

1. ARRANGEMENTS VON HYPEREBENEN

1.1. Grundlegende Begriffe. Wir beginnen mit den grundlegenden Definitionen und Ergebnissen und folgen dabei im Wesentlichen [13], und benutzen die Abkürzung $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Ein anderes Buch zu Hyperbenenarrangements ist [8].

DEFINITION 1.1

Für $\vec{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ und $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$H_a(\vec{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle = a\}$$

eine (AFFINE) **HYPEREBENE** von \mathbb{R}^n . Ist $a = 0$, so ist $H(\vec{a}) \stackrel{\text{def}}{=} H_0(\vec{a})$ eine **LINEARE HYPEREBENE**.

Affine bzw. lineare Hyperbenen sind also nichts weiter als affine bzw. lineare Unterräume von \mathbb{R}^n der Dimension $n - 1$. Wir nennen zwei Hyperbenen H, H' **LINEAR UNABHÄNGIG**, wenn ihre Normalenvektoren linear unabhängig sind.

DEFINITION 1.2

Ein **HYPEREBENENARRANGEMENT** ist eine endliche Menge \mathcal{A} von (affinen) Hyperbenen.

Wir bezeichnen mit $\text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ die Klasse aller Hyperbenenarrangements in \mathbb{R}^n . Jede Teilmenge von $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ ist auf natürliche Weise wieder ein Hyperbenenarrangement; ein **UNTERARRANGEMENT** von \mathcal{A} .

DEFINITION 1.3

Ein Hyperbenenarrangement $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ heißt

- **LINEAR**, wenn alle $H \in \mathcal{A}$ linear sind;
- **ZENTRAL**, wenn $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$.

LEMMA 1.4

Ein Hyperbenenarrangement ist genau dann zentral, wenn es eine Verschiebung eines linearen Hyperbenenarrangements ist.

Beweis. Sei zunächst \mathcal{A} ein lineares Hyperbenenarrangement. Dann ist $\vec{0} \in H$ für alle $H \in \mathcal{A}$, und damit ist $\vec{0} \in \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$. Also ist \mathcal{A} zentral.

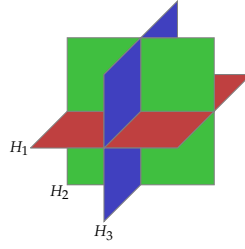
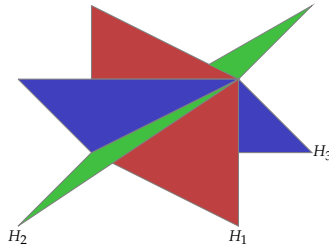
Sei nun umgekehrt \mathcal{A} zentral, und sei $\vec{v} \in \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$. Dann ist $\mathcal{A} - \{\vec{v}\} = \{H - \{\vec{v}\} \mid H \in \mathcal{A}\}$ offenbar ein lineares Hyperbenenarrangement. \square

BEISPIEL 1.5

Sei \vec{e}_i der i -te Standardeinheitsvektor von \mathbb{R}^n . Das **KOORDINATENARRANGEMENT** ist

$$\mathcal{C}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{H_0(\vec{e}_1), H_0(\vec{e}_2), \dots, H_0(\vec{e}_n)\}.$$

Offenbar gilt $\bigcap_{H \in \mathcal{C}(n)} H = \{\vec{0}\}$; also ist $\mathcal{C}(n)$ zentral und linear. Abbildung 2 zeigt $\mathcal{C}(3)$.

ABBILDUNG 2. Das Koordinatenarrangement $\mathcal{C}(3)$.ABBILDUNG 3. Das Zopf-Arrangement $\mathcal{B}(3)$.**BEISPIEL 1.6**

Sei $\vec{\alpha}_{i,j} = \vec{e}_i - \vec{e}_j$. Das **ZOPF-ARRANGEMENT** ist

$$\mathcal{B}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{H_0(\vec{\alpha}_{i,j}) \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Offenbar ist $\bigcap_{H \in \mathcal{B}(n)} H = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dots + \vec{e}_n\}$; also ist $\mathcal{B}(n)$ zentral und linear. Abbildung 3 zeigt $\mathcal{B}(3)$.

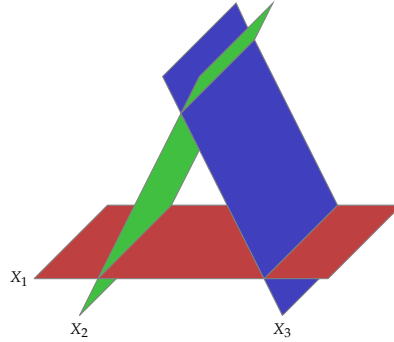
Die **ZOPFGRUPPE** \mathfrak{B}_n ist durch die Gruppenpräsentation

$$\mathfrak{B}_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ für } 1 \leq i < j \leq n-1 \text{ mit } |j-i| > 1, \text{ und} \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ für } i \in [n-2] \rangle$$

festgelegt. Diese Präsentation erinnert stark an die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_n , die die folgende Präsentation besitzt:

$$\mathfrak{S}_n = \langle s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \mid s_i s_j = s_j s_i \text{ für } 1 \leq i < j \leq n-1 \text{ mit } |j-i| > 1, \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \text{ für } i \in [n-2], \text{ und } s_i^2 = \text{id für } i \in [n-1] \rangle.$$

Der Gruppenhomomorphismus $\pi : \mathfrak{B}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$, der auf den Erzeugern durch $\pi(\sigma_i) = s_i$ für $i \in [n-1]$ festgelegt ist, ist offenbar surjektiv. Der Kern dieser Abbildung ist eine Untergruppe von \mathfrak{B}_n , die **REINE ZOPFGRUPPE** \mathfrak{P}_n . Bemerkenswerterweise ist \mathfrak{P}_n die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{B}(n)$.

