МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 7 Доверительные границы -3

Замечание. *Общая логика* построения доверительного множества по статистике ζ заключается в следующем. Закон распределения ζ известен.

Для каждого значения параметра *a* построим множество Z(*a*) значений z случайной величины ζ вероятности $P_Д$; конечно, оно зависит от *a*,

$$Z = Z(a) = \{z: P(Z) = P_Д\} \text{ при любом } a,$$

$$P\{\zeta \in Z(a)\} = P_Д \quad \forall\ a.$$

Далее для любого *z* построим множество A(z) значений параметра *a*, включив в него те значения *a*, для которых Z(*a*) содержит *z*:

$$A(z) = \{a: z \in Z(a)\}, \text{ т.е. } a \in A(z) \Leftrightarrow z \in Z(a),$$

Введем случайное множество A(ζ); оно содержит истинное значение *a* с вероятностью $P_Д$:

$$P\{A(\zeta) \ni a\} = P\{\zeta \in Z(a)\} = P_Д \ \forall\ a.$$

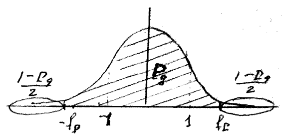
Итак, множество A(ζ) является доверительным с уровнем доверия $P_Д$.

§ 7. Интервалы при больших выборках

7.1. Использование асимптотической нормальности оценок.

Пусть по выборке $\xi = (\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$ оценивается неизвестный параметр *a*, и пусть оценка $\hat{a} = \hat{a}(\xi)$ асимптотически нормальна со средним *a* и дисперсией $\sigma_n^2(a)$, зависящей от неизвестного параметра *a*. Рассмотрим нормированную погрешность

$$\varphi(\xi, a) = \frac{\hat{a}(\xi) - a}{\sigma_n(a)}. \qquad (16)$$



Эта случайная величина распределена приближенно по нормальному закону *N*(0,1) при любом значении параметра *a*. По заданному значению доверительной вероятности $P_Д$ определяем симметричный интервал ($-f_P$, f_P), который несет в себе вероятность $P_Д$ нормального *N*(0,1) распределения, и потому при любом значении параметра *a* верно приближенное соотношение:

$$P\{|\varphi(\xi, a)| < f_P\} \approx P_Д, \ \forall\ a.$$

Полагая монотонность φ по *a* и разрешая под знаком вероятности неравенства

$$-f_P < \frac{\hat{a}(\xi) - a}{\sigma_n(a)} < f_P, \qquad (16a)$$

относительно *a* (заметим, что *зависимость от параметра входит в знаменатель*), получим соотношение

$$P\{g_1(\hat{a}, f_P) < a < g_2(\hat{a}, f_P)\} \approx P_Д,$$

верное при любом значении параметра *a*. Это означает, что $(g_1(\hat{a}, f_P), g_2(\hat{a}, f_P))$ является доверительным интервалом коэффициентом доверия, приближенно равным $P_Д$.

Замечание. Сказанное можно обобщить. Вместо оценки $\hat{a}(\xi)$ можно рассматривать любую статистику $\zeta = \zeta(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$, распределенную приближенно нормально с мат. ожиданием

$m(a)$ =Mζ и дисперсией $\sigma^2(a)$ =Dζ.

Пронормировав ζ, вместо (16), получаем с.в. :

$$\varphi(\zeta, a) = \frac{\zeta - m(a)}{\sigma_n(a)} \sim N(0,1)$$

Все остальное будет справедливым, в результате получим доверительный интервал, основанный на статистике $\zeta(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$.

7.2. Примеры

А. Доверительный интервал для вероятности. Пусть

$P(A) = p$ — неизвестная вероятность некоторого события *A*,

и ξ — число появлений А в серии *n* независимых испытаний. Несмещенной оценкой для *p* является

$$\hat{p} = \xi / n,$$

которая по теореме Муавра-Лапласа при больших значениях числа испытаний *n* является асимптотически нормальной с параметрами

$$\mathrm{M}\hat{p} = \mathrm{M}\frac{\xi}{n} = p, \quad \mathrm{D}\hat{p} = \mathrm{D}\frac{\xi}{n} = \frac{p(1-p)}{n} = \sigma_n^2(p),$$

и потому нормированная погрешность

$$\varphi(\hat{p}, p) = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_n(p)} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \quad \sim N(0,1)$$

