

4. DIE METHODE DER ENDLICHEN KÖRPER

In diesem Abschnitt beschreiben wir eine Methode zur Berechnung des charakteristischen Polynoms eines Hyperebenenarrangements \mathcal{A} über \mathbb{Q}^n , die auf Reduktion modulo einer genügend großen Primzahl beruht. Wenn \mathcal{A} über \mathbb{Q} definiert ist, kann das definierende Polynom von \mathcal{A} derart modifiziert werden, dass ausschließlich ganzzahlige Koeffizienten vorkommen, sodass eine Reduktion modulo einer Primzahl sinnvoll möglich ist.

Die grundlegende Idee ist nun folgende: wir suchen eine genügend große Primzahl p , sodass das Hyperebenenarrangement \mathcal{A}_p über \mathbb{F}_p , dessen definierendes Polynom dem von \mathcal{A} modulo p entspricht, das gleiche charakteristische Polynom wie \mathcal{A} hat. Es lässt sich dann zeigen, dass die Auswertung $\chi_{\mathcal{A}}(p)$ gerade der Anzahl der Elemente von \mathbb{F}_p^n entspricht, die in keiner der Hyperebenen von \mathcal{A}_p liegen. Weiterhin lässt sich zeigen, dass so eine Reduktion für unendlich viele Primzahlen möglich ist, wodurch sich $\chi_{\mathcal{A}}$ bestimmen lässt.

Diese Methode geht indirekt auf Arbeiten von Henry Crapo und Gian-Carlo Rota zurück [3, Abschnitt 17], und wurde von später Christos Athanasiadis formalisiert [1].

DEFINITION 4.1

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{Q}^n)$, und sei p eine Primzahl. Es sei \mathcal{A}_p das Arrangement über dem endlichen Körper \mathbb{F}_p , dessen definierendes Polynom durch Reduktion von $Q_{\mathcal{A}}(\vec{x})$ modulo p entsteht. Wenn $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{A}_p)$ gilt, dann nennen wir \mathcal{A}_p eine **GUTE REDUKTION** von \mathcal{A} modulo p .

BEISPIEL 4.2

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{Q})$ gegeben durch $Q_{\mathcal{A}} = x(x - 10)$. Die Durchschnittsordnung von \mathcal{A} besteht aus drei Elementen, nämlich \mathbb{Q} , 0 und 10. Für $p \notin \{2, 5\}$ erhalten wir eine gute Reduktion von \mathcal{A} , da in diesem Fall 0 und 10 über \mathbb{F}_p unterscheidbar sind.

PROPOSITION 4.3

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{Q}^n)$. Dann besitzt \mathcal{A} eine gute Reduktion für alle bis auf endlich viele Primzahlen p .

Beweis. Sei nun $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_m\}$, wobei H_i durch $\langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle = a_i$ gegeben ist. Für $i_1, i_2, \dots, i_k \subseteq [m]$ ist $H_{i_1} \cap H_{i_2} \cap \dots \cap H_{i_k} \neq \emptyset$ genau dann, wenn

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \vec{a}_{i_1} & a_{i_1} \\ \vec{a}_{i_2} & a_{i_2} \\ \vdots & \vdots \\ \vec{a}_{i_k} & a_{i_k} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \vec{a}_{i_1} \\ \vec{a}_{i_2} \\ \vdots \\ \vec{a}_{i_k} \end{pmatrix},$$

und in diesem Fall ist

$$\dim(H_{i_1} \cap H_{i_2} \cap \dots \cap H_{i_k}) = n - \text{rank} \begin{pmatrix} \vec{a}_{i_1} \\ \vec{a}_{i_2} \\ \vdots \\ \vec{a}_{i_k} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun die folgende Koeffizientenmatrix von \mathcal{A} :

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_m \end{pmatrix}.$$

Eine beliebige $r \times s$ -Teilmatrix A' von A hat genau dann Rang t , wenn es eine $t \times t$ -Teilmatrix B von A' gibt, mit $\det(B) \neq 0$.

Damit ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \not\cong \mathcal{L}(\mathcal{A}_p)$ genau dann der Fall, wenn es eine endliche Menge \mathcal{S} von quadratischen Teilmatrizen von A gibt, die folgende Eigenschaft besitzen:

Für alle $B \in \mathcal{S}$ ist $\det(B) \neq 0$, aber $\det(B) \equiv 0 \pmod{p}$.

