M24 Statistik 1: Wintersemester 2024 / 2025

Seminar 05: Regression

MSc Albert Anoschin & Prof. Matthias Guggenmos

Health and Medical University Potsdam

Wozu dient eine „Regressionsgerade“?

- Mit der Korrelation können wir die *Stärke des linearen Zusammenhangs* zweier Variablen quantifizieren.
- Wir können aber auch Werte einer Variable (z.B. Depression) aufgrund von Werten auf einer anderen Variable (z.B. Social Media Nutzung) *vorhersagen*.

Beispiel:

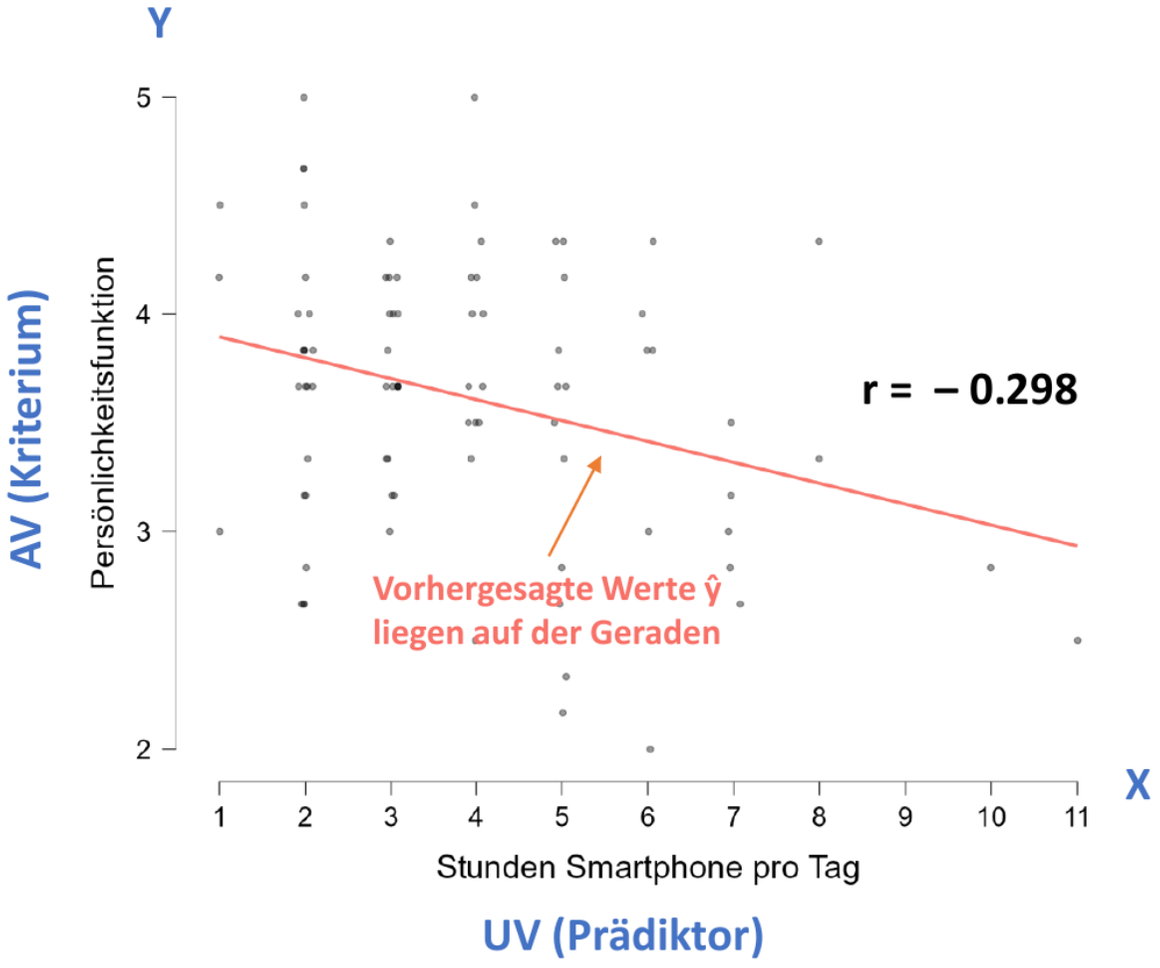
Welchen Wert (Depression) würden Sie für eine Person vorhersagen, über die Sie keine Informationen haben? Sie kennen die Verteilung von Depression in der Bevölkerung.

