**КУРСОВЫЕ РАБОТЫ ГРУППА А-05-19**

**Задания к курсовым работам по численным методам.**

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЯМ:

1. Требуется написать программу, реализующую алгоритм метода, указанного в задаче.
2. Отлаживать работу программы следует на тестовых примерах. Тестовые примеры (не менее 3-х) построить самостоятельно.
3. В задачах, в которых проводятся вычисления с векторами и матрицами, требуется обеспечить компактное хранение элементов матриц и векторов в памяти ЭВМ.

**Требования к оформлению отчета по курсовой работе.**

Отчет оформляется на листах формата A4, первый лист – титульный, на нем указываются фамилия и имя студента, номер группы, название курсовой работы.

Отчет должен содержать следующие материалы:  
- постановку задачи,  
- необходимый теоретический материал,

- построение тестового примера  
- результаты расчетов по тестовым примерам,  
- результаты вычислительного эксперимента,  
- анализ полученных результатов,  
- графический материал (если необходимо),  
- код с комментариями.

**Раздел 1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.**

**Задача 1.1** Найти решение интегрального уравнения:  методом квадратур для каждого значения  из указанного отрезка . При каждом значении  построить график найденного решения и вычислить площадь полученной криволинейной трапеции. Определить, при каком значении , площадь трапеции максимальна.

Порядок решения задачи.

1. Составить систему линейных уравнений на основе квадратурной формулы индивидуального варианта.

2. Составить процедуру решения СЛАУ указанным в индивидуальном варианте методом.

3. Составить программу интерполирования функции правой части уравнения указанным

в индивидуальном варианте методом.

4. Решить исходную задачу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Ядро | Отрезки | Метод интерполяции  функции f(x) | Квадратурная формула | Решение СЛАУ |
| 1 |  | [0,1]  [0.5,1] | Кусочно-квадратичная интерполяция | Метод центральных  прямоугольников | Метод минимальных  невязок |

Функция f(x)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 |
| 3 | 2.9 | 2.803 | 2.567 | 2.408 | 2.115 | 1.984 | 1.635 | 1.412 | 1.355 | 1.25 |

Литература. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы М.:МЭИ, 2008. гл.16.

**Задача 1.2** Найти решение интегрального уравнения: 

методом квадратур для каждого значения  из указанного отрезка . При каждом значении  построить график найденного решения и вычислить площадь полученной криволинейной трапеции. Определить, при каком значении , площадь трапеции максимальна.

Порядок решения задачи.

1. Составить систему линейных уравнений на основе квадратурной формулы индивидуального варианта.

2. Составить процедуру решения СЛАУ указанным в индивидуальном варианте методом.

3. Составить программу интерполирования функции правой части уравнения указанным

в индивидуальном варианте методом.

4. Решить исходную задачу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Ядро | Отрезки | Метод интерполяции  функции f(x) | Квадратурная формула | Решение СЛАУ |
| 1.2 |  | [1,2]  [0.2,0.7] | Многочлен Лагранжа | Метод трапеций | Метод сопряженных градиентов |

Функция f(x)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2 |
| 7.679 | 7.329 | 7.012 | 6.725 | 6.466 | 6.231 | 6.012 | 5.827 | 5.653 | 5.496 | 5.353 |

Литература. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы М.:МЭИ, 2008. гл.16.

**Задача 1.3** Найти решение интегрального уравнения: 

методом квадратур для каждого значения  из указанного отрезка . При каждом значении  построить график найденного решения и вычислить площадь полученной криволинейной трапеции. Определить, при каком значении , площадь трапеции максимальна.

Порядок решения задачи.

1. Составить систему линейных уравнений на основе квадратурной формулы индивидуального варианта.

2. Составить процедуру решения СЛАУ указанным в индивидуальном варианте методом.

3. Составить программу интерполирования функции правой части уравнения указанным

в индивидуальном варианте методом.

