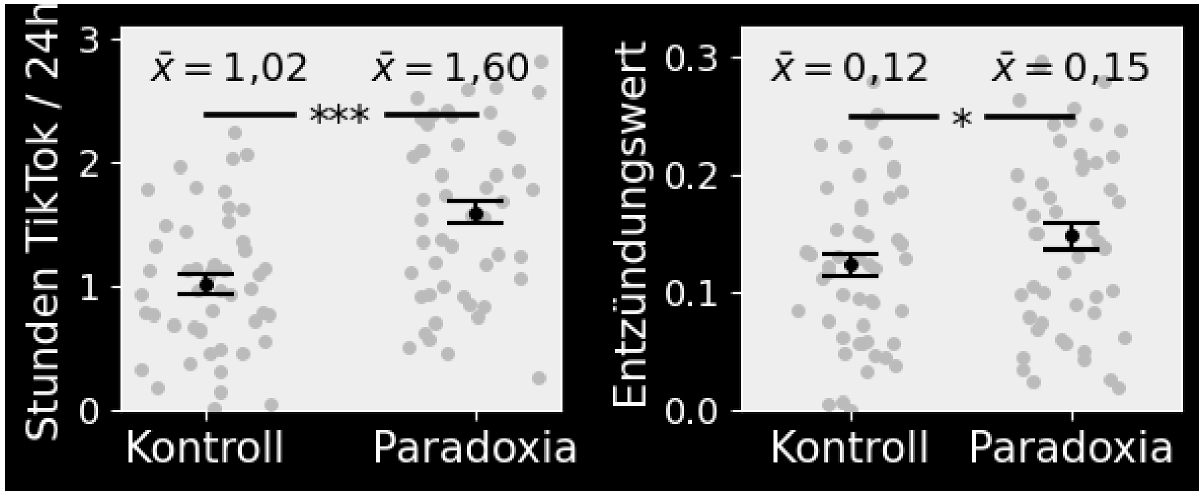
M24 Statistik 1: Wintersemester 2024 / 2025

Vorlesung 09: t-Test

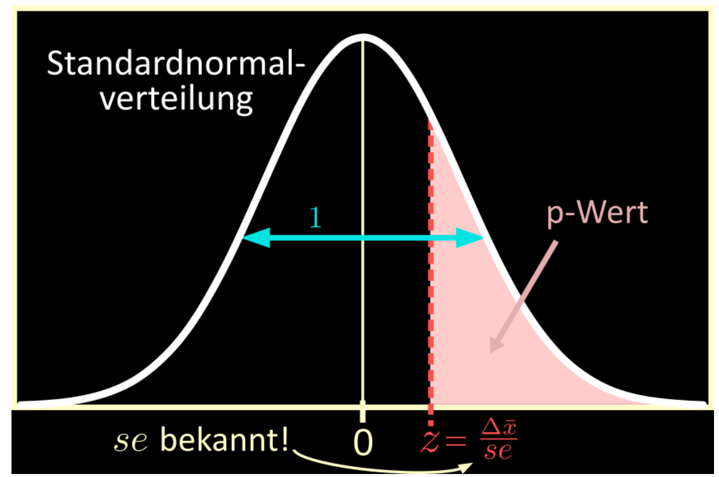
Prof. Matthias Guggenmos

Health and Medical University Potsdam

Erinnerung: den z-Test haben Sie unter der Voraussetzung durchgeführt, dass die Merkmalsstreuungen σ bzw. der Standardfehler se in der Population bekannt sind.



Wie schon angesprochen, kommt dieser Fall in der Praxis allerdings nahezu nie vor und gilt auch für den vorliegenden Fall nicht. What shall you do?



Der t-Test

Problemstellung

Zur Erinnerung: beim **z-Test** haben wir für die Verteilung der Prüfgröße $z = \frac{\hat{\theta}}{se}$ eine Normalverteilung annehmen können. Grund:

- Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes können statistische Kennwerte $\hat{\theta}$ bei ausreichender Stichprobengröße als normalverteilt angenommen werden.
- Beim z-Test werden die Standardabweichung σ der Population(en), und damit auch der Standardfehler se (z.B. $se = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bei der Einzelmessung), als bekannt angenommen.
- De facto wird also bei der Berechnung der Prüfgröße $z = \frac{\hat{\theta}}{se}$ eine normalverteilte Variable ($\hat{\theta}$) durch eine bekannte Konstante (se) geteilt, so dass auch die Prüfgröße z normalverteilt ist.

Frage: wie verhält es sich, wenn se *nicht bekannt* ist?

Problemstellung

- Ist der Populationsstandardfehler se *nicht bekannt* — und das ist der Regelfall — **muss der Standardfehler auf Basis der Stichprobe als $\hat{se}$ geschätzt werden.**
- Die Schätzung von $\hat{se}$ ist mit Unsicherheit behaftet und daher selbst eine **Zufallsvariable**.
- Wir teilen also eine normalverteilte Zufallsvariable $\hat{\theta}$ durch eine wie-auch-immer-verteilte (*) zweite Zufallsvariable $\hat{se}$.
  (* die wie-auch-immer-Verteilung ist bekannt: $\hat{se}$ folgt der Chi-Verteilung bzw. χ-Verteilung)
- **In diesem Fall können wir nicht mehr davon ausgehen, dass die Prüfgröße normalverteilt ist!**

Die Gretchen-Frage ist daher: welcher Verteilung folgt die Prüfstatistik

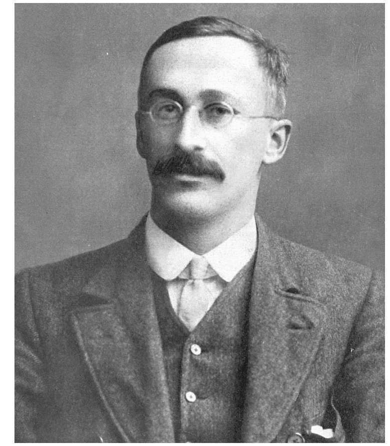
$$\frac{\hat{\theta}}{\hat{se}} \quad ? \qquad \text{(mit Betonung auf dem } \hat{} \text{ über dem Standardfehler } \hat{se}\text{)}$$

Nota Bene

Streng genommen lautet die fragliche Prüfgröße $\frac{\hat{\theta}-\theta_0}{\hat{se}}$. Von einigen Ausnahmen abgesehen gilt jedoch zumeist $\theta_0 = 0$ und wir lassen θ_0 aus diesem Grund auch im Folgenden weg.

Ein Bespiel für eine Ausnahme ist, wenn $\hat{\theta}$ eine Einzelmessung ist und gegen einen Referenzwert wie den Durchschnitts-IQ $\theta_0 = 100$ getestetet wird; in diesem Fall muss also $\theta_0 = 100$ zunächst vom Mittelwert $\hat{\theta}$ abgezogen werden.

Die t-Verteilung

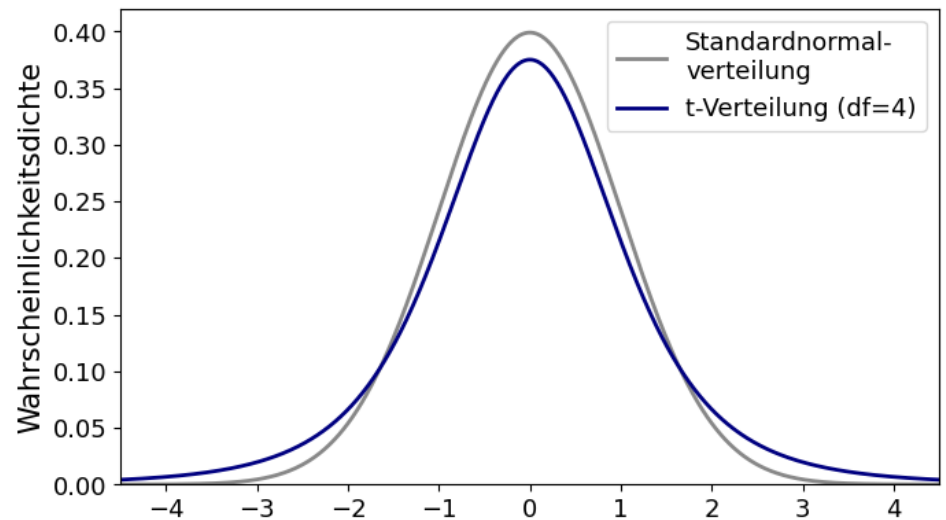


William Sealy Gosset (1876-1937)

- An dieser Stelle kommt der englische Statistiker **William Sealy Gosset** ins Spiel.
- Er postulierte 1908, dass das Verhältnis eines normalverteilten Kennwertes $\hat{\theta}$ und einer Chi-verteilten Variable einer Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt, die seither als **t-Verteilung** (oder auch **Studentsche t-Verteilung**) bezeichnet wird.
- Die Formel der Verteilung ist vergleichsweise kompliziert — für die Praxis entscheidend ist, dass sie **durch einen einzigen Parameter (df) definiert wird**:

$$t\text{-Verteilung:} \qquad f_t(x|\mathrm{df})$$

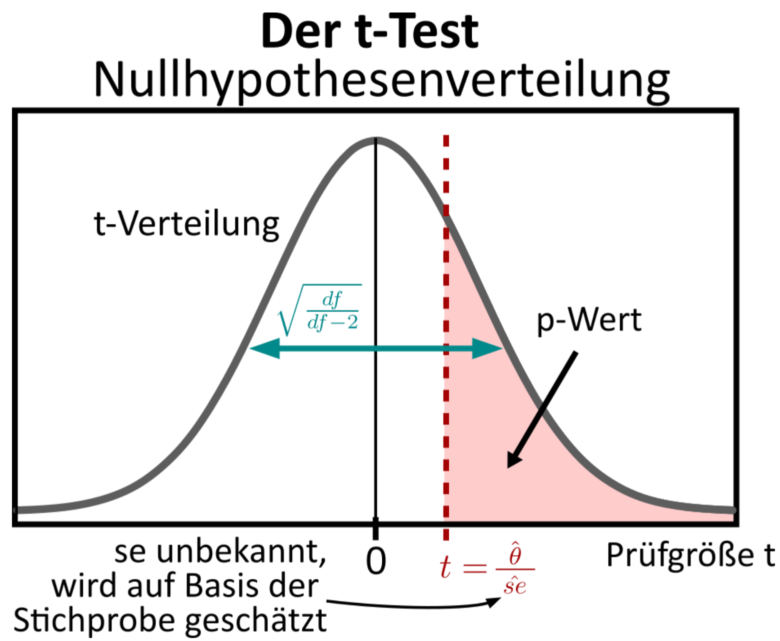
- Der Parameter df steht für die **Zahl der Freiheitsgrade** (*degrees of freedom*) und hängt eng mit der Stichprobengröße n zusammen.
- Im Bild rechts ist eine t-Verteilung mit 4 Freiheitsgraden im Vergleich zur Standardnormalverteilung aufgetragen.
- Erste Erkenntnis: die t-Verteilung hat etwas dickere Flanken (*fat tails*)!



t-Wert

- Wir kennen nun also die Form der Nullverteilung, wenn der Standardfehler als $\hat{se}$ auf Basis der Stichprobe geschätzt werden muss: **t-Verteilung**
- In Korrespondenz mit dem Namen der Verteilung wird die Prüfgröße auf Basis von $\hat{se}$ als **t-Wert** bezeichnet:

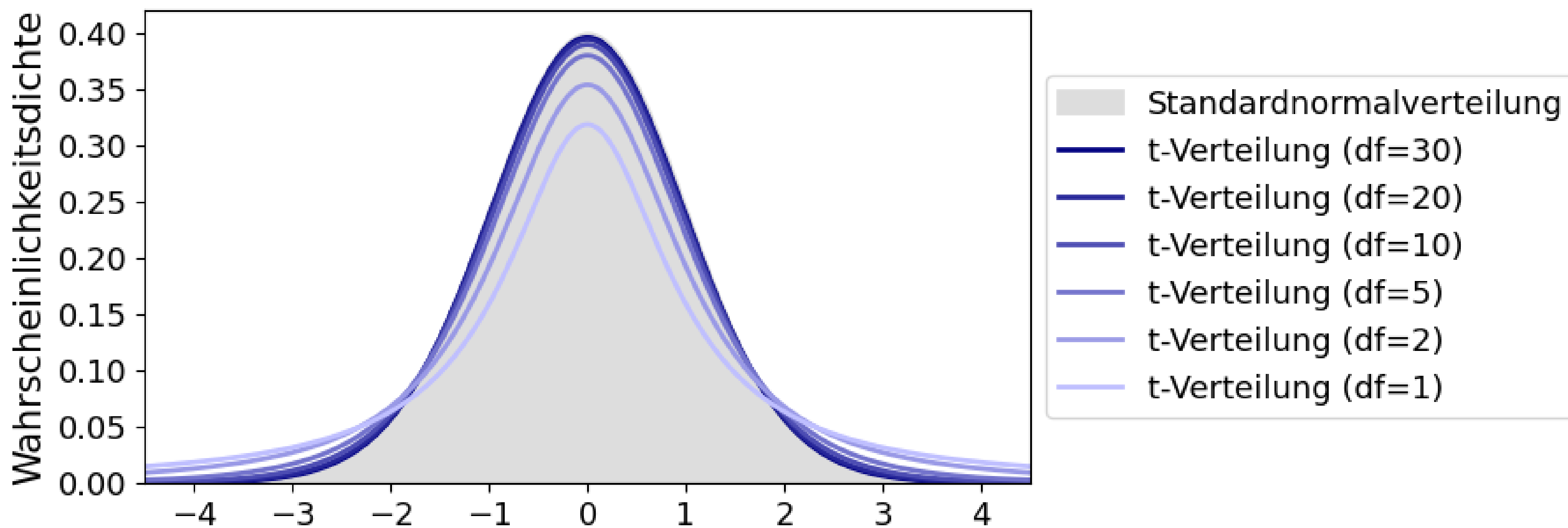
$$t = \frac{\hat{\theta}}{\hat{se}}$$



- Das Prinzip der p-Wert-Bestimmung ist exakt wie beim z-Test: es wird die Fläche unter der t-Verteilung relativ zum Prüfgrößenwert t bestimmt:
  - Gerichtete Hypothese $\hat{\theta} > 0$: Fläche rechts von t
  - Gerichtete Hypothese $\hat{\theta} < 0$: Fläche links von t
  - Ungerichtete Hypothese $\hat{\theta} \neq 0$: Fläche links von $-|t|$ **PLUS** Fläche rechts von $|t|$
- Merke: der *t-Wert* ist zur *t-Verteilung* wie der *z-Wert* zur *Standardnormalverteilung*!

t-Verteilung versus Standardormalverteilung

- Der einzige Parameter der t-Verteilung, die Zahl der Freiheitsgrade df, bestimmt die Form der Verteilung.
- Die Zahl der Freiheitsgrade df hängt eng mit der Stichprobengröße n zusammen (z.B. $\mathrm{df} = n - 1$ bei einer Mittelwertdifferenz abhängiger Messungen).
- Je größer df bzw. n, desto ähnlicher wird die t-Verteilung der Standardnormalverteilung!



