Занятие5

Тема 4. МЕТОДЫ-2 ПОСТРОЕНИЯ ОЦЕНОК.Дополнение

4.3. Метод порядковых статистик

А) КВАНТИЛИ

В статистике широко используется система числовых характеристик, называемых **квантилями.**

Определение 4.1*.* Значение x_p случайной величины ξ называется p-**квантилью** (или квантилью уровня p), если справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\xi < x_p\} = p,$$

т.е. x_p — это корень уравнения

$$F_\xi(x_p) = p \quad ($$

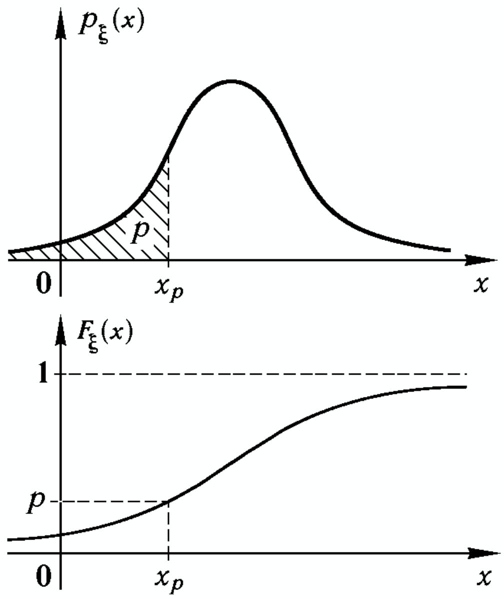


Рис. 4.2.

Приведем примеры

$x_{1/2}$ — **медиана** — характеристика **среднего значения** случайной величины;

$x_{0,98}$ — **максимальное** (с вероятностью 0.98) значение случайной величины, т.к. $\mathbf{P}\{\xi < x_{0,98}\} = 0,98$;

$x_{0,02}$ — **минимальное** (с вероятностью 0.98) значение случайной величины, т.к. $\mathbf{P}\{\xi \geq x_{0,02}\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi < x_{0,02}\} = 1 - 0,02 = 0,98$;

$x_{3/4}$ и $x_{1/4}$ — **верхняя** и **нижняя** квартили. Их **разность** $(x_{3/4} - x_{1/4})$ — **межквантильная широта,** служит характеристикой **разброса СВ**.

Б) ОЦЕНКА p-КВАНТИЛЕЙ

Неизвестные p-квантили легко оцениваются по выборке. Действительно, пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — результаты n **независимых** наблюдений над случайная величиной ξ с функцией распределения $F(x)$. Упорядочив их по возрастанию, получим вариационный ряд $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$. Чтобы подчеркнуть **случайность** ряда, запишем его греческими символами: $\xi_{(1)} \le \xi_{(2)} \le ... \le \xi_{(n)}$. Член вариационного ряда $\xi_{(i)}$ с номером i (заметим, что это **случайная величина**) называется i-й **порядковой статистикой**. По вариационному ряду построим функцию

$$F_n^*(x) \equiv F_n^*(x; \xi_{(1)} \le \xi_{(2)} \le ... \le \xi_{(n)}) = \text{доля тех, кот.} < x$$

эмпирического распределения. Согласно общему принципу о том, что выборочные характеристики являются **состоятельными** оценками характеристик распределения генеральной совокупности, рассмотрим в качестве оценки для p-квантили x_p выборочную квантиль ζ_p, т.е. корень уравнения

$$F_n^*(\zeta_p) = p. \qquad \text{вместо } F_\xi(x_p) = p \qquad \textbf{(4.7)}$$

Поскольку $F_n^*(x)$ — кусочно-постоянная функция, корнем ζ_p уравнения **(4.7)** является одна из **порядковых** статистик:

$$\zeta_p = \xi_{([np]+1)} \qquad \textbf{(4.8)}$$

с номером $p:(1/n) + 1 = [np] + 1$, т.е. целая часть числа np плюс 1 (**рис. 4.3**).

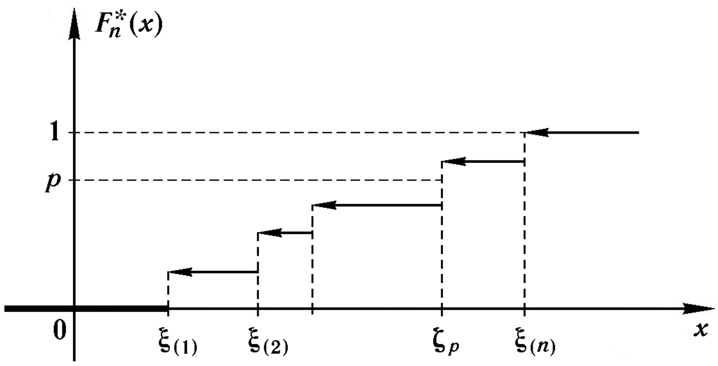


Рис. 4.3.

Нетрудно показать, что ζ_p является **состоятельной оценкой** для x_p:

$$\zeta_p \xrightarrow[n\to\infty]{P} x_p.$$

Кроме того, известна

Теорема (Крамер). Для **непрерывных** распределений с плотностью $q(x)$ оценка ζ_p **асимптотически нормальна** с параметрами:

$$\mathbf{M}\zeta_p = x_p, \qquad \mathrm{D}\zeta_p \approx \frac{1}{n}\frac{p(1-p)}{q^2(x_p)}.$$)

В) МЕТОД ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

Идея метода. Неизвестный параметр следует выразить через некоторые квантили, а затем квантили заменить **выборочными** квантилями.

Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — **выборка** с функцией распределения $F(x; a)$, зависящей от параметра a, значение которого требуется **оценить**. Выберем p так, чтобы квантиль x_p существенно зависела от этого параметра:

$$x_p = f(a).$$

Далее выразим параметр a через x_p:

$$a = g(x_p)$$

и вместо x_p подставим выборочную квантиль $\zeta_p = \xi_{([np]+1)}$. В результате получим **состоятельную оценку**

$$\hat{a} = g(\zeta_p).$$

Ясно, что таким же образом можно построить оценки и для **неоднomерного** параметра. Основное и очень важное **преимущество** оценок, основанных на порядковых статистиках, состоит в **их устойчивости к засорению наблюдений и к изменению закона распределения.**

Пример 1. Пусть $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ — **выборка** наблюдений, распределённых по **показательному закону** с **неизвестным** параметром a:

$$\xi_i \sim E(a),\ i = \overline{1, n}.\ ae^{-ax}$$

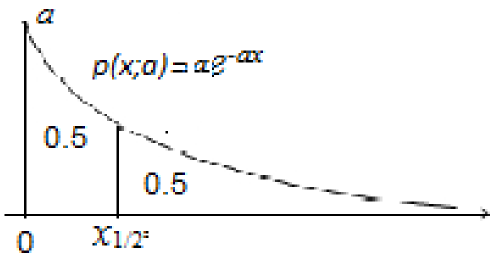
$$x_{1/2} = \ln 2/a$$

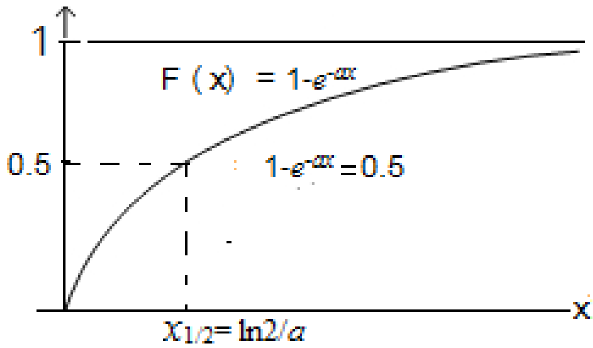
а) Найти оценку $\hat{a}(\xi)$ параметра a **методом порядковых статистик.**

Для одного наблюдения **плотность** и **функция** распределения имеют вид:

$$p(x;a) = \begin{cases} ae^{-ax}, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases} \qquad F_\xi(x;a) = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases} \qquad a > 0.$$

с параметром $a > 0$.





Выразим **медиану** (т.е. квантиль $x_{1/2}$ уровня $1/2$) через параметр a. Напомним, что **медиана** является корнем следующего уравнения:

$$F_\xi(x;a)=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad e^{-ax}=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -ax=-\ln 2 \quad\Leftrightarrow\quad x_{1/2}=\frac{\ln 2}{a}, \quad\Leftrightarrow$$

$$a=\frac{\ln 2}{x_{1/2}}, \quad\Rightarrow\quad \hat{a}=\frac{\ln 2}{\zeta_{1/2}}=\frac{\ln 2}{\xi_{([n/2]+1)}}.$$

Здесь $\zeta_{1/2}$ — **выборочная медиана**, т.е. **центральный** член вариационного ряда. Оценивать дисперсию этой оценкой **не очень удобно**, поскольку порядковая статистика находится в знаменателе.

б) Более удобно методом порядковых статистик анализировать оценку $\hat{b}(\xi)$ параметра $b=\frac{1}{a}$. Действительно,

$$x_{1/2}=\frac{\ln 2}{a}=b\ln 2, \qquad b=\frac{x_{1/2}}{\ln 2}, \qquad \hat{b}=\frac{\zeta_{1/2}}{\ln 2}=\frac{\xi_{([n/2]+1)}}{\ln 2}.$$

где $\zeta_{1/2}$ — **выборочная медиана**. Получили простую в вычислительном отношении оценку. Имеем примерно 40% потерю точности по сравнению с **МП-оценкой** (нетрудно проверить). Однако, есть существенные преимущества:

1) устойчивость к засорению выборки;

2) экономия времени наблюдений. Если $\xi\equiv(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ — времена работы приборов до отказа, то нужно наблюдать только **половину**, $\left[\frac{n}{2}\right]+1$, первых отказов.

Сравним **дисперсии** этой оценки и **МП-оценки**

$$b^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \qquad\qquad \mathbf{D}b^*=\frac{b^2}{n}.$$

По теореме **Крамера** имеем:

$$\zeta_{1/2}=\xi_{([n/2]+1)}\sim N\left(x_p,\ \frac{p(1-p)}{nq^2(x_p)}\right).$$

$$\mathrm{D}\hat{b}\approx\frac{1}{\ln^2 2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}}{\left[\frac{1}{b}e^{-\frac{b\ln 2}{b}}\right]^2}=\frac{1}{\ln^2 2}\cdot\frac{1}{4n}(b\cdot 2)^2=\frac{b^2}{n}\cdot\frac{1}{\ln^2 2}=\frac{b^2}{n\cdot\ln^2 2}.$$

Дисперсия увеличилась примерно в $\frac{1}{\ln^2 2} \approx \frac{1}{0{,}69^{\;2}} \approx \frac{1}{0{,}5} = 2$ раза, а стандартное отклонение — в $\sqrt{2} \approx 1.41$ раза.

Пример 2. (оценка сдвига распределения Коши).

В этом примере не удаётся применить ни **ММ**, ни **МП** методы. Выручают оценки, основанные на порядковых статистиках.

