

# A New Method for the Binocular Reconstruction of 3D Circle

Jianfei Mao, Xuhua Yang, Guijun Zhang

Information Engineering Institute, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032

(E-mail: zdmjf@yahoo.com.cn)

**Abstract**—Analyzing merits and demerits of the classic methods for the reconstruction of 3D circle and based the method for monocular reconstruction of 3D circle whose radius is known, we study the uniqueness proof and the matching principle for binocular reconstruction of 3D circle, further, present a new method for the binocular reconstruction of 3D circle whose radius is unknown. Our method is deduced fully based on the principle of imaging geometry and every step in the method is according to imaging geometry, thereby, it avoids the wrong solution which might happen in the Redundant Equation Error Method of the classic methods, and enhances the precision of the reconstruction. Experimental results indicate that the method can not bring any wrong solution which might happen in the classic methods, and is suitable for the reconstruction in the variable special instances and has high precision of the reconstruction.

**Keywords**—reconstruction of 3D circle, monocular reconstruction, binocular reconstruction, principle of imaging geometry

## 空间圆双目重建新方法

毛剑飞 杨旭华 张贵军

浙江工业大学信息学院 杭州 310032

**摘 要** 分析了经典的空间圆重建方法的优缺点, 基于已知半径圆的单目重建方法, 研究了双目重建空间圆的唯一性原则和匹配准则, 进而提出了未知半径圆的双目重建新方法。方法完全基于成像几何原理推导, 每一步都有成像几何学依据, 避免了经典方法中冗余方程误差法可能会有坏解问题, 并提高了重建精度。实验结果表明, 该方法不存在经典方法可能带来的坏解, 能适应各种特殊情形下的圆重建, 并具有较高的重建精度。

**关键词** 空间圆重建, 单目重建, 双目重建, 成像几何原理

### 1. 引言

圆是计算机视觉实时检测和控制系统中最为常用的标志, 获取空间圆的大小、位置及其所在平面的法向量信息具有重要意义<sup>[1,2]</sup>。如在机器人研究中, 空间圆重建后的信息可以用于圆形器件的定位和测量, 可以指导机器人手臂抓取圆形物品, 也可以用于移动机器人的视觉跟踪和导航, 具有重大的实用价值。

空间二次曲线在图像上的投影仍然是二次曲线, 基于

这个原理文献[3, 4]给出了一种基于二次曲线的立体视觉方法, 利用此方法可以实现空间圆的重建。这种方法不需要点与点之间的对应, 计算复杂度大大降低, 因此具有很快的计算速度。该方法需要求解三个一元二次方程, 存在多解。文中给出了唯一性分析, 通过冗余方程误差最小的方法得到唯一解。文献[5]对冗余方程做了改进, 并采用三眼视觉以满足唯一性判定。文献[3~5]是关于空间二次曲线立体重构的经典方法, 其中误差最小获取唯一解的方法, 都是基于数学原理而不是成像几何原理。由于在数字化过程中, 以及曲线的检测、拟合过程中误差难以避免<sup>[5]</sup>, 因此应用经典方法可能会使正确解反而误差比较大, 甚至导

---

本文得到国家自然科学基金项目(No. 60504027, No. 60405009)以及浙江省自然科学基金项目(No. Y105206)资助

致坏解。又由于在求解过程中需要曲线在 XY、YZ 或 ZX 平面上的投影，因此当曲线所在平面垂直于这些平面时会出现异常。

文献[6]通过对投影锥的讨论给出了已知半径圆的单目视觉重建方法。该方法利用成像几何原理，通过对椭圆方程矩阵的正交变换和摄像机的旋转，推导出两组解。其求取空间圆所在平面法向量和圆心在摄像机上的理想成像点时，可以不必知道空间圆的半径。据此，本文先用该方法得到圆所在平面在左右两个摄像机坐标系中的法向量  $\bar{n}_l$  和  $\bar{n}_r$  ( $i=1,2$ )，再利用本文中的匹配准则得到唯一对应的一组  $\bar{n}_l$  和  $\bar{n}_r$ ，以及圆心在左右图像中的坐标  $O_{ml}$  和  $O_{mr}$ ，然后对两个圆心三维重建得到空间圆圆心，最后用空间圆圆心坐标及平面法向量求取圆的半径，从而重建整个空间圆。

