

3. GRAPHISCHE ARRANGEMENTS

In diesem Abschnitt wollen wir einen engen Zusammenhang zwischen gewissen Invarianten eines Graphen und Hyperebenenarrangements beschreiben. Die dabei auftauchenden graphischen Arrangements wurden zuerst von C. Greene eingeführt [6].

DEFINITION 3.1

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph mit $V = [n]$. Das **GRAPHISCHE ARRANGEMENT** von G ist

$$\mathcal{A}_G \stackrel{\text{def}}{=} \{H_0(\vec{\alpha}_{i,j}) \mid \{i, j\} \in E\},$$

wobei $\vec{\alpha}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_i - \vec{e}_j$ ist.

Wenn $G = K_n$ der vollständige Graph auf n Knoten ist, gilt offenbar $\mathcal{A}_{K_n} = \mathcal{B}(n)$. Also ist \mathcal{A}_G im allgemeinen einfach ein Unterarrangement von $\mathcal{B}(n)$, und damit immer zentral.

DEFINITION 3.2

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph mit $V = [n]$. Eine **KNOTENFÄRBUNG** von G ist eine Abbildung $\kappa : V \rightarrow \mathbb{N}_+$. Eine Knotenfärbung heißt **ZULÄSSIG**, wenn $\kappa(i) \neq \kappa(j)$ für $\{i, j\} \in E$.

Für $t > 0$ bezeichnen wir mit $\chi_G(t)$ die Anzahl aller zulässigen Knotenfärbungen von G mit Farben in $[t]$, und nennen $\chi_G(t)$ das **CHROMATISCHE POLYNOM** von G .

BEISPIEL 3.3

Sei $G = K_n$ der vollständige Graph auf n Knoten. Dann ist

$$\chi_{K_n}(t) = \prod_{i=0}^{n-1} (t - i),$$

denn wir haben t Möglichkeiten den ersten Knoten einzufärben, $t - 1$ Möglichkeiten, den zweiten Knoten einzufärben, und so weiter.

Wir bemerken, dass nicht nur $\mathcal{A}_{K_n} = \mathcal{B}(n)$ gilt, sondern auch $\chi_{K_n}(t) = \chi_{\mathcal{B}(n)}(t)$. Das ist kein Zufall, wie wir später sehen werden. Zunächst müssen wir aber noch den Namen "chromatisches Polynom" von $\chi_G(t)$ rechtfertigen.

LEMMA 3.4

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Dann ist $\chi_G(t)$ ein Polynom vom Grad n .

Beweis. Sei $V = [n]$, und sei $t \in \mathbb{N}_+$. Für $i \leq t$ bezeichne $e_i(G)$ die Anzahl aller zulässigen Knotenfärbungen von G mit exakt i Farben. Dann ist die Anzahl aller möglichen Kantenfärbungen von G gerade

$$\chi_G(t) = \sum_{i=0}^n \binom{t}{i} e_i(G).$$

Da $\binom{t}{i}$ ein Polynom in t ist, gilt dasselbe für $\chi_G(t)$. Weiterhin ist $e_n(G) = n!$, da jede Knotenfärbung mit genau n Farben zulässig ist. Somit ist der Grad von $\chi_G(t)$ gerade n . \square

DEFINITION 3.5

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Eine **ZUSAMMENHÄNGENDE PARTITION** von G ist eine Mengenpartition $\{B_1, B_2, \dots, B_s\}$ von V sodass die Einschränkung $G|_{B_i}$ für alle $i \in [s]$ zusammenhängend ist. Die Menge aller zusammenhängenden Partitionen von G unter dualer Verfeinerungsordnung ist der **BINDUNGSVERBAND** von G .

Wir bezeichnen den Bindungsverband von G mit $\mathcal{L}(G)$. Offenbar hat $\mathcal{L}(G)$ ein kleinstes Element (die triviale Partition), und ein größtes Element (die Partition, deren Blöcke den Zusammenhangskomponenten von G entsprechen).

LEMMA 3.6

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Dann ist $\mathcal{L}(G) \cong \mathcal{L}(\mathcal{A}_G)$.

Beweis. Sei $V = [n]$ und sei \mathcal{A}_G das graphische Arrangement zu G .

