МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

В ТВ (в прошлом семестре) мы определяли вероятности появления различных случайных событий; закон распределения случайных факторов считали известным. В МС решается обратная задача: по наблюдаемым случайным событиям нужно сделать какие либо выводы о неизвестном законе распределения действующих случайных факторов.

Рассуждения в МС основываются на знании теории вероятностей, без уверенного знания основ которой невозможно освоить методы МС. Поэтому необходимо иметь под рукой лекции по ТВ, записи практических занятий и учебные пособия по ТВ.

Литература по МС, которая потребуется:

1. **Ивченко, Медведев** . Математическая статистика (есть и интернете, любое издание годится)
2. **Горицкий Ю.А.** Основы математической статистики. – М.: МЭИ, 2018, 84с. (есть в библиотеке МЭИ, к киоске МЭИ тоже было; лекции по этому пособию)
3. **Сборник задач по математике. Теория вероятностей и математическая статистика.** Под редакцией А.В. Ефимова. М.: Физматлит, 1990. (уже знакомый задачник, для решения домашних задач, есть в интернете, в библиотеке МЭИ-тоже)
4. **Ю.А. Горицкий, Е.Е. Перцов.** Практикум по статистике с пакетами STATGRAPHICS, STATISTICA, SPSS. М. МЭИ, 1997. 85 с. (для лаб работ, есть в библиотеке МЭИ, кроме того, есть в интернете на Exponenta.ru)
5. **Ю.А. Горицкий.** Практикум по статистике с пакетом STATISTICA. М. МЭИ, 2000. 79 с. (аналогично п.4)

Все занятия будем проводить в системе Webex.

Содержание занятий

1. **Лекции** (1 раз в неделю)
2. **Практические занятия** (по первым неделям**)**
3. **Лаб работы (7 ЛР) (**по вторым неделям, с пакетом STATISTICA, версия 5.5а). Просьба ко всем поставить этот пакет, он бесплатный.

   По каждой работе будет отмечаться: «выполнено», «отчет сделан», «защита по теме ЛР»

4. **Контрольная работа** «Оценки и доверительные интервалы» (9 неделя)
5. **Зачет**
6. **Экзамен за 2 семестра**

Лекция 1

ВВЕДЕНИЕ

В МС предполагается:

имеются наблюдения $x \equiv (x_1, x_2 \ldots x_n)$ случайного характера, (не обязательно числовые, могут быть, например, *синий, зеленый, ….)*

закон распределения частично или полностью неизвестен.

По наблюдениям нужно сделать те или иные выводы относительно неизвестного распределения.

Примеры:

1. Совокупность изделий, доля дефектных неизвестна, наудачу выбрали n штук и проверили, получили результаты: хороший (0), дефектный (1), и т. д.; неизвестная доля дефектных определяет закон распределения наших наблюдений (вероятность 0 и 1), эту долю и нужно определить.

2. Радиолокатор n раз со случайными ошибками измеряет расстояние до движущегося объекта, скорость неизвестна; по наблюдениям нужно определить скорость. Скорость определяет закон распределения измерений.

3. *Новое лекарство, есть две группы испытуемых: одной дали новое, другой-старое, посмотрели результаты. Вопрос: новое лучше старого или нет? Результаты случайны, закон распределения (выздоровление или нет, определяется неизвестной вероятностью успеха)*

…и.т.д.………

Задачи МС можно условно разделить на три типа:

— **оценить неизвестные параметры** (теория точечного оценивания);

— **указать интервалы**, в которых находятся неизвестные параметры (теория интервального оценивания);

— **ответить на вопрос**: можно ли считать, что неизвестное распределение **обладает тем или иным свойством** (теория проверки статистических гипотез) примеры вопросов:

- находится ли неизвестный параметр в заданном диапазоне, или нет?

- принадлежит ли неизвестный закон распределения заданному классу или нет?

- зависимы ли два признака у наблюдаемых объектов или нет? (например,форма сбственности влияет на рентабельность производства или нет? есть n наблюдений)

При рассмотрении любой статистической задачи имеющиеся наблюдения $x \equiv (x_1, x_2 \ldots x_n)$ являются конкретными значениями

многомерной случайной величины $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$. Мы должны отвлечься от конкретных значений $x \equiv (x_1, x_2 \ldots x_n)$, нужно считать, что имеем дело со случайной вечичиной $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$ (т.е. с совокупностью возможных значений),
и потому способ обработки, который мы конструируем, должен быть «хорошим» (в некотором смысле) для всей совокупности возможных значений, а не только для имеющихся наблюдений.

