

## 5. DIE KAMMERORDNUNG

In diesem Abschnitt wollen wir die Kammern von  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^n$  bzgl. ihrer Trennmengen von einer gegebenen Basiskammer partiell ordnen. Diese Idee geht auf [4] zurück. Wir wollen dabei ein paar strukturelle und enumerative Aspekte beleuchten, und folgen dabei im Wesentlichen [2] und [9].

## 5.1. Polyeder und Zellen.

## DEFINITION 5.1

Eine Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **KEGEL**, wenn für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in X$  auch  $a\vec{x} + b\vec{y} \in X$  für  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist.

Die Dimension eines Kegels  $X$  entspricht der Dimension des kleinsten Untervektorraums von  $\mathbb{R}^n$ , der  $X$  enthält.

Insbesondere sind Kegel konvexe Mengen. Wir bezeichnen mit  $\text{cl}(X)$  den (topologischen) Abschluss von  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Das **RELATIVE INNERE** einer abgeschlossenen Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , bezeichnet mit  $\text{relint}(X)$ , ist das Innere von  $X$  bzgl. des kleinsten Untervektorraums von  $\mathbb{R}^n$ , der  $X$  enthält.

## DEFINITION 5.2

Eine Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **POLYEDER**, wenn es ein Hyperebenenarrangement  $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$  gibt sodass

$$X = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} \text{cl}(H^-).$$

In dem Fall nennen wir  $\mathcal{A}$  eine **DARSTELLUNG** von  $X$ . Wenn für jedes  $\mathcal{A}' \subsetneq \mathcal{A}$  gilt, dass

$$X \subsetneq \bigcap_{H \in \mathcal{A}'} \text{cl}(H^-),$$

dann ist  $\mathcal{A}$  eine nicht-redundante Darstellung.

Ein **POLYEDRISCHER KEGEL** ist dann ein Kegel der als Durchschnitt über endlich viele Halbräume entsteht.

## DEFINITION 5.3

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Polyeder mit nicht-redundanter Darstellung  $\mathcal{A}$ . Die **FACETTEN** von  $X$  sind die Durchschnitte der Form  $X \cap H$  für  $H \in \mathcal{A}$ . Eine **ZELLE** von  $X$  ist ein Durchschnitt von Facetten von  $X$ , und wir schreiben  $\mathcal{F}(X)$  für die Menge aller Zellen von  $X$ .

Die Hyperebenen in  $\mathcal{A}$  heißen **BEGRENZENDE HYPEREBENEN** von  $X$ , und wir schreiben im allgemeinen  $\text{Bound}(X)$  anstelle von  $\mathcal{A}$ .

Wir fassen dabei einen Polyeder als Zelle von sich selbst auf, der als Durchschnitt über die leere Menge entsteht.

**5.2. Zellen von Arrangements.** Wir betrachten von nun an bis auf Widerruf ein essentielles Arrangement  $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_m\} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$  mit  $H_i = H_{a_i}(\vec{a}_i)$  für  $i \in [m]$  gegeben. Wir erinnern uns, dass die Kammern von  $\mathcal{A}$  abgeschlossene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sind. Also sind sie allesamt Polyeder; und wenn  $\mathcal{A}$  linear ist, sogar polyedrische Kegel.

Eine Menge  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **ZELLE** von  $\mathcal{A}$ , wenn es eine Kammer  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  gibt, sodass  $F \in \mathcal{F}(R)$ . Wir schreiben  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  für die Menge aller Zellen von  $\mathcal{A}$ . Sei nun  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ , und sei  $\mathcal{A}_F \stackrel{\text{def}}{=}$

$\{H \in \mathcal{A} \mid F \subseteq H\}$ . Wir definieren den charakteristischen Vektor  $\text{char}(F) \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$  von  $F$  vermöge

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \text{relint}(F) \subseteq H_i^+ \text{ oder } \text{relint}(F) \subseteq H_i, \\ -1, & \text{wenn } \text{relint}(F) \subseteq H_i^-. \end{cases}$$

Dann gilt

$$(4) \quad F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{\alpha}_i, \vec{x} \rangle = a_i \text{ für } H_i \in \mathcal{A}_F \text{ und } \langle \varepsilon_j \vec{\alpha}_j, \vec{x} \rangle \geq \varepsilon_j a_j \text{ für } H_j \notin \mathcal{A}_F\}.$$

Das relative Innere von  $F$  lässt sich schreiben als:

$$(5) \quad \text{relint}(F) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{\alpha}_i, \vec{x} \rangle = a_i \text{ für } H_i \in \mathcal{A}_F \text{ und } \langle \varepsilon_j \vec{\alpha}_j, \vec{x} \rangle > \varepsilon_j a_j \text{ für } H_j \notin \mathcal{A}_F\}.$$

#### LEMMA 5.4

Seien  $R, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  mit  $R \neq Q$ . Wenn  $\dim(R \cap Q) = n - 1$ , dann ist  $R \cap Q$  eine Facette von  $R$  und von  $Q$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $X = R \cap Q$  derart, dass  $\dim(X) = n - 1$ . Wir wählen  $\vec{x} \in \text{relint}(X)$  derart, dass für ein genügend kleines  $\varepsilon > 0$  der offene  $\varepsilon$ -Ball um  $\vec{x}$  die Menge  $X$  in einem  $n - 1$ -dimensionalen Ball  $B$  schneidet. Nach Definition ist  $\text{relint}(R) \cap \text{relint}(Q) = \emptyset$ , sodass  $B$  zum Rand von  $R$  und zum Rand von  $Q$  gehört. Weiterhin werden  $\text{relint}(R)$  und  $\text{relint}(Q)$  von einer Hyperebene  $H \in \mathcal{A}$  getrennt, und es gilt  $B \subseteq H$ . Also ist  $H \in \text{Bound}(R) \cap \text{Bound}(Q)$ .

Sei  $F = R \cap H$ . Es gibt keine von  $H$  verschiedene begrenzende Hyperebene von  $Q$ , die  $\text{relint}(F)$  schneidet, also folgt  $F \subseteq Q \cap H$ . Analog folgt  $Q \cap H \subseteq F$ , und wir sind fertig.  $\square$

#### KOROLLAR 5.5

Jede Facette von  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  ist Facette einer eindeutigen Kammer  $Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \setminus \{R\}$ .

*Beweis.* Sei  $F$  eine Facette von  $R$ , und sei  $H \in \text{Bound}(R)$  mit  $F \subseteq H$ . Sei  $\vec{x} \in \text{relint}(F)$ . Für ein genügend kleines  $\varepsilon > 0$  schneidet der offene  $\varepsilon$ -Ball  $B$  um  $\vec{x}$  keine Hyperebene in  $\mathcal{A} \setminus \{H\}$ . Dann schneidet  $H$  diesen Ball aber in zwei Teile, und einer davon ist vollständig in  $R$  enthalten. Der andere Teil ist in einer Kammer  $Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  enthalten, und insbesondere hat  $R \cap Q$  Dimension  $n - 1$ . Nach Lemma 5.4 besitzen  $R$  und  $Q$  eine gemeinsame Facette. Dann muss  $Q$  aber eindeutig sein, da es andernfalls zwei verschiedene Kammern geben müsste, deren relative Innere einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.  $\square$

Wir nennen zwei Kammern  $R, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  **BENACHBART**, wenn  $\dim(R \cap Q) = n - 1$  gilt. Mit anderen Worten, zwei Kammern sind genau dann benachbart, wenn sie von einer gemeinsamen Facette getrennt werden.

#### LEMMA 5.6

Seien  $R, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ . Dann existiert eine Folge von Kammern  $Q = R_0, R_1, \dots, R_k = R$  derart, dass  $R_{i-1}$  und  $R_i$  für alle  $i \in [k]$  benachbart sind, und dass beim Durchlaufen dieser Folge keine Hyperebene von  $\mathcal{A}$  mehr als einmal durchquert wird.

*Beweis.* Wähle  $\vec{x} \in \text{relint}(Q)$ , und sei  $Y$  die Menge aller Punkte  $\vec{y} \in \text{relint}(R)$  mit der Eigenschaft, dass die Strecke von  $\vec{x}$  nach  $\vec{y}$  einen  $n - 2$ -dimensionalen Unterraum  $H \cap H'$  für  $H, H' \in \mathcal{A}$  schneidet. Dann ist  $Y$  aber in der Vereinigung endlich vieler Hyperebenen im  $\mathbb{R}^n$  enthalten. (Diese Hyperebenen werden von  $\vec{x}$  und den entsprechenden Durchschnitten erzeugt.) Da  $\dim(R) = n$  ist, ist  $R \not\subseteq Y$ .

Wählen wir also  $\vec{y} \in \text{relint}(R) \setminus Y$ . Wenn wir nun der Strecke von  $\vec{x}$  nach  $\vec{y}$  folgen, durchqueren wir zu jedem Zeitpunkt höchstens eine Hyperebene von  $\mathcal{A}$ . Also durchlaufen wir eine Folge  $Q = R_0, R_1, \dots, R_k = R$  von benachbarten Kammern von  $\mathcal{A}$ . Diese Strecke ist nach Voraussetzung in keiner Hyperebene von  $\mathcal{A}$  enthalten, also schneidet sie jede Hyperebene von  $\mathcal{A}$  in höchstens einem Punkt.  $\square$

**5.3. Die Kammerordnung.** Nun fixieren wir eine beliebige Kammer  $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir

$$(6) \quad B = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{\alpha}_i, \vec{x} \rangle > a_i, \text{ für } i \in [m] \}$$

annehmen. (Notfalls ersetzen wir  $H_{a_i}(\vec{\alpha}_i)$  durch  $H_{-a_i}(-\vec{\alpha}_i)$ .)

#### DEFINITION 5.7

Für  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  definieren wir ihre **TRENNMENGE** vermöge

$$S(R; B) = \{ H_i \in \mathcal{A} \mid \langle \vec{\alpha}_i, \vec{x} \rangle < a_i \text{ für alle } \vec{x} \in \text{relint}(R) \}.$$

Mit anderen Worten enthält  $S(R; B)$  alle Hyperebenen, die  $R$  und  $B$  trennen.

#### DEFINITION 5.8

Für  $R, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  definieren wir  $R \leq Q$  genau dann wenn  $S(R; B) \subseteq S(Q; B)$  gilt. Die resultierende geordnete Menge

$$\text{Pos}(\mathcal{A}; B) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{R}(\mathcal{A}), \leq)$$

ist die **KAMMERORDNUNG** von  $\mathcal{A}$  bezüglich  $B$ .

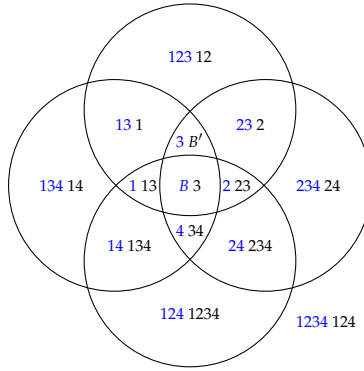
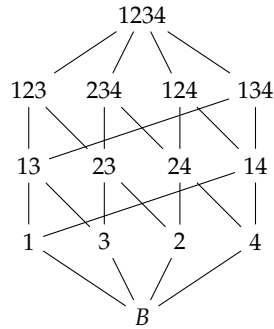
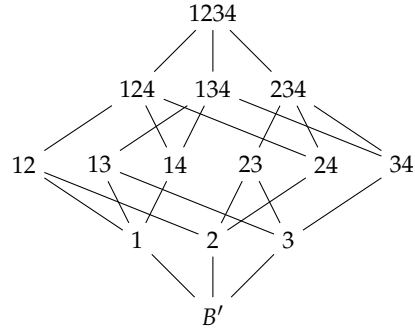
Diese Ordnung ist wohldefiniert, da man zeigen kann, dass aus  $S(R; B) = S(Q; B)$  stets  $R = Q$  folgt.

