Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

Факультет: Информатика и системы управления
Кафедра: Информационная безопасность (ИУ8)

Лабораторная работа №1

ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

«Метод Брауна-Робинсон»

Вариант 1

Студент: Анаян М. С., ИУ8-104
Преподаватель: Коннова Н. С.

Москва, 2020

Цель и задачи выполнения лабораторной работы

Цель работы – изучить аналитический (обратной матрицы) и численный (Брауна-Робинсон) методы нахождения смешанных стратегий в антагонистической игре двух лиц в нормальной форме.

Постановка задачи – найти цену игры и оптимальные стратегии обоих игроков методами обратной матрицы и Брауна-Робинсов, затем сравнить полученные результаты.

Выполнение лабораторной работы

(3 × 3)-игра Г задана платёжной матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 \\ 7 & 5 & 8 \\ 16 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для расчёта методом обратной матрицы применяются следующие формулы:

$$x^* = \frac{uC^{-1}}{uC^{-1}u^T}, y^* = \frac{C^{-1}u^T}{uC^{-1}u^T}, v = \frac{1}{uC^{-1}u^T},$$

где $u = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$ для (m × n)-игры Г.

В соответствии с расчётом по заданным формулам для метода обратной матрицы получены следующие значения:

– стоимость игры $v = \frac{133}{18} \approx 7.39$,

– оптимальная смешанная стратегия игрока А $x^* = \left(\frac{19}{54}, \frac{10}{27}, \frac{5}{18}\right) = (0.35, 0.37, 0.27)$,

– оптимальная смешанная стратегия игрока В $y^* = \left(\frac{13}{36}, \frac{1}{12}, \frac{5}{9}\right) = (0.36, 0.08, 0.56)$.

Вычисления произведены при помощи SageMath 8.9, с исходным кодом можно ознакомиться в репозитории по ссылке: https://github.com/hms2010/GameTheory/blob/master/lab1/lab1-analytical.ipynb

В таблице ниже приведены этапы расчёта смешанных стратегий игроков A и B, а также оценки игры при помощи метода Брауна-Робинсон с уровнем погрешности $\varepsilon \le 0.1$:

Таблица 1 – Этапы расчёта стратегий методом Брауна-Робинсон

k	A strat	B strat	Win A			Loss B			UpBound	LowBound	Eps
1	1	1	1	7	16	1	11	11	16/1	1/1	15/1
2	3	1	2	14	32	17	17	13	16/1	13/2	19/2
3	3	3	13	22	34	33	23	15	34/3	5/1	29/6
4	3	3	24	30	36	49	29	17	9/1	17/4	5/2
5	3	3	35	38	38	65	35	19	38/5	19/5	11/10
6	3	3	46	46	40	81	41	21	23/3	7/2	11/10
7	2	3	57	54	42	88	46	29	57/7	29/7	11/10
8	1	3	68	62	44	89	57	40	17/2	5/1	11/10
9	1	3	79	70	46	90	68	51	79/9	17/3	11/10
10	1	3	90	78	48	91	79	62	9/1	31/5	11/10
11	1	3	101	86	50	92	90	73	101/11	73/11	53/55
12	1	3	112	94	52	93	101	84	28/3	7/1	3/5
13	1	3	123	102	54	94	112	95	123/13	94/13	24/65
14	1	1	124	109	70	95	123	106	62/7	95/14	24/65
15	1	1	125	116	86	96	134	117	25/3	32/5	24/65
16	1	1	126	123	102	97	145	128	63/8	97/16	24/65
17	1	1	127	130	118	98	156	139	130/17	98/17	24/65
18	2	1	128	137	134	105	161	147	137/18	35/6	24/65
19	2	1	129	144	150	112	166	155	150/19	112/19	24/65
20	3	1	130	151	166	128	172	157	83/10	32/5	24/65
21	3	1	131	158	182	144	178	159	26/3	48/7	24/65
22	3	1	132	165	198	160	184	161	9/1	80/11	18/55
23	3	1	133	172	214	176	190	163	214/23	163/23	18/55
24	3	3	144	180	216	192	196	165	9/1	55/8	18/55
25	3	3	155	188	218	208	202	167	218/25	167/25	18/55
26	3	3	166	196	220	224	208	169	110/13	13/2	18/55
27	3	3	177	204	222	240	214	171	74/9	19/3	18/55
28	3	3	188	212	224	256	220	173	8/1	173/28	18/55
29	3	3	199	220	226	272	226	175	226/29	175/29	18/55
30	3	3	210	228	228	288	232	177	38/5	59/10	18/55
31	3	3	221	236	230	304	238	179	236/31	179/31	18/55
32	2	3	232	244	232	311	243	187	61/8	187/32	18/55
33	2	3	243	252	234	318	248	195	84/11	65/11	18/55
34	2	3	254	260	236	325	253	203	130/17	203/34	18/55
35	2	3	265	268	238	332	258	211	268/35	211/35	18/55
36	2	3	276	276	240	339	263	219	23/3	73/12	18/55
37	1	3	287	284	242	340	274	230	287/37	230/37	18/55
38	1	3	298	292	244	341	285	241	149/19	241/38	18/55
39	1	3	309	300	246	342	296	252	103/13	84/13	18/55
40	1	3	320	308	248	343	307	263	8/1	263/40	18/55
41	1	3	331	316	250	344	318	274	331/41	274/41	18/55
42	1	3	342	324	252	345	329	285	57/7	95/14	18/55
43	1	3	353	332	254	346	340	296	353/43	296/43	18/55
44	1	3	364	340	256	347	351	307	91/11	307/44	18/55
45	1	3	375	348	258	348	362	318	25/3	106/15	18/55
46	1	3	386	356	260	349	373	329	193/23	329/46	18/55
47	1	3	397	364	262	350	384	340	397/47	340/47	18/55
48	1	3	408	372	264	351	395	351	17/2	117/16	23/80
49	1	1	409	379	280	352	406	362	409/49	352/49	23/80
50	1	1	410	386	296	353	417	373	41/5	353/50	23/80
51	1	1	411	393	312	354	428	384	137/17	118/17	23/80
52	1	1	412	400	328	355	439	395	103/13	355/52	23/80
53	1	1	413	407	344	356	450	406	413/53	356/53	23/80
54	1	1	414	414	360	357	461	417	23/3	119/18	23/80
55	2	1	415	421	376	364	466	425	421/55	364/55	23/80
56	2	1	416	428	392	371	471	433	107/14	53/8	23/80
57	2	1	417	435	408	378	476	441	145/19	126/19	23/80
58	2	1	418	442	424	385	481	449	221/29	385/58	23/80
59	2	1	419	449	440	392	486	457	449/59	392/59	23/80
60	2	1	420	456	456	399	491	465	38/5	133/20	23/80
61	2	1	421	463	472	406	496	473	472/61	406/61	23/80
62	3	1	422	470	488	422	502	475	244/31	211/31	23/80
63	3	1	423	477	504	438	508	477	8/1	146/21	23/80