ABBILDUNG 4. Ein Hyperebenenarrangement in \mathbb{R}^3 .**BEISPIEL 1.7**

Betrachten wir die folgenden drei Hyperebenen:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} &&= H((0, 0, 1)), \\ X_2 &= \{(x, y, 2 + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} &&= H_2((0, -2, 1)), \\ X_3 &= \{(x, y, 2 - 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} &&= H_2((0, 2, 1)). \end{aligned}$$

Das entsprechende Hyperebenenarrangement $\mathcal{A} = \{X_1, X_2, X_3\}$ ist in Abbildung 4 skizziert. Offenbar ist \mathcal{A} weder zentral noch linear.

1.2. Dimension und essentielle Arrangements. Das orthogonale Komplement einer Hyperebene H ist

$$H^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle = 0 \text{ für alle } \vec{x} \in T(H)\},$$

und ist nach Definition ein linearer Unterraum der Dimension 1. Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren den **NORMALENRAUM** zum \mathcal{A} als

$$N(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{x} \in H^\perp \mid H \in \mathcal{A}\}.$$

Offenbar ist $N(\mathcal{A})$ ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n , also gilt $\mathbb{R}^n = N(\mathcal{A}) + N(\mathcal{A})^\perp$.

DEFINITION 1.8

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Die **DIMENSION** von \mathcal{A} ist $\dim(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\mathbb{R}^n)$. Der **RANG** von \mathcal{A} ist $\text{rk}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(N(\mathcal{A}))$. Wenn $\dim(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A})$ gilt, heißt \mathcal{A} **ESSENTIELL**.

BEMERKUNG 1.9

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ nicht essentiell. Dann ist

$$\text{ess}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{H \cap N(\mathcal{A}) \mid H \in \mathcal{A}\}$$

ein essentielles Hyperebenenarrangement in $N(\mathcal{A})$.

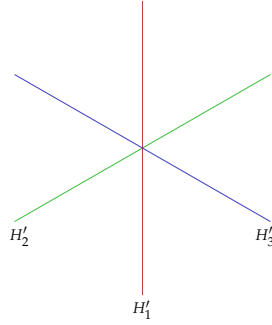


ABBILDUNG 5. Das essentielle Arrangement zu $\mathcal{B}(3)$ aus Abbildung 3.

BEISPIEL 1.10

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Dann ist

$$N(\mathcal{C}(n)) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{e}_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cong \mathbb{R}^n,$$

also ist $\mathcal{C}(n)$ essentiell.

BEISPIEL 1.11

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. Wir stellen fest, dass

$$\begin{aligned} N(\mathcal{B}(n)) &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{\alpha}_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{e}_i - \vec{e}_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{e}_i - \vec{e}_{i+1} \mid 1 \leq i < n\} \\ &\cong \mathbb{R}^{n-1}. \end{aligned}$$

Also ist $\text{rk}(\mathcal{B}(n)) = n - 1$, und somit ist $\mathcal{B}(n)$ nicht essentiell.

Insbesondere ist

$$N(\mathcal{B}(n))^{\perp} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \cdots + \vec{e}_n\} = \bigcap_{H \in \mathcal{B}(n)} H.$$

Abbildung 5 zeigt $\text{ess}(\mathcal{B}(3))$.

BEISPIEL 1.12

Sei \mathcal{A} das Hyperebenenarrangement aus Beispiel 1.7. Es gilt

$$\begin{aligned} X_1^{\perp} &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{(0, 0, 1)\}, \\ X_2^{\perp} &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{(0, -2, 1)\}, \\ X_3^{\perp} &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{(0, 2, 1)\}. \end{aligned}$$

Da $(0, 2, 1) + (0, -2, 1) = 2(0, 0, 1)$ folgt $N(\mathcal{A}) \cong \mathbb{R}^2$, und somit ist $\text{rk}(\mathcal{A}) = 2$. Also ist \mathcal{A} nicht essentiell. Insbesondere ist $N(\mathcal{A})^{\perp} = \text{span}_{\mathbb{R}}(\vec{e}_1)$. Abbildung 6 zeigt $\text{ess}(\mathcal{A})$.

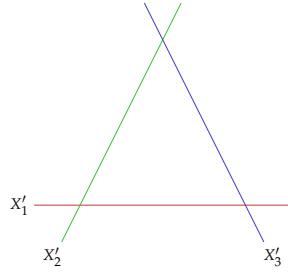


ABBILDUNG 6. Das essentielle Arrangement zum Hyperebenenarrangement aus Abbildung 4.

Wir beschreiben nun zwei Konstruktionen, wie man aus einem gegebenen Hyperebenenarrangement neue Arrangements gewinnen kann. Dazu benötigen wir eine alternative Repräsentation von Hyperebenenarrangements.

DEFINITION 1.13

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$\mathcal{A} = \{H_{a_1}(\vec{a}_1), H_{a_2}(\vec{a}_2), \dots, H_{a_m}(\vec{a}_m)\}.$$

Weiter sei $\dim(\mathcal{A}) = n$ und sei $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ein Vektor von Variablen. Das **DEFINIERENDE POLYNOM** von \mathcal{A} ist

$$Q_{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} (\langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle - a_1)(\langle \vec{a}_2, \vec{x} \rangle - a_2) \cdots (\langle \vec{a}_m, \vec{x} \rangle - a_m).$$

BEISPIEL 1.14

Das definierende Polynom des Koordinatenarrangements ist offenbar

$$Q_{\mathcal{C}(n)}(\vec{x}) = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

BEISPIEL 1.15

Das definierende Polynom des Zopf-Arrangements ist offenbar die Vandermonde-Determinante

$$Q_{\mathcal{B}(n)}(\vec{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

BEISPIEL 1.16

Das definierende Polynom des Arrangements aus Beispiel 1.7 ist

$$Q_{\mathcal{A}}(x, y, z) = z(z - 2y - 2)(z + 2y - 2).$$

Die erste Konstruktion assoziiert zu einem Hyperebenenarrangement in Dimension n ein zentrales Hyperebenenarrangement mit einer zusätzlichen Hyperebene in Dimension $n + 1$.

