

M24 Statistik 1: Wintersemester 2024 / 2025

# Vorlesung 02: Messen in der Psychologie

Prof. Matthias Guggenmos

Health and Medical University Potsdam





Zur Erinnerung – folgende Hypothesen haben Sie das letzte Mal aufgestellt:

**Hypothese 1:** Die Blaufärbung der Haare ist ein reines Tik-Tok-Phänomen. *Betroffene sollten daher im Mittel mehr Zeit auf der Social-Media-Plattform TikTok verbringen als Nicht-Betroffene.*

**Hypothese 2:** Paradoxa wird durch eine virale Infektion verursacht. *Die Blutproben von Betroffenen sollten daher im Mittel eine höhere Konzentration von Entzündungsmarkern aufweisen als von Nicht-Betroffenen.*

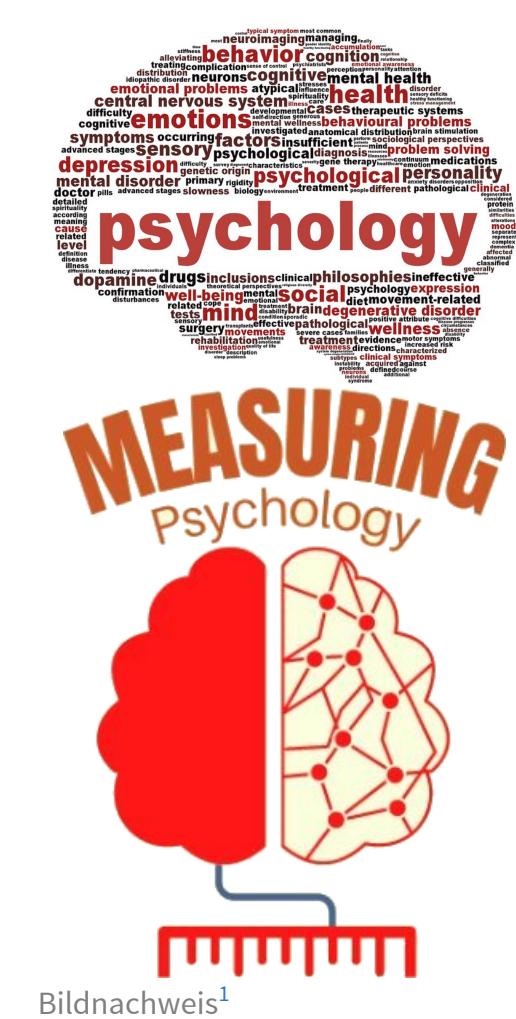


Ihr Auftrag ist nun, Studien zur Überprüfung dieser Hypothesen zu entwickeln.

Die Fragen für heute sind: Mit welchen **Messinstrumenten** können die Daten zur Überprüfung der Hypothese erhoben werden? Welche **Form** haben die dabei erhobenen Daten? Wie könnte das **Design** solcher Studien aussehen?

# Ohne Maßband oder Waage – Wie misst man Psyche?

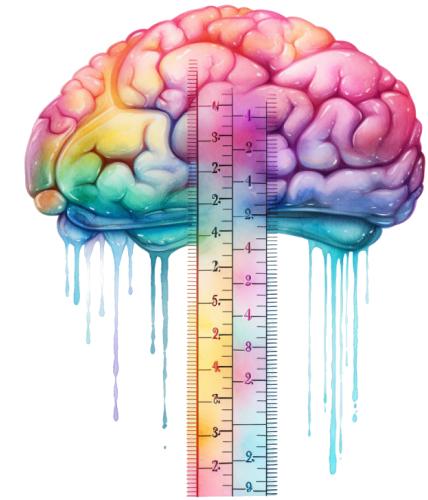
- Die meisten Variablen menschlicher Psychologie sind keine “natürlichen Größen”, die sich mit konventionellen Instrumenten (z.B. Meterstab) messen ließen.
- In Abwesenheit natürlicher Größen entwickeln Psycholog:innen **Konstrukte**, die verschiedene Aspekte menschlicher Psychologie beschreiben.
  - Beispiele: Optimismus, Ängstlichkeit, Intelligenz
- Diese Konstrukte basieren auf bestimmten Vorstellungen, Theorien oder Modellen über die Psyche und damit häufig auf starken **Annahmen**.
- Um messbar zu werden, müssen Konstrukte **operationalisiert** werden, d.h. es müssen **manifeste** messbare **Variablen** definiert werden, die mithilfe geeigneter **Messinstrumente** und **Messvorschriften** erhoben werden können.
  - Beispiele: Fragebögen, Interviews, Feldstudien, Experimente



Bildnachweis<sup>1</sup>

# Skala und Skalenniveau

- Messinstrumente und Messvorschriften machen psychologische Konstrukte also messbar.
- "Messbar" heißt, dass verschiedenen **Ausprägungen des Konstruktes** systematisch verschiedene Zahlenwerte oder Kategorien zugeordnet werden.
- Durch diese Zuordnung definieren Messinstrumente und Messvorschriften eine **Skala**, ähnlich dem Meterstab, der Längen in Zentimeter oder Millimetern bemisst.
- Beispiele für Skalen in der Psychologie:
  - IQ-Wert im Intelligenztest
  - Summe der Punkte in einem Fragebogen
  - Rating eines einzelnen Items ("Wie optimistisch schätzen Sie sich auf einer Skala von 1-10 ein?")
  - Cortisolkonzentration im Blut zur Messung des Stresslevels
  - Elektrisches Spannung einer EEG-Elektrode
- Skalen werden in verschiedene **Skalenniveaus** unterteilt, deren Aussagekraft sich unterscheidet:  
**Nominalskala, Ordinalskala, Intervallskala, Verhältnisskala**



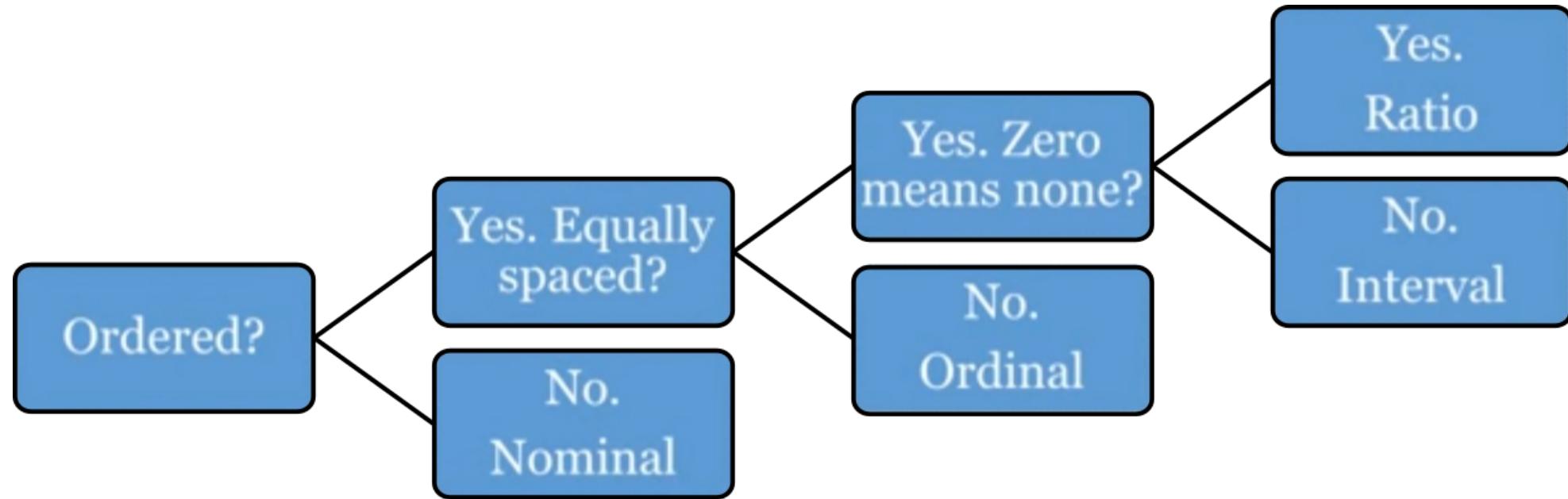
# Skalenniveaus

Kategoriale Skalenniveaus		
Nominalskala	Verschiedene Ausprägungen des Merkmals entsprechen qualitativen Kategorien.	Studiengang (Psychologie, Medizin, ...), Geschlecht (männlich / weiblich)
Ordinalskala	Wie Nominalskala, aber die Kategorien lassen sich in eine natürliche Reihenfolge bringen; daher häufig mit Zahlen benannt, diese Zahlen stellen aber kein "Ausmaß" dar.	Militärischer Dienstgrad (Gefreiter, Leutnant, Major, Oberst, General), Bildungsstand (kein Schulabschluss, Mittelschule, Abitur, Studium, Promotion)
Metrische Skalenniveaus (immer Zahlenwerte!)		
Intervallskala	Zahlenwerte; Abstände zwischen zwei Werten sind interpretierbar	Temperatur (Grad Celsius), IQ (96, 114, ...)
Verhältnisskala	Wie Intervallskala, aber es gibt einen natürlichen Nullpunkt und daher können Verhältnisse gebildet werden (z.B. "doppelt so viel Einkommen in €")	Reaktionszeit in einem Experiment (Sekunden), Körpergröße (173cm, 199cm, ...)