64	3	1	424	484	520	454	514	479	65/8	227/32	23/80
65	3	1	425	491	536	470	520	481	536/65	94/13	23/80
66	3	1	426	498	552	486	526	483	92/11	161/22	31/110
67	3	3	437	506	554	502	532	485	554/67	485/67	31/110
68	3	3	448	514	556	518	538	487	139/17	487/68	31/110
69	3	3	459	522	558	534	544	489	186/23	163/23	31/110
70	3	3	470	530	560	550	550	491	8/1	491/70	31/110
71	3	3	481	538	562	566	556	493	562/71	493/71	31/110
72	3	3	492	546	564	582	562	495	47/6	55/8	31/110
73	3	3	503	554	566	598	568	497	566/73	497/73	31/110
74	3	3	514	562	568	614	574	499	284/37	499/74	31/110
75	3	3	525	570	570	630	580	501	38/5	167/25	31/110
76	3	3	536	578	572	646	586	503	289/38	503/76	31/110
77	2	3	547	586	574	653	591	511	586/77	73/11	31/110
78	2	3	558	594	576	660	596	519	99/13	173/26	31/110
79	2	3	569	602	578	667	601	527	602/79	527/79	31/110
80	2	3	580	610	580	674	606	535	61/8	107/16	31/110
81	2	3	591	618	582	681	611	543	206/27	181/27	31/110
82	2	3	602	626	584	688	616	551	313/41	551/82	31/110
83	2	3	613	634	586	695	621	559	634/83	559/83	31/110
84	2	3	624	642	588	702	626	567	107/14	27/4	31/110
85	2	3	635	650	590	709	631	575	130/17	115/17	31/110
86	2	3	646	658	592	716	636	583	329/43	583/86	31/110
87	2	3	657	666	594	723	641	591	222/29	197/29	31/110
88	2	3	668	674	596	730	646	599	337/44	599/88	31/110
89	2	3	679	682	598	737	651	607	682/89	607/89	31/110
90	2	3	690	690	600	744	656	615	23/3	41/6	31/110
91	2	3	701	698	602	751	661	623	701/91	89/13	31/110
92	1	3	712	706	604	752	672	634	178/23	317/46	31/110
93	1	3	723	714	606	753	683	645	241/31	215/31	31/110
94	1	3	734	722	608	754	694	656	367/47	328/47	31/110
95	1	3	745	730	610	755	705	667	149/19	667/95	31/110
96	1	3	756	738	612	756	716	678	63/8	113/16	31/110
97	1	3	767	746	614	757	727	689	767/97	689/97	31/110
98	1	3	778	754	616	758	738	700	389/49	50/7	31/110
99	1	3	789	762	618	759	749	711	263/33	79/11	31/110
100	1	3	800	770	620	760	760	722	8/1	361/50	31/110
101	1	3	811	778	622	761	771	733	811/101	733/101	31/110
102	1	3	822	786	624	762	782	744	137/17	124/17	31/110
103	1	3	833	794	626	763	793	755	833/103	755/103	139/515
104	1	3	844	802	628	764	804	766	211/26	191/26	33/130
105	1	1	845	809	644	765	815	777	169/21	51/7	33/130
106	1	1	846	816	660	766	826	788	423/53	383/53	33/130
107	1	1	847	823	676	767	837	799	847/107	767/107	33/130
108	1	1	848	830	692	768	848	810	212/27	64/9	33/130
109	1	1	849	837	708	769	859	821	849/109	769/109	33/130
110	1	1	850	844	724	770	870	832	85/11	7/1	33/130
111	1	1	851	851	740	771	881	843	23/3	257/37	33/130
112	1	1	852	858	756	772	892	854	429/56	193/28	33/130
113	2	1	853	865	772	779	897	862	865/113	779/113	33/130
114	2	1	854	872	788	786	902	870	436/57	131/19	33/130
115	2	1	855	879	804	793	907	878	879/115	793/115	33/130
116	2	1	856	886	820	800	912	886	443/58	200/29	33/130
117	2	1	857	893	836	807	917	894	893/117	269/39	33/130
118	2	1	858	900	852	814	922	902	450/59	407/59	33/130
119	2	1	859	907	868	821	927	910	907/119	821/119	33/130
120	2	1	860	914	884	828	932	918	457/60	69/10	33/130
121	2	1	861	921	900	835	937	926	921/121	835/121	33/130
122	2	1	862	928	916	842	942	934	464/61	421/61	33/130
123	2	1	863	935	932	849	947	942	935/123	283/41	33/130
124	2	1	864	942	948	856	952	950	237/31	214/31	33/130
125	3	1	865	949	964	872	958	952	964/125	872/125	33/130
126	3	1	866	956	980	888	964	954	70/9	148/21	33/130
127	3	1	867	963	996	904	970	956	996/127	904/127	33/130
128	3	1	868	970	1012	920	976	958	253/32	115/16	33/130
129	3	1	869	977	1028	936	982	960	1028/129	312/43	33/130
130	3	1	870	984	1044	952	988	962	522/65	476/65	33/130
131	3	1	871	991	1060	968	994	964	1060/131	964/131	158/655
132	3	3	882	999	1062	984	1000	966	177/22	161/22	158/655
133	3	3	893	1007	1064	1000	1006	968	8/1	968/133	158/655
134	3	3	904	1015	1066	1016	1012	970	533/67	485/67	158/655
135	3	3	915	1023	1068	1032	1018	972	356/45	36/5	158/655
136	3	3	926	1031	1070	1048	1024	974	535/68	487/68	158/655
137	3	3	937	1039	1072	1064	1030	976	1072/137	976/137	158/655
138	3	3	948	1047	1074	1080	1036	978	179/23	163/23	158/655
139	3	3	959	1055	1076	1096	1042	980	1076/139	980/139	158/655