Wähle $F \subseteq E$ und betrachte $S = \bigcap_{\{i,j\} \in F} H_0(\vec{\alpha}_{i,j})$. Nach Definition ist $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$ genau dann, wenn aus $\{i, j\} \in F$ stets $x_i = x_j$ folgt. Die Zusammenhangskomponenten des Spanngraphen G_F von G bilden dann eine zusammenhängende Partition von G . (Der Spanngraph G_F entsteht als kanteninduzierter Untergraph von G . Wenn die so entstehende Knotenmenge eine echte Teilmenge von V ist, fügen wir die übrigen Knoten als einelementige Zusammenhangskomponenten zu G_F hinzu.)

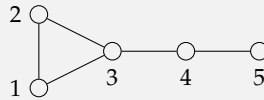
Sei umgekehrt $\mathbf{x} = \{B_1, B_2, \dots, B_s\}$ eine zusammenhängende Partition. Dann ist

$$S_{\mathbf{x}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid i, j \in B_m \text{ für } m \in [s] \text{ impliziert } x_i = x_j\}$$

ein Durchschnitt von Hyperebenen. Also sind die Mengen $\mathcal{L}(\mathcal{A}_G)$ und $\mathcal{L}(G)$ in Bijektion. Die Überprüfung, dass unter dieser Bijektion \supseteq in \leq_{dref} überführt wird, ist Routine. \square

BEISPIEL 3.7

Sei G der folgende Graph.



Das zugehörige graphische Arrangement ist

$$\mathcal{A}_G = \{H_0(\vec{\alpha}_{1,2}), H_0(\vec{\alpha}_{1,3}), H_0(\vec{\alpha}_{2,3}), H_0(\vec{\alpha}_{3,4}), H_0(\vec{\alpha}_{4,5})\}.$$

Der Bindungsverband von G ist in Abbildung 17 dargestellt.

Zur Bestimmung des chromatischen Polynoms von G stellen wir fest, dass wir t Möglichkeiten haben, den Knoten 1 einzufärben, womit $t - 1$ Möglichkeiten für Knoten 2 und $t - 2$ Möglichkeiten für Knoten 3 bleiben. Die Knoten 4 und 5 können mit je $t - 1$ Farben gefärbt werden. Also folgt

$$\chi_G(t) = t(t-1)^3(t-2) = t^5 - 5t^4 + 9t^3 - t^2 + 2t.$$

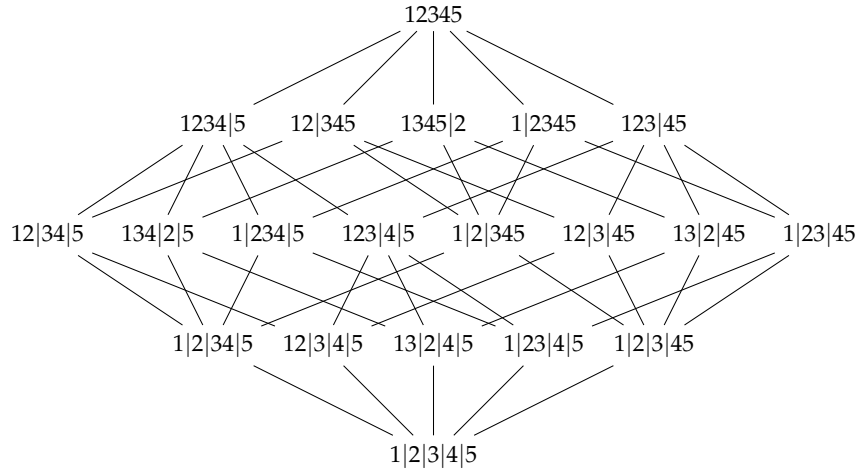


ABBILDUNG 17. Der Bindungsverband des Graphen aus Beispiel 3.7.

Wir können auch $\chi_{A_G}(t)$ mithilfe des in Abbildung 17 dargestellten Bindungsverbandes bestimmen, und sehen, dass wir dasselbe Polynom erhalten.

SATZ 3.8

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Dann gilt $\chi_G(t) = \chi_{A_G}(t)$.

Beweis. Sei $V = [n]$ und sei $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(G)$. Für $t \in \mathbb{N}_+$ bezeichnen wir mit $\chi_{\mathbf{x}}(t)$ die Anzahl der Knotenfärbungen $\kappa : [n] \rightarrow [t]$ von G mit folgenden Eigenschaften.