本文在 Forsyth 提出的已知半径圆的单目视觉恢复方法基础上<sup>[6]</sup>，研究了未知半径空间圆的双目视觉重建方法，包括唯一性分析，匹配准则，以及点的三维重建。最后给出了应用该方法得到的实验结果。实验表明该方法计算速度快，并具有较高的定位和测量精度。

## 2. 已知半径圆的单目重建

设  $P=[x \ y \ 1]^T$  为空间点  $P_w$  在图像中的投影点， $P$  既看成图像中的齐次坐标，也可看成空间同一点的非齐次坐标(因为  $f=1$ )<sup>[3]</sup>。

假设图像中平面二次曲线的投影为：

$$P^T Q P = 0 \quad (1)$$

$Q$  为对称矩阵且  $\det Q = -1$ ，存在正交矩阵  $U$ ，使得

$$U Q U = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (2)$$

且  $\lambda_3 < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ ， $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1$ ，则得到二次曲线：

$$x^2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} y^2 = -f \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \quad (3)$$

$$\text{令 } \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (\geq 1), \quad \lambda = -f \frac{\lambda_3}{\lambda_1} (> 0) \quad (4)$$

使二次曲线 (3) 围绕 X 轴旋转  $-\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ) 得到圆：

$$x^2 + (y+c)^2 = \rho^2, \quad c \geq 0, \rho > 0 \quad (5)$$

其中：

$$\rho = \sqrt{\alpha \lambda} \quad (6)$$

$$c = \sqrt{(\alpha-1)(\lambda+f^2)} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \sin \theta = \sqrt{(\alpha-1)/(\alpha+\lambda/f^2)} \\ \cos \theta = \sqrt{(1+\lambda/f^2)/(\alpha+\lambda/f^2)} \end{cases} \quad (8)$$

中心点 O (光学中心) 到圆所在平面的距离：

$$d = \frac{fr}{\rho} = \frac{fr}{\sqrt{\alpha \lambda}} \quad (9)$$

圆所在平面的法向量：

$$\bar{n} = \bar{u}_2 \sin \theta + \bar{u}_3 \cos \theta \quad (10)$$

$\bar{u}_2$  和  $\bar{u}_3$  分别对应矩阵  $Q$  特征值  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  的特征向量。由  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1$ ，将式(4)代入式(9)以及结合式(8)代入式(10)得：

$$\bar{n} = \sqrt{(\lambda_2 - \lambda_1)/(\lambda_2 - \lambda_3)} \bar{u}_2 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)/(\lambda_2 - \lambda_3)} \bar{u}_3 \quad (11)$$

$$d = \lambda_1^{3/2} r \quad (12)$$

( $\cdot, \cdot$ ) 表示两个向量的内积， $\bar{p} = [x \ y \ z]^T$  表示摄像机坐标系中的点，则摄像机坐标系中圆所在平面的方程为：

$$(\bar{n}, \bar{p}) = \pm d \quad (13)$$

且圆心满足：

$$\bar{m} = \pm t Q^{-1} \bar{n} \quad (14)$$

因为圆心在平面上，将  $\bar{m}$  代入式(13)可得到  $t$  ( $t$  为比例因子)。对应的图像坐标为：

$$O_m = [m(1)/m(3) \quad m(2)/m(3)] \quad (15)$$

从推导过程易知  $O_m$  和  $\bar{n}$  与圆的半径无关。

以上讨论了  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  的情况，当  $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$  时可得到另外一组解，并有如下判据：

1. 如果  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，存在两组相异解
2. 如果  $\lambda_1 = \lambda_2$ ，存在两组相同解

