

M24 Statistik 1: Wintersemester 2024 / 2025

Seminar 10: Konfidenzintervalle

MSc Albert Anoschin & Prof. Matthias Guggenmos
Health and Medical University Potsdam



Aufgabe 1: t-Test (manuell)

Fünf Personen nahmen an einer Medikamentenstudie teil. Es wurden zu zwei Zeitpunkten Reaktionszeiten (in ms) in einer Aufmerksamkeitsaufgabe gemessen. T1 enthält Reaktionszeiten vor der Medikamenteneinnahme, T2 nach der Medikamenteneinnahme. Lösen Sie die folgenden Aufgaben. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen (beim t-Wert auf drei Stellen).

- Bestimmen Sie die Differenzen in der Reaktionszeit zwischen den beiden Messzeitpunkten.
- Bestimmen Sie die durchschnittliche Reaktionszeit zu T1 und T2, und die durchschnittliche Reaktionszeitdifferenz.
- Bestimmen Sie die Streuung der Reaktionszeiten und der Reaktionszeitdifferenzen (Schätzung der Standardabweichung)
- Prüfen Sie, ob die Varianz der Reaktionszeiten zu beiden Messzeitpunkten ähnlich ist.
- Bestimmen Sie den Standardfehler der Mittelwertdifferenz.
- Berechnen Sie den t-Wert.
- Prüfen Sie mittels t-Tabelle, ob sich die Reaktionszeiten zwischen den beiden Messzeitpunkten signifikant unterscheiden (zweiseitiger Test).
- Berechnen Sie die Effektstärke d .

Person	T1	T2	Differenz	Quadrierte Abweichungen vom Mittelwert
1	530	620	-90	10000
2	90	250	-160	900
3	230	440	-210	400
4	180	230	-50	19600
5	320	760	-440	62500
Mittelwert	270	460	-190	
Standardabweichung	167.48	230.76	152.81	152.81
Varianzen ähnlich?	ja			
Standardfehler	68.34			68.34
df	4			
t-Wert	-2.780			-2.780
kritischer t-Wert	-2.776			
Signifikant? (ja/nein)	ja			
Cohen's d	-1.24			-1.24

Aufgabe 2: t-Test (manuell)

Die vorherige Studie wird wiederholt. Diesmal wird eine Experimentalgruppe (EG), welche das Medikament erhielt mit einer Kontrollgruppe (KG), welche ein Placebo erhielt, verglichen. Lösen Sie die folgenden Aufgaben. Runden Sie auf zwei Dezimalstellen (beim t-Test: 3 Dezimalstellen). Testen Sie die Hypothese, dass die Einnahme des Medikaments zu einer verlangsamten Reaktion führt.

1. Berechnen Sie die Mittelwerte und Standardabweichungen der Reaktionszeiten in beiden Gruppen.
2. Prüfen Sie, ob die Varianzen in beiden Gruppen ähnlich sind.
3. Bestimmen Sie die gepoolte Standardabweichung und den Standardfehler.
4. Berechnen Sie den t-Wert für einen Gruppenvergleich.
5. Bestimmen Sie die Freiheitsgrade und lesen Sie den kritischen t-Wert aus der Tabelle in der Formelsammlung ab.
6. Prüfen Sie auf Signifikanz.
7. Berechnen Sie die Effektstärke d .

Messung	EG	KG
1	560	130
2	990	420
3	890	110
4	1200	90
5	780	510
Mittelwert	884	252
Standardabweichung	238.18	197.53
Varianzen ähnlich?	ja	
gepoolte Standardabweichung	218.80	
Standardfehler	138.38	
df	8	
t-Wert	4.567	
kritischer t-Wert	1.860	
Signifikant? (ja/nein)	ja	
Cohen's d	2.89	

Aufgabe 3: Kovarianz, Korrelation, Regression

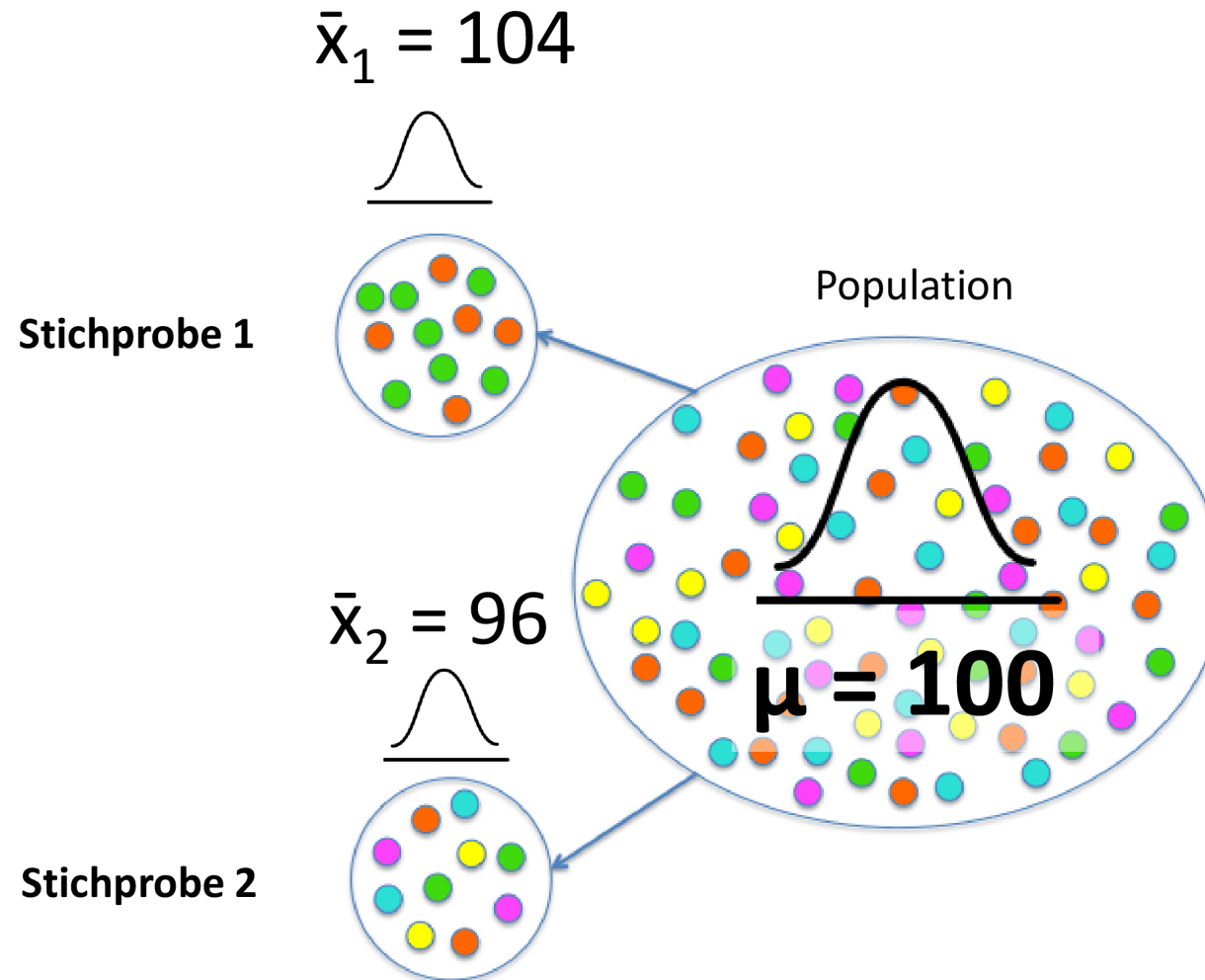
Bei 6 Personen wurde Depression (auf einer Skala von 0 bis 6) und Achtsamkeit (auf einer Skala von 1 bis 7) gemessen. Nutzen Sie die Formelsammlung zur Bearbeitung der folgenden Aufgaben. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

