Вопрос 102, 103, 104

19.102. В качестве оценки математического ожидания m генеральной совокупности по выборке $x_1, \ldots, x_n$ предлагается взять статистику $\tilde{m}_1 = x_1$. Проверить несмещенность и состоятельность этой оценки.

19.103. Рассмотрим две выборки объемов n_1 и n_2 из одной генеральной совокупности со средним m и дисперсией σ^2. Пусть $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, S_1^2 и S_2^2 — несмещенные оценки средних и дисперсий, определенные по этим выборкам. Показать, что объединенные оценки, вычисляемые по формулам

$$\overline{X} = \frac{n_1 \overline{X}_1 + n_2 \overline{X}_2}{n_1 + n_2},$$

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

будут несмещенными и состоятельными оценками m и σ^2.

19.104*. Случайная величина X имеет распределение с плотностью $f_X(x)$, равной e^{a-x} при $x \geqslant a$ и 0 при $x < a$. Для оценки неизвестного параметра a по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наблюдений случайной величины X предлагается выбрать статистику

$$\tilde{a} = x^{(1)} = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i.$$

Проверить несмещенность и состоятельность этой оценки.

103

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i, \bar{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} x_j$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{X}_1)^2, S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j=1}^{n_2}(x_j - \bar{X}_2)^2$$

$$\bar{X} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2}$$

$$M\bar{X} = \frac{n_1 M\bar{X}_1 + n_2 M\bar{X}_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 m + n_2 m}{n_1 + n_2} = m$$

$$\bar{X} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2} \xrightarrow[n_1 \to \infty, n_2 \to \infty]{} \frac{n_1 m + n_2 m}{n_1 + n_2} = m$$

имеется в виду сходимость по вероятности

$$S^2 = \frac{n_1 - 1\ S_1^2 + \ n_2 - 1\ S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$MS^2 = \frac{n_1 - 1\ MS_1^2 + \ n_2 - 1\ MS_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{n_1 - 1\ \sigma^2 + \ n_2 - 1\ \sigma^2}{n_1 + n_2 - 2} = \sigma^2$$

$$S^2 = \frac{n_1 - 1\ S_1^2 + \ n_2 - 1\ S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \xrightarrow[n_1 \to \infty, n_2 \to \infty]{} \frac{n_1 - 1\ \sigma^2 + \ n_2 - 1\ \sigma^2}{n_1 + n_2 - 2} = \sigma^2$$

имеется в виду сходимость по вероятности

104

$$\xi, p_\xi \ \ x \ = \begin{cases} e^{a-x}, x \ge a \\ 0, x < a \end{cases}$$

n независимых наблюдений: x_1, x_2,… x_n

Для оценки предлагается статистика

$$\hat{a} = x_{(1)} = \min_{1 \le i \le n} x_i$$

Несмещенность и состоятельность?

Нужно определить М.О. и второй момент

Закон распределения статистики

Ф-ция распределения:

$$F_{x_{(1)}}(y) = P \ \ x_{(1)} = \min_{1\le i\le n} x_i < y \ \ = 1 - P \ \ x_{(1)} = \min_{1\le i\le n} x_i \ge y \ \ =$$

$$= 1 - P \ \ x_1 \ge y, x_2 \ge y, \dots x_n \ge y \ \ = 1 - \prod_{i=1}^{n} P \ \ x_i \ge y \ \ = 1 - \prod_{i=1}^{n} P \ \ x_i \ge y \ \ =$$

$$= 1 - \ \ 1 - F_X \ \ y \ \ ^n$$

$$1 - F_X \ \ y \ \ = P \ \ X \ge y \ \ = e^{a-y}, y \ge a$$

Первое а)

$$\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \xi_i \sim F_\xi(x)$$

$$\eta = \max_{1\le i\le n} \xi_i$$

$$F_\eta(y) = P \ \ \eta = \max_{1\le i\le n} \xi_i < y \ \ = P \ \ \xi_1 < y, \xi_2 < y, \dots \xi_n < y \ \ = F_\xi^{\,n}(y)$$