- Wenn i, j im gleichen Block von \mathbf{x} liegen, dann ist $\kappa(i) = \kappa(j)$.
- Wenn i, j nicht im gleichen Block von \mathbf{x} liegen, aber $\{i, j\} \in E$ gilt, dann ist $\kappa(i) \neq \kappa(j)$.

Der Einfachheit halber identifizieren wir \mathbf{x} mit dem Teilgraphen von G , dessen Zusammenhangskomponenten von \mathbf{x} induziert werden.

Wenn $\kappa : [n] \rightarrow [t]$ eine beliebige Knotenfärbung von G ist, dann gibt es eine eindeutige zusammenhängende Partition $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(G)$ sodass κ von $\chi_{\mathbf{y}}(t)$ gezählt wird. (Die Blöcke von \mathbf{y} sind durch die Mengen

$$\{i \in [n] \mid \text{es gibt } j \in [n] \text{ mit } \{i, j\} \in E \text{ und } \kappa(i) = \kappa(j)\}$$

gegeben). Außerdem ist κ konstant auf den Blöcken von $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(G)$ genau dann, wenn $\mathbf{x} \leq_{\text{dref}} \mathbf{y}$.

Habe nun $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(G)$ genau k Blöcke. Die Anzahl aller Abbildungen $f : [k] \rightarrow [t]$ ist offenbar t^k . Jede solche Abbildung entspricht aber auch einer Knotenfärbung von $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(G)$ mit $\mathbf{x} \leq_{\text{dref}} \mathbf{y}$. (Wenn bspw. $f(i) = f(j)$ für genau zwei $i, j \in [k]$ mit $i \neq j$ gilt, dann betrachte die Partition \mathbf{x}' , die durch Vereinigung des i -ten und j -ten Block von \mathbf{x} entsteht. Wenn $\mathbf{x}' \in \mathcal{L}(G)$, dann wird f von $\chi_{\mathbf{x}'}(t)$ gezählt. Andernfalls gibt es keine Kanten zwischen den Knoten des i -ten und des j -ten Blocks von \mathbf{x} . In diesem Fall wird f von $\chi_{\mathbf{x}}(t)$ gezählt.)

Wenn $\text{bl}(\mathbf{x}) = k$ die Anzahl der Blöcke von \mathbf{x} beschreibt, gilt also

$$t^{\text{bl}(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{x} \leq_{\text{dref}} \mathbf{y}} \chi_{\mathbf{y}}(t).$$

Mit Möbius-Inversion in $\mathcal{L}(G)$ erhalten wir

$$\chi_{\mathbf{x}}(t) = \sum_{\mathbf{x} \leq_{\text{dref}} \mathbf{y}} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t^{\text{bl}(\mathbf{y})}.$$

Sei $S_{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_G)$ das Bild von \mathbf{x} unter der Bijektion von Lemma 3.6. Dann ist offenbar $\dim(S_{\mathbf{x}}) = \text{bl}(\mathbf{x})$. Weiterhin bezeichne $\mathbf{0}$ die triviale Partition in n Blöcke. Nach Definition ist $\chi_{\mathbf{0}}(t) = \chi_G(t)$, sodass mit Lemma 3.6 folgt:

$$\chi_G(t) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}(G)} \mu(\mathbf{0}, \mathbf{x}) t^{\text{bl}(\mathbf{x})} = \sum_{S \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_G)} \mu(\mathbb{R}^n, S) t^{\dim(S)} = \chi_{\mathcal{A}_G}(t).$$

□

Das chromatische Polynom eines Graphen erfüllt eine ähnliche Rekursion wie Lemma 1.41. Satz 3.8 lässt sich mit Hilfe dieser Beziehung auch recht leicht beweisen.

Nun verwenden wir die Beziehung zwischen Graphen und Arrangements von Hyperebenen, um die Anzahl der azyklischen Orientierungen eines einfachen, ungerichteten Graphen zu bestimmen.

