2. Eigenschaften der Durchschnittsordnung

In diesem Abschnitt heben wir noch ein paar spezielle, verbandstheoretische Eigenschaften der Durchschnittsordnung hervor.

2.1. **Geometrische Verbände.** Zunächst wiederholen wir ein paar grundlegende Begriffe. Sei dazu $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein endlicher Verband. Ein ATOM von $\mathcal{L}$ ist ein Element $a \in L$ für das $\hat{0} \lessdot a$ gilt, ein KOATOM von $\mathcal{L}$ ist ein Element $c \in L$ für das $c \lessdot \hat{1}$ gilt.

Definition 2.1

Ein endlicher, gradierter Verband $(L, \leq)$ heißt
- ATOMAR, wenn sich jedes Element $x \in L$ als Supremum von Atomen darstellen lässt;
- SUBMODULAR, wenn für alle $x, y \in L$ gilt, dass
$$\operatorname{rk}(x) + \operatorname{rk}(y) \geq \operatorname{rk}(x \wedge y) + \operatorname{rk}(x \vee y);$$
- GEOMETRISCH, wenn er atomar und submodular ist.

Dabei ist in der Definition eines atomaren Verbandes das kleinste Element als Supremum über die leere Menge zu verstehen.

Proposition 2.2

Sei $\mathcal{A} \in \operatorname{Hyp}(\mathbb{R}^n)$. Jedes Intervall von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ ist ein geometrischer Verband.

Beweis. Sei $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Nach Lemma 1.39 ist das Intervall $[\mathbb{R}^n, S]$ in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ isomorph zu $\mathcal{L}(\mathcal{A}_S)$. Da $\mathcal{A}_S$ ein zentrales Hyperebenenarrangement ist, genügt es also, die Behauptung für zentrale Arrangements zu zeigen.

Sei also $\mathcal{A}$ zentral. Nach Lemma 1.27 und Proposition 1.28 ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein gradierter Verband. Weiterhin gilt für $S \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, dass
$$S = \bigcap_{H \in \mathcal{A}, S \subseteq H} H,$$
also ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ atomar. Seien nun $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Da $\mathcal{A}$ zentral ist, gilt $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, und nach Satz 0.6 gilt
$$\dim(S_1) + \dim(S_2) = \dim(S_1 \cap S_2) + \dim(S_1 \sqcup S_2).$$
Nach Lemma 1.27 ist $\operatorname{rk}(S_i) = \operatorname{codim}(S_i)$ für $i \in [2]$. In $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ gilt $S_1 \vee S_2 = S_1 \cap S_2$ und $S_1 \wedge S_2 \supseteq S_1 \sqcup S_2$. Also folgt
$$\operatorname{rk}(S_1) + \operatorname{rk}(S_2) \geq \operatorname{rk}(S_1 \vee S_2) + \operatorname{rk}(S_1 \wedge S_2).$$
Damit ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ submodular, und die Behauptung folgt. □

Wir haben bereits in vorhergehenden Beispielen gesehen, dass die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms eines Hyperebenenarrangements stets alternierende Vorzeichen haben. Das ist kein Zufall, und folgt aus der folgenden Eigenschaft geometrischer Verbände.

Satz 2.3

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein geometrischer Verband und seien $x, y \in L$ mit $x \leq y$. Dann ist $(-1)^{\operatorname{rk}(y) - \operatorname{rk}(x)} \mu(x, y) > 0$.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass jedes Intervall eines geometrischen Verbandes selbst wieder ein geometrischer Verband ist, siehe Übung Ü8. Es genügt also den Fall $x = \hat{0}$ und $y = \hat{1}$ zu betrachten, und wir verwenden Induktion über $\mathrm{rk}(\hat{1})$, den RANG von $\mathcal{L}$.

Wenn $\mathrm{rk}(\hat{1}) = 1$, dann ist $L = \{\hat{0}, \hat{1}\}$ und es folgt $\mu(\hat{0}, \hat{1}) = -1$.