1. Berechnen Sie die mittlere Ausprägung von Depression und Achtsamkeit über alle Personen hinweg.
2. Berechnen Sie die Populationsschätzer der Varianz und Standardabweichung für beide Variablen
3. Berechnen Sie für jede Person den z-Wert auf den beiden Variablen.
4. Berechnen Sie die Kovarianz und die Korrelation.
5. Bestimmen Sie den t-Wert (3 Nachkommastellen) für die Korrelation.
6. Vergleichen Sie den empirischen t-Wert mit dem kritischen t-Wert (s. t-Tabelle) und entscheiden Sie, ob die Korrelation signifikant ist (zweiseitiger Test).
7. Sie wollen die Ausprägung von Depression mit der Achtsamkeit vorhersagen. Bestimmen Sie X und Y. Berechnen Sie den Achsenabschnitt und die Steigung und stellen Sie die Regressionsgleichung auf.
8. Berechnen Sie den standardisierten Steigungskoeffizienten Beta und vergleichen Sie ihn mit dem Korrelationskoeffizienten.

Person	Depression	Achtsamkeit	Depression z-Wert	Achtsamkeit z-Wert	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	3	5	0.27	0	0
2	2	6	-0.27	0.71	-0.5
3	4	4	0.8	-0.71	-1.5
4	1	7	-0.8	1.42	-3
5	5	3	1.34	-1.42	-5
6	0	5	-1.34	0	0
Mittelwert	2.5	5.00			-10
Varianz	3.5	2.00			
Standardabweichung	1.87	1.41			
Kovarianz	-2.00		-0.76		-2
Korrelation	-0.76		-0.76		
t-Wert der Korrelation	-2.339				
kritischer t-Wert	-2.776				
Signifikant? (ja/nein)	nein				
Achsenabschnitt	7.5				
Steigung	-1		-1		
Beta	-0.75				
Regressionsgleichung	$y = 7.5 - x$				