## 3. 未知半径圆的双目重建

对于已知半径的空间圆可以利用单目重建，但对于未知半径的空间圆单目重建，由于缺乏必要的约束条件，单目只能得到圆所在平面在摄像机坐标系中的法向量，则本文先用圆的单目重建方法分别得到圆所在平面在左右两个摄像机坐标系中的法向量  $\bar{n}_l$  和  $\bar{n}_r$  ( $i=1,2$ )，再利用文中的匹配准则得到唯一对应的一组  $\bar{n}_l$  和  $\bar{n}_r$ ，以及圆心在左右图像中的坐标  $O_{ml}$  和  $O_{mr}$ ，然后对两个圆心三维重建得到空间圆圆心，最后用空间圆圆心坐标及平面法向量求取圆的半径，从而重建整个空间圆。其各步骤如下所述。

### 3.1 唯一性分析

由空间圆在左右摄像机的成像可分别得到的两组解，但实际有且仅有一组对应解。

如图 1，Conic 是过中心 O 和成像椭圆的锥体。椭圆  $e$  绕长轴旋转  $\theta$  和  $-\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ) 分别得到圆  $c_1$  和  $c_2$ ， $O_1$  和  $O_2$  为  $c_1$  和  $c_2$  的圆心， $M$  为  $O_1 O_2$  的中点， $N$  为椭圆  $e$  长轴中点，则直线  $MN$  为椭圆锥 Conic 的中心线。由此可知，由空间圆在左右摄像机的成像可分别得到的两组解  $c_{li}$  和  $c_{ri}$  ( $i=1,2$ )，但实际上左右图像中的椭圆是同一个空间圆投影而

成, 所以必定仅存在一组圆对应, 为方便分析, 这里假设为  $c_{l1}$  和  $c_{r1}$  对应, 分析如下: 因为  $c_{l1}$  和  $c_{l2}$  有夹角,  $c_{r1}$  和  $c_{r2}$  有夹角 (这里只考虑  $\lambda_1 > \lambda_2$  时的情况), 所以  $c_{l1}$  与  $c_{r2}$ ,  $c_{l2}$  与  $c_{r1}$  必不对应; 又假若还存在  $c_{l2}$  与  $c_{r2}$  对应, 因为前提是  $c_{l1}$  和  $c_{r1}$  对应, 则左右摄像机坐标系中的椭圆锥的中心线重合, 这会使一个摄像机遮挡住另一个摄像机, 因此假设不成立, 则只存在一组  $c_{l1}$  和  $c_{r1}$  对应。

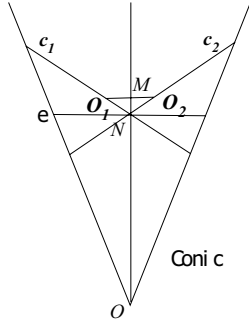


图1 椭圆锥图示

### 3.2 匹配准则

空间圆在左右摄像机坐标系中分别得到两组法向量  $\bar{n}_{li}$  和  $\bar{n}_{ri}$  ( $i=1,2$ )。平面法向量由摄像机坐标系到世界坐标系的变换为:

$$\bar{n}_\omega = R^T \bar{n} \quad (16)$$

$R$ : 摄像机的外部旋转矩阵

将  $\bar{n}_{li}$  和  $\bar{n}_{ri}$  ( $i=1,2$ ) 代入(16)得到  $\bar{n}_{l\omega i}$  和  $\bar{n}_{r\omega i}$ 。如果不考虑误差因素的影响, 则存在一组唯一的解  $\bar{n}_{l\omega p}$  和  $\bar{n}_{r\omega q}$ , 使得:

$$|(\bar{n}_{l\omega p}, \bar{n}_{r\omega q})| = 1 \quad (17)$$

实际应用时, 误差在所难免, 因此有如下匹配准则:

如果  $i=p, j=q$  时,  $|(\bar{n}_{l\omega i}, \bar{n}_{r\omega j})|$  取得最大值, 则  $\bar{n}_{l\omega p}$  和  $\bar{n}_{r\omega q}$  为所求对应解, 此时两个法向量的方向最接近。由此可以求出唯一的  $\bar{n}_l = \bar{n}_{lp}$ ,  $\bar{n}_r = \bar{n}_{lr}$ , 以及圆心在左右摄像机像平面中的投影坐标  $O_{ml}$  和  $O_{mr}$ 。对  $O_{ml}$  和  $O_{mr}$  进行点的三维重建可以得到世界坐标系中圆心齐次坐标  $O_\omega$ 。

### 3.3 基于点的三维重建

如图2所示空间某点在双摄像机 CCD 面阵上的成像,  $O_a, O_b$  分别为左右摄像机的摄像机坐标系的原点, 跟据小孔成像原理<sup>[7]</sup>, 空间点  $P_w = [x_w y_w z_w 1]$  分别在两个摄像机上的理想成像点为  $P_1 = [u_1 v_1]$ ,  $P_2 = [u_2 v_2]$ 。  $P_l = [x_l y_l z_l 1]$ ,

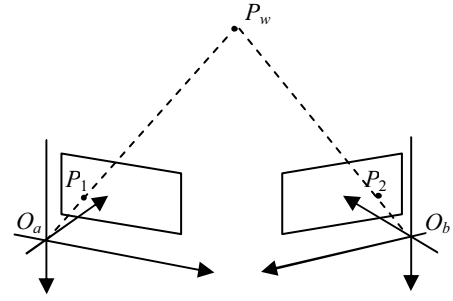


图2 空间点在双摄像机的成像

$P_r = [x_r y_r z_r 1]$  分别为左、右摄像机坐标系中的坐标。则有如下关系:

$$\begin{bmatrix} s_1 u_1 \\ s_1 v_1 \\ s_1 \\ 1 \end{bmatrix} = P_l = A_l P_\omega \quad \begin{bmatrix} s_2 u_2 \\ s_2 v_2 \\ s_2 \\ 1 \end{bmatrix} = P_r = A_r P_\omega \quad (18)$$

$A_l$  和  $A_r$  分别为左右摄像机的外部参数矩阵<sup>[7]</sup>, 下标  $l$  和  $r$  分别表示左右摄像机。其中  $A = \begin{bmatrix} R & \bar{t} \\ o^T & 1 \end{bmatrix}$ ,  $R$  为旋转矩阵,  $\bar{t}$  为平移向量,  $T$  表示矩阵转置。

分别从第一个矩阵方程中消去  $s_1$ , 从第二个矩阵方程中消去  $s_2$ , 并联立方程, 可以得到四个方程。理想情况下, 直线  $O_a P_1$  与直线  $O_b P_2$  一定会相交于  $P_w$  点, 则这四个方程是肯定有解。但实际应用中, 由于图像点的坐标以及摄像机的标定结果都会存在误差, 这样直线  $O_a P_1$  与直线  $O_b P_2$  不一定会相交, 需要用最小二乘法解出空间点坐标。

### 3.4 空间圆的双目视觉重建

由于摄像机存在成像畸变, 所以应先对圆心图像进行畸变校正<sup>[8]</sup>, 获得其理想成像点坐标, 再利用以上基于点的三维重建算法进行三维重建可以得到世界坐标系中圆心齐次坐标  $O_\omega$ , 以及圆心在左右摄像机坐标系中的坐标  $O_l$  和  $O_r$ 。

在左摄像机中, 将齐次坐标  $O_l$  写成非齐次坐标  $\bar{o}_l = [x_l y_l z_l]^T$  的形式, 代入式(13)可得:

$$d_l = |(\bar{n}_l, \bar{o}_l)| \quad (19)$$

将式(19)代入式(12)可得半径:

$$r_l = |(\bar{n}_l, \bar{o}_l)| / \lambda_{l1}^{3/2} \quad (20)$$

在右摄像机中, 同理可得:

$$r_r = |(\bar{n}_r, \bar{o}_r)| / \lambda_{r1}^{3/2} \quad (21)$$

半径估计值为:

$$r = (r_l + r_r) / 2 \tag{22}$$

4. 实验结果

实验使用两个三星SCC-421P型彩色摄像机，分辨率576×768，均固定在可以上下左右旋转的云台上，两个摄像机的内外参数已经精确标定，标定算法参见文献[9]；空间圆用高分辨率激光打印机打印，并贴在硬塑料平板上(图3)。