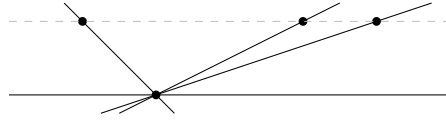


ABBILDUNG 7. Der Kegel über dem Arrangement aus Beispiel 1.18.

DEFINITION 1.17

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$Q_{\mathcal{A}}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}) - a_1)(f_2(\vec{x}) - a_2) \cdots (f_m(\vec{x}) - a_m),$$

gegeben; wobei f_1, f_2, \dots, f_m lineare Abbildungen in \mathbb{R}^n sind. Der **KEGEL ÜBER \mathcal{A}** ist das Hyperebenenarrangement $\text{cone}(\mathcal{A}) \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^{n+1})$ gegeben durch

$$Q_{\text{cone}(\mathcal{A})}(\vec{x}, y) \stackrel{\text{def}}{=} (f_1(\vec{x}) - a_1 y)(f_2(\vec{x}) - a_2 y) \cdots (f_m(\vec{x}) - a_m y)y,$$

wobei y eine geeignete neue Koordinate ist.

Offenbar ist $\dim(\text{cone}(\mathcal{A})) = \dim(\mathcal{A}) + 1$ und $\#\text{cone}(\mathcal{A}) = \#\mathcal{A} + 1$.

BEISPIEL 1.18

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^1)$ gegeben durch $Q_{\mathcal{A}}(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$. Abbildung 7 zeigt $\text{cone}(\mathcal{A})$, gegeben durch $Q_{\text{cone}(\mathcal{A})}(x, y) = (x - 2y)(x - 3y)(x + y)y$.

BEISPIEL 1.19

Abbildung 8 zeigt den Kegel über $\text{ess}(\mathcal{B}(3))$ aus Abbildung 5. Die Koordinatenebene zur neuen Koordinate ist in dunkelgrau dargestellt.

BEISPIEL 1.20

Abbildung 9 zeigt den Kegel über $\text{ess}(\mathcal{A})$ aus Abbildung 6. Die Koordinatenebene zur neuen Koordinate ist in dunkelgrau dargestellt.

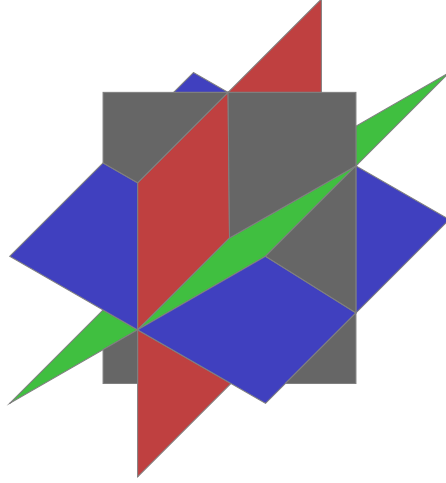
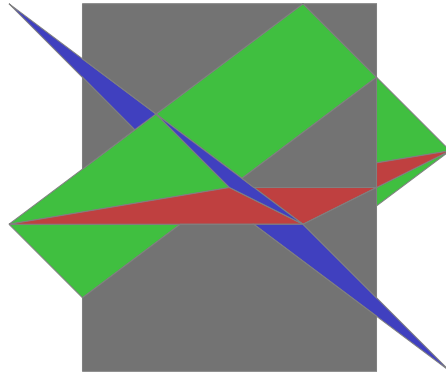
Die zweite Konstruktion ist gewissermaßen invers zur Kegelbildung. Wir betrachten dazu den $(n - 1)$ -dimensionalen **PROJEKTIVEN RAUM** über \mathbb{R} als Quotienten

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}) / \sim,$$

bzgl. der Äquivalenzrelation \sim , gegeben durch:

$$\vec{x} \sim \vec{y} \quad \text{genau dann, wenn es } a \in \mathbb{R} \text{ gibt, sodass } \vec{y} = a\vec{x}$$

für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

ABBILDUNG 8. Das Arrangement $\text{cone}(\text{ess}(\mathcal{B}(3)))$.ABBILDUNG 9. Das Arrangement $\text{cone}(\text{ess}(\mathcal{A}))$, wobei \mathcal{A} das Arrangement aus Beispiel 1.7 ist.**DEFINITION 1.21**

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ linear, und sei $H_0 \in \mathcal{A}$. Die **PROJEKTIVISIERUNG** von \mathcal{A} entsteht, indem man H_0 als Fernhyperebene von $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ auffasst. Alle übrigen Hyperebenen in $\mathcal{A} \setminus \{H_0\}$ werden als eigentliche Hyperebenen von $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ aufgefasst. Wir bezeichnen dieses Arrangement mit $\text{proj}(\mathcal{A})$.

Insbesondere ist die Projektivisierung hilfreich, um dreidimensionale Arrangements in der projektiven Ebene zu visualisieren. Insbesondere erscheint die projektive Ebene als Kreisscheibe, in der gegenüberliegende Randpunkte miteinander identifiziert werden.

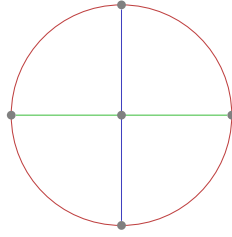
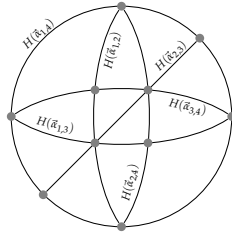
ABBILDUNG 10. Das Arrangement $\text{proj}(\mathcal{C}(3))$.ABBILDUNG 11. Das Arrangement $\text{proj}(\text{ess}(\mathcal{B}(4)))$.**BEISPIEL 1.22**

Abbildung 10 zeigt $\text{proj}(\mathcal{C}(3))$. Dabei ist die Hyperebene H_1 aus Abbildung 2 als Fernebene festgelegt.

BEISPIEL 1.23

Abbildung 11 zeigt $\text{proj}(\text{ess}(\mathcal{B}(4)))$. Dabei ist die Hyperebene $H(\vec{a}_{1,4})$ als Fernebene festgelegt.