Da \mathcal{S} endlich ist, kann es auch nur endlich viele Primzahlen p geben mit $p \mid \det(B)$ für $B \in \mathcal{S}$. Also ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{A}_p)$ für genügend große p . \square

Der Hauptgrund für die Betrachtung von Reduktionen modulo p ist der folgende Satz.

SATZ 4.4

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{Q}^n)$ und sei \mathcal{A}_p eine gute Reduktion von \mathcal{A} für eine genügend große Primzahl p . Dann gilt

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(p) &= \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}_p} H \right) \\ &= p^n - \# \left(\bigcup_{H \in \mathcal{A}_p} H \right). \end{aligned}$$

Beweis. Für $X \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_p)$ gilt offenbar $\#X = p^{\dim(X)}$, wobei die Dimension von X wahlweise über \mathbb{Q} oder über \mathbb{F}_p berechnet werden kann. Wir wollen die Behauptung mit Möbius-Inversion in $\mathcal{L}(\mathcal{A}_p)$ zeigen, und definieren zwei Funktionen $f, g : \mathcal{L}(\mathcal{A}_p) \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(X) = \#X \quad \text{und} \quad g(X) = \# \left(X \setminus \bigcup_{Y \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_p) : X \supsetneq Y} Y \right).$$

Nach Definition gilt

$$f(X) = \sum_{Y \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_p) : X \supseteq Y} g(Y),$$

sodass mit Möbius-Inversion folgt:

$$\begin{aligned} g(X) &= \sum_{Y \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_p) : X \supseteq Y} \mu(X, Y) f(Y) \\ &= \sum_{X \supseteq Y} \mu(X, Y) p^{\dim(Y)}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$g(\mathbb{F}_p^n) = \sum_{X \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_p)} \mu(\mathbb{F}_p^n, X) p^{\dim(X)} = \chi_{\mathcal{A}}(p).$$

Die letzte Gleichheit folgt dabei aus der Annahme, dass $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{A}_p)$ gilt. Zudem folgt aus der Definition von g , dass

$$g(\mathbb{F}_p^n) = \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}_p} H \right),$$

womit der Satz bewiesen ist. □

BEISPIEL 4.5

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Sei p eine genügend große Primzahl. Mit Satz 4.4 folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{C}(n)}(p) &= \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{C}(n)} H \right) \\ &= p^n - \#\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid a_i = 0 \text{ für geeignete } i\} \\ &= \#\{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid b_i \neq 0 \text{ für } i \in [n]\}. \end{aligned}$$

Um ein Element aus dieser Menge zu bestimmen, haben wir für alle $i \in [n]$ genau $p - 1$ Möglichkeiten, um den Eintrag a_i zu wählen. Wir erhalten also

$$\chi_{\mathcal{C}(n)}(p) = (p - 1)^n,$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 1.33.

BEISPIEL 4.6

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Sei p eine genügend große Primzahl. Mit Satz 4.4 folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{B}(n)}(p) &= \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{B}(n)} H \right) \\ &= p^n - \#\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid a_i = a_j \text{ für geeignete } i, j\} \\ &= \#\{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid b_i \neq b_j \text{ für } 1 \leq i < j \leq n\}. \end{aligned}$$

Um ein Element aus dieser Menge zu bestimmen, bemerken wir, dass a_1 genau p Werte annehmen kann. Damit bleiben für a_2 noch $p - 1$ Möglichkeiten, für a_3 noch $p - 2$, und so weiter. Wir erhalten also

$$\chi_{\mathcal{B}(n)}(p) = p(p - 1)(p - 2) \cdots (p - n + 1)$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 1.34.

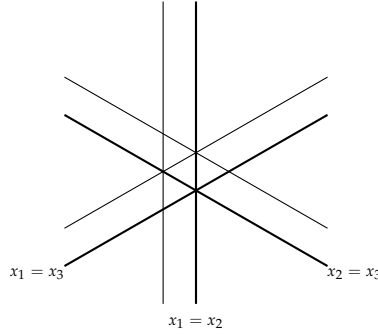


ABBILDUNG 20. Das Arrangement $\text{ess}(\text{Shi}(3))$. Hervorgehoben ist $\mathcal{B}(3)$.

BEISPIEL 4.7

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph, und sei \mathcal{A}_G das zugehörige graphische Arrangement. Das definierende Polynom von \mathcal{A}_G ist gerade

$$Q_{\mathcal{A}_G}(\vec{x}) = \prod_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j).$$

Sei p eine genügend große Primzahl. Mit Satz 4.4 folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}_G}(p) &= \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}_G} H \right) \\ &= p^n - \#\{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid a_i = a_j \text{ für geeignete } \{i, j\} \in E \} \\ &= \#\{ (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid b_i \neq b_j \text{ für alle } \{i, j\} \in E \} \\ &= \chi_G(p) \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit Satz 3.8.