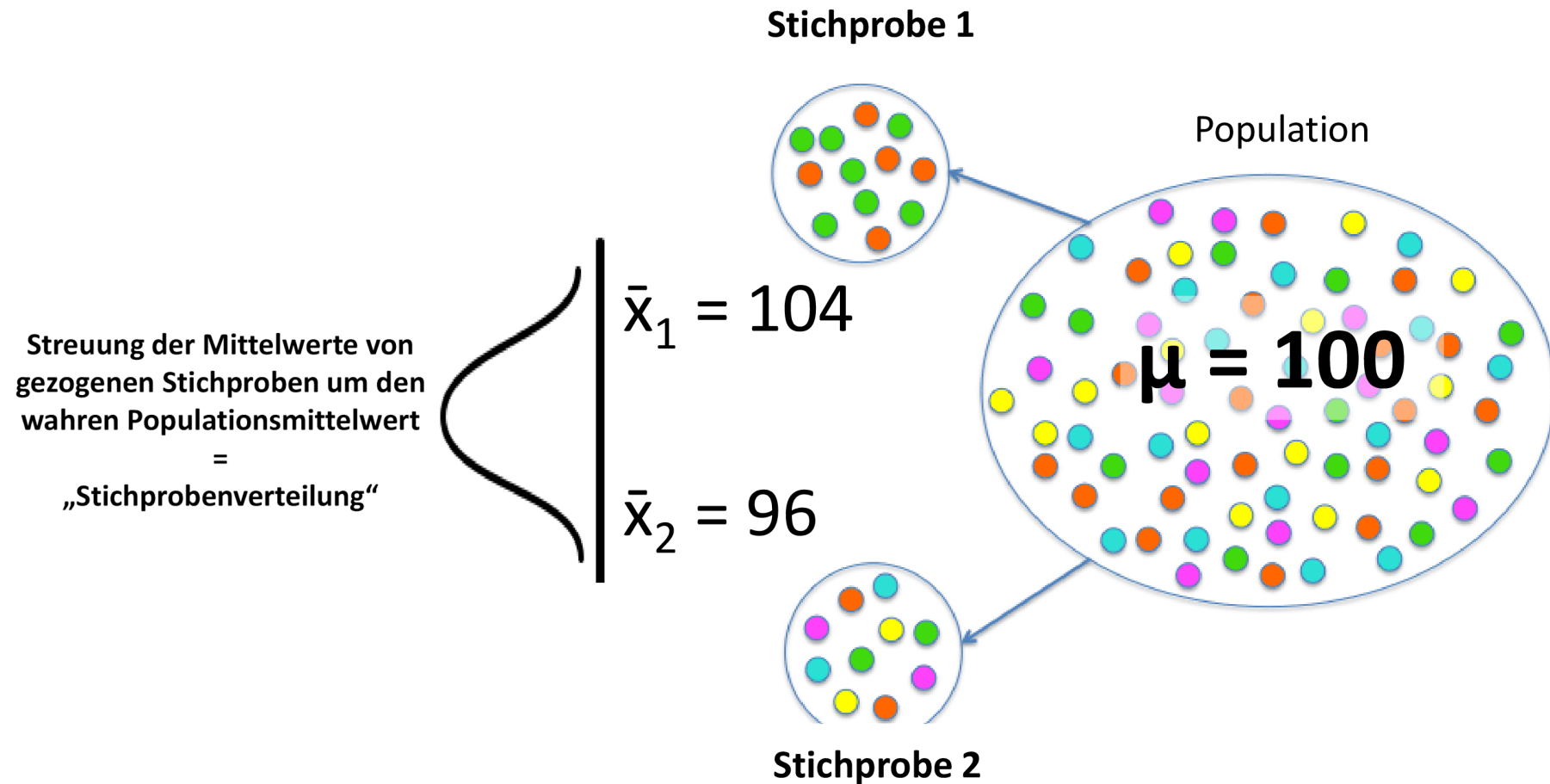
Konfidenzintervalle

Wiederholung Stichprobenverteilung



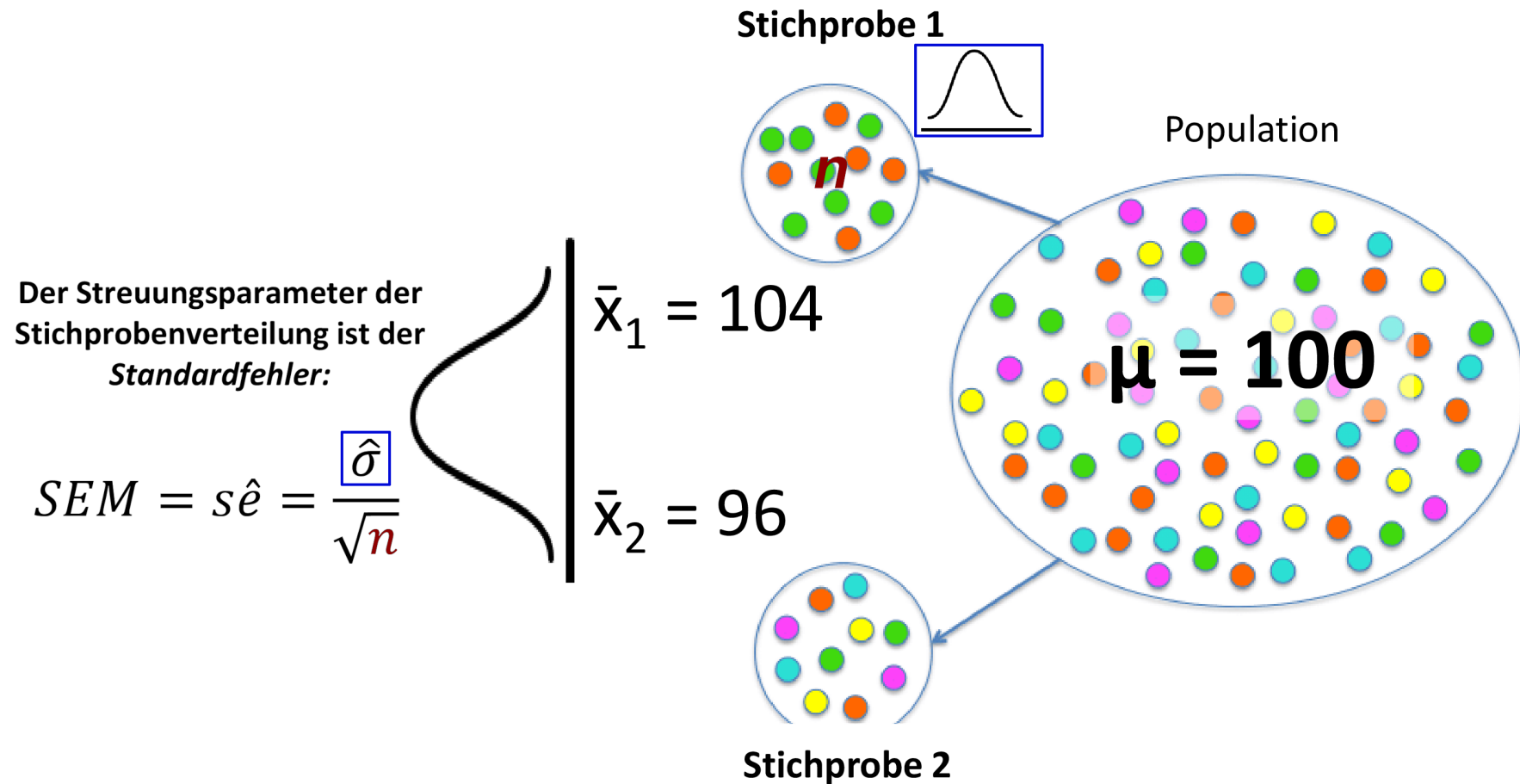
Wiederholung Stichprobenverteilung

Genauso wie die Messwerte einzelner Personen um den Mittelwert der Stichprobe streuen, streuen die Mittelwerte verschiedener Stichproben um den wahren Populationsmittelwert.



Wiederholung Stichprobenverteilung

Genauso wie die Messwerte einzelner Personen um den Mittelwert der Stichprobe streuen, streuen die Mittelwerte verschiedener Stichproben um den wahren Populationsmittelwert.



Das Konfidenzintervall (CI)

- Der **Standardfehler (SEM)** ist ein **Präzisionsmaß** für die **Schätzung des Mittelwerts** in der Population.
- Der SEM wird auf Grundlage der Stichprobengröße und der Standardabweichung (geschätzten Streuung des Merkmals in der Population) berechnet.
- Er entspricht einem **Konfidenzniveau von 68.26%** für die Schätzung des Mittelwerts.
- Das Konfidenzintervall ist in diesem Fall $\bar{x} \pm 1 SEM$.

$$SEM = \hat{se} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Das Konfidenzintervall (CI)

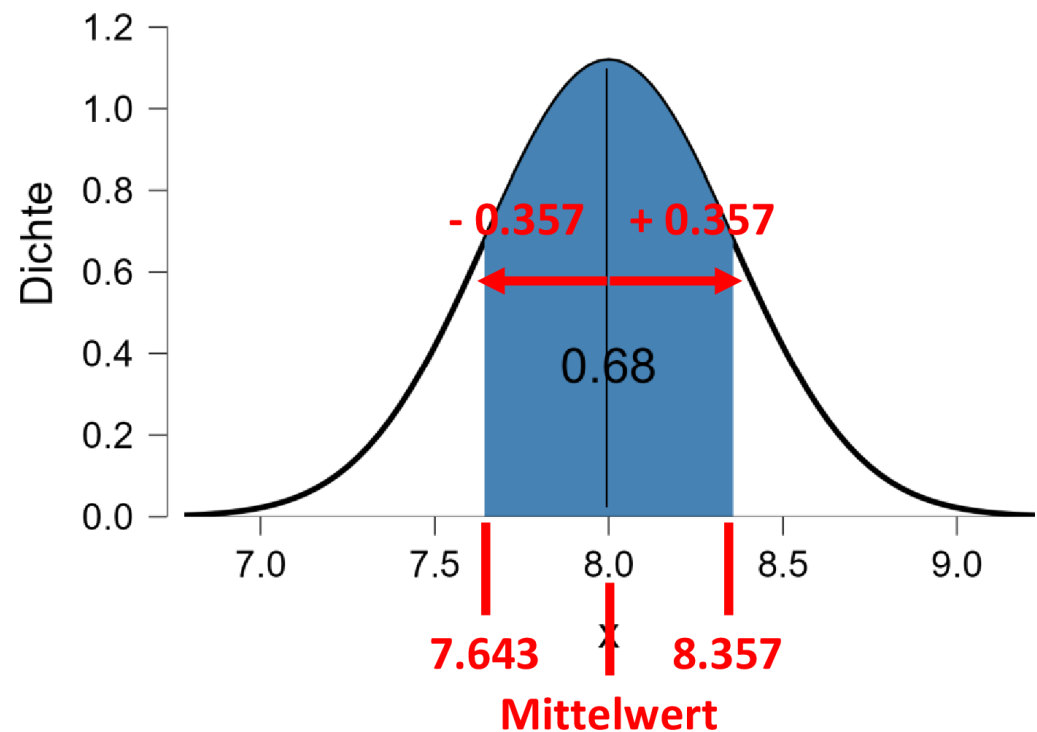
- Der **Standardfehler** ist ein **Präzisionsmaß** für die **Schätzung des Mittelwerts** in der Population (auf Grundlage der Stichprobengröße und Standardabweichung).
- Er entspricht einem **Konfidenzniveau von 68.26%** für die Schätzung des Mittelwerts.
- Das Konfidenzintervall ist in diesem Fall $\bar{x} \pm 1 SEM$.