Skalenniveaus werden manchmal mit den Etagen eines Hauses verglichen, wobei die Nominalskala die niedrigste Etage darstellt. In der Abbildung wird zusätzlich zwischen Intervall- und Absolutskala unterschieden. Im Gegensatz zur Verhältnisskala, bei der die Einheiten häufig frei gewählt werden können (Meter oder Zentimeter, Euro oder Cent, ..), basiert die Absolutskala auf der natürlichen Einheit "Anzahl" (Anzahl Personen, Anzahl richtiger Antworten, usw.). Davon abgesehen sind Verhältnis- und Absolutskala identisch und die genannte Unterscheidung ist ohne weitere praktische Relevanz und wird hier nicht weiter beachtet.

# Skalenniveau: Entscheidungsbaum



Bildnachweis<sup>2</sup>



**Achtung bei Nominalskalen:** zum Teil werden den Ausprägungen einer nominalskalierten Variable Zahlen zugeordnet (die sog. Kodierung – Beispiel Haarfarbe: “hellblond” = 1, “dunkelblond” = 2, “hellbraun” = 3, usw.). Diese Kodierung ändert aber nichts an den Eigenschaften der Variable, insbesondere dürfen nominalskalierte Variablen auch nach der Kodierung nicht miteinander verechnet werden (d.h. keine Addition, kein Verhältnis, kein Mittelwert, usw.).

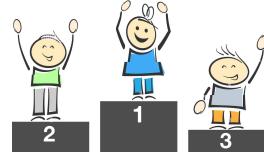


Codierung:

1      2      3      4      5      6

# Datentypen

- Die mit einer Skala gemessene Variablen können verschiedene **Datentypen** aufweisen:

Datentyp	Definition	Mögliche Skalenniveaus	Beispiele
<i>Kategorial</i>	Qualitative Kategorien	Nominal, Ordinal	Haarfarbe (=Nominal), Schulabschluss (=Ordinal) 
<i>Dichotom</i> (Spezialfall von <i>Kategorial</i> )	Exakt zwei mögliche qualitative Kategorien	Nominal, Ordinal	Nichtraucher/Raucher (=Nominal), Nicht-studiert/Studiert (=Nominal oder Ordinal) 
<i>Diskret</i>	Quantitative Zahlenwerte mit Stufen	Ordinal, Intervall, Verhältnis	Position beim Marathon (=Ordinal), IQ-Punkte (=Intervall), Anzahl Geschwister (=Verhältnis) 
<i>Kontinuierlich</i>	Quantitative Zahlenwerte ohne Stufen (stetig)	Intervall, Verhältnis	Grad Celsius (=Intervall), Reaktionszeit (=Verhältnis) 

# Skalenniveaus & Datentypen: Zusammenfassung

Skalenniveau	Datentyp	Messbare Eigenschaften			Beispiele	
Nominal	kategorial, dichotom	Häufigkeiten			Studiengang, Geschlecht	
Ordinal	kategorial, dichotom, diskret	Häufigkeiten	Rangfolge		Dienstgrad, Rating-Skala (falls Abstände nicht interpretierbar), Bildungsstand	
Intervall	diskret, kontinuierlich	Häufigkeiten	Rangfolge	Abstand interpretierbar	Temperatur in °C, Rating-Skala (falls Abstände interpretierbar), IQ	
Verhältnis	diskret, kontinuierlich	Häufigkeiten	Rangfolge	Abstand interpretierbar	Natürlicher Nullpunkt	Temperatur in Kelvin, Anzahl Freunde, Körpergröße

# Anwesenheitsliste



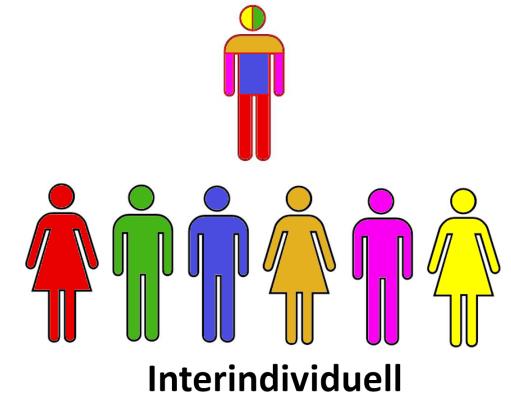
TraiNex

# Was ist eine Variable?

- Die Grundannahme psychologischer Forschung ist, dass sich Erleben und Verhalten durch bestimmte Merkmale messen und beschreiben lässt.
- Diese Merkmale sind in aller Regel *variabel*, sowohl innerhalb eines Individuums (intraindividuell), als auch zwischen Individuen (interindividuell).

Variables Merkmal = Variable

Intraindividuell



## Beispiele

- Intraindividuelle Variable (unterschiedliche Werte bei einer Person über die Zeit): Müdigkeit einer Person über den Tagesverlauf; Hippocampusvolumen einer Person zu verschiedenen Jahreszeiten.
- Interindividuelle Variable (unterschiedliche Werte bei verschiedenen Personen): Alter verschiedener Personen; Intelligenzquotient verschiedener Personen.

# Manifeste und Latente Variablen

## Manifeste Variable

Direkt messbar oder beobachtbar

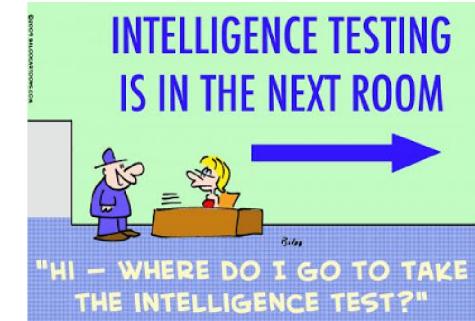
Alter, Geschlecht, Herzfrequenz, Schulnoten, Einkommen



## Latente Variable

Nicht direkt messbar oder beobachtbar  
– die Ausprägungen der Variablen müssen erschlossen werden

Intelligenz, Einstellung gegenüber Minderheiten, Wohlbefinden



In der Psychologie basieren viele Variablen auf theoretischen Konstrukten (wie Intelligenz) und können daher nicht direkt beobachtet, abgefragt oder gemessen werden 😞.

Latente Variable sind daher eher die Regel als die Ausnahme.

# Abhängige und unabhängige Variablen

In empirischen Studien wird eine Variable häufig in verschiedenen Versuchsbedingungen (oder Versuchsgruppen) gemessen.

Da die Bedingungen (Gruppen) gewissermaßen *variiert* werden, bezeichnet man auch sie als *Variablen*, genauer als **unabhängige Variablen** (UV). Sie sind unabhängig, weil sie nicht von anderen Variablen abhängen und von den Durchführenden einer Studie frei bestimmt werden.

Die tatsächlich gemessene Variable (z.B. IQ) wird demgegenüber als **abhängige Variable** (AV) bezeichnet, da die Werte der Variable in Abhängigkeit von der jeweiligen Versuchsbedingung/Gruppe (also der UV) unterschiedlich ausfallen können.