$\sim$

$$p_\eta(y) = n F_\xi^{\,n-1}(y) p_\xi(y)$$

б)

$$1 - F_\eta(y) = P \ \ \min_{1\le i\le n} \xi_i \ge y \ \ = P \ \ \xi_1 \ge y, \xi_2 \ge y, \dots \xi_n \ge y \ \ = \ \ 1 - F_\xi(y) \ \ ^n$$

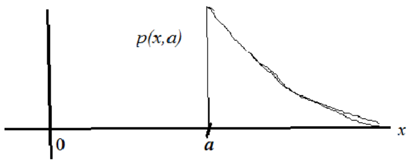
$$-p_\eta(y) = -n \ \ 1 - F_\xi(y) \ \ ^{n-1}(-p_\xi(y))$$

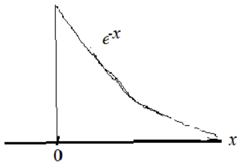
Второе

$$\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \xi_i \sim F_\xi(x)$$

$$\hat{a} = \eta = \min_{1 \le i \le n} \xi_i$$

$$\xi, p_\xi \;\; x \;\; = \begin{cases} e^{a-x}, x \ge a \\ 0, x < a \end{cases}$$





$$\xi = a + \xi_0, \ldots\ldots p_{\xi_0} \;\; x \;\; = \begin{cases} e^{-x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \ldots\ldots \xi_0 \sim E(1)$$

$$P \;\; \xi_0 \ge x \;\; = 1 - F_{\xi_0}(x) = \begin{matrix} e^{-x}, x \ge 0 \\ 1, x < 0, \end{matrix}$$

$$\eta = \min \xi_i \;\; = a + \min \xi_{0i} \;\; = a + \eta_0$$

$$M\eta = a + M\eta_0 \ldots D\eta = D\eta_0$$

$$P\{\xi_0 \ge x\} = 1 - F_{\xi_0}(x) = \begin{cases} e^{-x}, x \ge 0 \\ 1, x < 0 \end{cases}$$

$$p_{\eta 0}(y) = nP\{\xi_0 \ge y\}^{n-1} p_{\xi 0}(y) = n \;\; e^{-y} \;\;^{n-1} e^{-y} \;\; = ne^{-ny} \sim E(n)$$

$$\eta_0 \sim E(n) \ldots\ldots M\eta_0 = \frac{1}{n}, D\eta_0 \;\; = \;\; \frac{1}{n} \;\;^2$$

$$M\hat{a} = M\eta = M(a + \eta_0) = a + M\eta_0 \;\; = a + \frac{1}{n},$$

$$M \;\; \hat{a} - a \;\;^2 = M \;\; \eta - a \;\;^2 = M \;\; a + \eta_0 - a \;\;^2 = M \;\; \eta_0 \;\;^2 = D \;\; \eta_0 \;\; + \;\; M \;\; \eta_0 \;\;^2 = \frac{1}{n^2} + \left[\frac{1}{n}\right]^2 \xrightarrow{n \to \infty}$$

Тема 2.

НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ДЛЯ ДИСПЕРСИИ НЕСМЕЩЕННОЙ ОЦЕНКИ. ИНФОРМАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО РАО–КРАМЕРА

Оказывается, никаким выбором оценочной функции невозможно сделать дисперсию ошибки меньше, чем некоторое определенное значение.

Пусть

$$x \equiv (x_1, x_2, ..., x_n)$$

— результаты *n* наблюдений (не обязательно независимых), являющиеся конкретными значениями многомерной случайной величины

$$\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n).$$

$p(x;a)$-закон распределения известен с точностью до параметра a (будем считать $p(x;a)$ плотностью распределения, если ξ непрерывна, и вероятностью, если ξ дискретна).

$\varphi(\xi)$ - несмещенные оценки для величины $f(a)$ (здесь $f(\cdot)$— известная функция, а значение параметра *a* неизвестно).

$$M\varphi(\xi) = f(a)\forall a$$

Как обычно, рассматривая статистическую задачу, мы отвлекаемся от конкретных значений $x \equiv (x_1, x_2, ..., x_n)$, считая их одной из возможных реализаций многомерной случайной величины $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, и оценку $\varphi(\xi)$ рассматриваем как случайную величину.