⇒ Mittelwert

Wie könnten Sie die Vorhersage der Depression einer Person verbessern? Sie wissen, dass Social Media Nutzung positiv mit Depression korreliert.

⇒ Hinzunahme zusätzlicher Information (Stunden Social Media Nutzung als *Prädiktor*)

Lineare Regression

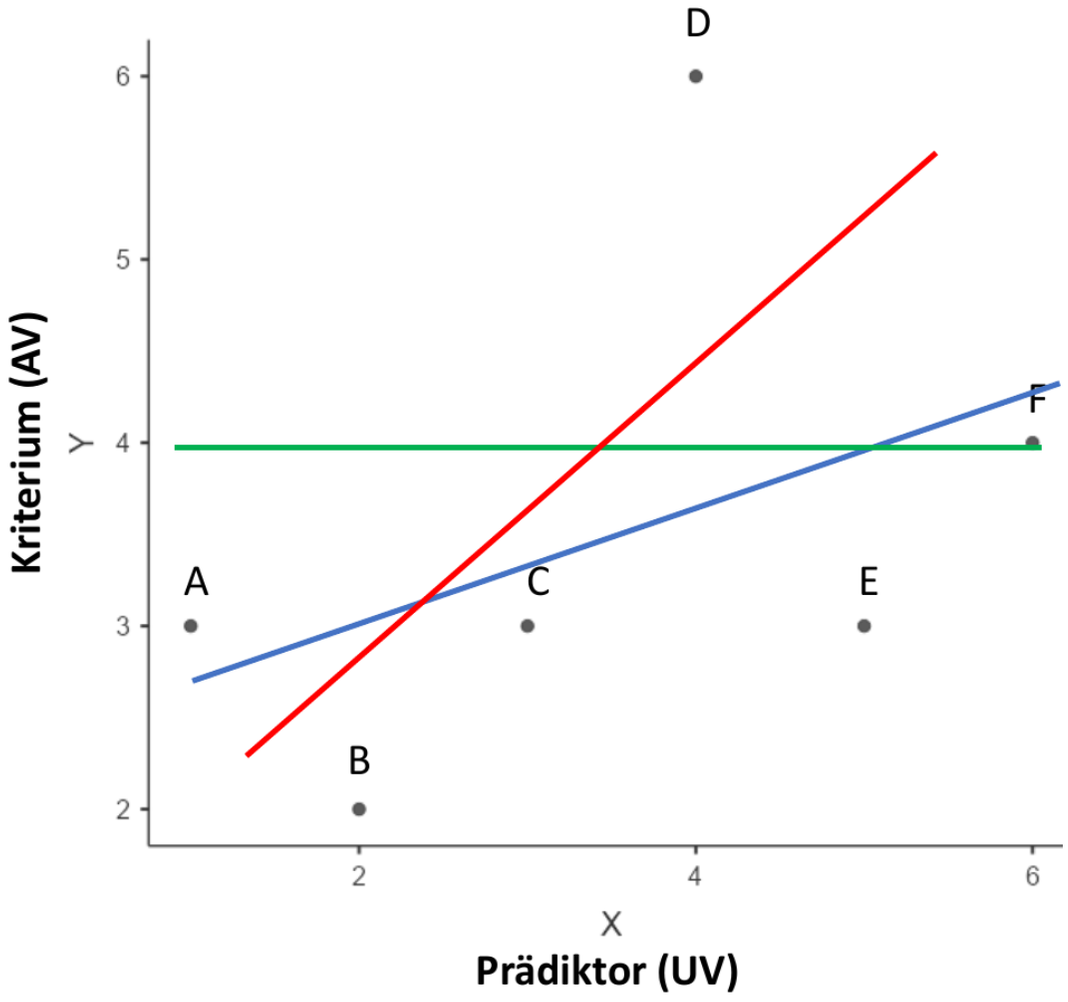


Ziel der Regression:

Vorhersage von Werten auf der abhängigen Variablen (AV) aufgrund von Werten auf der unabhängigen Variable (UV)

Beispiel: Wie gut ist die Persönlichkeitsfunktion (psychosoziale Anpassung) einer Person, die neun Stunden am Tag vor ihrem Smartphone verbringt?

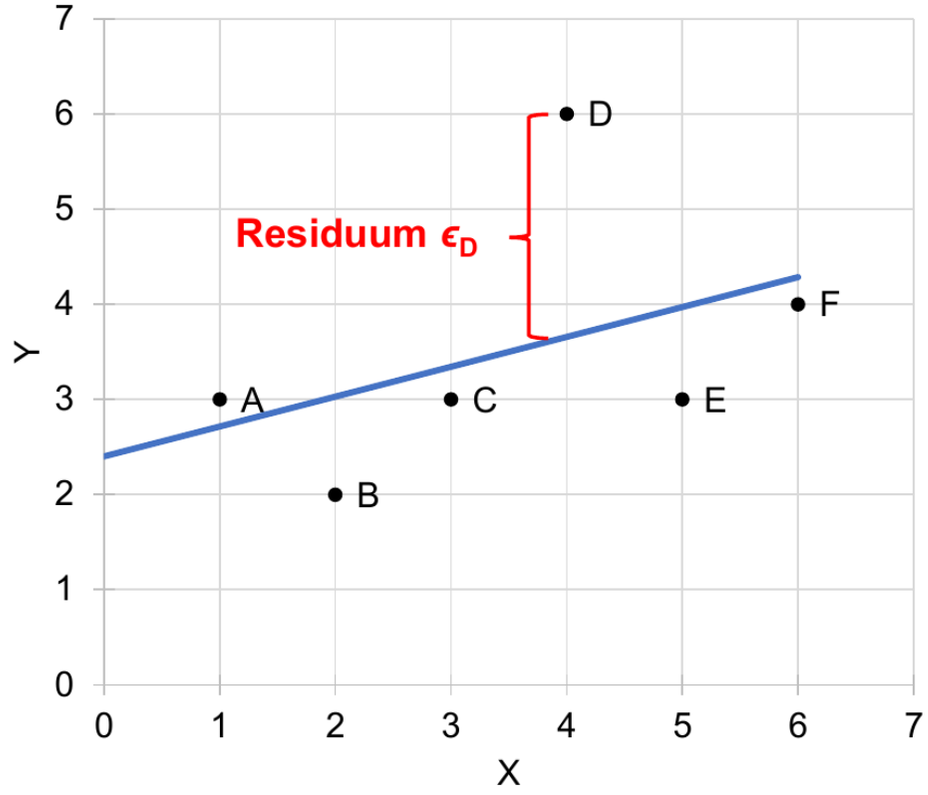
Bestimmung der Regressionsgeraden: Welche Linie passt am besten?