ГЛАВА 1. ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

§ 1. Основные понятия и характеристики качества оценок

В большинстве задач математической статистики предполагается, что наблюдения $(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$ являются ***независимыми, одинаково распределенными*** случайными величинами с функцией распределения $F(x)$, которая является частично или полностью неизвестной. В этом случае они называются *ВЫБОРКОЙ объема n из совокупности, распределенной по F(x).* Выборка — объект случайный.

Закон распределения выборки легко определяется. Например, для непрерывного случая, если $p(x) = dF(x)/dx$ — плотность распределения одной компоненты, то плотность распределения выборки есть

$$p_\xi(x_1, x_2 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i)\,.$$

Любая функция наблюдений $\varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$ (произвольной размерности) *называется* ***СТАТИСТИКОЙ***. Примеры статистик:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \max_i \xi_i, \quad \min_i \xi_i, \quad \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i,\ \max_i \xi_i,\ \min_i \xi_i\Big)\,.$$

Пусть $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ — выборка из совокупности, распределённой по закону с функцией распределения $F(x;\, a)$, зависящей от параметра a. Параметр a неизвестен, его необходимо оценить по выборке $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$.

Функция наблюдений $\hat{a} = \varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$, с помощью которой оценивается неизвестный параметр, называется ***ОЦЕНКОЙ*** или ***ОЦЕНИВАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ***. Заметим, что результат применения оценки $\hat{a} = \varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$ является случайной величиной.

Укажем те качества, которыми характеризуется оценка (оценивающая функция).

1. Несмещённость.

Оценка $\hat{a} = \varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$ называется ***несмещённой***, если *при любом значении параметра a*

$$M\varphi = a,$$

где M — математическое ожидание. В противном случае оценка называется смещенной, и

$$M\varphi - a \equiv b(a)$$

называется *смещением*.

Выпишем условие несмещённости в интегральном виде для случая непрерывного распределения:

$$\mathbf{M}\varphi(\xi_1,...,\xi_n) = \int\limits_{R^n} ... \int \varphi(x_1,...,x_n)\, p_\xi(x_1,...,x_n;a)\,dx_1...dx_n = a\,,$$

где $p_\xi(x_1, x_2..x_n \mid a) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i \mid a)$ — плотность распределения выборки.

Обозначим ошибку оценки

$$\delta_n = \varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) - a.$$

В терминах ошибки несмещённость означает, что среднее значение ошибки равно нулю, т.е. при любом значении параметра *a*

$$M\delta_n = M\varphi - a = 0.$$

2. Состоятельность.

Оценка $\hat{a} = \varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$ называется ***состоятельной***, если

$$\varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) \to a \text{ (по вероятности) при } n \to \infty$$

при любом значении *a.*

В терминах ошибки δ_n состоятельность означает, что δ_n сходится к нулю по вероятности при любом значении *a*:

$$\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0,$$

т.е. для любого сколь угодно малого

$$\varepsilon > 0 \quad P\{|\delta_n| < \varepsilon\} \to 1.$$

Проверять состоятельность можно, используя *признак состоятельности*. Если

$$M\delta_n^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то оценка состоятельна.

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{|\delta_n| < \varepsilon\} = 1 - P\{|\delta_n| \ge \varepsilon\} \ge 1 - \frac{M\delta_n^2}{\varepsilon^2} \to 1.$$

Здесь использовано обобщенное неравенство Чебышева:

$$\forall\, t > 0 \quad P\{|\xi| \ge t\} \le \frac{M|\xi|^p}{t^p}$$ при любом $p>0$; здесь $p = 2$.

3. Оптимальность.

Критерием качества оценки φ примем средний квадрат ошибки $R_\varphi(a) = M[\varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) - a]^2$. Если оценка несмещённая, то критерий качества $R_\varphi(a)$ — это дисперсия оценки.

Оценка φ^* называется ***оптимальной***, если среди всех оценок φ она даёт минимальное среднее значение квадрата ошибки:

$$R_{\varphi^*}(a) = \min_{\varphi} M[\varphi - a]^2\,.$$

Если оценка несмещённая, то критерием качества является дисперсия.

Поскольку критерием качества оценки является не скаляр, а функция параметра, ясно, что оптимальной оценки может не существовать.

