

M24 Statistik 1: Sommersemester 2024

# Vorlesung 08: Inferenzstatistik

Prof. Matthias Guggenmos

Health and Medical University Potsdam



# Inferenzstatistik

# Statistischer Kennwert $\hat{\theta}$

- Wir führen ein neues Symbol ein, das von nun an Platzhalter für einen statistischen Kennwert steht, der auf Basis einer Stichprobe berechnet wurde:

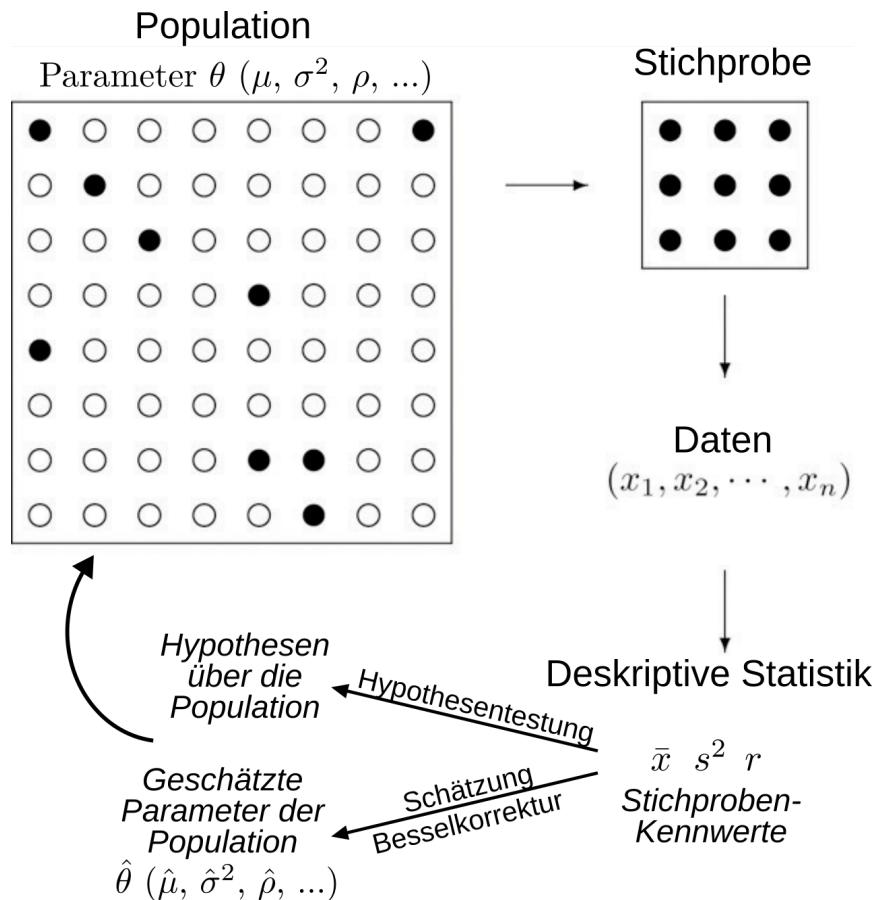
Statistischer Kennwert:  $\hat{\theta}$

## Definition

Als statistische Kennwerte werden quantitative Maße bezeichnet, die eine Eigenschaft von Stichprobendaten in einer Zahl zusammenfassen. Das Symbol  $\hat{\theta}$  dient dabei als allgemeines Symbol statistische Kennwerte.

- Zu statischen Kennwerten zählen nicht nur Lage- und Streuungsmaße, die eine Variable beschreiben (z.B. Mittelwert  $\bar{x}$ , Varianz  $\hat{\sigma}^2$ ), sondern auch zwei Variablen (z.B. Korrelation  $\hat{\rho}$ , Regressionskoeffizient  $\hat{b}_1$ ) oder noch mehr Variablen ( $\Rightarrow$  Statistik 2).

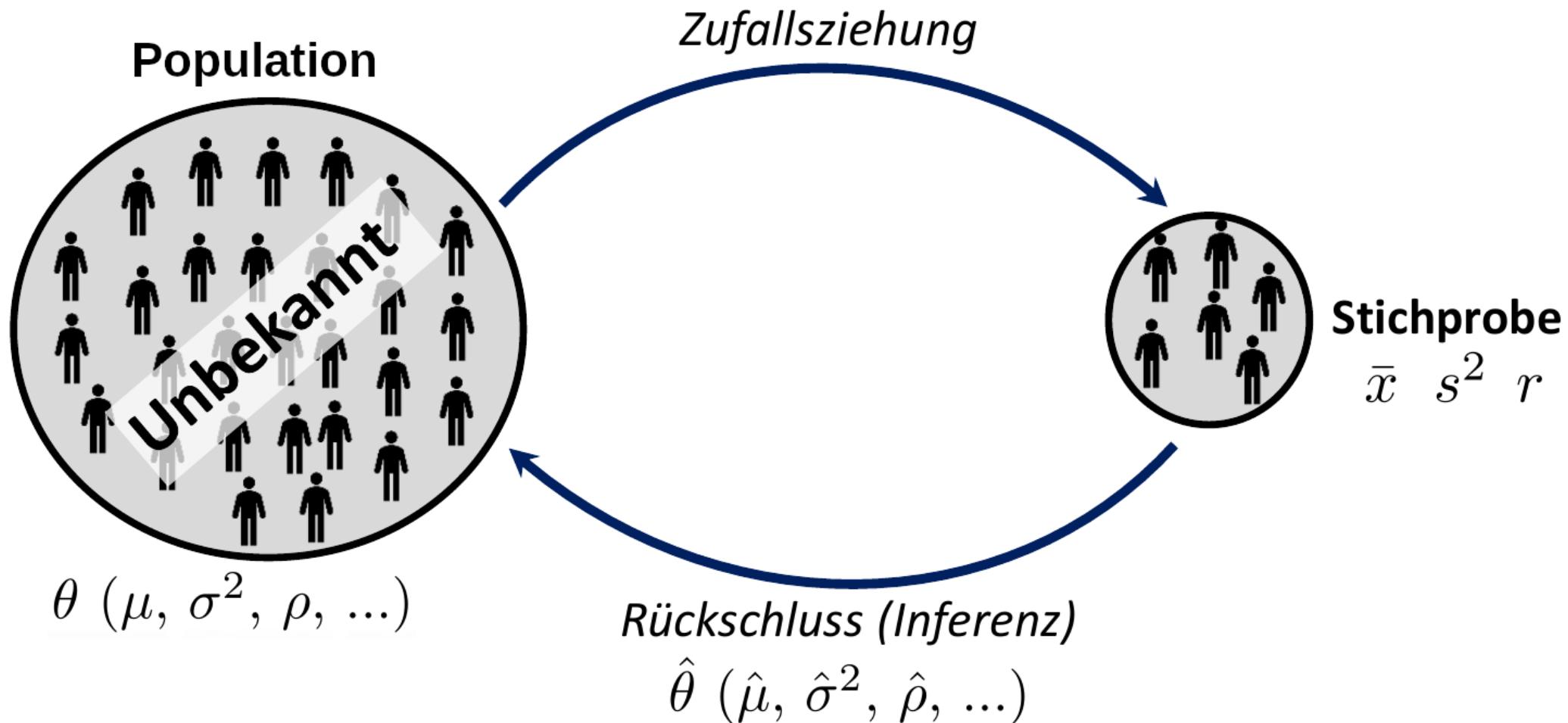
# Was ist Inferenzstatistik?