DEFINITION 3.9

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Eine **ORIENTIERUNG** σ von G ist eine Zuordnung einer Richtung $i \rightarrow j$ oder $j \rightarrow i$ zu jeder Kante $(i, j) \in E$. Ein **GERICHTETER ZYKLUS** von σ ist eine Folge von Knoten i_0, i_1, \dots, i_s sodass $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_s \rightarrow i_0$. Eine Orientierung heißt **AZYKLISCH**, wenn sie keine gerichteten Zyklen besitzt.

Offensichtlich besitzt ein einfacher, ungerichteter Graph mit m Kanten genau 2^m Orientierungen. Sei $AO(G)$ die Menge aller azyklischen Orientierungen von G .

PROPOSITION 3.10

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Es existiert eine explizite Bijektion von $\mathcal{R}(\mathcal{A}_G)$ nach $AO(G)$.

Beweis. Sei $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_G)$, und sei $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$. Damit haben wir für jede Kante $\{i, j\} \in E$ festgelegt, ob $x_i < x_j$ oder $x_j < x_i$ gilt. So erhalten wir eine Orientierung σ_R von G , in der $i \rightarrow j$ genau dann gilt, wenn $x_i < x_j$. Offenbar ist diese Zuordnung injektiv.

Angenommen σ_R besitzt einen gerichteten Zyklus $i_0 < i_1 < \dots < i_s < i_0$. Dann müsste $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$ die Beziehung $x_{i_0} < x_{i_1} < \dots < x_{i_s} < x_{i_0}$ erfüllen, was offenbar ein Widerspruch ist.

Umgekehrt sei $\sigma \in AO(G)$. Wenn wir an einem beliebigen Knoten beginnen, und immer den gerichteten Kanten folgen, können wir keinen Knoten zweimal besuchen. (Andernfalls hätten wir einen gerichteten Zyklus in σ gefunden.) Da V endlich ist, landen wir irgendwann bei einem Knoten v_n , der keine ausgehenden Kanten besitzt. Wenn wir diesen Knoten aus σ entfernen, ist die übrige Orientierung immer noch azyklisch, sodass wir eine Senke v_{n-1} finden können. Wenn wir diesen Prozess weiterführen, erhalten wir eine Ordnung $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ von $[n]$. (Derart, dass

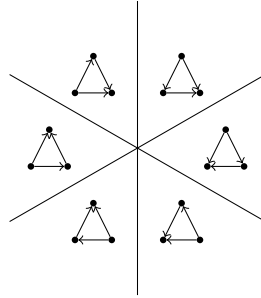


ABBILDUNG 18. Die Kammern von $\mathcal{B}(3)$ entsprechen den azyklischen Orientierungen des K_3 .

v_i eine Senke der Einschränkung von σ auf v_1, v_2, \dots, v_i ist.) Die Kammer $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_G)$, die alle Vektoren (x_1, x_2, \dots, x_n) der Form $x_{v_1} < x_{v_2} < \dots < x_{v_n}$ enthält, erfüllt offenbar $\sigma_R = \sigma$. \square

Die im zweiten Teil des Beweises von Proposition 3.10 konstruierte Ordnung $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ ist im Wesentlichen eine lineare Erweiterung des reflexiven, transitiven Abschlusses von σ .

Wir schlussfolgern das folgende, vielleicht etwas überraschende Ergebnis von Richard Stanley. Der Beweis durch Hyperebenenarrangements geht auf [7, Abschnitt 7] zurück.

KOROLLAR 3.11: [12, Korollar 1.3]

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Dann gilt $\#AO(G) = (-1)^{\#V} \chi_G(-1)$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus den Sätzen 1.51, 3.8 und Proposition 3.10. \square

BEISPIEL 3.12

Betrachten wir erneut den Graphen G aus Beispiel 3.7. Dieser hat fünf Kanten, also gibt es $2^5 = 32$ Orientierungen. Es gibt zwei Möglichkeiten, einen gerichteten Zyklus zu erzeugen, nämlich $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ und $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Es bleiben je zwei Kanten übrig, die beliebig orientiert werden können. Also ist $\#AO(G) = 32 - 2 \cdot 4 = 24$. Das können wir mit dem chromatischen Polynom und Korollar 3.11 verifizieren, denn es gilt

$$\begin{aligned} (-1)^5 \chi_G(-1) &= (-1) \left((-1)^5 - 5(-1)^4 + 9(-1)^3 - 7(-1)^2 + 2(-1) \right) \\ &= (-1) (-1 - 5 - 9 - 7 - 2) \\ &= 24. \end{aligned}$$

BEISPIEL 3.13

Sei $G = K_3$. Dann ist \mathcal{A}_{K_3} isomorph zu $\mathcal{B}(3)$. Abbildung 18 zeigt die Kammern von $\mathcal{B}(3)$, die mit den entsprechenden azyklischen Orientierungen des K_3 indiziert sind.