BEISPIEL 4.8: [1, Theorem 3.3]

Sei nun $\text{Shi}(n)$ das **SHI-ARRANGEMENT** gegeben durch

$$\text{Shi}(n) = \{ H_a(\vec{a}_{i,j}) \mid 1 \leq i < j \leq n, a \in \{0, 1\} \}.$$

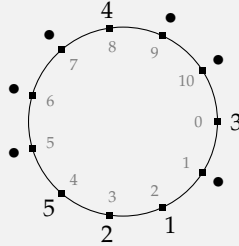
Abbildung 20 zeigt $\text{ess}(\text{Shi}(3))$. Offenbar ist $\#\text{Shi}(n) = n(n-1)$ und $\text{rk}(\text{Shi}(n)) = n-1$.

Sei p eine genügend große Primzahl. Mit Satz 4.4 folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\text{Shi}(n)}(p) &= \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \text{Shi}(n)} H \right) \\ &= p^n - \#\{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid a_i = a_j \text{ oder } a_i = a_j + 1 \text{ für geeignete } i, j \} \\ &= \#\{ (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid b_i \neq b_j \text{ und } b_i \neq b_j + 1 \text{ für } 1 \leq i < j \leq n \}. \end{aligned}$$

Sei nun (b_1, b_2, \dots, b_n) ein Element im Komplement von $\text{Shi}(n)$ über \mathbb{F}_p^n . Wir zeichnen zunächst die Elemente von \mathbb{F}_p im Uhrzeigersinn auf einem Kreis ein. Nun markieren wir, für alle $i \in [n]$, den Punkt b_i mit i , und markieren die übrigen Punkte mit \bullet . Nun schreiben wir die Zahlen zwischen zwei mit \bullet markierten Punkten als Menge auf (diese kann leer sein), und ordnen diese Mengen im Uhrzeigersinn ausgehend von der Menge die die 1 enthält an. Wir erhalten offenbar eine geordnete schwache Partition von $[n]$ mit $p - n$ Blöcken, also eine Familie $\{B_1, B_2, \dots, B_{p-n}\}$ mit $B_i \cap B_j = \emptyset$, $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{p-n} = [n]$, wobei einige der B_i auch leer sein können, und die Elemente von B_i linear geordnet sind. Sei umgekehrt $\mathbf{x} = \{B_1, B_2, \dots, B_{p-n}\}$ eine geordnete schwache Partition von $[n]$, und sei $x \in \mathbb{F}_p$. Sei $B_1 = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ mit $y_1 = 1$. Wir markieren die Punkte $x + (i - 1)$ mit y_i für $i \in [r]$, und $x + r$ mit \bullet . Von $x + r + 1$ ausgehend wiederholen wir die Prozedur mit den übrigen Blöcken von \mathbf{x} . Dann erzeugen wir ein Tupel (b_1, b_2, \dots, b_n) , wobei b_i der mit i markierte Punkt sein soll. Offenbar ist $b_i \neq b_j$ für alle $1 \leq i < j \leq n$. Wenn es $i < j$ gäbe mit $b_i = b_j + 1$, dann wäre der mit j markierte Punkt im Uhrzeigersinn direkt vor dem mit i markierten Punkt. Da diese Punkte nicht mit einem \bullet getrennt werden, gehören sie zu einem Block B von \mathbf{x} . Da $i < j$ erhalten wir aber einen Widerspruch zur Annahme, dass B linear geordnet ist. Also ist $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \text{Shi}(n)} H$.

Betrachten wir $p = 11$ und $n = 5$, und wählen wir $(2, 3, 0, 8, 4)$. Wir erhalten das folgende Diagramm.



Aus diesem lesen wir die geordnete schwache Partition $\{\{1, 2, 5\}, \emptyset, \emptyset, \{4\}, \emptyset, \{3\}\}$ ab.