- In den vergangenen Vorlesungen haben wir kennengelernt, wie Merkmale in Stichproben quantitativ beschrieben werden können – wir haben **deskriptive Statistik** betrieben.
- In den meisten Fällen ist das Ziel in der Psychologie allerdings nicht die Beschreibung der spezifischen Stichprobe, sondern ein Rückschluss – eine Inferenz, eine Verallgemeinerung – auf die Population.
- Die Mathematik hinter diesem Inferenzprozess ist Gegenstand der **Inferenzstatistik**.

Die statistische Prozess in der Psychologie auf einen Blick: eine Teilmenge von Versuchspersonen wird aus der Population gezogen – die Stichprobe. In der Stichprobe werden Daten  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eines Merkmals  $X$  gemessen. Mit Methoden der deskriptiven Statistik werden **Kennwerte** in der Stichprobe beschrieben  $(\bar{x}, s^2, r)$ . Letztendlich ist das Ziel ein Rückschluss auf die wahren **Parameter**  $\theta$  der Population  $(\mu, \sigma^2, \rho)$  und das Testen von Hypothesen über die Population. Bildnachweis<sup>1</sup>

# Was ist Inferenzstatistik?

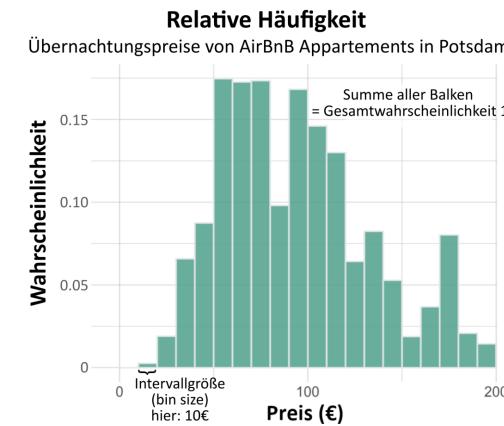
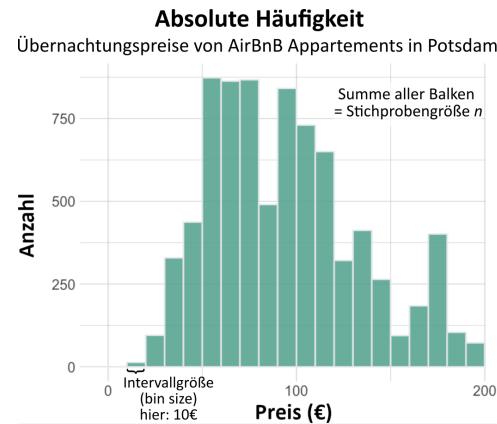


**Zentrale Frage:** Ist das Ergebnis meiner Studie eine gute Schätzung für die wahren Verhältnisse in der Population?

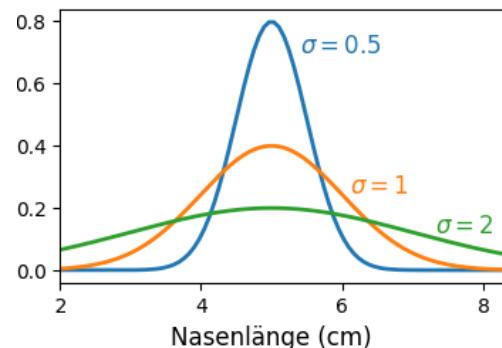
# Stichprobenverteilung

# Verteilung

- **Verteilungen** kennen wir bereits aus der Vorlesung 04 zu Lage- und Streuungsmaßen.
- Wir unterscheiden zwischen **empirischen Verteilungen**, die etwa in der Form von Histogrammen dargestellt werden...



- ... und **theoretischen Verteilungen**, die durch eine mathematische Funktion  $f(x)$  definiert sind und für jede Merkmalsausprägung  $x$  die Häufigkeit  $f(x)$  angeben:



**Normalverteilung:**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

# Stichprobenverteilung

Empirische und theoretische Verteilungen gibt es nicht nur für Merkmale  $X$ , sondern auch für statistische Kennwerte  $\hat{\theta}$ , die für das Merkmal  $X$  auf Basis einer Stichprobe bestimmt wurden — zum Beispiel Mittelwert  $\bar{x}$ . Man spricht dann von einer **Stichprobenverteilung**.

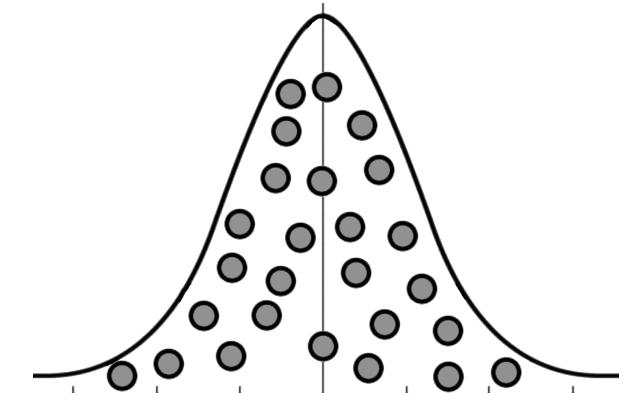
Wie aber kann ein statistischer Kennwert eine Verteilung aufweisen?

Zwei Möglichkeiten 

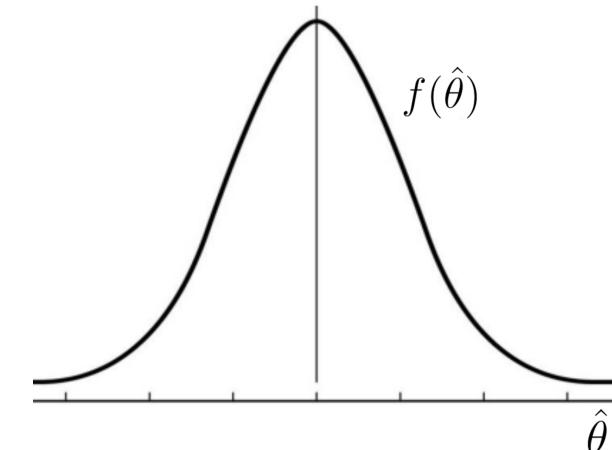
# Stichprobenverteilung

## Empirische Stichprobenverteilung

- Dieselbe Studie wurde *tatsächlich mehrmals* durchgeführt und es wurde jeweils der statistische Kennwert  $\hat{\theta}^{(j)}$  bestimmt (z.B.  $\bar{x}^{(j)}$ ).
- Die resultierende Verteilung der Kennwerte  $\hat{\theta}^{(j)}$  ist die empirische Stichprobenverteilung.
- Dies ist die Idee der **Metaanalyse**, die eine Vielzahl empirischer Studien zusammenfasst und analysiert ( $\Rightarrow$  Vorlesung 13).