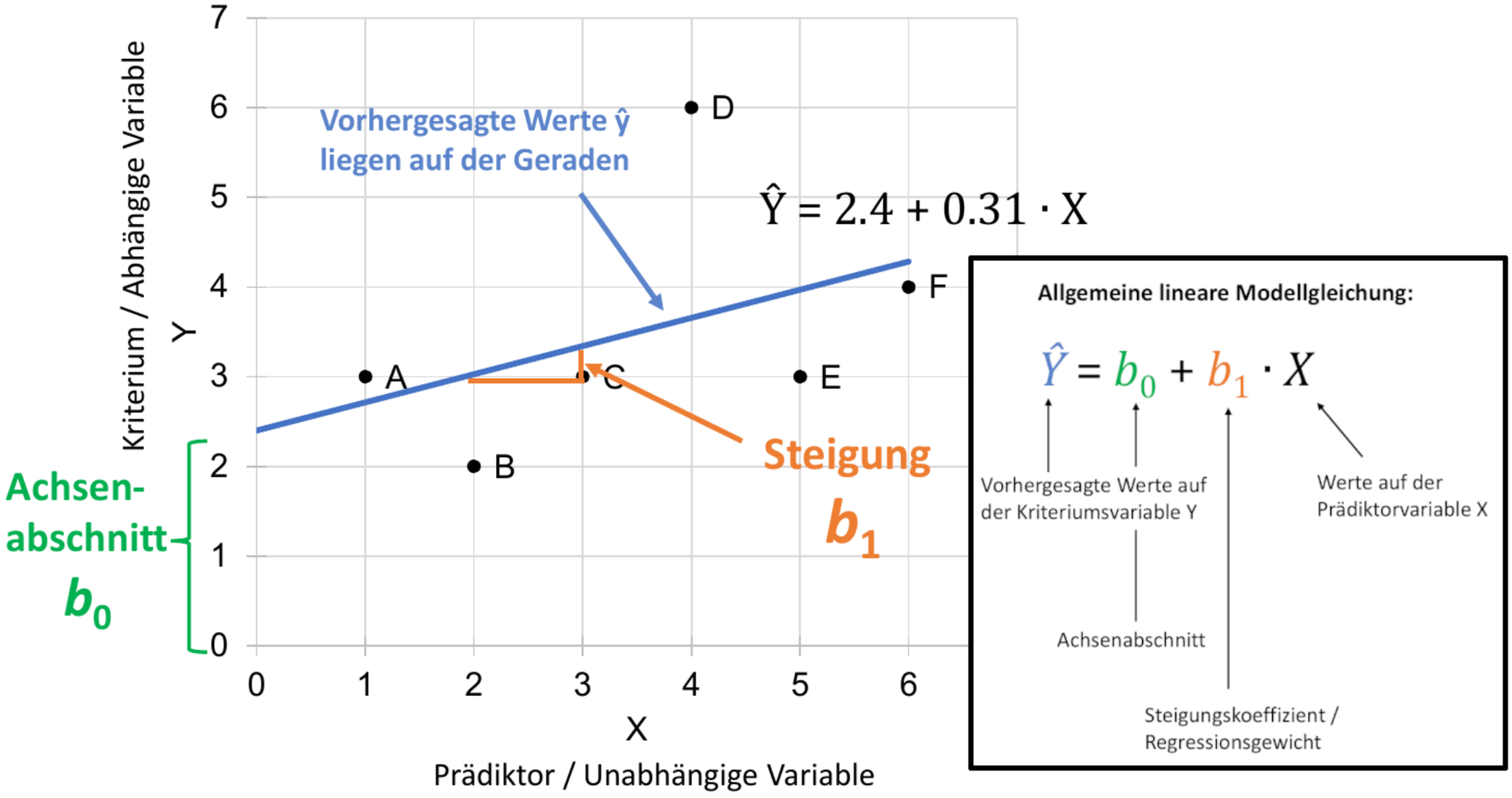
Regressionsgerade: Gerade mit dem kleinsten Abstand zu den beobachteten Werten (Methode kleinster Quadrate).