#### BEISPIEL 5.9

Sei  $\mathcal{A}$  das Hyperebenenarrangement in  $\mathbb{R}^3$ , das in Abbildung 23 dargestellt ist. Diese Abbildung zeigt die stereographische Projektion des Durchschnits von  $\mathcal{A}$  mit der Einheitssphäre. (Insbesondere ist  $\mathcal{A}$  die Essentialisierung des graphischen Arrangements eines Kreises der Länge 4.)

Die Beschriftung der Kammern spiegelt zwei verschiedene Wahlen der Basiskammer  $B$  wider. Jede übrige Kammer ist mit ihrer entsprechenden Trennmengem beschriftet. Die Kammerordnung bzgl. der blauen Basiskammer  $B$  ist in Abbildung 24a dargestellt, die Kammerordnung bzgl. der schwarzen Basiskammer  $B'$  in Abbildung 24b.

Wir bemerken weiter, dass der Isomorphietyp der Kammerordnung entscheidend von der Wahl der Basiskammer abhängt. Nicht nur sind die beiden Kammerordnungen in Abbildung 24 nicht isomorph, sondern die Ordnung in Abbildung 24b ist ein Verband, die Ordnung in Abbildung 24a nicht.

ABBILDUNG 23. Ein Hyperlebenenarrangement in  $\mathbb{R}^3$ .(A)  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ .(B)  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B')$ .ABBILDUNG 24. Zwei Kammerordnungen des Arrangements  $\mathcal{A}$  aus Abbildung 23.**LEMMA 5.10**

Sei  $\mathcal{A}$  linear. Für jedes  $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  selbstdual. Insbesondere besitzt  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ein größtes Element, und wenn  $\#\mathcal{A} > 1$ , dann ist die Anzahl maximaler Ketten von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  gerade.

*Beweis.* Für  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  ist auch  $-R = \{\vec{x} \mid -\vec{x} \in R\} \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ . Weiterhin ist  $S(-R; B) = \mathcal{A} \setminus S(R; B)$ . Somit ist die Abbildung  $R \mapsto -R$  der gewünschte Antiautomorphismus.

Dieser Antiautomorphismus ist offenbar selbstinvers und fixpunktfrei. Dementsprechend wird keine maximale Kette von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  von ihm fixiert.  $\square$

**LEMMA 5.11**

Zwei Kammern  $R, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  erfüllen genau dann  $R \leq Q$  in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ , wenn  $R$  und  $Q$  benachbart sind und  $\#S(R; B) < \#S(Q; B)$  gilt. In diesem Fall ist  $S(Q; B) = S(R; B) \cup \{H\}$ , wobei  $H$  die gemeinsame Facette von  $R$  und  $Q$  definiert.

*Beweis.* Sei zunächst  $R \triangleleft Q$ . Nach Definition ist dann  $S(R; B) \subsetneq S(Q; B)$ , sodass wir  $H \in S(Q; B) \setminus S(R; B)$  finden können. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $H \in \text{Bound}(R)$  ist. Nach Korollary 5.5 gibt es eine eindeutige Kammer  $R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ , sodass  $R \cap R' \subseteq H$  ist. Aus  $H \notin S(R; B)$  folgt  $H \in S(R'; B)$ , und damit ist  $R < R' \leq Q$ . Nach Voraussetzung folgt  $R' = Q$ .

Seien umgekehrt  $R, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  zwei benachbarte Kammern, und sei  $\#S(R; B) < \#S(Q; B)$ . Nach Lemma 5.4 gibt es eine Hyperebene  $H$ , die  $R \cap Q$  enthält, und es ist  $H \in \text{Bound}(R)$  und  $H \in \text{Bound}(Q)$ . Nach Annahme liegen  $B$  und  $R$  im gleichen Halbraum von  $H$ , und es folgt  $S(Q; B) = S(R; B) \cup \{H\}$ . Also ist  $R \triangleleft Q$ .  $\square$

#### KOROLLAR 5.12

Für jedes  $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  gradiert, wobei der Rang von  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  durch  $\#S(R; B)$  gegeben ist.

#### BEISPIEL 5.13

Sei  $\mathcal{C}(n)$  das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. In Beispiel 1.47 haben wir die Kammern von  $\mathcal{C}(n)$  mit Elementen aus  $\{0, 1\}^n$  identifiziert. Sei  $B$  die Kammer, die mit  $(0, 0, \dots, 0)$  identifiziert wird. Die Anzahl der Elemente vom Rang  $k$  in  $\text{Pos}(\mathcal{C}(n); B)$  ist durch die Anzahl der  $n$ -Tupel mit genau  $k$  Einsen gegeben. Die entsprechende Kammerordnung ist isomorph zum Booleschen Verband der Ordnung  $n$ .

#### BEISPIEL 5.14

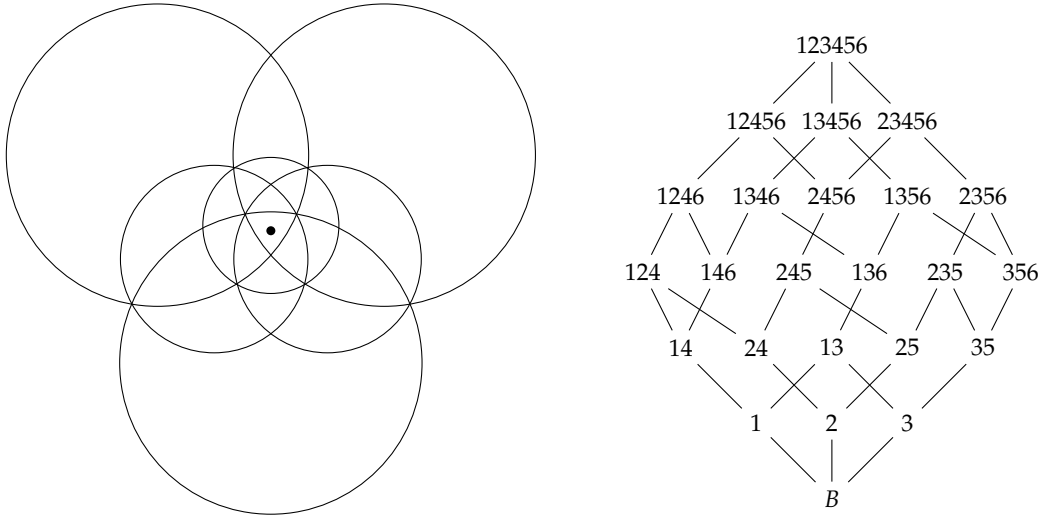
Sei  $\mathcal{B}(n)$  das Zopf-Arrangement aus Beispiel 1.6. In Beispiel 1.48 haben wir die Kammern von  $\mathcal{B}(n)$  mit den Permutationen von  $[n]$  identifiziert. Sei  $B$  die Kammer, deren Vektoren die Bedingungen  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  erfüllen. Die Anzahl der Elemente vom Rang  $k$  in  $\text{Pos}(\mathcal{B}(n); B)$  ist durch die Anzahl der Permutationen mit genau  $k$  Inversionen gegeben. Abbildung 25a zeigt die stereographische Projektion von  $\text{ess}(\mathcal{B}(4))$  geschnitten mit der Einheitssphäre, und Abbildung 25b zeigt die entsprechende Kammerordnung.

#### BEISPIEL 5.15

Sei  $\text{Shi}(n)$  das Shi-Arrangement aus Beispiel 4.8. In Bemerkung 4.9 haben wir eine Bijektion zwischen  $\mathcal{R}(\text{Shi}(n))$  und den Einparkfunktionen der Länge  $n$  beschrieben. Sei  $B$  die Kammer, die der Einparkfunktion  $(1, 1, \dots, 1)$  entspricht. Dann ist die Anzahl der Elemente vom Rang  $k$  in  $\text{Pos}(\text{Shi}(n); B)$  durch die Anzahl aller Einparkfunktionen  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  mit  $k = n - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  gegeben. Abbildung 26 zeigt  $\text{Pos}(\text{Shi}(3); B)$ .

#### LEMMA 5.16: [4, Lemma 2.1]

Sei  $F \in \mathcal{F}(B)$  nicht-leer. Dann gibt es eine eindeutige Kammer  $R_F \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  mit  $S(R_F; B) = \mathcal{A}_F$ .



(A) Die stereographische Projektion der Essentialisierung des Zopf-Arrangements  $\mathcal{B}(4)$ .

(B) Die Kammerordnung  $\text{Pos}(\mathcal{B}(4), B)$ , wobei  $B$  die in Abbildung 25a markierte Kammer ist.

ABBILDUNG 25. Die Kammerordnung des Zopf-Arrangements  $\mathcal{B}(3)$ .

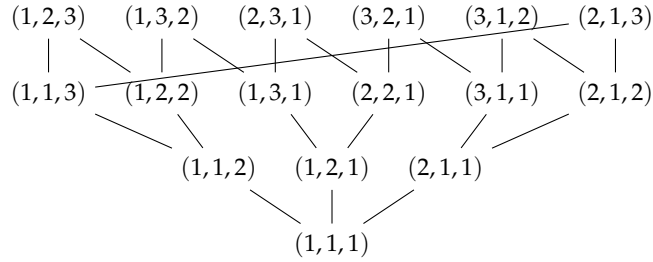


ABBILDUNG 26.  $\text{Pos}(\text{Shi}(3); B)$ .

*Beweis.* Sei  $\vec{y} \in \text{relint}(F)$  und sei  $\vec{x} \in B$ , und sei  $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$ . Nach (6) gilt für alle  $i \in [m]$

$$a_i < \langle \vec{\alpha}_i, \vec{x} \rangle = \langle \vec{\alpha}_i, \vec{z} \rangle + \langle \vec{\alpha}_i, \vec{y} \rangle.$$

Nach (5) ist  $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{y} \rangle = a_i$  falls  $H_i \in \mathcal{A}_F$ , also folgt aus obiger Ungleichung  $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{z} \rangle > 0$ . Für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  gilt weiter

$$\langle \vec{\alpha}_i, \vec{y} - \varepsilon \vec{z} \rangle = \langle \vec{\alpha}_i, \vec{y} \rangle - \varepsilon \langle \vec{\alpha}_i, \vec{z} \rangle = a_i - \varepsilon \langle \vec{\alpha}_i, \vec{z} \rangle < a_i$$

falls  $H_i \in \mathcal{A}_F$ . Nun wählen wir  $\varepsilon$  klein genug, sodass  $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{y} - \varepsilon \vec{z} \rangle > a_i$  für alle  $H_i \notin \mathcal{A}_F$ . Sei nun  $R$  die Kammer, die  $\vec{y} - \varepsilon \vec{z}$  enthält. Nach Definition ist  $S(R; B) = \mathcal{A}_F$ . Nach Konstruktion ist diese Kammer eindeutig, und wir schreiben  $R_F$  anstelle von  $R$ .  $\square$

**DEFINITION 5.17**

Eine Kammer  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  heißt **ZELLULÄR**, wenn es ein  $F \in \mathcal{F}(B)$  gibt, sodass  $R = R_F$ .