Die empirische Stichprobenverteilung besteht aus tatsächlich erhobenen Studien. Die Verteilung empirischer Stichprobenkennwerte  $\hat{\theta}^{(j)}$  folgt im Idealfall (u.a. kein Publikationsbias, großes  $n$  pro Stichprobe) einer Normalverteilung.



Die theoretische Stichprobenverteilung ist durch eine Funktion  $f(\hat{\theta})$  gegeben. Ist die Stichprobengröße  $n$  groß, kann für die theoretische Stichprobenverteilung eine Normalverteilung angenommen werden.

## Theoretische Stichprobenverteilung

- Es gibt nur *eine* Studie mit Kennwert  $\hat{\theta}$  und die Überlegung ist, wie sich die Kennwerte bei einer hypothetischen wiederholten Durchführung der Studie verteilen würden.
- Die erwartete Verteilung lässt sich mathematisch ableiten und wird als theoretische Stichprobenverteilung  $f(\hat{\theta})$  bezeichnet.
- $f(\hat{\theta})$  erlaubt eine Einschätzung darüber, wie stabil die Kennwertschätzung bei (hypothetischen) Wiederholungen der Studie sein würde.
- Die theoretische Stichprobenverteilung ist der zentrale Ansatz der **Inferenzstatistik**.

# Experiment zur Stichprobenverteilung: Würfeln

# Stichprobenverteilung: Beispiel

Gedankenexperiment: Wir nehmen an, die Population besteht nur aus 9 Männern und wir kennen von allen Männern die Nasenlänge:

**Population (Nasenlängen in cm)**



In diesem Gedankenexperiment kennen wir also den wahren Mittelwert der Population. Er beträgt  $\mu = 6\text{cm}$ .

Nun betrachten wir eine Studie, in der 3 Männer untersucht werden. Wir ziehen also eine zufällige Stichprobe  $n = 3$  aus der Population.

# Stichprobenverteilung: Beispiel

Unsere zufällige Stichprobe könnte folgende drei Männer aus der Population umfassen:



... oder diese drei Männer:



... oder diese drei Männer:



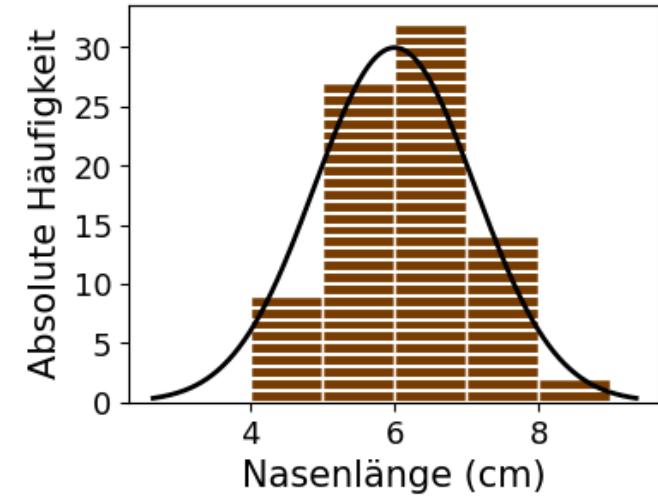
# Stichprobenverteilung: Beispiel

... oder diese drei Männer:



... und so weiter

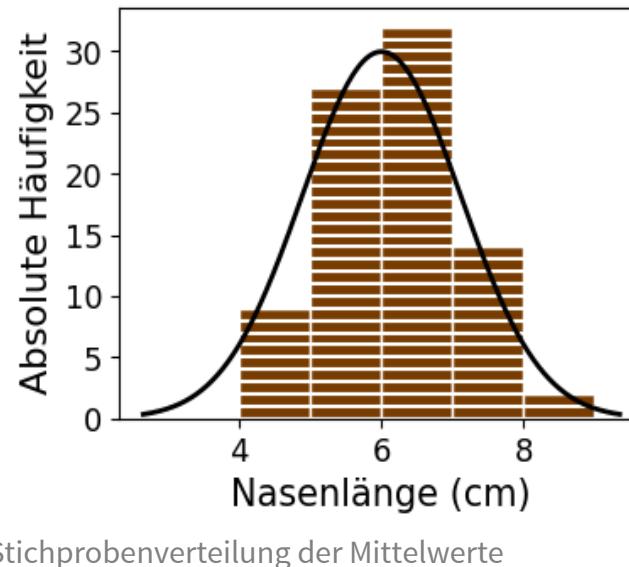
- Jeder Mittelwert wäre eine Schätzung für den wahren Populationswert.
- Die gesammelten Mittelwerte all dieser hypothetischen Studien können nun ebenfalls in ein Histogramm eingetragen werden (in braun).
- Wie wir noch sehen werden, lässt sich die Verteilung des Histogramms auch mathematisch beschreiben und führt zur theoretischen Stichprobenverteilung (im Bild rechts schon einmal durch die schwarze Kurve angedeutet).



# Stichprobenverteilung: Beispiel

Was lernen wir aus dieser Verteilung?

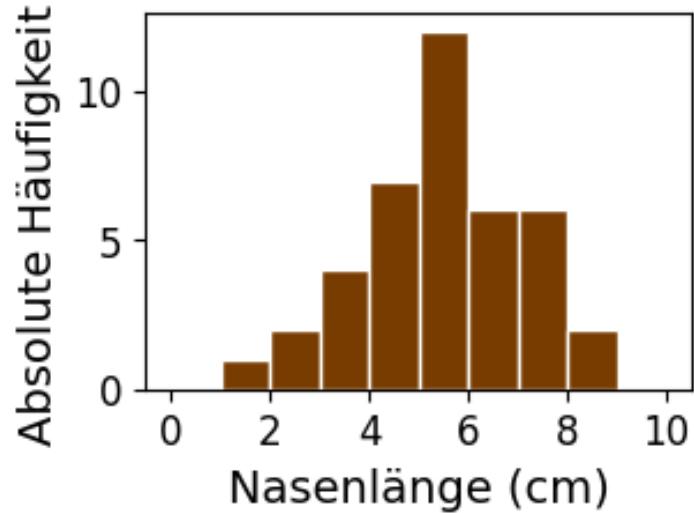
- Obwohl es nur einen *wahren Mittelwert* gibt, weichen die *einzelnen Studienergebnisse* mehr oder weniger davon ab. Die Studienergebnisse haben eine *Bandbreite*.
- Die Bandbreite gibt einen Anhaltspunkt für die Genauigkeit der Schätzung des Populationsmittelwertes, die mit einer einzelnen Stichprobe erzielt werden kann.
- Ein wichtiges Ziel der Inferenzstatistik ist, diese Bandbreite mit mathematischen Methoden abzuschätzen, so dass nicht wie im Gedankenexperiment tatsächlich viele Wiederholungen einer Studie notwendig sind.