Deskriptive Statistik ▼

	Lebenszufriedenheit	
	optimistisch	pessimistisch
Gültig	11	6
Fehlend	0	0
Mittelwert	8.000	7.000
Std.-Fehler Mittelwert	0.357	0.931
Standardabweichung	1.183	2.280

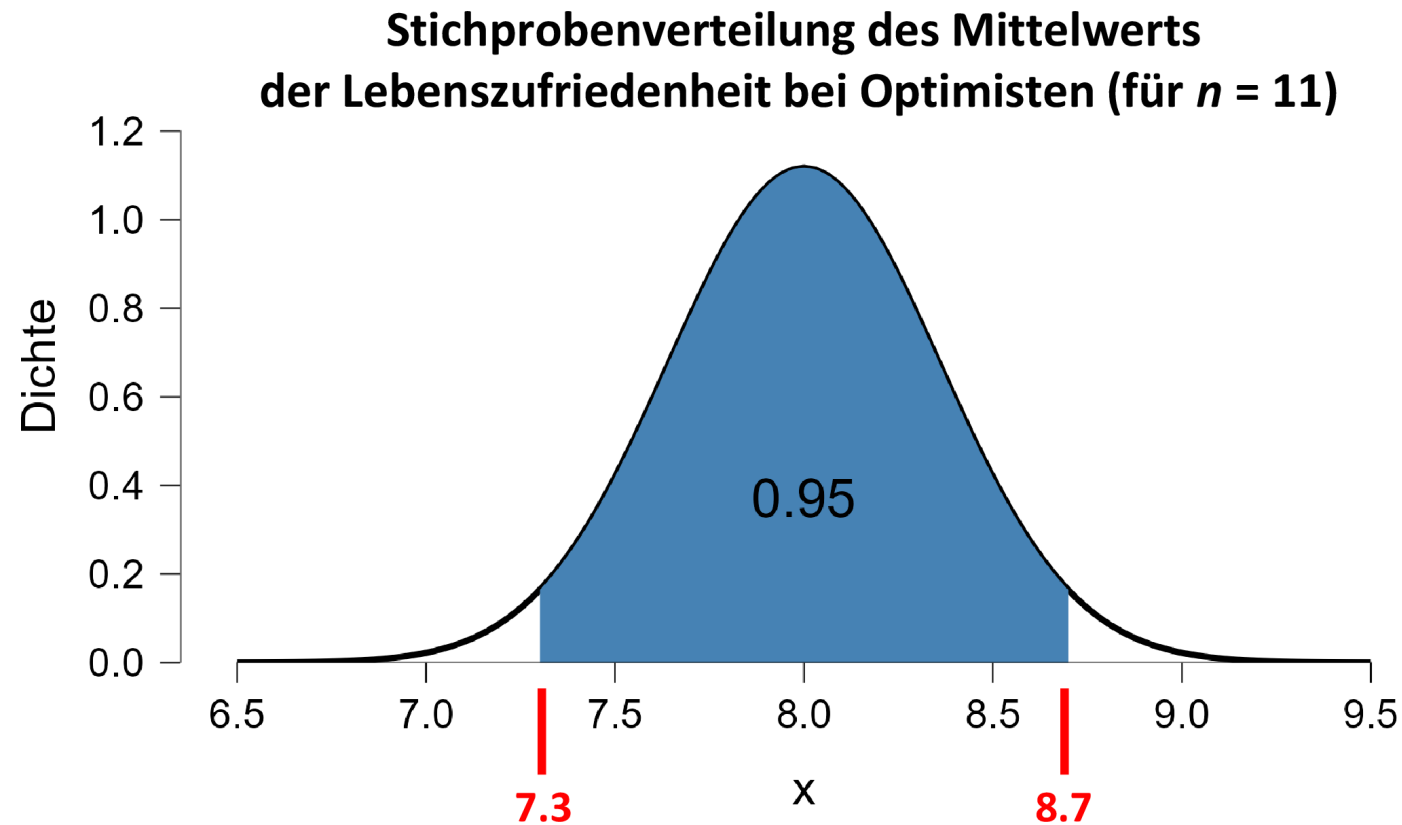
$$SEM = s\hat{e} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Stichprobenverteilung des Mittelwerts



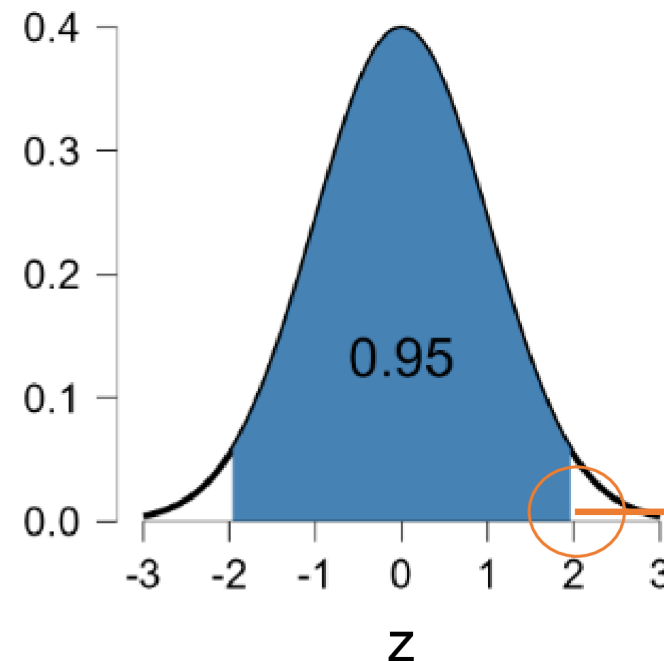
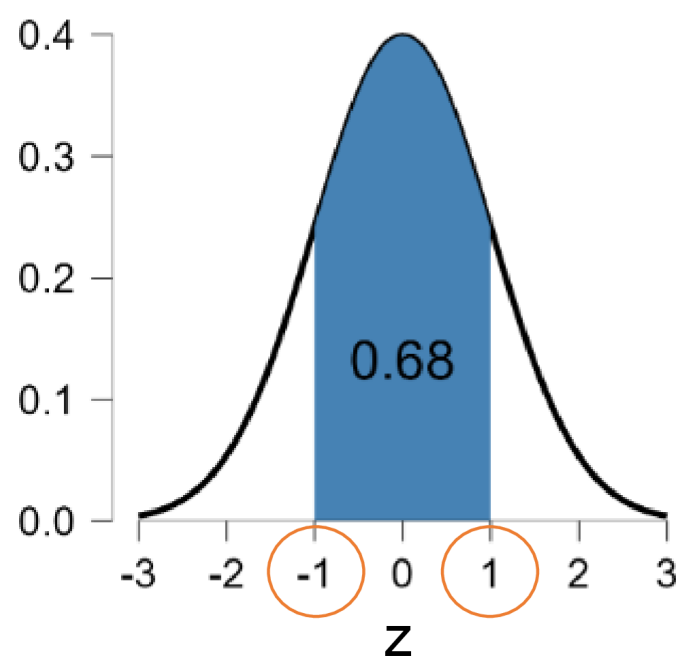
Das Konfidenzintervall (CI)

- In der Praxis arbeitet man oft mit Konfidenzintervallen (CIs) von 95% oder 99%.
- Ein Konfidenzintervall von 95% zeigt den Bereich von möglichen Populationsmittelwerten, die nicht signifikant verschieden von dem Schätzer des Populationsmittelwerts sind.