распределена приближенно по нормальному закону $N(0,1)$ при любом значении параметра *a*. По заданной доверительной вероятности $P_Д$ выбираем симметричный интервал $(-f_P, f_P)$, содержащий вероятность $P_Д$

$$P\{|\varphi(\hat{p}, p)| < f_P\} \approx P_Д \quad \forall p \qquad (*)$$

Разрешая неравенство $|\varphi(\xi, p)| < f_P$ после возведения в квадрат

$$\varphi^2(\hat{p}, p) = \left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\right)^2 < f_P^2$$

относительно параметра *p*, получаем два корня p_1, p_2 -функции оценки $\hat{p}$

$$p_{1,2} = \left[(\hat{p} + f_P^2/2n) \pm f_P\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \frac{f_P^2}{4n^2}}\right] \Bigg/ \left(1 + \frac{f_P^2}{n^2}\right).$$

Получаем запись соотношения (*) в другом виде, где фигурирует случайный интервал, накрывающий неизвестный параметр с большой вер-тью $\approx P_Д$:

$$P\{p_1(\hat{p}, f_P, n) < p < p_2(\hat{p}, f_P, n)\} \approx P_Д,$$

При больших n формула упрощается:

$$p_{1,2} \approx \hat{p} \pm f_P\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \hat{p} \pm f_P\sigma_n(\hat{p}).$$

При малых значениях n, когда нельзя пользоваться приближенной нормальностью,
пользуются статистическими таблицами, в которых для заданных n и $P_Д$ и полученному значению оценки $\hat{p}$ указаны левый и правый концы интервала.

Б. Доверительный интервал для коэффициента корреляции. Пусть имеется пара случайных величин (ξ, η), для которых по имеющейся выборке (ξ_1, η_1), $(\xi_2, \eta_2)\ldots(\xi_n, \eta_n)$ нужно определить доверительный интервал для коэффициента корреляции

$$r = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi\sigma_\eta} = \frac{\mathrm{M}(\xi^0\eta^0)}{\sqrt{\mathrm{D}\xi\cdot\mathrm{D}\eta}} = \frac{\mathrm{M}(\xi\eta) - \mathrm{M}\xi\cdot\mathrm{M}\eta}{\sqrt{\mathrm{D}\xi\cdot\mathrm{D}\eta}}$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{\xi-\mathrm{M}\xi}{\sigma_\xi}\frac{\eta-\mathrm{M}\eta}{\sigma_\eta}\right) = M(\Delta\xi\cdot\Delta\eta) \qquad \text{где} \quad \Delta\xi = \frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi},\ \Delta\eta = \frac{\eta - M\eta}{\sigma_\eta},$$

Напомним практический смысл коэффициента корреляции: если среднее приращение одной компоненты $\mathrm{M}(\Delta\xi|\Delta\eta)$ при изменении другой $\Delta\eta$ связаны линейно, т.е.

$\mathrm{M}(\Delta\xi|\Delta\eta) = cM\Delta\eta$, то коэффициент связи $c = r$.

И потому прогноз $\hat{\xi}(\eta)$ одной компоненты ξ по другой η определяется значением r:

$$\hat{\xi}(\eta) = M(\xi|\eta = y) = M(\xi) + r\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(y - M\eta)$$

Итак, построим дов. интервал. Методом моментов получаем оценку для r:

$$\hat{r} = \frac{\overline{\xi\eta} - \overline{\xi}\cdot\overline{\eta}}{s_\xi\cdot s_\eta}, \qquad \text{- выборочный коэф. корр.}$$

где обозначено

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \overline{\eta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i, \overline{\xi\eta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i,\ s_\xi = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi_i})^2},\ s_\eta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - \overline{\eta})^2}.$$

Если распределение случайных величин (ξ, η) является нормальным, оценка $\hat{r}$ распределена при больших n приближенно нормально [4] (Большев Л.Н. Таблицы математической статистики), причем

$$\mathrm{M}\hat{r} = r, \quad \mathrm{D}\hat{r} = \frac{(1-r^2)^2}{n-1}.$$

Этого достаточно, чтобы определить приближенный доверительный интервал:

$$\frac{\hat{r}-r}{(1-r^2)}\sqrt{n-1} \sim N(0,1)$$

(но дисперсия зависит от неизвестного параметра).