**LEMMA 5.18**

Die Abbildung  $F \mapsto R_F$  ist eine injektive, ordnungsumkehrende Abbildung von  $\mathcal{F}(B) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ .

*Beweis.* Seien  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(B)$  mit  $F_1 \subseteq F_2$ . Dann ist  $\mathcal{A}(F_1) \supseteq \mathcal{A}(F_2)$ . Nach Lemma 5.16 gibt es eindeutige Kammern  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  mit  $S(R_1; B) = \mathcal{A}(F_1)$  und  $S(R_2; B) = \mathcal{A}(F_2)$ . Nach Definition folgt  $R_1 \geq R_2$ .  $\square$

**5.4. Zur Verbandseigenschaft von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ .** In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, unter welchen Bedingungen die Kammerordnung einen Verband bildet.

**LEMMA 5.19**

Sei  $F \in \mathcal{F}(B) \setminus \{\emptyset\}$ , und sei  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ . Wenn  $\text{Bound}(F) \subseteq S(R; B)$  ist, dann folgt  $R_F \leq R$ .

*Beweis.* Sei  $F \in \mathcal{F}(B) \setminus \{\emptyset\}$ . Wir definieren die Menge  $\text{Bound}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Bound}(B) \cap \mathcal{A}_F$ . Nach Lemma 5.16 ist  $S(R_F; B) = \mathcal{A}_F$ . Sei also  $H \in \mathcal{A}_F$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $H \in S(R; B)$ .

(i) Sei  $H \in \text{Bound}(F)$ . Nach Voraussetzung folgt  $H \in S(R; B)$ .

(ii) Sei  $H \notin \text{Bound}(F)$ . Nach Definition folgt dann  $H \in \mathcal{A}_F \setminus \text{Bound}(B)$ . Sei  $H = H_t$  für ein  $t \in [m]$ . Da  $F \neq \emptyset$  gibt es  $\vec{y} \in F$  sodass  $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{y} \rangle = a_i$  für alle  $H_i \in \text{Bound}(B)$ , sowie  $\langle \vec{\alpha}_t, \vec{y} \rangle = a_t$ .

Da  $H_t \in \mathcal{A}_F$  keine begrenzende Hyperebene von  $B$  ist, folgt für  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$(7) \quad \text{Wenn } \langle \vec{\alpha}_i, \vec{x} \rangle > a_i \text{ für alle } H_i \in \text{Bound}(F) \text{ gilt, dann gilt auch } \langle \vec{\alpha}_t, \vec{x} \rangle > a_t.$$

(Da  $H_t \cap \text{relint}(B) = \emptyset$  und  $F \subseteq H_t$ .)

Sei nun  $\vec{z} \in R$ . Wenn  $H_t \notin S(R; B)$  ist, dann gilt  $\langle \vec{\alpha}_t, \vec{z} \rangle > a_t$ . Nach Voraussetzung ist  $\text{Bound}(F) \subseteq S(R; B)$ , also gilt  $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{z} \rangle < a_i$  für alle  $H_i \in \text{Bound}(F)$ . Dementsprechend ist

$$\langle \vec{\alpha}_i, 2\vec{y} - \vec{z} \rangle = 2a_i - \langle \vec{\alpha}_i, \vec{z} \rangle > a_i$$

für alle  $H_i \in \text{Bound}(F)$ . Da  $H_t \notin \text{Bound}(B)$  folgt mit (7) der Widerspruch

$$a_t < \langle \vec{\alpha}_t, 2\vec{y} - \vec{z} \rangle = 2a_t - \langle \vec{\alpha}_t, \vec{z} \rangle < a_t.$$

Also ist  $H = H_t \in S(R; B)$ .  $\square$

**DEFINITION 5.20**

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ein abgeschlossener polyedrischer Kegel mit  $\dim(X) = n$ . Wenn  $X$  genau  $n$  Facetten besitzt, heißt  $X$  **SIMPLIZIAL**.

Wir können simpliziale Kegel auch äquivalent als Durchschnitte von geschlossenen Halbräumen definieren, wobei die Normalenvektoren der definierenden Hyperebenen eine Basis des  $\mathbb{R}^n$  bilden.

Im allgemeinen gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Zellen eines abgeschlossenen polyedrischen Kegels als Durchschnitt von Facetten darzustellen. Wenn der Kegel aber simplizial ist, sind diese Darstellungen eindeutig und es gibt genau  $\binom{n}{k}$  Zellen der Dimension  $k$ .

**DEFINITION 5.21**

Ein lineares Hyperebenenarrangement heißt **SIMPLIZIAL**, wenn jede Kammer simplizial ist.

**LEMMA 5.22:** [4, Lemma 2.3]

Sei  $\mathcal{A}$  linear, und sei  $B$  simplizial. Für jede nicht-leere Teilmenge  $A$  der Atome von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  gibt es eine Zelle  $F \in \mathcal{F}(B)$ , sodass  $R_F$  die kleinste obere Schranke von  $A$  ist.

*Beweis.* Sei  $A$  eine nicht-leere Teilmenge der Atome von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ . Für  $Q \in A$  ist  $S(Q; B) = \{H\}$ . Da  $B$  simplizial ist, ist  $\#\mathcal{F}(B) = 2^n$ , und damit ist der Durchschnitt über die Trennmengen der Elemente von  $A$  eine eindeutig festgelegte Zelle  $F \in \mathcal{F}(B)$ .

Sei  $Q \in A$ . Dann gilt mit Lemma 5.16, dass

$$S(Q; B) \subseteq \bigcup_{R \in A} S(R; B) = \text{Bound}(F) \subseteq \mathcal{A}_F = S(R_F; B).$$

Also ist  $Q \leq R_F$ , und  $R_F$  ist damit eine obere Schranke von  $A$ . Mit Lemma 5.19 folgt, dass  $R_F$  sogar die kleinste obere Schranke von  $A$ .  $\square$

**SATZ 5.23:** [2, Theorem 3.1]

Sei  $\mathcal{A}$  linear. Wenn  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ein Verband ist, dann ist  $B$  simplizial.

*Beweis.* Für  $H \in \mathcal{A}$  schreiben wir  $\vec{\alpha}_H$  für den entsprechenden Normalenvektor. (Mit anderen Worten, wenn  $H = H_i$ , dann ist  $\vec{\alpha}_i = \vec{\alpha}_H$ .)

Nehmen wir an, dass  $B$  nicht simplizial ist. Dann ist  $\#\text{Bound}(B) \geq n + 1$ . Also ist die Menge  $Z$  aller Normalenvektoren der Hyperebenen in  $\text{Bound}(B)$  linear abhängig, und wir bezeichnen mit  $D$  eine minimale linear abhängige Teilmenge von  $Z$ . Sei nun  $\vec{z} \in D$ . Dann gilt

$$(8) \quad \vec{z} = - \sum_{G \in U} c_G \vec{\alpha}_G + \sum_{H \in V} d_H \vec{\alpha}_H.$$

Dabei ist  $D = \{\vec{z}\} \uplus \{\vec{\alpha}_G \mid G \in U\} \uplus \{\vec{\alpha}_H \mid H \in V\}$  und die Koeffizienten  $c_G$  und  $d_H$  sind alle nicht-negativ.

Wenn  $V = \emptyset$  ist, dann folgt  $\langle \vec{z}, \vec{x} \rangle < 0$  für alle  $\vec{x} \in B$ . Nach Definition gibt es  $H_{\vec{z}} \in \text{Bound}(B)$  mit  $\vec{z} = \vec{\alpha}_{H_{\vec{z}}}$ . Das ist ein Widerspruch zu (6), also folgt  $V \neq \emptyset$ .

Sei nun  $X = \{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid B \triangleleft R \text{ und } S(R; B) \subseteq V\}$ . Da  $D \setminus \{\vec{z}\}$  eine linear unabhängige Menge von Vektoren ist, ist das Arrangement  $U \uplus V \subseteq \mathcal{A}$  kombinatorisch isomorph zu einem Koordinatenarrangement. Dementsprechend enthält

$$\left( \bigcap_{G \in U} G^- \right) \cup \left( \bigcap_{H \in V} H^+ \right)$$

eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Also gibt es eine Kammer  $T \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  mit  $V \subseteq S(T; B)$  und  $S(T; B) \cap U = \emptyset$ , und wir wählen  $T$  minimal (bzgl. dieser Eigenschaften) in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ .

Da  $V \subseteq S(T; B)$  ist, ist  $T$  eine obere Schranke von  $X$ . Für  $\vec{y} \in T$  folgt  $\langle \vec{\alpha}_H, \vec{y} \rangle > 0$  für  $H \in V$  und  $\langle \vec{\alpha}_G, \vec{y} \rangle < 0$  für  $G \in U$ . Dementsprechend ist  $\langle \vec{z}, \vec{y} \rangle > 0$ , also ist  $H_{\vec{z}} \in S(T; B)$ . Sei  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  mit  $S(R; B) = \{H_{\vec{z}}\}$ . Nach Lemma 5.10 ist  $S(-R; B) = \mathcal{A} \setminus \{H_{\vec{z}}\}$ , also ist  $-R$  ebenfalls eine obere



Schranke von  $X$ . Allerdings sind  $T$  und  $-R$  unvergleichbar in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ . Da  $T$  minimal gewählt war, ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  also kein Verband.  $\square$

Bevor wir fortfahren, beweisen wir das folgende allgemeine Hilfslemma.

LEMMA 5.24: [2, Lemma 2.1]

Sei  $\mathcal{P} = (P, \leq)$  eine endliche beschränkte Halbordnung. Wenn für je zwei Elemente  $x, y \in P$ , die ein gemeinsames Element  $z \in P$  bedecken, das Supremum  $x \vee y$  existiert, dann ist  $\mathcal{P}$  bereits ein Verband.

*Beweis.* Nach Übung Ü1 genügt es zu zeigen, dass je zwei Elemente in  $P$  ein Supremum besitzen.

Sei  $n$  die größte Länge einer maximalen Kette in  $\mathcal{P}$ . Wir verwenden Induktion nach  $n$ . Für  $n \leq 2$  ist die Aussage trivialerweise wahr. Sei nun also  $n > 2$  beliebig, und seien  $x, y \in P$  so gewählt, dass sie kein gemeinsames Element bedecken. Seien  $a$  und  $b$  Atome von  $\mathcal{P}$  mit  $a \leq x$  und  $b \leq y$ . Wenn  $a = b$ , dann existiert  $x \vee y$  nach Induktionsvoraussetzung.

Wenn  $a \neq b$ , dann existiert das Supremum  $a \vee b$  nach Voraussetzung, da  $\hat{0} \leq a$  und  $\hat{0} \leq b$ . Nach Induktionsvoraussetzung (angewendet auf  $[a, \hat{1}]$ ) existiert  $x \vee (a \vee b)$ . Nach Induktionsvoraussetzung (angewendet auf  $[b, \hat{1}]$ ) existiert auch  $x \vee (a \vee b) \vee y = z$ . Da  $a \leq x$  und  $b \leq y$  ist  $z = x \vee y$ .  $\square$

SATZ 5.25: [2, Theorem 3.2]

Sei  $\mathcal{A}$  linear mit  $\dim \mathcal{A} \leq 3$ . Wenn  $B$  simplizial ist, dann ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ein Verband.