4. Решить исходную задачу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 |  | [0,2]  [0.5,1] | Линейный сплайн | Метод Гаусса | Метод Гаусса |

Функция f(x)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2 |
| 4.04 | 4.16 | 4.36 | 4.64 | 5 | 5.44 | 5.96 | 6.56 | 7.24 | 7.48 | 8 |

Литература. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы М.:МЭИ, 2008. гл.16.

**Задача 1.4** Найти решение интегрального уравнения: 

методом квадратур для каждого значения  из указанного отрезка . При каждом значении  построить график найденного решения и вычислить площадь полученной криволинейной трапеции. Определить, при каком значении , площадь трапеции максимальна.

Порядок решения задачи.

1. Составить систему линейных уравнений на основе квадратурной формулы индивидуального варианта.

2. Составить процедуру решения СЛАУ указанным в индивидуальном варианте методом.

3. Составить программу интерполирования функции правой части уравнения указанным

в индивидуальном варианте методом.

4. Решить исходную задачу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 |  | [0,1]  [0.5,1] | Многочлен Ньютона с разделенными  разностями | Метод Симпсона | Метод Холецкого |

Функция f(x)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 |
| 1.5 | 1.495 | 1.48 | 1.36 | 1.42 | 1.35 | 1.24 | 1.13 | 0.96 | 0.88 | 0.63 |

Литература. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы М.:МЭИ, 2008. гл.16.

**Задача 1.5** Найти решение интегрального уравнения: 

методом квадратур для каждого значения  из указанного отрезка . При каждом значении  построить график найденного решения и вычислить площадь полученной криволинейной трапеции. Определить, при каком значении , площадь трапеции максимальна.

Порядок решения задачи.

1. Составить систему линейных уравнений на основе квадратурной формулы индивидуального варианта.

2. Составить процедуру решения СЛАУ указанным в индивидуальном варианте методом.

3. Составить программу интерполирования функции правой части уравнения указанным

в индивидуальном варианте методом.

4. Решить исходную задачу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 |  | [0,3]  [1,2] | Метод наименьших квадратов в классе полиномов второй степени | Метод левых прямоугольников | Метод минимальных поправок |

Функция f(x)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0.3 | 0.6 | 0.9 | 1.2 | 1.5 | 1.8 | 2.1 | 2.4 | 2.7 | 3 |
| 8 | 7.482 | 7.098 | 6.813 | 6.602 | 6.446 | 6.331 | 6.245 | 6.138 | 6.134 | 5.82 |

Литература. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы М.:МЭИ, 2008. гл.16.

**Раздел 2. Вычисление определенных интегралов.**

В **задачах 2.1- 2.5** требуется написать программу приближенного вычисления интеграла методом, указанным в условии задачи, с точностью .  
**Входные и выходные параметры** подпрограммы-функции, реализующей непосредственно алгоритм метода:  
- входные параметры: функция *f*, начальный шаг интегрирования, точность .  
- выходные параметры: приближенное значение интеграла и шаг интегрирования, при котором достигнута заданная точность.

**2.1.**Метод: адаптивная процедура численного интегрирования, основанная на формуле трапеций

[1], §13.6.

2.2.Метод: адаптивная процедура численного интегрирования функции , основанная на формуле центральных прямоугольников, [1], §13.6.

**2.3.** Метод: адаптивная процедура численного интегрирования, основанная на формуле Симпсона.

[1], §13.6.

**2.4.** Вычисление интегралов в областях сложной формы.

**2.5.** Вычисление интегралов методом квадратур Гаусса для кратного интеграла.

В **задачах 2.6-2.8** требуется написать программу приближенного вычисления интеграла  методом, указанным в условии задачи, с точностью .

**2.6**. Метод: сплайн-квадратура на основе квадратичного сплайна.

2.7**.** Метод**:** сплайн-квадратура на основе кубического сплайна.