Die Standardabweichung der t-Verteilung ist im Gegensatz zur Standardnormalverteilung nicht exakt 1 sondern $\sqrt{\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{df}-2}}$. Für $n \to \infty$ und damit $\mathrm{df} \to \infty$ nähert sich die Standardabweichung aber 1 an.

Funktionen der t-Verteilung

Wie die Normalverteilung wird auch die t-Verteilung durch eine **Wahrscheinlichkeitsdichte** definiert:

Variable
(Achtung: für x werden in der Praxis t-Werte eingesetzt!)

Parameter der t-Verteilung
(df = Zahl der Freiheitsgrade)

$$f_{\boxed{t}}(\boxed{x}|\boxed{\mathrm{df}})$$

kleines "f" zeigt an, dass es sich um eine Dichte handelt

Subscript zeigt an, dass es sich um eine t-Verteilung handelt

Die zugehörige **kumulative Verteilungsfunktion** wird der Konvention entsprechend mit einem großen F denotiert:

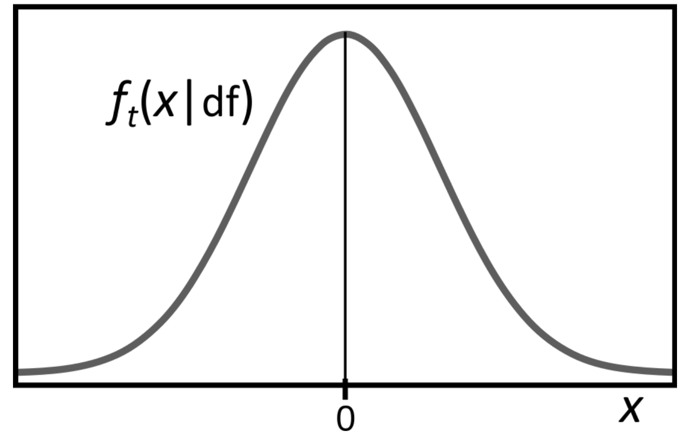
$$\text{Kumulative Verteilungsfunktion:}$$

$$F_t(x|\mathrm{df}) = \int_{-\infty}^{x} f_t(x'|\mathrm{df})dx'$$

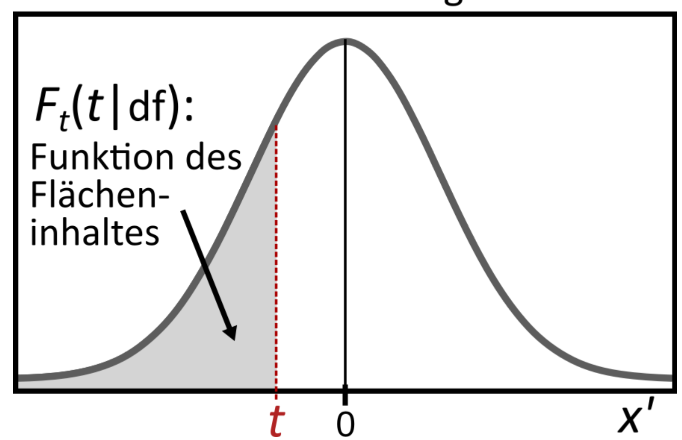
Die kumulative Verteilungsfunktion ordnet jedem t-Wert den Flächeinhalt unter der t-Verteilung im Bereich $[-\infty; t]$ zu.

t-Verteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte



Kumulative Verteilungsfunktion

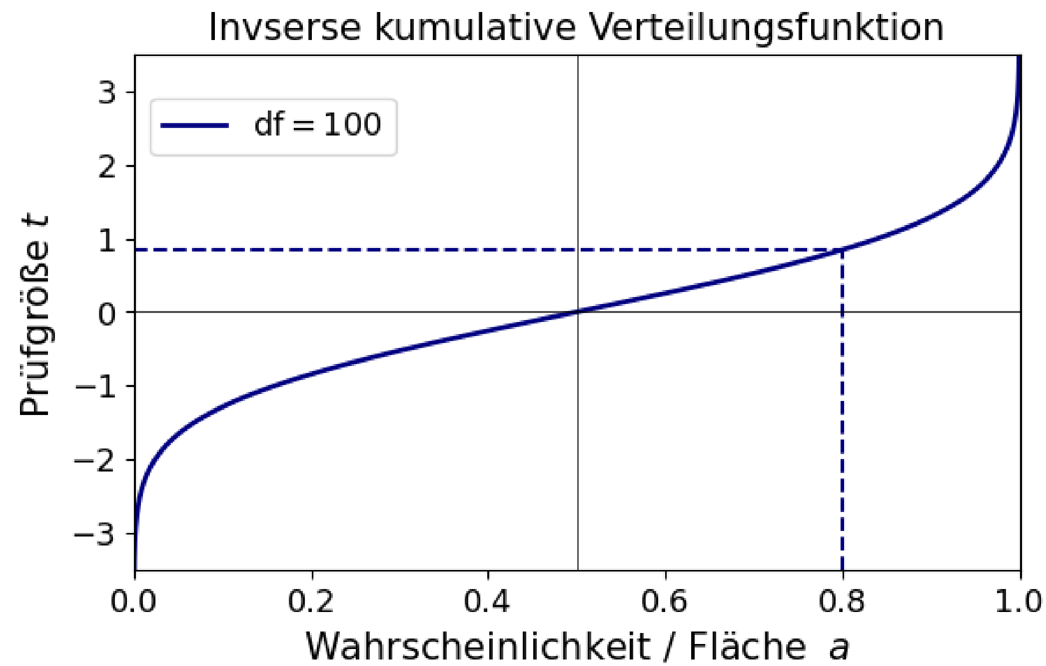


Funktionen der t-Verteilung

Zuweilen stellt sich die umgekehrte Frage:
Wie lautet der t-Wert für einen bestimmten Flächeninhalt (z.B. einen bestimmten p-Wert) unter der t-Verteilung?

Diesen Zusammenhang stellt die **inverse kumulative Verteilungsfunktion** her:

$$t = F_t^{-1}(a|\mathrm{df})$$



wobei a die Fläche (area) bezeichnet. Da die t-Verteilung eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, kann die Fläche a nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Die Funktion wird auch **Quantilfunktion** genannt, da sie z.B. für $a = 0.8$ den Wert t zurück gibt, der 80% der t-Verteilung umfasst (von $-\infty$ gerechnet; im Beispiel $t = 0.85$).

Nota Bene

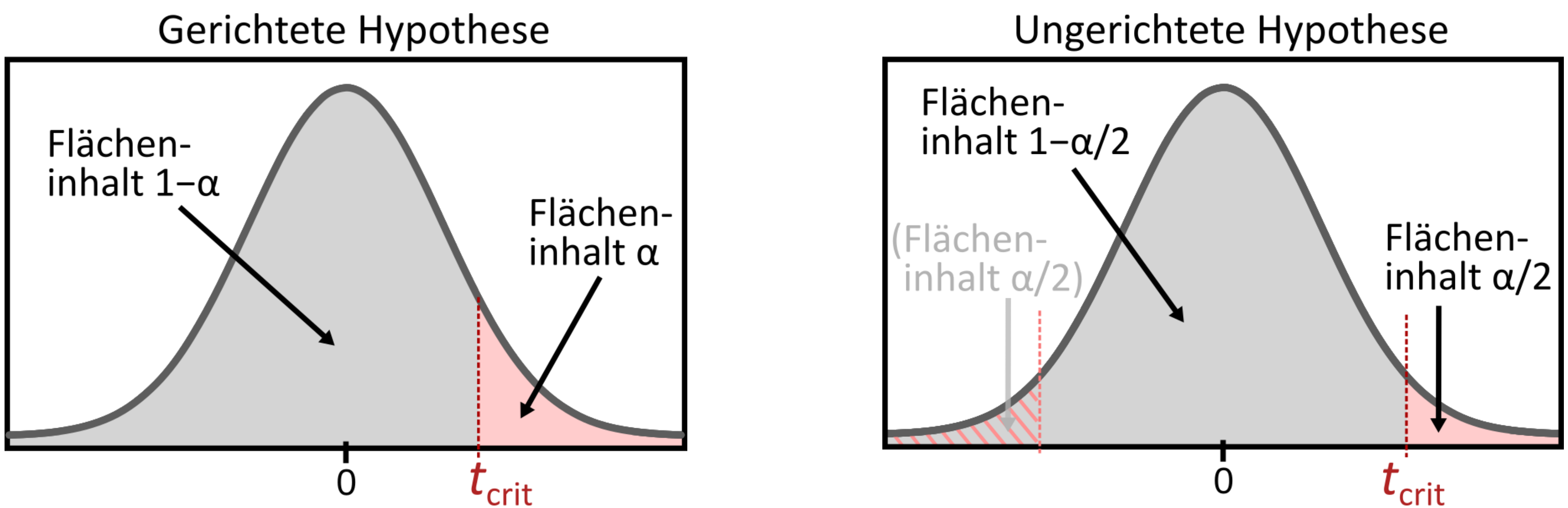
Sämtliche Funktionen (Wahrscheinlichkeitsdichte, kumulative Verteilungsfunktion, inverse kumulative Verteilungsfunktion) sind zu kompliziert zur manuellen Berechnung und werden mit dem Computer ausgewertet. Zusätzlich bietet die t-Tabelle die Möglichkeit, kritische t-Werte für ausgewählte Signifikanzniveaus nachzuschlagen.

Funktionen der t-Verteilung

Mit der inversen kumulativen Verteilungsfunktion können **kritische t-Werte** für gegebene Signifikanzniveaus α berechnet werden, wie sie von der **t-Tabelle** bereitgestellt werden.

Bei gerichteter Hypothese ist der kritische t-Wert bei einem Signifikanzniveau von α gleich $F_t^{-1}(1-\alpha|\mathrm{df})$, bei ungerichteter Hypothese gleich $F_t^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}|\mathrm{df})$. Für die Angabe eines kritischen t-Wertes wird als Subscript die kritische Fläche und die Zahl der Freiheitsgrade df angegeben:

$$\text{Gerichtet:} \quad t_{\text{crit}} = t_{(1-\alpha,\,\mathrm{df})} \qquad \text{Ungerichtet:} \quad t_{\text{crit}} = t_{(1-\frac{\alpha}{2},\,\mathrm{df})}$$



t_{crit} gibt den Wert an, den die Prüfgröße t mindestens erreichen muss, damit der zugehörige p-Wert kleiner als das Signifikanzniveau α ist.

Durchführung eines t-Testes

t-Test

Zur Durchführung des t-Tests müssen wir uns über folgende Punkte Gedanken machen:

0. Sind die Voraussetzungen für einen t-Test gegeben?

Jeder statistische Test basiert auf bestimmten Annahmen. Der Test sollte daher nur dann angewendet werden, wenn diese Annahmen erfüllt sind (oder sich eine Verletzung der Annahme in der Praxis als wenig problematisch herausgestellt hat).

1. Welche Art von t-Test benötige ich?

Für verschiedene Szenarien gibt es unterschiedliche t-Tests, die sich unterscheiden in a) dem verwendeten Standardfehler und b) der Zahl der Freiheitsgrade df.

2. Zahl der Freiheitsgrade

Die Zahl der Freiheitsgrade df ist als Parameter für die t-Verteilung notwendig, und damit auch notwendig um Flächen (wie p-Werte) unter der Verteilung zu berechnen. De facto übernehmen das heute Computerprogramme, jedoch ist es nach wie vor Usus die Zahl der Freiheitsgrade eines statistischen Testes in wissenschaftlichen Veröffentlichungen anzugeben.

3. Signifikanzniveau & ein/zweiseitige Testung

Welchen Wert bestimme ich als Signifikanzniveau α? Ist mein Test einseitig (gerichtete Hypothese) oder zweiseitig (ungerichtete Hypothese)? → siehe auch Vorlesung 10

0. Sind die Voraussetzungen für einen t-Test gegeben?

- Mindestens **intervallskalierte Daten**.
- **Hinreichende Normalverteilung** des gemessenen Merkmals X in der Population (Zweistichproben-t-Test: Normalverteilung von X_A und X_B in den beiden Gruppen A und B!)
  - Allerdings zeigen Simulationsstudien, dass der t-Test sehr „robust“ gegen Verletzungen der Normalverteilungsannahme ist.
  - Problematisch sind stark schiefe Verteilungen (rechts- oder linksschief) bei kleinen Stichprobengrößen.
  - Kann von keiner Normalverteilung ausgegangen werden: nicht-parametrische Testverfahren (z.B. Mann-Whitney-U-Test).
- Siehe Bonuscontent für eine Begründung der Normalverteilungsvoraussetzung beim t-Test.