*Beweis.* Sei  $n = \dim \mathcal{A}$ . Für  $n \leq 2$  ist die Behauptung trivialerweise wahr. Sei also  $n = 3$ . Da  $B$  simplizial ist, folgt nach Lemma 5.22, dass jede Teilmenge der Atome von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ein Supremum besitzt. Nach Lemma 5.24 genügt es zu zeigen, dass für jedes Atom  $R_0$  von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  das Intervall  $[R_0, -B]$  ein Verband ist.

Sei also  $R_0$  ein beliebiges Atom von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  und sei  $S(R_0; B) = \{H_0\}$ . Es bezeichne  $\vec{\alpha}_{H_0}$  den Normalenvektor von  $H_0$  in  $\mathcal{A}$ . Sei  $H_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{\alpha}_{H_0}, \vec{x} \rangle = -1\}$  und sei  $\mathcal{A}_1 = \{H \cap H_1 \mid H \in \mathcal{A}\}$  das von  $H_1$  induzierte, affine zweidimensionale Arrangement. Dann ist

$$[R_0, -B] \cong \text{Pos}(\mathcal{A}_1; R_0 \cap H_1)$$

vermöge des Isomorphismus  $R \mapsto R \cap H_1$ . Nach Konstruktion ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}_1; R_0 \cap H_1)$  beschränkt, und besitzt ein planares Ordnungsdiagramm. Insbesondere ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}_1; R_0 \cap H_1)$  also ein Verband.  $\square$

BEISPIEL 5.26: [2, Example 3.3]

Wir betrachten das vierdimensionale Arrangement  $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6\}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0\}, & H_2 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\}, \\ H_3 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}, & H_4 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \\ H_5 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 - x_4 = 0\}, & H_6 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Wir wählen die simpliziale Basiskammer

$$B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > x_4 > 0\},$$

und wählen das Atom  $R$  von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  mit  $S(R; B) = \{H_6\}$ . Es gilt

$$R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > x_4, x_4 < 0, x_1 + 2x_2 + x_3 > 0, 2x_1 + x_2 + x_3 > 0\}.$$

Sei nun  $\tilde{H} = \{x_4 = -1\}$  und  $\tilde{\mathcal{A}} = \{H_i \cap \tilde{H} \mid i \in [5]\}$ . Dann ist  $\dim \tilde{\mathcal{A}} = 3$ , und es ist gegeben durch die Hyperebenen

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}, & \tilde{H}_2 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}, \\ \tilde{H}_3 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}, & \tilde{H}_4 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \\ \tilde{H}_5 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = -1\}. \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Satz 5.25 ist  $[R, -B]$  in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  isomorph zu  $\text{Pos}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{R})$ , wobei  $\tilde{R} = R \cap \tilde{H}$  ist.

Offenbar ist  $-\tilde{B} = -B \cap \tilde{H}$  das größte Element von  $\text{Pos}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{R})$ . Es gilt

$$-\tilde{B} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 < -1\}.$$

Wir finden ein Koatom  $\tilde{T}$  in  $\text{Pos}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{R})$  gegeben durch

$$\tilde{T} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 > -1, x_1 + 2x_2 + x_3 < 0, 2x_1 + x_2 + x_3 < 0\};$$

insbesondere ist  $S(\tilde{T}; \tilde{R}) = \tilde{\mathcal{A}} \setminus \{\tilde{H}_5\}$ . Das Intervall  $[\tilde{R}, \tilde{T}]$  besteht aus allen Kammern von  $\tilde{\mathcal{A}}$ , die im positiven Halbraum  $\tilde{H}_5^+$  liegen. Sei  $\mathcal{A}' = \tilde{\mathcal{A}} \setminus \{\tilde{H}_5\}$ , und sei  $R'$  die eindeutige Kammer von  $\mathcal{A}'$ , die  $\tilde{R}$  enthält. Es gilt

$$R' = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + 2x_2 + x_3 > 0, 2x_1 + x_2 + x_3 > 0\},$$

und  $R'$  ist somit nicht simplizial. Weiterhin ist  $\mathcal{A}'$  ein zentrales dreidimensionales Arrangement, und es gilt  $[\tilde{R}, \tilde{T}] \cong \text{Pos}(\mathcal{A}'; R')$ . Nach Satz 5.25 ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}'; R')$  kein Verband (es ist sogar isomorph zur Kammerordnung aus Abbildung 24a). Da es ein zu  $\text{Pos}(\mathcal{A}'; R')$  isomorphes Intervall in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  gibt, ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  kein Verband.

**SATZ 5.27:** [2, Theorem 3.4]

Wenn  $\mathcal{A}$  simplizial ist, dann ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ein Verband für jede Wahl von  $B$ .

*Beweis.* Nach Lemma 5.22 existiert das Supremum für jedes Paar von Atomen von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ .

Seien nun  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ , die eine gemeinsame Kammer  $R$  bedecken. Wir zeigen zunächst, dass das Supremum  $R_1 \vee R_2$  existiert. Nach Konstruktion ist das Intervall  $[R, -B]$  in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  isomorph zum Intervall  $[R, -B]$  in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; R)$ . In  $\text{Pos}(\mathcal{A}; R)$  bedecken  $R_1$  und  $R_2$  ebenfalls  $R$ . Da  $R$  simplizial ist, existiert nach Lemma 5.22 also  $R_1 \vee R_2$  in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; R)$  und gehört zum Intervall  $[R, -B]$ . Also existiert  $R_1 \vee R_2$  auch in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ .

Mit Lemma 5.24 folgt, dass  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ein Verband ist.  $\square$

**5.5. Dichte Arrangements und Semidistributive Verbände.** Sei  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  und sei  $F$  eine Facette von  $R$ . Nach Korollar 5.5 existiert eine eindeutige Kammer  $Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  mit  $F = R \cap Q$ . Nach Lemma 5.11 gilt entweder  $R \leq Q$  oder  $Q \leq R$  in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ . Wir nennen  $F$  eine **OBERE FACETTE**

von  $R$  bzgl.  $B$ , wenn  $R \triangleleft Q$  gilt, und eine **UNTERE FACETTE** andernfalls. Eine **OBERE HYPEREBENE** von  $R$  bzgl.  $B$  ist eine Hyperebene, die eine obere Facette von  $R$  enthält. Wir definieren **UNTERE HYPEREBENEN** analog.

**DEFINITION 5.28**

Eine Kammer  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  heißt **DICHT** bzgl.  $B$  wenn sich je zwei obere Facetten von  $B$  in einer  $n - 2$ -dimensionalen Zelle von  $R$  schneiden, und dasselbe auch für untere Facetten gilt.  
Dann heißt  $\mathcal{A}$  **DICHT** bzgl.  $B$ , wenn alle Kammern von  $\mathcal{A}$  dicht bzgl.  $B$  sind.

Wenn  $\mathcal{A}$  linear ist, dann ist die Abbildung  $R \mapsto -R$  nach Lemma 5.10 ein Antiautomorphismus von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ . Um zu prüfen, ob  $\mathcal{A}$  dicht bzgl.  $B$  ist genügt es also entweder alle Paare von oberen Facetten der Kammern von  $\mathcal{A}$  zu überprüfen, oder aber alle Paare von unteren Facetten.

**BEISPIEL 5.29**

Sei  $G$  der folgende Graph.

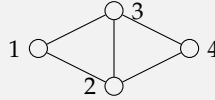


Abbildung 27a zeigt die stereographische Projektion von  $\text{ess}(\mathcal{A}_G)$ . Wir können schnell nachprüfen, dass  $\mathcal{A}$  dicht bzgl.  $B_1$ , aber nicht bzgl.  $B_2, B_3$  ist.

Im weiteren Verlauf machen wir oft Gebrauch von dem folgenden Lemma und seiner Schlussfolgerungen.

**LEMMA 5.30**

Sei  $\mathcal{A}$  linear mit Basiskammer  $B$ , und sei  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$  mit  $\dim(F) = n - 2$ . Sei  $\mathcal{A}_F = \{H \in \mathcal{A} \mid F \subseteq H\}$ , und sei  $B'$  die Kammer von  $\mathcal{A}_F$ , die  $B$  enthält. Die Einschränkung von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  auf  $\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid F \subseteq R\}$  ist isomorph zu  $\text{Pos}(\mathcal{A}_F; B')$ .

*Beweis.* Sei  $R$  eine beliebige Kammer von  $\mathcal{A}$ , die  $F$  enthält. Dann gibt es zwei Facetten  $F_1, F_2$  von  $R$  mit  $F = F_1 \cap F_2$ . Seien  $H_1$  bzw.  $H_2$  die begrenzenden Hyperebenen von  $R$  die  $F_1$  bzw.  $F_2$  enthalten. Dann ist  $U = H_1 \cap H_2$  die lineare Hülle von  $F$ , und es gibt einen zweidimensionalen Unterraum  $P$ , sodass  $\mathbb{R}^n = U \oplus P$ . Sei  $\vec{x} \in \text{relint}(F)$ .

(i) Wir zeigen zuerst, dass

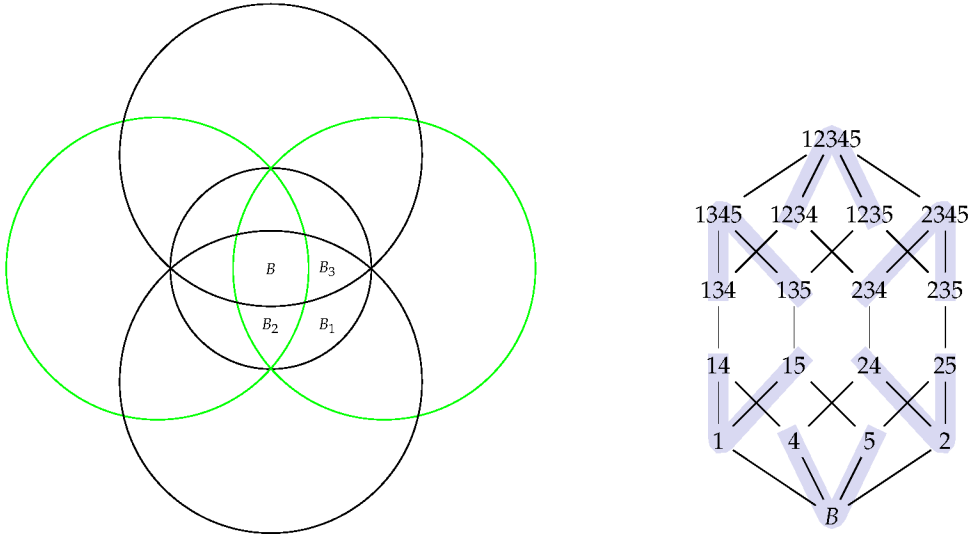
$$\mathcal{A}_F = \{H \in \mathcal{A} \mid \vec{x} \in H\}$$

gilt. Da  $\vec{x} \in F$  ist eine Inklusion offensichtlich. Nehmen wir nun an, dass es eine Hyperebene  $H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_F$  gibt mit  $\vec{x} \in H$ . Da  $H \notin \mathcal{A}_F$  folgt, dass  $U \not\subseteq H$ . Also ist  $P \subseteq H$ .