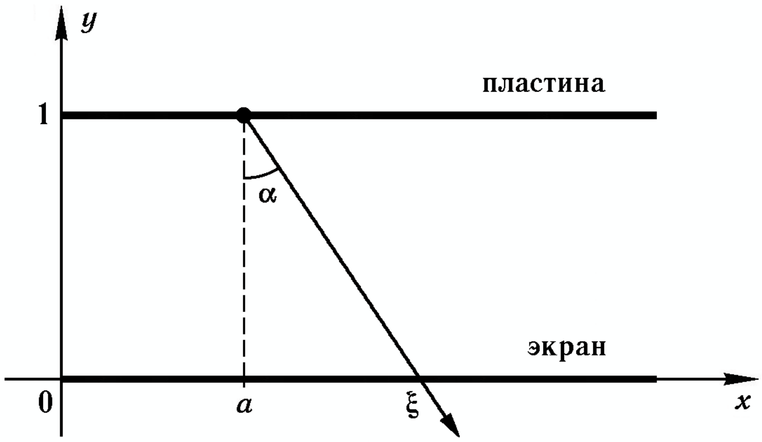
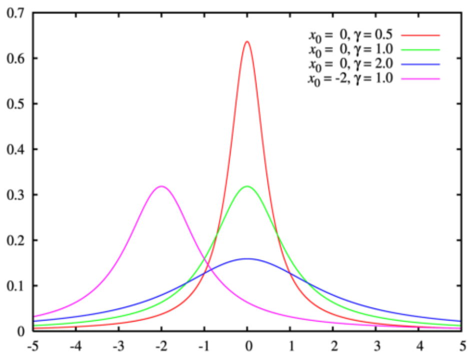


Рис. 4.4.

Пластина находится на расстоянии 1 от экрана. На пластине на **неизвестном** расстоянии a от края пластины находится точечный источник радиоактивного излучения (**рис. 4.4**). Источник излучает частицы со случайным углом α полёта, которые, проходя через экран, дают фиксируемую вспышку. По координатам $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ вспышек нужно оценить параметр a. Координата вспышки — это СВ ξ следующего вида:

$$\xi = a + \operatorname{tg}\alpha .$$

Ясно, что угол α — это СВ, распределённая **равномерно** на **интервале** $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha$ — СВ с плотностью $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$ **распределения Коши** (проверить!). Плотность для одного наблюдения ξ имеет вид:



$$q(x;a) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x-a)^2}.$$

Для логарифма плотности всех наблюдений имеем:

$$\ln p(x_1, x_2, \ldots, x_n; a) = \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x_i-a)^2} = -n\ln\pi - \sum_{i=1}^{n} \ln 1+(x_i-a)^2 .$$

1) Метод моментов применить нельзя, поскольку моменты не существуют (плотность на бесконечности убывает как $\frac{1}{x^2}$, а подынтегральная функция в интеграле для математического ожидания — как $\frac{1}{x}$.

2) МП-метод максимального правдоподобия применить тоже проблематично, поскольку придется решать алгебраическое уравнение высокой степени:

$$\frac{\partial \ln p}{\partial a}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+(x_i-a)^2\right)\right)'_a=0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a)}{1+(x_i-a)^2}=0.$$

После приведения дробей к общему знаменателю получим алгебраическое уравнение степени $(2n-1)$.

3) Здравый смысл подсказывает, что наблюдения имеют тенденцию кучно располагаться напротив **неизвестной** точки — точечного источника излучения: может быть, взять центр всех вспышек, например,

$$\hat{a}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i=\bar{\xi}.$$

Определим закон распределения СВ $\bar{\xi}$. Мы хотели бы, чтобы дисперсия с ростом n убывала. Здесь она бесконечна. Однако это означает, что состоятельности нет. Проанализируем с.в. $\bar{\xi}$.

Характеристическая функция (**ХФ**) СВ $\eta=\operatorname{tg}\alpha$ равна

$$f_1(t)=\mathbf{M}e^{it\eta}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{\pi(1+x^2)}dx=e^{-|t|}.$$

Поэтому характеристическая функция СВ $\xi=a+\eta$, которая отличается от СВ $\eta=\operatorname{tg}\alpha$ лишь на постоянное слагаемое a, имеет вид:

$$f(t)=f_1(t)\cdot e^{ita}=e^{ita-|t|}.$$

при суммировании и умножения на коэффициент $\frac{1}{n}$ (в силу свойств характеристических функций) получаем ХФ СВ $\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$:

$$f^n\left(\frac{t}{n}\right)=\left[e^{i\frac{t}{n}a-\frac{|t|}{n}}\right]^n=e^{ita-|t|},$$

которая совпадает с ХФ **одного** наблюдения. Это означает, что ***закон распределения для $\bar{\xi}$ такой же, что и для одного наблюдения,*** т.е. $\bar{\xi}$ содержит столько же информации, сколько одно наблюдение, например, первое ξ_1. **Следовательно,** ***усреднив наблюдения, мы разрушили информацию о параметре a***.

4) Оценим параметр a с помощью **порядковых статистик**. В силу симметрии распределения Коши, ***параметр a является*** **медианой**:

$$a = x_{1/2},$$

т.е. квантилью $x_{1/2}$ уровня $1/2$, и потому может быть оценён **выборочной медианой**:

$$\hat{a} = \zeta_{1/2} = \xi_{([n/2]+1)}.$$

Её дисперсия приближенно равна величине, согласно теореме 4.1,

$$\mathrm{D}\hat{a} \approx \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)}{(1/\pi)^2} = \frac{\pi^2}{4n} \approx \frac{2{,}47}{n}$$

$$q(x;a) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-a)^2}.$$

Сравним это значение с дисперсией $\mathbf{D}a^*$ МП-оценки a^*. В силу асимптотического свойства МП-оценок, $\mathbf{D}a^*$ приближенно равна величине

$$\mathrm{D}a^* \approx \frac{1}{n \cdot I(a)} = \frac{2}{n},$$

где $\boldsymbol{I}(a)$ — информация Фишера в **одном** наблюдении. Можно показать (см. ниже), вычислив соответствующий интеграл, что $I(a) = 1/2$. Поэтому справедливы следующие приближённые равенства:

коэффициент эффективности $eff = \dfrac{\mathbf{D}a^*}{\mathbf{D}\hat{a}} \approx 0{,}813,$

отношение стандартных отклонений $\dfrac{\sigma(a^*)}{\sigma(\hat{a})} \approx \sqrt{0{,}813} \approx 0{,}9.$

Таким образом, точность оценки $\hat{a}$ хуже, чем у МП-оценки a^*, всего на **10%**.