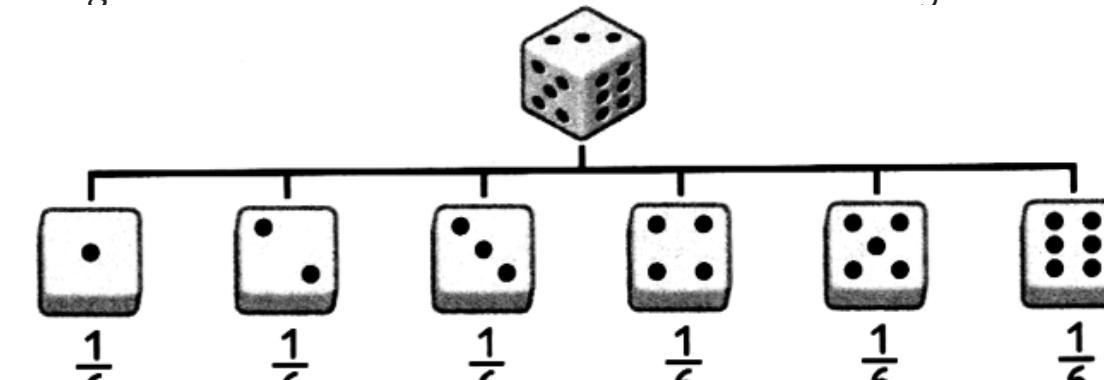


## Beispiele

<b>Unabhängige Variable (UV)</b>	Versuchsbedingungen (z.B. mit versus ohne Aufmerksamkeit, Messzeitpunkt 1 versus Messzeitpunkt 2); Gruppenzugehörigkeit (z.B. Patienten vs. Kontrollen)
<b>Abhängige Variable (AV)</b>	z.B. IQ-Score, Herzrate, Fragebogenscore, Anzahl von Fehlern in einer Aufgabe

# Zufallsvariable

- Eine **Zufallsvariable** ist eine Variable, die zu einem gewissen Grad vom Zufall — oder uns zufällig erscheinenden Faktoren — abhängt.
- In der Psychologie kommt “Zufall” an zwei Stellen ins Spiel:
  - **Messfehler** (unbekannte, uns zufällig erscheinende, Einflüsse auf die Genauigkeit der Messung).
  - Beim **zufälligen Ziehen einer Stichprobe** aus der Population.
- Trotz des Faktors “Zufall” kann man Zufallsvariablen mithilfe von **Wahrscheinlichkeitsverteilungen** mathematisch beschreiben.
  - Beispiel: jeder Wurf eines Würfels ist zufällig, aber wir können sagen, dass die Wahrscheinlichkeit jeder Zahl exakt  $1/6$  ist → Würfelaugen folgen einer *uniformen Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem natürlichen Zahlenraum [1; 6]*.



Bildnachweis<sup>3</sup>

# Zufallsvariable

- Praktisch gesehen, sind nahezu alle Variablen in der Psychologie Zufallsvariablen, daher meint “Variable” in aller Regel “Zufallsvariable”
- Die Ausnahme der Regel wäre der seltene Fall, dass eine Variable *für alle Personen der Population bekannt* ist und ihre Messung *keinem Messfehler* unterliegt (z.B. Geburtsjahr aller bisherigen amerikanischen Präsidenten).
- Zufallsvariablen werden mit großen Lettern bezeichnet, i.d.R.  $X$  (oder  $Y/Z$  falls zwei/drei Zufallsvariablen betrachtet werden).
- Einzelne Beobachtungen einer Zufallsvariable (z.B. der gemessene IQ von *bestimmten Personen*) werden mit kleinen Lettern bezeichnet ( $x_i, y_i, z_i$ ), wobei  $i$  der Durchnummerierung dient.

Beispiel: die Zufallsvariable  $X$  bezeichnet in der Tabelle den in einer Stichprobe gemessenen Intelligenzquotienten

$X$	
$x_1$	99
$x_2$	112
$x_3$	104
...	...

# Das Experiment

# Was ist ein Experiment?

- Ein Experiment ist eine Überführung der Forschungsfrage in eine objektivierbare und quantifizierbare Untersuchung
- Im Zentrum des Experimentes steht die **unabhängige Variable**, durch die das Experiment in zwei oder mehr **experimentelle Bedingungen** unterteilt wird.

## Definition

Ein **Experiment** ist eine **systematische Veränderung in einer unabhängigen Variable** (Treatment / Manipulation), mit dem Ziel, ursächlich eine **Veränderung in der abhängigen Variable** (d.h. der gemessenen Variable) herbeizuführen.

... was heißt das konkret?

# Beispiel

Was schmeck besser: Coca-Cola oder Pepsi Cola?

**Experiment:** Blindverkostung durch N Versuchspersonen, die jeweils Coca-Cola und Pepsi Cola in einem neutralen Gefäß probieren und auf einer Skala von 1 bis 10 bewerten.

- **Unabhängige Variable:** Getränkemarke (zwei Werte: Cola, Pepsi; kategorial)
- **Abhängige Variable:** Bewertung durch die Versuchspersonen (10 Werte, 1-10; diskret)



Bildnachweis<sup>4</sup>



Bildnachweis<sup>5</sup>

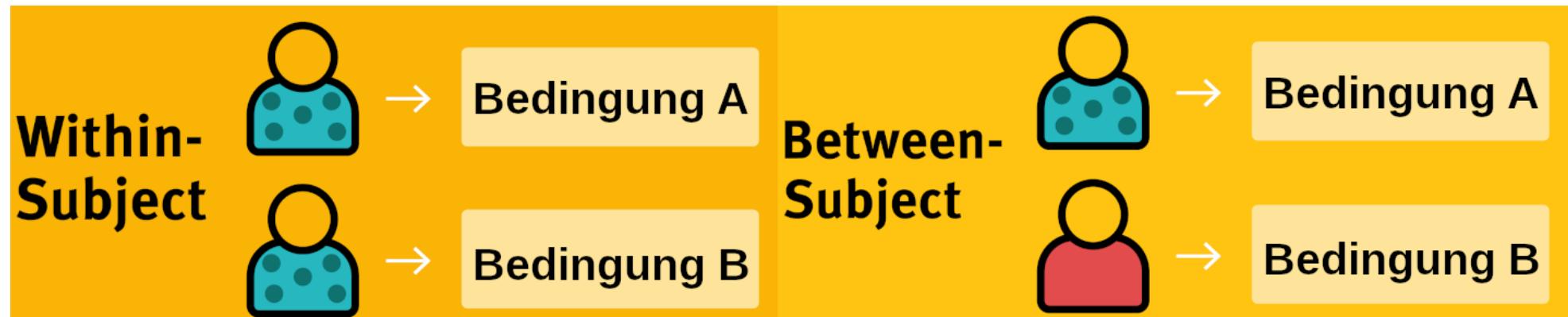
Im genannten Beispiel handelt sich um ein Experiment mit **within-subject Design**, da jede Versuchsperson alle (hier zwei) Bedingungen der unabhängigen Variable durchläuft.



Überlegen Sie: wie könnte das Experiment in einem between-subject Design aussehen?

# Within- und between-subject Design

Design	Definition	Beispiel
<i>Within-subject</i> (oder auch: <i>Design mit Messwiederholung</i> )	Alle Versuchspersonen durchlaufen alle Experimentalbedingungen	Jede VP probiert Cola und Pepsi
<i>Between-subject</i>	Verschiedene Versuchspersonengruppen durchlaufen jeweils nur eine Experimentalbedingung	Gruppe 1 probiert Cola, Gruppe 2 probiert Pepsi
<i>Mixed</i>	Mindestens eine Experimentalbedingung wird innerhalb der Teilnehmer variiert ( <i>within-subject</i> ) und eine Experimentalbedingung zwischen den Teilnehmern variiert ( <i>between-subject</i> )	Gruppe 1 probiert Cola mit und ohne Eis, Gruppe 2 probiert Pepsi mit und ohne Eis