Используется и более общий подход к понятию оптимальности — критерием качества рассматривается

$$R_\varphi(a) = \mathrm{M}L(\varphi, a),$$

где $L(\varphi, a)$ — потери (loss), которые несет статистик, если значение оценки — φ, а истинное значение параметра — *a*.

Например, $L(\varphi, a)$= 1, если $|\varphi - a| > \Delta$, и 0 иначе; нетрудно увидеть, что в этом случае оптимальной оценкой будет та, для которой вероятность события $|\varphi - a| > \Delta$ минимальна.

§ 2. Оценивание вероятностей и моментов

2.1. Оценка неизвестной вероятности случайного события

Задачи математической статистики связаны с неизвестностью распределения наблюдений. Но распределение — это совокупность вероятностей, поэтому начнем с оценки неизвестной вероятности.

Пусть А — случайное событие, *p* = P(A) — его неизвестная вероятность. Пусть проведено *n* испытаний этого события, ν — количество появления события А, т.е. количество успехов. Рассмотрим в качестве оценки для *p* статистику

$$\hat{p} = \frac{\nu}{n}, \tag{1}$$

где $\hat{p}$ — относительная частота появления события А. Случайная величина ν распределена по биномиальному закону *Bi*(*n, p*), и потому

$$\mathrm{M}\hat{p} = \mathrm{M}\frac{\nu}{n} = \frac{\mathrm{M}\nu}{n} = \frac{np}{n} = p.$$

Это означает, что оценка $\hat{p} = \frac{\nu}{n}$ несмещённая. Проверим состоятельность оценки:

$$\mathrm{M}[\hat{p} - p]^2 = \mathrm{M}\left[\frac{\nu}{n} - p\right]^2 = D\frac{\nu}{n} = \frac{D\nu}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где D — дисперсия. Т.е. оценка состоятельна.

2.2 Оценка неизвестной функции распределения. Основная теорема статистики

Пусть имеется выборка ξ_1, $\xi_2 \ldots \xi_n$ с неизвестной функцией распределения *F*(*x*). Построим оценку для *F*(*x*). Зафиксируем произвольное значение аргумента *x*. Значение *F*(*x*) в точке *x* есть вероятность события $A_x = \{\xi < x\}$, т.е. $F(x) = P(A_x)$. Несмещённой и состоятельной оценкой для вероятности $P(A_x)$ — она же и оценка $F_n^*(x)$ для $F(x)$ — является относительная частота (см. пример в п. 2.1):

$$\hat{P}(A_x) = \frac{\nu_x}{n} \equiv F_n^*(x) = F_n^*(x;\ \xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_n), \qquad (2)$$

где ν_x — количество появления события A_x в n испытаниях, т. е. количество тех наблюдений ξ_i в выборке, которые меньше x ($\xi_i < x$). Случайная величина ν_x имеет биномиальное распределение $Bi(n, F(x))$ с параметрами n и $F(x)$. Имеет место несмещённость:

$$\mathrm{M}\hat{F}_n(x) = \mathrm{M}\frac{\nu_x}{n} = F(x)$$

Также справедлива состоятельность:

$$\mathrm{M}[F_n^*(x) - F(x)]^2 = \mathrm{D}F_n^*(x) = \mathrm{D}\frac{\nu_x}{n} = \frac{nF(x)(1-F(x))}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Итак, при любом x оценка (2) является несмещённой и состоятельной.

Функция $F_n^*(x) \equiv F_n^*(x|\ \xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_n)$ называется ***ФУНКЦИЕЙ ЭМПИРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ*** *(основное понятие семестра)*

Основная теорема статистики. *Функция эмпирического распределения сходится (по вероятности) к истинной функции распределения:*

$$F_n^*(x) \equiv F_n^*(x;\ \xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} F(x). \qquad (3)$$

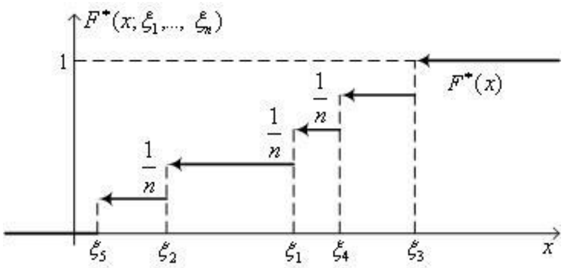

Рис. 1. Функция эмпирического распределения

Справедливость этого утверждения показана предыдущими соотношениями. График функции эмпирического распределения показан на рис. 1: $F_n^*(x)$ кусочно-постоянная, делает скачок величиной $1/n$, когда аргумент x при его возрастании переходит выборочное значение.