Wenn $\Pi_n^o(p - n)$ die Menge aller geordneten schwachen Partitionen von $[n]$ mit $p - n$ Blöcken bezeichnet, haben wir eben gezeigt, dass gilt:

$$\begin{aligned} \#\{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid b_i \neq b_j \text{ und } b_i \neq b_j + 1 \text{ für } 1 \leq i < j \leq n\} \\ = \#\{(\mathbf{x}, x) \mid \mathbf{x} \in \Pi_n^o(p - n), x \in \mathbb{F}_p\}. \end{aligned}$$

Um ein Element $\mathbf{x} \in \Pi_n^o(p - n)$ zu spezifizieren genügt es für jeden Wert $2 \leq i \leq n$ festzulegen, in welchem der $p - n$ Blöcke er liegt. (Nach Konstruktion ist 1 immer im ersten Block von \mathbf{x} .) Somit ist

$$\#\Pi_n^o(p - n) = (p - n)^{n-1}.$$

Fügen wir diese Überlegungen zusammen, erhalten wir

$$\chi_{\text{Shi}(n)}(p) = p(p - n)^{n-1}.$$

Mit Satz 1.51 folgt dann

$$\begin{aligned} r(\text{Shi}(n)) &= (n+1)^{n-1}, \\ b(\text{Shi}(n)) &= (n-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Das können wir in Abbildung 20 verifizieren, denn dort lesen wir $r(\text{Shi}(3)) = 16 = (3+1)^{3-1}$ und $b(\text{Shi}(3)) = 4 = (3-1)^{3-1}$ ab.

BEMERKUNG 4.9

Die Formel zur Berechnung der Anzahl der Kammern des Shi-Arrangements, $r(n) = (n+1)^{n-1}$, ist auch aus anderen Situationen bekannt. Beispielsweise zählt $r(n)$ auch die folgenden Objekte:

- beschriftete Bäume mit $n+1$ Knoten;
- Funktionen $f: [n-1] \rightarrow [n+1]$, sogenannte Prüfer-Codes;
- Einparkfunktionen der Länge n ;
- Faktorisierungen eines $n+1$ -Zyklus in n Transpositionen;
- Wälder von gewurzelten Bäumen mit $n+1$ Knoten;
- maximale Ketten im Verband der nichtkreuzenden Mengenpartitionen von $[n+1]$.

Eine interessante kombinatorische Frage ist es nun, explizite Bijektionen zwischen diesen Mengen anzugeben. Wir beschreiben kurz eine Bijektion zwischen den Kammern von $\text{Shi}(n)$ und den Einparkfunktionen der Länge n , die auf I. Pak und R. Stanley zurück geht. Eine Folge $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in [n]^n$ heißt **EINPARKFUNKTION**, wenn es eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ gibt, sodass $a_i \leq \sigma(i)$ für alle $i \in [n]$ gilt.

Ihren Namen erhalten Einparkfunktionen aus dem folgenden Szenario. Stellen wir uns eine Einbahnstraße mit n beschrifteten, linear angeordneten Parkplätzen vor. In diese Straße fahren nacheinander n Autos ein, wobei das i -te Auto den a_i -ten Parkplatz bevorzugt. Das i -te Auto fährt also bis zum a_i -ten Parkplatz vor und parkt ein wenn dieser frei ist. Ist der a_i -te Platz belegt, dann parkt das i -te Auto im nächsten freien Parkplatz ein. Eine solche Folge (a_1, a_2, \dots, a_n) von Parkpräferenzen ist genau dann erfolgreich (d.h. alle Autos können einparken), wenn es eine Einparkfunktion ist. Offenbar bleibt, egal welche Folge von Präferenzen wir festlegen, höchstens ein Auto ohne Parkgelegenheit.

Um Einparkfunktionen zu zählen bietet sich folgende Beweisidee von H. Pollack an. Modifizieren wir das Modell also so, dass wir $n+1$ Parkplätze zyklisch anordnen. Nun können alle Autos einparken, und es bleibt genau ein Platz frei. Die Einparkfunktionen entsprechen genau den Situationen, in denen der $n+1$ -te Platz frei bleibt. Offenbar gibt es $(n+1)^n$ Abbildungen von $[n]$ nach $[n+1]$, und die Menge dieser Anordnungen lässt sich in $n+1$ Rotationsklassen zerlegen. Dabei gibt es genau eine Anordnung pro Rotationsklasse, in welcher der $n+1$ -te Platz frei bleibt. Die Anzahl aller Einparkfunktionen der Länge n ist also $(n+1)^{n-1}$.