Bildnachweis<sup>6</sup>

# Beispiel between-subject Design: das Asch-Experiment

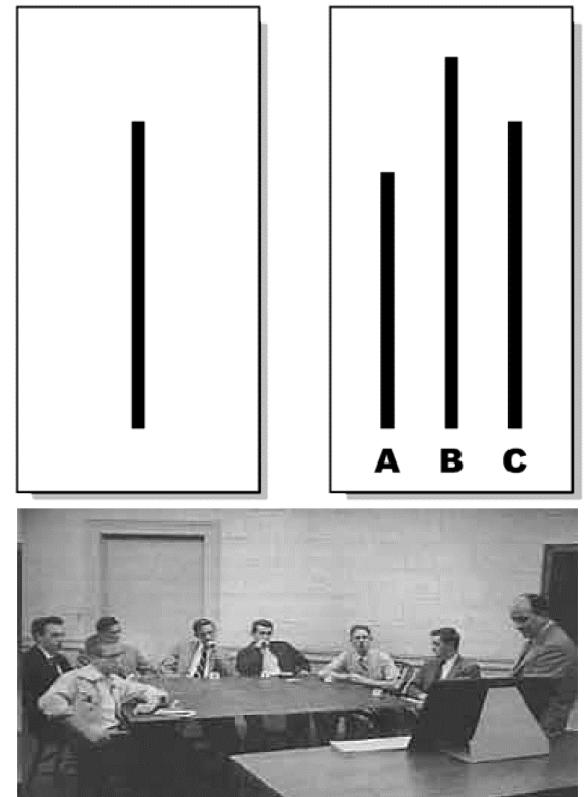
- Konstrukt: gruppenkonformes Verhalten
- Experiment: die Versuchsperson (VP) musste auswählen, welche von drei Vergleichlinien dieselbe Länge wie eine Referenzlinie hat. Außer der VP waren noch weitere vorgebliche VPen anwesend (in Wirklichkeit Vertraute der Experimentalleitung – die “Konfidenten”).
  - **Unabhängige Variable:** zwei Gruppen (Gruppe A: Konfidenten geben richtige Antworten; Gruppe B: Konfidenten geben in 2/3 der Fälle eine falsche Antwort)
  - **Abhängige Variable:** Prozentzahl der Fehler der VP

## Ergebnis:

- 1% Fehlentscheidungen in Kontrollgruppe
- 37% Fehlentscheidungen in der Experimentalgruppe

→ Die Operationalisierung des Konstruktes “gruppenkonformes Verhalten” entspricht hier also einem experimentellen Kontrast:

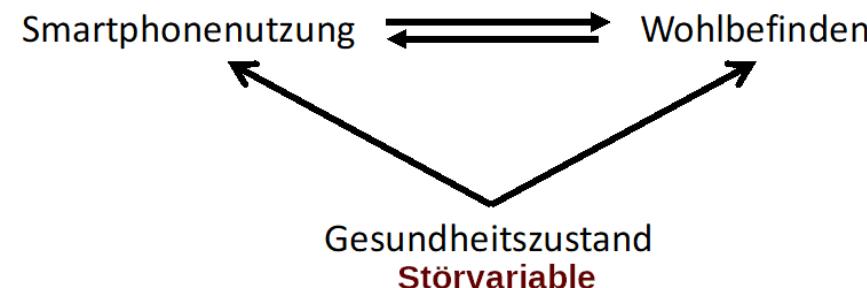
Fehlerrate Experimentalgruppe – Fehlerrate Kontrollgruppe



# Ist jede wissenschaftliche Studie ein Experiment?

Nein.

- In **Beobachtungsstudien** werden Phänomene oder Zusammenhänge *ohne Manipulation einer unabhängigen Variable* untersucht.
- Beispiele: Quasi-Experiment, Längsschnittstudien, Fall-Kontroll-Studie
- Im Gegensatz zum Experiment können in Beobachtungsstudien **keine kausalen Schlüsse** gezogen werden
- Warum? Jeder Unterschied zwischen Gruppen oder Zusammenhang zweier Variablen zwischen Personen kann immer auch durch (bekannte oder unbekannte) Störvariablen verursacht sein.



→ Mehr dazu im Modul Forschungsmethoden!

# Darstellung kategorialer und metrischer Daten

# Darstellung kategorialer Daten: die Häufigkeitstabelle

- **Reminder:** Kategoriale Variable = qualitative Ausprägungen; keine natürliche Reihenfolge

Häufigkeitsverteilung von Haarfärbungen unter Paradoxikern (N=800)		
Haarfarbe	Absolute Häufigkeit (n)	Relative Häufigkeit (%)
Blau (gefärbt)	440	55 %
Grün (gefärbt)	152	19 %
Braun (natürlich)	104	13 %
Blond (natürlich)	64	8 %
Schwarz (natürlich)	40	5 %



Bildnachweis<sup>7</sup>

- **Absolute Häufigkeiten:** geben an, wie oft die jeweiligen Ausprägungen einer Variable vorkommen (Anzahl)
- **Relative Häufigkeiten:** geben an, wie häufig die jeweiligen Ausprägungen in Bezug zu allen Fällen vorkommen (Prozent oder Anteil)

# Darstellung kategorialer Daten: die Häufigkeitstabelle

The screenshot shows the JASP software interface with the following components:

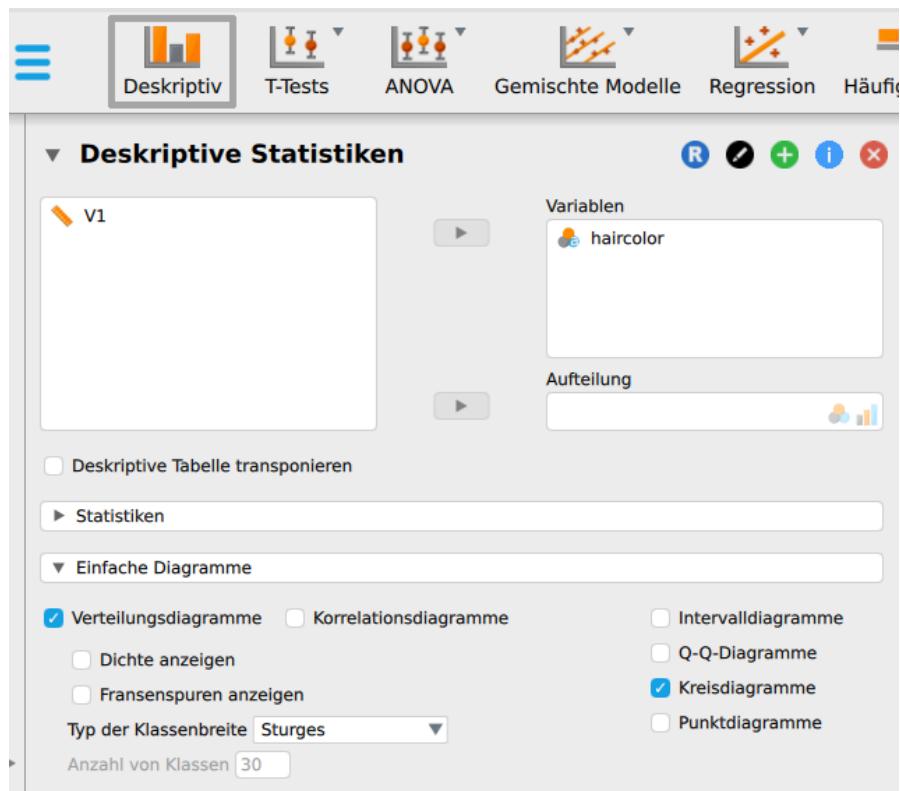
- Top Bar:** A navigation bar with icons for Descriptives, T-Tests, ANOVA, Mixed Models, Regression, Frequencies, Factor, and Visual Modeling.
- Left Panel (Descriptive Statistics):**
  - Variables:** A list containing "haircolor".
  - Aufteilung:** A button for distribution analysis.
  - Output Options:**
    - Deskriptive Tabelle transponieren
    - Statistiken
    - Einfache Diagramme
    - Einstellbare Diagramme
    - Häufigkeitstabellen
  - Maximale Anzahl verschiedener Werte:** A field set to 10.
  - Scaling Parameters:** A field set to 1.
- Right Panel (Results):**
  - Häufigkeitstabellen:** A section titled "Häufigkeiten für haircolor" with the following table:

haircolor	Häufigkeit	Prozent
Blau	440	55.000
Blond	64	8.000
Braun	104	13.000
Gruen	152	19.000
Schwarz	40	5.000
Fehlend	0	0.000
Gesamt	800	100.000