Residuen

- Ein Regressionsmodell kann in der Praxis nie alle beobachteten Werte perfekt vorhersagen.
- D.h. die beobachteten Werte $(y_A, y_B, y_C, \ldots)$ weichen fast immer von den vorhergesagten Werten $(\hat{y}_A, \hat{y}_B, \hat{y}_C, \ldots)$ ab.
- Diese Abweichung nennt man Residuum.
- Die Summe aller Regressionsresiduen ist gleich 0.
- Die Summe aller quadrierten Residuen ist minimal
  → **Methode der kleinsten Quadrate**



Regressionsparameter

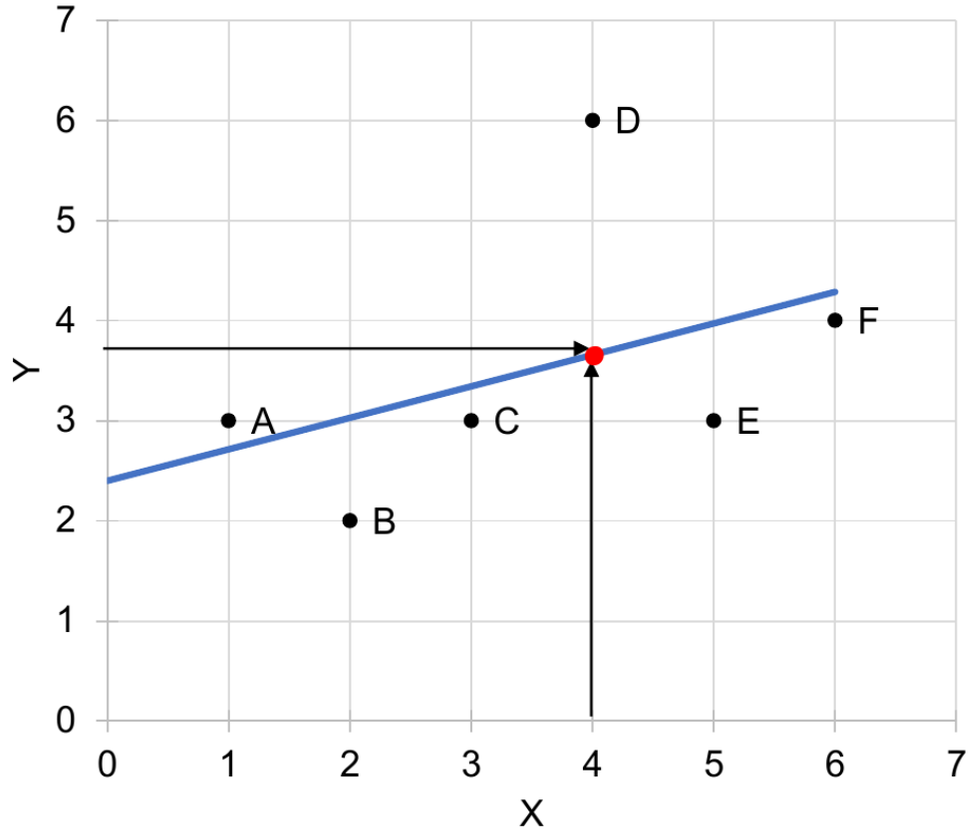


Modellvorhersagen

- Marvin hat den Wert 4 auf der X-Variable. Welchen Wert würden wir für ihn auf der Y-Variable erwarten?