Wir haben in Beispiel 2.15 gesehen, dass das Zopf-Arrangement $\mathcal{B}(n)$ überauflösbar ist, und nach Definition 3.1 ist jedes graphische Arrangement ein Unterarrangement von $\mathcal{B}(n)$. Daher ist es nur naheliegend zu fragen, welche graphischen Arrangements noch überauflösbar sind.

Für einen Graphen $G = (V, E)$, und einen Knoten $v \in V$, sei $G \setminus \{v\}$ der von $V \setminus \{v\}$ induzierte Teilgraph von G .

DEFINITION 3.14

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **DOPPELT ZUSAMMENHÄNGEND**, wenn sowohl G als auch $G \setminus \{v\}$ für alle $v \in V$ zusammenhängend sind. Eine **SEKTION** von G ist ein maximaler, doppelt zusammenhängender Teilgraph von G .

Offenbar schneiden sich je zwei Sektionen von G in höchstens einem Knoten.

BEISPIEL 3.15

Der Graph aus Beispiel 3.7 ist nicht doppelt zusammenhängend, da er nach Entfernen eines der Knoten 3 oder 4 nicht mehr zusammenhängend ist. Seine Sektionen sind $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$.

LEMMA 3.16

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, dessen Sektionen mit B_1, B_2, \dots, B_k bezeichnet sind. Dann gilt

$$\mathcal{L}(G) \cong \mathcal{L}(B_1) \times \mathcal{L}(B_2) \times \dots \times \mathcal{L}(B_k).$$

Beweis. Sei $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(G)$ mit $\mathbf{x} = \{C_1, C_2, \dots, C_s\}$. Dann ist $C_i \cap B_j$ entweder zusammenhängend oder leer, und die nicht-leeren Durchschnitte induzieren ein (eindeutiges) Element aus $\mathcal{L}(B_1) \times \mathcal{L}(B_2) \times \dots \times \mathcal{L}(B_k)$.

Sei umgekehrt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k) \in \mathcal{L}(B_1) \times \mathcal{L}(B_2) \times \dots \times \mathcal{L}(B_k)$. Nach Voraussetzung sind die Grundmengen von \mathbf{x}_i und \mathbf{x}_j Sektionen von G ; schneiden sich also in höchstens einem Element. Jedes Element von V liegt also in höchstens einem Block von \mathbf{x}_i für alle $i \in [k]$. Alle solchen Blöcke werden zu einem Block einer zusammenhängenden Partition von G vereinigt. Wenn wir dieses Verfahren auf alle Elemente von V anwenden erhalten wir eine eindeutige zusammenhängende Partition von G .

Wir haben also eine Bijektion von $\mathcal{L}(G)$ nach $\mathcal{L}(B_1) \times \mathcal{L}(B_2) \times \dots \times \mathcal{L}(B_k)$ gefunden. Die Überprüfung, dass diese Bijektion sogar ein Verbandsisomorphismus ist, ist Routine. \square

Nach Lemmas 2.12 und 3.16 können wir zur Beantwortung der Frage, wann ein graphisches Arrangement überauflösbar ist, also annehmen, dass der zugrundeliegende Graph doppelt zusammenhängend ist.

Für $v \in V$ bezeichne

$$N(v) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$$

die **NACHBARSCHAFT** von v .

PROPOSITION 3.17

Sei $G = (V, E)$ ein doppelt zusammenhängender (einfacher, ungerichteter) Graph. Ein Koatom $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(G)$ ist genau dann modular, wenn $\mathbf{x} = \{\{v\}, V \setminus \{v\}\}$ ist, sodass $N(v)$ eine Clique bildet.

Beweis. Sei \mathbf{x} ein Koatom in $\mathcal{L}(G)$. Dann ist $\mathbf{x} = \{A, B\}$.