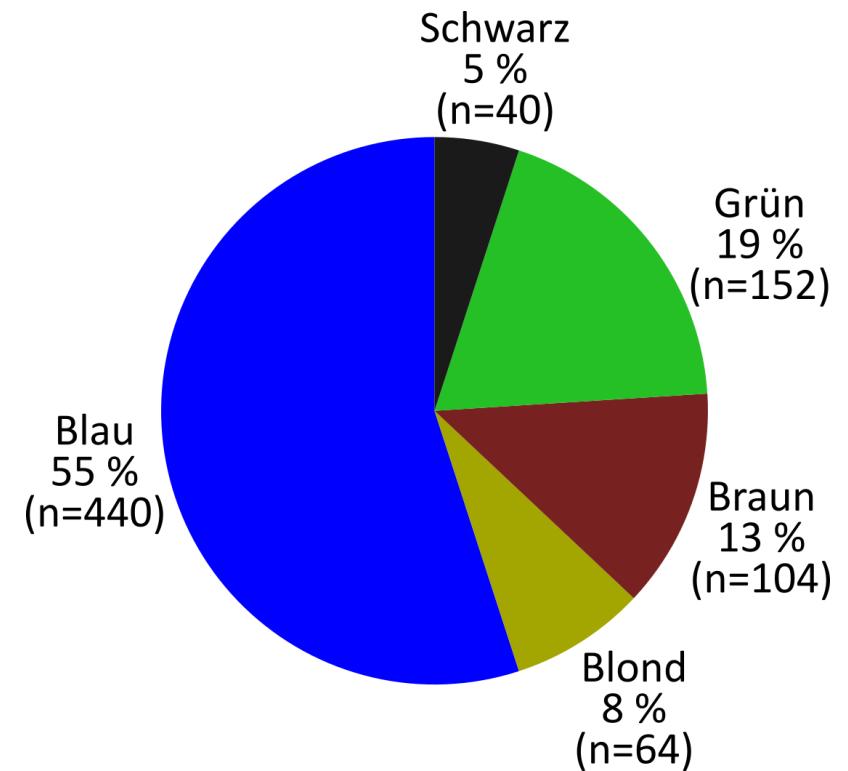
Darstellung von Häufigkeitstabellen in JASP

# Darstellung kategorialer Daten: Kreisdiagramme

- Vorteil: übersichtliche Darstellung der Verteilung kategorialer Variablen
- Nachteil: verschiedene Bedingungen können nicht direkt verglichen werden (zwei Kreisdiagramme notwendig)

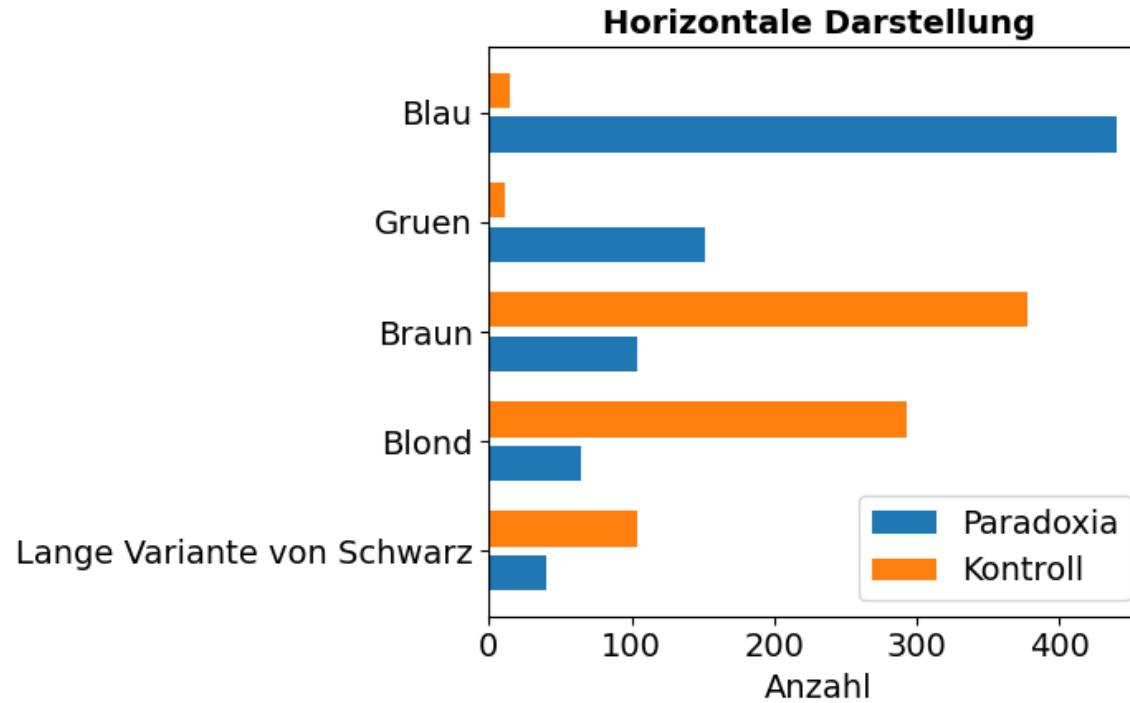
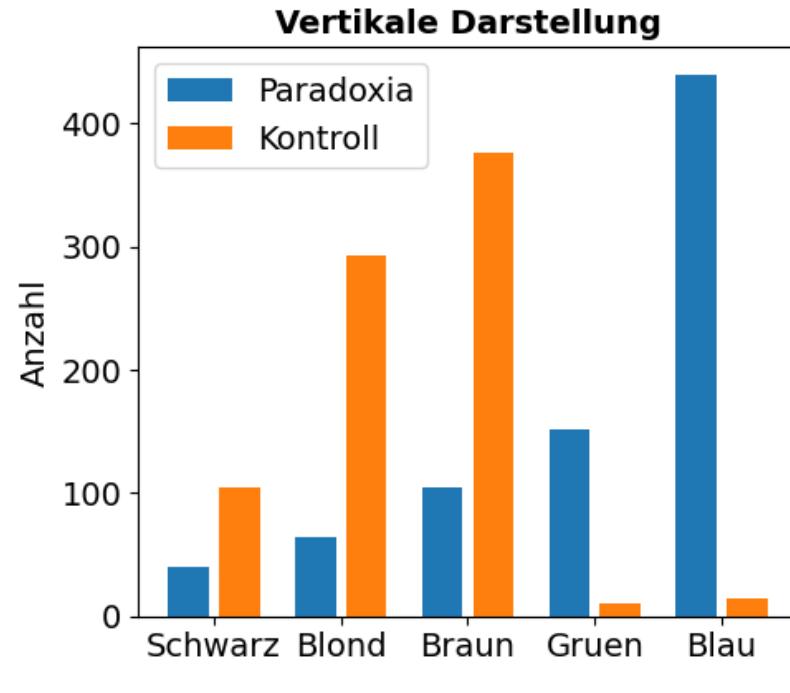


Kreisdiagramm in JASP



# Darstellung kategorialer Daten: Häufigkeitsdiagramm

- Das Häufigkeitsdiagramm erlaubt einen besseren Vergleich von zwei Gruppen oder Bedingungen