Более удобным в вычислительном плане является другой способ, основанный на z-преобразовании Фишера:

$$z = z(\hat{r}) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\hat{r}}{1-\hat{r}}.$$

Эта статистика распределена приближенно (при $n \geq 20$) по нормальному закону, [4], со средним

$$m_z(r) \approx \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} + \frac{r}{2(n-3)}$$

и дисперсией $\sigma^2 \approx 1/(n-3)$, не зависящей от r. Пронормируем, получим статистику

$$\sqrt{n-3}(z - m_z(r)) \sim N(0,1),$$

она приближенно нормальна. Выбираем симметричный интервал, и имеем с вероятностью $\approx P_Д$ неравенство:

$$\left|\sqrt{n-3}(z - m_z(r))\right| < f_P,$$

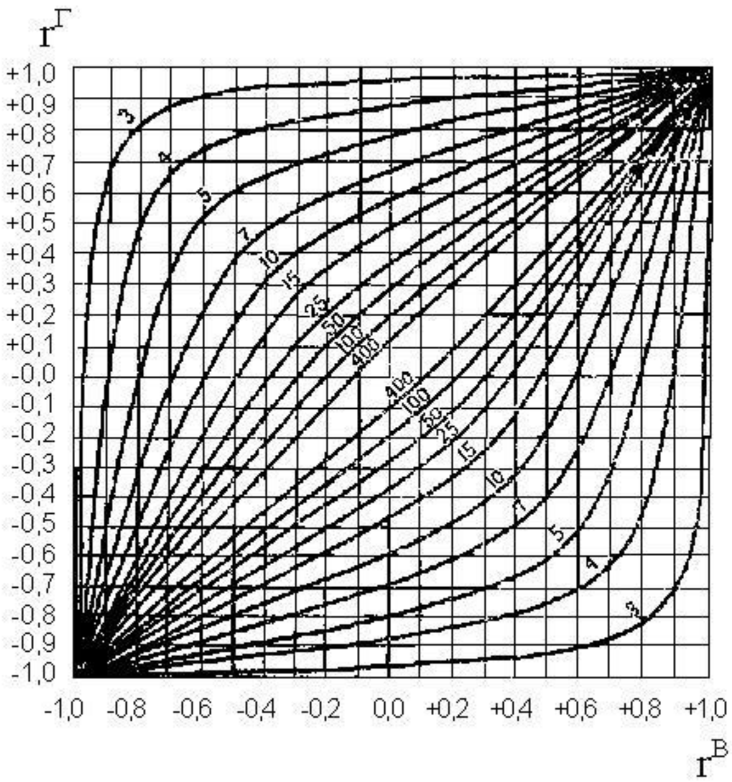
где $f_P = Q((1+P_Д)/2)$ — квантиль уровня $(1 + P_Д)/2$ нормального распределения. Разрешая неравенство относительно r:

$$m_z^{-1}\left(z - f_P/\sqrt{n-3}\right) < r < m_z^{-1}\left(z + f_P/\sqrt{n-3}\right),$$

получаем доверительный интервал; здесь $m_z^{-1}(\cdot)$ - функция, обратная к $m_z(\cdot)$. В статистических таблицах (а также в номограммах, например, [4]) даны интервалы для заданных n, $P_Д$ и $\hat{r}$. Для примера укажем, что при $P_Д = 0{,}95$ и $\hat{r} = 0{,}8$ интервалы оказываются такими:

(0,32; 0,95) при n = 10, (0,53; 0,92) при n = 20. .

Номограммы для интервалов коэффициента корр. и для неизвестной вероятности устроены одинаково.



ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Задачи проверки статистических гипотез возникают в ситуациях следующего общего вида. Есть предположение (гипотеза H) о чем-то неизвестном, что непосредственно недоступно для наблюдения. Имеются данные наблюдений случайного характера, в законе распределения предположение отражается в виде некоторого свойства. Проверить гипотезу H означает ответить на вопрос, обладает ли закон распределения наблюдений этим свойством. В первом приближении предполагается два возможных ответа:

«да» или «нет».

Примеры возможных вопросов.

1. Есть ли связь между двумя признаками человека: ξ — цветом глаз и η — характером? Каждый признак имеет несколько уровней:

x_i, $i = 1, 2 \ldots m$, y_j, $j = 1, 2 \ldots k$;

каждый человек представлен парой значений x_i, y_j.

Имеются данные по совокупности из n человек.