Замечание. Информация Фишера относительно параметра a распределения Коши, содержащаяся в одном наблюдении, вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{I}(a) = \mathbf{M}\left[\frac{\partial \ln p(x;a)}{\partial a}\right]^2 = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-a)^2\,dx}{[1+(x-a)^2]^3} = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^3}.$$

Для вычисления **несобственного** интеграла от **рациональной** функции $f(z) = \dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$, где $P_m(z)$ и $Q_n(z)$ — многочлены соответственно степеней m и n, $n \geq m+2$ (причём многочлен $Q_n(z)$ **не имеет действительных** корней), воспользуемся формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 2\pi i \cdot \Sigma,$$

где Σ обозначает сумму вычетов функции $f(z) = \dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)} = \dfrac{z^2}{(1+z^2)^3}$ во всех полюсах, расположенных в **верхней** полуплоскости. Функция $f(z)$

имеет в верхней полуплоскости единственную особую точку $z=-i$ — полюс 3-го порядка, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2dz}{(1+z^2)^3}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(z)dz=2\pi i\cdot\mathop{\mathbf{res}}_{z=i}f(z)=2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}[(z-i)^3f(z)]=$$

$$=\pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\frac{z^2}{(z+i)^3}=\pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{2zi-z^2}{(z+i)^4}=\pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{2z^2-8zi-2}{(z+i)^5}=$$

$$=\pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{2z^2-8zi-2}{(z+i)^5}=\pi i\cdot\frac{-i}{8}=\frac{\pi}{8}.$$

Таким образом, $\boldsymbol{I}(a)=\frac{4}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2dz}{(1+z^2)^3}=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}.$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ ПО МЕТОДУ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

4.9. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — выборка из генеральной совокупности, имеющей распределение с плотностью

$$p(x;\sigma)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\sigma^2}}e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & \text{если } x\geq 0;\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Методом **порядковых статистик** найти оценку параметра σ.

4.10. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — выборка из генеральной совокупности, имеющей распределение с плотностью

$$p(x;\sigma)=\begin{cases}\frac{x}{a^2}e^{-x/a}, & \text{если } x\geq 0;\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Методом **порядковых статистик** найти оценку параметра a.

Тема 5. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ И ИНТЕРВАЛЫ

Результат применения оценки $\hat{a}(x_1, x_2, ..., x_n)$ **не даёт** представления о том, насколько близко полученное значение к истинному значению параметра. Ясно, что такое представление может дать, например, **дисперсия** оценки, так что **истинное** значение **неизвестного** параметра должно находиться где-то в пределах

$$\hat{a} \pm (2 \div 4)\sqrt{\mathbf{D}\hat{a}}.$$

Внесём уточнения.

5.1. Определения

Пусть $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ — n **независимых** наблюдений над случайной величиной с функцией распределения $F(x; a)$, зависящей от параметра a, значение которого **неизвестно**.

Определение 5.1. Интервал $I(\xi) = a_1(\xi), a_2(\xi)$ со **случайными** концами (случайный интервал), определяемый двумя функциями наблюдений, называется **доверительным интервалом** для параметра a с уровнем доверия $P_Д$ (обычно близким к 1), если

$$\min_a \mathbf{P}\ I(\xi) \ni a \ \equiv \min_a \mathbf{P}\ a_1(\xi) < a < a_2(\xi) = P_Д, \tag{5.1}$$

т.е. если **минимальная** по a вероятность накрыть интервалом $I(\xi)$ **истинное** значение a, велика и равна $P_Д$.

Определение 5.2. Функция наблюдений $\hat{a}_н(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ (случайная величина) называется **нижней доверительной границей** для параметра a с уровнем доверия $P_Д$ (близким к 1), если

$$\min_a \mathbf{P}\ \hat{a}_н(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) < a = P_Д, \tag{5.2}$$

т.е. если **минимальная** по a вероятность события $\hat{a}_н(\xi) < a$ велика и равна $P_Д$.

Определение 5.3. Функция наблюдений $\hat{a}_в(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ (случайная величина) называется **верхней доверительной границей** для параметра a с уровнем доверия $P_Д$, если

$$\min_a \mathbf{P}\ \hat{a}_в(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) > a = P_Д, \tag{5.3}$$

т.е. если **минимальная** по a вероятность события $\hat{a}_в(\xi) > a$ велика и равна $P_Д$.

Вероятность $P_Д$ называют также **доверительной вероятностью**.

5.2. Способ построения доверительных границ и интервалов

Для построения доверительного интервала (или границы) необходимо знать закон распределения **оценивающей статистики** $\zeta \equiv \zeta(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, по которой оценивается **неизвестный** параметр (такой статистикой может быть сама оценка $\hat{a}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ или статистика, от которой зависит оценка $\hat{a}$, или **достаточная** статистика, или статистика, **близкая к достаточной**).

Один из способов состоит в следующем.

1) Построим случайную величину $\varphi = \varphi(\zeta; a)$, зависящую от **статистики** ζ и **неизвестного** параметра a таким образом, что:

— закон распределения для СВ φ **известен** и **не зависит** от a;

— $\varphi(\zeta; a)$ **непрерывна** и **монотонна** по переменной a.

Такая случайная величина $\varphi(\zeta; a)$ называется **центральной статистикой**.

2) Выберем интервал (f_1, f_2) так, чтобы он **содержал вероятность** $P_Д$ (это означает, что попадание в него случайной величины φ является практически достоверным событием):

$$\mathbf{P}\ f_1 < \varphi(\zeta; a) < f_2 \ = P_Д \text{ для любого значения } a. \qquad \textbf{(5.4)}$$

Для этого достаточно в качестве f_1 и f_2 взять **квантили** распределения СВ φ **уровня** $(1 - P_Д)/2$ и $(1 + P_Д)/2$ соответственно.