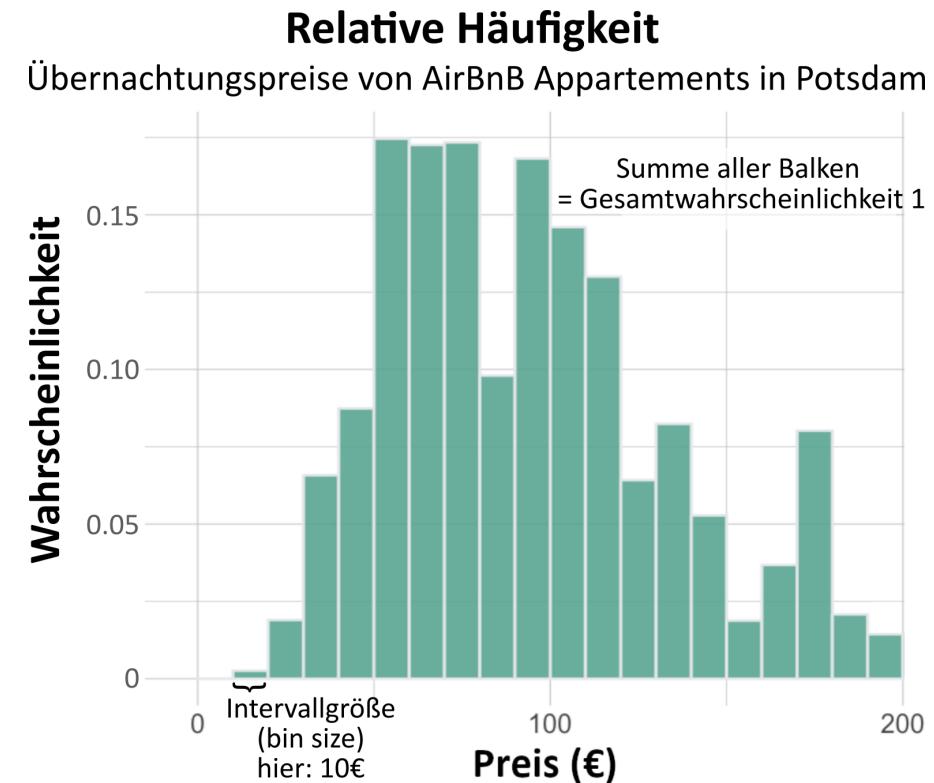
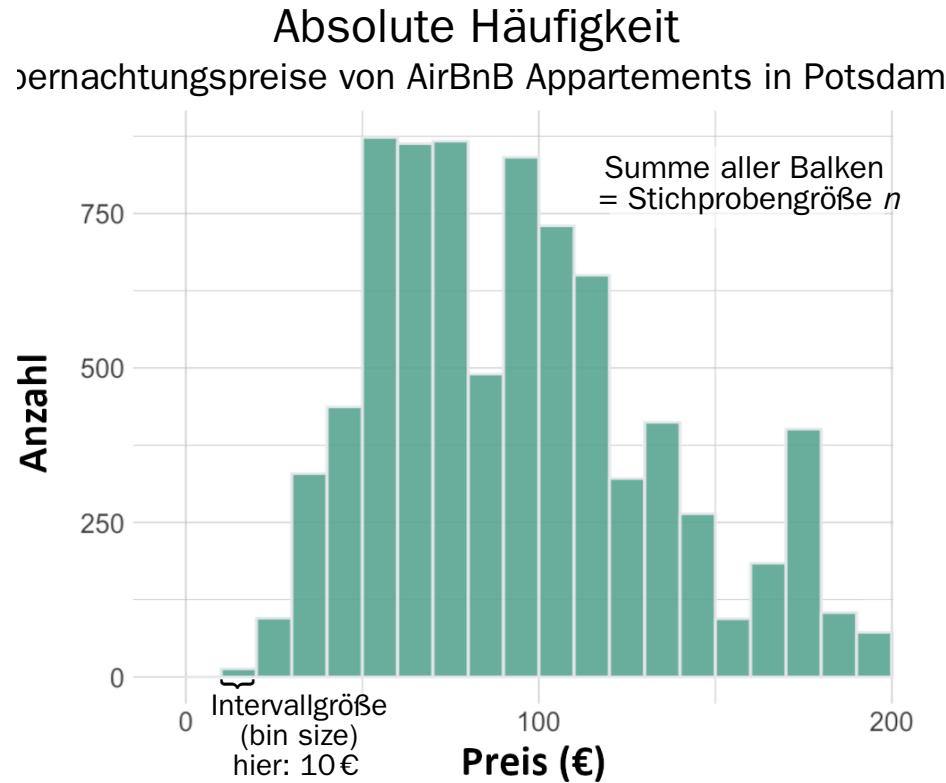


Vertikale und horizontale Darstellung von Häufigkeiten. Die Horizontale Darstellung hat den Vorteil, dass längere Beschriftungen der Balken möglich sind. Die Darstellung mit vertikalen Balken wird zuweilen **Säulendiagramm** genannt und die Darstellung mit horizontalen Balken **Balkendiagramm**.

# Darstellung metrischer Daten: das Histogramm

- Erinnerung: metrische Variablen sind Zahlenwerte (diskret oder kontinuierlich)
- Beispiele: Körpergröße (z.B. in cm), durchschnittliches Zuspätkommen einer Kohorte in Statistik 1 (z.B. in sec), emotionaler Intelligenzquotient (einheitslos)

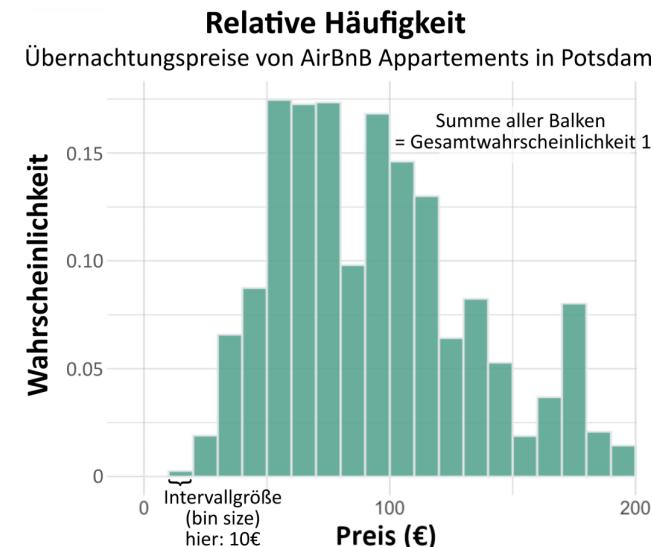
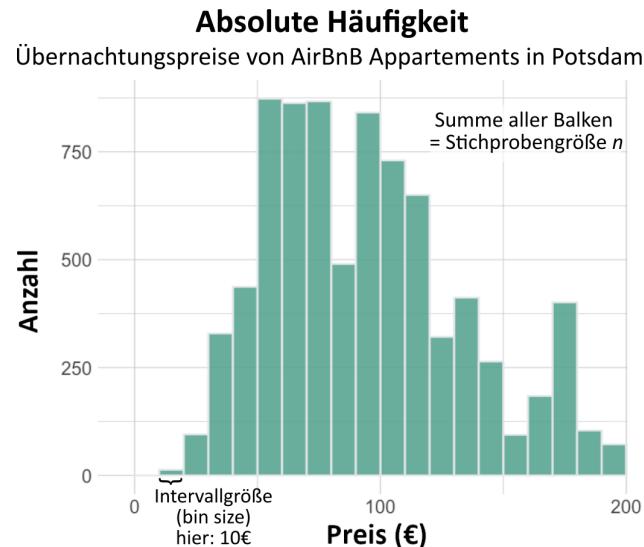
Eine gängige Darstellungsform metrischer Daten ist das **Histogramm** mit **absoluter** oder **relativer Häufigkeit**:



# Verteilungen

# Empirische Verteilungen

- Eine **Häufigkeitsverteilung** oder auch kurz **Verteilung** gibt zu verschiedenen Werten eines Merkmals an, wie häufig dieser Wert vorkommt.
- Die Häufigkeit kann entweder als **absolute** oder **relative Häufigkeit** angegeben werden.



- **Empirische Verteilungen** geben an, wie die tatsächlich gemessenen Daten einer Stichprobe verteilt sind. Das AirBnB-Beispiel zeigt empirische Verteilungen.
- **Theoretische Verteilungen** sind durch eine Funktion definiert, die die Verteilung von Daten mathematisch beschreibt.
  - Im Gegensatz zu empirischen Verteilungen geben theoretische Verteilungen die (erwartete) Häufigkeit zu jedem möglichen Wert des Merkmals an.

# Normalverteilung

- Eine der wichtigsten theoretischen Verteilungen in der Psychologie ist die **Normalverteilung** (auch **Gauß-Verteilung**).
- Aufgrund ihrer Form wird sie umgangssprachlich auch als **Glockenkurve** bezeichnet.
- Mathematische Definition:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- $\mu$  kennzeichnet den Mittelwert und  $\sigma$  die Standardabweichung der Verteilung.