$$\hat{Y} = 2.4 + 0.31 \cdot X$$

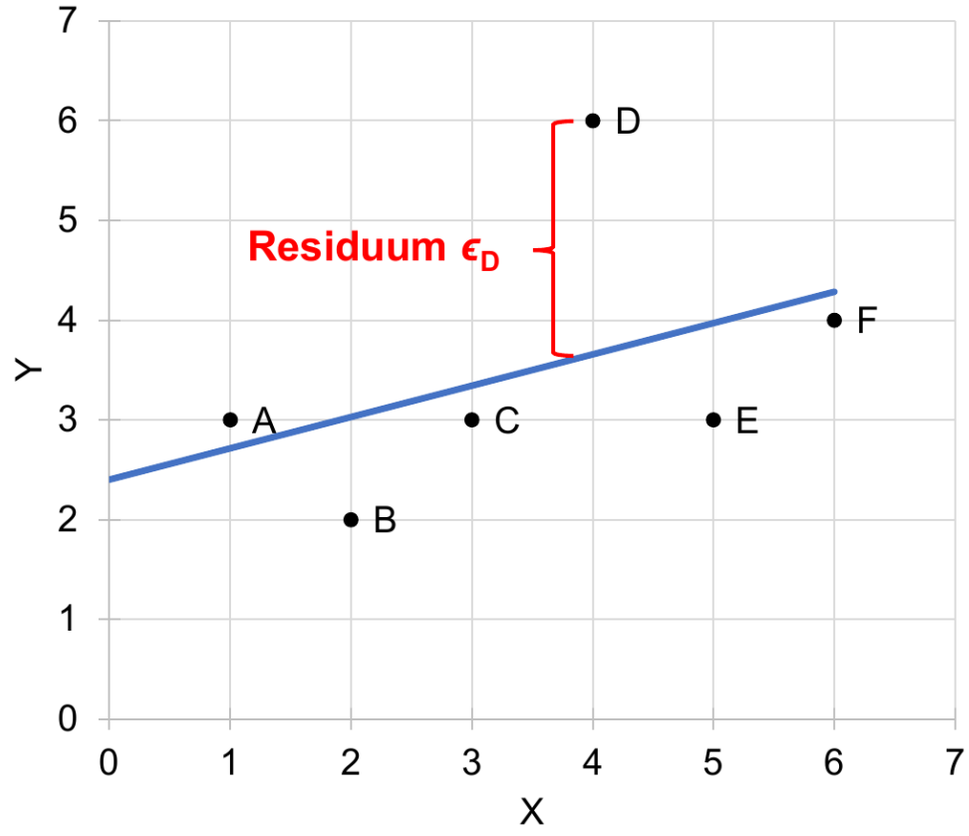
$$\hat{Y}_{\text{Marvin}} = 2.4 + 0.31 \cdot 4 = 3.64$$



Gleichungen für beobachtete Werte

- Die Regressionsgleichung für einen beobachteten Werte x_i enthält das Residuum für diesen Wert ϵ_i.
- Sie entspricht also der Gleichung für den vorhergesagten Wert mit Addition bzw. Subtraktion des Residuums:

$$y_i = b_0 + b_1 \cdot x_i + \epsilon_i$$



Mathematische Bestimmung der Regressionsparameter

Regressionsgewicht

Kovarianz von X und Y

Standardabweichung von y

$$b_1 = \frac{C\hat{o}v(X,Y)}{\hat{\sigma}_X^2} = r_{x,y}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Varianz von X