Das Konfidenzintervall (CI)

- Zur Berechnung des CI kann die Standardnormalverteilung verwendet werden: Schneidet man auf beiden Seiten der Verteilung jeweils 2.5% ab, erhält man einen Wahrscheinlichkeitsbereich von 95%.



Für ein 95 %-Konfidenzintervall: $z = 1,96$
Für ein 99 %-Konfidenzintervall: $z = 2,58$

Übung 1: Konfidenzintervall bestimmen

Bestimmen Sie die Lage des 95% Konfidenzintervalls für die Mittelwerte der Variable „Optimismus“ in den beiden Gruppen „Student“ und „kein Student“!

Untere Grenze: $\bar{x} - z \cdot SEM$
Obere Grenze: $\bar{x} + z \cdot SEM$

Für ein 95 %-Konfidenzintervall: $z = 1,96$
Für ein 99 %-Konfidenzintervall: $z = 2,58$

Deskriptive Statistik ▼

	Lebenszufriedenheit	
	optimistisch	pessimistisch
Gültig	11	6
Fehlend	0	0
Mittelwert	8.000	7.000
Std.-Fehler Mittelwert	0.357	0.931
95% KI Mittelwert Obergrenze		
95% KI Mittelwert Untergrenze		
Standardabweichung	1.183	2.280

Lösung

Deskriptive Statistik ▼

	Lebenszufriedenheit	
	optimistisch	pessimistisch
Gültig	11	6
Fehlend	0	0
Mittelwert	8.000	7.000
Std.-Fehler Mittelwert	0.357	0.931
95% KI Mittelwert Obergrenze	8.699	8.825
95% KI Mittelwert Untergrenze	7.301	5.175
Standardabweichung	1.183	2.280

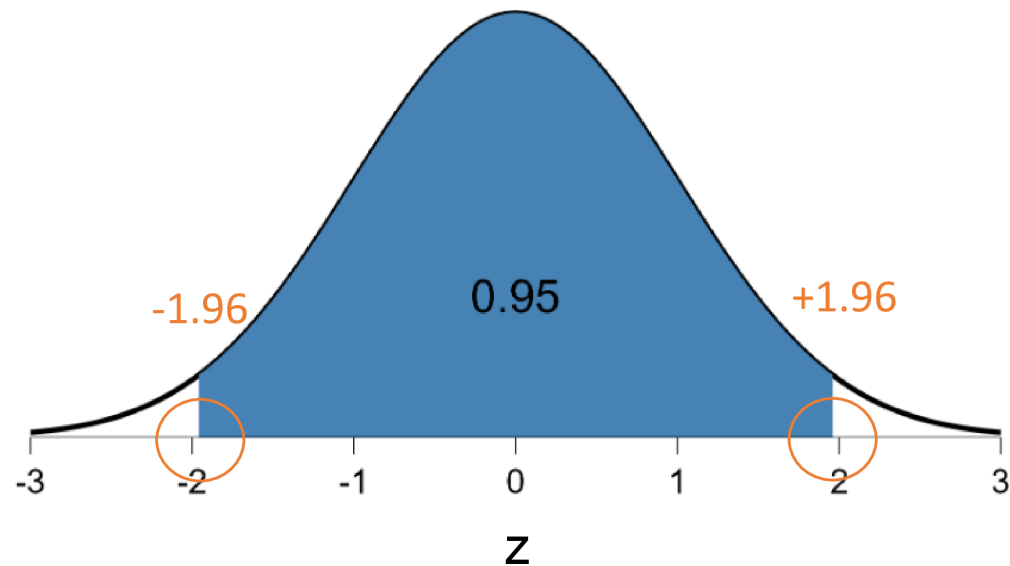
Lebenszufriedenheit Optimisten:
M = 8.0, 95% CI [7.301; 8.699]

Lebenszufriedenheit Pessimisten:
M = 7.0, 95% CI [5.175; 8.825]

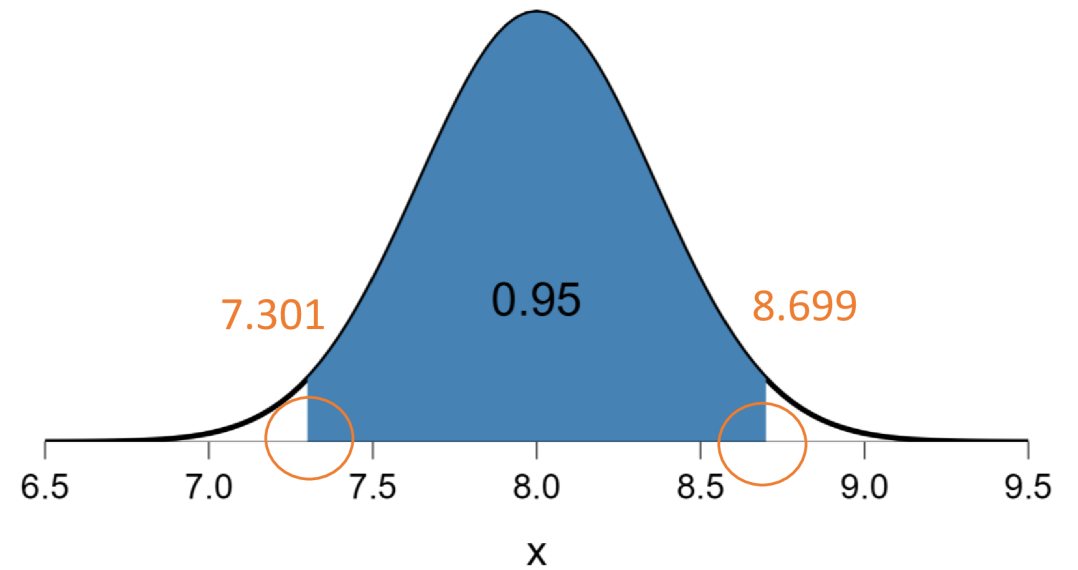
Lösung

Lebenszufriedenheit Optimisten:
 $M = 8.0$, 95% CI [7.301; 8.699]

Standardnormalverteilung
(Stichprobenverteilung im z-Raum)