利用本文算法，针对不同的条件，我们做了大量的3D圆重建实验，均取得了满意的效果。其中一组实验是对半

径75mm的圆重建，实验对打印圆所在平面旋转平移四次，拍摄四组图像，图3所示为其中的第一组和第四组图像。图3中椭圆的检测，其先采用Canny算子<sup>[10]</sup>提取边缘，然后利用随机Hough变换<sup>[11,12]</sup>检测出椭圆及其参数，图4所示为一一对应图3检测的椭圆。图3中红线勾出的椭圆为重建后的3D圆在像面的投影。

本文算法对四组图像重建的结果见表 1，平均半径误差为 0.24%，最大为 0.49%。由于缺乏合适的计量工具，因而未对圆的其他参数进行分析，不过从图 3 可以看出，重建后 3D 圆的投影与实际边缘几乎重合。

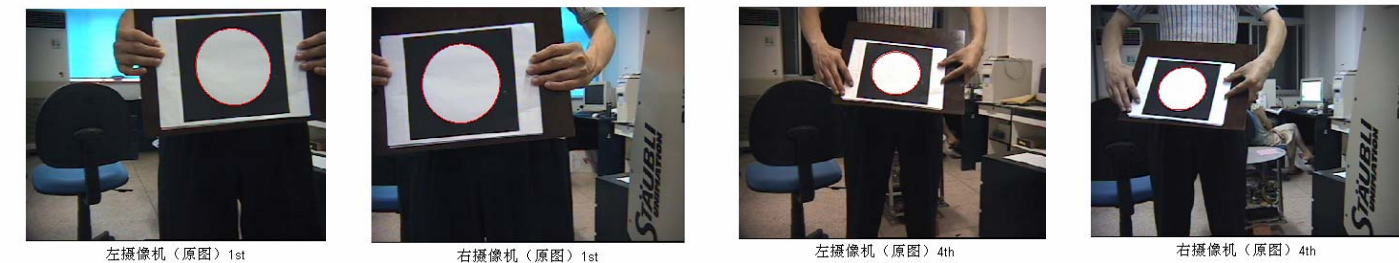


图 3 左右摄像机拍摄的图像与重建后 3D 圆的投影叠加图

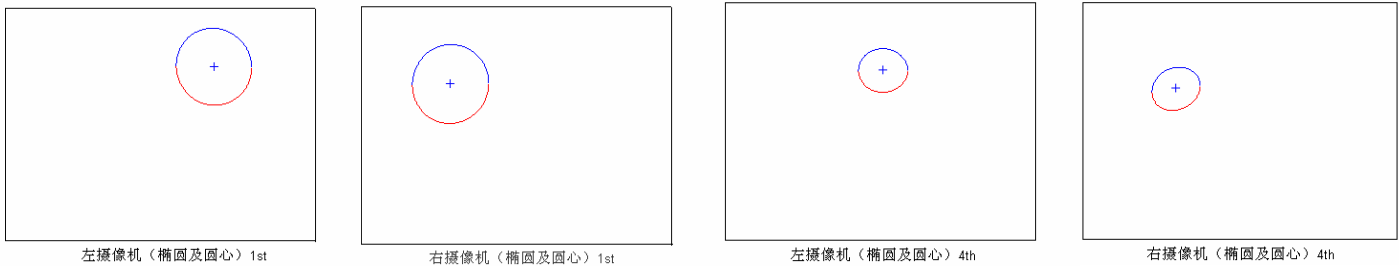


图 4 利用 Canny 算子及随机 Hough 变换提取上图中的椭圆

表 1 本文算法空间圆重建结果

组号	左摄像机求得法向量 $\vec{n}_{laxi}$	右摄像机求得法向量 $\vec{n}_{raxi}$	匹配法向量 $\vec{n}_{lap}$ 和 $\vec{n}_{raq}$	圆心 $O_w$ (mm)	计算半径 $r$ (mm)	半径误差
1	0.5193 0.2246 -0.8245 0.0151 -0.1322 -0.9911	-0.3982 0.2394 -0.8855 0.1458 -0.1382 -0.9796	0.0151 -0.1322 -0.9911 0.1458 -0.1382 -0.9796	112.3060 175.4759 -88.0833	75.0155	0.02%
2	0.3613 0.2377 -0.9017 0.0480 -0.1400 -0.9890	-0.1537 0.1413 0.9780 0.3461 -0.2326 0.9089	0.0480 -0.1400 -0.9890 -0.1537 0.1413 0.9780	111.2724 184.8790 -315.3236	74.7763	0.30%
3	0.5175 0.5822 -0.6271 -0.0293 -0.5312 -0.8468	-0.2146 0.6112 -0.7619 0.0310 -0.5419 -0.8399	-0.0293 -0.5312 -0.8468 0.0310 -0.5419 -0.8399	129.5270 168.0538 -68.7265	74.8986	0.14%
4	0.1214 0.5340 -0.8367 0.1171 -0.4829 -0.8678	-0.1541 0.4814 0.8628 0.3659 -0.5297 0.7652	0.1171 -0.4829 -0.8678 -0.1541 0.4814 0.8628	66.5272 173.2923 -478.5855	75.3702	0.49%

#### 4. 结论

本文基于成像几何原理提出一种空间圆的重建新方法,利用实际图像数据进行的重建实验,取得了很好的结果。该方法具有以下特点:

1. 不需要点与点的对应,计算速度快。
2. 完全基于成像几何原理推导,每一步都有成像几何学依据,避免了文献[3~5]中冗余方程误差法可能会有的坏解问题,并提高了重建精度。
3. 不需要曲线在 XY、YZ 或 ZX 平面上的投影,因此应用时不必考虑曲线所在平面垂直这些平面的特殊情况。