По этим данным требуется гипотезу H (связи нет), что означает ответить на вопрос: равна ли вероятность $P(x_i\,,\ y_j)$ встретить любое сочетание $(x_i\,,\ y_j)$ признаков произведению вероятностей $P(x_i)P(y_j)$

$$P(x_i\,,\ y_j) = P(x_i)P(y_j)?$$

2. Имеются данные о числе отказов ν_0 устройства до модификации (например, ν_0=30 отказов) и ν_m - после модификации (например, ν_m=20 отказов), причем в последнем случае отказов меньше ($\nu_m < \nu_0$). Можно ли считать, что надежность увеличилась после модификации, или наблюдаемое уменьшение числа отказов вызвано чисто случайными факторами? Этот вопрос сводится к проверке гипотезы о том, равны ли вероятности отказа в обоих случаях:

$$p_m = p_0?$$

Один простой пример рассмотрим подробно.

3. *Гипотеза о симметричности монеты*. Проведено n бросаний монеты, при этом выпало m гербов. Можно ли считать, что монета симметрична в следующих трех случаях?

а) n = 10 бросаний, m = 6 гербов;

б) n = 100 бросаний, m = 60 гербов;

в) n = 1000 бросаний, m = 600 гербов.

В первом случае нет оснований подозревать несимметрию, поскольку имеем *типичный результат* при симметричной монете.

В третьем случае, как подсказывает жизненный опыт, результат слишком сильно отличается от того, который был бы при симметричной монете, т.е. в окрестности значения 500. *Отклонение 100 от м.о. 500 слишком велико* (дисперсия числа гербов 1000*1/2*1/2=250, с.к.о. ≈ 16, отклонение 100 от м.о.- это 9 с.к.о. Это противоречит предположению о симметрии: слишком мала вероятность-почти невозможно.

Второй случай промежуточный, и наш опыт не позволяет сделать уверенный вывод. Проведем рассуждения и расчеты.

Ясно, что если отклонение от среднего значения слишком велико, то следует признать, что монета несимметрична. Но что значит «отклонение слишком велико»? Это значит, что слишком мала вероятность такого отклонения, поскольку чем больше отклонение, тем оно менее вероятно.

Определим вероятность получения на симметричной монете отклонения не меньшего наблюдаемого, и если она слишком мала, т.е. меньше, чем выбранное α, то гипотезу о симметрии отклоним.

Эту же мысль можно выразить иначе. Определим при симметричной монете типичный диапазон возможных значений (т.е. диапазон, в котором практически достоверно, с вероятностью $(1 – \alpha)$, должны находиться наблюдения). Если наблюдения не попали в этот диапазон, гипотезу о симметрии отклоним.

Пусть ξ — случайная величина, число выпадений герба. В наших трех случаях вероятности получения на симметричной монете (при истинности гипотезы H) отклонений, не меньших наблюденных, таковы:

а) $P\{|\xi - 5| \geq 1| H\} \approx 0{,}75$;

б) $P\{|\xi - 50| \geq 10| H\} \approx 0{,}12$;

в) $P\{|\xi - 500| \geq 100| H\} \approx 10^{-8}$.

В случае (б) нет оснований считать монету несимметричной, поскольку вероятность 0,12 получить отклонение 10 или более не так уж мала; диапазон от 41 до 59 маловат для того, чтобы считать его практически достоверным, поскольку с немалой вероятностью 0,12 можно не попасть в этот диапазон. В случае (в) вероятность 10^{-8} слишком мала, чтобы верить в осуществление события $|\xi - 500| \geq 100$.

Итак, действуем по следующей схеме. Предполагаем, что гипотеза Н истинна (монета симметрична). В этом предположении определяем вероятность отклонения от «нормы» (в данном случае, среднего значения) на величину наблюденного значения иди большего. Если вероятность слишком мала, меньше, чем некоторое α, гипотезу следует признать неверной (т.е. следует признать, что *наблюдения противоречат гипотезе*).

Величина α — вопрос выбора. Чтобы выбрать α, нужно ответить на вопрос: можно ли пренебречь возможностью ошибиться, если вероятность ошибки оценивается величиной α? Ответ зависит от тяжести последствий возможной ошибки.

Например, если событие «опоздание на электричку» имеет вероятность 0,1, то мы можем пренебречь этим событием, т. к. потери в случае его осуществления невелики: ожидание не более десяти-двадцати минут.