140	3	3	970	1063	1078	1112	1048	982	77/10	491/70	158/655
141	3	3	981	1071	1080	1128	1054	984	360/47	328/47	158/655
142	3	3	992	1079	1082	1144	1060	986	541/71	493/71	158/655
143	3	3	1003	1087	1084	1160	1066	988	1087/143	76/11	158/655
144	2	3	1014	1095	1086	1167	1071	996	365/48	83/12	158/655
145	2	3	1025	1103	1088	1174	1076	1004	1103/145	1004/145	158/655
146	2	3	1036	1111	1090	1181	1081	1012	1111/146	506/73	158/655
147	2	3	1047	1119	1092	1188	1086	1020	373/49	340/49	158/655
148	2	3	1058	1127	1094	1195	1091	1028	1127/148	257/37	158/655
149	2	3	1069	1135	1096	1202	1096	1036	1135/149	1036/149	158/655
150	2	3	1080	1143	1098	1209	1101	1044	381/50	174/25	158/655
151	2	3	1091	1151	1100	1216	1106	1052	1151/151	1052/151	158/655
152	2	3	1102	1159	1102	1223	1111	1060	61/8	265/38	158/655
153	2	3	1113	1167	1104	1230	1116	1068	389/51	356/51	158/655
154	2	3	1124	1175	1106	1237	1121	1076	1175/154	538/77	158/655
155	2	3	1135	1183	1108	1244	1126	1084	1183/155	1084/155	158/655
156	2	3	1146	1191	1110	1251	1131	1092	397/52	7/1	158/655
157	2	3	1157	1199	1112	1258	1136	1100	1199/157	1100/157	158/655
158	2	3	1168	1207	1114	1265	1141	1108	1207/158	554/79	158/655
159	2	3	1179	1215	1116	1272	1146	1116	405/53	372/53	158/655
160	2	3	1190	1223	1118	1279	1151	1124	1223/160	281/40	158/655
161	2	3	1201	1231	1120	1286	1156	1132	1231/161	1132/161	158/655
162	2	3	1212	1239	1122	1293	1161	1140	413/54	190/27	158/655
163	2	3	1223	1247	1124	1300	1166	1148	1247/163	1148/163	158/655
164	2	3	1234	1255	1126	1307	1171	1156	1255/164	289/41	158/655
165	2	3	1245	1263	1128	1314	1176	1164	421/55	388/55	158/655
166	2	3	1256	1271	1130	1321	1181	1172	1271/166	586/83	158/655
167	2	3	1267	1279	1132	1328	1186	1180	1279/167	1180/167	158/655
168	2	3	1278	1287	1134	1335	1191	1188	429/56	99/14	158/655
169	2	3	1289	1295	1136	1342	1196	1196	1295/169	92/13	158/655
170	2	2	1300	1300	1142	1349	1201	1204	130/17	1201/170	158/655
171	1	2	1311	1305	1148	1350	1212	1215	23/3	404/57	158/655
172	1	2	1322	1310	1154	1351	1223	1226	661/86	1223/172	158/655
173	1	2	1333	1315	1160	1352	1234	1237	1333/173	1234/173	158/655
174	1	2	1344	1320	1166	1353	1245	1248	224/29	415/58	158/655
175	1	2	1355	1325	1172	1354	1256	1259	271/35	1256/175	158/655
176	1	2	1366	1330	1178	1355	1267	1270	683/88	1267/176	158/655
177	1	2	1377	1335	1184	1356	1278	1281	459/59	426/59	158/655
178	1	2	1388	1340	1190	1357	1289	1292	694/89	1289/178	158/655
179	1	2	1399	1345	1196	1358	1300	1303	1399/179	1300/179	158/655
180	1	2	1410	1350	1202	1359	1311	1314	47/6	437/60	158/655
181	1	2	1421	1355	1208	1360	1322	1325	1421/181	1322/181	158/655
182	1	2	1432	1360	1214	1361	1333	1336	716/91	1333/182	158/655
183	1	2	1443	1365	1220	1362	1344	1347	481/61	448/61	158/655
184	1	2	1454	1370	1226	1363	1355	1358	727/92	1355/184	217/920
185	1	2	1465	1375	1232	1364	1366	1369	293/37	1364/185	42/185
186	1	1	1466	1382	1248	1365	1377	1380	733/93	455/62	42/185
187	1	1	1467	1389	1264	1366	1388	1391	1467/187	1366/187	42/185
188	1	1	1468	1396	1280	1367	1399	1402	367/47	1367/188	42/185
189	1	1	1469	1403	1296	1368	1410	1413	1469/189	152/21	42/185
190	1	1	1470	1410	1312	1369	1421	1424	147/19	1369/190	42/185
191	1	1	1471	1417	1328	1370	1432	1435	1471/191	1370/191	42/185
192	1	1	1472	1424	1344	1371	1443	1446	23/3	457/64	42/185
193	1	1	1473	1431	1360	1372	1454	1457	1473/193	1372/193	42/185
194	1	1	1474	1438	1376	1373	1465	1468	737/97	1373/194	4037/17945
195	1	1	1475	1445	1392	1374	1476	1479	295/39	458/65	1379/7215
196	1	1	1476	1452	1408	1375	1487	1490	369/49	1375/196	1429/9065
197	1	1	1477	1459	1424	1376	1498	1501	1477/197	1376/197	4537/36445
198	1	1	1478	1466	1440	1377	1509	1512	739/99	153/22	1679/18315