Заметим, что если в n точках ξ_1, $\xi_2 \ldots \xi_n$ на оси x поместить равные вероятности $1/n$, то получится некоторое дискретное распределение, называемое *эмпирическим*, и $F_n^*(x)$ — его функция распределения. Ясно, что первые два момента этого распределения таковы:

$$\hat{m}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_n^*(x; \xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \equiv \overline{\xi}, \qquad (4)$$

$$\hat{m}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_n^*(x; \xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 .$$

В этих равенствах учтено, что при кусочно-постоянной интегрирующей функции интеграл Стильтьеса превращается в сумму. Второй центральный момент эмпирического распределения:

$$s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \hat{m}_1)^2 dF_n^*(x; \xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \hat{m}_1)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \overline{\xi})^2 . \qquad (5)$$

Статистика $\overline{\xi}$ называется выборочным средним, а s^2 — выборочной дисперсией.

2.3. Простейшие оценки моментов

Пусть имеется выборка $\xi_1,\xi_2 \ldots \xi_n$. Функция распределения $F(x)$ наблюдений нам неизвестна.

А. Оценка математического ожидания.

По определению математическое ожидание (первый момент) есть

$$m_1 = \mathrm{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) .$$

Подставим в интеграл вместо $F(x)$ несмещенную и состоятельную оценку $F_n^*(x| \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$. Получим (4):

$$\hat{m}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_n^*(x; \xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \equiv \overline{\xi}$$

Получили (4)-дисперсию эмпирического распределения

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \equiv \overline{\xi} .$$

Рассмотрим эту статистику в качестве оценки для математического ожидания m_1. Проверим несмещённость:

$$\mathrm{M}\hat{m}_1 = \mathrm{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}\xi_i = \frac{n \cdot m_1}{n} = m_1 .$$

Проверим состоятельность:

$$\mathrm{M}\left(\hat{m}_1 - m\right)^2 = \mathrm{D}\hat{m}_1 = \mathrm{D}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \frac{n \cdot \mathrm{D}\xi_i}{n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

Таким образом, $\hat{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \equiv \overline{\xi}$ является несмещенной и состоятельной оценкой для математического ожидания.

Заметим, что замена истинного неизвестного нам распределения эмпирическим (или выборочным) приводит к состоятельным оценкам. Кроме того, заметим, что проверка на несмещенность и состоятельность являются стандартными действиями

Б. Оценка дисперсии.

Дисперсия случайной величины, согласно определению:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_1)^2 dF(x).$$

Вместо неизвестных m_1 и $F(x)$ подставим состоятельные оценки $\bar{\xi}$ и $F_n^*(x)$.

$$s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\hat{m}_1)^2 dF_n^*(x;\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\hat{m}_1)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$$

Получили оценку s^2 для σ^2 (формула (5) выше):

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2.$$

Проверим несмещённость, для чего сначала преобразуем выражение для s^2:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(\xi_i-m_1)-(\bar{\xi}-m_1)\right]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-m_1)^2 - 2(\bar{\xi}-m_1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-m_1)+(\bar{\xi}-m_1)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-m_1)^2 - (\bar{\xi}-m_1)^2. \qquad (5a)$$

Здесь учтено, что $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-m_1) = (\bar{\xi}-m_1)$. Определим математическое ожидание:

$$Ms^2 = M\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-m_1)^2 - M(\bar{\xi}-m_1)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i - D\bar{\xi} = \frac{n\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{(n-1)}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2.$$

Оно не равно σ^2, и потому оценка смещенная. Ясно, что ее можно исправить, умножив s^2 на константу, обратную к коэффициенту при σ^2. Рассмотрим исправленную оценку

$$s_1^2 = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-m_1)^2.$$

Эта оценка является несмещенной:

$$Ms_1^2 = \frac{n}{n-1}Ms^2 = \sigma^2.$$

Обе оценки s^2 и s_1^2 являются состоятельными, что видно из (5а), используя свойства сходимости по вероятности, аналогичные свойствам сходимости числовых последовательностей.

В. Оценка моментов порядка $k > 2$.