Sei nun $R_0 \in \mathcal{R}(\text{Shi}(n))$ die Kammer, deren Vektoren die Form (x_1, x_2, \dots, x_n) mit $x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_1 - 1$ haben. Wir setzen $\lambda(R_0) = (1, 1, \dots, 1)$. Nun nehmen wir an, dass wir ein $R \in \mathcal{R}(\text{Shi}(n))$ gefunden haben, für das $\lambda(R)$ bekannt ist. Wir wählen eine benachbarte Kammer $R' \in \mathcal{R}(\text{Shi}(n))$, d.h. R und R' werden von genau einer Hyperebene

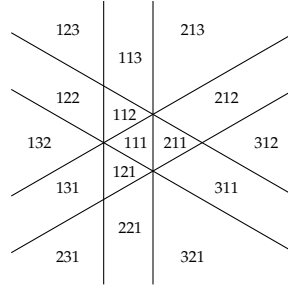


ABBILDUNG 21. Das Arrangement $\text{ess}(\text{Shi}(3))$, mit durch Einparkfunktionen beschrifteten Kammern.

H getrennt, und nehmen an, dass $\lambda(R')$ unbekannt ist, sowie dass R und R_0 im gleichen Halbraum von H liegen. Dann setzen wir

$$\lambda(R') = \begin{cases} \lambda(R) + \vec{e}_i, & H = H_0(\vec{\alpha}_{i,j}), \\ \lambda(R) + \vec{e}_j, & H = H_1(\vec{\alpha}_{i,j}). \end{cases}$$

Nun kann man zeigen, dass die Abbildung λ eine Bijektion von $\mathcal{R}(\text{Shi}(n))$ in die Menge aller Einparkfunktionen der Länge n ist. Abbildung 21 zeigt die Essentialisierung von $\text{Shi}(3)$, deren Kammern mit den Einparkfunktionen der Länge 3 beschriftet sind.

BEISPIEL 4.10: [1, Theorem 3.4]

Sei $G = (V, E)$ ein (einfacher, ungerichteter) Graph mit $V = [n]$. Wir betrachten das **GRAPHISCHE SHI-ARRANGEMENT** gegeben durch

$$\text{Shi}_G(n) = \mathcal{B}(n) \uplus \{H_1(\vec{\alpha}_{i,j}) \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ und } \{i, j\} \in E\}.$$

Insbesondere ist für den vollständigen Graphen $\text{Shi}_G(n) = \text{Shi}(n)$, und für den leeren Graphen $\text{Shi}_G(n) = \mathcal{B}(n)$.

Nehmen wir nun an, dass E die folgende Eigenschaft erfüllt.

- (3) Wenn $i < j$ und $\{i, j\} \in E$, dann ist auch $\{i, k\} \in E$ für alle $j < k \leq n$.

In diesem Fall können wir das charakteristische Polynom von $\text{Shi}_G(n)$ analog zu Beispiel 4.8 bestimmen. Sei dazu p eine genügend große Primzahl.

Wir tragen zuerst $p - n$ mal das Symbol \bullet auf einem Kreis ein. Jetzt setzen wir die Zahlen $1, 2, \dots, n$ in die entstehenden $p - n$ Lücken. Wir erhalten so ein Tupel $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n$, wobei b_i dem mit i markierten Punkt entspricht.

Die Zahl 1 können wir ohne Einschränkungen platzieren. Nehmen wir an, dass die Zahlen $1, 2, \dots, j - 1$ für $j \geq 2$ bereits platziert sind. Dann stehen für j prinzipiell $p - n + j - 1$ Plätze zur Verfügung. Allerdings dürfen wir j nicht direkt vor i platzieren, wenn die Kante $\{i, j\} \in E$ existiert. (Wenn wir das tun, steht in der fertigen Platzierung ein Wert $k \geq j$ direkt vor i , woraus $b_i - b_k = 1$ folgt. Nach Voraussetzung ist aber $\{i, k\} \in E$, also liegt das entsprechende Tupel nicht in $\mathbb{F}_p^n \setminus \text{Shi}_G(n)$.)

Wir definieren also

$$a_j = \#\{i \in [n] \mid i < j \text{ und } \{i, j\} \in E\}$$

und erhalten $p - n + j - 1 - a_j$ Möglichkeiten, die Zahl $j > 1$ zu platzieren. Es folgt

$$\chi_{\text{Shi}_G(n)}(p) = p \prod_{j=2}^n (p - n + j - 1 - a_j),$$

da wir p Möglichkeiten haben, um die 1 zu platzieren.

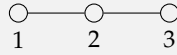
Sowohl der vollständige Graph, als auch der Graph ohne Kanten erfüllen (3). Im ersten Fall ist $a_j = j - 1$, im zweiten Fall ist $a_j = 0$. In diesem Spezialfällen erhalten wir genau die charakteristischen Polynome von $\text{Shi}(n)$ bzw. $\mathcal{B}(n)$.