Sei also $\mathrm{rk}(\hat{1}) = n > 2$, und nehmen wir an, dass die Behauptung für alle geometrischen Verbände vom Rang $< n$ gilt. Wähle ein Atom $a \in L$ und sei $x \in L$ so, dass $a \vee x = \hat{1}$. Wenn $a \leq x$, dann ist notwendigerweise $x = \hat{1}$. Wenn $a \not\leq x$ ist, dann ist $x < \hat{1}$, und es folgt aus der Submodularität von $\mathcal{L}$, dass

$$n > \mathrm{rk}(x) \geq \mathrm{rk}(a \vee x) + \mathrm{rk}(a \wedge x) - \mathrm{rk}(a) = n + 0 - 1$$

Also ist $\mathrm{rk}(x) = n - 1$, und damit gilt $x \lessdot \hat{1}$. Mit Satz 0.15 folgt

$$0 = \sum_{x \vee a = \hat{1}} \mu(\hat{0}, x) = \mu(\hat{0}, \hat{1}) + \sum_{a \not\leq x \lessdot \hat{1}} \mu(\hat{0}, x).$$

Da $\#L \geq 2$ ist insbesondere $a \neq \hat{1}$. Da $\mathcal{L}$ atomar ist, gibt es mindestens ein von a verschiedenes Atom, woraus folgt, dass die Menge $\{x \in L \mid a \not\leq x \lessdot \hat{1}\}$ nicht-leer ist.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $(-1)^{n-1}\mu(\hat{0}, x) > 0$ für alle $x \in L$ mit $x \lessdot \hat{1}$. Insbesondere gilt also für $r = \sum_{a \not\leq x \lessdot \hat{1}} \mu(\hat{0}, x)$, dass $(-1)^{n-1} r > 0$. Es folgt $\mu(\hat{0}, \hat{1}) = -r$, und damit auch die Behauptung. □

KOROLLAR 2.4

Sei $\mathcal{A} \in \mathrm{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = n$. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von $\mathcal{A}$ haben strikt alternierende Vorzeichen. In anderen Worten, wenn

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0$$

ist, dann gilt $(-1)^{n-i} a_i > 0$ für $0 \leq i \leq n$.

Beweis. Die Behauptung folgt mit Proposition 2.2 und Satz 2.3. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei angemerkt, dass geometrische Verbände in einem wesentlich allgemeineren Rahmen vorkommen, den wir hier aber nicht näher betrachten wollen.

Sei S eine endliche Menge, und sei $\mathcal{I} \subseteq \wp(S)$ eine Familie von Teilmengen von S. Dann ist das Paar $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ ein MATROID, wenn gilt

- $\mathcal{I} \neq \emptyset$.
- Wenn $J \in \mathcal{I}$ und $I \subseteq J$, dann ist auch $I \in \mathcal{I}$.
- Wenn $I, J \in \mathcal{I}$ mit $\#I < \#J$ sind, dann gibt es $x \in J \setminus I$, sodass $I \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Dann heißen die Elemente von $\mathcal{I}$ die UNABHÄNGIGEN MENGEN von $\mathcal{M}$. Die genannten Axiome verallgemeinern lineare Unabhängigkeit in Vektorräumen. Tatsächlich bildet jeder Vektorraum, zusammen mit der Menge aller linear unabhängigen Teilmengen ein (möglicherweise unendliches) Matroid.

Matroide lassen sich äquivalent mit Hilfe eines Hüllenoperators auf S und einer Rangfunktion definieren. Die Menge aller abgeschlossenen Mengen dieses Hüllenoperators unter Inklusion bildet einen Verband, den HÜLLENVERBAND von $\mathcal{M}$, den wir mit $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ bezeichnen. Insbesondere ist $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ geometrisch, und jeder geometrische Verband entsteht auf diese Weise, siehe Übung Ü18.

Aus einem zentralen Hyperebenenarrangement $\mathcal{A} \in \mathrm{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ lässt sich ein Matroid $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ definieren, dessen unabhängige Mengen gerade die Teilmengen linear unabhängiger Hyperbenen von $\mathcal{A}$ sind. Insbesondere ist $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$. Siehe Übung Ü19.