3) Перейдём к другой записи **случайного события** $f_1 < \varphi(\zeta; a) < f_2$, разрешив неравенства относительно параметра a. В случае, когда функции φ **монотонно возрастает** по переменой a, получим:

$$f_1 < \varphi(\zeta; a) < f_2 \quad \Leftrightarrow \quad g(\zeta; f_1) < a < g(\zeta; f_2).$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\ g(\zeta; f_1) < a < g(\zeta; f_2) \ = P_Д \text{ для любого значения } a. \qquad \textbf{(5.5)}$$

Таким образом, интервал со случайными концами $g(\zeta; f_1), g(\zeta; f_2)$ является **доверительным** для параметра a с уровнем доверия $P_Д$. Если же функции φ **монотонно убывает** по переменой a, знаки неравенств изменяются на противоположные:

$$f_1 < \varphi(\zeta; a) < f_2 \quad \Leftrightarrow \quad g(\zeta; f_1) > a > g(\zeta; f_2) \quad \Leftrightarrow \quad g(\zeta; f_2) < a < g(\zeta; f_1),$$

и доверительный интервал будет иметь вид $g(\zeta; f_2), g(\zeta; f_1)$.

Пример 5.1 (оценка дисперсии нормальных наблюдений).

Пусть $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ — **выборка** из **нормальной** совокупности $N(a, \sigma^2)$. Требуется оценить стандартное уклонение σ и **сравнить** доверительные интервалы для следующих вариантов:

1) параметр a **неизвестен**, $n = 10$; $P_Д = 0{,}98$;

2) параметр a **неизвестен**, $n = 10$; $P_Д = 0{,}9$;

3) параметр a **неизвестен**, $n = 5$; $P_Д = 0{,}98$;

4) параметр a **известен**, $n = 10$; $P_Д = 0{,}98$.

Решение. При **неизвестном** значении параметра a **несмещенной** оценкой для дисперсии σ^2 является СВ

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2, \qquad \textbf{(5.6)}$$

причем СВ

$$\varphi(\xi;\sigma) = \frac{n-1}{\sigma^2}s^2$$

распределена по закону χ^2_{n-1} (**хи-квадрат** с числом степеней свободы $k = n-1$). Из этого соотношения, согласно **(5.5)**, **получается доверительный интервал** для σ:

$$f_1 < \varphi(\xi;\sigma) \equiv \frac{ks^2}{\sigma^2} < f_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f_2} < \frac{\sigma^2}{ks^2} < \frac{1}{f_1} \quad \Leftrightarrow \quad s\cdot\sqrt{\frac{k}{f_2}} < \sigma < s\cdot\sqrt{\frac{k}{f_1}} \quad \Rightarrow$$

$$I_\sigma(\xi) = \left(s\sqrt{k/f_2},\, s\sqrt{k/f_1}\right)$$

с доверительной вероятностью $P_Д$, причем f_1 и f_2 — это **квантили** (соответственно) уровней $(1-P_Д)/2$ и $(1+P_Д)/2$ распределения χ^2_k (хи-квадрат) с $k = n-1$ степенями свободы:

$$\mathbf{P}\left\{\chi^2_k < f_1\right\} = (1-P_Д)/2, \qquad \mathbf{P}\left\{\chi^2_k < f_2\right\} = (1+P_Д)/2.$$

Далее для **квантилей** уровня p распределения χ^2_k (хи-квадрат) с k степенями свободы будем использовать **обозначение** $Q(p;k)$.

Числовые значения

1) Рассмотрим случай $n = 10$, $P_Д = 0{,}98$ и вычислим s по формуле **(5.6).** Произведём несложные вычисления:

$$\frac{1-P_Д}{2} = \frac{1-0{,}98}{2} = 0{,}01 \quad \text{и} \quad \frac{1+P_Д}{2} = \frac{1+0{,}98}{2} = 0{,}99;$$

$$f_1 = Q(0{,}01;9) = 2{,}09 \quad \text{и} \quad f_2 = Q(0{,}99;9) = 21{,}7;$$

$$I_\sigma = \left(\frac{3}{\sqrt{21{,}7}}s;\ \frac{3}{\sqrt{2{,}09}}s\right) = \left(\frac{3}{4{,}65}s;\ \frac{3}{1{,}445}s\right) = (0{,}65s;\ 2{,}08s).$$

2) Изменим вероятность: $P_Д = 0{,}9$, $n = 10$, тогда

$$\frac{1-P_Д}{2}=\frac{1-0{,}9}{2}=0{,}05 \quad \text{и} \quad \frac{1+P_Д}{2}=\frac{1+0{,}9}{2}=0{,}95;$$

$$f_1=Q(0{,}05;\,9)=3{,}32 \quad \text{и} \quad f_2=Q(0{,}95;\,9)=16{,}9;$$

$$I_\sigma=\left(\frac{3}{\sqrt{16{,}9}}s;\ \frac{3}{\sqrt{3{,}32}}s\right)=\left(\frac{3}{4{,}1}s;\ \frac{3}{1{,}82}s\right)=(0{,}73s;\,1{,}65s).$$

Доверительная вероятность **уменьшилась**, поэтому доверительный интервал стал **более узким**.

3) Изменим объём выборки n: $n=5$, $P_Д=0{,}98$. Тогда

$$\frac{1-P_Д}{2}=\frac{1-0{,}98}{2}=0{,}01 \quad \text{и} \quad \frac{1+P_Д}{2}=\frac{1+0{,}98}{2}=0{,}99;$$

$$f_1=Q(0{,}01;\,4)=0{,}30 \quad \text{и} \quad f_2=Q(0{,}99;\,4)=16{,}3;$$

$$I_\sigma=\left(\frac{2}{\sqrt{13{,}3}}s;\ \frac{2}{\sqrt{0{,}30}}s\right)=\left(\frac{2}{3{,}65}s;\ \frac{2}{0{,}55}s\right)=(0{,}55s;\,3{,}64s).$$

Количество наблюдений n **уменьшилось**, в результате доверительный интервал **расширился**.