# Stichprobenverteilung

Übertragen wir nun das Gedankenexperiment auf die Realität:

- Population seien nun **alle Männer in Deutschland**.
- Sie haben eine einzelne Studie durchgeführt (also eine Stichprobe aus der Population gezogen).



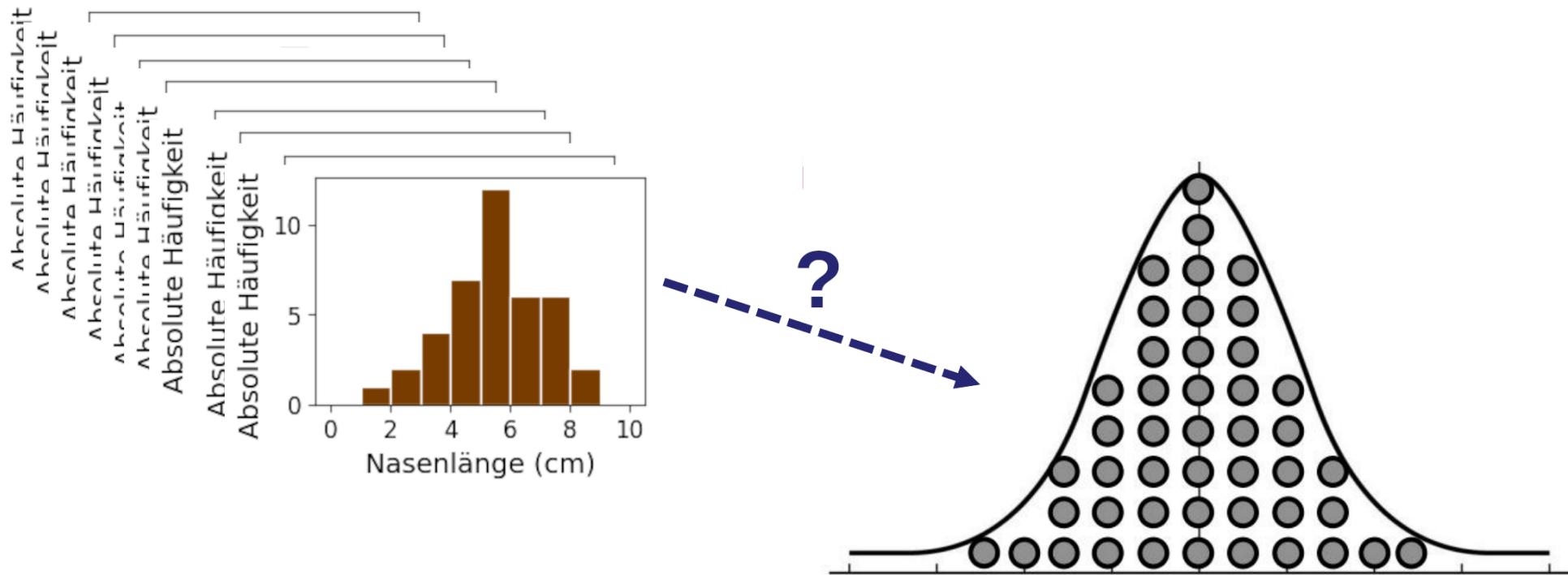
Das Histogramm zeigt nun wieder die Verteilung der Daten in einer einzelnen Studie!

- Als Mittelwert erhalten Sie  $\bar{x} = 5.5\text{cm}$ .
- Ihnen ist nun klar, dass dieser Mittelwert nur *eines von vielen möglichen Ergebnissen* ist.
- Beim Wiederholen derselben Studie würde also – rein zufallsbedingt – einen etwas anderen Mittelwert erhalten.

# Theoretische Stichprobenverteilung

Wie sieht die zu erwartende Stichprobenverteilung aus, wenn ich, anders als im Gedankenexperiment, nicht *alle möglichen* Stichproben betrachten kann?

Mit anderen Worten: kann man abschätzen, wie die Verteilung von Stichprobenkennwerten erwartbar aussehen würde, würden wir die Studie – rein hypothetisch – **unendlich oft wiederholen**? Die Antwort lautet JA und führt über die mathematische Herleitung der **theoretischen Stichprobenverteilung**.



# Theoretische Stichprobenverteilung

- Als erste Frage stellt sich: durch welche grundlegende **mathematische Funktion** lässt sich die theoretische Stichprobenverteilung beschreiben?
- Die Antwort auf diese Frage lässt sich aus dem **zentralen Grenzwertsatz** ableiten, demzufolge viele natürliche Merkmale normalverteilt sind, weil sie sich aus einer **Summe von Zufallseffekten** (Genetik, Umwelt, Erziehung, usw.) zusammensetzen.
- Die zentrale Erkenntnis ist nun, dass sich die gleiche Logik – **Summe von Zufallseffekten** – auf statistische Kennwerte  $\hat{\theta}$  wie den Mittelwert übertragen lässt!
- Häufig kann als Stichprobenverteilung daher die **Normalverteilung** angenommen werden.

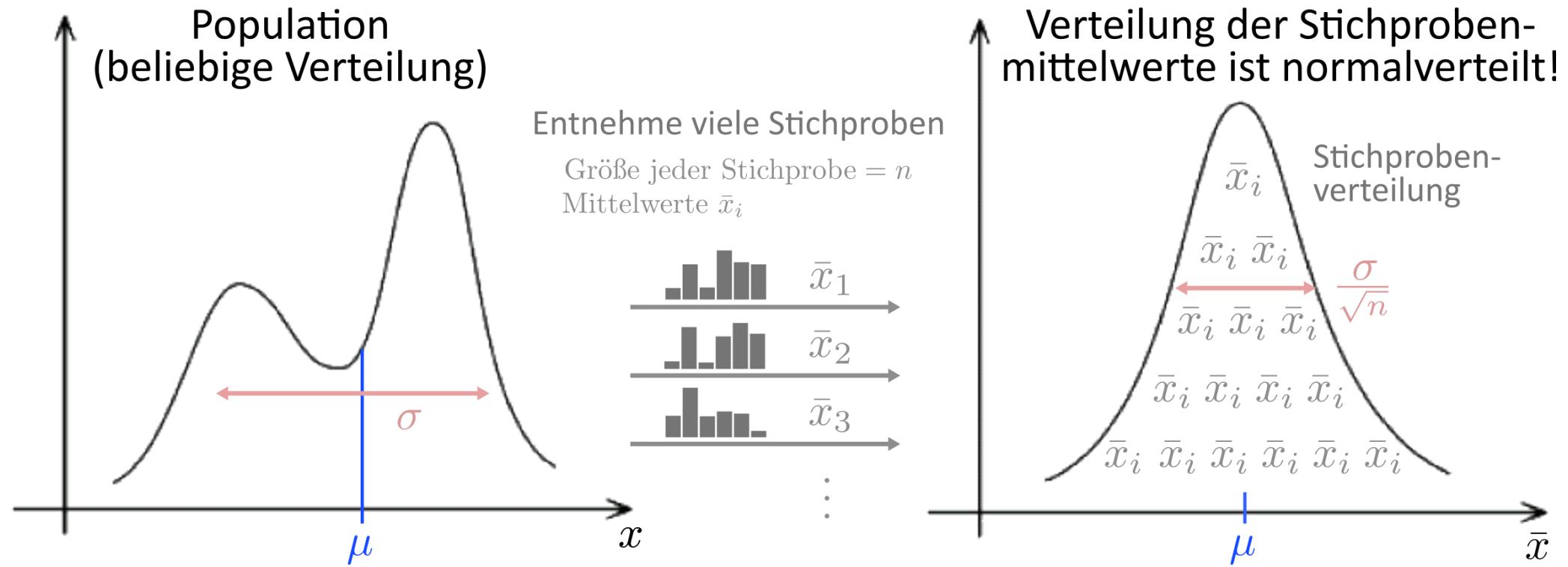
**Beispiel: statistischer Kennwert  $\hat{\theta} = \text{Mittelwert } \bar{x}$**