Но если событие «опоздание на самолет в Австралию» имеет вероятность 0,1, то мы не будем пренебрегать этим событием, т. к. потери в случае его осуществления окажутся весьма большими.

Есть один весьма общий метод проверки самых разных стат. гипотез

§ 8. Критерий хи-квадрат Пирсона проверки гипотез

Критерий хи-квадрат является весьма общим методом построения тестов (процедур) для проверки различных гипотез. Чтобы воспользоваться этим критерием, выборочные данные предварительно группируют, т.е. переходят к частотному представлению данных. Рассмотрим исходную схему.

8.1. Простая гипотеза о вероятностях

Пусть результатом одного наблюдения могут быть

$A_1, A_2...A_m$ — m возможных исходов (например, 6 граней кубика). Обозначим:

$p_1, p_2...p_m$ — соответствующие истинные (неизвестные) вероятности, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$,;

n — число независимых наблюдений

$v_1, v_2 \ldots v_m$ — число появлений соответствующих исходов в n опытах, $\sum_{i=1}^{m} \nu_i = n$;

$p_1^0, p_2^0...p_m^0$ — *теоретические* (*гипотетические*) значения вероятностей, $p_i^0>0$, $\sum_{i=1}^{m} p_i^0 = 1$.

Требуется по наблюдениям $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_m$ проверить гипотезу H о том, что истинные вероятности $p_1, \ldots, p_m$ имеют значения $p_1^0, p_2^0 \ldots p_m^0$, т.е.

$$H:\ p_i = p_i^0,\ i=1, 2 \ldots m.$$

Оценим по наблюдениям $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_m$ неизвестные вероятности $p_1, p_2 \ldots p_m$.

Пусть $\hat{p}_1 = \nu_1 / n \ldots \hat{p}_m = \nu_m / n$ — оценки вероятностей. Мерой расхождения между теоретическими (гипотетическими) $p_1^0, p_2^0 \ldots p_m^0$ и эмпирическими $\hat{p}_1, \hat{p}_2 \ldots \hat{p}_m$ вероятностями принимается величина

$$X^2 = n \sum_{i=1}^{m} p_i^0 \left(\frac{\hat{p}_i - p_i^0}{p_i^0} \right)^2,$$

которая с точностью до множителя n есть усредненное (при истинности H) значение квадрата относительного отклонения оценок $\hat{p}_i$ от теоретических значений p_i^0. Статистика X^2 называется статистикой хи-квадрат Пирсона. Для ее вычисления используются две эквивалентные формулы:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\nu_i - np_i^0)^2}{np_i^0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i^2}{np_i^0} - n. \qquad (1)$$

Условно статистику X^2 можно записать так:

$$X^2 = \sum \frac{(\mathrm{Н} - \mathrm{Т})^2}{\mathrm{Т}},$$

где Н — наблюдаемые частоты ν_i, Т — теоретические (ожидаемые) частоты np_i^0.

Поскольку по закону больших чисел $\hat{p}_i \to p_i$ при $n \to \infty$, то

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^0 \left(\frac{\hat{p}_i - p_i^0}{p_i^0} \right)^2 \to \sum_{i=1}^{m} \frac{(p_i - p_i^0)^2}{p_i^0}.$$

Последняя величина равна 0, если верна H ($p_i = p_i^0$).

Если же H неверна, то она равна некоторому $\varepsilon > 0$, и тогда

$$X^2 \to n\varepsilon \to \infty \text{ при увеличении } n.$$

И потому процедура проверки гипотезы состоит в том, что если величина X^2 принимает «слишком большое (критическое)» значение h, т.е.

$$\text{если } X^2 \geq h, \text{ то гипотеза } H \text{ отклоняется}. \qquad (2)$$

Если это не так, будем говорить, что *«наблюдения не противоречат гипотезе»*. На вопрос, что означает «слишком большое» значение, отвечает теорема Пирсона.