1.3. Durchschnitte von Hyperebenen. Durchschnitte von Hyperebenen spielen eine wichtige Rolle bei der kombinatorischen Untersuchung von Hyperebenenarrangements. Wir beginnen mit einem einfachen Lemma.

LEMMA 1.24

Seien H_1, H_2, \dots, H_s linear unabhängige Hyperebenen. Dann gilt

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^s H_i \right) = n - s.$$

Beweis. Nach Definition kann für alle $i \in [s]$ die Hyperebene H_i durch die lineare Gleichung $\langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle = a_i$ beschrieben werden. Da die H_i linear unabhängig sind, ist das entsprechende Gleichungssystem, bestehend aus s Gleichungen in n Variablen, lösbar, und der Lösungsraum hat Dimension $n - s$. \square

DEFINITION 1.25

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R})$. Wir definieren die Menge aller nicht-leeren Durchschnitte der Hyperebenen in \mathcal{A} als

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigcap_{H \in X} H \mid X \subseteq \mathcal{A} \right\} \setminus \{\emptyset\}.$$

Die **DURCHSCHNITTSDRDNUNG** von \mathcal{A} ist $(\mathcal{L}(\mathcal{A}), \supseteq)$.

Die Durchschnittdrdnung ist eine wichtige Invariante eines Hyperebenenarrangements, und viele kombinatorische Eigenschaften lassen sich aus ihr ableiten. Im Allgemeinen werden wir $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{L}(\mathcal{A}), \supseteq)$ miteinander identifizieren.

BEMERKUNG 1.26

Es gilt $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{L}(\text{ess}(\mathcal{A}))$.

LEMMA 1.27

Für $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ gradiert, und es gilt $\text{rk}(S) = \text{codim}(S)$ für $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Alle maximalen Elemente in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ haben Rang $\text{rk}(\mathcal{A})$.

Beweis. Da $\mathbb{R}^n \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, besitzt die Durchschnittdrdnung ein eindeutiges kleinstes Element, und es gilt $\text{codim}(\mathbb{R}^n) = 0$. Es bleibt zu zeigen, dass $\text{codim}(S) = \text{codim}(S') + 1$ für $S' \lessdot S$, und dass alle maximalen Elemente die gleiche Dimension haben.

Sei also $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, und sei $H \in \mathcal{A}$ eine Hyperebene, sodass $S \supsetneq H \cap S \neq \emptyset$. Dann gilt $S \lessdot H \cap S$ in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Nach Satz 0.6 ist $\dim(H \cap S) = \dim(S) - 1$, und damit $\text{codim}(H \cap S) = \text{codim}(S) + 1$ wie gewünscht.

Sei nun $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ so gewählt, dass $\text{codim}(S) = s$ maximal ist. Nach Lemma 1.24 lässt sich S als Durchschnitt von s linear unabhängigen Hyperebenen H_1, H_2, \dots, H_s schreiben. Sei weiter $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ mit $\text{codim}(Z) = z < s$. Damit ist Z der Durchschnitt von z Hyperebenen H'_i , und wir können ein $j \in [s]$ finden, sodass H_j linear unabhängig von den H'_i ist. Lemma 1.24 impliziert $Z \cap H_j \neq \emptyset$. Also ist $Z \supsetneq Z \cap H_j$, und damit ist Z nicht maximal in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Also haben alle maximalen Elemente von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ maximale Kodimension $\text{rk}(\mathcal{A})$. \square

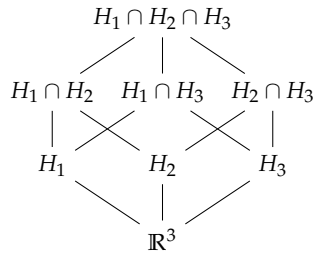
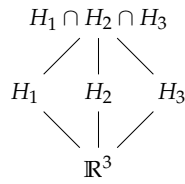
PROPOSITION 1.28

$\mathcal{L}(\mathcal{A})$ ist ein Infimum-Halbverband, und genau dann ein Verband, wenn \mathcal{A} zentral ist.

Beweis. Für $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ definieren wir $S_1 \vee S_2 = S_1 \cap S_2$.

Wenn \mathcal{A} zentral ist, ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ unter Supremumsbildung abgeschlossen, und besitzt ein kleinstes Element \mathbb{R}^n . Nach Übung Ü1 ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ also ein Verband.

Sei nun \mathcal{A} nicht zentral. Betrachte $\mathcal{L}'(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \{\emptyset\}$. Wir verwenden wieder Übung Ü1 um zu zeigen, dass $\mathcal{L}'(\mathcal{A})$ ein Verband ist. Es folgt, dass $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein Infimum-Halbverband ist. \square

ABBILDUNG 12. Die Durchschnitsordnung von $\mathcal{C}(3)$.ABBILDUNG 13. Die Durchschnitsordnung von $\mathcal{B}(3)$.**BEISPIEL 1.29**

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Es besteht aus genau n Hyperebenen, und $\mathcal{L}(\mathcal{C}(n))$ ist in Bijektion zu den Teilmengen von $\mathcal{C}(n)$. Dementsprechend ist die Durchschnitsordnung von $\mathcal{C}(n)$ isomorph zum Booleschen Verband mit 2^n Elementen. Abbildung 12 zeigt $\mathcal{L}(\mathcal{C}(3))$.

BEISPIEL 1.30

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. Es besteht aus genau $\binom{n}{2}$ Hyperebenen, und $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n))$ ist in Bijektion mit Mengenpartitionen von $[n]$. Dementsprechend ist die Durchschnitsordnung von $\mathcal{B}(n)$ isomorph zum Partitionenverband von $[n]$. Abbildung 13 zeigt $\mathcal{L}(\mathcal{B}(3))$.

BEISPIEL 1.31

Sei \mathcal{A} das Hyperebenenarrangement aus Beispiel 1.7. Es besteht aus drei Hyperebenen, und je zwei haben eine nicht-leere Schnittmenge. Die zugehörige Durchschnitsordnung ist in Abbildung 14 dargestellt.