Nehmen wir  $j = 1..k$  hypothetische Studien an, die jeweils einen Mittelwert  $\bar{x}^{(j)}$  berechnen. Jeder Mittelwert basiert auf der **Summe ( $\Sigma$ )** von **zufällig gezogenen Daten** ( $x_i^{(j)}$ ) aus einer Stichprobe. Gemäß dem zentralen Grenzwertsatz erwarten wir daher im Grenzfall (d.h. Stichprobengröße gegen  $\infty$ ), dass die Mittelwerte einer **Normalverteilung** folgen.

$$\bar{x}^{(j)} = \frac{1}{n} \sum x_i^{(j)}$$

# Theoretische Stichprobenverteilung

- Nochmals in anderen Worten: ziehen wir sehr viele Stichproben aus der Population, berechnen für jede Stichprobe einen statistischen Kennwert  $\hat{\theta}$ , so sind diese Kennwerte häufig normalverteilt – und zwar **unabhängig von der Verteilung der zugrundeliegenden Merkmalsvariable  $X$ !**



# Theoretische Stichprobenverteilung

---

Zu beachten ist, dass der zentrale Grenzwertsatz streng genommen nur für den *Grenzwert* gilt, d.h. wenn die Stichprobengröße  $n$  sehr groß wird. Als Faustregel gilt für den Mittelwert etwa gilt, dass ab  $n = 30$  die Stichprobenverteilung hinreichend genau durch die Normalverteilung beschrieben werden kann.



Bei anderen statistischen Kennwerten, v.a. solchen, die auf einen endlichen Bereich beschränkt sind (z.B. Korrelation -1 bis +1, relative Häufigkeiten 0 bis 1), gilt die Normalverteilungs-Näherung bei typischen Stichprobengrößen wie  $n = 30$  nicht ohne Weiteres.

In diesem Fall werden andere – asymmetrische – Funktionen als die Normalverteilung für die Stichprobenverteilung angenommen ( $\Rightarrow$  Vorlesung 12).

---

# Theoretische Stichprobenverteilung

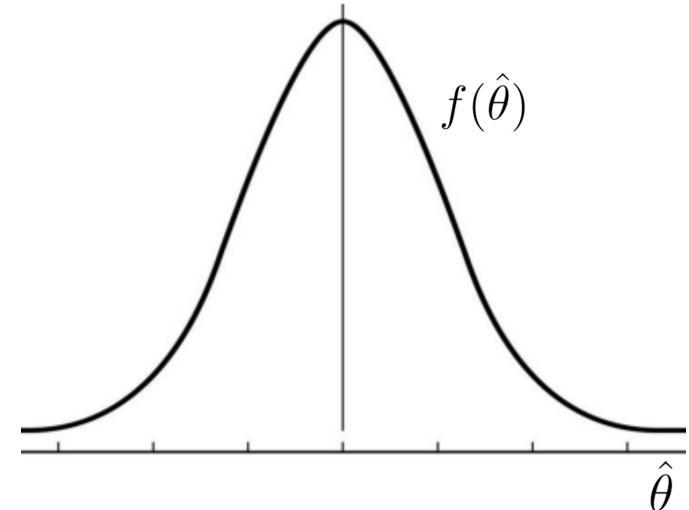
Die Form der theoretischen Stichprobenverteilung (SV) ist also geklärt (zumindest im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$ ): **Normalverteilung**.

$$f(\hat{\theta}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\theta}-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Dass eine Zufallsvariable wie hier  $\hat{\theta}$  normalverteilt ist, wird häufig auch mit folgender Notation zum Ausdruck gebracht:

$$\hat{\theta} \sim \mathcal{N}(\mu_{SV}, \sigma_{SV})$$

(in Worten: *wir nehmen an, dass potentielle Stichprobenkennwerte  $\hat{\theta}$  einer Normalverteilung  $\mathcal{N}$  mit Mittelwert  $\mu_{SV}$  und Standardabweichung  $\sigma_{SV}$  folgen*)



Zwei Informationen fehlen nun noch:

1. Was ist der **Mittelwert** ( $\mu_{SV}$ ) der theoretischen Stichprobenverteilung?
2. Was ist die **Streuung** ( $\sigma_{SV}$ ) der theoretischen Stichprobenverteilung?

# Mittelwert der theoretischen Stichprobenverteilung

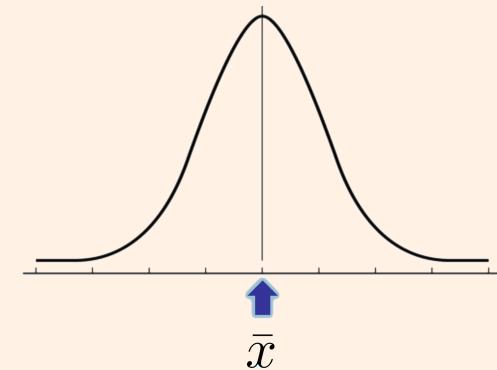
- Kann von einer Normalverteilung für die Form der Stichprobenverteilung ausgegangen werden, ist die beste Schätzung  $\hat{\mu}_{SV}$  für den Mittelwertsparameter  $\mu_{SV}$  der Stichprobenverteilung der statistische Kennwert selbst (z.B.  $\bar{x}, \hat{\sigma}$ ).
- Der Mittelwert  $\hat{\mu}_{SV}$  der Stichprobenverteilung ist identisch mit der besten Kennwertschätzung  $\hat{\theta}$  des wahren Populationsparameters  $\theta$ .