Теорема К. Пирсона. Если гипотеза H верна и $0 < p_i^0 < 1$, $i = 1, 2 \ldots m$, то при $n \to \infty$ распределение статистики X^2 асимптотически подчиняется распределению хи-квадрат с $(m - 1)$ степенями свободы, т.е.

$$P\{X^2 < x / H\} \to F_{m-1}(x) \equiv P\{\chi^2_{m-1} < x\}.$$

Покажем, как возникает распределение хи-квадрат. Рассмотрим частный случай $m = 2$. Действительно, так как $\nu_2 = n - \nu_1$, $p_2^0 = 1 - p_1^0$ имеем

$$\frac{(\nu_2 - np_2^0)^2}{np_2^0} = \frac{(\nu_1 - np_1^0)^2}{n(1 - p_1^0)},$$

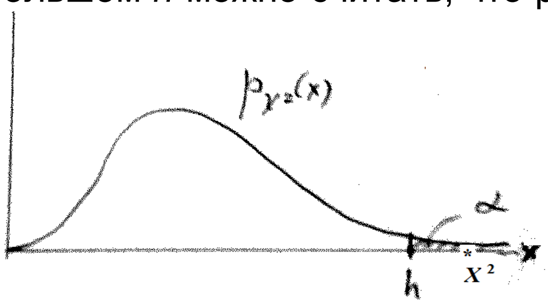
и статистика X^2 принимает вид

$$X^2 = \frac{(\nu_1 - np_1^0)^2}{np_1^0} + \frac{(\nu_2 - np_2^0)^2}{np_2^0} = \frac{(\nu_1 - np_1^0)^2}{n}\left(\frac{1}{p_1^0} + \frac{1}{1 - p_1^0}\right) = \frac{(\nu_1 - np_1^0)^2}{np_1^0(1 - p_1^0)}. \qquad (3)$$

Если H верна, то ν_1 подчиняется биномиальному распределению $Bi(n, p_1^0)$ с параметрами n и p_1^0, а отношение $\dfrac{\nu_1 - np_1^0}{\sqrt{np_1^0(1 - p_1^0)}}$, в силу теоремы Муавра-Лапласа, асимптотически нормально $N(0,1)$. В правой части (3) имеем квадрат этого отношения, что означает сходимость соответствующего распределения к распределению хи-квадрат с одной степенью свободы.

Для произвольного m теорема доказывается методом полной математической индукции.

Теорема означает, что если гипотеза H верна, то при достаточно большом n можно считать, что распределение статистики X^2 подчиняется хи-квадрат распределению.



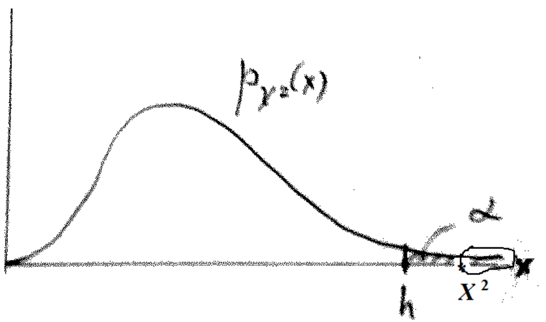
Порог (критическое значение) h в (2) выберем из условия, что *вероятность ошибки первого рода*, т.е. вероятность отклонения гипотезы, когда она верна, должна быть достаточно малой, т.е. равной выбираемому значению α — уровню значимости (рис.10):

$$P\{\text{отклонить } H \mid H \text{ верна}\} = P\{X^2 \geq h \mid H\} \cong P\{\chi^2_{m-1} \geq h\} = \alpha,$$

откуда

$$h = Q(1 - \alpha, m - 1) \qquad (3а)$$

квантиль уровня $(1 - \alpha)$ распределения хи-квадрат с $(m - 1)$ степенями свободы.



Решения (2) и (3а) процедуры проверки H могут быть записана иначе в эквивалентном виде: гипотеза H отклоняется, если

$$X^2 \geq h \quad \Leftrightarrow \alpha = \int_h^\infty p(x)dx \geq \int_{X^2}^\infty p(x)dx$$

$$P\{\chi^2_{m-1} \geq X^2\} \leq \alpha, \qquad (4)$$

т.е. если мала вероятность

Рис. 10. Выбор критического значения

получения расхождения (при справедливости H) не меньшего, чем в опыте. Вероятность слева в (4) называется минимальным уровнем значимости. При любом значении α, большем $P\{\chi^2_{m-1} \geq X^2\}$, гипотеза отклоняется.

Замечание. Теорему Пирсона можно применять, если $n > 50$, все наблюдаемые частоты

$$\nu_i \geq 5, \quad i=1, 2 \ldots m \qquad (5а)$$

и теоретические частоты

$$np_i^0 \geq 10, \quad i=1, 2 \ldots m. \qquad (5б)$$

Если (5) не выполняется, необходимо объединять некоторые исходы из множества $A_1, A_2 \ldots A_m$.