2.2. **Modulare Elemente.** In einigen Fällen erlaubt das charakteristische Polynom von $\mathcal{A} \in \mathrm{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ eine schöne Faktorisierung.

LEMMA 2.5

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein Verband. Für $x, y, z \in L$ mit $x \leq y$ gilt

$$x \vee (z \wedge y) \leq (x \vee z) \wedge y.$$

Beweis. Offenbar ist $x \leq x \vee z$, und da $x \leq y$ angenommen wurde, folgt $x \leq (x \vee z) \wedge y$.
Weiter ist $z \wedge y \leq z \leq x \vee z$ und $z \wedge y \leq y$, sodass $z \wedge y \leq (x \vee z) \wedge y$ folgt.
Wir schlussfolgern $x \vee (z \wedge y) \leq (x \vee z) \wedge y$. □

DEFINITION 2.6

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein geometrischer Verband mit Rangfunktion rk. Ein Element $x \in L$ heißt MODULAR, wenn für alle $y \in L$ gilt, dass

$$\mathrm{rk}(x) + \mathrm{rk}(y) = \mathrm{rk}(x \wedge y) + \mathrm{rk}(x \vee y).$$

Wenn alle $x \in L$ modular sind, dann heißt $\mathcal{L}$ MODULAR.

LEMMA 2.7

Sei $\mathcal{L}$ ein geometrischer Verband. Alle Atome von $\mathcal{L}$ sind modular, und das gleiche gilt für $\hat{0}$ und $\hat{1}$.

Beweis. Die Behauptung für $\hat{0}$ und $\hat{1}$ folgt unmittelbar. Sei also $a \in L$ ein Atom von $\mathcal{L}$, und sei $y \in L$. Wenn $a \leq y$, dann folgt die Behauptung wieder unmittelbar. Wenn $a \not\leq y$, dann ist $a \wedge y = \hat{0}$ und $y < a \vee y$. Es folgt die gewünschte Beziehung aus der Submodularität von $\mathcal{L}$:

$$\mathrm{rk}(y) < \mathrm{rk}(a \vee y) \leq \mathrm{rk}(a) + \mathrm{rk}(y) - \mathrm{rk}(a \wedge y) = \mathrm{rk}(y) + 1.$$

□

LEMMA 2.8

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein geometrischer Verband, und sei $x \in L$ modular. Wenn $y \in L$ mit $y \leq x$ modular in $[\hat{0}, x]$ ist, dann ist es auch modular in $\mathcal{L}$.

Beweis. Wir wählen $z \in L$ beliebig. Aus der Modularität von x folgt zunächst

$$\mathrm{rk}(x) + \mathrm{rk}(z) = \mathrm{rk}(x \wedge z) + \mathrm{rk}(x \vee z),$$
$$\mathrm{rk}(y \vee z) + \mathrm{rk}(x) = \mathrm{rk}\big((y \vee z) \wedge x\big) + \mathrm{rk}(x \vee z).$$

Weiter ist $x \wedge z \leq x$, sodass die Modularität von y in $[\hat{0}, x]$

$$\mathrm{rk}(y) + \mathrm{rk}(z \wedge x) = \mathrm{rk}(y \wedge z) + \mathrm{rk}\big(y \vee (z \wedge x)\big)$$

impliziert. Aus diesen Beziehungen folgt:

(1) $$\mathrm{rk}(y)+\mathrm{rk}(z)=\mathrm{rk}(y\wedge z)+\mathrm{rk}(y\vee z)+\mathrm{rk}\big(y\vee(z\wedge x)\big)-\mathrm{rk}\big((y\vee z)\wedge x\big).$$

