till b, eller att a står i relation R till b.

Förkortat skrivs detta Rab (ibland även $R(ab)$ eller aRb).

Relationen

$$\{\langle \text{London, Paris} \rangle, \langle \text{Paris, Berlin} \rangle, \langle \text{London, Berlin} \rangle\}$$

relaterar alltså London till Paris, Paris till Berlin, och London till Berlin.

Den relaterar inte därmed (exempelvis) Paris till London, eftersom den inte innehåller paret $\langle \text{Paris, London} \rangle$.

relationer

Relationer i bemärkelsen “mängder av par” är abstrakta ting.

Men många sådana abstrakta relationer svarar på ett intuitivt vis mot de konkreta relationer som vi redan känner till: de vi talar om när vi talar om att någon *är syskon till* någon, någonting är *större än* någonting annat, någon *gillar* något, och så vidare.

Exempelvis svarar R mot relationen *är huvudstad i*:

$$R = \{\langle a, b\rangle \mid a \text{ är huvudstad i } b\}$$

R relaterar ju varje stad a till det land b som *a är huvudstad i*.

När vi nästa vecka studerar semantik så kommer vi att se hur abstrakta relationer kan användas för att modellera meningen hos relationsord och -uttryck i språk.

speciella egenskaper hos relationer

Tre egenskaper hos relationer är extra viktiga att känna till:

- **Reflexivitet**
- **Symmetri**
- **Transitivitet**

Relationer som har alla dessa tre egenskaper kallas ekvivalensrelationer.

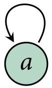
Ekvivalensrelationer är användbara för att uttrycka att några objekt är *lika* eller *utbytbara* med avseende på någon särskild egenskap, utan att för den skull säga att objekten är *identiska* (lika i alla egenskaper).

reflexivitet

En relation som består av par av objekt från en viss mängd A kallas för en relation på A.

En relation på en mängd A är reflexiv om den relaterar alla objekt i A till sig själva.

Reflexivitet. En relation R på en mängd A är *reflexiv* om och endast om: för varje $a \in A$, gäller att Raa.



reflexivitet

Relationen R (motsvarande "är lika lång som") på mängden M av alla människor är reflexiv: Alla människor är ju lika långa som sig själva.

$$R = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in M \text{ och } a \text{ är lika lång som } b\}$$

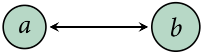
Relationen R' (motsvarande "tycker att ... är smart") på M är inte reflexiv: Vissa människor tycker inte att de själva är smarta.

$$R' = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in M \text{ och } a \text{ tycker att } b \text{ är smart}\}$$

symmetri

Vissa relationer kan inte relatera ett objekt a till ett objekt b utan att även relatera b till a. Sådana relationer kallas symmetriska.

Symmetri. En relation R är *symmetrisk* om och endast om, för alla objekt a, b: Om Rab så Rba.



symmetri

Relationen R (motsvarande "är kurskamrat till") är symmetrisk: om Ali är kurskamrat till Bea, så måste Bea också vara kurskamrat till Ali.

$$R = \{\langle a, b\rangle \mid a \text{ är kurskamrat till } b\}$$

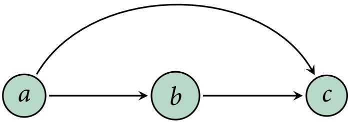
Relationen R' (motsvarande "ser") är inte symmetrisk: att Ali ser Bea medför inte att Bea ser Ali.

$$R' = \{\langle a, b\rangle \mid a \text{ ser } b\}$$

transitivitet

Vissa relationer kan inte relatera ett objekt a till ett objekt b, och b vidare till ett objekt c, utan att även relatera a till c. Sådana relationer kallas transitiva.

Transitivitet. En relation R är *transitiv* om och endast om, för alla objekt a, b, c: Om Rab och Rbc, så Rac.



transitivitet

Relationen R (motsvarande "är äldre än") är transitiv: om a är äldre än b, och b är äldre än c, så är ju a också äldre än c.

$$R = \{\langle a, b\rangle \mid a \text{ är äldre än } b\}$$

Relationen R' (motsvarande "läser samma kurs som") är inte transitiv, eftersom en person kan läsa mer än en kurs i taget.

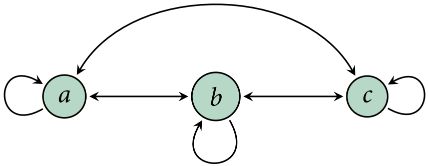
$$R' = \{\langle a, b\rangle \mid a \text{ läser samma kurs som } b\}$$

ekvivalensrelationer

En relation är en ekvivalensrelation på en mängd A om den är reflexiv, symmetrisk, och transitiv på A.

Ekvivalensrelationer. En relation R är en *ekvivalensrelation* på A om och endast om:

- för alla $a \in A$ gäller Raa,
- om Rab för $a, b \in A$, så Rba, och
- om Rab och Rbc för $a, b, c \in A$, så Rac.



summering

reflexivitet

Raa för alla *a* i en given mängd.

symmetri

Om *Rab* så *Rba*.

transitivitet

Om *Rab* och *Rbc* så *Rac*.

ekvivalensrelationer

Om reflexiv, symmetrisk, och transitiv.