Mr. T

1. Welche Art von t-Test benötige ich?

Teste ich einen Mittelwertsunterschied in einer oder zwei Stichproben?

- Eine Stichprobe → Einzelmessung oder Vergleich zweier abhängiger Messungen?
  - Einzelmessung → **Einstichproben-t-Test**
  - Zwei Messungen → **Differenzen-t-Test (paired t-test)**
- Zwei Stichproben → Haben meine Stichproben ähnliche Varianz?
  - Ähnliche Varianz ($0.5 \leq \frac{\hat{\sigma}_A}{\hat{\sigma}_B} \leq 2$) → **Klassischer Zweistichproben-t-Test**
  - Unähnliche Varianz ($\frac{\hat{\sigma}_A}{\hat{\sigma}_B} < 0.5$ oder $\frac{\hat{\sigma}_A}{\hat{\sigma}_B} > 2$) → **Zweistichproben-t-Test für unähnliche Varianzen (aka Welch's t-test)**

Teste ich einen Zusammenhang (Korrelation/Regression) in einer Stichprobe? → Rechne $\hat{\rho}$ oder $\hat{b}_1$ in einen t-Wert um → **Einstichproben-t-Test**

$$t = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{\rho}^2}}$$

$$\left(\text{Reminder: } \hat{\rho} = \frac{\hat{\sigma}_X}{\hat{\sigma}_Y}\hat{b}_1\right)$$

2. Zahl der Freiheitsgrade

- Die **Zahl der Freiheitsgrade** gibt die **Zahl der frei variierbaren Werte** bei der Berechnung eines statistischen Kennwertes an.
- Häufig kann die Zahl der Freiheitsgrade recht einfach berechnet werden als Stichprobengröße n *minus* die Anzahl der Zwischenparameter, die für die Berechnung des statistischen Kennwertes geschätzt werden müssen.

Beispiel

Beispiel Varianz: Angenommen, wir wollen für einer Stichprobe aus vier Werten die Varianz bestimmen:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{4-1} \sum_{i=1}^{4} (x_i - \bar{x})^2$$

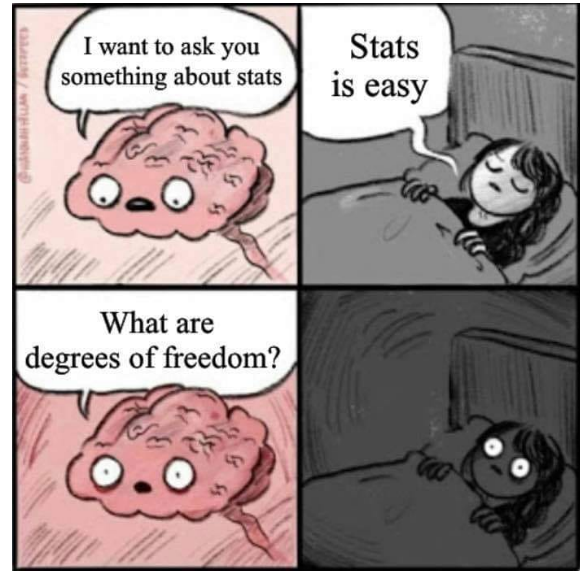
Frage: wie viele Freiheitsgrade haben wir für die Berechnung der Varianz?

Aus der Formel der Varianz erkennen wir, dass wir zur Berechnung der Varianz **einen Parameter** aus den Daten bestimmen müssen, nämlich der Mittelwert $\bar{x}$. Die Zahl der Freiheitsgrade ergibt sich damit plain & simple nach obiger Definition als **Stichprobengröße n minus 1**, also in diesem Beispiel $\mathrm{df} = n - 1 = 4 - 1 = 3$.

Intuition: dadurch, dass die Formel der Varianz den Mittelwert aller Datenpunkte als Parameter enthält, können wir nicht mehr alle 4 Datenpunkte beliebig frei variieren. Wir könnten drei beliebige Datenwerte frei wählen, der vierte Wert aber wäre durch den gegebenen Mittelwert $\bar{x}$ festgelegt. Sagen wir der Mittelwert sei $\bar{x} = 2$ und wir würden frei drei Werte als (2, 4, 1) frei wählen. Der vierte Wert ist nun nicht mehr frei, denn um die Randbedingung $\bar{x} = 2$ zu garantieren, muss der vierte Wert gleich 1 sein. In diesem Sinne kann man auch sagen: Zwischenparameter wie $\bar{x}$ geben wie in einem Gleichungssystem Randbedingen vor, die die Zahl frei wählbarer Werte für die sonstigen Parameter reduzieren.

---

2. Zahl der Freiheitsgrade: t-Test



- Für die Zahl der Freiheitsgrade beim t-Test gilt, dass die Zahl der Freiheitsgrade ausschließlich auf Basis der Streuung $\hat{se}$ im Nenner bestimmt wird.

$$t = \frac{\hat{\theta}}{\hat{se}}$$

- Häufig reicht es, zu zählen, wie viele Mittelwerte für die Berechnung von $\hat{se}$ im Nenner des t-Wertes verwendet werden.
- Beispiel: Stichprobenkennwert $\hat{\theta}$ = Mittelwertdifferenz $\Delta\bar{x}$
  - Vergleich des Mittelwertes einer Einzelmessung $\bar{x}$ mit Referenzwert μ_0:
    Berechnung von $\hat{se}$ erfordert 1 Mittelwert für 1 Stichprobe → $\text{df} = n - 1$
  - Vergleich der Mittelwerte $\bar{x}_A$ und $\bar{x}_B$ zweier abhängiger Messungen:
    Berechnung von $\hat{se}$ erfordert 1 Mittelwert für 1 Stichprobe (hier: Mittelwert der Differenzen) → $\text{df} = n - 1$
  - Vergleich der Mittelwerte $\bar{x}_A$ und $\bar{x}_B$ zweier unabhängiger Messungen (Annahme: Varianzen $\hat{\sigma}_A^2$ und $\hat{\sigma}_B^2$ ähnlich):
    Berechnung von $\hat{se}$ erfordert 2 Mittelwerte für 2 Stichproben → $\text{df} = n_A + n_B - 2$

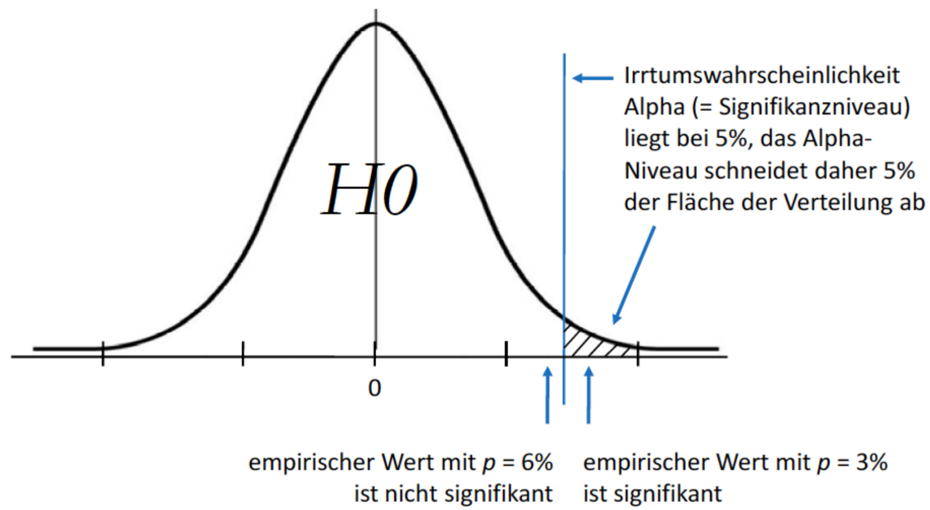
3. Signifikanzniveau & ein/zweiseitige Testung

Erinnerung:

Das **Signifikanzniveau** α gibt legt ein Kriterium für die Ablehnung der Nullhypothese fest.

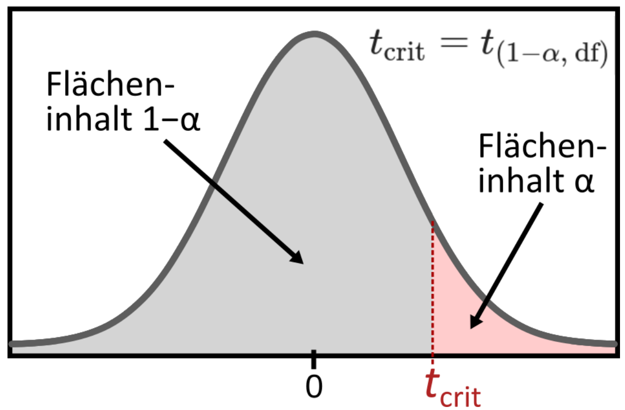
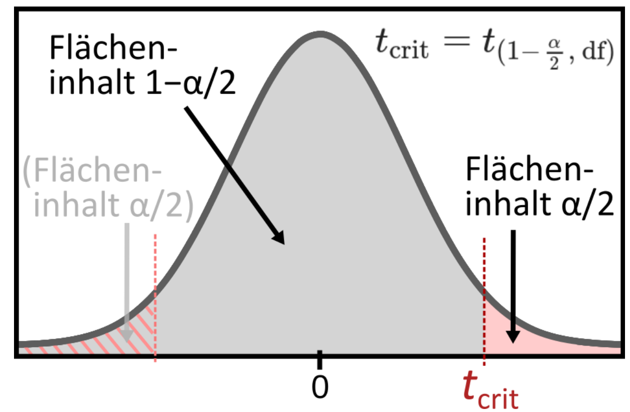
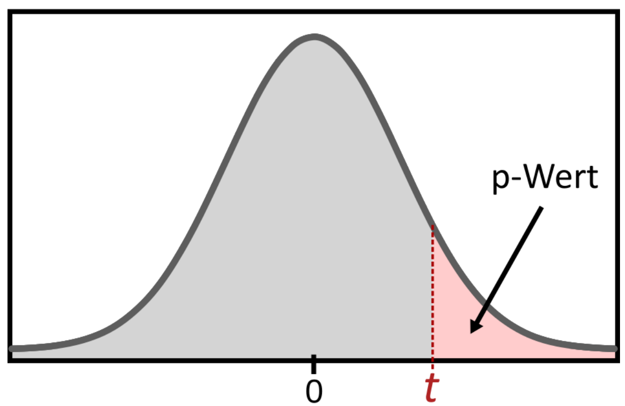
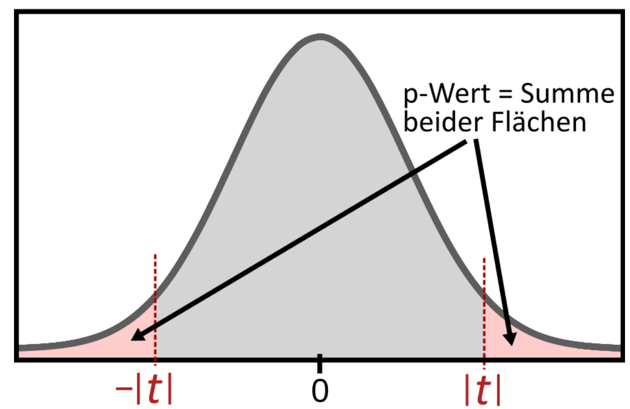
Es gilt: ist $p < \alpha$ lehnen wir die Nullhypothese ab und werten unseren Effekt als statistisch signifikant.

- Der Wert α wird auch **Irrtumswahrscheinlichkeit** genannt — sie gibt das Risiko an, mit dem wir bereit sind, die Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen.
  - Beispiel: ist $\alpha = 0.05$, so gibt es eine 5%-ige Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese abzulehnen, *obwohl sie in Wahrheit zutrifft*.
  - Je kleiner α, desto "konservativer" der Test, d.h. desto eher will ich vermeiden, einen Effekt fälschlicherweise als signifikant zu werten (erhöhe aber dabei mein Risko, einen wahren Effekt zu "verpassen").



3. Signifikanzniveau & ein/zweiseitige Testung

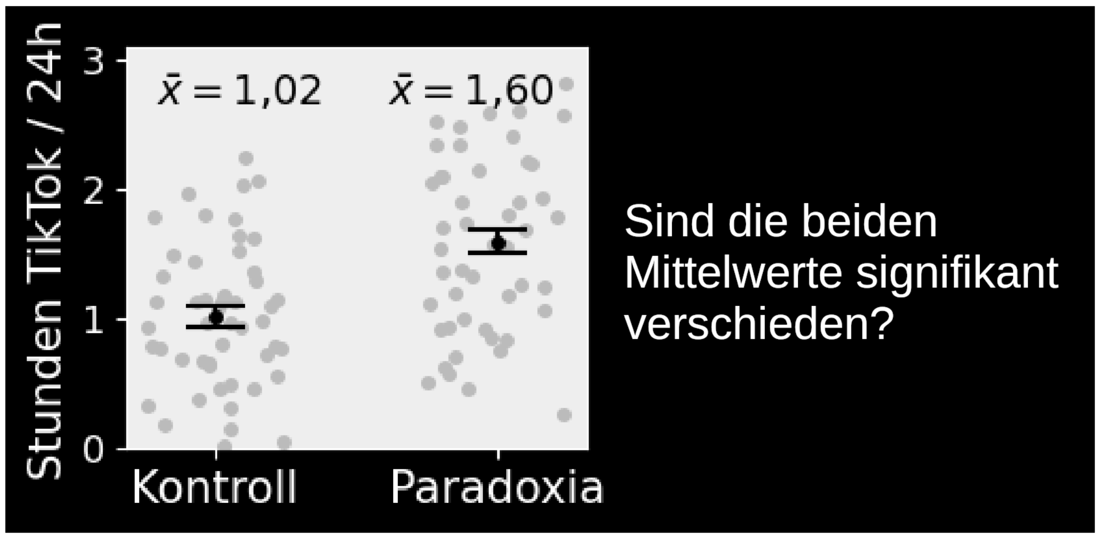
- Abhänging davon, ob die Hypothese gerichtet bzw. ungerichtet wird ein einseitiger bzw. zweiseitiger t-Test durchgeführt.