Для достижения заданной погрешности ε вычислений было выполнено $k = 198$ итераций. При этом были получены следующие результаты:

– смешанная стратегия игрока А $x^* = \left(\frac{13}{33}, \frac{23}{66}, \frac{17}{66}\right) = (0.39, 0.35, 0.26)$,

– смешанная стратегия игрока В $y^* = \left(\frac{35}{99}, \frac{8}{99}, \frac{56}{99}\right) = (0.35, 0.08, 0.57)$,

– средняя стоимость игры $\overline{v} = \frac{1}{2} * \left(\frac{739}{99} + \frac{153}{22}\right) = \frac{2855}{396} \approx 7.21.$

С исходным кодом на языке Python версии 3.*, реализующим метод Брауна-Робинсон, можно ознакомиться в приложении А либо в репозитории hms2010/GameTheory на github.com по ссылке: https://github.com/hms2010/GameTheory/blob/master/lab1/brown-robinson.py.

Погрешность стоимости игры, полученной методом Брауна-Робинсон, относительно полученной методом обратной матрицы стоимости составила: $\delta_v = \frac{(v - \overline{v})}{v} \cdot 100\% \approx 2.4\%.$

Выводы

В результате выполнения лабораторной работы получены следующие результаты:

– изучен и реализован аналитический (обратной матрицы) метод нахождения смешанных стратегий в антагонистической игре двух лиц в нормальной форме;

– изучен и реализован численный метод (Брауна-Робинсон) нахождения смешанных стратегий в антагонистической игре двух лиц в нормальной форме;

– при заданной погрешности вычислений $\varepsilon \leq 0.1$ для метода Брауна-Робинсон оценка средней стоимости игры относительно стоимости игры, полученной методом обратной матрицы, имеет относительную погрешность 2.4%.

Исходные коды программ представлены по ссылке: https://github.com/hms2010/GameTheory/tree/master/lab1.