Пример. Имеется механизм, который предназначен генерировать случайную величину, принимающую с равными вероятностями $p = 0{,}1$ значения 0, 1...9. В табл. 3 приведены количества цифр, появившихся в результате $n = 200$ независимых наблюдений.

Табл. 3. Результаты наблюдений

цифры	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ν_i	35	16	15	17	17	19	11	16	30	24
$\nu_i - np_i^0$	- 15	- 4	- 5	- 3	- 3	- 1	- 9	- 4	10	4

Необходимо проверить гипотезу о том, что каждая цифра появляется с равной вероятностью $p = 0{,}1$. В этом примере $np_i^0 = 20$, значение $X^2 = [(-15)^2 + (-4)^2 + \ldots + (-4)^2]/20 = 24{,}9$. Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ порог h равен 16,9, т.е.ь $P\{\chi_9^2 > 16{,}9\}$ = 0,05. Поскольку $X^2 > h$, гипотезу о равных вероятностях следует отклонить. Судя по табличным данным вероятности цифр 0 и 8 превосходят 1/10, а вероятность цифры 6 меньше $1/10$.

Свойство состоятельности критерия. Решающее правило, описанное формулами (2) и (3а), обладает важным свойством *состоятельности: если гипотеза Н неверна, то с ростом числа наблюдений оно отклоняет гипотезу с вероятностью, стремящейся к* 1. Это свойство выражается следующим соотношением для мощности *W(p)* критерия:

$$W(p) \equiv P\{\text{отклонить } H \,|\, \bar{H} : p, p \neq p^0\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Важную характеристику, мощность $W(p)$, можно определить приближенно, опираясь на следующую теорему.

Теорема (б.д.). Если гипотеза неверна, то при $n \to \infty$ распределение статистики X^2 сходится к распределению $\chi^2_{m-1}(a)$ — нецентральному хи-квадрат с числом степеней свободы $(m-1)$ и параметром нецентральности a, причем

$$a = n\sum_{i=1}^{m}\frac{(p_i - p_i^0)^2}{p_i^0}.$$

Эта формула получается из (1) заменой наблюдаемых частот ν_i на истинные np_i (т.е. на $M\nu_i$).

И потому

$$W(p) = P\{X^2 \geq h \,|\, \bar{H} : p, p \neq p^0\} \approx P\{\chi^2_{m-1}(a) \geq h\}$$

Справка о нецентральном распределении хи-квадрат $\chi^2_k(a)$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ — независимы и нормально распределены по $N(0,1)$. Составим случайную величину

$$(\alpha_1 + a_1)^2 + (\alpha_2 + a_2)^2 + \ldots + (\alpha_k + a_k)^2 ,$$

где $a_1, a_2 \ldots a_k$ — произвольные константы. Нетрудно увидеть, что распределение этой случайной величины зависит не от k параметров $a_1, a_2 \ldots a_k$, а только от суммы их квадратов:

$$a = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 .$$

Это означает, что составленную случайную величину можно представить в виде:

$$\chi^2_k(a) = (\alpha_1 + \sqrt{a})^2 + \alpha_2^{\,2} + \ldots + \alpha_k^2 .$$

Первые два момента:

$$M\chi^2_k(a) = k + a, \qquad D\chi^2_k(a) = 2k + 4a.$$

При увеличении k, согласно центральной предельной теореме, распределение асимптотически нормально $N(k + a, 2k + 4a)$. Если воспользоваться этим приближением, то для функции мощности приближенно будем иметь

$$W(p) = P\{X^2 \geq h \,|\, \bar{H} : p, p \neq p^0\} \approx P\{\chi^2_{m-1}(a) \geq h\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{h - (m - 1 + a)}{\sqrt{2(m-1) + 4a}}\right).$$

Существует более точное приближение для $\chi^2_k(a)$ — приближение Патнайка. Оно основано на приближении $\chi^2_k(a)$ величиной $c\chi^2_m$, где c и m подбираются из условий равенства первых двух моментов:

$$k + a = cm, \qquad 2k + 4a = c^2 2m;$$

результат подбора:

$$c = (k+2a)/(k+a),\ m = (k+a)^2/(k+2a).$$

Тогда функция распределения приближенно:

$$P\{\chi_k^2(a) < x\} \approx P\{c\chi_m^2 < x\} = P\{\chi_m^2 < x/c\}.$$