	Einseitiger Test (gerichtete Hypothese)	**Zweiseitiger Test (ungerichtete Hypothese)**
Berechnung des kritischen t-Wertes		
Berechnung des p-Wertes		

t-Test für Mittelwertdifferenzen

t-Test für Mittelwertdifferenzen

- Zur Erinnerung, bei einem statistischen Test zu Mittelwertdifferenzen stellen wir folgende Fragen:
  - Unterscheidet sich ein Mittelwert signifikant von einem Referenzwert? (Einstichprobentest mit Einzelmessung)
  - Unterscheiden sich die Mittelwerte von zwei abhängigen Bedingungen signifikant voneinander? (Einstichprobentest mit zwei abhängigen Messungen)
  - Unterscheiden sich die Mittelwerte von zwei unabhängigen Stichproben signifikant voneinander? (Zweistichprobentest)
- Beispiel Paradoxia (Zweistichprobentest):



t-Test für Mittelwertdifferenzen

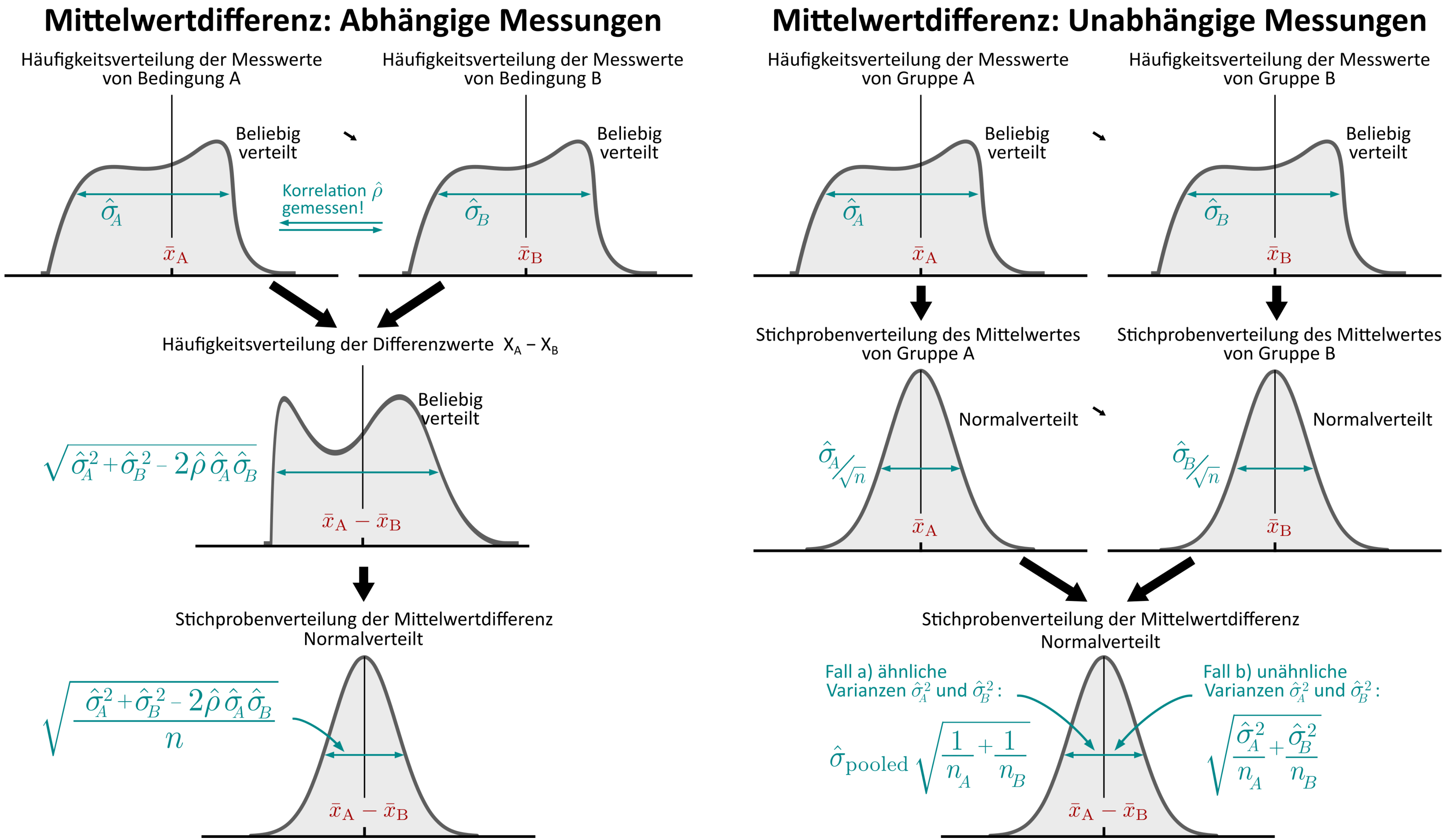
- Um den t-Wert für eine Mittelwertdifferenz $\Delta\bar{x}$ zu erhalten, ersetzen wir $\hat{\theta}$ durch $\Delta\bar{x}$:

$$\text{t-Wert für Mittelwertdifferenz:} \qquad t = \frac{\hat{\theta}}{\hat{se}} = \frac{\Delta\bar{x}}{\hat{se}}$$

- Die Mittelwertdifferenz $\Delta\bar{x}$ ist einfach zu bestimmen, die zentrale Frage lautet daher: **wie berechnet sich der Standardfehler $\hat{se}$ einer Mittelwertdifferenz $\Delta\bar{x}$?**

Der Standardfehler im Nenner des t-Wertes bezieht sich immer auf die Prüfgröße $\hat{\theta}$. Die Frage lautet also bei jedem t-Test: was ist der Standardfehler von $\hat{\theta}$ bzw. was ist die Standardabweichung der Stichprobenverteilung von $\hat{\theta}$?

t-Test: Veranschaulichung der Standardfehler von Mittelwertdifferenzen



Standardfehler bei Mittelwertdifferenzen (σ unbekannt): Cheat sheet

Das folgende Cheat sheet gibt Ihnen eine Übersicht über die Berechnung des Standardfehlers $\hat{se}$ von Mittelwertdifferenzen im Nenner der Prüfgröße $t = \frac{\Delta\bar{x}}{\hat{se}}$:

Fall	Berechnung des Standardfehlers $\hat{se}$
Differenz des Mittelwertes <u>einer Stichprobe</u> und einem Referenzwert μ_0 (→ Einstichproben-t-Test)	$\hat{se} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$
Mittelwertdifferenz abhängiger Messungen A und B in <u>einer Stichprobe</u> (→ Differenzen-t-Test)	$\hat{se} = \frac{\hat{\sigma}_\Delta}{\sqrt{n}} \quad \text{mit}$ $\hat{\sigma}_\Delta = \sqrt{\hat{\sigma}_A^2 + \hat{\sigma}_B^2 - 2\,\hat{\rho}\hat{\sigma}_A\hat{\sigma}_B}$ $\text{oder} \quad \hat{\sigma}_\Delta = \sqrt{\frac{1}{n-1}(\Delta x_i - \Delta\bar{x})^2}$
Mittelwertdifferenz unabhängiger Messungen in <u>zwei Stichproben A und B</u> (ähnliche Varianzen) (→ Klassischer Zweistichproben-t-Test)	$\hat{se} = \hat{\sigma}_{\text{pooled}}\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}$ (siehe Herleitung) $\text{mit} \quad \hat{\sigma}_{\text{pooled}} = \sqrt{\frac{(n_A-1)\hat{\sigma}_A^2+(n_B-1)\hat{\sigma}_B^2}{n_A+n_B-2}}$
Mittelwertdifferenz unabhängiger Messungen in <u>zwei Stichproben A und B</u> (unähnliche Varianzen) (→ Welch's Zweistichproben-t-Test)	$\hat{se} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_A^2}{n_A} + \frac{\hat{\sigma}_B^2}{n_B}}$

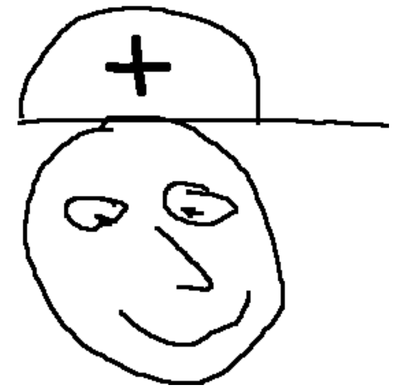
Dieses Cheat Sheet gilt für den Fall, dass die Populationsvarianzen σ_A^2 bzw. σ_B^2 **nicht bekannt** sind. In diesem

Zahl der Freiheitsgrade für t-Tests von Mittelwertdifferenzen

Test	Frage	Zahl der Freiheitsgrade
Einstichprobentest mit Einzelmessung	Ist $\bar{x}$ größer als ein Referenzwert μ_0?	$\mathrm{df} = n - 1$, da für die Berechnung von t genau ein Zwischenparameter bestimmt werden muss (der Mittelwert $\bar{x}$)
Einstichprobentest mit zwei abhängigen Messungen	Unterscheiden sich die Mittelwerte $\bar{x}_A$ und $\bar{x}_B$ zwischen zwei Bedingungen A und B? In diesem Fall kann man auch fragen: ist der Mittelwert der Differenzvariable ($\Delta\bar{x} = \overline{X_A - X_B}$) verschieden von Null?	$\mathrm{df} = n - 1$, da für die Berechnung von t genau ein Zwischenparameter bestimmt werden muss (der Mittelwert $\overline{X_A - X_B}$)
Zweistichprobentest (ähnliche Varianzen)	Unterscheiden sich die Mittelwerte $\bar{x}_A$ und $\bar{x}_B$ zwischen zwei Gruppen A und B? ($\Delta\bar{x} = \bar{x}_A - \bar{x}_B$)	$\mathrm{df} = n_A + n_B - 2$, da für die Berechnung von t genau zwei Zwischenparameter bestimmt werden müssen (die Mittelwerte $\bar{x}_A$ und $\bar{x}_B$)
Zweistichprobentest (unähnliche Varianzen, aka Welch's t-Test)	Unterscheiden sich die Mittelwerte $\bar{x}_A$ und $\bar{x}_B$ zwischen zwei Gruppen A und B? ($\Delta\bar{x} = \bar{x}_A - \bar{x}_B$)	**Welch–Satterthwaite-Gleichung:** $\mathrm{df} = \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_A^2}{n_A} + \frac{\hat{\sigma}_B^2}{n_B}\right)^2}{\frac{\left(\hat{\sigma}_A^2/n_A\right)^2}{n_A - 1} + \frac{\left(\hat{\sigma}_B^2/n_B\right)^2}{n_B - 1}}$ Falls $n_A = n_B = n$: (siehe Intuition) $\mathrm{df} = (n-1)\left(1 + \frac{2}{\left(\frac{\hat{\sigma}_A}{\hat{\sigma}_B}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\sigma}_B}{\hat{\sigma}_A}\right)^2}\right)$

Beispiel: t-Test für unabhängige Gruppen

Betrachten wir das Beispiel Med- versus Psych-Nasen für den Fall, dass wir die Standardabweichungen σ_{med} und σ_{psych} von Nasenlängen in der Med- und Psych-Population nicht kennen.



Es gilt immer noch:

$$\Delta\bar{x} = \bar{x}_{\text{med}} - \bar{x}_{\text{psych}} = 0.2cm$$

.. aber σ_{med} und σ_{psych} müssen jetzt aus unseren Messwerten geschätzt werden. Für das Beispiel nehmen wir an:

$$\hat{\sigma}_{\text{med}} = 0.5 \qquad \hat{\sigma}_{\text{psych}} = 0.2$$

Wir schlagen die Formel für den Standardfehler bei unabhängigen Messungen und unähnlichen Varianzen ($\frac{\hat{\sigma}_{\text{med}}}{\hat{\sigma}_{\text{psych}}} > 2$!) nach und setzen ein:

$$\hat{se} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_{\text{med}}}{n_{\text{med}}} + \frac{\hat{\sigma}^2_{\text{psych}}}{n_{\text{psych}}}} \overset{(Computer)}{=} 0.098$$

(Erinnerung: es galt $n_{\text{med}} = n_{\text{psych}} = 30$)

Beispiel: t-Test für unabhängige Gruppen

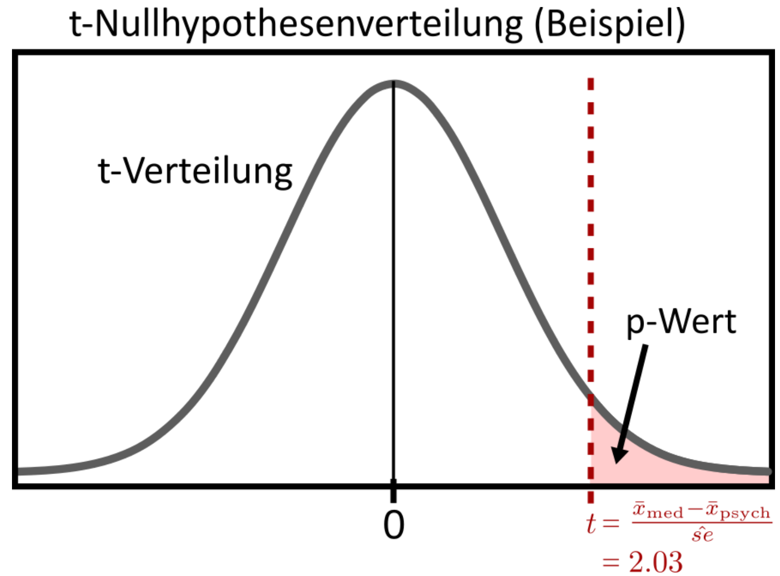
Mit dem Standardfehler bewaffnet, können wir nun den t-Wert berechnen:

$$t = \frac{\Delta\bar{x}}{\hat{se}} = \frac{0.2}{0.098} = 2.03$$

Es fehlen noch die Freiheitsgrade. Bei ungleichen Varianzen ist die Formel recht sperrig:

$$\mathrm{df} = (n-1)\left(1 + \frac{2}{\left(\frac{\hat{\sigma}_{\mathrm{med}}}{\hat{\sigma}_{\mathrm{psych}}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\sigma}_{\mathrm{psych}}}{\hat{\sigma}_{\mathrm{med}}}\right)^2}\right) =$$

$$= (30-1)\left(1 + \frac{2}{\left(\frac{0.5}{0.2}\right)^2 + \left(\frac{0.2}{0.5}\right)^2}\right) = 38.05$$