1.4. Das charakteristische Polynom. Nun beschreiben wir eine fundamentale Invariante von Hyperebenenarrangements.

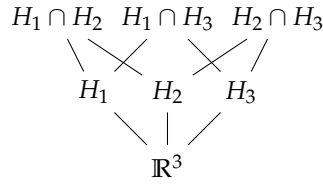


ABBILDUNG 14. Die Durchschnichtsordnung des Hyperebenenarrangements aus Abbildung 4.

DEFINITION 1.32

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ und bezeichne μ die Möbius-Funktion von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Das **CHARAKTERISTISCHE POLYNOM** von \mathcal{A} ist

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})} \mu(\mathbb{R}^n, S) t^{\dim(S)}.$$

BEISPIEL 1.33

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Wir haben in Beispiel 1.29 gesehen, dass $\mathcal{L}(\mathcal{C}(n))$ isomorph zum Booleschen Verband mit 2^n Elementen ist. Im Booleschen Verband gilt $\mu(\emptyset, X) = (-1)^{\#X}$, also folgt

$$\chi_{\mathcal{C}(n)}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i t^{n-i} = (t-1)^n.$$

BEISPIEL 1.34

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. Wir haben in Beispiel 1.30 gesehen, dass $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n))$ isomorph zum Verband aller Mengenpartitionen ist. Sei Π_n die Menge aller Mengenpartitionen von $[n]$, und für $\mathbf{x} \in \Pi_n$ bezeichne $\text{bl}(\mathbf{x})$ die Anzahl der Blöcke von \mathbf{x} . Sei $\mathbf{x} \in \Pi_n$ mit $\text{bl}(\mathbf{x}) = l$, wobei der i -te Block aus k_i Elementen besteht. Dann ist

$$\mu(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = (-1)^{n-l} \prod_{i=1}^l (k_i - 1)!.$$

Wir setzen nun etwas Kenntnis über die Stirling-Zahlen $s(n, l)$ der ersten Art voraus. Insbesondere zählt $(-1)^{n-l} s(n, l)$ gerade alle Permutationen von $[n]$ mit genau l Zyklen. Wenn wir jeden Zyklus einer solchen Permutation in einen Block überführen, erhalten wir eine Mengenpartition. Allerdings erhalten wir auf diese Weise im allgemeinen dieselben Partitionen mehrfach. Sei $p(n; k_1, k_2, \dots, k_l)$ die Anzahl aller Mengenpartitionen mit l Blöcken, wobei der i -te Block aus k_i Elementen besteht. Dann gilt offenbar

$$(-1)^{n-l} s(n, l) = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_l = n} \left(p(n; k_1, k_2, \dots, k_l) \prod_{i=1}^l (k_i - 1)! \right).$$

Für das charakteristische Polynom von $\mathcal{B}(n)$ folgt dann

$$\begin{aligned}
 \chi_{\mathcal{B}(n)}(t) &= \sum_{\mathbf{x} \in \Pi_n} \mu(\mathbf{0}, \mathbf{x}) t^{\text{bl}(\mathbf{x})} \\
 &= \sum_{l=1}^n \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \Pi_n \\ \text{bl}(\mathbf{x})=l}} \mu(\mathbf{0}, \mathbf{x}) t^l \\
 &= \sum_{l=1}^n t^l \sum_{k_1+k_2+\dots+k_l=n} \left(p(n; k_1, k_2, \dots, k_l) (-1)^{n-l} \prod_{i=1}^l (k_i - 1)! \right) \\
 &= \sum_{l=1}^n s(n, l) t^l \\
 &= t(t-1)(t-2) \cdots (t-n+1).
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ist eine bekannte Eigenschaft der Stirling-Zahlen der ersten Art.

BEISPIEL 1.35

Sei \mathcal{A} das Hyperebenenarrangement aus Beispiel 1.7. Wir sehen direkt, dass

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^3 - 3t^2 + 3t.$$

Der folgende Satz beschreibt eine Methode um das charakteristische Polynom zu berechnen, welche auf Hassler Whitney zurückgeht.

SATZ 1.36

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ zentral}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})}.$$

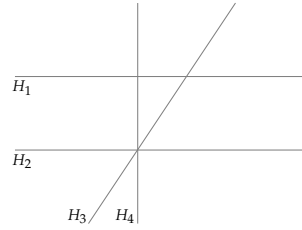
Beweis. Wähle $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, und betrachte das Unterarrangement $\mathcal{A}_S = \{H \in \mathcal{A} \mid S \subseteq H\}$, und definiere $N_k(S)$ als die Anzahl aller k -elementigen Teilmengen von \mathcal{A}_S deren Durchschnitt gerade S ist. Aus Satz 0.17 folgt

$$\mu(\mathbb{R}^n, S) = \sum_{k \geq 1} (-1)^k N_k(S).$$

Das ist aber äquivalent zu

$$\mu(\mathbb{R}^n, S) = \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_S, \\ S = \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H}} (-1)^{\#\mathcal{B}}.$$

Aus $S = \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H$ folgt $\text{rk}(\mathcal{B}) = \text{codim}(S)$. Wenn wir nun beide Seiten mit $t^{\dim(S)}$ multiplizieren und über $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ summieren, erhalten wir die gewünschte Formel. \square

ABBILDUNG 15. Ein Hyper ebenenarrangement in \mathbb{R}^2 .**BEISPIEL 1.37**

Betrachte das Hyper ebenenarrangement $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^2)$ aus Abbildung 15. Die folgende Tabelle listet die zentralen Unterarrangements von \mathcal{A} zusammen mit Rang und Kardinalität auf.