Приложение А

```
import math
import fractions
import random
from c import *
from sys import stdout

def get_rand_max_index(arr):
    max_i = []
    max_el = max(arr)
    i = arr.index(max_el)
    max_i.append(i)
    while i < len(arr):
        try:
            i = arr.index(max_el, i + 1)
            max_i.append(i)
        except ValueError:
            break
    return random.choice(max_i)

def get_rand_min_index(arr):
    min_i = []
    min_el = min(arr)
    i = arr.index(min_el)
    min_i.append(i)
    while i < len(arr):
        try:
            i = arr.index(min_el, i + 1)
            min_i.append(i)
        except ValueError:
            break
    return random.choice(min_i)

def get_row_by_index(matrix, index):
    return matrix[index]

def get_column_by_index(matrix, index):
    return [matrix[i][index] for i in range(len(matrix))]

def get_max_index(arr):
    return arr.index(max(arr))

def get_min_index(arr):
    return arr.index(min(arr))

def vector_addition(a, b):
    return [i + j for i, j in zip(a, b)]
```

```python
int_formatter = "{:^9d}"
float_formatter = "{:>4d}/{:<4d}"
str_formatter = "{:^9s}"
outline = "||"
separator = "|"
line_formatter = (outline + separator.join([int_formatter] * 3)
+ outline + separator.join([int_formatter] * 3)
+ outline + separator.join([int_formatter] * 3)
+ outline + separator.join([float_formatter] * 3) + outline)

header_formatter = (outline + separator.join([str_formatter] * 3)
+ outline + "{:^29s}"
+ outline + "{:^29s}"
+ outline + separator.join([str_formatter] * 3) + outline)

def printHeader(curr_file):
    if curr_file:
        print(header_formatter.format("k", "A strat", "B strat", "Win A", "Loss B",
 "UpBound", "LowBound", "Eps"), file=curr_file)
        print(126 * "-", file=curr_file)

def printLine(curr_file, k, A, B, win_a, loss_b, upper_bound, lower_bound, eps):
    if curr_file:
        print(line_formatter.format(k, A, B, win_a[0], win_a[1], win_a[2], loss_b[0
], loss_b[1], loss_b[2], upper_bound.numerator, upper_bound.denominator, lower_boun
d.numerator, lower_bound.denominator, eps.numerator, eps.denominator), file=curr_fi
le)

out_file = stdout

def brown_robinson_method(C, eps):
    m = len(C)    # A player strategies: strategy row consists of win of A
    n = len(C[0]) # B player strategies: strategy column consist of loss of B

    x = m * [0]
    y = n * [0]

    curr_strategy_a = 0
    curr_strategy_b = 0

    win_a = m * [0]
    loss_b = n * [0]
    curr_eps = math.inf
    k = 0

    lower_bounds = []
    upper_bounds = []

    printHeader(out_file)
```

```
    while (curr_eps > eps):
        k += 1
        win_a = vector_addition(win_a, get_column_by_index(C, curr_strategy_b))
        loss_b = vector_addition(loss_b, get_row_by_index(C, curr_strategy_a))
        x[curr_strategy_a] += 1
        y[curr_strategy_b] += 1

        lower_bound = fractions.Fraction(min(loss_b), k)
        upper_bound = fractions.Fraction(max(win_a), k)
        lower_bounds.append(lower_bound)
        upper_bounds.append(upper_bound)

        curr_eps = min(upper_bounds) - max(lower_bounds)

        printLine(out_file, k, curr_strategy_a + 1, curr_strategy_b + 1, win_a, los
s_b, upper_bound, lower_bound, curr_eps)

        curr_strategy_a = get_rand_max_index(win_a)
        curr_strategy_b = get_rand_min_index(loss_b)

    average_cost = lower_bounds[-1] + upper_bounds[-1]
    average_cost /= 2

    x = [fractions.Fraction(i, k) for i in x]
    y = [fractions.Fraction(i, k) for i in y]

    return x, y, average_cost

def main():
    eps = float(input("Enter eps: "))
    x, y, average_cost = brown_robinson_method(C, eps)
    print("x = (",*x, ")", file=out_file)
    print("y = (",*y, ")", file=out_file)
    print("x = (", *[float(i) for i in x], ")", file=out_file)
    print("y = (", *[float(i) for i in y], ")", file=out_file)
    print("Average cost is {} = {}".format(average_cost, float(average_cost)), file
=out_file)

if __name__ == '__main__':
    main()
```