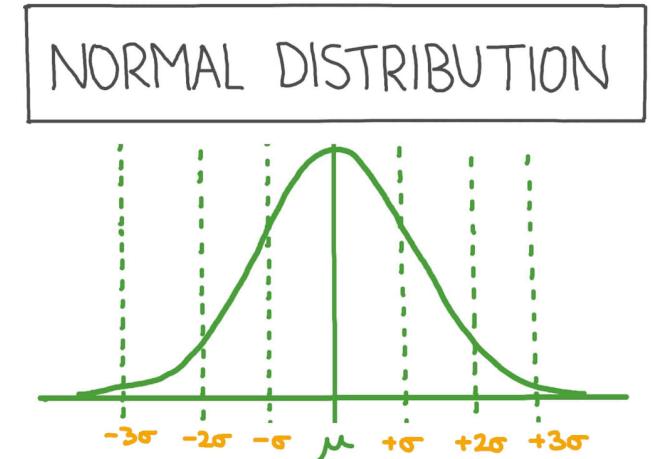


Zur Wiederholung: müssen statistische Kennwerte wie Mittelwert und Standardabweichung nicht aus Stichproben geschätzt werden, sondern sind als bekannt angenommen, werden sie häufig mit griechischen Buchstaben bezeichnet.

$$\bar{x} \longrightarrow \mu$$

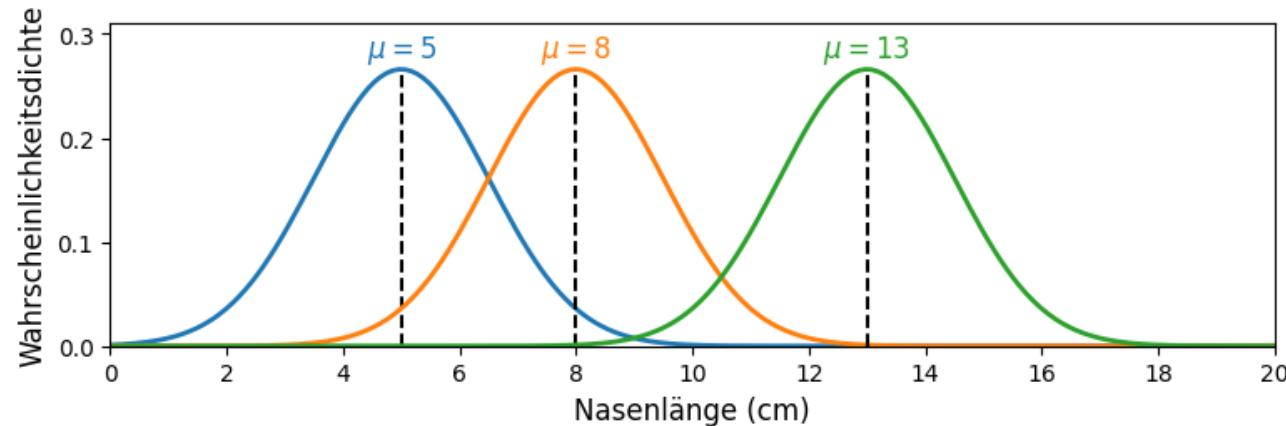
$$s \longrightarrow \sigma$$

- Die Konstante  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  sorgt dafür, dass die Fläche unter der Verteilung gleich 1 ist.

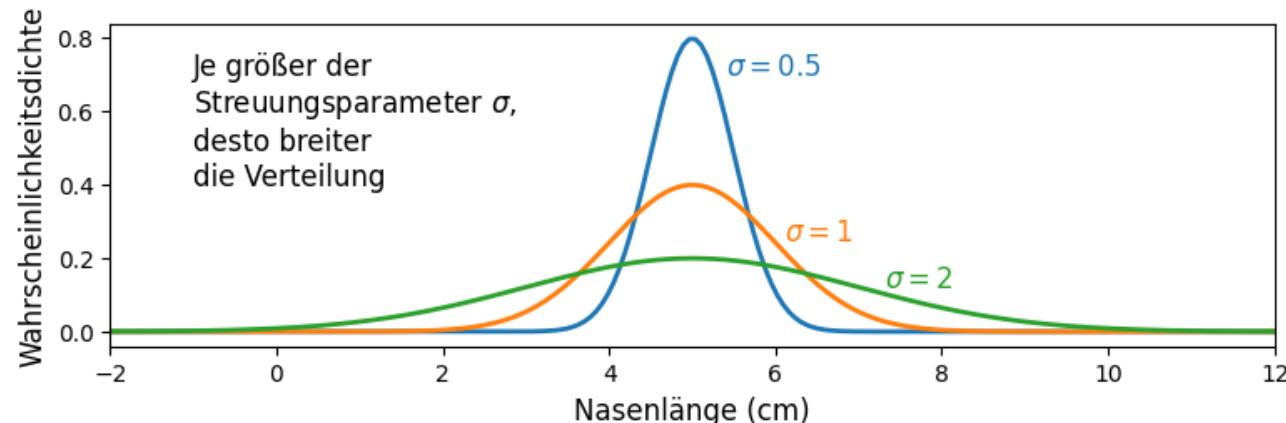


# Normalverteilung: die Parameter $\mu$ und $\sigma$

- Die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  sind die **Formparameter** (engl. *shape parameter*) der Normalverteilung – mit diesen zwei Parametern ist die Verteilung eindeutig definiert.
- Als Lageparameter verschiebt  $\mu$  die Verteilung auf der x-Achse:



- Als Streuungsparameter verändert  $\sigma$  die Breite der Verteilung:



# Was ist “normal” an der Normalverteilung bzw. warum ist die Normalverteilung so häufig?

- Auch wenn die Historie des Terms **Normalverteilung** umstritten ist<sup>8</sup> bringt er zum Ausdruck, dass es sich um eine empirisch sehr häufig beobachtete Verteilung handelt.
- Die Erklärung für die Häufigkeit der Normalverteilung liefert der **zentrale Grenzwertsatz**:

## Definition

**Zentraler Grenzwertsatz:** bei einer additiven Überlagerung vieler kleiner unabhängiger Zufallseffekte zu einer aggregierten Zufallsvariable  $Z$ , nähert sich für  $n \rightarrow \infty$  die Verteilung von  $Z$  der Normalverteilung an. (Beweis<sup>9</sup> – kein Klausurstoff)

- Fast alle psychologischen Phänomene sind Ausdruck einer Überlagerung vieler kleiner Zufallseffekte:
  - Genetische Zufallseffekte
  - Entwicklungsbiologische Zufallseffekte (z.B. im Mutterleib)
  - Zufällige Umwelteinflüsse (Familie, sozialer Kontext, Klima)
- Auch Messfehler wären ein solcher Zufallseffekt – gleichzeitig sind Verteilungen in der Psychologie aufgrund der genannten Effekte *auch ohne Messfehler* häufig normalverteilt.
- Obwohl die Vielzahl der Zufallseffekte Vorhersagen in der Psychologie enorm erschwert, haben sie **aus statistischer Sicht auch einen Vorteil**: wir können häufig (nicht immer!) annehmen, dass psychologische Merkmale einer Normalverteilung in der Bevölkerung folgen.

# Normalverteilungen in freier Wildbahn



# Eine kurze Geschichte der Normalverteilung

- Die Normalverteilung wurde mehrmals, zum Teil unabhängig, und für verschiedene Zwecke hergeleitet.
- Die erste Herleitung der Normalverteilung stammt aus dem Jahr **1733** von **Abraham de Moivre**, der nach einer **Approximationsfunktion für die Binomialverteilung**  $f(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$  suchte, da ihm die Berechnung der Fakultäten (z.B.  $n!$ ) bei großen Zahlen mühselig wurde.
  - Tatsächlich ist diese Herleitung bereits ein Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes, da die Summe von binären Zufallsvariablen behandelt wird (z.B. wie oft "Kopf" bei "Kopf oder Zahl").
  - Link zu einer Herleitung<sup>[10](#)</sup>
- Der **zentrale Grenzwertsatz** in seiner allgemeinen Form (beliebige Verteilungen) wurde **1778** von **Pierre-Simon Laplace** hergeleitet.
  - Link zu einer Herleitung<sup>[11](#)</sup>
- Im Jahr **1808** gelang **Robert Adrain** der Nachweis, dass die Normalverteilung eine **valide Beschreibung von zufälligen Messfehlern** ist.