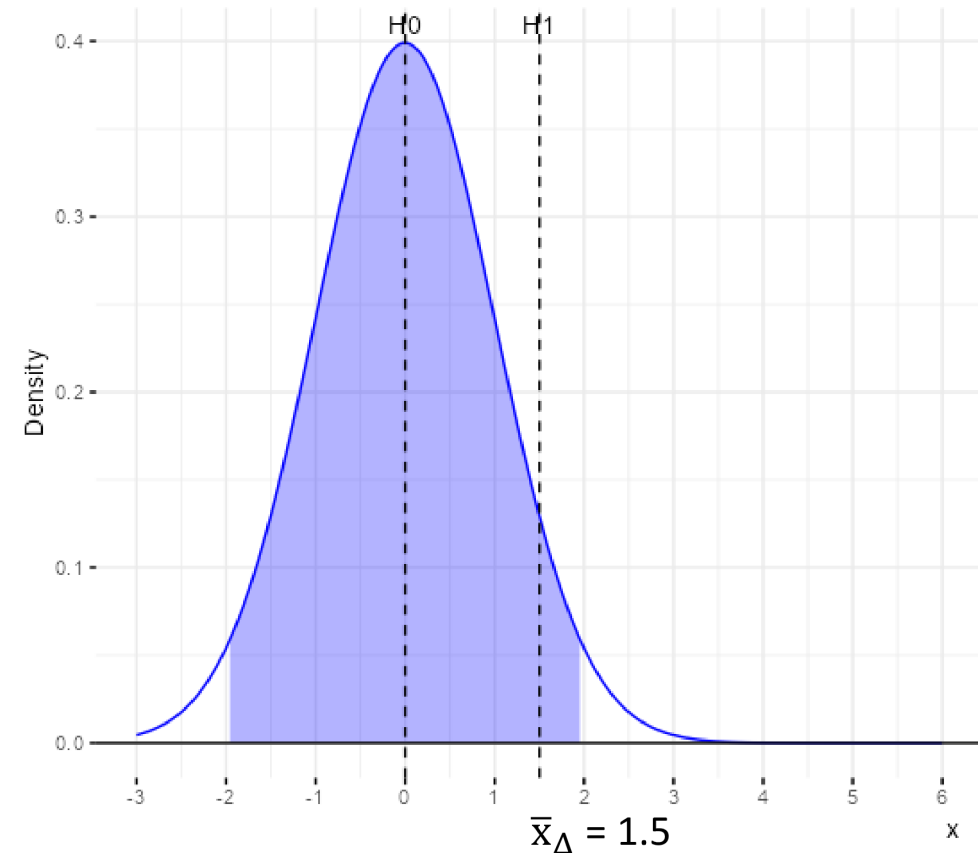


Stichprobenverteilung des Mittelwerts



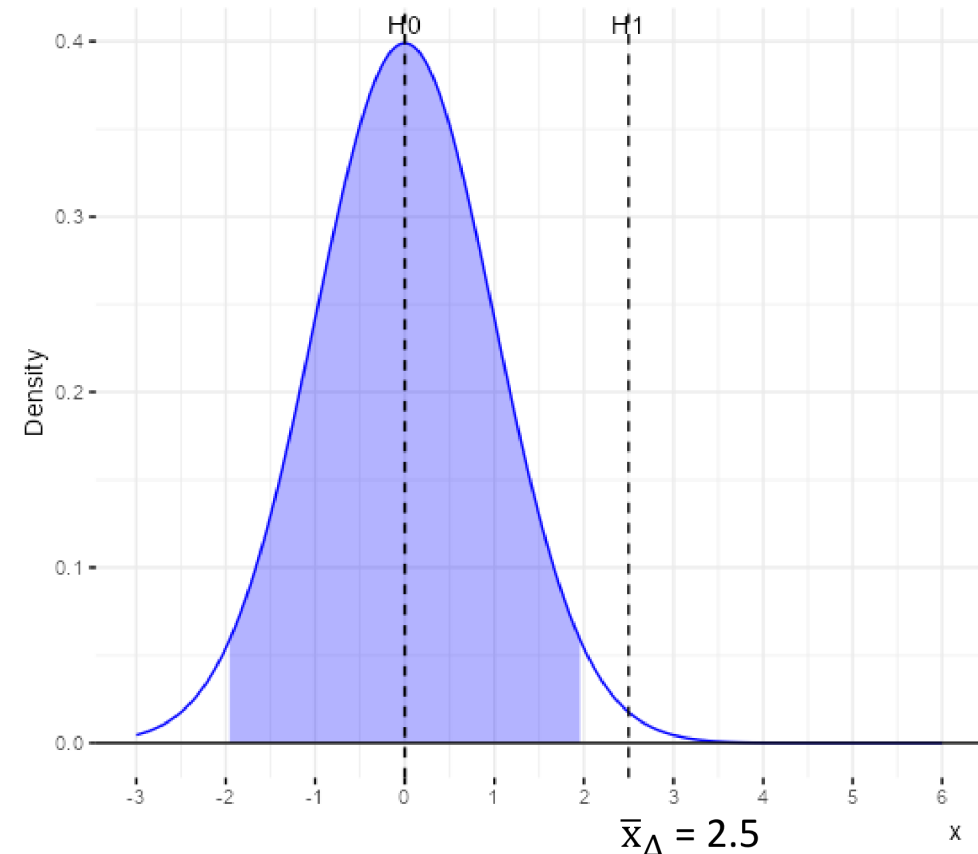
Konfidenzintervalle für Mittelwertunterschiede

- Vorangegangenes Beispiel: Verwendung des Konfidenzintervalls als Streuungsmaß
- Verwendung des Konfidenzintervalls im Rahmen der Signifikanztestung:
 - Auch für Mittelwertunterschiede $\Delta\bar{x}$ kann ein 95% CI angegeben werden
 - **Nullhypothese:** Bei einem Gruppenvergleich müsste der Mittelwertunterschied 0 betragen
 - ➤ Konstruktion eines 95% CI um die **Mittelwertdifferenz von 0 (Nullhypothese):** Ist der beobachtete Mittelwertunterschied im 95% Konfidenzintervall um die 0 enthalten?



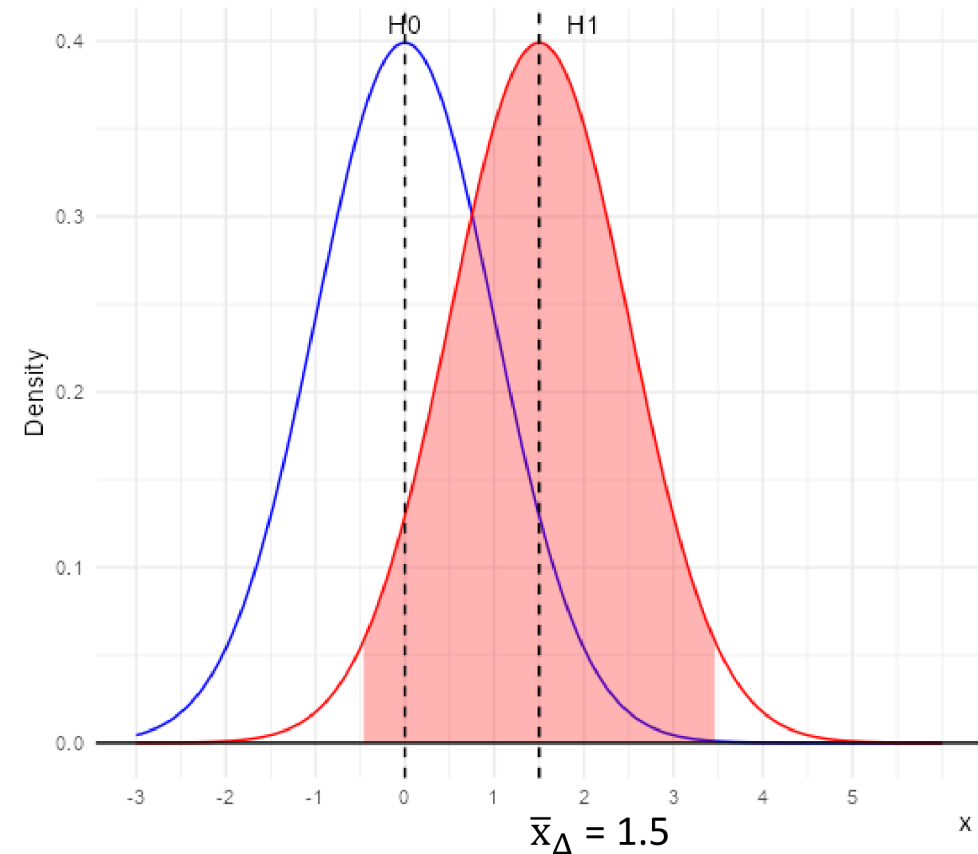
Konfidenzintervalle für Mittelwertunterschiede