Aufgrund der gerichteten (positiven) Hypothese ist der p-Wert die Fläche *rechts des t-Wertes* unter der t-Verteilung:

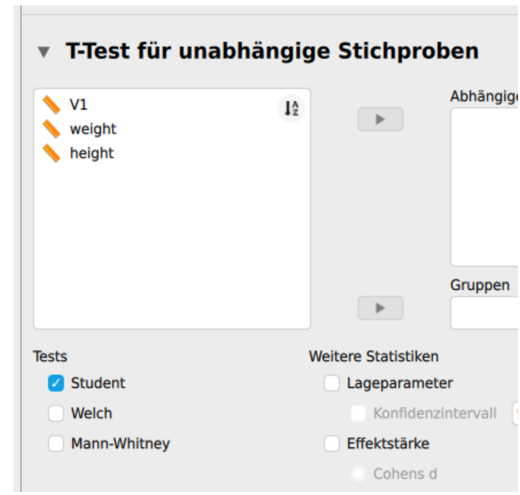
$$p = \int_t^\infty f_t(x|\mathrm{df})dx = \int_{2.03}^\infty f_t(x|38.05)dx = 1 - F_t(2.03|38.05) \overset{(Computer)}{=} 0.025$$

Der p-Wert ist dem p-Wert des z-Tests (0.023) sehr ähnlich. Dies ist wenig überraschend, da a) der Standardfehler einen ähnlichen Wert aufwies ($se = 0.1$ beim z-Test) und b) die Zahl er Freiheitsgrade so hoch ist, dass der Unterschied Normalverteilung vs. t-Verteilung marginal ist.

t-Test für unabhängige Stichproben

Klassischer Zweistichproben-t-Test (ähnliche Varianzen) versus Welch's t-Test (unähnliche Varianzen) — welcher der beiden Tests sollte nun verwendet werden?

- In der Psychologie sind ungleiche Varianzen die realistischere Annahme. Selbst bei randomisiert-kontrollierten Studien, bei denen Versuchspersonen den Gruppen aus einer identischen Ursprungs-Population zugewiesen werden, kann das Treatment selbst einen Einfluss auf die Varianz haben.
- Neben der Faustformel $0.5 \leq \frac{\hat{\sigma}_A}{\hat{\sigma}_B} \leq 2$ gibt es auch Testverfahren zur Überprüfung der Varianzgleichheit zwischen Gruppen, allerdings sind diese nicht unproblematisch
  - Ein Grund:auf Varianzgleichheit wird idR auf Basis eines nicht-signifikanten Ergebnis in einem solchen Test angenommen — "absence of evidence is not evidence of absence"[1]
- Herrscht Varianzgleichheit vor und ist die Stichprobengröße nicht extrem klein in einer Gruppe, kommen der Student'sche t-Test und Welch's t-Test zu sehr ähnlichen Ergebnissen.
- Vor diesem Hintergrund wird empfohlen[2], bereits ab moderaten Gruppengrößen (ca. $n \geq 8$ pro Gruppe) *immer* Welch's t-Test anzuwenden. In den meisten Statistikprogrammen ist dieser Test implementiert.

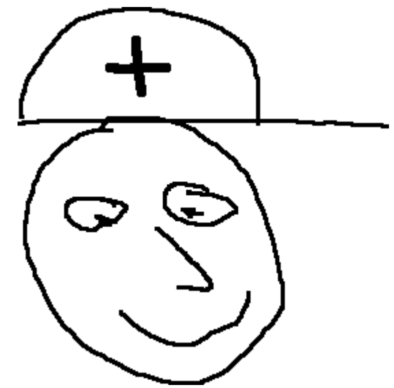


Option für Welch's t-test in JASP.

Beispiel: t-Test für abhängige Messungen

Sie führen ein Experiment *innerhalb der Med-Gruppe* (n=32) durch. In einer experimentellen Intervention stellen Sie den Med-Studierenden die Frage

> Studieren Sie Medizin, weil es der Wunsch Ihrer Eltern ist?



Sie messen die Nasenlängen dabei sowohl vor ("pre"), als auch nach ("post") der Intervention. Ihre ungerichtete Hypothese ist, dass sich die Nasenlängen vor und nach der Intervention auf einem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ unterscheiden.

Die Mittelwertdifferenz betrage $\Delta\bar{x} = \bar{x}_{\text{post}} - \bar{x}_{\text{pre}} = 0.1cm$.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die beiden Messungen X_{pre} und X_{post} unkorreliert sind, d.h. $\hat{\rho} = 0$. Die Standardabweichungen seien $\hat{\sigma}_{\text{pre}} = \hat{\sigma}_{\text{post}} = 0.5$. Die Standardabweichung $\hat{\sigma}_\Delta$ der Differenzvariable ΔX ist damit:

$$\hat{\sigma}_\Delta = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\text{pre}} + \hat{\sigma}^2_{\text{post}} - 2\,\hat{\rho}\hat{\sigma}_{\text{pre}}\hat{\sigma}_{\text{post}}} = \sqrt{(0.5)^2 + (0.5)^2 - 0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Standardfehler:} \qquad \hat{se} = \frac{\hat{\sigma}_\Delta}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{32}} = \frac{1}{8}$$

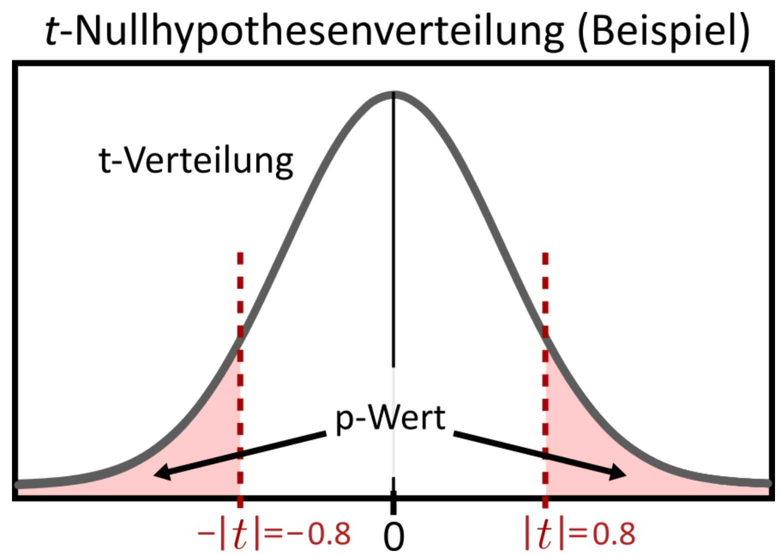
Beispiel: t-Test für abhängige Messungen

Nun können wir den t-Wert berechnen:

$$t = \frac{\Delta\bar{x}}{\hat{se}} = \frac{0.1}{1/8} = 0.8$$

Aufgrund der ungerichteten Hypothese ist der p-Wert die Summe der Flächen unter der t-Verteilung links von $-|t| = -0.8$ und rechts von $+|t| = 0.8$.

Bei $\mathrm{df} = n - 1 = 31$ Freiheitsgraden gilt:



$$p = \int_{-\infty}^{-t} f_t(x|\mathrm{df})dx + \int_{t}^{\infty} f_t(x|\mathrm{df})dx \overset{(Symmetrie)}{=} 2 \cdot \int_{-\infty}^{-t} f_t(x|\mathrm{df})dx =$$

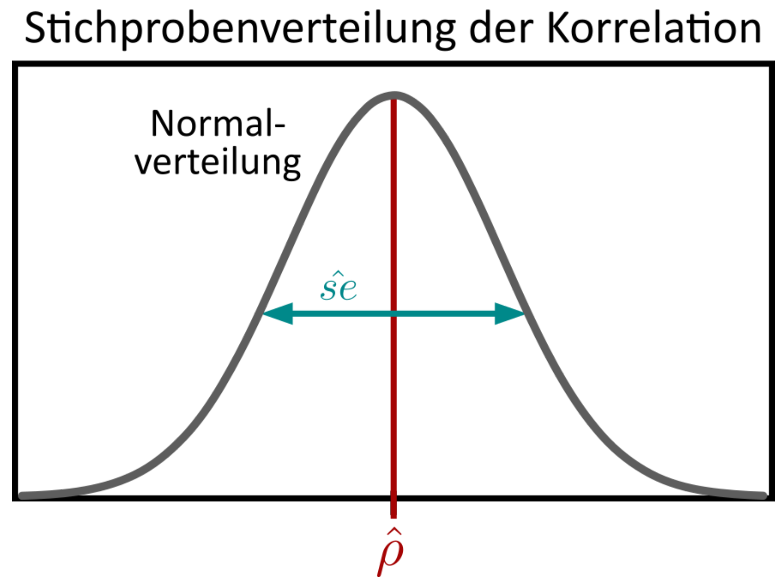
$$= 2 \cdot F_t(-t|\mathrm{df}) \overset{(einsetzen)}{=} 2 \cdot F_t(-0.8|31) \overset{(Computer)}{=} 0.43$$

Der p-Wert ist also deutlich größer als unser Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ und wir können die Nullhypothese $\Delta\bar{x} = 0$ nicht ablehnen. More research is needed!

t-Test für die Korrelation

Stichprobenverteilung der Korrelation $\hat{\rho}$

- Analog zu Mittelwertsunterschieden kann auch die **Stichprobenverteilung der Korrelation** aufgestellt werden: als **Normalverteilung** mit dem **Mittelwert unserer Kennwertschätzung (hier $\hat{\rho}$)** und einer Streuung, die dem **Standardfehler** ($\hat{se}$) des Kennwertes entspricht.



- Den Standardfehler der Korrelation haben wir bereits in Vorlesung 08 kennengelernt:

$$\hat{se}(\hat{\rho}) = \sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2}{n-2}}$$

- Auch dieser Standardfehler ist eine Schätzung auf Basis der Stichprobe und entsprechend stellt die standardisierte Prüfgröße einen t-Wert dar:

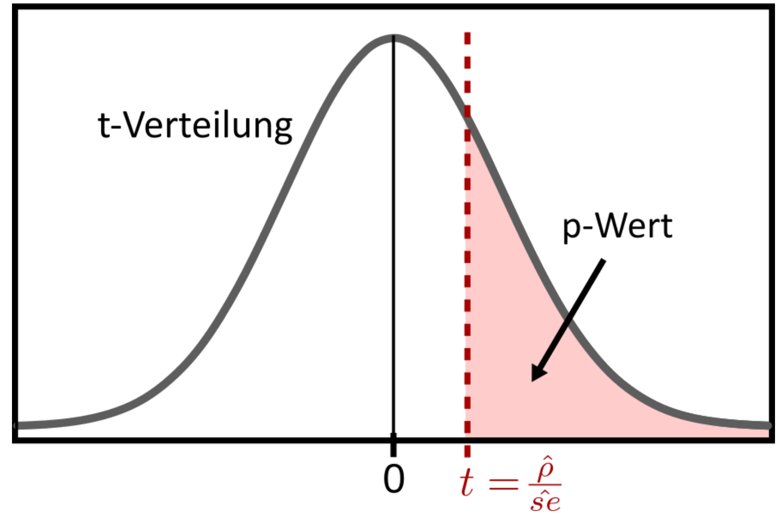
$$t = \frac{\hat{\rho}}{\hat{se}(\hat{\rho})} = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{\rho}^2}}$$

(Präziser gesagt handelt es sich auch hier wieder um das Verhältnis einer normalverteilten Variable ($\hat{\rho}$) und einer chi-verteilten Variable ($\hat{se}(\hat{\rho})$) — ein solches Verhältnis führt zu einer t-verteilten Prüfgröße)

Nullhypothese und Hypothesentestung bei Korrelationen

- Die **Nullhypothesenverteilung** der Korrelation ist also eine **t-Verteilung**.
- Die Nullhypothese entspricht der Annahme, dass der wahre Zusammenhang in der Population $\rho = 0$ ist.
- Auch hier können wir gerichtete und ungerichtete Hypothesen testen:
  - Gerichtete Hypothesen:
    - die Korrelation ist größer 0 ($\rho > 0$)
    - die Korrelation ist kleiner 0 ($\rho < 0$)
  - Ungerichtete Hypothese: die Korrelation ist ungleich 0 ($\rho \neq 0$)

t-Test für Korrelation
Nullhypothesenverteilung



- Die Berechnung der p-Werte erfolgt analog wie bei Mittelwertunterschieden.

Die Zahl der Freiheitsgrade der Korrelation ist $\mathrm{df} = n - 2$. Grund: die Streuung $\hat{se}$ im Nenner des t-Wertes enthält den Korrelationskoeffizient $\hat{\rho}$ und dieser involviert die Berechnung von **zwei** Mittelwerten (Mittelwert $\bar{x}$ der Variable X und Mittelwert $\bar{y}$ der Variable Y).