Mit Satz 1.51 folgt dann

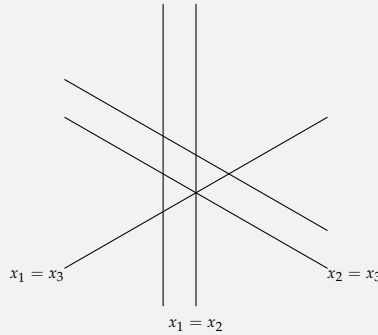
$$r(\text{Shi}_G(n)) = \prod_{j=2}^n (2 + n - j + a_j)$$

$$b(\text{Shi}_G(n)) = \prod_{j=2}^n (n - j + a_j).$$

Charakteristische Polynome von graphischen Shi-Arrangements, deren zugrundeliegende Graphen die Bedingung (3) nicht erfüllen, lassen sich im Allgemeinen nicht so schön faktorisieren. Betrachten wir beispielsweise den folgenden Pfad P :



Da die Kante $\{1, 2\}$ existiert, aber nicht $\{1, 3\}$, ist (3) verletzt. Die Essentialisierung des entsprechenden graphischen Shi-Arrangements sieht wie folgt aus.



Das entsprechende charakteristische Polynom ist

$$\chi_{\text{Shi}_P(n)}(t) = t^3 - 5t^2 + 7t = t(t^2 - 5t + 7),$$

welches über \mathbb{R} nicht in Linearfaktoren zerfällt.

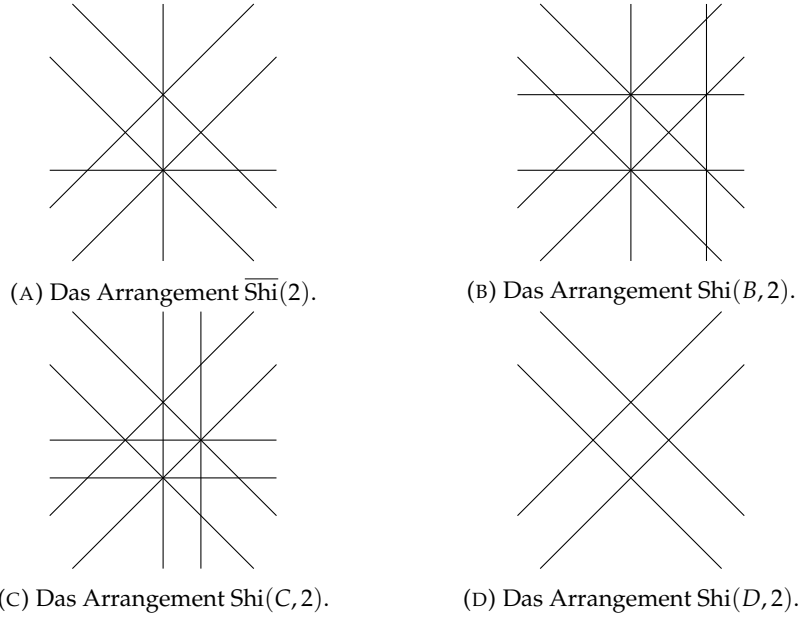


ABBILDUNG 22. Verallgemeinerte Shi-Arrangements.

BEISPIEL 4.11: [1, Theorem 3.10]

Betrachten wir das folgende Hyperebenenarrangement

$$\overline{\text{Shi}}(n) = \{H_a(\vec{e}_i \pm \vec{e}_j) \mid 1 \leq i < j \leq n, a \in \{0, 1\}\} \cup \{H(\vec{e}_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Abbildung 22a zeigt $\overline{\text{Shi}}(2)$. Es ist $\#\overline{\text{Shi}}(n) = 2n^2 - n$ und $\text{rk}(\overline{\text{Shi}}(n)) = n$. Sei p eine genügend große Primzahl. Mit Satz 4.4 folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\overline{\text{Shi}}(n)}(p) &= \# \left(\mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \overline{\text{Shi}}(n)} H \right) \\ &= p^n - \#\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid a_i - a_j \in \{0, 1\} \text{ oder } a_i = 0 \text{ für geeignete } i, j\} \\ &= \#\{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid b_i \neq 0 \text{ für } i \in [n] \text{ und } b_i - b_j \notin \{0, 1\} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n\}. \end{aligned}$$

Um ein solches Element (b_1, b_2, \dots, b_n) zu bestimmen, gehen wir wie folgt vor. Zunächst zeichnen wir wieder die Elemente von \mathbb{F}_p^n im Uhrzeigersinn auf einem Kreis ein, sodass 0 oben ist. Wir wollen nun die Elemente von $\pm[n] = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ auf diesem Kreis platzieren, unter der Bedingung, dass wenn der Punkt $b_i \in \mathbb{F}_p$ mit i beschriftet wird, dann wird $-b_i \in \mathbb{F}_p$ mit $-i$ beschriftet.