\mathcal{B}	$\text{rk}(\mathcal{B})$	$\#\mathcal{B}$
\emptyset	0	0
$\{H_1\}$	1	1
$\{H_2\}$	1	1
$\{H_3\}$	1	1
$\{H_4\}$	1	1
$\{H_1, H_3\}$	2	2
$\{H_1, H_4\}$	2	2
$\{H_2, H_3\}$	2	2
$\{H_2, H_4\}$	2	2
$\{H_3, H_4\}$	2	2
$\{H_2, H_3, H_4\}$	2	3

Das charakteristische Polynom von \mathcal{A} ist damit nach Satz 1.36:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - 4t + 4.$$

BEMERKUNG 1.38

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\chi_{\text{cone}(\mathcal{A})}(t) = (t-1)\chi_{\mathcal{A}}(t)$. Siehe auch Übung Ü12.

1.5. Löschung und Einschränkung. In diesem Abschnitt beweisen wir eine rekursive Formel zur Berechnung des charakteristischen Polynoms.

Sei dazu $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ und sei $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Wir definieren zwei Arrangements wie folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_S &\stackrel{\text{def}}{=} \{H \in \mathcal{A} \mid S \subseteq H\}, \\ \mathcal{A}^S &\stackrel{\text{def}}{=} \{S \cap H \mid S \not\subseteq H\} \setminus \{\emptyset\}.\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\mathcal{A}_S \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ ist und $\mathcal{A}^S \in \text{Hyp}(S)$.

LEMMA 1.39

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Für $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ gilt

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}_S) = \{Z \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \mid Z \supseteq S\}, \quad \text{und} \\ \mathcal{L}(\mathcal{A}^S) = \{Z \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \mid Z \subseteq S\}.$$

Beweis. Wenn $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_S)$, dann ist Z ein Durchschnitt von Hyperebenen in \mathcal{A}_S , und nach Definition ist S in all diesen Hyperebenen enthalten. Also gilt auch $Z \supseteq S$.

Sei nun $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{A}^S)$. Dann ist Z ein Durchschnitt von Hyperebenen in \mathcal{A}^S und jede solche Hyperebene lebt in S . Damit folgt $Z \subseteq S$. \square

DEFINITION 1.40

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ und sei $H_0 \in \mathcal{A}$. Definiere $\mathcal{A}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \setminus \{H_0\}$ und $\mathcal{A}'' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^{H_0}$. Dann heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ ein **TRIPEL** von Arrangements mit **AUSGEZEICHNETER HYPEREBENE** H_0 .

Wir nennen \mathcal{A}' auch die **LÖSCHUNG** und \mathcal{A}'' die **EINSCHRÄNKUNG** von \mathcal{A} .

LEMMA 1.41

Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ ein Tripel von Arrangements in \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t).$$

Beweis. Sei $H_0 \in \mathcal{A}$ die ausgezeichnete Hyperebene.

Nach Satz 1.36 gilt

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(t) &= \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ zentral}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})} \\ &= \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ zentral,} \\ H_0 \notin \mathcal{B}}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})} + \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ zentral,} \\ H_0 \in \mathcal{B}}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})} \\ &= \chi_{\mathcal{A}'}(t) + \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ zentral,} \\ H_0 \in \mathcal{B}}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})}. \end{aligned}$$

Sei \mathcal{B} ein zentrales Unterarrangement von \mathcal{A} mit $H_0 \in \mathcal{B}$. Setze $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{B} \setminus H_0)^{H_0}$. Dann ist $\mathcal{B}_1 \in \text{Hyp}(H_0)$, und $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{A}^{H_0} = \mathcal{A}''$. Außerdem ist \mathcal{B}_1 zentral, und jedes zentrale Unterarrangement von \mathcal{A}'' entsteht auf diese Weise.

Es gilt weiter $\#\mathcal{B}_1 = \#\mathcal{B} - 1$ und $\text{rk}(\mathcal{B}_1) = \text{rk}(\mathcal{B}) - 1$, und damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ zentral,} \\ H_0 \in \mathcal{B}}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})} &= \sum_{\mathcal{B}_1 \in \mathcal{A}'' \text{ zentral}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-\text{rk}(\mathcal{B})} \\ &= \sum_{\mathcal{B}_1 \in \mathcal{A}'' \text{ zentral}} (-1)^{\#\mathcal{B}_1 + 1} t^{(n-1)-\text{rk}(\mathcal{B}_1)} \\ &= -\chi_{\mathcal{A}''}(t). \end{aligned}$$

\square

1.6. Kammern und Halbräume. Wir verwenden nun das charakteristische Polynom von \mathcal{A} um Kammern in \mathcal{A} zu zählen. Dazu halten wir zunächst fest, dass die Hyperebene $H_a(\vec{a})$ den Vektorraum \mathbb{R}^n in zwei (**OFFENE**) **HALBRÄUME** teilt, nämlich

$$H_a^+(\vec{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle > a\} \quad \text{und} \quad H_a^-(\vec{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle < a\}.$$

DEFINITION 1.42

Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ werden von einer Hyperebene H **GETRENNT**, wenn $\vec{x}, \vec{y} \notin H$ und $\vec{x} \in H^\pm, \vec{y} \in H^\mp$ gilt.

DEFINITION 1.43

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Eine **KAMMER** von \mathcal{A} ist der topologische Abschluss einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$.

Wir bezeichnen die Menge aller Kammern von \mathcal{A} mit $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, und wir bemerken dass $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ als Durchschnitt endlich vieler Halbräume entsteht, also ein Polyeder ist. Weiter bezeichne

$$r(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \#\mathcal{R}(\mathcal{A})$$

die Anzahl der Kammern von \mathcal{A} .

BEMERKUNG 1.44

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ genau dann, wenn $R \cap N(\mathcal{A}) \in \mathcal{R}(\text{ess}(\mathcal{A}))$.

DEFINITION 1.45

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Eine Kammer $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ heißt **BESCHRÄNKT**, wenn $R \cap N(\mathcal{A})$ (als topologische Menge) beschränkt ist. (D. h. zu jeder Umgebung U von $\vec{0}$ existiert ein $k \in \mathbb{R}$ sodass $R \cap N(\mathcal{A}) \subseteq kU$ gilt.)