2.1. Теорема (неравенство Рао–Крамера).

При некоторых условиях регулярности, для любой оценки $\varphi(\xi)$, несмещенно оценивающей $f(a)$, справедливо неравенство Рао–Крамера:

$$D\varphi(\xi) \geq \sigma_0^2 \equiv \frac{\left(f'(a)\right)^2}{I_\xi(a)}, \tag{1}$$

где

$$I_\xi(a) = M\left[\frac{\partial \ln p(\xi;a)}{\partial a}\right]^2 \equiv \int_X \left[\frac{\partial \ln p(x;a)}{\partial a}\right]^2 p(x;a)dx; \tag{2}$$

неравенство показывает, что дисперсия несмещённой оценки не может быть меньше величины σ_0^2— нижней границы Рао–Крамера , которая определяется правой частью и может быть вычислена заранее, если известен закон распределения.

Условия справедливости неравенства:

1. Множество $X_a = \{x : p(x,a) \neq 0\}$, где $p(x,a)$ отлично от 0, не зависит от параметра a, (это основное условие)

2. Функция $p(x;a)$ дважды дифференцируема по параметру a.

3. Существуют интегралы, которыми выражаются $D\varphi(\xi)$ и $I_\xi(a)$ в (1)

Величина $I_\xi(a)$ играет важную роль.

Определение. *Величина $I_\xi(a)$ в формуле (2) называется информацией Фишера, содержащейся в наблюдениях ξ, относительно параметра a.*

Следствие. Для функции $f(a) \equiv a$ неравенство Рао–Крамера принимает более простой вид:

$$D\varphi(\xi) \geq \sigma_0^2 \equiv \frac{1}{I_\xi(a)}. \tag{3 10}$$

2.2. Свойства информации Фишера

1. Справедлива следующая, удобная для вычислений, формула:

$$I_\xi(a) \equiv M\left[\frac{\partial \ln p(\xi;a)}{\partial a}\right]^2 = -M\frac{\partial^2}{\partial a^2}\ln p(\xi;a) \tag{4 11}$$

2. Аддитивность информации Фишера. *Информация, содержащаяся в n независимых наблюдениях, равна сумме информаций, содержащихся в отдельных наблюдениях.*

Пусть многомерная СВ $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ такова, что ξ_j — независимы и распределены по закону $q_j(x_j;a)$. Пусть $x \equiv (x_1, x_2, ..., x_n)$, тогда $p(x;a) = \prod_{j=1}^{n} q_j(x_j;a)$ и для информации Фишера в наблюдениях ξ справедлива формула:

$$I_\xi(a) = -M\frac{\partial^2 \ln p(\xi;a)}{\partial a^2} = \sum_{j=1}^{n} -M\frac{\partial^2}{\partial a^2}\ln q_j(\xi_j;a) = \sum_{j=1}^{n} I_j(a), \tag{5 12}$$

где $I_j(a)$ — информация, содержащаяся в одном наблюдении ξ_j.

Если, кроме того, все наблюдения распределены одинаково, т.е. $q_j(\cdot) = q(\cdot)$ для всех $j = \overline{1, n}$, то

$$I_\xi(a) = nI_1(a), \tag{6 13}$$

где $I_1(a) = M\left[\frac{\partial \ln q(\xi_1;a)}{\partial a}\right]^2$ — информация Фишера в одном наблюдении.

Следствие. Если $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ — выборка, то из (10) и (13) следует:

$$D\varphi(\xi) \geq \frac{C(a)}{n}. \tag{7 14}$$

Это означает, что в условиях, в которых справедливо неравенство Рао–Крамера, дисперсию оценки нельзя сделать убывающей быстрее, чем $1/n$.

Определение. *Оценка, дисперсия которой достигает нижней границы, определённой неравенством Рао – Крамера, называется эффективной*.

Пример 1. Докажем эффективность оценки среднего нормальной совокупности (математического ожидания нормального закона).~

Решение. Пусть

$\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ — выборка из n независимых СВ, распределённых по нормальному закону:

$\xi_i \sim N(m, \sigma^2), i = 1 \div n.$ Требуется установить эффективность несмещённой оценки

$$\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \equiv \overline{\xi}$$

среднего нормальной совокупности, т.е. доказать равенство

$D\hat{m} = \sigma_0^2$, где σ_0^2 —нижняя граница Рао–Крамера.