Для начального момента порядка $k > 2$

$$m_k = \mathrm{M}\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x)dx,$$

рассмотрим оценку, полученную заменой $F(x)$ на $F_n^*(x|\ \xi_1, \xi_2\ldots\xi_n)$:

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^k .$$

Она является несмещенной:

$$\mathrm{M}\hat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\xi_i^k = \frac{nm_k}{n} = m_k .$$

Можно показать, что оценка состоятельна, т.е.

$$\hat{m}_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} m_k .$$

Для центрального момента порядка $k > 2$

$$\mu_k = \mathrm{M}(\xi - m_1)^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x)dx,$$

рассмотрим оценку, полученную аналогично предыдущему:

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi - \hat{\xi})^k .$$

Можно показать, что данная оценка состоятельна, т.е.

$$\hat{\mu}_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu_k ,$$

но несмещенной она не является. И исправить ее, аналогично выборочной дисперсии, умножением на коэффициент, зависящий от n, невозможно.

2.4. Линейная оценка среднего с минимальной дисперсией при разноточных измерениях.

Задачу можно сформулировать так: пусть мы измеряем со случайными ошибками одну и ту же неизвестную величину несколькими способами. Способы имеют различную точность, т.е. дисперсию. По результатам нужно построить наиболее точную оценку.

Итак, $\xi_1, \xi_2\ldots\xi_n$ — результаты n независимых наблюдений, причем среднее m (мат. ожидание) для всех одно и то же, а дисперсии, т.е. точности измерений, различны:

$$\mathrm{M}\xi_i = m, \quad \mathrm{D}\xi_i = \sigma_i^2 = \sigma^2/g_i .$$

Здесь зависимость дисперсии от номера i помещена в знаменатель. Величина σ^2 может быть неизвестной, но отношения g_i дисперсий известны. Требуется построить для m линейную несмещенную оценку

$$\hat{m} = \sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i , \quad \mathrm{M}\hat{m} = m, \tag{6}$$

с минимальной дисперсией:

$$\mathrm{D}\hat{m} = \min_{c_1,c_2\ldots c_n} \mathrm{D}\sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i = \sigma^2 \min_{c_1,c_2\ldots c_n} \sum c_i^2 / g_i \,. \tag{7}$$

Условие несмещенности (6)

$$\mathrm{M}\hat{m} = \mathrm{M}\sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i = m\sum_{i=1}^{n} c_i = m$$

дает условие на коэффициенты:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i - 1 = 0. \tag{8}$$

Найдем условный минимум квадратичной формы (7) при условии (8). Для определения условного экстремума запишем функцию Лагранжа с неопределенным множителем 2λ:

$$L(c_1, c_2 \ldots c_n, \lambda) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2 / g_i - 2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} c_i - 1\right).$$

Найдем ее экстремум, как функции n+1 переменных:

$$\frac{\partial L}{\partial c_k} = 2\sigma^2 c_k / g_k - 2\lambda = 0,\; k = 1, 2\ldots n, \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -2\left(\sum_{i=1}^{n} c_i - 1\right) = 0\,. \tag{10}$$

Из (9) выражаем c_k:

$$c_k = \frac{\lambda}{\sigma^2} g_k = h g_k,$$

где $h = \lambda / \sigma^2$ — неизвестное значение, которое находим из (10):

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -2\left(h\sum_{i=1}^{n} g_i - 1\right) = 0 \qquad h = \left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right)^{-1}.$$

Получаем нужную оценку:.

$$\hat{m} = \sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i = h\sum_{i=1}^{n} g_i\xi_i = h\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\sigma_i^2}\,. \tag{11}$$

здесь учтено $\sigma_i^2 = \sigma^2/g_i$

Мы видим, что чем больше g_i (меньше дисперсия σ_i^2), т.е. точнее наблюдение, тем больше вес этого наблюдения в сумме (11). Заметим, что вес наблюдения в сумме обратно пропорционален *квадрату точности* измерения. Также заметим, что не обязательно знать дисперсии σ_i^2, нужно знать лишь соотношения g_i дисперсий.

Определим дисперсию полученной оценки:

$$\mathrm{D}\hat{m} = h^2 \sum_{i=1}^{n} g_i^2 D\xi_i = h^2 \sum_{i=1}^{n} g_i^2 \frac{\sigma^2}{g_i} = \sigma^2 h^2 \sum_{i=1}^{n} g_i = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} g_i\right)^{-1}.$$

На 3-й паре практическое занятие для гр.5 и 13