#### 参考文献

- [1] Wenchao Cai, Qian Yu and Hong Wang. "A fast contour-based approach to circle and ellipse detection," *Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation*, vol. 5, pp. 15-19, 2004.
- [2] M. Ceccarelli, A. Petrosino and G. Laccetti. "Circle detection based on orientation matching," *11th International Conference on Image Analysis and Processing*, pp. 119-124, 2001.
- [3] 司绍华, 马颂德. 基于二次曲线的立体视觉. 自动化学报, 1993, 19(4): 420-427.
- [4] S. D. Ma. "Conics-based stereo, motion estimation, and pose determination," *International Journal of Computer Vision*, vol. 10, no. 1, pp. 7-25, 1993.
- [5] 丁明跃, F. M. Wahl. 无对应点匹配的三维重建. 电子学报, 1995, 23(9): 6-11.
- [6] D. Forsyth, J. L. Mundy, A. Zisserman, et al. "Invariant descriptors for 3D object recognition and pose," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 13, no. 10, pp. 971-991, 1991.
- [7] 郑南宁. 计算机视觉与模式识别. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- [8] Z. Zhang, "Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations," *The Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on Computer Vision*, vol. 1, pp. 666-673, 1999.
- [9] 毛剑飞, 邹细勇, 诸静. 改进的平面模板两步法标定摄像机. 中国图象图形学报(A), 2004, 9(7): 846-852.
- [10] J. Canny. "A computational approach to edge detection," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 8, no. 6, pp. 679-698, 1986.
- [11] L. Xu, E. Oja, P. Kultanen, "A new curve detection method: Randomized hough transform (rht)," *Pattern Recognition Letters*, vol. 11, no. 5, pp. 331-338, 1990.
- [12] L. Xu, E. Oja. "Randomized Hough transform(RHT): basic mechanisms, algorithms and computational complexities," *Computer Vision Graphic Image Process: Image understanding*, vol. 57, no. 2, pp. 131-154, 1993.