Доказательство проведём в два шага.

1-й шаг. Вычислим дисперсию предложенной оценки:

$$D\hat{m} = D\overline{\xi} = \frac{1}{n^2}D\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i = \frac{1}{n^2}\cdot nD\xi_1 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2-й шаг. Вычислим границу Рао–Крамера σ_0^2 для нормальной совокупности. В этом случае плотность вероятности имеет вид:

$$p(x;\, m, \sigma^2) = p(x_1, x_2, ..., x_n;\, m, \sigma^2) = \sqrt{2\pi\sigma^2}^{\,-n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2},$$

Тогда

$$\ln p(x;\, m, \sigma^2) = -\frac{n}{2}2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2,$$

далее вычисляем вторую производную по параметру:

$$\ln p(x;\, m, \sigma^2)\,'_m = -\frac{2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)\cdot(-1) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m) \quad \text{и}$$

$$\ln p(x;\, m, \sigma^2)\,''_{mm} = \frac{1}{\sigma^2}\cdot n \cdot (-1) = -\frac{n}{\sigma^2}.$$

Следовательно,

$$I_\xi(a) = -M\ \ln p(\xi;\, m, \sigma^2)\,''_{mm} = \frac{n}{\sigma^2}$$

и нижняя граница $\quad \sigma_0^2 \equiv \dfrac{1}{I_\xi(a)} = \dfrac{\sigma^2}{n}.$

Итак, мы доказали равенство

$$D\hat{m} = \sigma_0^2,$$

означающее эффективность оценки $\hat{m}=\overline{\xi}$ математического ожидания нормальной совокупности.

Пример 2. Оценка неизвестной вероятности события**.** Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$—результаты n независимых испытаний, в каждом из которых «успех» A может произойти с одной и той же вероятностью $P(A)=p$, которая неизвестна. СВ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ распределены по закону Бернулли:

$$\varepsilon_i=\begin{cases}1, \text{ если в } i\text{-м испытании произошло событие } A;\\ 0, \text{ если в } i\text{-м испытании произошло событие } \overline{A}.\end{cases}$$

Докажем эффективность оценки $\hat{p}$ вероятности *p*:

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i=\frac{\xi}{n}.$$

Здесь $\xi=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$ —число успехов в серии из n испытаний.

Решение. СВ ξ имеет биномиальное распределение:

$$P_\xi(x;\, a\equiv p)=P(\xi=x)=C_n^x p^x(1-p)^{n-x},\quad x\in\{0;\, 1;\, 2;\, ...;\, n\}.$$

В качестве неизвестного параметра a выступает вероятность p «успеха» в одном испытании.

1-й шаг. Вычислим дисперсию предложенной оценки:

$$D\hat{p}=D\,\frac{\xi}{n}=\frac{1}{n^2}D\xi=\frac{1}{n^2}np(1-p)=\frac{p(1-p)}{n}.$$

2-й шаг. Вычислим нижнюю границу дисперсии (границу Рао–Крамера) $\sigma_0^2=\dfrac{1}{I_\xi(p)}$,

используя для информации формулу

$$I_\xi(p)=-M\frac{\partial^2\ln P_\xi(\xi;\, p)}{\partial p^2}\ \text{(напоминаем, что } p\equiv a).$$

Произведём несложные вычисления:

$$\ln P_\xi(x;\, a\equiv p)=\ln C_n^x+x\ln p+(n-x)\ln(1-p),$$

$$\ln P_\xi(x;\, a\equiv p)''_{pp}=\left[\frac{x}{p}+(n-x)\frac{-1}{(1-p)}\right]'_p=-\frac{x}{p^2}-(n-x)\frac{1}{(1-p)^2}.$$

$$I_\xi(p)=-M\frac{\partial^2\ln P_\xi(\xi;\, p)}{\partial p^2}=M\left[\frac{\xi}{p^2}+(n-\xi)\frac{1}{(1-p)^2}\right]=\frac{M\xi}{p^2}+\frac{M(n-\xi)}{(1-p)^2}=$$

$$=\frac{np}{p^2}+\frac{(n-np)}{(1-p)^2}=\frac{n}{p}+\frac{n}{(1-p)}=n\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{1-p}\right)=.\ \frac{n}{p(1-p)}$$

Следовательно,

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{I_\xi(p)} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Мы доказали равенство

$$D\hat{p} = \sigma_0^2,$$

означающее эффективность оценки $\hat{p} = \frac{\xi}{n}$ вероятности. Лучше ничего не придумаешь.