Sei nun  $\vec{y} \in \text{relint}(R)$  nah genug bei  $\vec{x}$ . Wir können einen Vektor in  $U$  von  $\vec{y}$  abziehen und erhalten  $\vec{y}' = \vec{x} + \vec{p}$  für  $\vec{p} \in P$ . Nach Konstruktion ist, wenn  $\vec{y}$  nah genug bei  $\vec{x}$  gewählt wurde,  $\vec{y}' \in \text{relint}(R)$ . Nach Annahme ist aber auch  $\vec{y}' \in P \subseteq H$ . Wir erhalten somit den Widerspruch  $H \cap \text{relint}(R) \neq \emptyset$ .

(ii) Wir zeigen nun, dass

$$\{R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid F \subseteq R'\} = \{R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid \vec{x} \in R'\}$$



(A) Die stereographische Projektion der Essentialisierung des graphischen Arrangements aus Beispiel 5.29.

(B) Die Kammerordnung des Arrangements aus Abbildung 27a bzgl. der markierten Basiskammer.

ABBILDUNG 27. Die Kammerordnung eines Hyperebenenarrangements bzgl. einer nicht-dichten Kammer.

gilt. Da  $\vec{x} \in F$  ist eine Inklusion offensichtlich. Sei also  $R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  so gewählt, dass  $\vec{x} \in R'$ , aber  $F \not\subseteq R'$ . Dann gibt es einen Punkt  $\vec{x}' \in \text{relint}(F)$ , sodass  $\vec{x}$  und  $\vec{x}'$  in verschiedenen Halbräumen bzgl. einer begrenzenden Hyperebene  $H$  von  $R'$  liegen. Da  $F$  ein Kegel ist, schneidet die Strecke von  $\vec{x}$  nach  $\vec{x}'$  die Hyperebene  $H$  in einem Punkt  $H''$ , der ebenfalls in  $\text{relint}(F)$  liegt. Aber dann gilt  $\vec{x}'' \in H$  und  $F \not\subseteq H$ , was (i) widerspricht.

(iii) Wir wählen nun einen  $\varepsilon$ -Ball  $X$  um  $\vec{x}$ . Aus (ii) folgt, dass für ein genügend kleines  $\varepsilon$

$$\{R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid R' \cap X \neq \emptyset\} = \{R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid F \subseteq R'\}$$

gilt. Nach (i) unterscheiden sich die Trennmengen solcher Kammern nur um Elemente in  $\mathcal{A}_F$ . Also sind diese Kammern in Bijektion mit den Kammern von  $\mathcal{A}_F$  vermöge der kanonischen Inklusionsabbildung.  $\square$

Aus dem Beweis von Lemma 5.30 erhalten wir die folgenden Korollare.

#### KOROLLAR 5.31

Sei  $\mathcal{A}$  linear mit Basiskammer  $B$ , und sei  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$  mit  $\dim(F) = n - 2$ . Weiter seien  $\mathcal{A}_F$  und  $B'$  wie in Lemma 5.30. Dann besteht  $\text{Pos}(\mathcal{A}_F; B')$  aus genau zwei maximalen Ketten, die sich nur in  $B'$  und  $-B'$  schneiden.

**KOROLLAR 5.32**

Sei  $\mathcal{A}$  linear mit Basiskammer  $B$ , und sei  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$  mit  $\dim(F) = n - 2$ . Weiter seien  $\mathcal{A}_F$  und  $B'$  wie in Lemma 5.30. Dann gibt es eine (bis auf Umkehrung) eindeutige lineare Anordnung  $H_1, H_2, \dots, H_k$  der Hyperebenen in  $\mathcal{A}_F$  sodass für jede Kammer  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  die Menge  $S(R; B) \cap \mathcal{A}_F$  entweder von der Form  $\{H_1, H_2, \dots, H_i\}$  für  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  oder von der Form  $\{H_i, H_{i+1}, \dots, H_k\}$  für  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  ist. Bezüglich dieser Anordnung sind  $H_1$  und  $H_k$  die begrenzenden Hyperebenen von  $B'$ .

*Beweis.* Die Anordnung der Hyperebenen folgt direkt aus Korollar 5.31, ebenso der Fakt, dass  $H_1$  und  $H_k$  die begrenzenden Hyperebenen von  $B'$  sind.

Sei nun  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ , und sei  $R'$  die eindeutige Kammer von  $\mathcal{A}_F$  mit  $R \subseteq R'$ . Nach Konstruktion ist  $S(R'; B') = S(R; B) \cap \mathcal{A}_F$ , und  $S(R'; B')$  besitzt die gewünschte Form.  $\square$

**KOROLLAR 5.33**

Sei  $\mathcal{A}$  linear mit Basiskammer  $B$ , und sei  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$  mit  $\dim(F) = n - 2$ . Weiter seien  $\mathcal{A}_F$  und  $B'$  wie in Lemma 5.30. Dann gibt es eine kleinste Kammer  $Q$  und eine größte Kammer  $R$  von  $\mathcal{A}$ , die  $F$  enthalten, und es gilt  $S(Q; B) \cap \mathcal{A}_F = \emptyset$  sowie  $S(R; B) = S(Q; B) \cup \mathcal{A}_F$ .

Man kann sich leicht überlegen, dass  $\mathcal{A}$  nur dicht bzgl. simplizialer Kammern sein kann. Nach Satz 5.23 folgt aus der Verbandseigenschaft von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ , dass  $B$  simplizial ist. Wir haben auch die folgende, passende Implikation.

**SATZ 5.34:** [9, Theorem 9-3.2]

Wenn  $\mathcal{A}$  dicht bzgl.  $B$  ist, dann ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ein Verband.

*Beweis.* Seien  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  derart, dass ein  $Q \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  existiert mit  $Q \leq R_1$  und  $Q \leq R_2$ . Sei  $F_1 = R_1 \cap Q$  und  $F_2 = R_2 \cap Q$ . Dann sind  $F_1$  und  $F_2$  obere Facetten von  $Q$ , also ist nach Voraussetzung  $\dim(F_1 \cap F_2) = n - 2$ . Seien  $H_1$  bzw.  $H_2$  die Hyperebenen, die  $F_1$  bzw.  $F_2$  enthalten.

Sei  $\mathcal{A}_{F_1 \cap F_2} = \{H \in \mathcal{A} \mid F_1 \cap F_2 \subseteq H\}$  und sei  $B'$  die Kammer von  $\mathcal{A}_{F_1 \cap F_2}$ , die  $B$  enthält. Man kann sich nun überlegen, dass eine Kammer  $P$  mit der Eigenschaft, dass  $\{H_1, H_2\} \subseteq S(P; B)$  sofort  $\mathcal{A}_{F_1 \cap F_2} \subseteq S(P; B)$  erfüllt. Insbesondere enthält die Trennmengen jeder gemeinsamen oberen Schranke von  $R_1$  und  $R_2$  die Menge  $S(Q; B) \cup \mathcal{A}_{F_1 \cap F_2}$ .

Nach Lemma 5.30 ist die Menge aller Kammern, die  $F_1 \cap F_2$  enthalten ein Intervall  $[Q, R]$  in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ , und nach Korollar 5.33 ist  $S(R; B) = S(Q; B) \cup \mathcal{A}'$ . Also ist  $R$  das Supremum von  $R_1$  und  $R_2$ .

Nach Lemma 5.24 ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ein Verband.  $\square$

**BEISPIEL 5.35**

Sei  $\mathcal{A}$  das Arrangement aus Beispiel 5.9. Es ist bzgl. der simplizialen Basiskammer  $B'$  nicht dicht, aber  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B')$  ist dennoch ein Verband.

**LEMMA 5.36**

Ein simpliziales Arrangement ist dicht bzgl. jeder Kammer.

*Beweis.* Das folgt daraus, dass sich je zwei Facetten einer simplizialen Kammer in einer  $n - 2$ -dimensionalen Zelle schneiden.  $\square$

Die Bedeutsamkeit des Dichtheitsbegriffs erscheint zunächst vielleicht etwas diffus. Dieser Begriff erlaubt aber eine Charakterisierung der Kammerordnungen, die *semidistributive* Verbände sind.

**DEFINITION 5.37**

Ein Verband  $\mathcal{L} = (L, \leq)$  ist **INFIMUM-SEMIDISTRIBUTIV**, wenn für alle  $x, y, z \in L$  gilt

$$\text{Aus } x \wedge y = x \wedge z \text{ folgt } x \wedge (y \vee z) = x \wedge z.$$

Wenn sowohl  $\mathcal{L}$ , als auch der duale Verband  $\mathcal{L}^*$ , infimum-semidistributiv sind, dann ist  $\mathcal{L}$  **SEMIDISTRIBUTIV**.

**BEISPIEL 5.38**

Der Verband in Abbildung 24b ist nicht infimum-semidistributiv, da die Elemente  $x = 34$ ,  $y = 13$  und  $z = 23$  die Bedingung verletzen. Die Verbände in den Abbildungen 25 und 28a sind allerdings semidistributiv.

**SATZ 5.39: [9, Theorem 9-3.8]**

Die Kammerordnung  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ist genau dann ein semidistributiver Verband, wenn  $\mathcal{A}$  dicht bzgl.  $B$  ist.

Um Satz 5.39 zu beweisen, benötigen wir die folgenden Lemmas.

**LEMMA 5.40**

Wenn eine Kammer  $R$  genau zwei untere Facetten bzgl.  $B$  besitzt, dann ist deren Durchschnitt  $n - 2$ -dimensional.

*Beweis.* Seien  $F$  und  $G$  die beiden unteren Facetten von  $R$  bzgl.  $B$ . Seien weiter  $\vec{x} \in \text{relint}(F)$ ,  $\vec{y} \in \text{relint}(G)$  und sei  $\vec{z} \in \text{relint}(B)$ . Seien  $H_F$  bzw.  $H_G$  die begrenzenden Hyperebenen von  $R$ , die  $F$  bzw.  $G$  enthalten. Es ist  $\vec{x} \in H_F \setminus H_G$  und  $\vec{y} \in H_G \setminus H_F$ .

Aus (6) folgt, dass für genügend kleine  $\varepsilon$  die Punkte  $\vec{x}' = \vec{x} - \varepsilon\vec{z}$  und  $\vec{y}' = \vec{y} - \varepsilon\vec{z}$  im relativen Inneren von  $R$  liegen. Da  $R$  konvex ist, ist auch die Strecke zwischen  $\vec{x}'$  und  $\vec{y}'$  in  $R$  enthalten.

Für  $\vec{u} \in \text{relint}(R)$  sei  $p(\vec{u})$  der Schnittpunkt von  $\{\vec{u} + \lambda\vec{z} \mid \lambda \geq 0\}$  (also der Strecke von  $\vec{u}$  durch  $\vec{z}$ ) mit dem Rand von  $R$ . Aus (6) folgt weiter, dass  $p(\vec{u})$  in mindestens einer unteren Facette von  $R$  liegt, aber niemals in einer oberen Facette von  $R$ . Es gilt außerdem, dass  $p(\vec{x}') = \vec{x}$  und  $p(\vec{y}') = \vec{y}$ .