4) В случае, когда значение параметра a **известно**, **несмещённой** оценкой для дисперсии σ^2 является СВ

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-a)^2, \qquad \textbf{(5.7)}$$

причём СВ

$$\varphi(\xi;\sigma)=\frac{n}{\sigma^2}s^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\xi_i-a}{\sigma}\right)^2$$

распределена по закону χ_n^2 **(хи-квадрат)** с n степенями свободы. Поэтому при $n=10$, $P_Д=0{,}98$ имеем:

$$\frac{1-P_Д}{2}=\frac{1-0{,}98}{2}=0{,}01 \quad \text{и} \quad \frac{1+P_Д}{2}=\frac{1+0{,}98}{2}=0{,}99;$$

$$f_1=Q(0{,}01;10)=2{,}56 \quad \text{и} \quad f_2=Q(0{,}99;10)=23{,}2;$$

$$I_\sigma=\left(\frac{3{,}16}{4{,}8}s;\ \frac{3{,}16}{1{,}6}s\right)=(0{,}66s;\,1{,}98s).$$

Таким образом, при **известном** значении параметра a доверительный интервал **уменьшился** по сравнению с пунктом **1)**.

Пример 5.2. Пусть a — **неизвестная** величина. Она измеряется n раз **разными** приборами, имеющими **различную точность**. Таким образом, результаты измерений $\xi\equiv(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ являются случайными величинами следующего вида: $\xi_i=a+\varepsilon_i$, $i=\overline{1,n}$, где $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ — **независимые нормально** распределённые СВ с параметрами $\mathbf{M}\varepsilon_i=0$, $\mathbf{D}\varepsilon_i=\sigma_i^2$, $i=\overline{1,n}$. Поэтому $\xi_i\sim N(a,\sigma_i^2)$, $i=\overline{1,n}$. Требуется найти **доверительный интервал** для параметра a с заданным уровнем доверия $P_Д$.

Решение. Заметим, что (согласно критерию **факторизации**) **статистика** $\tau = T(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\sigma_i^2}$ является **достаточной** для параметра a, поскольку справедливо представление $p_\xi(x;a) = g\ T(x), a\ \ h(x))$. Статистика τ имеет **нормальное** распределение. Выясним параметры этого распределения:

$$\mathbf{M}\tau = a \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} = ac, \quad \mathbf{D}\tau = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i^2}{(\sigma_i^2)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} = c \quad \Rightarrow \quad \tau \sim N(ac, c).$$

1-й способ построения **доверительного интервала**. В качестве **центральной** рассмотрим нормированную (со знаком минус) статистику τ:

$$\varphi(\xi;a) = -\frac{\tau - ac}{\sqrt{c}} \sim N(0;1).$$

По заданной **доверительной** вероятности $P_Д$ выбираем **симметричный** интервал $(-f_p, f_p)$, для которого выполняется равенство

$$\mathbf{P}\ -f_p < \frac{-\tau + ac}{\sqrt{c}} < f_p\ = P_Д \text{ для **любого** } a. \qquad \textbf{(5.8)}$$

Разрешаем неравенства относительно параметра a:

$$-f_p < \frac{-\tau + ac}{\sqrt{c}} < f_p \quad \Leftrightarrow \quad -f_p\sqrt{c} < -\tau + ac < f_p\sqrt{c} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \tau - f_p\sqrt{c} < ac < \tau + f_p\sqrt{c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\tau - f_p\sqrt{c}}{c} < a < \frac{\tau + f_p\sqrt{c}}{c}.$$

В результате получаем равенство, равносильное **(5.8)**:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\tau - f_p\sqrt{c}}{c} < a < \frac{\tau + f_p\sqrt{c}}{c}\right\} = P_Д \text{ для **любого** } a.$$

Мы нашли случайный интервал

$$I_a = \ g_1(\tau), g_1(\tau)\ \equiv \left(\frac{\tau - f_p\sqrt{c}}{c}, \frac{\tau + f_p\sqrt{c}}{c}\right),$$

который накрывает значение параметра a с вероятностью $P_Д$ при любом значении параметра *a.*

2-й способ. Если разделить τ на c, то получим оценку параметра a, имеющую **нормальное** распределение:

$$\hat{a} = \frac{\tau}{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}\hat{a} = a \text{ и } \mathbf{D}\hat{a} = \frac{c}{c^2} = \frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad \hat{a} \sim N\ a, \frac{1}{c}\ .$$

Пронормировав её, получим **центральную** статистику:

$$\psi(\xi;a) \equiv \frac{\hat{a} - a}{1/\sqrt{c}} \equiv (\hat{a} - a)\sqrt{c} \sim N(0;1)$$

Далее по заданной **доверительной** вероятности $P_Д$ выберем **симметричный** интервал $(-f_p, f_p)$, для которого выполняется равенство

$$\mathbf{P}\ -f_p < \psi \equiv (\hat{a} - a)\sqrt{c} < f_p\ = P_Д \text{ при **любом** значении } a.$$

Разрешив неравенства относительно параметра a, получим соотношение

$$\mathbf{P}\left(\hat{a}-\frac{f_p}{\sqrt{c}}<a<\hat{a}+\frac{f_p}{\sqrt{c}}\right)=P_{Д},$$ верное при **любом** значении a.

Тем самым найден **доверительный интервал** для параметра a:

$$I_a=\left(\hat{a}-\frac{f_p}{\sqrt{c}},\ \hat{a}+\frac{f_p}{\sqrt{c}}\right).$$

Получили интервал, совпадающий с предыдущим, если учесть, что $\frac{\tau}{c}=\hat{a}$. Преимущество последнего в том, что в нем фигурирует значение оценки $\hat{a}$.

Пример 5.3 (верхняя граница для σ нормальной совокупности).