Wir bezeichnen mit $b(\mathcal{A})$ die Anzahl aller beschränkten Kammern von \mathcal{A} .

BEISPIEL 1.46

Sei R die Kammer "innerhalb" der drei Hyperebenen in des Arrangements \mathcal{A} aus Abbildung 4. Als topologische Menge ist R unbeschränkt in \mathbb{R}^3 , aber $R \cap N(\mathcal{A})$ ist topologisch beschränkt in \mathbb{R}^2 ; siehe Abbildung 6. Also ist R eine beschränkte Kammer von \mathcal{A} .

BEISPIEL 1.47

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Da $\mathcal{C}(n)$ zentral ist, besitzt es nach Übung Ü13 keine beschränkten Kammern.

Sei nun $R \in \mathcal{R}(\mathcal{C}(n))$, und sei $\vec{x} \in R$. Wir erzeugen einen $\{+, -\}$ -Vektor \mathbf{v}_R der Länge n aus R wie folgt: wenn $\langle \vec{e}_i, \vec{x} \rangle > 0$, dann ist die i -te Komponente von \mathbf{v}_R ein "+", andernfalls ein "-". Das ist offenbar eine Bijektion, und es folgt $r(\mathcal{C}(n)) = 2^n$.

BEISPIEL 1.48

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. Da $\mathcal{B}(n)$ zentral ist, besitzt es ebenfalls nach Übung Ü13 keine beschränkten Kammern. Um zu bestimmen, auf welcher Seite von $H_0(\vec{a}_{i,j})$ ein Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ liegt, genügt es das Vorzeichen von $x_i - x_j$ zu betrachten. (Zur Erinnerung, $\vec{a}_{i,j} = \vec{e}_i - \vec{e}_j$.) Es gilt somit entweder $x_i < x_j$ oder $x_j < x_i$. Jede Kammer $R \in \mathcal{R}(\mathcal{B}(n))$ ordnet also die Koordinaten von $\vec{x} \in R$ in einer bestimmten Reihenfolge an, bzw. permutiert sie. Also folgt $r(\mathcal{B}(n)) = n!$.

BEISPIEL 1.49

Ein Hyperebenenarrangement \mathcal{A}_m in \mathbb{R}^2 (mit $\#\mathcal{A}_m = m$) ist in **ALLGEMEINER LAGE**, wenn keine zwei Geraden parallel sind, und keine drei Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Wir werden nun $r(\mathcal{A}_m)$ rekursiv bestimmen. Wenn $m = 0$, dann gibt es genau eine Kammer, nämlich \mathbb{R}^2 . Wenn \mathcal{A}_k (mit $k < m$) in allgemeiner Lage ist, fügen wir eine Gerade H hinzu, sodass $\mathcal{A}_k \cup \{H\}$ in allgemeiner Lage ist. Nun laufen wir auf H entlang, beginnend an einem "Ende". Jedes Mal, wenn wir eine Gerade aus \mathcal{A}_k schneiden, erzeugen wir eine neue Kammer. Schließlich, nachdem wir die letzte Gerade überschritten haben, erzeugen wir eine letzte neue Kammer. Also gilt

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A}_m) &= \#\text{Schnittpunkte} + \#\text{Geraden} + 1 \\ &= \binom{m}{2} + m + 1. \end{aligned}$$

Die Anzahl der (beschränkten) Kammern von \mathcal{A} kann auch mithilfe von Löschung und Restriktion rekursiv berechnet werden.

LEMMA 1.50

Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ ein Tripel von Arrangements in \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A}) &= r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}''); \\ b(\mathcal{A}) &= \begin{cases} b(\mathcal{A}') + b(\mathcal{A}''), & \text{wenn } \text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}'), \\ 0, & \text{wenn } \text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}') + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass \mathcal{A} essentiell ist. Sei H_0 die ausgezeichnete Hyperebene.

Für die Kammern von \mathcal{A}' gibt es genau zwei Möglichkeiten, wenn wir $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \{H_0\}$ betrachten: (i) entweder sie bleiben intakt, oder (ii) sie werden in zwei Teile getrennt. Sei S die Menge der Kammern von \mathcal{A}' , die von H_0 zerteilt werden, und sei U die Menge der Kammern von \mathcal{A}' , die intakt bleiben. Dann gilt $r(\mathcal{A}') = \#S + \#U$ und $r(\mathcal{A}) = 2\#S + \#U$.

Sei nun $R \in S$. Offenbar ist dann $R \cap H_0 \in \mathcal{R}(\mathcal{A}'')$. Sei umgekehrt $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}'')$. Offenbar gehören zwei Punkte $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, die nahe bei H_0 im gleichen Halbraum von H_0 liegen, zu einer Kammer $R' \in \mathcal{A}'$. Damit zerteilt H_0 diese Kammer, und wir haben eine Bijektion zwischen S und $\mathcal{R}(\mathcal{A}'')$ gefunden. Es folgt $r(\mathcal{A}'') = \#S$. Abbildung 16a illustriert diesen Fall. Wir erhalten

$$r(\mathcal{A}) = 2\#S + \#U = (\#S + \#U) + \#S = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}'')$$



(A) Illustration der Bijektion zwischen Kammern von \mathcal{A}'' und solchen Kammern von \mathcal{A}' , die von H_0 getrennt werden.

(B) Illustration der Situation $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}') + 1$.

ABBILDUNG 16. Illustrationen zum Beweis von Lemma 1.50.

wie gewünscht.

Sei zunächst $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}') + 1$. Insbesondere ist $N(\mathcal{A}') \subsetneq \mathbb{R}^n$, was bedeutet, dass jede Kammer von \mathcal{A}' eine Gerade enthält, die orthogonal zu $N(\mathcal{A}')$ ist. Also enthält jede Kammer von \mathcal{A} eine Halbgerade, woraus direkt folgt, dass $b(\mathcal{A}) = 0$. Abbildung 16b illustriert diesen Fall.

Es bleibt der Fall $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}')$. Sei nun $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}')$. Dann gibt es mehrere Möglichkeiten.