Da  $R$  nur zwei untere Facetten besitzt gibt es einen Punkt  $\vec{u}'$  auf der Strecke von  $\vec{x}'$  nach  $\vec{y}'$ , für den  $p(\vec{u}')$  in  $H_F \cap H_G$  liegt. Da  $\vec{u}' \in \text{relint}(R)$  gibt es einen offenen Ball um  $\vec{u}'$  der komplett in  $R$  liegt. Dieser Ball wird vermöge  $p$  auf eine relativ offene Umgebung  $U$  von  $p(\vec{u}')$  im Rand von  $R$  abgebildet. Außerdem ist  $U \subseteq F \cup G$ . Also ist  $U \cap H_F \cap H_G$  eine offene Umgebung von  $p(\vec{u}')$  in  $H_F \cap H_G \cap R$ . Es folgt, dass die Dimension von  $F \cap G = H_F \cap H_G \cap R$  gerade  $n - 2$  ist.  $\square$

**LEMMA 5.41**

Sei  $X \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A})$ , und sei  $R$  eine obere Schranke von  $X$  in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ . Es ist  $R$  genau dann eine minimale obere Schranke von  $X$ , wenn es für jede untere Hyperebene  $H$  von  $R$  bzgl.  $B$  ein  $Q \in X$  gibt, sodass  $H \in S(Q; B)$ .

*Beweis.* Sei  $H$  eine untere Hyperebene von  $R$  sodass  $H \notin \bigcup_{Q \in X} S(Q; B)$  gilt. Nach Lemma 5.11 gibt es  $R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  mit  $R' \prec R$  und  $S(R'; B) = S(R; B) \setminus \{H\}$ . Dann ist  $R'$  aber auch eine obere Schranke von  $X$ , und  $R$  ist demnach keine minimale obere Schranke von  $X$ .

Nehmen wir umgekehrt an, dass für jede untere Hyperebene  $H$  von  $R$  ein  $Q \in X$  existiert, sodass  $H \in S(Q; B)$ . Nach Lemma 5.11 ist kein unterer Nachbar von  $R$  eine obere Schranke von  $X$ . Also ist  $R$  eine minimale obere Schranke von  $X$ .  $\square$

Nun beschreiben wir ein lokales Kriterium, wann ein Verband semidistributiv ist.

**LEMMA 5.42:** [9, Lemma 9-2.6]

Sei  $\mathcal{L} = (L, \leq)$  ein endlicher Verband. Nehmen wir an, dass für alle  $x, y, z \in L$  mit  $x \wedge y = x \wedge z$  gilt, dass wenn  $y$  und  $z$  ein gemeinsames Element bedecken, dann ist  $x \wedge (y \vee z) = x \wedge y$ . Dann ist  $\mathcal{L}$  semidistributiv.

*Beweis.* Seien  $x, y, z \in L$  mit  $x \wedge y = x \wedge z$ . Wenn  $y \leq z$  oder  $z \leq y$ , dann ist sofort klar, dass  $x \wedge (y \vee z) = x \wedge y$  gilt. Seien  $y$  und  $z$  also unvergleichbar in  $\mathcal{L}$ . Wir verwenden Induktion über  $\#\{u \in L \mid y \wedge z \leq u\}$ . Der Induktionsanfang (nämlich, dass  $y, z$  Koatome von  $\mathcal{L}$  sind, die ein gemeinsames Element bedecken) gilt nach Voraussetzung.

Seien  $a_y, a_z$  die Elemente, die  $y \wedge z$  bedecken und  $a_y \leq y$  und  $a_z \leq z$  erfüllen. Wenn  $a_y = a_z$ , dann ist  $a_y = y \wedge z$ , was der Wahl von  $a_y$  widerspricht. Also ist  $a_y \neq a_z$ .

Aus  $a_y \leq y$  folgt, dass  $x \wedge a_y \leq x \wedge y$ . Nach Annahme ist  $x \wedge y = x \wedge z \leq z$ . Also ist  $x \wedge y \leq y \wedge z \leq a_y$ . Es folgt  $x \wedge y \leq x \wedge a_y \leq x \wedge y$ . Analog zeigt man  $x \wedge z = x \wedge a_z$ , also ist nach Annahme  $x \wedge a_y = x \wedge a_z$ .

Da  $a_y$  und  $a_z$  ein gemeinsames Element (nämlich  $y \wedge z$ ) bedecken, gilt nach Voraussetzung

$$x \wedge (a_y \vee a_z) = x \wedge a_y = x \wedge y.$$

Da  $a_y \leq y$  und  $a_y \leq a_y \vee a_z$ , und  $y \wedge z \leq a_y$  folgt per Induktion:

$$x \wedge (y \vee a_y \vee a_z) = x \wedge y = x \wedge z,$$

Weiter ist  $a_z \leq y \vee a_y \vee a_z$ ,  $a_z \leq z$  und  $y \wedge z \leq a_z$ , also folgt per Induktion:

$$x \wedge z = x \wedge (y \vee a_y \vee a_z \vee z) = x \wedge (y \vee z).$$

$\square$

Kommen wir nun zum Beweis von Satz 5.39.

*Beweis von Satz 5.39.* Sei  $\mathcal{A}$  dicht bzgl.  $B$ . Nach Satz 5.34 ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ein Verband. Es genügt also die Voraussetzung von Lemma 5.42 nachzuweisen.

Seien dazu  $W, X, Y, Z \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  mit  $X \wedge Y = X \wedge Z$  und  $W \prec Y$  und  $W \prec Z$ . Sei  $R = X \wedge Y = X \wedge Z$ . Es folgt, dass  $R$  eine untere Schranke von  $Y$  und  $Z$  ist, also gilt  $R \leq Y \wedge Z = W$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $X \wedge (Y \vee Z) = R$  gilt.

Sei  $F_Y = Y \cap W$  und  $F_Z = Z \cap W$ , und seien  $H_Y$  bzw.  $H_Z$  die Hyperebenen, die  $Y$  bzw.  $Z$  enthalten. Dann gilt  $S(Y; B) = S(W; B) \cup \{H_Y\}$  und  $S(Z; B) = S(W; B) \cup \{H_Z\}$ . Da  $\mathcal{A}$  dicht bzgl.  $B$  ist, ist  $\dim(F_Y \cap F_Z) = n - 2$ . Sei  $\mathcal{A}' = \{H \in \mathcal{A} \mid F_Y \cap F_Z \subseteq H\}$ . Lemma 5.30 impliziert, dass  $S(Y \vee Z; B) = S(W; B) \cup \mathcal{A}'$  und dass  $S(W; B) \cap \mathcal{A}' = \emptyset$ . Da  $R \leq W$  ist, gilt auch  $S(R; B) \cap \mathcal{A}' = \emptyset$ .

Sei nun  $R' = X \wedge (Y \vee Z)$ . Es gilt auf jeden Fall, dass  $R \leq R'$ , und wir nehmen an, dass sogar  $R < R'$  gilt. Dann gibt es eine Kammer  $T \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  mit  $R < T \leq R'$ . Aus  $T \leq R'$  folgt  $T \leq X$ , und da  $T \not\leq R$  muss  $T \not\leq Y$  gelten. Sei  $H$  die Hyperebene, die  $R$  und  $T$  trennt; also für die gilt  $S(T; B) = S(R; B) \cup \{H\}$ . Aus  $T \leq R' \leq Y \vee Z$  folgt aber  $H \in S(W; B) \cup \mathcal{A}'$ . Da  $T \not\leq Y$  folgt  $H \notin S(W; B)$ , also ist  $H \in \mathcal{A}'$ . Mit dem gleichen Argument folgt  $H \neq H_Y$ . Analog zeigt man  $H \neq H_Z$ . Also ist  $H \in \mathcal{A}' \setminus \{H_Y, H_Z\}$ . Nun widerspricht  $S(T; B)$  aber Korollar 5.32, also folgt  $R = R'$ .

Nach Lemmas 5.10 und 5.42 ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  semidistributiv.

Nehmen wir nun an, dass  $\mathcal{A}$  nicht dicht bzgl.  $B$  ist. Wenn  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  kein Verband ist, sind wir fertig. Nehmen wir also an, dass  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ein Verband ist. Da  $\mathcal{A}$  nicht dicht bzgl.  $B$  ist, gibt es eine Kammer  $W \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ , die zwei obere Facetten besitzt deren Durchschnitt Dimension  $< n - 2$  hat. Seien  $Y$  und  $Z$  die Kammern, die durch diese Facetten von  $W$  getrennt werden, und seien  $H_Y$  und  $H_Z$  die entsprechenden Hyperebenen. Sei  $R = Y \vee Z$ .

Nun betrachten wir die geordnete Menge  $\text{Pos}(\mathcal{A}; W)$ . Dort ist  $R$  nicht notwendigerweise das Supremum von  $Y$  und  $Z$ , aber in jedem Fall eine minimale obere Schranke von  $Y$  und  $Z$ . Es gilt  $S(Y; W) = \{H_Y\}$  und  $S(Z; W) = \{H_Z\}$ . Sei  $C_R$  die Menge aller unteren Hyperebenen von  $R$  bzgl.  $W$ . Aus Lemma 5.41 folgt  $C_R \subseteq \{H_Y, H_Z\}$ . Wenn  $C_R = \emptyset$ , dann erhalten wir den Widerspruch  $R = W$ . Wenn  $\#C_R = 1$ , dann gibt es ein eindeutiges Element  $R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  mit  $R' < R$ . Dann ist aber  $R'$  eine obere Schranke von  $Y$  und  $Z$ , was der Minimalität von  $R$  widerspricht. Also ist  $C_R = \{H_Y, H_Z\}$ .

Nach Lemma 5.11 gibt es also genau zwei Kammern  $Q_Y$  und  $Q_Z$ , die von  $R$  bedeckt werden, und es gilt  $S(R; W) = S(Q_Y; W) \cup \{H_Y\}$  und  $S(R; W) = S(Q_Z; W) \cup \{H_Z\}$ . Aus Lemma 5.40 folgt, dass  $F = (R \cap Q_Y) \cap (R \cap Q_Z)$  Dimension  $n - 2$  hat. Aus Korollar 5.33 folgt dann, dass  $Q_Y \wedge Q_Z = X$  in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; W)$  existiert. Es sei  $\mathcal{A}' = \{H \in \mathcal{A} \mid H_Y \cap H_Z \subseteq H\}$ . Nach Korollar 5.33 gilt  $S(X; W) = S(R; W) \setminus \mathcal{A}'$  und  $S(R; W) = S(X; W) \cup \mathcal{A}'$ . Insbesondere ist  $\{H_Y, H_Z\} \cap S(X; W) = \emptyset$ , und damit  $X \wedge Y = W = X \wedge Z$ .

Wenn  $X = W$  ist, dann folgt aus Lemma 5.30, dass alle Kammern im Intervall  $[X, R]$  die Facette  $F$  enthalten, also insbesondere auch  $Y, Z$  und  $W$ . Das widerspricht aber der Annahme, dass  $\dim((Y \cap W) \cap (Z \cap W)) < n - 2$ . Also ist  $X \neq W$ .

Nun betrachten wir das Intervall  $[X, R]$  in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ . Dort gilt ebenfalls  $X \wedge Y = W = X \wedge Z$ . Dann folgt aber  $X \wedge (Y \vee Z) = X \wedge R = X \neq W = X \wedge Y$ . Also ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  nicht infimum-semidistributiv, und demnach auch nicht semidistributiv.  $\square$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem folgenden Korollar.

#### KOROLLAR 5.43

Sei  $\mathcal{A}$  linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i)  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ist ein semidistributiver Verband für alle  $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ .
- (ii)  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ist ein Verband für alle  $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ .
- (iii)  $\mathcal{A}$  ist simplizial.