Die Bedingungen $b_i \neq 0$ verlangen, dass der Punkt 0 unbeschriftet bleibt, und die Bedingungen $b_i - b_j \neq 0$ verlangen, dass keine zwei Punkte mit dem gleichen Wert beschriftet werden. Die Bedingungen $b_i - b_j \neq 1$ verlangen, dass für alle $j \in [n]$ und alle $i < j$ weder

der Punkt $b_j + 1$ mit i , noch der Punkt $-b_j - 1$ mit $-i$ beschriftet werden können. Die Bedingungen $b_i + b_j \neq 1$ verlangen, dass für alle $j \in [n]$ und alle $i < j$ der Punkt $b_j - 1$ nicht mit $-i$ beschriftet werden kann. Insbesondere kann eine negative Zahl $-i$ nie direkt vor einer positiven Zahl j stehen für $i \neq j$.

Mit anderen Worten, wann immer zwei Zahlen i, j mit $i \neq \pm j$ direkt nebeneinander auftauchen, dann sollen sie im Uhrzeigersinn korrekt bzgl. der Ordnung

$$1 \triangleleft 2 \triangleleft \cdots \triangleleft n \triangleleft -n \triangleleft \cdots \triangleleft -2 \triangleleft -1$$

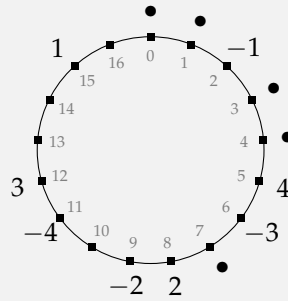
angeordnet sein.

Insbesondere genügt es, die Beschriftungen der Menge $\{0, 1, \dots, (p-1)/2\}$ zu betrachten, da für jedes Paar $(i, -i)$ mit $i \in [n]$ nur einer der beiden Werte in dieser Menge auftaucht. Eine gültige Beschriftung besagter Menge erzeugt eine gültige Beschriftung der übrigen Elemente in \mathbb{F}_p durch Vorzeichenwechsel.

Also suchen wir die Anzahl der Platzierungen von $[n]$ (jeweils mit oder ohne Vorzeichen) in $(p-1)/2$ Stellen. Insbesondere bleiben am Ende $(p+1)/2 - n$ Stellen frei (eine davon ist die 0). Diese freien Stellen markieren wir wieder mit \bullet . Die Werte direkt nach einem \bullet erzeugen eine signierte, geordnete schwache Partition von $[n]$ mit genau $(p+1)/2 - n$ Blöcken. Jedes i gehört zu genau einem der $(p+1)/2 - n$ Blöcke, und kommt mit einem von zwei Vorzeichen vor. Durch die Ordnung \triangleleft gibt es keine Freiheit bei der Anordnung der Blöcke, also ist die Anzahl besagter Platzierungen gleich

$$\chi_{\overline{\text{Shi}}(n)}(p) = (p - 2n + 1)^n.$$

Betrachten wir $p = 17$ und $n = 4$, und wählen wir $(15, 8, 12, 5)$. Wir erhalten das folgende Diagramm.



Die entsprechende signierte, geordnete schwache Partition von $[4]$ ist $\{\emptyset, \{-1\}, \emptyset, \{4, -3\}, \{2\}\}$.

Mit Satz 1.51 folgt dann

$$r(\overline{\text{Shi}}(n)) = (2n)^n,$$

$$b(\overline{\text{Shi}}(n)) = (2n - 2)^n.$$

BEISPIEL 4.12: [1, Theorem 3.13]

Betrachten wir nun das **SHI-ARRANGEMENT VOM TYP B** gegeben durch

$$\text{Shi}(B, n) = \overline{\text{Shi}}(n) \cup \{H_1(\vec{e}_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

$\text{Shi}(B, 2)$ ist in Abbildung 22b dargestellt.