Seien zunächst $\#A > 1$ und $\#B > 1$. Da G doppelt zusammenhängend ist, gibt es Knoten $u, v \in A$ und $u', v' \in B$, sodass $\{u, u'\} \in E$ und $\{v, v'\} \in E$ sind. Da G einfach ist, muss also auch $u \neq u'$ und $v \neq v'$ gelten. Da A und B zusammenhängend sind, gilt dasselbe für $A' = (A \setminus \{v\}) \cup \{u'\}$ und $B' = (B \setminus \{u'\}) \cup \{v\}$. Also ist $\mathbf{y} = \{A', B'\} \in \mathcal{L}(G)$. Es gilt $\text{rk}(\mathbf{x}) = n - 2 = \text{rk}(\mathbf{y})$, sowie $\text{rk}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = n - 1$ und $\text{rk}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = n - 4$, da

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \{A \setminus \{v\}, B \setminus \{u'\}, \{v\}, \{u'\}\}.$$

Also ist \mathbf{x} nicht modular.

Sei nun $\#A = 1$, also $A = \{v\}$. Nehmen wir zunächst an, dass es Knoten $x, y \in V \setminus \{v\}$ gibt mit $\{v, x\} \in E$ und $\{v, y\} \in E$, aber $\{x, y\} \notin E$. Betrachte $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(G)$, mit der Eigenschaft, dass der einzige Block von \mathbf{y} , der aus mehr als einem Element besteht, gerade $\{v, x, y\}$ ist. Dann ist $\text{rk}(\mathbf{x}) = n - 2$, $\text{rk}(\mathbf{y}) = 2$, und $\text{rk}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = n - 1$ und $\text{rk}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = 0$. Also ist \mathbf{x} nicht modular.

Es bleibt der Fall, dass für alle $x, y \in V \setminus \{v\}$ mit $\{v, x\} \in E$ und $\{v, y\} \in E$ auch $\{x, y\} \in E$ gilt. Sei dazu $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(G)$, und sei $B' \in \mathbf{y}$ der Block von \mathbf{y} , der v enthält. Wenn $\#B' = 1$, dann ist $\mathbf{y} \leq_{\text{dref}} \mathbf{x}$ und die Modularitätsbedingung ist automatisch erfüllt. Sei nun $\#B' = r > 1$. Dann ist $\text{rk}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \text{rk}(\mathbf{y}) - 1$, und es gilt

$$\text{rk}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) + \text{rk}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = \text{rk}(\mathbf{y}) - 1 + n - 1 = \text{rk}(\mathbf{y}) + n - 2 = \text{rk}(\mathbf{y}) + \text{rk}(\mathbf{x}).$$

□

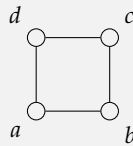
DEFINITION 3.18

Ein (einfacher, ungerichteter) Graph $G = (V, E)$ heißt **TRIANGULIERT**, wenn es eine Ordnung v_1, v_2, \dots, v_n seiner Knoten gibt, sodass folgende Bedingung gilt:

Für alle $i < k, j < k$ mit $\{v_i, v_k\} \in E, \{v_j, v_k\} \in E$, folgt $\{v_i, v_j\} \in E$.

BEISPIEL 3.19

Es sei G der Kreis der Länge vier, dessen Knoten wie folgt beschriftet sind.



Es gibt 24 mögliche Anordnungen von $V = \{a, b, c, d\}$, aber keine erfüllt die Bedingung aus Definition 3.18. Sei beispielsweise a das maximale Element in einer solchen Ordnung. Dann ist stets $b < a$ und $d < a$, wobei $\{a, b\}, \{a, d\} \in E$, aber $\{b, d\} \notin E$. Die übrigen Fälle folgen analog.

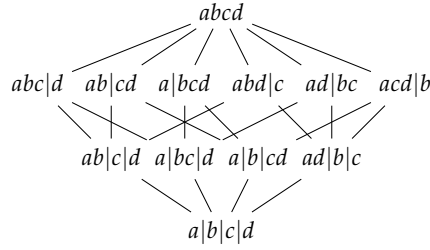


ABBILDUNG 19. Der Bindungsverband eines Kreises der Länge vier.

Abbildung 19 zeigt den Bindungsverband von G . Nach Proposition 3.17 ist keines der Koatome modular, also ist der Bindungsverband nicht überauflösbar.