(i) R ist beschränkt, grenzt aber nicht an H_0 . Dann ist R eine beschränkte Kammer von \mathcal{A} , aber keine Kammer von \mathcal{A}'' . (Siehe die mit X bezeichnete Kammer in Abbildung 16a.)

(ii) R ist beschränkt, und wird von H_0 in zwei beschränkte Kammern $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ zerteilt. Dann ist $R = R_1 \uplus T \uplus R_2$, wobei $T \subseteq H_0$ eine beschränkte Kammer von \mathcal{A}'' ist. (Siehe die mit Y_1 und Y_2 bezeichneten Kammern in Abbildung 16a.)

(iii) R ist unbeschränkt, und wird von H_0 in zwei Kammern $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ zerteilt, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit R_1 beschränkt in \mathcal{A} ist, und R_2 nicht. Es gilt wiederum $R = R_1 \uplus T \uplus R_2$, wobei $T \subseteq H_0$ eine beschränkte Kammer von \mathcal{A}'' ist. (Siehe die mit Z_1 und Z_2 bezeichneten Kammern in Abbildung 16a.)

Wir sehen, dass in allen Fällen die gewünschte Rekursion gilt. \square

1.7. Der Satz von Zaslavsky. Zum Abschluss dieses Abschnitts präsentieren wir den folgenden Satz von Thomas Zaslavsky, mit dem man die Anzahl der (beschränkten) Kammern von $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ mithilfe des charakteristischen Polynoms bestimmen kann [14].

SATZ 1.51

Sei $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^{\dim(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(-1),$$

$$b(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rk}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1).$$

Beweis. Sei zunächst $\mathcal{A} = \emptyset$. Dann ist $\chi_{\emptyset}(t) = t^n$. Weiter ist $r(\emptyset) = 1 = b(\emptyset)$ und $\text{rk}(\emptyset) = 0$. Es folgt $(-1)^n \chi_{\emptyset}(-1) = (-1)^n (-1)^n = 1 = r(\emptyset)$ und $(-1)^0 \chi_{\emptyset}(1) = 1 = b(\emptyset)$.

Die Funktionen $r(\mathcal{A})$ und $(-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(1)$, sowie $b(\mathcal{A})$ und $(-1)^{\text{rk}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1)$ erfüllen also dieselben Anfangsbedingungen. Wir zeigen, dass sie auch dieselben Rekursionen erfüllen.

Mit Lemma 1.41 erhalten wir

$$(-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}'}(-1) - (-1)^n \chi_{\mathcal{A}''}(-1) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}'}(-1) + (-1)^{n-1} \chi_{\mathcal{A}''}(-1),$$

und mit Lemma 1.50 erhalten wir dieselbe Rekursion für $r(\mathcal{A})$. (Es gilt nämlich $\dim(\mathcal{A}'') = n - 1$.) Also folgt $r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1)$.

Sei nun $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}')$. Wie im Beweis von Lemma 1.50 erhalten wir $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}'') + 1$, und damit folgt aus Lemma 1.41, dass

$$(-1)^{\text{rk}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1) = (-1)^{\text{rk}(\mathcal{A}')} \chi_{\mathcal{A}'}(1) + (-1)^{\text{rk}(\mathcal{A}'')} \chi_{\mathcal{A}''}(1).$$

Nach Lemma 1.50 ist das dieselbe Rekursion wie für $b(\mathcal{A})$.

Es bleibt der Fall $\text{rk}(\mathcal{A}) = \text{rk}(\mathcal{A}') + 1$. Nach Lemma 1.50 ist dann $b(\mathcal{A}) = 0$. Zudem ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}') \cong \mathcal{L}(\mathcal{A}'')$, sodass nach Definition $\chi_{\mathcal{A}'}(1) = \chi_{\mathcal{A}''}(1)$ gilt. Mit Lemma 1.41 folgt $\chi_{\mathcal{A}}(1) = 0$; also ist $b(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rk}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1)$. \square

BEISPIEL 1.52

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatensystem aus Beispiel 1.5. In Beispiel 1.47 haben wir gesehen, dass $r(\mathcal{C}(n)) = 2^n$. Mit Satz 1.51 folgt das Ergebnis ebenfalls direkt. Aus Beispiel 1.33 wissen wir, dass $\chi_{\mathcal{C}(n)}(t) = (t-1)^n$ ist. Also gilt

$$\begin{aligned} r(\mathcal{C}(n)) &= (-1)^{\dim(\mathcal{C}(n))} \chi_{\mathcal{C}(n)}(-1) \\ &= (-1)^n (-2)^n \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

BEISPIEL 1.53

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. In Beispiel 1.48 haben wir gesehen, dass $r(\mathcal{B}(n)) = n!$. Mit Satz 1.51 folgt das Ergebnis ebenfalls direkt. Aus Beispiel 1.34 wissen wir, dass $\chi_{\mathcal{B}(n)}(t) = \prod_{i=0}^{n-1} (t-i)$ ist. Also gilt

$$\begin{aligned} r(\mathcal{B}(n)) &= (-1)^{\dim(\mathcal{B}(n))} \chi_{\mathcal{B}(n)}(-1) \\ &= (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} -(i+1) \\ &= \prod_{i=1}^n i \\ &= n!. \end{aligned}$$

BEISPIEL 1.54

Sei \mathcal{A} das Hyperebenenarrangement aus Beispiel 1.7. In Abbildung 6 sehen wir, dass $r(\mathcal{A}) = 7$ und $b(\mathcal{A}) = 1$. Das charakteristische Polynom von \mathcal{A} ist nach Beispiel 1.35 gerade $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^3 - 3t^2 + 3t$. Es gilt $\dim(\mathcal{A}) = 3$ und $\text{rk}(\mathcal{A}) = 2$. Also folgt $\chi_{\mathcal{A}}(1) = 1 = (-1)^2 b(\mathcal{A})$ und $\chi_{\mathcal{A}}(-1) = -7 = (-1)^3 r(\mathcal{A})$ wie gewünscht.