Пример 3 (дискретный пример). Докажем эффективность оценки параметра распределения Пуассона.

Решение. Пусть $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ — выборка объема *n* наблюдений, (т.е. *n* независимых СВ), распределённых по закону Пуассона: $\xi_i \sim Po(a),\ i = \overline{1, n}$. Напомним, что

$$P\{\xi_i = x_i\} = \frac{a^{x_i}}{x_i!} e^{-a},\ x_i \in Z_+ \equiv \{0;\ 1;\ 2;\ ...\},\ i = 1 \div n;$$

$$M\xi_i = a,\ D\xi_i = a,$$

$$p(x;\ a) = \frac{a^{\sum x_i}}{x_1! \cdot ... \cdot x_n!} e^{-na},\ x \equiv (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Требуется установить эффективность несмещённой оценки параметра $a : \hat{a} = \varphi(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \equiv \overline{\xi}$, т.е. доказать равенство

$$D\hat{a} = \sigma_0^2,$$

где σ_0^2 — нижняя граница Рао – Крамера. Доказательство проведём в два шага.

1-й шаг. Проверим несмещённость этой оценки и вычислим её дисперсию:

$$M\hat{a} \equiv M\varphi(\xi) \equiv M\overline{\xi} = \frac{M\xi_1 + ... + M\xi_n}{n} = \frac{a \cdot n}{n} = a$$ — оценка несмещённая.

$$D\hat{a} = D\varphi(\xi) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\xi_i = \frac{na}{n^2} = \frac{a}{n}.$$

2-й шаг. Вычислим нижнюю границу дисперсии (границу Рао–Крамера) $\sigma_0^2 = \frac{1}{I_\xi(a)}$,

используя для информации формулу

$$I_\xi(a) = -M\frac{\partial^2 \ln p(\xi;\ a)}{\partial a^2}.$$

Произведём несложные вычисления:

$$\ln p(x;\ a) = -na + \ln a \sum_{i=1}^{n} x_i - \ln(x_1! \cdot ... \cdot x_n!),$$

$$\ln p(x;a)''_{aa} = \left[-n + \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} x_i\right]'_a = -\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

$$I_\xi(a) = -M\frac{\partial^2 \ln p(\xi;a)}{\partial a^2} = M\left[\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right] = \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n} M\xi_i = \frac{na}{a^2} = \frac{n}{a}.$$

Следовательно, $\sigma_0^2 = \frac{1}{I_\xi(a)} = \frac{a}{n} = D\varphi(\xi)$. Мы доказали равенство $D\hat{a} = \sigma_0^2$, означающее эффективность оценки $\hat{a} = \overline{\xi}$.

Дополнительная задача. Найти несмещённую оценку величины для a^2.

Решение. Поскольку оценкой для параметра a является $\overline{\xi}$, можно рассмотреть для a^2 оценку $\overline{\xi}^2$. Проверим её несмещённость:

$$M\overline{\xi}^2 = D\overline{\xi} + \left(M\overline{\xi}\right)^2 = \frac{a}{n} + a^2 \neq a^2;$$

предложенная оценка оказалась смещённой (на величину a/n); можно исправить оценку, если вычесть статистику $\overline{\xi}/n$, МО которой a/n); получим несмещенную оценку $\overline{\xi}^2 - \frac{\overline{\xi}}{n}$. Действительно,

$$M\overline{\xi}^2 - \frac{M\overline{\xi}}{n} = \left(\frac{a}{n} + a^2\right) - \frac{a}{n} = a^2$$ — оценка несмещённая.