Da $\mathcal{L}$ submodular ist, gilt dann

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(y\wedge z)+\mathrm{rk}(y\vee z)&\leq \mathrm{rk}(y)+\mathrm{rk}(z)\\&=\mathrm{rk}(y\wedge z)+\mathrm{rk}(y\vee z)+\mathrm{rk}\big(y\vee(z\wedge x)\big)-\mathrm{rk}\big((y\vee z)\wedge x\big),\end{aligned}$$

woraus

$$\mathrm{rk}\big((y\vee z)\wedge x\big)\leq \mathrm{rk}\big(y\vee(z\wedge x)\big),$$

folgt. Mit Lemma 2.5 folgt Gleichheit, sodass (1) die Modularität von y in $\mathcal{L}$ zeigt. □

Für den nächsten Satz benötigen wir das charakteristische Polynom eines geometrischen Verbandes $\mathcal{L}=(L,\leq)$, das wie folgt definiert ist:

$$\chi_{\mathcal{L}}(t)=\sum_{x\in L}\mu(\hat{0},x)t^{\mathrm{rk}(\hat{1})-\mathrm{rk}(x)}.$$

Sei $\mathcal{A}\in\mathrm{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ zentral und essentiell. Nach Proposition 2.2 ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ ein geometrischer Verband, und es gilt $\chi_{\mathcal{A}}(t)=\chi_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(t)$. Modulare Elemente ermöglichen eine Faktorisierung des charakteristischen Polynoms.

SATZ 2.9

Sei $\mathcal{L}=(L,\leq)$ ein geometrischer Verband mit $\mathrm{rk}(\mathcal{L})=n$, und sei $z\in L$ modular. Dann gilt

$$\chi_{\mathcal{L}}(t)=\chi_{[\hat{0},z]}(t)\left(\sum_{y\in L:y\wedge z=\hat{0}}\mu(\hat{0},y)t^{n-\mathrm{rk}(y)-\mathrm{rk}(z)}\right).$$

Beweis. Seien $v,y\in L$ mit $v\leq z$ und $y\wedge z=\hat{0}$.

Offenbar ist $z\wedge(v\vee y)\geq v$. Da z modular ist, folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}\big(z\wedge(v\vee y)\big)&=\mathrm{rk}(z)+\mathrm{rk}(v\vee y)-\mathrm{rk}(z\vee y)\\&=\mathrm{rk}(z)+\mathrm{rk}(v\vee y)-\big(\mathrm{rk}(z)+\mathrm{rk}(y)-\underbrace{\mathrm{rk}(z\wedge y)}_{=0}\big)\\&=\mathrm{rk}(v\vee y)-\mathrm{rk}(y)\\&\overset{*}{\leq}\mathrm{rk}(v)-\underbrace{\mathrm{rk}(v\wedge y)}_{=0}\\&=\mathrm{rk}(v).\end{aligned}$$

Also folgt $z\wedge(v\vee y)=v$. Insbesondere ist die markierte Ungleichung (die aus der Submodularität folgt) eine Gleichung. Es folgt $\mathrm{rk}(v\vee y)=\mathrm{rk}(v)+\mathrm{rk}(y)$.

Nach Satz 0.16 gilt

(2) $$\sum_{x\in L}\mu(\hat{0},x)x=\left(\sum_{v\in L:v\leq z}\mu(\hat{0},v)v\right)\left(\sum_{y\in L:y\wedge z=\hat{0}}\mu(\hat{0},y)y\right).$$

Für geeignete $x \in L$ erhalten wir also die Beziehung

$$\mu(\hat{0}, x)x = \sum_{\substack{v \in L: v \leq z \\ y \in L: y \wedge z = \hat{0} \\ v \vee y = x}} \mu(\hat{0}, v)\mu(\hat{0}, y)vy.$$

Nehmen wir nun folgende Substitutionen in (2) vor:

$$\begin{aligned}
\mu(\hat{0}, x)x &\mapsto \mu(\hat{0}, x)t^{n-\mathrm{rk}(x)}, \\
\mu(\hat{0}, v)v &\mapsto \mu(\hat{0}, v)t^{\mathrm{rk}(z)-\mathrm{rk}(v)}, \\
\mu(\hat{0}, y)y &\mapsto \mu(\hat{0}, y)t^{n-\mathrm{rk}(y)-\mathrm{rk}(z)}.
\end{aligned}$$