Beispiel: Bestimmung des p-Wertes bei der Korrelation

- Nehmen wir an, die Korrelation von Größe und Gewicht in einer Stichprobe von $n = 12$ betrage $\hat{\rho} = 0.4$.
- Wir wollen testen, ob der Korrelationskoeffizient $\hat{\rho}$ auf einem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ signifikant größer als 0 ist.
- Berechnung von der Prüfgröße t:

$$t = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{\rho}^2}} = 0.4\sqrt{\frac{12-2}{1-0.4^2}} \overset{(Computer)}{=} 1.38$$

- Wir sehen in der Tabelle, dass der kritische t-Wert für $\mathrm{df} = n - 2 = 10$ Freiheitsgrade bei einem (einseitigen!) Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ gleich 1.813 beträgt.
- Die Nullhypothese wird also nicht abgelehnt, und der Effekt als nicht signifikant gewertet.

Tabelle der t-Verteilung

	Fläche				
df	0,85	0,9	0,95	0,975	0,99
1	1,964	3,078	6,314	.2,706	31,821
2	1,386	1,886	2,92	4,303	6,965
3	1,25	1,638	2,353	3,182	4,541
4	1,19	1,533	2,132	2,776	3,747
5	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365
6	1,134	1,44	1,943	2,447	3,143
7	1,119	1,415	1,895	2,305	2,998
8	1,108	1,397	1,86	2,306	2,896
9	1,1	1,383	1,833	2,262	2,821
10	1,093	1,372	1,813	2,228	2,764
30	1,055	1,31	1,697	2,042	2,459
40	1,05	1,303	1,684	2,021	2,423
60	1,046	1,296	1,071	1,997	2,39
120	1,041	1,289	1,658	1,98	2,358
∞	1,039	1,282	1,645	1,96	2,326

Beispiel: Bestimmung des p-Wertes bei der Korrelation

- Statistische Programme geben den p-Wert in der Regel automatisch mit an und es ist somit ersichtlich, ob es sich um eine statistisch signifikante Korrelation handelt.
- **Standardmäßig** handelt es sich dabei immer um einen **Test für die ungerichtete Hypothese $\rho \neq 0$.**
- War die Hypothese dagegen gerichtet, gilt:
  - Falls das Vorzeichen von $\hat{\rho}$ in Richtung der Hypothese ist, halbiere den p-Wert der ungerichteten Hypothese.
  - Falls das Vorzeichen von $\hat{\rho}$ in gegensätzlicher Richtung der Hypothese ist, halbiere den p-Wert der ungerichteten Hypothese *und ziehe dieses Ergebnis von 1 ab*.
- Im Beispiel mit $\hat{\rho} = 0.4$ gibt JASP für den p-Wert der *ungerichteten Hypothese* $\rho \neq 0$ an: $p = 0.198$
  - Der p-Wert für die *gerichtete Hypothese* $\rho > 0$ wäre daher $p = 0.198/2 = 0.099$
  - Im Falle der umgekehrten *gerichteten Hypothese* $\rho < 0$ würde gelten: $p = 1 - 0.198/2 = 1 - 0.099 = 0.901$

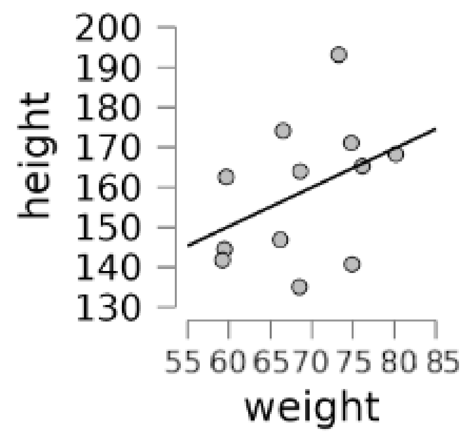
Korrelation

```
jaspRegression::Correlation(
    version = "0.17.2",
    scatterPlot = TRUE,
    variables = list("height", "weight"))
```

Pearsons Korrelationen

Variable		height	weight
1. height	Pearsons r	—	
	p-Wert	—	
2. weight	Pearsons r	0.400	—
	p-Wert	0.198	—

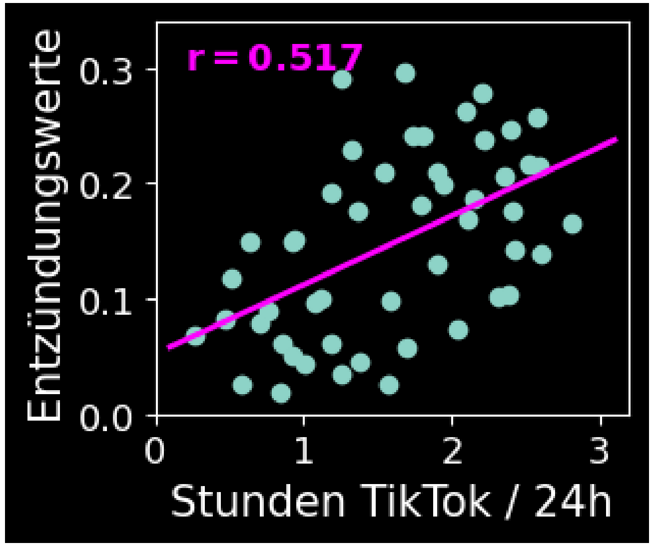
Streudiagramm



Auswahl in JASP: Regression → Klassisch → Korrelation. Zusätzliche Selektion des Streudiagramms.

[[Zusammenfassung]]

- Wird der Standardfehler auf Basis der Stichprobe als $\hat{se}$ geschätzt, folgt die Prüfgröße $\frac{\hat{\theta}}{\hat{se}} (= t)$ einer **t-Verteilung.**
- Die t-Verteilung **nähert sich für $n \rightarrow \infty$ der Standardnormalverteilung an.** Bei kleineren Fallzahlen n hat die t-Verteilung etwas dickere Flanken.
- Der **prinzipielle Ansatz ist beim t-Test identisch zum z-Test**: Bestimmung der Fläche für Wertebereiche extremer als die Prüfgröße (hier t).
- **t-Test von Mittelwertdifferenzen** ($t = \frac{\Delta \bar{x}}{\hat{se}}$): je nach Szenario werden unterschiedliche t-Test-Varianten angwendet. Sie unterscheiden sich hinsichtlich:
  - Zahl der Freiheitsgrade df
  - Standardfehler $\hat{se}$
- **Korrelation**: Berechnung des t-Wertes erfolgt analog mittels $t = \frac{\hat{\rho}}{\hat{se}(\hat{\rho})}$.
  - Der Standardfehler der Korrelation hängt von der Korrelation $\hat{\rho}$ und der Stichprobengröße n ab: $\hat{se}(\hat{\rho}) = \sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2}{n-2}}$
- Auch für Regressionskoeffizienten lassen sich t-Tests durchführen → Bonuscontent

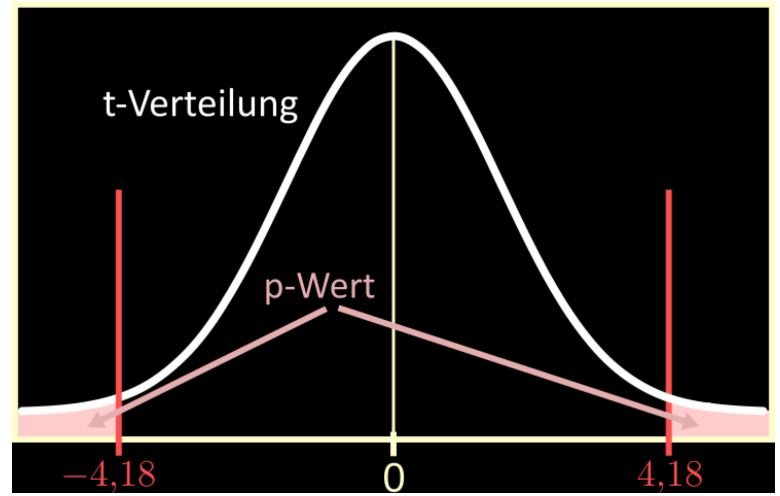


Stichwort Signifikanz von Zusammenhängen: die Signifikanz des unerwarteten Zusammenhangs von TikTok-Onlinezeit und Entzündungswerten haben Sie bislang nicht getestet.

Basierend auf dem Korrelationskoeffizienten $\hat{\rho} = 0.517$ und der Stichprobengröße $n = 50$ ergibt sich die Prüfgröße t direkt:

$$t = \frac{\hat{\rho}}{\hat{se}(\hat{\rho})} = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{\rho}^2}} = 0.517\sqrt{\frac{50-2}{1-0.517^2}} = 4.18$$

Der Zusammenhang war unerwartet und es gab dementsprechend keine gerichtete Hypothese. Der p-Wert ist in diesem Fall also der doppelte Wert der Fläche rechts des (positiven) t-Werts von 4.18, oder analog, der doppelte Wert links des negierten t-Werts -4.18.



$$p = 2\int_{-\infty}^{-4.18} f_t(x|\mathrm{df})dx = 2F_t(-4.18|48) = 0.0001$$

(Die Zahl der Freiheitsgrade beim t-Test der Korrelation ist $n-2$)

Der Zusammenhang von TikTok-Onlinezeit und Entzündungswerten ist also deutlich signifikant.

Trotz des hochsignifikanten Effektes bleiben Sie skeptisch — Ihr größtes Fragezeichen: was ist Ursache, was ist Wirkung? Folgen erhöhte Entzündungswerte tatsächlich auf TikTok-Konsum (einschlägiger Kanäle)? Oder ist es einfach so, dass Erkrankte (mit erhöhten Entzündungswerten) Rat und Solidarität auf TikTok suchen?

Um die Gruppen*unterschiede* nun ebenfalls mithilfe des t-Tests zu überprüfen, listen Sie nochmals alle relevanten Werte auf, die Sie zum Teil bereits beim z-Test bestimmt hatten:

	Fallzahl n	$\Delta\bar{x}$	**Standardfehler** $\hat{se}$	**Freiheitsgrade** df
TikTok	2×50	0.577	0.123	93.7
Entzündung	2×50	0.0243	0.0147	96.2

- Neu hinzugekommen sind die Freiheitsgrade, die Sie in der Tabelle mit der Formel für ungleiche Varianzen bestimmt haben:

$$\mathrm{df} = (n-1)\left(1 + \frac{2}{\left(\frac{\hat{\sigma}_{\text{control}}}{\hat{\sigma}_{\text{paradoxia}}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\sigma}_{\text{paradoxia}}}{\hat{\sigma}_{\text{control}}}\right)^2}\right)$$

(Es galt TikTok: $\hat{\sigma}_{\text{control}} = 0.55; \hat{\sigma}_{\text{paradoxia}} = 0.68$ | Entzündung: $\hat{\sigma}_{\text{control}} = 0.068; \hat{\sigma}_{\text{paradoxia}} = 0.078$)

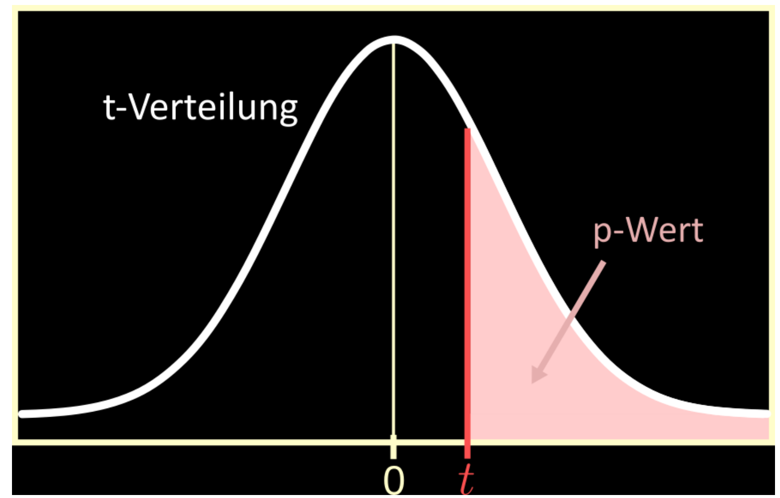
Mit diesen Information erhalten Sie folgende t-Werte (* in diesem Fall identisch mit den z-Werten!):

$$\text{TikTok:} \qquad t = \frac{\Delta\bar{x}}{\hat{se}} = \frac{0.577}{0.123} = 4.69$$

$$\text{Entzündung:} \qquad t = \frac{\Delta\bar{x}}{\hat{se}} = \frac{0.0243}{0.0147} = 1.65$$

Statt der Standardnormalverteilung integrieren Sie nun einfach die entsprechende Fläche unter der t-Verteilung:

$$p = \int_t^\infty f_t(x|\mathrm{df})dx = 1 - F_t(t|\mathrm{df})$$



(*) Warum identisch? Weil wir für die z-Werte — in Abwesenheit anderweitig bekannter Werte — ebenfalls die Stichprobenstreuung verwendet hatten.