- Verwendung des Konfidenzintervalls im Rahmen der Signifikanztestung:
 - Die beobachtete Mittelwertdifferenz $\Delta \bar{x}$ ist **nicht signifikant**, wenn sie **innerhalb des 95% CI** um die 0 liegt.
 - Liegt die beobachtete Mittelwertdifferenz $\Delta \bar{x}$ hingegen **außerhalb** des 95% CI um die 0, **ist sie signifikant**.



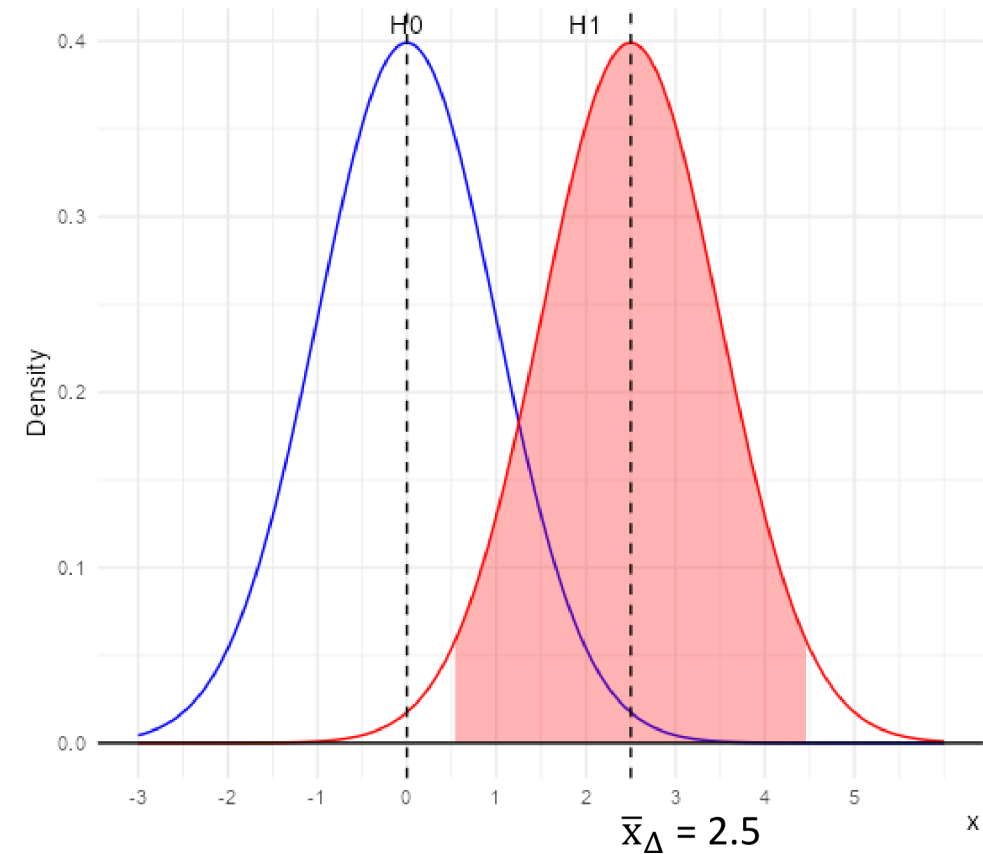
Konfidenzintervalle für Mittelwertunterschiede

- Das Prinzip wird in der Praxis gern umgekehrt und ein 95% CI um die **beobachtete Mittelwertdifferenz** konstruiert.
 - Nullhypothese: Bei einem Gruppenvergleich müsste der Mittelwertunterschied 0 betragen.
- Konstruktion eines 95% CI um die **beobachtete Mittelwertdifferenz**: Ist der Wert 0 in dem Konfidenzintervall enthalten?