Nach der Vorüberlegung gilt

$$t^{\mathrm{rk}(z)-\mathrm{rk}(v)}t^{n-\mathrm{rk}(y)-\mathrm{rk}(z)} = t^{n-(\mathrm{rk}(v)+\mathrm{rk}(y))} = t^{n-\mathrm{rk}(v \vee y)} = t^{n-\mathrm{rk}(vy)},$$

also bleibt (2) unter dieser Substitution erhalten. Es gilt demnach

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{L}}(t) &= \sum_{x \in L} \mu(\hat{0}, x)t^{n-\mathrm{rk}(x)} \\
&= \left(\sum_{v \in L: v \leq z} \mu(\hat{0}, v)t^{\mathrm{rk}(z)-\mathrm{rk}(v)} \right) \left(\sum_{y \in L: y \wedge z = \hat{0}} \mu(\hat{0}, y)t^{n-\mathrm{rk}(y)-\mathrm{rk}(z)} \right) \\
&= \chi_{[\hat{0}, z]}(t) \left(\sum_{y \in L: y \wedge z = \hat{0}} \mu(\hat{0}, y)t^{n-\mathrm{rk}(y)-\mathrm{rk}(z)} \right).
\end{aligned}$$

□

Es gilt das folgende Korollar.

KOROLLAR 2.10

Sei $\mathcal{A} \in \mathrm{Hyp}(\mathbb{R}^n)$ zentral und essentiell. Für $H \in \mathcal{A}$ gilt

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t-1) \sum_{\substack{S \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ S \not\subseteq H}} \mu(\mathbb{R}^n, S)t^{\dim(S)-1}.$$

Beweis. Da $\mathcal{A}$ zentral ist, ist $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ nach Proposition 2.2 ein geometrischer Verband, und H ist ein Atom. Nach Lemma 2.7 ist H modular. Das Interval $[\mathbb{R}^n, H]$ ist eine zweielementige Kette, deren charakteristisches Polynom gerade $t-1$ ist. Die Behauptung folgt dann mit Satz 2.9. □

Wir haben in Satz 2.9 gesehen, wir das charakteristische Polynom eines geometrischen Verbands $\mathcal{L}$ bzgl. eines modularen Elements faktorisieren können. Wenn $\mathcal{L}$ genügend modulare Elemente besitzt, können wir das charakteristische Polynom sogar komplett in Linearfaktoren zerlegen.

DEFINITION 2.11

Ein geometrischer Verband $\mathcal{L} = (L, \leq)$ heißt ÜBERAUFLÖSBAR, wenn es eine MODULARE KETTE gibt, d.h. eine maximale Kette, die komplett aus modularen Elementen besteht.
Ein zentrales Hyperebenenarrangement heißt ÜBERAUFLÖSBAR, wenn die zugehörige Durchschnittsordnung ein überauflösbarer Verband ist.

LEMMA 2.12

Seien $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \cdots, \mathcal{L}_k$ geometrische Verbände, und sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \cdots \times \mathcal{L}_k$. Dann ist $\mathcal{L}$ genau dann überauflösbar, wenn für alle $i \in [k]$ der Verband $\mathcal{L}_i$ überauflösbar ist.

Beweis. Es genügt die Behauptung für $k = 2$ zu zeigen. Seien $\mathcal{L}_1 = (L_1, \leq_1)$ und $\mathcal{L}_2 = (L_2, \leq_2)$, sowie $\mathcal{L} = (L, \leq)$. Weiter seien $\mathrm{rk}_1, \mathrm{rk}_2$, und rk die Rangfunktionen von $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, und $\mathcal{L}$. Dann gilt $\mathrm{rk}(x, y) = \mathrm{rk}_1(x) + \mathrm{rk}_2(y)$ für alle $x \in L_1$ und $y \in L_2$.