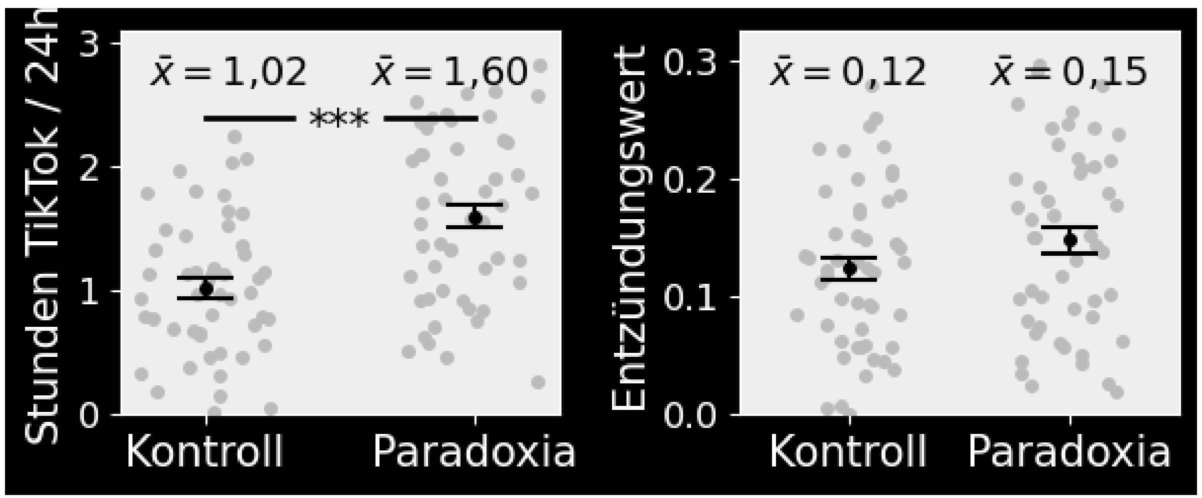
Die große Frage ist: würden weiterhin beide Effekte signifikant bleiben? Antwort:

$$\text{TikTok:} \qquad p = 1 - F_t(4.83|93.7) \overset{\text{(Computer)}}{=} 0.000003$$

$$\text{Entzündung:} \qquad p = 1 - F_t(1.65|96.2) \overset{\text{(Computer)}}{=} 0.051$$

Kurios — das Pendel beim Entzündungseffekt schlägt exakt auf der anderen Seite des Signifikanzniveaus aus! Der Effekt ist nun nicht mehr signifikant. Der TikTok-Effekt bleibt stabil.

Bei beiden Effekten zeigt sich die leicht konservativere Natur der t-Verteilung. Die stärkeren Flanken im Vergleich zur Normalverteilung führen zu geringfügig höheren p-Werten. Notgedrungen müssen Sie Ihre zentrale Grafik anpassen und das Signifikanzsternchen beim Entzündungseffekt entfernen:



Vor dem Hintergrund dieser neuen Ergebnisse, stellen sich eine Reihe von Fragen:

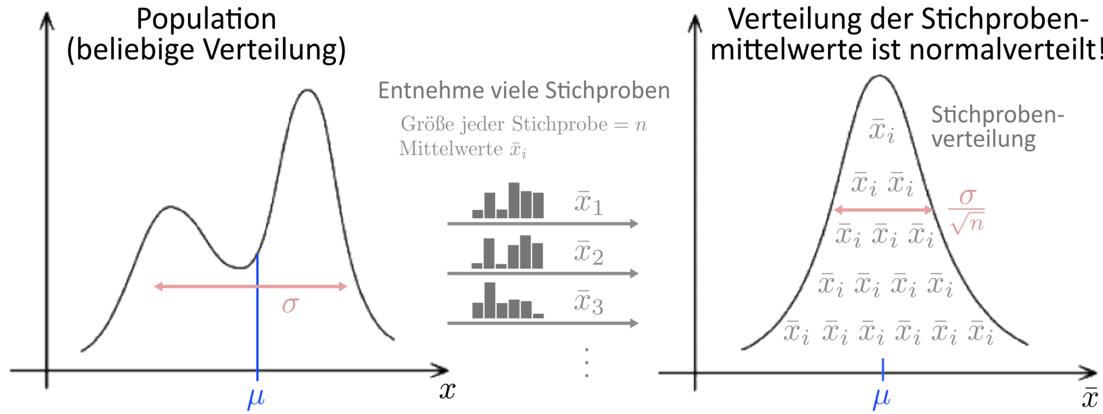
- Ist die Interpretation der Signifikanz fundamental verschieden zwischen dem z- und dem t-Test?
- Ist die Entzündungshypothese eindeutig widerlegt?
- Können Sie aus dem hochsignifikanten Effekt der TikTok-Hypothese und dem nicht-signifikanten Effekt der Entzündungshypothese schlussfolgern, dass der TikTok-Effekt signifikant stärker ist?
- Können Sie schlusfolgern, dass Paradoxia eindeutig durch den TikTok-Effekt verursacht wird?

Bonuscontent

t-Test & Normalverteilung

Warum ist die Normalverteilung des Merkmals X eine (theoretische) Vorausetzung für den t-Test?

Eigentlich hatten wir ja festgestellt, dass Stichprobenverteilungen der Kennwerte $\hat{\theta}$ *unabhängig von der Verteilung des Merkmals* X normalverteilt sind (vgl. zentraler Grenzwertsatz / Vorlesung 08).



<u>Ein Grund:</u> damit $t = \hat{\theta} / \hat{se}$ einer t-Verteilung folgt, müssen der Stichprobenkennwert $\hat{\theta}$ und sein Standardfehler $\hat{se}$ unabhängig sein (dürfen nicht korrelieren). Dies ist genau dann erfüllt, *wenn das gemessene Merkmal X einer Normalverteilung folgt* — tatsächlich lässt sich genau mit dieser Bedingung die Normalverteilung ableiten. Insofern wirkt sich hier die Merkmalsverteilung von X doch auf die Stichprobenverteilung von $\hat{\theta}$ aus.

Aber wie erwähnt: trotz dieses theoretischen Fallstricks ist der t-Test in der Praxis auch bei nicht-normalverteilten Populationsvariablen X recht robust.

Die t-Verteilung ist bereits standardisiert

Vor der Einführung des z-Tests hatten wir zunächst die **unstandardisierte Normalverteilung** kennengelernt, die durch zwei Parameter definiert ist: Mittelwert μ und Standardabweichung σ:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Verwenden wir statt x die standardisierte Variable $\frac{x-\mu}{\sigma}$, vereinfacht sich die Nullhypothesen-Verteilung zur **Standardnormalverteilung**:

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Die Standardnormalverteilung hat keinen Parameter mehr (nur noch die *Variable* x). Da es sich beim z-Wert auch um eine standardisierte Variable handelte, konnten wir auch für z eine Standardnormalverteilung annehmen:

$$f(z) = \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Die **t-Verteilung** hatten wir dagegen direkt auf Basis der standardisierten Prüfgröße $\frac{\hat{\theta}}{\hat{se}}$ eingeführt. **Die klassische t-Verteilung ist aus diesem Grund bereits eine standardisierte Verteilung, die nicht mehr vom Mittelwert oder Streuung abhängt.** Im Gegensatz zur Standardnormalverteilung hat sie aber noch einen Parameter: die Zahl der Freiheitsgrade df.

Unstandardisierte t-Verteilung

KEIN KLAUSUR STOFF

Die Formel für die klassische (standardisierte) t-Verteilung lautet:

$$f_t(x|\mathrm{df}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mathrm{df}+1}{2}\right)}{\sqrt{\mathrm{df}\,\pi}\,\Gamma\left(\frac{\mathrm{df}}{2}\right)}\left(1+\frac{1}{\mathrm{df}}x^2\right)^{-\frac{\mathrm{df}+1}{2}} \qquad (\Gamma \text{ ist die Gamma-Funktion})$$

Wie die Standardnormalverteilung hat die t-Verteilung Mittelwert 0 (daher kann sie als Nullhypothesenverteilung fungieren). Ihre Streuung ist jedoch nicht exakt 1, sondern hängt von der Zahl der Freiheitsgrade ab: $\sigma^2 = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{df}-2}$.

Auch zur t-Verteilung gibt es ein unstandardisiertes Pendant, die **nicht-standardisierte t-Verteilung**, die von Mittelwert μ und Streuung σ abhängt:

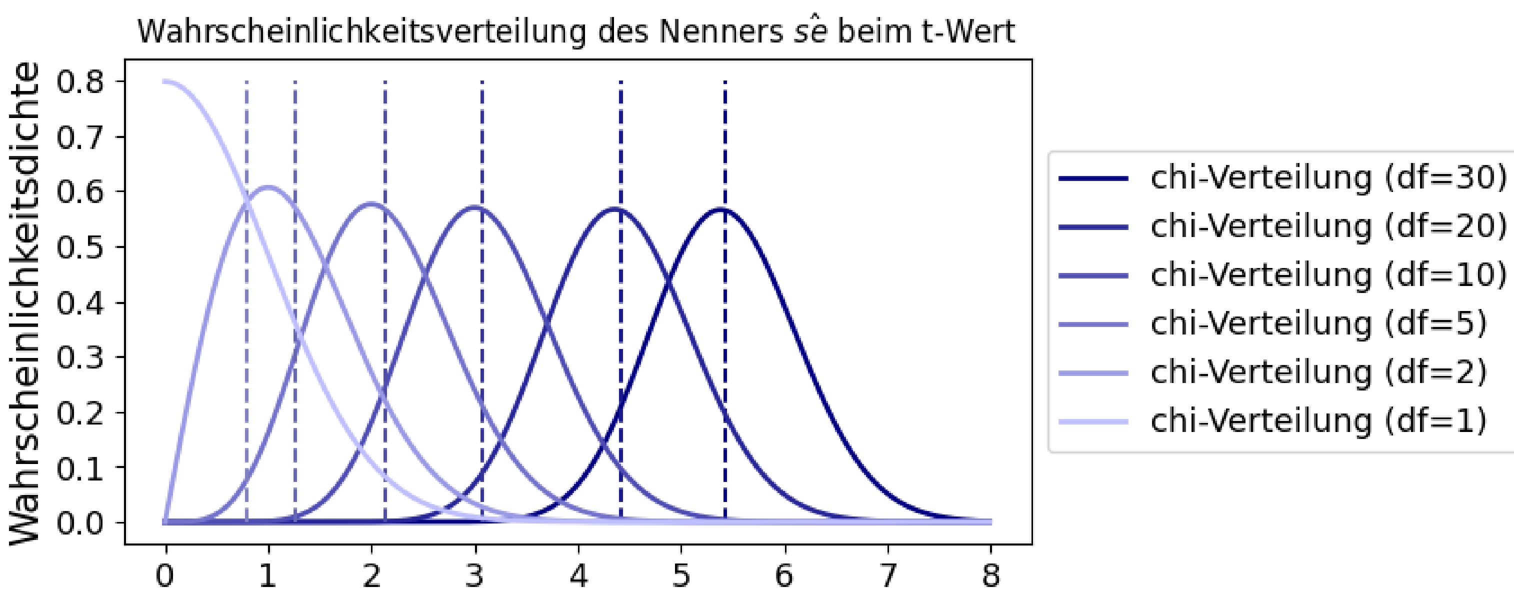
$$f_t(x|\mu,\sigma,\mathrm{df}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mathrm{df}+1}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\mathrm{df}\,\pi}\,\Gamma\left(\frac{\mathrm{df}}{2}\right)}\left(1+\frac{1}{\mathrm{df}}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)^{-\frac{\mathrm{df}+1}{2}}$$

Ähnlich wie beim z-Test hat es sich in der Praxis aber durchgesetzt immer mit standardisierten Prüfgrößen (wie z oder t) zu arbeiten. Daher finden die unstandardisierten Normal- und t-Verteilungen im Kontext der Hypothesentestung seltener Anwendung.

Der **Vorteil standardisierter Prüfgrößen** ist, dass diese vergleichbar zwischen Studien sind. Ein bestimmter z- oder t-Wert hat eine Aussagekraft, ohne den Standardfehler einer Studie zu kennen.

Intuition: verdickte Flanken der t-Verteilung

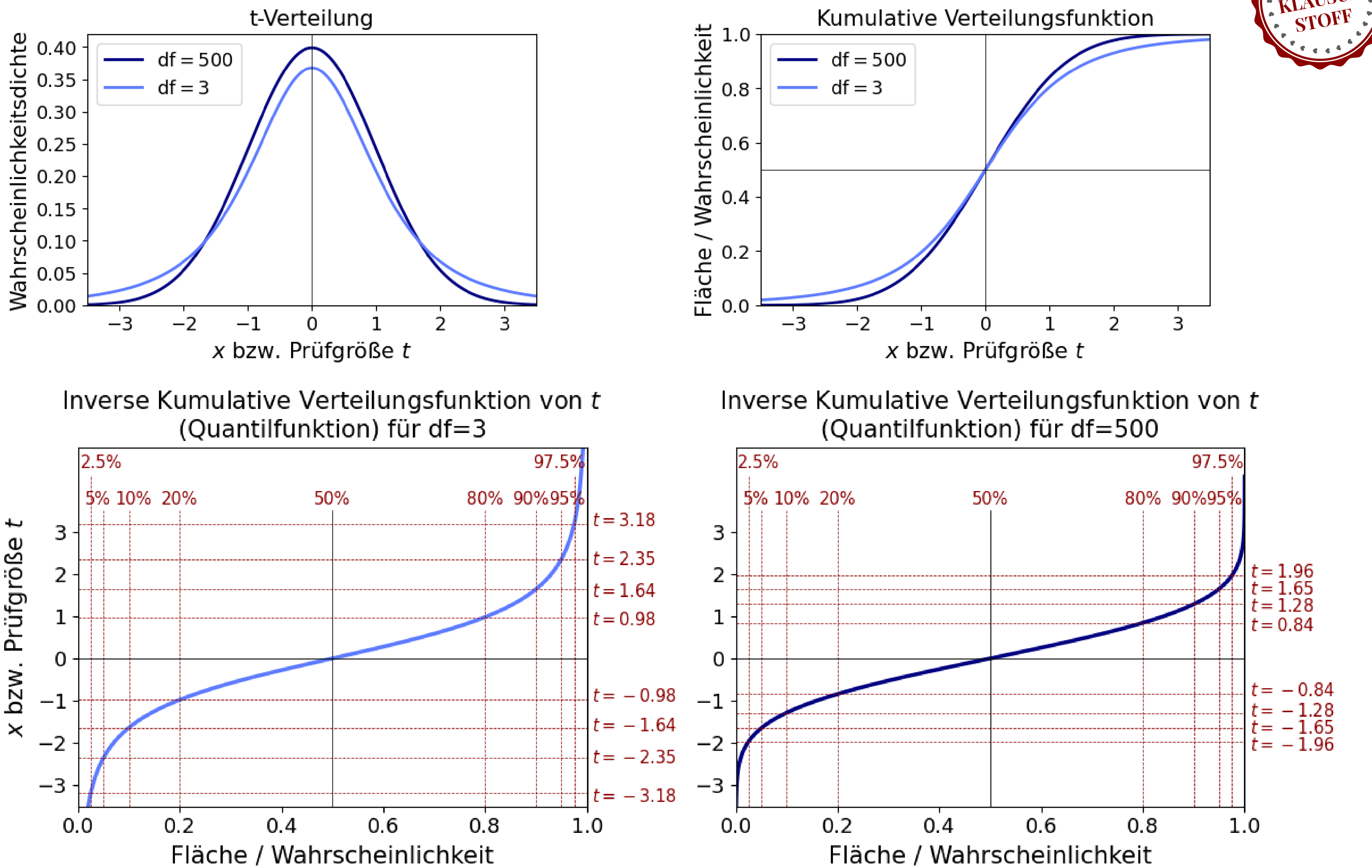
- Warum sind die Flanken der Verteilung der Testgröße $t = \frac{\hat{\theta}}{\hat{se}}$ stärker ausgeprägt, wenn $\hat{se}$ auf Basis der Stichprobe geschätzt werden muss?
- Der Grund liegt in der (Chi-)Verteilung der Zufallsvariable $\hat{se}$ im Nenner:
  - Bei kleinen Stichprobengrößen (kleines df), gibt es eine Assymmetrie der Verteilung hin zu Werten kleiner dem Mittelwert (welcher die korrekte Schätzung von se repräsentiert — in der Abbildung gestrichelte Linien)
  - D.h. wir *teilen* $\hat{\theta}$ *überproportional häufig durch zu kleine Werte*, wodurch die *Teststatistik* $t = \frac{\hat{\theta}}{\hat{se}}$ *überproportional häufig zu extreme (negative oder positive) Werte* liefert.
  - Dies führt zu den stärkeren Flanken der t-Verteilung!