Wir haben also gesehen, dass ein Kreis der Länge ≥ 4 nicht trianguliert ist. Insbesondere ist ein Graph genau dann trianguliert, wenn jeder induzierte Kreis ein Dreieck ist.

LEMMA 3.20

Sei $G = (V, E)$ ein triangulierter Graph unter der Ordnung v_1, v_2, \dots, v_n . Wenn G doppelt zusammenhängend ist, dann gilt das auch für $G \setminus \{v_n\}$.

Beweis. Sei $G' = G \setminus \{v_n\}$. Nach Voraussetzung ist G' zusammenhängend. Wähle einen beliebigen Knoten v_j von G' .

Wenn v_j nur einen Nachbarn hat, dann ist $G' \setminus \{v_j\}$ trivialerweise zusammenhängend.

Habe also v_j mindestens zwei Nachbarn v_k und v_l . Da $G \setminus \{v_j\}$ zusammenhängend ist, gibt es Wege von v_k zu v_n und von v_l zu v_n . Seien v'_k und v'_l die jeweils letzten von v_n verschiedenen Knoten auf so einem Weg. Nach Voraussetzung ist $\{v'_k, v'_l\} \in E$. Insbesondere existiert ein Weg von v_k nach v_l in $G' \setminus \{v_j\}$. Somit ist $G' \setminus \{v_j\}$ zusammenhängend.

Es folgt, dass G' doppelt zusammenhängend ist. □

SATZ 3.21

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph. Das graphische Arrangement \mathcal{A}_G ist genau dann überauflösbar, wenn G trianguliert ist.

Beweis. Wie bereits angemerkt, genügt es den Fall, dass G doppelt zusammenhängend ist, zu betrachten.

Sei zunächst G ein triangulierter Graph unter der Ordnung v_1, v_2, \dots, v_n . Definiere $\mathbf{x}_{n-1} = \{\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}, \{v_n\}\}$. Da G trianguliert ist, folgt mit Proposition 3.17, dass \mathbf{x}_{n-1} ein modulares Koatom von $\mathcal{L}(G)$ ist. Offenbar ist $G \setminus \{v_n\}$ immer noch trianguliert, und nach Lemma 3.20 auch doppelt zusammenhängend. Also ist $\mathbf{x}'_{n-2} = \{\{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}, \{v_{n-1}\}\}$ ein modulares Koatom von $\mathcal{L}(G \setminus \{v_n\})$. Nach Lemma 2.8 ist $\mathbf{x}_{n-2} = \{\{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}, \{v_{n-1}\}, \{v_n\}\}$ modular in $\mathcal{L}(G)$. Wiederholte Anwendung dieses Vorgehens liefert eine modulare Kette in $\mathcal{L}(G)$, also ist \mathcal{A}_G nach Satz 3.8 überauflösbar.

Dann ist $\mathbf{x}_1 \leq_{\text{dref}} \mathbf{x}_2 \leq_{\text{dref}} \cdots \leq_{\text{dref}} \mathbf{x}_n$ eine maximale Kette in $\mathcal{L}(G)$, und nach Proposition 3.17 ist \mathbf{x}_{n-1} modular. Mit Lemma 2.8 und Proposition 3.17 folgt, dass alle \mathbf{x}_i modular sind, also ist $\mathcal{L}(G)$ überauflösbar.

Sei umgekehrt G ein Graph, dessen Bindungsverband $\mathcal{L}(G)$ überauflösbar ist, und sei $\mathbf{y}_1 \leq_{\text{dref}} \mathbf{y}_2 \leq_{\text{dref}} \cdots \leq_{\text{dref}} \mathbf{y}_n$ eine modulare Kette. Da \mathbf{y}_{n-1} ein modulares Koatom von $\mathcal{L}(G)$ ist, folgt nach Proposition 3.17, dass $\mathbf{y} = \{\{v\}, V \setminus \{v\}\}$, sodass $N(v)$ eine Clique ist. Wir setzen $v_n = v$ und betrachten $G \setminus \{v\}$. Der Bindungsverband $\mathcal{L}(G \setminus \{v\})$ ist immernoch überauflösbar. Wiederholte Anwendung von Proposition 3.17 liefert eine Ordnung der Knoten von G , die zeigt, dass G trianguliert ist. \square