*Beweis.* Die Implikation (i)  $\implies$  (ii) ist trivial. Die Implikation (ii)  $\implies$  (iii) folgt aus Satz 5.23. Die Implikation (iii)  $\implies$  (i) folgt aus Lemma 5.36 und Satz 5.39.  $\square$

**5.6. Überauflösbare Arrangements.** In diesem Abschnitt zeigen wir, dass überauflösbare Arrangements bestimmte Kammern besitzen, sodass die zugehörige Kammerordnung einen Verband bildet. Zunächst benötigen wir aber die folgende Charakterisierung solcher Arrangements.

**SATZ 5.44:** [2, Theorem 4.3]

Sei  $\mathcal{A} \in \text{Hyp}(\mathbb{R}^n)$  linear. Wenn  $\text{rk}(\mathcal{A}) \leq 2$ , dann ist  $\mathcal{A}$  überauflösbar. Wenn  $\text{rk}(\mathcal{A}) = n \geq 3$  ist, dann ist  $\mathcal{A}$  genau dann überauflösbar, wenn es eine Partition  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \uplus \mathcal{A}_1$  gibt, sodass  $\mathcal{A}_0$  überauflösbar mit  $\text{rk}(\mathcal{A}_0) = n - 1$  ist, und es für je zwei verschiedene  $H', H'' \in \mathcal{A}_1$  ein  $H \in \mathcal{A}_0$  gibt, sodass  $H' \cap H'' \subseteq H$  gilt.

*Beweis.* Die erste Behauptung folgt, da jeder geometrische Verband vom Rang 2 überauflösbar ist.

Sei nun  $\mathcal{A}$  überauflösbar, und sei  $\mathbb{R}^n = S_0 \supsetneq S_1 \supsetneq \cdots \supsetneq S_n = \{\vec{0}\}$  die ausgezeichnete modulare Kette von  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ . Definiere  $\mathcal{A}_0 = \{H \in \mathcal{A} \mid S_{n-1} \subseteq H\}$  und  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0$ . Nach Übung Ü8 ist  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_0)$  überauflösbar. Für je zwei Hyperebenen  $H', H'' \in \mathcal{A}_1$  gilt  $S_{n-1} \vee H' = \{\vec{0}\}$  und  $S_{n-1} \vee H'' = \{\vec{0}\}$ . Also ist insbesondere  $S_{n-1} \vee (H' \vee H'') = \{\vec{0}\}$ , und da  $S_{n-1}$  modular ist, folgt dass  $H = S_{n-1} \wedge (H' \vee H'')$  ein Atom von  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  ist. Da  $H \supseteq S_{n-1}$  ist  $H \in \mathcal{A}_0$ , und da  $H \supseteq H' \wedge H''$  folgt  $H \supseteq H' \cap H''$  wie gewünscht.

Sei umgekehrt  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \uplus \mathcal{A}_1$  wie angegeben. Sei  $S_0 \supsetneq S_1 \supsetneq \cdots \supsetneq S_{n-1}$  eine modulare Kette in  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_0)$ . Es genügt zu zeigen, dass  $S_{n-1}$  modular in  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  ist. Die Modularität von  $S_0, S_1, \dots, S_{n-2}$  folgt dann mit Lemma 2.8. Wir wählen also  $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{L}(\mathcal{A}_0)$ . Wir schreiben  $Z = \bigcap_{i=1}^s G_i$ , wobei  $G_i$  Hyperebenen von  $\mathcal{A}$  sind, und die Anzahl der verwendeten Hyperebenen aus  $\mathcal{A}_1$  minimal sein soll. Seien nun  $H', H'' \in \mathcal{A}_1$  zwei verschiedene Hyperebenen. Nach Annahme gibt es  $H \in \mathcal{A}_0$  mit  $H' \cap H'' \subseteq H$ . Nach Lemma 2.7 sind  $H, H', H''$  modular, und es folgt, dass  $\text{rk}(H \cap H') = 2 = \text{rk}(H' \cap H'')$ . Es folgt, dass  $H \cap H' = H' \cap H''$ . Aufgrund der Minimalität der verwendeten Hyperebenen aus  $\mathcal{A}_1$  erhalten wir  $Z = Z_0 \cap H'$ , wobei  $Z_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_0)$ , sowie  $H' \in \mathcal{A}_1$  und  $H' \not\supseteq Z_0$ . Mit der Semimodularität von  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  folgt  $\text{rk}(Z_0) = \text{rk}(Z) - 1$ . Da  $Z_0 \supseteq S_{n-1}$  gilt, folgt weiter  $S_{n-1} \wedge Z = Z_0$ . Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \text{rk}(S_{n-1} \vee Z) + \text{rk}(S_{n-1} \wedge Z) &= n + \text{rk}(Z_0) \\ &= \text{rk}(S_{n-1}) + 1 + \text{rk}(Z) - 1 \\ &= \text{rk}(S_{n-1}) + \text{rk}(Z). \end{aligned}$$

Also ist  $S_{n-1}$  modular.  $\square$

In Satz 2.13 haben wir bestimmte Invarianten eines überauflösbaren Verbandes kennengelernt; die Exponenten. Die **EXPONENTEN** eines überauflösbaren Hyperebenenarrangements  $\mathcal{A}$  sollen dann die Exponenten von  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  sein. Mit Satz 5.44 können wir die Exponenten  $e_1, e_2, \dots, e_n$  von  $\mathcal{A}$  rekursiv bestimmen. Und zwar entsprechen  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  den Exponenten von  $\mathcal{A}_0$  und  $e_n = \#\mathcal{A}_1$ .

Aus Satz 5.44 erhalten wir eine kanonische Abbildung  $\pi : \mathcal{R}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{A}_0)$ , nämlich Inklusion von Kammern. Mehr noch, diese Abbildung ist offenbar surjektiv und ordnungserhaltend als Abbildung  $\pi : \text{Pos}(\mathcal{A}, B) \rightarrow \text{Pos}(\mathcal{A}_0, \pi(B))$ . Für  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  definieren wir

$$\text{Fib}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1}(\pi(R)).$$

**DEFINITION 5.45**

Sei  $\mathcal{A}$  überauflösbar, und sei  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \uplus \mathcal{A}_1$  wie in Satz 5.44. Eine Kammer  $R$  von  $\mathcal{A}$  heißt **KANONISCH** wenn entweder  $\text{rk}(\mathcal{A}) \leq 2$ , oder wenn  $\pi(R)$  kanonisch in  $\mathcal{A}_0$  ist, und  $\text{Fib}(R)$  in  $\text{Pos}(\mathcal{A}, R)$  linear angeordnet ist.

**BEISPIEL 5.46**

Sei  $G$  erneut der Graph aus Beispiel 5.29. Offenbar ist  $G$  trianguliert, also ist das graphische Arrangement  $\mathcal{A}_G$  nach Satz 3.21 überauflösbar. Die Exponenten von  $\mathcal{A}_G$  sind  $e_1 = 1, e_2 = e_3 = 2$ . Es ist

$$\mathcal{A}_G = \{H(\vec{a}_{1,2}), H(\vec{a}_{1,3}), H(\vec{a}_{2,3}), H(\vec{a}_{2,4}), H(\vec{a}_{3,4})\}.$$

Eine Zerlegung von  $\mathcal{A}_G$  aus Satz 5.44 ist  $\mathcal{A}_0 \uplus \mathcal{A}_1$ , wobei

$$\mathcal{A}_0 = \{H(\vec{a}_{1,2}), H(\vec{a}_{1,3}), H(\vec{a}_{2,3})\},$$

$$\mathcal{A}_1 = \{H(\vec{a}_{2,4}), H(\vec{a}_{3,4})\}.$$

Abbildung 27a zeigt die stereographische Projektion von  $\text{ess}(\mathcal{A}_G)$ , wobei die Hyperebenen aus  $\text{ess}(\mathcal{A}_0)$  in schwarz dargestellt sind, und die Hyperebenen aus  $\text{ess}(\mathcal{A}_1)$  in grün. Die Kammerordnung von  $\mathcal{A}_G$  bzgl. der in Abbildung 27a markierten Kammer

$$B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 < x_1 < x_3, x_2 < x_4 < x_3\}$$

ist in Abbildung 27b dargestellt. Die Fasern bzgl.  $\pi$  sind markiert. Da  $\text{Fib}(B)$  keine Kette ist, ist  $B$  nicht kanonisch.

Man kann sich überlegen, dass jede kanonische Kammer simplizial ist. Wir haben die folgende Umkehrung von Satz 5.23

**SATZ 5.47:** [2, Theorem 4.6]

Sei  $\mathcal{A}$  überauflösbar, und sei  $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  kanonisch. Dann ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ein Verband.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \uplus \mathcal{A}_1$  wie in Satz 5.44. Wir verwenden Induktion über  $\text{rk}(\mathcal{A})$ . Falls  $\text{rk}(\mathcal{A}) = 2$  ist nach Definition jede Kammer kanonisch, und jede Kammerordnung ein Verband. Also gilt der Induktionsanfang.

Nach Definition ist  $\pi(B)$  kanonisch in  $\mathcal{A}_0$ , also ist  $\text{Pos}(\mathcal{A}_0; \pi(B))$  nach Induktionsvoraussetzung ein Verband.

Da  $B$  kanonisch ist, bildet  $\text{Fib}(R)$  eine Kette der Länge  $\#\mathcal{A}_1$  in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ . Insbesondere erhalten wir daher eine lineare Ordnung  $\prec_R$  der Hyperebenen von  $\mathcal{A}_1$  bzgl.  $\text{Fib}(R)$ . Wenn nämlich  $\text{Fib}(R) = \{R_1, R_2, \dots, R_s\}$  ist, wobei  $R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_s$  seien, dann gilt  $H_i = S(R_{i+1}; B) \setminus S(R_i; B)$  für  $i \in [s-1]$ , und  $\mathcal{A}_1 = \{H_1, H_2, \dots, H_{s-1}\}$ . Wir setzen dann  $H_i \prec_R H_j$  wenn  $i < j$ .

Seien  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  und sei  $T \in \pi^{-1}(\pi(R_1) \vee \pi(R_2))$  minimal in  $\text{Fib}(\pi(R_1) \vee \pi(R_2))$  mit der Eigenschaft, dass  $R_1 \leq T$  und  $R_2 \leq T$ . (So ein Element existiert, da das größte Element von  $\text{Fib}(\pi(R_1) \vee \pi(R_2))$  eine obere Schranke von  $R_1$  und  $R_2$  ist.) Also ist  $T$  eine minimale obere Schranke von  $R_1$  und  $R_2$ .

Sei  $T'$  eine andere minimale obere Schranke von  $R_1$  und  $R_2$ . Es folgt sofort, dass  $T \not\leq T'$ , also gibt es eine Hyperebene  $H' \in \mathcal{A}_1$  mit  $H' \in S(T; B) \setminus S(T'; B)$ . Weiter folgt  $\pi(T) \neq \pi(T')$ , und da  $\pi(T) = \pi(R_1) \vee \pi(R_2)$  ist, und  $\pi$  ordnungserhaltend ist, folgt  $\pi(T) < \pi(T')$ .

Da  $T \not\leq T'$  ist, kann demnach  $T$  auch nicht minimal in  $\text{Fib}(T)$  sein. Sei also  $H \in \mathcal{A}_1$  die Hyperebene, die  $T$  von ihrem unteren Nachbarn in  $\text{Fib}(T)$  trennt. Nach Konstruktion ist  $H' \preceq_T H$ .