**2.8.** Метод: адаптивная процедура численного интегрирования быстро осциллирующей функции, [1], §13.5.

**РАЗДЕЛ 3. Интерполяция функций двух переменных.**

В **задачах 3.1-5 3.5** требуется написать программу приближения таблично заданной функции *f* методом, указанным в условии задачи.   
**Входные и выходные параметры** подпрограммы-функции, реализующей непосредственно алгоритм метода:  
- входные параметры: таблично заданная функция *f*.  
- выходные параметры: таблица значений приближающей функции и графики

В результате работы программы на экран должны выводиться график приближающей функции и точечный график исходной функции.

**3.1.**Функция *f(x,y)* задана таблицей значений на прямоугольнике. Метод интерполирования: билинейный многочлен. [1], §11.16.

**3.2.** Функция *f(x,y)* задана таблицей значений в области сложной формы. Метод нтерполирования: кусочно-линейная интерполяция. [1], §11.16.

**3.3.** Функция *f(x,y)* задана таблицей значений в круге радиуса R . Метод интерполирования: билинейный многочлен. [1], §11.16.

**3.4.** Функция *f(x,y)* задана таблицей значений в кольце. Метод интерполирования: билинейный многочлен.

[1], §11.16.

**3.5.** Функция *f(x)* таблицей своих значений. Построить график функции и график производной функции. Метод интерполирования – интерполяционный сплайн.

**РАЗДЕЛ 4. Численное решение краевых задач.**

В **задачах 4.1. - 4.4 .**требуется написать программу нахождения решения указанной краевой задачи для ОДУ (или системы ОДУ) методом, указанным в условии задачи, с точностью .

**Входные и выходные параметры** это подпрограммы-функции, реализующей непосредственно алгоритм метода:  
- входные параметры: функция *f, q, k*, краевые условия, отрезок [*a, b*], точность .  
- выходные параметры: таблица значений функции решения, значение шага интегрирования, при котором была достигнута заданная точность.

В результате работы программы на экран должен выводится: график приближенного решения. Значения функции решения должны выводится в файл данных и на экран.

**4.1. Краевая задача**: *a<x<b*   
**Метод**: метод Ритца на основе тригонометрической системы функций.

[1], §15.4.

**4.2.Краевая задача**: *a<x<b*.   
**Метод**: метод конечных элементов на основе кусочно-линейных базисных функций.

[1], §15.4.

**4.3. Краевая задача**: *a<x<b*.

Метод : Специальная проекционно- разностная схема.

[1], §15.4.

**4.4. Нелинейная краевая задача**. 

Метод : Ньютона для решения нелинейных систем уравнений.

[1], §7.3

**РАЗДЕЛ 5. Численное решение систем ОДУ**

5.1. **Динамика популяций – 1.**

Динамика численности двух видов, потребляющих (конкурирующих за) один и тот же ресурс, описывается следующей системой дифференциальных уравнений.



Здесь x, y – численность популяций,  – коэффициент прироста i-го вида,  – коэффициент, описывающий внутривидовое влияние,  – коэффициент, описывающий влияние со стороны другого вида. Все коэффициенты положительны.

1. Вывести расчетные формулы метода Рунге-Кутты 3-го порядка точности с параметрами , , .
2. С помощью построенного метода найти численное решение задачи Коши при различных начальных данных и различных значениях коэффициентов , , .
3. Вывести графики зависимости решения x(t) и y(t), а также фазовый портрет (в переменных x,y).
4. Подготовить несколько тестовых примеров. Для облегчения построения тестового примера в каждое из уравнений следует ввести правую часть. Изобразить на одном чертеже графики точного и приближенного решений.

5.2. **Динамика популяций – 2.**

Динамика численности двух видов, один из которых является пищевым ресурсом другого (хищников и жертв), описывается следующей системой дифференциальных уравнений (модель Вольтерра – Лотки).



Здесь x и y – численность жертв и хищников соответственно, a и c – коэффициенты прироста жертв и убыли хищников при отсутствии межвидовых контактов (при изолированном проживании), b и d – коэффициенты убыли жертв и прироста хищников, обусловленные встречами хищников с жертвами. Все коэффициенты положительны.