Standardabweichung von x

Achsenabschnitt

Mittelwert von *Y*

Mittelwert von *X*

$$b_0 = \overline{y} - b_1 \cdot \overline{x}$$

Regressionsgewicht

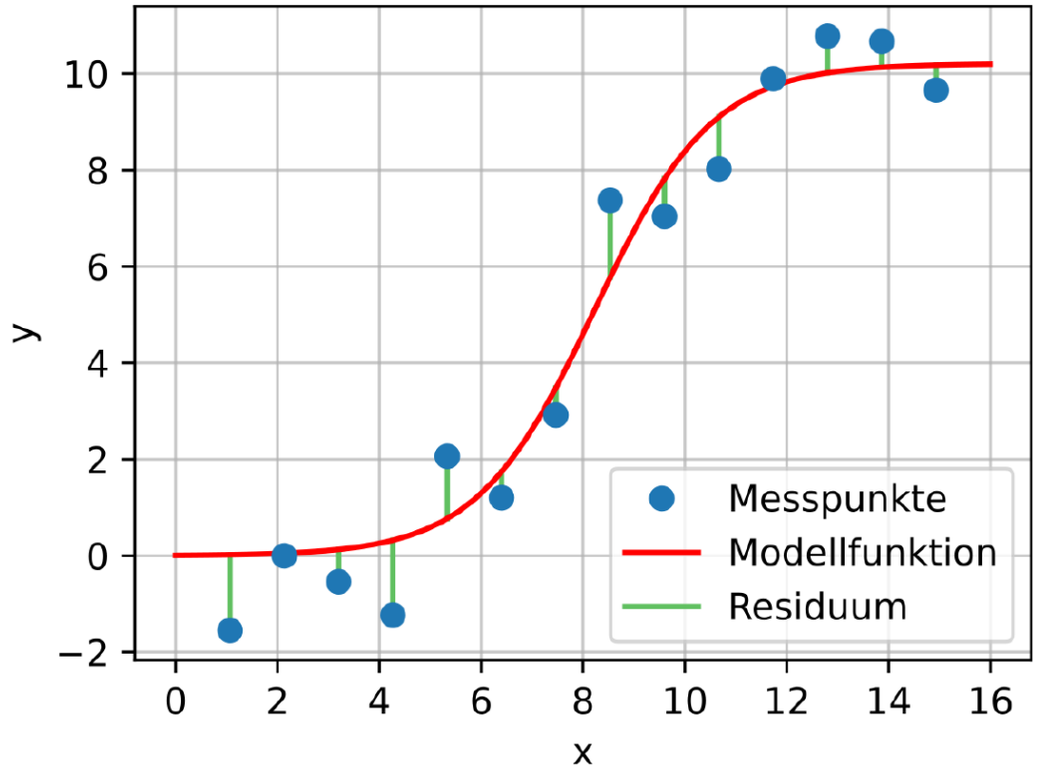
Korrelation vs. Regression

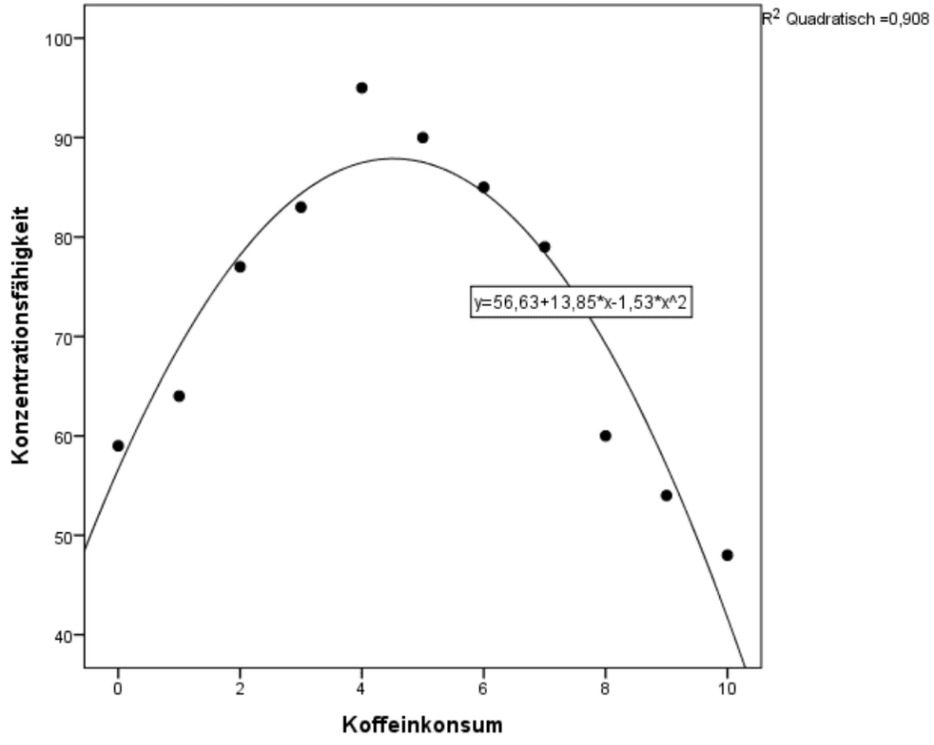
- Das Regressionsgewicht b_1 hängt von den Einheiten der Variablen ab. Es beantwortet die Frage „Um wie viel Einheiten erhöht sich die AV, wenn man die UV um 1 erhöht?“
- Der Korrelationskoeffizient r ist ein einheitsloses Maß für die Stärke des linearen Zusammenhangs
- Bei einer univariaten Regression (ein Prädiktor, eine abhängige Variable) lassen sich b_1 und r ineinander überführen:

$$r_{X,Y} = b_1 \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$$

- Die Regression ist ein vielseitiges Verfahren. Sie ermöglicht u.a. die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen mehreren Variablen (multivariate Regression) und von nicht-linearen Zusammenhängen.