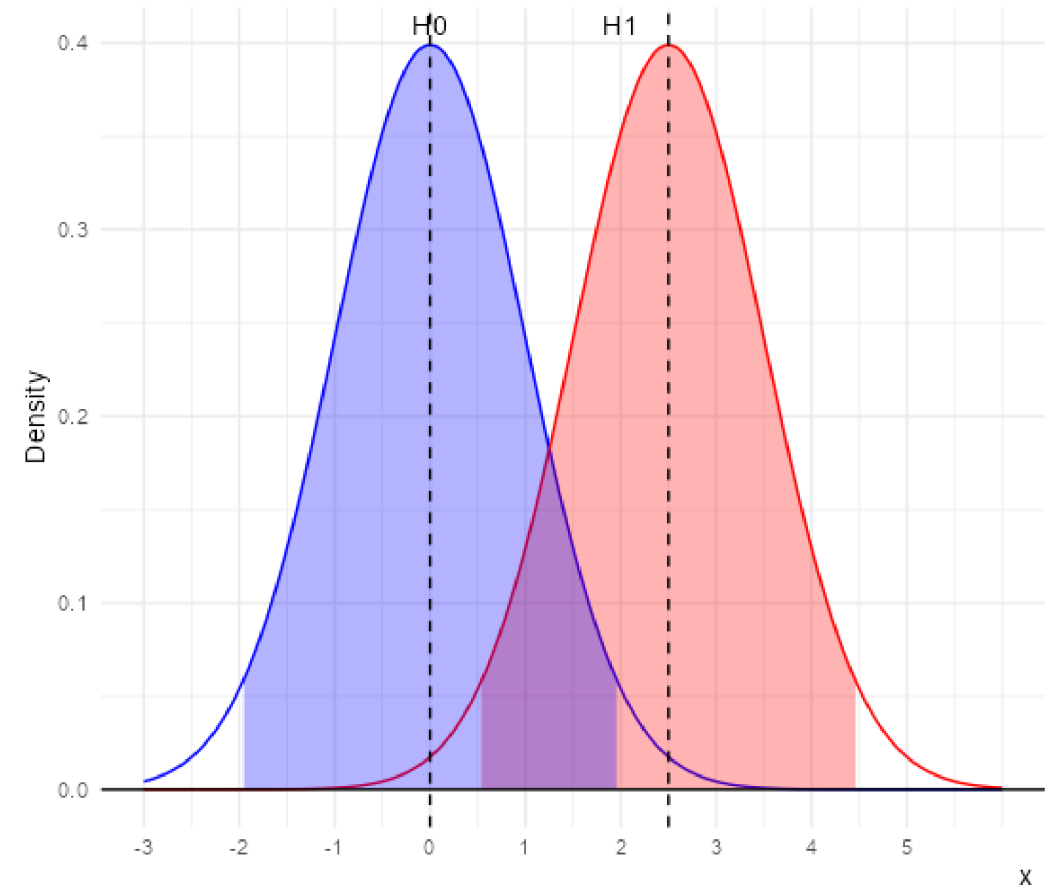
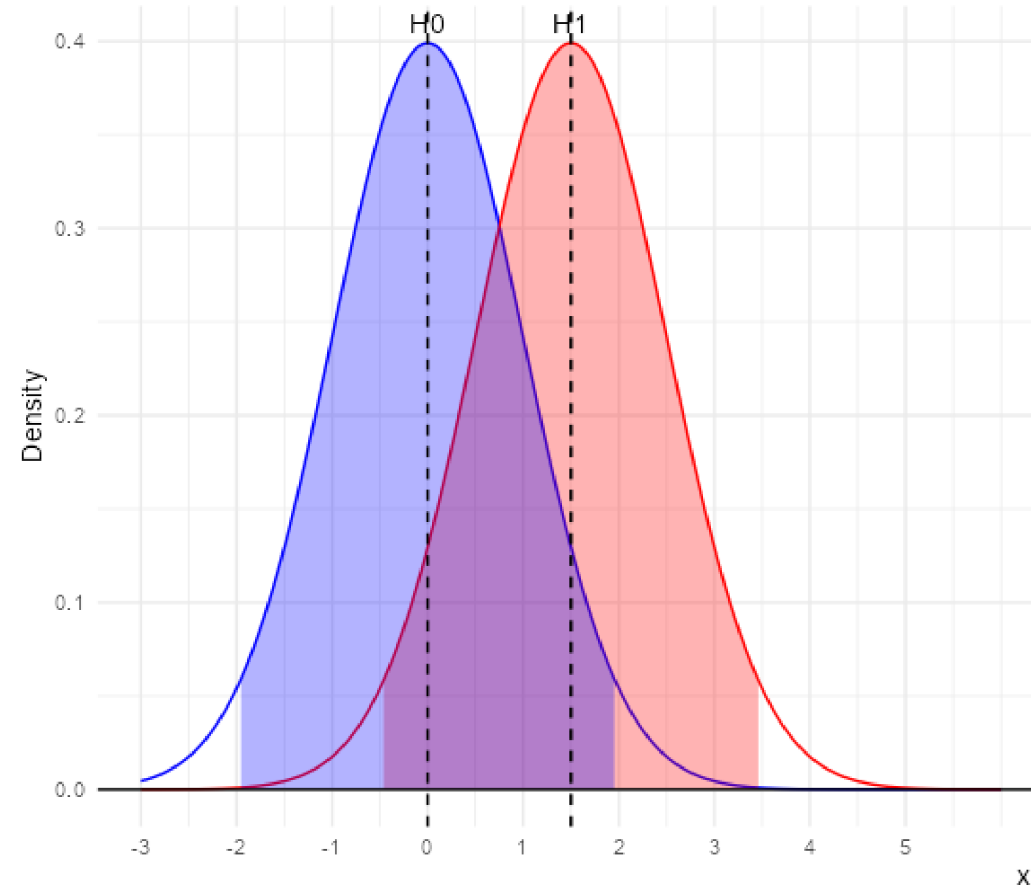


Konfidenzintervalle für Mittelwertunterschiede

- Ist der Wert 0 im 95% CI der **beobachteten Mittelwertdifferenz** enthalten, ist der Unterschied nicht **signifikant**.
- Andernfalls kann von einem signifikanten Ergebnis gesprochen werden.



95% CIs um die H_0 und die H_1



Übung 2: Konfidenzintervalle für Mittelwertdifferenz

Sie sollen die Wirksamkeit einer neuen therapeutischen Intervention zur Reduzierung von Angst beurteilen. Die Angstniveaus werden mit einer standardisierten Angstskala gemessen. Gruppe A erhielt die Intervention, während Gruppe B sie nicht erhielt. Sie möchten einen zweiseitigen t-Test durchführen. Berechnen Sie:

1. Die Mittelwertdifferenz.
2. Den Standardfehler der Mittelwertdifferenz (Testen Sie vorher auf Varianzgleichheit!).
3. Die Freiheitsgrade df der t-Verteilung.
4. Lesen Sie den kritischen t-Wert ab (Sie können die df runden).
5. Berechnen Sie das 95% Konfidenzintervall für die Mittelwertdifferenz. Nutzen Sie dazu die Formel auf der rechten Seite mit Ihrem abgelesenen kritischen t-Wert.
6. Prüfen Sie anhand des 95% CI, ob der Gruppenunterschied signifikant ist.
7. Berechnen Sie die Prüfgröße t (Ihren empirischen t-Wert): Deckt sich das Ergebnis mit Ihrer vorherigen Schlussfolgerung?

Parameter	Gruppe A	Gruppe B
Mittleres Angstniveau \bar{x}	55	45
Standardabweichung σ	16	7
Stichprobengröße n	30	35

Konfidenzintervall für t-Verteilungen

$$\bar{x}_{\Delta} \pm t_{\text{crit}} \cdot SEM$$

Lösung: Konfidenzintervalle für Mittelwertdifferenz

$$\bar{x}_\Delta = \bar{x}_A - \bar{x}_B = 10$$

Varianzen ähnlich: $\frac{\hat{\sigma}_A}{\hat{\sigma}_B} > 2.$

$$SEM = \sqrt{\frac{16^2}{30} + \frac{7^2}{35}} \approx 3.15$$

$$df = \frac{\left(\frac{256}{30} + \frac{49}{35}\right)^2}{\frac{\left(\frac{256}{30}\right)^2}{29} + \frac{\left(\frac{49}{35}\right)^2}{34}} \approx 38.4$$

$$t_{\text{crit}} = 2.02 \quad (\text{für } df = 40)$$

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{SEM} = \frac{55 - 45}{3.15} \approx 3.17$$

Somit gilt:

$$CI = [\bar{x}_\Delta - t \cdot SEM; \bar{x}_\Delta + t \cdot SEM] = [10 - 6.37; 10 + 6.37] = [3.63; 16.37]$$

Parameter	Gruppe A	Gruppe B
Mittleres Angstniveau \bar{x}	55	45
Standardabweichung σ	16	7
Stichprobengröße n	30	35

Konfidenzintervall für t-Verteilungen

$$\bar{x}_\Delta \pm t_{\text{crit}} \cdot SEM$$