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit folgt aus der Minimalität von  $T$ , dass  $H \in S(R_1; B)$  liegt. Weiterhin ist  $H' \notin S(T'; B)$  und damit auch  $H' \notin S(R_1; B)$ ; es folgt, dass  $H \prec_{R_1} H'$ . Insbesondere ist  $H \neq H'$ .

Da  $H \in S(R_1; B)$  liegt, folgt zwangsläufig  $H \in S(T'; B)$ , aber da  $H' \notin S(T'; B)$ , folgt  $H \prec_{T'} H'$ .

Sei nun  $H_0$  die, nach Satz 5.44, eindeutige Hyperebene in  $\mathcal{A}_0$ , die  $H \cap H'$  enthält. Wenn  $H_0 \in S(T; B)$  ist, dann folgt  $H_0 \notin S(R_1; B)$  und  $H_0 \notin S(T'; B)$ . Wenn  $H_0 \notin S(T; B)$  ist, dann folgt  $H_0 \in S(R_1; B)$  und  $H_0 \in S(T; B)$ . Das widerspricht aber der Annahme  $\pi(R_1) \leq \pi(T) < \pi(T')$ . Also ist  $T$  die einzige minimale obere Schranke von  $R_1$  und  $R_2$ , sodass gilt  $T = R_1 \vee R_2$ .  $\square$

**5.7. Die Rangerzeugende Funktion.** Wir haben in Korollar 5.12 gesehen, dass  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  gradiert ist. Wir definieren

$$w_k \stackrel{\text{def}}{=} \#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \mid \#S(R; B) = k\}.$$

Dann beschreibt  $w_k$  die Anzahl der Elemente vom Rang  $k$  in  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$ .

#### DEFINITION 5.48

Wir definieren die **RANGERZEUGENDE FUNKTION** von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  durch

$$\rho_{\mathcal{A}; B}(q) = \sum_{k \geq 0} w_k q^k.$$

Es gilt offenbar  $\rho_{\mathcal{A}; B}(1) = \#\mathcal{R}(\mathcal{A})$ .

#### BEISPIEL 5.49

Sei  $\mathcal{C}(n)$  das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.5. In Beispiel 5.13 haben wir gesehen, dass  $\text{Pos}(\mathcal{C}(n); B)$  für jede Wahl einer Basiskammer isomorph zum Booleschen Verband der Ordnung  $n$  ist. Also ist

$$\rho_{\mathcal{C}(n); B}(q) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^k = (q+1)^n.$$

#### BEISPIEL 5.50

Sei  $\mathcal{B}(n)$  das Koordinatenarrangement aus Beispiel 1.6, und sei  $B$  die Kammer, deren Vektoren die Bedingung  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  erfüllen. Nach Beispiel 5.14 entspricht  $w_k$  der Anzahl der Permutationen mit genau  $k$  Inversionen. Also ist

$$\rho_{\mathcal{B}(n); B}(q) = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} w_k q^k = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + q + \dots + q^i).$$

Die letzte Gleichheit ist möglicherweise etwas überraschend. Wir werden später eine schöne Erklärung dafür finden.

## BEISPIEL 5.51

Sei  $\mathcal{A}$  das dreidimensionale Arrangement aus Beispiel 5.9, und seien  $B$  und  $B'$  die beiden Basiskammern. Wir lesen direkt aus Abbildung 24 ab, dass gilt:

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{A};B}(q) &= 1 + 4q + 4q^2 + 4q^3 + q^4, \\ \rho_{\mathcal{A};B'}(q) &= 1 + 3q + 6q^2 + 3q^3 + q^4.\end{aligned}$$

Für überauflösbare Arrangements lässt sich die rangerzeugende Funktion schön faktorisieren.

## SATZ 5.52: [2, Theorem 4.4]

Sei  $\mathcal{A}$  überauflösbar mit Exponenten  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , und sei  $B \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  kanonisch. Die rangerzeugende Funktion von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  ist

$$\rho_{\mathcal{A};B}(q) = \prod_{i=1}^n (1 + q + q^2 + \dots + q^{e_i}).$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \uplus \mathcal{A}_1$  wie in Satz 5.44, und sei  $\pi : \mathcal{R}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{A}_0)$  die kanonische Projektion. Wir bemerken zuerst, dass für jede Kammer  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  die Menge  $\text{Fib}(R)$  einen Pfad im Adjazenzgraph von  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  bildet. Wenn  $B$  also kanonisch ist, ist  $\text{Fib}(R)$  eine Kette der Länge  $e_n$  für alle  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ .

Sei  $\text{rk}$  die Rangfunktion von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  und  $\text{rk}_0$  die Rangfunktion von  $\text{Pos}(\mathcal{A}_0; \pi(B))$ . Es bezeichne  $h$  die Rangfunktion der Kette  $\text{Fib}(R)$ . Für  $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  gilt also  $\text{rk}(R) = \text{rk}_0(\pi(R)) + h(R)$ . Mittels vollständiger Induktion folgt

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{A};B}(q) &= \rho_{\mathcal{A}_0; \pi(B)}(q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{e_n}) \\ &= \prod_{i=1}^n (1 + q + q^2 + \dots + q^{e_i}).\end{aligned}$$

□

## BEISPIEL 5.53

Betrachten wir erneut das graphische Arrangement  $\mathcal{A}_G$  aus Beispiel 5.29. Es gibt, bis auf Isomorphie, drei Kammerordnungen von  $\mathcal{A}_G$ . Eine davon ist in Abbildung 27b abgebildet, die übrigen beiden in Abbildung 28. Die jeweiligen Basiskammern sind

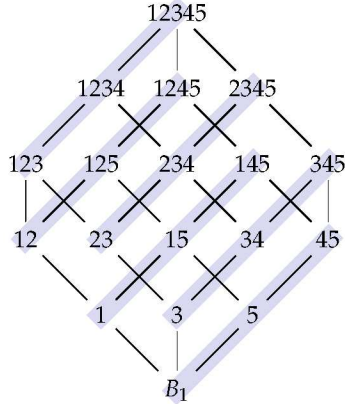
$$\begin{aligned}B_1 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 < x_2 < x_3 < x_4\}, \\ B_2 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 < x_2 < x_4 < x_3\}.\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass beide Kammern simplizial sind, aber nur  $B_1$  ist kanonisch. Dennoch gilt

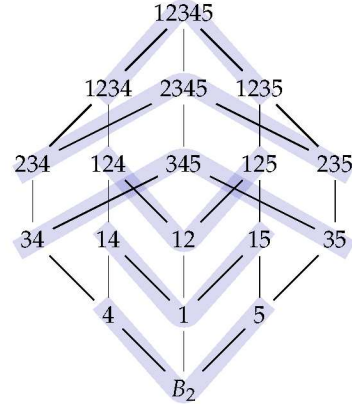
$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{A}_G; B_1}(q) &= (1 + q)(1 + q + q^2)^2 = 1 + 3q + 5q^2 + 5q^3 + 3q^4 + q^5, \\ \rho_{\mathcal{A}_G; B_2}(q) &= (1 + q)(1 + q + q^2)^2 = 1 + 3q + 5q^2 + 5q^3 + 3q^4 + q^5.\end{aligned}$$

Wenn wir außerdem

$$B_3 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 < x_1 < x_3 < x_4\}$$



(A) Die Kammerordnung des Arrangements aus Abbildung 27a bzgl. der Kammer  $B_1$  aus Beispiel 5.46.



(B) Die Kammerordnung des Arrangements aus Abbildung 27a bzgl. der Kammer  $B_2$  aus Beispiel 5.46.

ABBILDUNG 28. Weitere Kammerordnungen des Arrangements aus Abbildung 27a.

wählen, stellen wir schnell fest, dass  $B_3$  kanonisch ist und dass  $\text{Pos}(\mathcal{A}_G; B_3) \cong \text{Pos}(\mathcal{A}_G; B_2)$  gilt.

BEISPIEL 5.54: [2, Abbildung 4.1]

Sei  $\mathcal{A}$  das Hyperebenenarrangement gegeben durch

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}, & H_2 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}, \\ H_3 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 = 0\}, & H_4 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 + 3x_2 = 0\}, \\ H_5 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0\}, & H_6 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0\}, \\ H_7 &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Abbildung 29 zeigt den Durchschnitt von  $\mathcal{A}$  mit der affinen Hyperebene  $H_1(\vec{e}_3)$ .

Die Zerlegung

$$\mathcal{A} = \{H_1, H_2, H_3, H_4\} \uplus \{H_5, H_6, H_7\}$$

zeigt nach Satz 5.44, dass  $\mathcal{A}$  überauflösbar ist, denn es gilt:

$$H_5 \cap H_6 \subseteq H_2, \quad H_5 \cap H_7 \subseteq H_4, \quad H_6 \cap H_7 \subseteq H_1.$$

Die Exponenten von  $\mathcal{A}$  sind  $e_1 = 1$  und  $e_2 = e_3 = 3$ , denn wir können aus Abbildung 29 ablesen, dass

$$\chi_{\mathcal{A}}(q) = (q-1)(q-3)^2.$$

Die rangerzeugende Funktion von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; B)$  bzgl. einer kanonischen Kammer  $B$  ist also nach Satz 5.52 gerade

$$\rho_{\mathcal{A}; B}(q) = (1+q)(1+q+q^2+q^3)^2$$

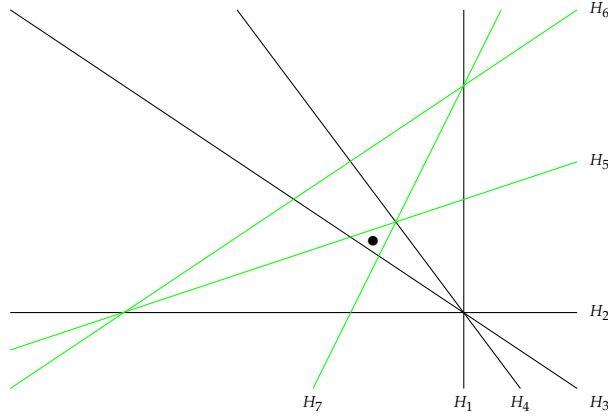


ABBILDUNG 29. Der Durchschnitt des überauflösbaren Arrangements aus Beispiel 5.54 mit der affinen Hyperebene  $H_1(\vec{e}_3)$ .

$$= 1 + 3q + 5q^2 + 7q^3 + 7q^4 + 5q^5 + 3q^6 + q^7.$$

Sei nun

$$R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 > 0, 2x_1 - x_2 + 2x_3 < 0, x_1 - 3x_2 + 3x_3 > 0\}$$

eine simpliziale Kammer von  $\mathcal{A}$ . In Abbildung 29 sehen wir direkt, dass  $R$  nicht kanonisch ist. Die rangerzeugende Funktion von  $\text{Pos}(\mathcal{A}; R)$  ist

$$\rho_{\mathcal{A};B}(q) = 1 + 3q + 6q^2 + 6q^3 + 6q^4 + 6q^5 + 3q^6 + q^7,$$

faktoriert also nicht so schön.

Aus Satz 5.52 folgt direkt eine Formel für die Anzahl der Kammern eines überauflösbaren Arrangements. Diese können wir auch aus Satz 2.13 in Verbindung mit Satz 1.51 herleiten.

#### KOROLLAR 5.55

Sei  $\mathcal{A}$  überauflösbar mit Exponenten  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Dann ist

$$\#\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \prod_{i=1}^n (e_i + 1).$$