Seien nun $x \in L_1$ und $y \in L_2$ modular. Nach Definition gilt für alle $u \in L_1$ und $v \in L_2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}(x,y) + \mathrm{rk}(u,v) &= \mathrm{rk}_1(x) + \mathrm{rk}_1(u) + \mathrm{rk}_2(y) + \mathrm{rk}_2(v)\\
&= \mathrm{rk}_1(x \wedge_1 u) + \mathrm{rk}_1(x \vee_1 u) + \mathrm{rk}_2(y \wedge_2 v) + \mathrm{rk}_2(y \vee_2 v)\\
&= \mathrm{rk}\big((x \wedge_1 u, y \wedge_2 v)\big) + \mathrm{rk}\big((x \vee_1 u, y \vee_2 v)\big)\\
&= \mathrm{rk}\big((x,y) \wedge (u,v)\big) + \mathrm{rk}\big((x,y) \vee (u,v)\big).
\end{aligned}$$

Also ist $(x, y) \in L$ modular. Die umgekehrte Behauptung folgt analog.

Sei nun $(x_1, y_1) \lessdot (x_2, y_2) \lessdot \cdots \lessdot (x_r, y_s)$ eine modulare Kette von $\mathcal{L}$. Dann sind $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_r$ und $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_s$ modulare Ketten von $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$. Die umgekehrte Behauptung folgt analog. □

Wir erhalten die folgende Konsequenz von Satz 2.9.

SATZ 2.13

Sei $\mathcal{L} = (L, \leq)$ ein überauflösbarer Verband mit $\mathrm{rk}(\mathcal{L}) = n$ mit modularer Kette $\hat{0} = x_0 \lessdot x_1 \lessdot \cdots \lessdot x_n = \hat{1}$. Es bezeichne A die Menge der Atome von $\mathcal{L}$, und es seien für $i \in [n]$

$$e_i = \#\{a \in A \mid a \leq x_i, a \not\leq x_{i-1}\}$$

die EXPONENTEN von $\mathcal{L}$. Dann gilt

$$\chi_{\mathcal{L}}(t) = (t - e_1)(t - e_2) \cdots (t - e_n).$$

Beweis. Da x_{n-1} modular ist, gilt für alle $y \in L$, dass $y \wedge x_{n-1} = \hat{0}$ genau dann gilt, wenn $y \in A$ und $y \not\leq x_{n-1}$, oder $y = \hat{0}$. Mit Satz 2.9 folgt dann

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{L}}(t) &= \chi_{[\hat{0},x_{n-1}]}(t) \left(\sum_{y \in L : y \wedge x_{n-1} = \hat{0}} \mu(\hat{0}, y) t^{1-\mathrm{rk}(y)} \right)\\
&= \chi_{[\hat{0},x_{n-1}]}(t)\big(t - e_n\big).
\end{aligned}$$

Nach Übung Ü8 ist das Intervall $[\hat{0}, x_{n-1}]$ wieder ein geometrischer Verband, und es ist leicht zu zeigen, dass die x_i auch in $[\hat{0}, x_{n-1}]$ modular sind. Mit Induktion können wir also $\chi_{[\hat{0},x_{n-1}]}(t)$ komplett faktorisieren, und erhalten die Behauptung. (Wir bemerken dabei, dass die Exponenten von $[\hat{0}, x_{n-1}]$ mit $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ übereinstimmen.) $\square$

BEISPIEL 2.14

Sei $\mathcal{C}(n)$ das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. Nach Beispiel 1.29 $\mathcal{L}\big(\mathcal{C}(n)\big)$ der Boolesche Verband mit 2^n Elementen ist, ist jedes Element modular. Sei $\mathcal{C}(n) = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ für eine beliebige Ordnung der Koordinatenebenen, und sei $S_i = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_i$. Dann ist $S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S_n$ eine modulare Kette in $\mathcal{L}\big(\mathcal{C}(n)\big)$. Offenbar gilt $H \supseteq S_i$ und $H \not\supseteq S_{i-1}$ genau dann, wenn $H = H_i$; also ist $e_1 = e_2 = \cdots = e_n = 1$. Satz 2.13 impliziert dann

$$\chi_{\mathcal{C}(n)}(t) = (t-1)^n,$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 1.33.