Вопрос: можно ли по одному **единственному** наблюдению **нормальной** СВ $\xi\sim N(m,\sigma^2)$ оценить характеристику разброса σ при **неизвестном** математическом ожидании m? Оказывается, **можно!**

Докажем, что верхней доверительной границей для σ с **вероятностью 0,95** является величина

$$\hat{\sigma}_в=16|\xi|.$$

Для этого нужно показать, что $P\left(\hat{\sigma}_в>\sigma\right)\geq P_Д=0{,}95$ для любых m,σ^2. Действительно, ясно, что $\frac{\xi}{\sigma}\sim N\left(\frac{m}{\sigma},1\right)$. Используем запись $p_N\left(x;a,\sigma^2\right)$ для **плотности нормального** распределения $N(a,\sigma^2)$. Тогда

$$\mathbf{P}\{16|\xi|>\sigma\}=\mathbf{P}\left(\frac{|\xi|}{\sigma}>\frac{1}{16}\right)=1-\mathbf{P}\left(\frac{|\xi|}{\sigma}<\frac{1}{16}\right)=1-\mathbf{P}\left(-\frac{1}{16}<\frac{\xi}{\sigma}<\frac{1}{16}\right)=$$

$$=1-\int_{-1/16}^{1/16}p_N\left(x;\frac{m}{\sigma},1\right)dx\geq 1-\int_{-1/16}^{1/16}p_N(x;0,1)\,dx\geq 1-\frac{2}{16}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx$$

$$\approx 1-\frac{1}{20}=0{,}95.$$

Пример 5.4 (использование асимптотической нормальности).

Пусть $\xi\equiv(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ — **выборка** наблюдений, распределённых по **показательному** закону с неизвестным параметром a: $\xi_i\sim E(a)$, т.е.

$$\xi_i\sim q(x_i;a)=\begin{cases}ae^{-ax_i}, & \text{если } x_i\geq 0;\\ 0, & \text{если } x_i<0,\end{cases}$$ где $i=\overline{1,n}$, $a>0$.

Требуется найти доверительный интервал для **неизвестного** параметра a.

Решение. Методом **моментов** находим:

$$m_1 = \frac{1}{a} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{m_1}.$$

Далее, заменяя m_1 в последней формуле его оценкой $\hat{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \equiv \overline{\xi}$, получим оценку для параметра a:

$$\hat{a} = \frac{1}{\hat{m}_1} = \frac{1}{\overline{\xi}}.$$

А) Сначала найдём **приближённый доверительный интервал**, основанный на свойстве **асимптотической нормальности**. Оценка $\hat{a}$ выражается через статистику $\overline{\xi}$, распределение которой **приближенно** известно. Воспользуемся этим: возьмем $\overline{\xi}$ в качестве **оценивающей** статистики. Закон распределения СВ $\overline{\xi}$, если n достаточно велико (десять и более), **приближенно нормальный**:

$$\overline{\xi} \sim N\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{na^2}\right).$$

Строим **центральную** статистику, вычитая из СВ $\overline{\xi}$ её **МО** и разделив полученную разность на корень из её дисперсии:

$$\varphi(\xi; a) = \left(\overline{\xi} - \frac{1}{a}\right) \Big/ \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{n}} = (a\overline{\xi} - 1)\sqrt{n} \sim N(0; 1).$$

По заданной **доверительной** вероятности $P_Д$ находим **доверительный** интервал $(-f_p, f_p)$, **содержащий** $P_Д$:

$$\mathbf{P}\left(-f_p < (a\overline{\xi} - 1)\sqrt{n} < f_p\right) \approx P_Д \text{ для **любого** } a.$$

Далее **разрешаем** относительно параметра a **двойное** неравенство, стоящее под знаком вероятности:

$$\frac{1}{\overline{\xi}}\left(1 - \frac{f_p}{\sqrt{n}}\right) < a < \frac{1}{\overline{\xi}}\left(1 + \frac{f_p}{\sqrt{n}}\right).$$

Учитывая, что $\hat{a} = 1/\overline{\xi}$, получаем **приближённое** равенство:

$$\mathbf{P}\left(\hat{a}\left(1 - \frac{f_p}{\sqrt{n}}\right) < a < \hat{a}\left(1 + \frac{f_p}{\sqrt{n}}\right)\right) \approx P_Д, \text{ верное для **любого** } a.$$

В неравенстве под знаком вероятности слева и справа находятся функции наблюдений. Они являются границами случайного интервала, который накрывает параметр a с заданной вероятностью $P_Д$. Итак, **доверительный интервал** с коэффициентом **доверия**, приближенно равным $P_Д$, есть

$$I_a(\xi) = \left(\hat{a}\left(1 - f_p/\sqrt{n}\right), \hat{a}\left(1 + f_p/\sqrt{n}\right)\right).$$

Замечание 5.1. Можно было в качестве **оценивающей** статистики взять сумму $\zeta=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$. Но тогда доверительный интервал получится в терминах суммы. Мы же всегда хотим записывать доверительный интервал в терминах оценки.

Б) Теперь найдём **точный доверительный** интервал. В качестве **оценивающей** статистики используем сумму $\zeta=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$. Выясним закон распределения суммы. Одно слагаемое ξ_i подчиняется **показательному** закону с **плотностью**

$$p(x_i;a)=\begin{cases} ae^{-ax_i}, & \text{если } x_i\ge 0;\\ 0, & \text{если } x_i<0,\end{cases} \quad \text{где } i=\overline{1,n},\ a>0.$$

Мы знаем, что закон распределения **хи-квадрат** χ_2^2 с **двумя** степенями свободы есть **показательный** закон с параметром $a=\frac{1}{2}$:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2=\chi_2^2\sim E\ a=\frac{1}{2}, \text{ где } \alpha_1,\alpha_2\sim N(0;1).$$

Если умножить ξ_i на $2a$, то получится СВ $2a\xi_i$ с плотностью

$$p(x_i)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x_i/2}, & \text{если } x_i\ge 0;\\ 0, & \text{если } x_i<0,\end{cases}$$

т.е. СВ χ_2^2. Тогда СВ $2a\zeta=\sum_{i=1}^{n}2a\xi_i$ есть сумма $2a\zeta=\sum_{i=1}^{n}\chi_{2i}^2=\chi_{2n}^2$. Итак, **центральная статистика** $\varphi(\xi;a)=2a\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ имеет распределение χ_{2n}^2.