**Beispiel: statistischer Kennwert  $\hat{\theta} = \text{Mittelwert } \bar{x}$**

Ist der Mittelwert der betrachtete statistische Stichprobenkennwert so gilt:

$$\hat{\mu}_{SV} = \bar{x}$$

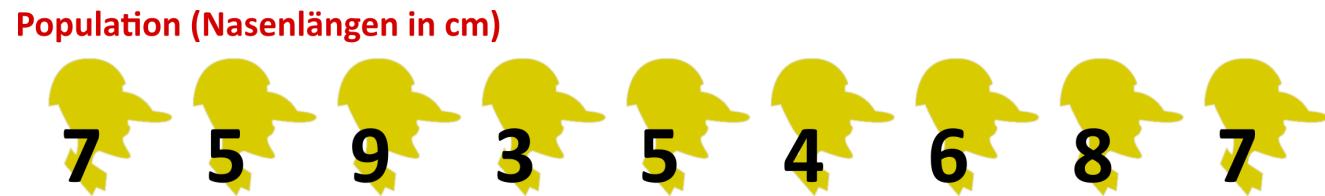
Die theoretische Stichprobenverteilung wird also in diesem Fall um den Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  herum konstruiert.



# Streuung der theoretischen Stichprobenverteilung

Bleibt die Frage nach dem Streuungsparameter  $\sigma_{SV}$  der theoretischen Stichprobenverteilung: woher wissen wir, wie die Ergebnisse von hypothetischen Stichproben streuen würden?

Gehen wir dazu zu unserem Gedankenexperiment zurück:



Was würde die Streuung der hypothetischen Einzelstichproben verkleinern?

1. Wenn die Stichproben größer ist als lediglich  $n = 3$  Personen (z.B.  $n = 6$ )  
→ damit liegen die Mittelwerte der Einzelstichproben idR näher am wahren Mittelwert!
2. Wenn die Population grundsätzlich eine geringere Streuung  $\sigma$  aufweist  
→ damit würden auch die Mittelwerte der Einzelstichproben weniger streuen.

Der Streuungsparameter  $\sigma_{SV}$  der theoretischen Stichprobenverteilung muss also eine Funktion der Stichprobengröße  $n$  und der Streuung  $\sigma$  in der Population sein.

$$\sigma_{SV} = f(n, \sigma)$$

# Streuung der theoretischen Stichprobenverteilung

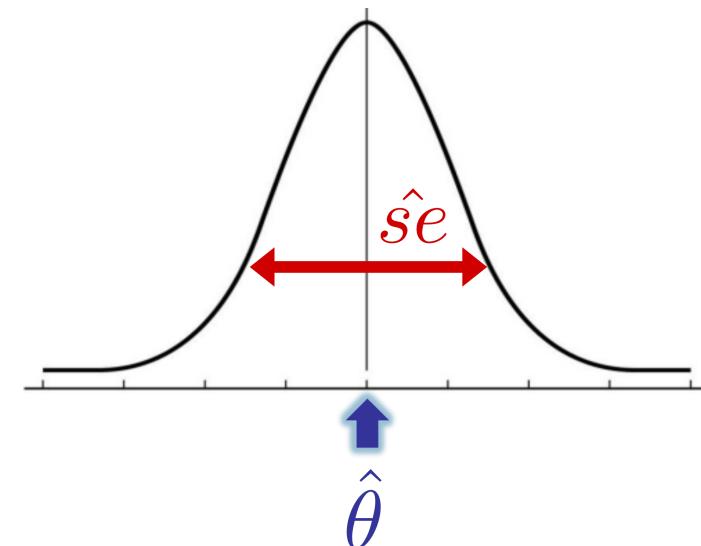
- Kann für die Stichprobenverteilung eine Normalverteilung angenommen werden, so wird die Streuung  $\sigma_{SV}$  als **Standardfehler** (engl. *standard error*) oder  $se$  bezeichnet.

$$\sigma_{SV} = se$$

- Da wir in der Regel  $\sigma_{SV}$  bzw.  $se$  nicht kennen und als  $\hat{se}$  schätzen müssen heißt es in der Praxis:

$$\hat{\sigma}_{SV} = \hat{se}$$

- Der Standardfehler ist die Standardabweichung der normalverteilten Stichprobenverteilung um den Mittelwert  $\hat{\theta}$ .



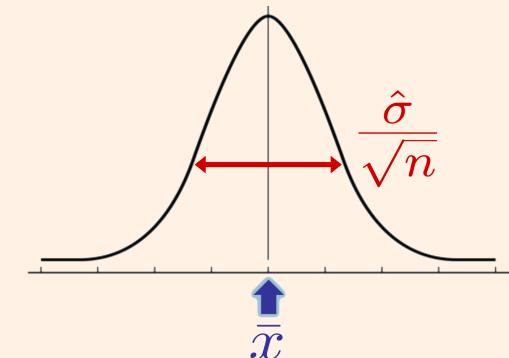
# Beispiel: Standardfehler des Mittelwertes

Beispiel: statistischer Kennwert  $\hat{\theta} = \text{Mittelwert } \bar{x}$

Beim statistischen Kennwert "Mittelwert" berechnet sich der Standardfehler als Standardabweichung der Population  $\sigma$  geteilt durch die Wurzel aus der Stichprobengröße  $n$  ("Wurzel-N-Gesetz"):

$$\text{Standardfehler des Mittelwertes: } \hat{\sigma}_{\text{SV}} = \hat{s}e = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

In der Regel kennen wir die wahre Standardabweichung  $\sigma$  der Population nicht und schätzen sie deshalb (wie gehabt) als  $\hat{\sigma}$  auf Basis der Stichprobe. Siehe Bonuscontent für eine **Herleitung des Standardfehlers des Mittelwertes**.



- Intuitiv sagt der Standardfehler des Mittelwertes aus, wie sicher wir uns bei der Bestimmung des Mittelwertes sein können:
  - Großer Standardfehler: Gemessener Mittelwert ist eher unsicher
  - Kleiner Standardfehler: Gemessener Mittelwert ist eher sicher

# Zwischenfazit

Die theoretische Stichprobenverteilung folgt einer **Normalverteilung** (falls  $n$  groß genug) mit einem **Mittelwert, der dem statistischen Kennwert entspricht**, und einer Standardabweichung, die sich aus der Populationsstreuung  $\sigma$  und der Stichprobengröße  $n$  berechnet (der sog. **Standardfehler**).

- Der Standardfehler gibt darüber Auskunft, wie verlässlich unsere Schätzung des statistischen Kennwertes ist.
- Wie wir noch sehen werden umfasst  $1\hat{se}$  die mittleren 68% der möglichen Ergebnisse in der theoretischen Stichprobenverteilung.

Nehmen wir an, die Nasenlängen der Männer in unserer Studie weisen eine durchschnittliche Länge von  $6\text{cm}$  auf und einen Standardfehler (des Mittelwertes) von  $0,5\text{cm}$ .