1. Вывести расчетные формулы явного метода Адамса 3-го порядка точности.
2. С помощью построенного метода найти численное решение задачи Коши при различных начальных данных и различных значениях коэффициентов a, b, c, d.
3. Вывести графики зависимости решения x(t) и y(t), а также фазовый портрет (в переменных x,y).
4. Подготовить несколько тестовых примеров. Для облегчения построения тестового примера в каждое из уравнений следует ввести правую часть. Изобразить на одном чертеже графики точного и приближенного решений.
5. Подобрать значения коэффициентов, при которых происходит циклическое изменение численности популяций. Приблизительно определить длительность такого цикла (усреднить по достаточно большому количеству циклов).

**5.3. Изучить поведение решений системы дифференциальных уравнений**



1. Вывести расчетные формулы метода Рунге-Кутты 3-го порядка точности с параметрами , , .
2. С помощью построенного метода найти численное решение задачи Коши при различных начальных данных и различных значениях коэффициентов , r, b.
3. Вывести графики зависимости решения x(t), y(t), z(t) а также фазовый портрет (три проекции: в переменных (x, y), (y, z) и (x, z)).
4. Подготовить несколько тестовых примеров. Для облегчения построения тестового примера в каждое из уравнений следует ввести правую часть. Изобразить на одном чертеже графики точного и приближенного решений.
5. Вывести на одном графике (произвести одновременный расчет) двух решений со слегка различающимися начальными данными при значениях коэффициентов , , .
6. Повторить расчет с другими значениями параметров.

**5.4. Изучить поведение решений системы дифференциальных уравнений**



1. Вывести расчетные формулы метода явного метода Адамса 4-го порядка точности.
2. С помощью построенного метода найти численное решение задачи Коши при различных начальных данных и различных значениях коэффициента .
3. Вывести графики зависимости решения x(t), y(t), z(t) а также фазовый портрет (три проекции: в переменных (x, y), (y, z) и (x, z)).
4. Подготовить несколько тестовых примеров. Для облегчения построения тестового примера в каждое из уравнений следует ввести правую часть. Изобразить на одном чертеже графики точного и приближенного решений.
5. Вывести на одном графике (произвести одновременный расчет) двух решений со слегка различающимися начальными данными.

**5.5 Функция ошибок задается выражением**

 (1)

которое не выражается в элементарных функциях.

Для вычисления ее значения в точке x можно также использовать эквивалентную (1) задачу Коши

 (2)

1. Доказать эквивалентность задач (1) и (2).
2. Протабулировать функцию erf(x) на отрезке [0, 2] с шагом h = 0.1, вычисляя интеграл (1) методом Симпсона с некоторой точностью .
3. Протабулировать функцию erf(x) на отрезке [0, 2] с шагом h = 0.1, решая задачу Коши (2) методом Рунге – Кутты 4-го порядка с той же точностью .
4. Сравнить время выполнения пп. 2 и 3.
5. Построить график зависимости времени табулирования от точности  в том и другом случае.
6. При выводе таблицы значений функции ошибок округлять полученные значения в соответствии с точностью.

**РАЗДЕЛ 6. Минимизация функций.**

**6.1.** Функция x(t) задана неявно уравнением . Построить график зависимости функции y(x) при , используя метод Ньютона, и найти минимум м максимум с точностью

методом Фибоначчи.

**6.2.** Функция f(x) задана интегралом с переменным верхним пределом .

Построить график функции на отрезке , найти локальные минимумы и максимумы функции на отрезке методом деления отрезка пополам с точностью 0.001. Интеграл вычислять по методу Симпсона с точностью 0.0001.

**6.3** Функция f(x) задана интегралом . Построить график функции, найти минимумы и максимумы функции на отрезке методом Ньютона. Интеграл вычислять по квадратурной формуле трапеций с точностью 0.001 , используя правило Рунге

**6.4**. Функция представлена интегралом с параметром. Построить график функции на отрезке [-4,4] . Интеграл вычислять по кубатурной формуле Симпсона с точностью

. Найти минимум и максимум функции.