KEIN KLAUSUR STOFF

Funktionen der t-Verteilung

KEIN KLAUSUR STOFF



Herleitung des gepoolten Standardfehlers

- Im Fall unabhängiger Messungen und ähnlicher Varianzen wird eine **gepoolte Streuung** $\hat{\sigma}_{\text{pooled}}$ herangezogen:

$$\hat{se} = \hat{\sigma}_{\text{pooled}} \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}$$

- Zur Herleitung dieser Formel starten wir mit der allgemeinen Varianzsummenformel: wir wissen, dass sich die Varianzen der beiden Stichprobenmittelwerte (=quadrierte Standardfehler $\hat{se}_A^2$ und $\hat{se}_B^2$) aufaddieren:

$$\hat{se}^2 = \hat{se}_A^2 + \hat{se}_B^2 \quad \rightarrow \quad \hat{se} = \sqrt{\hat{se}_A^2 + \hat{se}_B^2} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_A^2}{n_A} + \frac{\hat{\sigma}_B^2}{n_B}}$$

- Können die Varianzen $\hat{\sigma}_A^2$ und $\hat{\sigma}_B^2$ als ähnlich angenommen werden, gilt folgende Überlegung: statt beide Varianzen einzeln zu schätzen, wird eine einheitliche gepoolte Varianz $\hat{\sigma}_{\text{pooled}}^2$ auf Basis beider Stichproben geschätzt.
  - Vorteil: diese Varianz kann präziser geschätzt werden als die Einzelvarianzen, da die kombinierte Stichprobenzahl $n_A + n_B$ zugrundegelegt wird.
- Wir ersetzen also $\hat{\sigma}_A^2$ und $\hat{\sigma}_B^2$ jeweils durch $\hat{\sigma}_{\text{pooled}}^2$:

$$\hat{se} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\text{pooled}}^2}{n_A} + \frac{\hat{\sigma}_{\text{pooled}}^2}{n_B}} = \hat{\sigma}_{\text{pooled}} \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} \qquad \text{q.e.d.}$$

KEIN KLAUSUR STOFF

Intuition zur Welch–Satterthwaite-Gleichung

Auch wenn die Welch–Satterthwaite-Gleichung für die Freiheitsgrade beim Zweistichproben-t-Test mit unähnlichen Varianzen recht kompliziert aussieht, ist eine nähere Betrachtung aufschlussreich.

Für $n_A = n_B = n$ gilt:

$$\mathrm{df} = (n-1)\left(1 + \frac{2}{\left(\frac{\hat{\sigma}_A}{\hat{\sigma}_B}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\sigma}_B}{\hat{\sigma}_A}\right)^2}\right)$$

Zwei Fälle sind interessant:

<u>Fall 1: Sind die Varianzen gleich</u> (entgegen der Annahme), d.h. $\hat{\sigma}_A = \hat{\sigma}_B$, so vereinfacht sich die Formel im Grenzfall zu

$$\mathrm{df} = (n-1)(1 + \frac{2}{2}) = 2n - 2,$$

also exakt die Formel des klassichen Zweistichprobentests.

KEIN KLAUSUR STOFF

Intuition zur Welch–Satterthwaite-Gleichung

Fall 2: Sind die Varianzen extrem unterschiedlich, so wird entweder $\left(\frac{\hat{\sigma}_A}{\hat{\sigma}_B}\right)^2$ oder $\left(\frac{\hat{\sigma}_B}{\hat{\sigma}_A}\right)^2$ extrem groß und die Formel vereinfacht sich zu

$$\mathrm{df} = (n-1)(1+\frac{2}{\infty}) = (n-1)(1+0) = n-1$$

also exakt die Formel des Einstichprobentests.

Für extrem ungleiche Varianzen reduzieren sich also die Freiheitsgrade — und damit die *effektive Stichprobengröße* — auf die Größe einer der beiden verglichenen Gruppen.

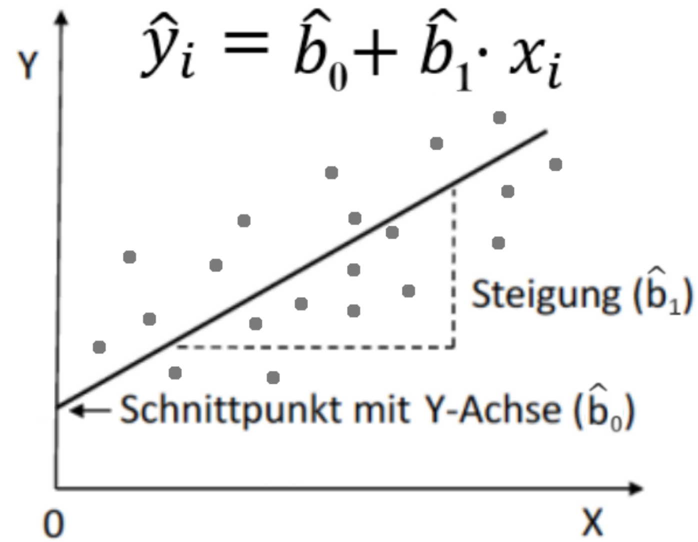
Das ist durchaus intuitiv: ist z.B. $\hat{\sigma}_A$ extrem viel kleiner als $\hat{\sigma}_B$, so spielt die Varianz der Gruppe A nahezu keine Rolle mehr. Die Versuchspersonen dieser Gruppe gehen also für die Berechnung des Standardfehlers “verloren”, was sich entsprechend auf die Freiheitsgrade auswirkt.

Im Grenzfall spielt die Varianz dieser Gruppe überhaupt keine Rolle mehr, sondern nur noch ihr Mittelwert. Die Gruppe hat damit die gleiche Funktion wie der Referenzwert μ_0 beim Einstichproben-t-Test.

KEIN KLAUSUR STOFF

Inferenzstatistik für Regressionskoeffizienten

- Die Hypothesentestung für den Regressionskoeffizienten der einfachen Regression (d.h. 1 UV) unterscheidet sich nicht von der Korrelation.
- Auch für den Regressionskoeffizienten können wir einen Standardfehler definieren:



$$\hat{se}(\hat{b}_1) = \frac{\hat{\sigma}_Y}{\hat{\sigma}_X}\sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2}{n-2}}$$

- .. und einen darauf basierenden t-Wert:

$$t = \frac{\hat{b}_1}{\hat{se}(\hat{b}_1)} \overset{\text{(s. nächste Folie)}}{=} \hat{\rho}\sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{\rho}^2}}$$

- Die Zahl der Freiheitsgrade ist wie bei der Korrelation $\mathrm{df} = n - 2$, da auch hier für die Berechnung des Standardfehlers die beiden Mittelwerte $\bar{x}$ und $\bar{y}$ bestimmt werden müssen.
- Der Rest ist bekannt.

KEIN KLAUSUR STOFF

Inferenzstatistik für Regressionskoeffizienten

- Während die Regressionssteigung abhängt davon, welche Variable als UV (bzw. x) und welche als AV (bzw. y) definiert wird, sind die t-Werte (und damit auch die p-Werte) unabhängig von der Rollenverteilung der Variablen.
- Dies ergibt sich direkt aus dem Zusammenhang von $\hat{\rho}$ und $\hat{b}_1$ (vgl. Vorlesung 06):

$$\hat{b}_1 = \frac{\hat{\sigma}_Y}{\hat{\sigma}_X}\hat{\rho}$$

- Damit ist die Prüfgröße t:

$$t = \frac{\hat{b}_1}{\hat{se}(\hat{b}_1)} = \frac{\frac{\hat{\sigma}_Y}{\hat{\sigma}_X}\hat{\rho}}{\frac{\hat{\sigma}_Y}{\hat{\sigma}_X}\sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2}{n-2}}} = \frac{\hat{\rho}}{\sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2}{n-2}}} = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{\rho}^2}}$$

- Der t-Wert bei der einfachen Regression ist also identisch zum t-Wert der Korrelation und insbesondere nur noch abhängigg von $\hat{\rho}$ und nicht mehr $\hat{b}_1$
- Da für die Korrelation $\hat{\rho}$ die Rollenverteilung der beiden Zusammenhangsvariablen unerheblich ist, folgt, dass der p-Wert bei der Regression ebenso wenig von der Zuordnung der Variablen als UV und AV abhängt.

KEIN KLAUSUR STOFF

Testung des y-Achsenabschnitts bei der Regression

- Wir haben bislang den Achsenabschnitt $\hat{b}_0$ aus der Diskussion außen vor gelassen.
- Im Kontext der Regression wird der Achsenabschnitt $\hat{b}_0$ idR nicht getestet.
- Grund: die Frage, ob Variable Y bei $X = 0$ einen y-Achsenabschnitt aufweist, der signifikant von Null verschieden ist, ist im Kontext der Regression selten interessant — schließlich ist es ja der ganze Zweck der Regression die systematische Verändeurng von Y in X zu analysieren und dabei gerade nicht nur einen bestimmten Wert von X zu betrachten.
- Nichts desto trotz ist auch die Schätzung von $\hat{b}_0$ mit Unsicherheit verbunden, die durch folgenden Standardfehler definiert ist:

$$\hat{se}(\hat{b}_0) = \underbrace{\sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}}}_{\text{Standardabweichung der Residuen}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

KEIN KLAUSUR STOFF

Testung des y-Achsenabschnitts bei der Regression

- Ein Spezialfall ist das lineare Modell ohne Steigung (bzw. ohne x!):

$$\hat{y} = \hat{b}_0$$

- In diesem Modell kommt dem Regressionskoeffizienten $\hat{b}_0$ und dessen Unsicherheit eine interessantere Bedeutung zu: die Frage ob $\hat{b}_0$ signifikant verschieden von 0 ist, ist hier gleichbedeutend mit der Frage ob die Zufallsvariable Y **signifikant verschieden von Null ist**.
- Mit anderen Worten: dieses Modell ist nichts anderes als ein Einstichproben-t-Test!
- Dies beinhaltet auch den Vergleich zweier abhängiger Messungen A und B, wenn wir zuvor Y als Differenzvariable definieren: $Y = Y_A - Y_B$
- .. dann testet

$$\hat{y} = \hat{b}_0$$

- die Frage, ob die Mittelwertsdifferenz von A und B signifikant verschieden von Null ist.

KEIN KLAUSUR STOFF

“Common statistical tests are linear models”

Die Parallele von bekannten statistischen Tests und (generalisierter) linearer Regression lässt sich auf alle Tests erweitern, die wir in Statistik 1 und Statistik 2 kennenlernen.

Hier eine Auswahl der Tests aus Statistik 1:

Test	Lineares Modell	Spezifierung	Nullhypothese
Pearson-Korrelation	$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$	-	$\mathcal{H}_0 : \beta_1 = 0$
Spearman-Korrelation	$\mathrm{Rang}(\hat{y}) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \mathrm{Rang}(x)$	-	$\mathcal{H}_0 : \beta_1 = 0$
Einstichproben-t-Test	$\hat{y} = \hat{\beta}_0$	-	$\mathcal{H}_0 : \beta_0 = 0$
Differenzen-t-Test	$\hat{y}_A - \hat{y}_B = \hat{\beta}_0$	-	$\mathcal{H}_0 : \beta_0 = 0$
Zweistichproben-t-Test	$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$	$x = 0$ für alle Datenpunkte von Gruppe A und $x = 1$ für alle Datenpunkte von Gruppe B → Regression auf binäre x-Variable!	$\mathcal{H}_0 : \beta_1 = 0$

Die Analogie von bekannten statistischen Tests und linearem Modell ist lange bekannt, ging aber 2021 durch Beiträge von Jonas Lindeløv viral[3,4,5].

Fußnoten

1. Altman DG, Bland JM (1995) Absence of evidence is not evidence of absence. BMJ 311:485.
2. Delacre M, Lakens D, Leys C (2017) Why Psychologists Should by Default Use Welch’s t-test Instead of Student’s t-test. International Review of Social Psychology 30:92.
3. https://stats.stackexchange.com/questions/303269/common-statistical-tests-as-linear-models
4. https://lindeloev.github.io/tests-as-linear/
5. https://twitter.com/jonaslindeloev/status/1110907133833502721