2.3. Экспонентные семейства распределений

Из доказательства неравенства Рао – Крамера следует утверждение:

Лемма. *Если существует эффективная оценка $\varphi(x)$ для значения $f(a)$, то она представима в следующем виде:*

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{I_\xi(a)} \cdot \frac{\partial \ln p(x;a)}{\partial a}, \qquad (*)$$

где зависимость правой части от параметра a фиктивна.

Какие распределения допускают эффективное оценивание? Это соотношение можно понимать как дифференциальное уравнение относительно функции $p(\cdot;a)$ как функции переменной *а*. Проинтегрировав его по *а*, получаем вид распределения с плотностью

$$p_\xi(x;a) = C(x)\cdot e^{A(a)\varphi(x)}\cdot g(a),$$

В этой записи существенно то, что *множитель, зависящий от параметра* $\boldsymbol{a}$ *и от* $\boldsymbol{x}$, *есть экспонента со степенью произведения функции от* $\boldsymbol{a}$ *на функцию от* $\boldsymbol{x}$.

Семейство распределений, имеющих плотность этого вида, называется экспонентным. Распределения нормальное, биномиальное, геометрическое, Пуассона, гамма и некоторые другие, являются экспонентными и, следовательно, допускают эффективные оценки.

Пример 4. Выборка $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ объёма n извлечена из совокупности, распределённой по показательному закону с параметром a:

$$p_1(x; a) = ae^{-ax}, \ x \geq 0, \ a > 0.$$

Доказать тремя способами, что статистика

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \equiv \overline{\xi}$$

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{I_\xi(a)} \cdot \frac{\partial \ln p(x; a)}{\partial a},$$

является эффективной оценкой для величины $f(a) = \frac{1}{a}$:

1) непосредственной проверкой равенства $D\varphi(\xi) = \sigma_0^2$;

2) с помощью леммы, сформулированной выше;

3) с помощью факторизации экспонентного семейства распределений.

Решение.

1) Аналогично тому, что было выше, нетрудно проверить, что равенство $D\varphi(\xi) = D\overline{\xi}$ выполняется.

2) Вычислим правую часть равенства (*).

а) $f'(a) = \left(\frac{1}{a}\right)' = -\frac{1}{a^2}.$

б) Учитывая, что $p(x; a) = a^n e^{-a\sum_{i=1}^{n} x_i}$ при $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, произведём вспомогательные вычисления:

$$\ln p(x; a) = n\ln a - a\sum_{i=1}^{n} x_i;$$

$$\frac{\partial \ln p(x; a)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(n\ln a - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^{n} x_i;$$

$$\frac{\partial^2 \ln p(x; a)}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{n}{a} - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = -\frac{n}{a^2};$$

$$I_\xi(a) = -M\frac{\partial^2 \ln p(\xi; a)}{\partial a^2} = -M\left(-\frac{n}{a^2}\right) = \frac{n}{a^2}.$$

в) В результате получим

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{I_\xi(a)} \cdot \frac{\partial \ln p(x;a)}{\partial a} = \frac{1}{a} + \frac{-1/a^2}{n/a^2} \cdot \left(\frac{n}{a} - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) =$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{a} - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

где в правой части зависимость от параметра *a* исчезла, и мы получили выборочное среднее.

3) Выборка с показательно распределенными наблюдениями имеет плотность распределения

$$p_\xi(x;a) = a^n e^{-a\sum_{i=1}^{n} x_i}, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,n},$$

плотность имеет вид $p_\xi(x;a) = C(x) \cdot e^{A(a)\varphi(x)} \cdot g(a)$, поэтому является экспонентным. Для показательного распределения

$$A(a)\varphi(x) = -a\sum_{i=1}^{n} \xi_i = -an \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

и функцию $\varphi(\xi)$ можно считать равной $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$. Таким образом, функция $\varphi(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ является эффективной оценкой для своего математического ожидания

$$M\varphi(\xi) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\xi_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{a} = \frac{1}{a}.$$

Рассмотрим следующий пример, который показывает:

— как можно пользоваться факторизацией (видом экспонентного семейства распределений);

— и что дисперсия оценки может убывать быстрее, чем $\frac{1}{n}$ (вопреки бытующим представлениям).

Пример 5. Тривиальный (одномерный) случай оценки скорости движения.