Abraham de Moivre



Pierre-Simon Laplace



Robert Adrain



# Eine kurze Geschichte der Normalverteilung

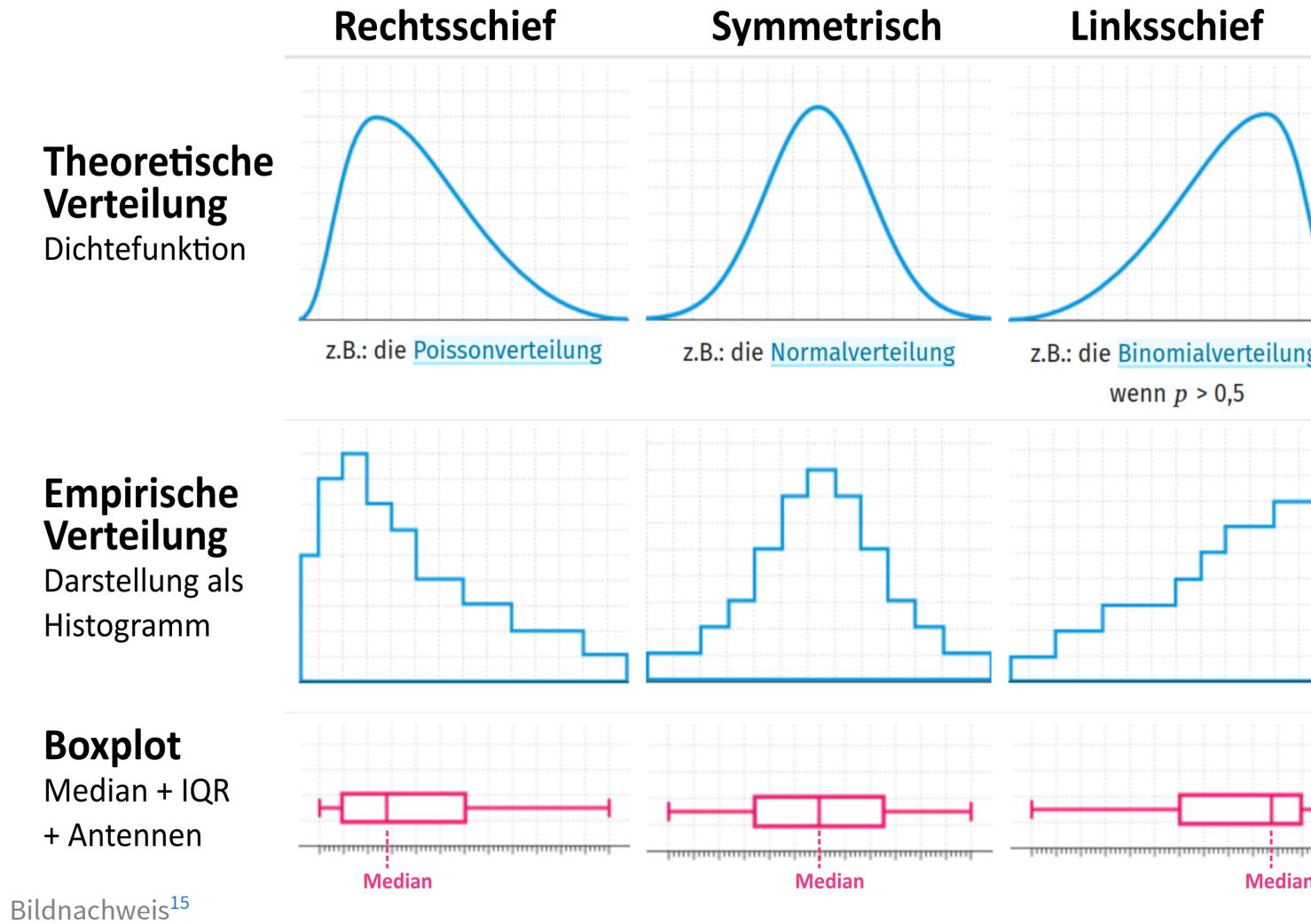
- Erst im Jahr 1809 tritt Carl Friedrich Gauß auf die Bildfläche und erbringt ebenfalls den Beweis für die Allgemeingültigkeit der Normalverteilung für Messfehler (daher wird die Normalverteilung auch zuweilen **Fehlergesetz** genannt).
- Ein wichtige Motivation für Gauß' Arbeit an Fehlerverteilungen waren astronomische Messungen, die häufig ungenau waren und viele Messwiederholungen erforderten. Eine zentrale Frage war: welcher Gesetzmäßigkeit folgen diese Messfehler?
- Der Beweis von Gauß war von besonderer Eleganz und basierte auf drei Annahmen:
  1. Messfehler sind symmetrisch (Fehler in  $-X$  und  $+X$  Richtung sind gleich wahrscheinlich)
  2. Kleinere Fehler sind häufiger als größere Fehler
  3. Der Mittelwert ist der beste Schätzer für den Lageparameter der wahren theoretischen Verteilung, oder anders gesagt: der beste Schätzer für die unbekannten Fehler  $x_i - \mu$  ( $\mu$  ist nicht bekannt!) ist  $x_i - \bar{x}$ .
- Mit diesen wenigen Annahmen konnte Gauß zeigen, dass *die Funktion die mit größter Wahrscheinlichkeit Fehler dieser Art erzeugt*<sup>12</sup>, die Normalverteilung ist. Herleitung<sup>13</sup>
- Eine **heute populäre und intuitive Herleitung** basiert auf einem Gedankenexperiment, in dem Würfe von Dartpfeilen auf ein Bull's Eye betrachtet werden, wobei Wurffehler in x- und y-Richtung als unabhängig angenommen werden. Sie geht auf John Herschel



Carl Friedrich Gauß



# Charakteristiken von Verteilungen



# Vorschau: p-Wert

- In Ihren Übungen mit JASP wird Ihnen u.U. ein Wert bereits jetzt begegnen: der **p-Wert**
- Der p-Wert ist von zentraler Bedeutung in der psychologischen Forschungsliteratur (for the better or the worse).
- Der p-Wert ist ein **Signifikanz-Maß**: er gibt vereinfacht gesprochen einen Hinweis darauf, wie wahrscheinlich es ist, dass ein gefundener Effekt (z.B. Mittelwertsunterschied zwischen zwei Gruppen) auf bloßem Zufall basiert.
- **Je kleiner der p-Wert, desto höher die statistische Signifikanz**, desto sicherer können wir uns also sein, dass ein Effekt nicht nur auf einer zufälligen Schwankung von Messfehlern basiert.
- Als Konvention hat sich etabliert, dass bei p-Werten kleiner 0,05 Effekte als **statistisch signifikant** gewertet werden.
- Den p-Wert werden wir noch ausführlich in den Vorlesungen zur Inferenzstatistik behandeln.

P-VALUE	INTERPRETATION
0.001	HIGHLY SIGNIFICANT
0.01	
0.02	
0.03	
0.04	SIGNIFICANT
0.049	
0.050	OH CRAP. REDO CALCULATIONS.
0.051	
0.06	ON THE EDGE OF SIGNIFICANCE
0.07	
0.08	HIGHLY SUGGESTIVE, SIGNIFICANT AT THE P<0.10 LEVEL
0.09	
0.099	HEY, LOOK AT THIS INTERESTING SUBGROUP ANALYSIS
≥0.1	

<https://xkcd.com/1478/>



Nach eingehender Prüfung, entscheiden Sie sich aus ethischen Gründen (und schweren Herzens) gegen ein Experiment, und planen stattdessen eine Beobachtungsstudie an Betroffenen (Paradoxiker) und Nicht-Betroffenen (Kontrollen). In Einklang mit den Hypothesen 1 und 2 testen Sie zwei abhängige Variablen:

- Abhängige Variable 1: durchschnittliche TikTok-Online-Zeit in Stunden pro Tag
  - Eigenschaften der AV: Verhältnisskala, kontinuierlich, manifest
- Abhängige Variable 2: physiologischer Entzündungswert
  - Eigenschaften der AV: Verhältnisskala, kontinuierlich, manifest

# Fußnoten

1. <https://twitter.com/MeasuringPsych/photo>
2. <https://www.researchgate.net/post/Difference-between-ordinal-and-scale-in-SPSS>
3. <https://www.studienkreis.de/mathematik/zufallsexperimente-muenz-und-wuerfelwurf/>
4. <https://delishably.com/beverages/Why-Pepsi-is-Better-than-Coke>
5. Midjourney
6. <https://www.nngroup.com/articles/between-within-subjects/>
7. <https://www.holleewoodhair.com/rainbow-hair-color/>
8. <https://stats.stackexchange.com/questions/430621/why-is-the-normal-distribution-called-normal>
9. <https://alanhdu.github.io/posts/2019-10-21-normal-distribution-derivation/>
10. <http://www.stat.yale.edu/~pollard/Courses/241.fall2014/notes2014/Bin.Normal.pdf>
11. <https://towardsdatascience.com/central-limit-theorem-proofs-actually-working-through-the-math-a994cd582b33>
12. In diesem Kontext erfand Gauß direkt auch das Prinzip der Maximum-Likelihood-Schätzung
13. <https://notarocketscientist.xyz/posts/2023-01-27-how-gauss-derived-the-normal-distribution/>
14. <https://www.youtube.com/watch?v=cy8r7WSuT1I>
15. <https://matheguru.com/stochastik/schiefe-linksschief-rechtsschief-symmetrisch.html>