Далее по **заданной доверительной** вероятности $P_Д$ находим **доверительный** интервал $(f_1,f_2)\equiv(-f_p,f_p)$, содержащий $P_Д$:

$$\mathbf{P}\left\{f_1<2a\sum_{i=1}^{n}\xi_i<f_2\right\}=P_Д \text{ для } \textbf{любого } a. \qquad \textbf{(5.9)}$$

Разрешаем двойное неравенство, стоящее под знаком вероятности, относительно параметра a:

$$f_1<2a\sum_{i=1}^{n}\xi_i<f_2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{f_1}{2\sum_{i=1}^{n}\xi_i}<a<\frac{f_2}{2\sum_{i=1}^{n}\xi_i} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{f_1}{2n\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i}<a<\frac{f_2}{2n\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{f_1}{2n}\cdot\hat{a}<a<\frac{f_2}{2n}\cdot\hat{a}. \quad\Leftrightarrow$$

поскольку $n \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i = \hat{a}$. В результате получаем равенство, равносильное **(5.9)**:

$$\mathbf{P} \; \frac{f_1}{2n}\hat{a} < a < \frac{f_2}{2n}\hat{a} \; = P_{Д} \text{ для } \textbf{любого } a.$$

Мы нашли **доверительный** интервал $I_a \equiv \frac{f_1}{2n}\hat{a}, \frac{f_2}{2n}\hat{a}$, который накрывает значение параметра a с заданной вероятностью $P_Д$ при **любом** значении параметра a.

5.3. Использование асимптотической нормальности оценок

Случайная величина X задана **функцией** распределения $F(x;a)$ с **неизвестным** параметром a. По выборке $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ найти **доверительный интервал** $I_a(\xi)$ для параметра a с коэффициентом доверия $P_Д$.

Пусть оценка параметра a **асимптотически нормальна**:

$$\hat{a}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \sim N \; a, \sigma_n^2(a) \; .$$

Нормируем эту оценку:

$$\frac{\hat{a} - a}{\sigma_n(a)} \sim N(0;1).$$

Тогда **доверительный** интервал $a_1(\hat{a}) < a < a_2(\hat{a})$ для параметра a получается из условия

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\hat{a} - a}{\sigma_n(a)}\right| < f_p\right\} = P_Д .$$

Замечание 5.2. Можно сделать немного иначе: взять **асимптотически нормальную** оценивающую статистику $\zeta = \zeta(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ и определить её параметры: $\zeta \sim N \; m(a), \sigma_n^2(a)$. Тогда в качестве **центральной статистики** можно взять следующую СВ:

$$\frac{\zeta - m(a)}{\sigma_n(a)} \sim N(0;1).$$

Доверительный интервал получаем, разрешая относительно параметра a неравенство $\left|\frac{\zeta - m(a)}{\sigma_n(a)}\right| < f_p$, **верное** с вероятностью $P_Д$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

5.1 (интервал для параметра простейшего потока). Считая поток автомобилей на автостраде **простейшим**, определить **доверительный** интервал для **интенсивности** потока $\lambda \; \frac{\text{ед.}}{\text{мин}}$, если за время $N = 5$

мин прошло $x = 150$ машин. Принять **доверительную** вероятность равной $P_Д = 0{,}95$.

5.2 [2]. Результаты 10 измерений ёмкости конденсатора прибором, не имеющим систематической ошибки, дали такие отклонения от номинала (пкФ): 5,4; $-13{,}9$; -11; $7{,}2$; $-15{,}6$; $29{,}2$; $1{,}4$; $-0{,}3$; $6{,}6$; $-9{,}9$. Найти **90%**-процентный **доверительный интервал** для **дисперсии** и среднего квадратического отклонения.

5.3 [2].Для определения вертикального угла ориентира используют среднее арифметическое нескольких замеров угла при помощи секстанта. Для углов, измеряемых секстантом, СКО принимается равным $\sigma = 1{,}5'$. Найти количество замеров, которое нужно произвести, чтобы:

а) погрешность результата с вероятностью 0,99 не превосходила $1'$;

б) погрешность результата с вероятностью 0,95 не превосходила $1{,}5'$.

5.4 [2].Показать, что если дисперсия обеих совокупностей известны, то доверительный интервал для разности средних $(m_1 - m_2)$ определяется формулой:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < m_1 - m_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},$$

где $u_{1-\alpha/2}$ — квантиль уровня $(1-\alpha/2)$ стандартного нормального распределения $N(0;1)$.

5.5 [2].Пусть $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, величина σ^2 **неизвестна**, а в качестве оценки σ^2 используется статистика

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 - n_2 - 2}.$$

Показать, что **доверительный интервал** для разности средних $(m_1 - m_2)$ определяется формулой

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < m_1 - m_2 <$$

$$< (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},$$

где $t_{1-\alpha/2} \cdot k$ — квантиль распределения Стьюдента с k степенями свободы.

5.6 [2].Для проверки утверждения о том, что вероятность p отказа прибора равна **0,01**, было проведено испытание **100** приборов, при этом **один** из приборов **отказал**. Построить **95%**-ную **верхнюю** границу **одностороннего доверительного** интервала для параметра p по этим данным.

5.7 [2].Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — выборка из генеральной совокупности, имеющей распределение Пуассона с **неизвестным** параметром λ.

Показать, что при достаточно больших n доверительный интервал приближённо имеет вид

$$\overline{x} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}}{n}} < \lambda < \overline{x} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}}{n}},$$

где $u_{1-\alpha/2}$ — квантиль уровня $(1-\alpha/2)$ стандартного нормального распределения $N(0;1)$.

5.78[2]. На каждой из 36 АТС города в период с двух до трёх часов было зафиксировано в среднем 2 вызова. Считая, что число вызовов для каждой АТС имеет распределение Пуассона с одним и тем же параметром λ, приближённо найти доверительный интервал для параметра λ с доверительной вероятностью 0,9.