Точка движется равномерно с неизвестной скоростью v. Это означает, что координата точки в момент *t* равна

$$S(t) = vt.$$

Измерения её координат производится со случайными ошибками, и в моменты времени $t = k \quad k = \overline{1,n}$ они приняли следующие значения при $n = 5$: $x_1 = -0{,}2$; $x_2 = 1{,}28$; $x_3 = 0{,}99$; $x_4 = 1{,}22$; $x_5 = 2{,}46$. Требуется оценить скорость по имеющимся наблюдениям.

Формализация. Статистическая задача: как обычно в статистике, наблюдения $x_1, ..., x_5$ представляют конкретную (одну из многих возможных) реализаций случайных величин $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, где $\xi_k = S(k) + \varepsilon_k = vk + \varepsilon_k$. Будем полагать ошибки независимыми нормально распределёнными СВ с числовыми характеристиками $M\varepsilon_k = 0$, $D\varepsilon_k = \sigma^2$.

Замечание. Ошибки измерения часто предполагаются нормальными, во-первых потому, что на результаты измерений влияют многие факторы: напряжение питания прибора, температура среды, влажность, вибрации и другие факторы, что в сумме приводят к приближенно нормальному закону. Кроме того, известно, что нормальный закон распределения является самым неблагоприятным в некотором роде, а именно: среди всех законов с одинаковой дисперсией он имеет наибольшую энтропию.

Предположение нормальности означает, что наблюдение

$$\xi_k \sim N(vk, \sigma^2).$$

Закон (плотность) распределения всех наблюдений запишется в виде:

$$p(x; v) \equiv p(x_1, ..., x_n; v) = \prod_{k=1}^{n} p_k(x_k; v) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_k - vk)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - vk)^2} = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2} e^{-\frac{-2v}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n} kx_k} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n} k^2} =$$

$$= C(x) e^{\frac{v}{\sigma^2}\varphi(x)} g(v) \qquad (*)$$

Если распределение относится к экспонентному виду, т.е.

$$p(x; a) = C_0(x) \cdot e^{A(a)\varphi(x)} \cdot g(a),$$

где a — неизвестный параметр, то оценка $\varphi(\xi)$ является эффективной оценкой для своего математического ожидания $M\varphi(\xi)$. В нашем случае неизвестным параметром a является скорость v. Из равенства (*) видно, что $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} kx_k$ является эффективной оценкой для своего математического ожидания, которое равно

$$M\varphi(x) = M\sum_{k=1}^{n} kx_k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot vk = v\sum_{k=1}^{n} k^2 = v\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = vC(n).$$

Итак $\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^{n} k\xi_k$ — эффективная оценка для $v \cdot C(n)$. Умножение на константу не влияет на эффективность. Рассмотрим оценку для v:

$$\hat{v} = \frac{\varphi(\xi)}{C(n)} = \frac{1}{C(n)}\sum_{k=1}^{n} k\xi_k.$$

Очевидно, что $M\hat{v} = v$. Вычислим дисперсию оценки:

$$D\hat{v} = D\left(\frac{1}{C(n)}\sum_{k=1}^{n} k\xi_k\right) = \frac{1}{C^2(n)}\left(\sum_{k=1}^{n} D(k\xi_k)\right) = \frac{1}{C^2(n)}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 D(\xi_k)\right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{C^2(n)}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{\sigma^2}{C^2(n)}\cdot C(n) = \frac{\sigma^2}{C(n)} \sim \frac{3\sigma^2}{n^3},$$

т.е. убывает с ростом n как $\frac{1}{n^3}$. Ранее (в замечании) отмечалось, что с увеличением числа наблюдений дисперсия убывает не быстрее, чем $\frac{1}{n}$. В чём же дело? Ответ состоит в том, что замечание касалось *выборки*, т.е. набора одинаково распределённых СВ. В нашем же случае *наблюдения имеют различные распределения, поэтому несут различную информацию!*

Домашнее задание: гл.19, №№ 116, 117, 118.

Сборник задач по математике для втузов. Ч.4. / Под редакцией А.В.Ефимова и А.С.Поспелова. М.: Изд. ФизМатЛит., 2003.- 423 с.