BEISPIEL 2.15

Sei $\mathcal{B}(n)$ das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. Nach Beispiel 1.30 ist $\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(n)\big)$ der Verband der Mengenpartitionen von $[n]$. Sei $\mathbf{x} \in \Pi_n$ eine Mengenpartition. Es ist $\mathbf{x}$ genau dann modular, wenn $\mathbf{x}$ höchstens einen Block mit mehr als einem Element besitzt.

Es bezeichne dazu $\mathrm{bl}(\mathbf{x})$ die Anzahl der Blöcke von $\mathbf{x}$. Wenn $\mathrm{bl}(\mathbf{x}) = n$ ist, dann ist $\mathbf{x}$ die diskrete Partition, und damit trivialerweise modular. Es habe nun $\mathbf{x}$ genau einen Block A mit $r > 1$ Elementen. Also ist $\mathrm{bl}(\mathbf{x}) = n - r + 1$, und da $\mathrm{rk}(\mathbf{x}) = n - \mathrm{bl}(\mathbf{x})$ gilt, folgt $\mathrm{rk}(\mathbf{x}) = r - 1$. Sei $\mathbf{y} \in \Pi_n$ mit $\mathrm{bl}(\mathbf{y}) = k$, und sei j die Anzahl der Blöcke von $\mathbf{y}$, die A schneiden. Dann ist $\mathrm{bl}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = j + (n - r)$ und $\mathrm{bl}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = k - j + 1$. Also gilt

$$\mathrm{rk}(\mathbf{x}) + \mathrm{rk}(\mathbf{y}) = r - 1 + n - k = n - (j + n - r) + n - (k - j + 1) = \mathrm{rk}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) + \mathrm{rk}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}),$$

und damit ist $\mathbf{x}$ modular.
Sei nun $\mathbf{x} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\} \in \Pi_n$ mit $\#B_1 > 1$ und $\#B_2 > 1$. Wähle $b_1 \in B_1$ und $b_2 \in B_2$. Betrachte die Partition

$$\mathbf{y} = \big\{(B_1 \setminus \{b_1\}) \cup \{b_2\}, (B_2 \setminus \{b_2\}) \cup \{b_1\}, B_3, \ldots, B_k\big\}.$$

Dann ist $\mathrm{rk}(\mathbf{x}) = n - k = \mathrm{rk}(\mathbf{y})$, und es gilt

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \big\{B_1 \setminus \{b_1\}, B_2 \setminus \{b_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, B_3, \ldots, B_k\big\},$$
$$\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = \big\{B_1 \cup B_2, B_3, \ldots, B_k\big\},$$

mit $\mathrm{rk}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = n - k - 2$ und $\mathrm{rk}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = n - k + 1$. Also ist $\mathbf{x}$ nicht modular.

Setze $S_0 = \mathbb{R}^n$ und $S_i = H(\vec{\alpha}_{1,2}) \cap H(\vec{\alpha}_{2,3}) \cap \cdots \cap H(\vec{\alpha}_{i,i+1})$ für $i \in [n-1]$. Dann ist $S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S_{n-1}$ eine modulare Kette in $\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(n)\big)$. Offenbar gilt für $i \geq 1$, dass $H \supseteq S_i$ und $H \not\supseteq S_{i-1}$ genau dann gilt, wenn $H = H(\vec{\alpha}_{k,i+1})$ für $k \in [i]$; also ist $e_i = i$. Da $\mathcal{B}(3)$ nicht essentiell ist, folgt aus Ü9 und Satz 2.13:

$$\chi_{\mathcal{B}(n)}(t) = t\prod_{i=1}^{n-1}(t-i),$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 1.34.

Mit Hilfe von Satz 2.13 können wir also die charakteristischen Polynome von essentiellen, überauflösbaren Arrangements bestimmen. Im Falle von nicht-essentiellen, überauflösbaren Arrangements muss das charakteristische Polynom des Durchschnittsverbandes noch um den Faktor $t^{\dim(\mathcal{A})-\mathrm{rk}(\mathcal{A})}$ korrigiert werden.