Nicht-lineare Regressionen





Ausblick auf Statistik II: Multivariate Regression

Wenn wir die Unterschiede zwischen Personen in der Persönlichkeitsfunktion (= Varianz der AV) besser erklären wollen, können wir weitere Prädiktoren in das Regressionsmodell aufnehmen:

Modell mit 1 Prädiktor:

$$\text{Persönlichkeitsfunktion} = b_0 + b_1 \cdot \text{Smartphonestunden}$$

Modell mit 2 Prädiktoren:

$$\text{Persönlichkeitsfunktion} = b_0 + b_1 \cdot \text{Smartphonestunden} + b_2 \cdot \text{Optimismus}$$

Betrachten wir also mehr als einen Prädiktor, können wir (möglicherweise) bessere Vorhersagen treffen (und R^2 erhöhen).

Lineare Regressionen in JASP

Hypothese: Gewissenhaftere Personen haben weniger Schwierigkeiten beim Stillsitzen.

Koeffizienten

Modell		Unstandardisiert	Standardfehler	Standardisiert	t	p
H_0	(Konstante)	3.647	0.428		8.516	< .001
H_1	(Konstante)	7.141	1.574		4.537	< .001
	Gewissenhaftigkeit	−1.042	0.455	−0.509	−2.288	0.037

$$\text{Regressionsgleichung:} \quad \hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X$$
$$\hat{Y} = 7.141 + 1.042 \cdot X$$

Übung

Sie wollen die Lebenszufriedenheit von Personen mittels Extraversion vorhersagen.

1. Formulieren Sie eine gerichtete Zusammenhangshypothese.
2. Bestimmen Sie X (Prädiktor) und Y (Kriterium)
3. Berechnen Sie von Hand das Regressionsgewicht b1. Lassen Sie sich dafür zunächst in JASP die Deskriptiven Statistiken und den Korrelationskoeffizienten r zwischen X und Y ausgeben.
4. Berechnen Sie von Hand den Achsenabschnitt b0
5. Überprüfen Sie Ihre Berechnungen, indem Sie sich in JASP das Regressionsmodell ausgeben lassen.
   Menü: Regression -> Lineare Regression. Metrische Prädiktoren werden im JASP-Menü „Kovariaten“ genannt, nominale Prädiktoren (z.B. Gruppen) heißen „Faktoren“.
6. Lesen Sie die Regressionsparameter ab und notieren Sie die Regressionsgleichung.
7. Sagen Sie anhand der Regressionsgleichung den Wert der Lebenszufriedenheit für eine Person vorher, die einen Extraversionswert von 2 aufweist.

Anpassungsgüte: R^2

- Als standardisiertes Maß der Anpassungsgüte eines Regressionsmodells verwendet man den *Determinationskoeffizienten* R^2
- R^2 liegt **zwischen 0 und 1**.
- Ist über verschiedene Studien und Modelle hinweg vergleichbar
- **Interpretation von R^2:**
  - Anteil der Gesamtvarianz in der AV (z.B. Schwierigkeiten beim Stillsitzen), der durch systematische Varianz in der UV (z.B. Gewissenhaftigkeit) erklärt wird.

Modell-Zusammenfassung - Stillsitzen

Modell	R	R²	Korrigiertes R²	RMSE
H_0	0.000	0.000	0.000	1.766
H_1	0.509	0.259	0.209	1.570

Bei einer univariaten linearen Regression entspricht $R^2 = r^2$