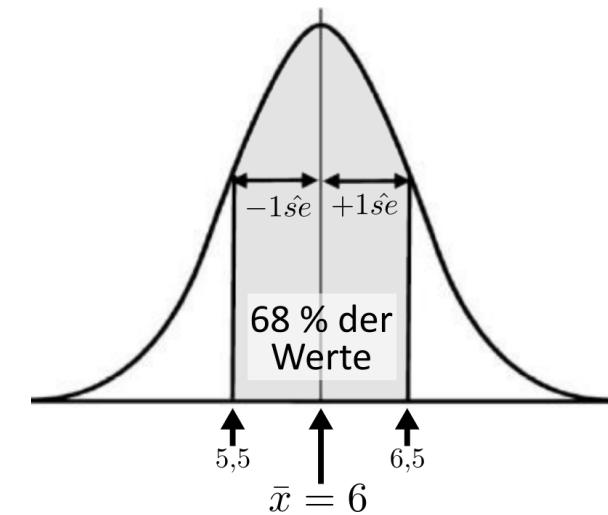


Wir können damit sagen, dass der Bereich

$$\bar{x} \pm \hat{se} = 6 \pm 0,5 = [5,5; 6,5]$$

68% der Stichprobenverteilung umfasst.

In Vorlesung 12 werden wir noch feststellen, dass wir (leider) nicht schlussfolgern können, dass der wahre Populationsmittelwert  $\mu$  mit 68% Wahrscheinlichkeit in diesem Intervall liegt.



# Interpretation des Standardfehlers

Wie kann man den Wert eines Standardfehlers interpretieren?

- Prinzipiell gilt: je kleiner, desto präziser ist die Kennwertschätzung auf Basis der Stichprobe.
- Allerdings ist der Standardfehler keine standardisierte Größe wie z.B. Cohen's  $d$ , sondern hängt von den gewählten Einheiten der Variable  $X$  ab.
  - Interpretation ohne Kenntnis der Einheit/Messskala nicht möglich.
- Anhaltspunkt: Vergleich/Verhältnis des Standardfehlers zum Wertebereich Skala (z.B. Ratingskala 1-10) oder zur Standardabweichung in der Stichprobe:



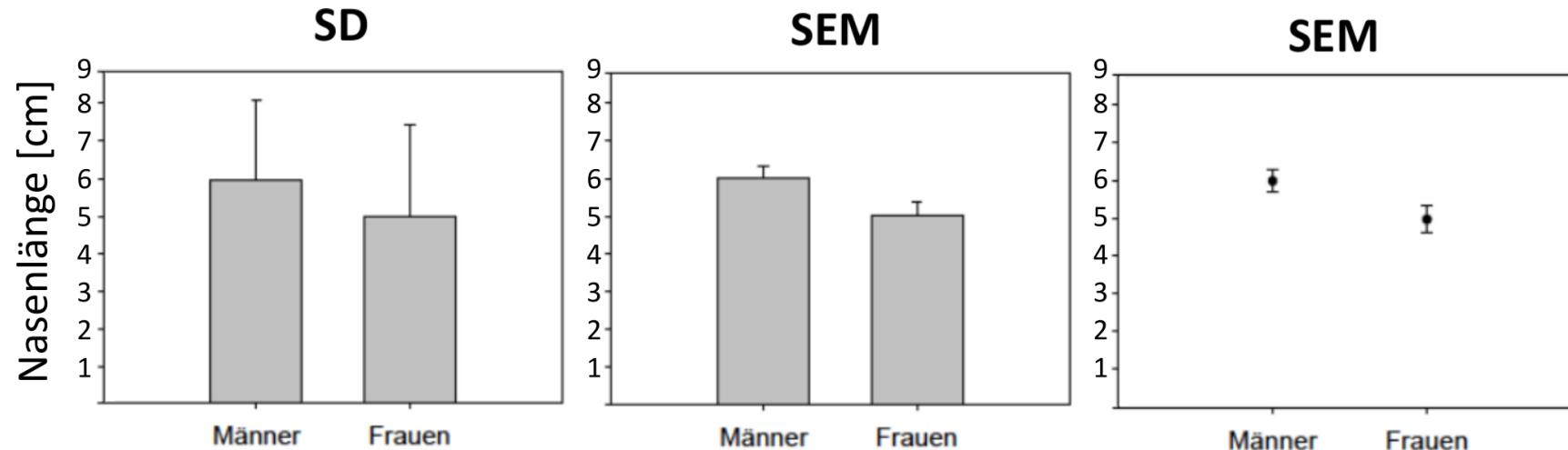
Beispiel

Im Nasenlängen-Beispiel galt  $\bar{x} = 6\text{cm}$  und  $\hat{s}_e = 0,5\text{cm}$ . Nehmen wir an, die Standardabweichung von Nasenlängen in der Stichprobe wurde zu  $5\text{cm}$  gemessen, also  $\hat{\sigma} = 5\text{cm}$ . In diesem Fall beträgt der Standardfehler – unser Maß für die Präzision der Mittelwertmessung – 10% der Streubreite des Merkmals in der Stichprobe. Dies entspricht einer recht guten/präzisen Schätzung des Mittelwertes.

(Als kleine Übung: wie hoch müsste in diesem Beispiel die Stichprobenzahl gewesen sein? (Antwort:  $n = 100$ )

# Verwendung des Standardfehlers in der Praxis

- Im Text wird der Standardfehler des Mittelwertes oft in folgender Form angegeben:  
 $M = 3.2 \pm 0.6$  (SEM).
  - Wichtig: es sollte prinzipiell immer angegeben werden, um was für ein Streuungsmaß es sich handelt (SEM ist hier die geläufige englische Abkürzung für *standard error of the mean*).
- In Abbildungen wird der Standardfehler ähnlich wie die Standardabweichung häufig in Form von Fehlerbalken dargestellt:

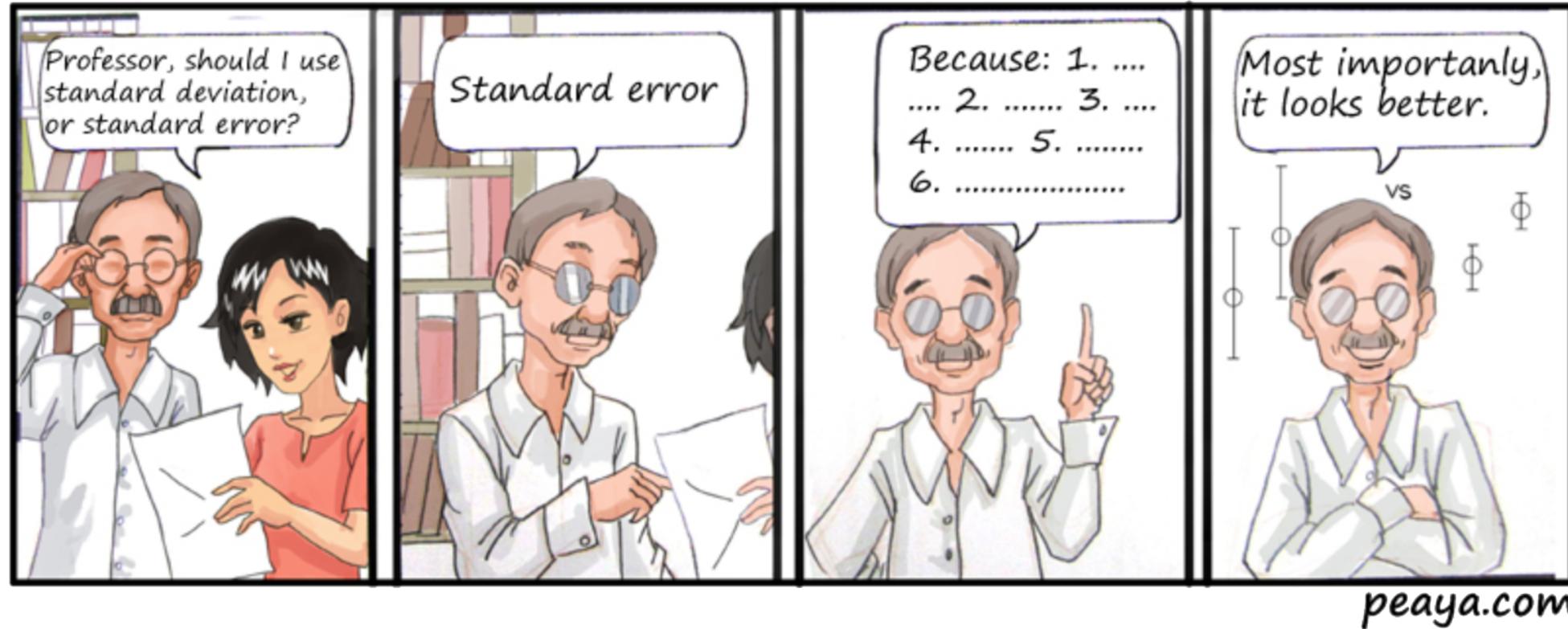


- Ist das Hauptinteresse ob sich Experimentalbedingungen **in ihrem Mittelwert unterscheiden**, ist der **Standardfehler aussagekräftiger** als die Varianz oder Standardabweichung.
- Siehe Bonuscontent für eine **Übersicht von Standardfehlern** für bekannte statistische Kennwerte.

# [ Zusammenfassung ]

- Das grundsätzliche **Ziel der Inferenzstatistik** ist es die **Verallgemeinerbarkeit von Stichprobenkennwerten auf die Population** zu untersuchen.
- Eine wichtige Frage ist dabei, wie präzise **Schätzungen von Populationskennwerten  $\theta$  auf Basis der Stichschätzungen  $\hat{\theta}$**  sind.
- Generelle Idee: Was würde passieren, wenn die Studie unendlich oft durchgeführt ( $j=1,2,\dots$ ) und jeweils der Stichprobenkennwert  $\hat{\theta}^{(j)}$  bestimmt würde?
- Dies führt zur **theoretischen Stichprobenverteilung  $f(\hat{\theta})$** .
- Für  $f(\hat{\theta})$  kann aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes häufig eine **Normalverteilung** angenommen werden.
- Der Mittelwert  $\mu_{SV}$  der normalverteilten Stichprobenverteilung ist der Kennwert  $\hat{\theta}$  selbst und ihre Standardabweichung  $\sigma_{SV}$  wird als **Standardfehler  $se$**  bezeichnet.
- Beispiel Kennwert  $\hat{\theta} = \text{Mittelwert } \bar{x}$ :  $\hat{\mu}_{SV} = \bar{x}$ ,  $\hat{\sigma}_{SV} = \hat{se} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ .

## Standard deviation or error?



Bildnachweis<sup>2</sup>

# Bonuscontent

# Herleitung des Standardfehlers des Mittelwertes

- Der Standardfehler des Mittelwertes ist ein Maß für die Variabilität der Stichprobenmittelwerte  $\bar{x}$   
– dies können wir zunächst über die Varianz zum Ausdruck bringen:

$$se^2 = Var(\bar{x})$$

- Wir wissen, dass  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum X_i$ , also:

$$se^2 = Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right)$$

- Um das  $\frac{1}{n}$  aus der Varianz herausziehen zu können, versichern wir uns einer kleinen Rechenregel:

$$Var(aX) = \frac{1}{n}(aX_i - a\bar{x})^2 = \frac{a^2}{n}(X_i - \bar{x})^2 = a^2 Var(X)$$

- Daraus folgt:

$$se^2 = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum X_i\right)$$



# Herleitung des Standardfehlers des Mittelwertes

Zwischenergebnis       $se^2 = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum X_i\right)$

- Die Summe in der Varianz stört noch. Glücklicherweise gilt, dass die Varianz der Summe von unabhängigen Zufallsvariablen  $X_i$  gleich der Summe der Varianzen ist, d.h.

$$Var\left(\sum X_i\right) = \sum Var(X_i)$$

- Daraus folgt:

$$se^2 = \frac{1}{n^2} \sum Var(X_i) = \frac{1}{n^2} (n \cdot Var(X_i)) = \frac{1}{n} Var(X_i)$$

- Nun sind wir fast am Ziel. Da die Varianz der  $X_i$  nichts anderes als die quadrierte Standardabweichung  $\sigma^2$  ist, gilt:

$$se^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{bzw.} \quad se = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



# Übersicht Standardfehler

| Maß                               | Standardfehler   | Einschränkung   |
|-----------------------------------|--|---|
| Mittelwert                        | $\hat{se}(\bar{x}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$                        |   |
| Median                            | $\hat{se}(\tilde{x}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ | Annahme: Normalverteilung von $X$   |
| Varianz                           | $\hat{se}(s^2) = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \hat{\sigma}^2$                      | Annahme: Normalverteilung von $X$   |
| Standardabweichung                | $\hat{se}(s) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2(n-1)}}$                         | Näherung; Annahme: Normalverteilung von $X$   |
| Korrelation                       | $\hat{se}(\hat{\rho}) = \sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2}{n-2}}$                 | Näherung; Hinweis: laut neuerer Forschung ist<br>$\hat{se}(\hat{\rho}) = \sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2}{n-3}}$ sogar ein noch besserer Schätzer <sup>3</sup> |
| Cohen's d (abhängige Messungen)   | $\hat{se}(d) = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{d^2}{2n}}$                        | Näherung  |
| Cohen's d (unabhängige Messungen) | $\hat{se}(d) = \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2} + \frac{d^2}{2(n_1+n_2)}}$    | Näherung; Quelle <sup>4</sup>   |
| Nützliches Paper <sup>5</sup>     |  |   |



# Fußnoten

1.

[https://stats.libretexts.org/Bookshelves/Introductory\\_Statistics/Introductory\\_Statistics\\_\(Shafer\\_and\\_Zhang\)/01%3A\\_Introduction\\_to\\_Statistics/1.01%3A\\_Basic\\_Definitions\\_and\\_Conc](https://stats.libretexts.org/Bookshelves/Introductory_Statistics/Introductory_Statistics_(Shafer_and_Zhang)/01%3A_Introduction_to_Statistics/1.01%3A_Basic_Definitions_and_Conc)

2. <http://www.peaya.com/peaya.php?comicsid=1005>

3. Gnambs T. A Brief Note on the Standard Error of the Pearson Correlation. <https://psyarxiv.com/uts98/>

4. n :

5. Harding B, Tremblay C, Cousineau D (2014) Standard errors: A review and evaluation of standard error estimators using Monte Carlo simulations. *TQMP* 10:107–123.