Wir verwenden das gleiche kombinatorische Modell wie in Beispiel 4.11. Die zusätzlichen Bedingungen $x_i \neq 1$ bedeuten, dass der Punkt 1 entweder frei bleibt, oder mit einem negativen Wert beschriftet wird. Wir erhalten also signierte, geordnete schwache Partitionen von $[n]$ mit $(p+1)/2 - n$ Blöcken, wobei der erste Block höchstens negative Werte enthält. Um $i \in [n]$ zu platzieren bleiben also $1 + 2((p-1)/2 - n) = p - 2n$ Möglichkeiten, und wir erhalten:

$$\chi_{\text{Shi}(B, n)}(p) = (p - 2n)^n.$$

Mit Satz 1.51 folgt dann

$$r(\text{Shi}(B, n)) = (2n + 1)^n,$$

$$b(\text{Shi}(B, n)) = (2n - 1)^n.$$

BEISPIEL 4.13: [1, Theorem 3.13]

Betrachten wir nun das **SHI-ARRANGEMENT VOM TYP C** gegeben durch

$$\text{Shi}(C, n) = \overline{\text{Shi}}(n) \cup \{H_1(2\vec{e}_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

$\text{Shi}(C, 2)$ ist in Abbildung 22c dargestellt.

Analog zu Beispiel 4.12 haben wir die zusätzlichen Bedingungen $2x_i \neq 1$. Das ist äquivalent zu $-x_i \neq (p-1)/2$. Also bleibt der Punkt $(p-1)/2$ entweder leer, oder wird mit einem positiven Wert beschriftet. Wir erhalten also signierte, geordnete schwache Partitionen von $[n]$ mit $(p+1)/2 - n$ Blöcken, wobei der letzte Block höchstens positive Werte enthält. Um $i \in [n]$ zu platzieren bleiben also $1 + 2((p-1)/2 - n) = p - 2n$ Möglichkeiten, und wir erhalten:

$$\chi_{\text{Shi}(C, n)}(p) = (p - 2n)^n.$$

Mit Satz 1.51 folgt dann

$$r(\text{Shi}(C, n)) = (2n + 1)^n,$$

$$b(\text{Shi}(C, n)) = (2n - 1)^n.$$

BEISPIEL 4.14: [1, Theorem 3.13]

Betrachten wir nun das **SHI-ARRANGEMENT VOM TYP D** gegeben durch

$$\text{Shi}(D, n) = \overline{\text{Shi}}(n) \setminus \{H(\vec{e}_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

$\text{Shi}(D, 2)$ ist in Abbildung 22d dargestellt.

Wir verwenden erneut das kombinatorische Modell aus Beispiel 4.11. Nun können wir aber ebenfalls die 0 beschriften. Wenn die 0 mit i beschriftet wird, dann folgt wegen $x_i = 0 = -x_i$, dass die 0 ebenfalls mit $-i$ beschriftet wird. Wir erhalten also signierte, geordnete schwache Partitionen von $[n]$ mit $(p+3)/2 - n$ Blöcken, wobei die Elemente im

ersten Block sowohl bzgl. des Vorzeichen, als auch bzgl. der Reihenfolge festgelegt sind. Um $i \in [n]$ zu platzieren, bleiben also $1 + 2((p+1)/2 - n) = p - 2n + 2$ Möglichkeiten, und wir erhalten:

$$\chi_{\text{Shi}(D,n)}(p) = (p - 2n + 2)^n.$$

Mit Satz 1.51 folgt dann

$$r(\text{Shi}(D,n)) = (2n - 1)^n,$$

$$b(\text{Shi}(D,n)) = (2n - 3)^n.$$

Die Arrangements $\text{Shi}(B,n)$ und $\text{Shi}(D,n)$ gehen auf gleiche Weise aus $\text{Shi}(n)$ hervor, wie die in der Übung betrachteten Arrangements $\text{Cox}(B,n)$ und $\text{Cox}(D,n)$ aus $\mathcal{B}(n)$ hervorgehen. (Siehe Ü23 und Ü24.) Insbesondere bezeichnet man $\mathcal{B}(n)$ auch als Coxeter-Arrangement vom Typ A , und $\text{Shi}(n)$ dementsprechend als Shi-Arrangement vom Typ A . Wir bemerken, dass $\text{Shi}(B,n)$ und $\text{Shi}(C,n)$ nicht-isomorph sind, während das Typ- C -Analogon des Coxeter-Arrangements isomorph zu $\text{Cox}(B,n)$ ist.