

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ГЛАВА 5. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Лекция 14

§ 12. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)

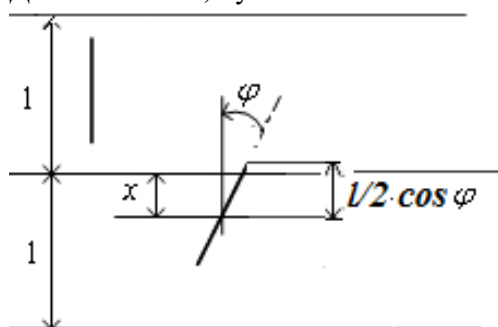
12.1. Идея метода

Метод относится к вычислительной математике, но основан на знаниях математической статистики.

Идея метода стара, ее предложил французский естествоиспытатель Бюффону (Жорж Луи Леклерк, 1707–1788). Он заметил, что если иголку бросать случайным образом на разлинованную плоскость, то, подсчитывая число пересечений ее с линиями можно вычислять число π .

Игла Бюффона.

Действительно, пусть на плоскости имеется семейство параллельных прямых



линий, расстояние между которыми равно 1; иголка длины $l < 1$ бросается на плоскость. Исход этого эксперимента можно характеризовать двумя числами

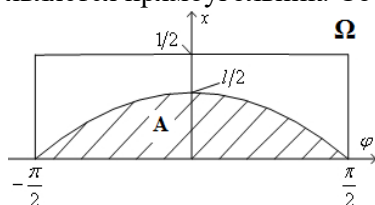
(x, φ) ,

где x — расстояние от центра иглы до ближайшей прямой, φ — угол наклона иголки относительно прямых линий. Множество всех исходов:

Игла Бюффона

$$\Omega = \{(x, \varphi): 0 \leq x \leq 1/2, -\pi/2 < \varphi \leq \pi/2\}$$

является прямоугольник. Событие «пересечение» происходит, когда один конец иглы оказывается на другой полосе, $(l/2)\cos\varphi > x$



т.е. событию благоприятствуют точки области A прямоугольника:

$$A = \{(x, \varphi): (l/2)\cos\varphi > x\}.$$

Ясно, что вероятность $p = P(A)$ этого

Вычисление вероятности пересечения

события есть отношение площадей $S(A)$ и $S(\Omega)$:

$$p = P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{l}{2} \cos\varphi d\varphi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{l}{(l/2)\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$\pi = \frac{2}{P(A)}.$$

Проделав много N бросаний, среди которых K закончились пересечением линий, и оценив вероятность, можно оценить π :

$$\pi \approx \frac{2}{\hat{P}(A)} = \frac{2}{K/N}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\hat{P}(A)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i / N} = \frac{2}{P(A)} = \pi \rightarrow \pi.$$

В этом примере существенным является следующее:

- была **исходная математическая задача**: определить число π ,
- задача **сведена к вероятности $P(A)$ некоторого события**,
- **вероятность определена статистически** - усреднением результатов многократно повторенного опыта.

Идею метода Монте-Карло можно пояснить следующим образом:

- 1) **имеется задача** определения некоторого неизвестного y (скаляр, вектор, функция);
- 2) **конструируется случайная величина ξ** (одномерная, многомерная, или случайная функция), у которой математическое ожидание совпадает с искомым y :

$$M\xi = y;$$

- 3) проводится **много реализаций** этой случайной величины

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N,$$

и математическое ожидание y **оценивается статистически**:

$$y \approx \sum_{i=1}^N \xi_i / N \rightarrow M\xi = y.$$

По закону больших чисел имеем сходимость к y при $N \rightarrow \infty$. Следует учесть, что запись эта условная: y , так же как и ξ , может быть вектором, функцией, или вектор-функцией. Значение N должно быть большим, метод реализовывают на ЭВМ, и потому, как метод вычислений, он возник с появлением ЭВМ в 40-х гг. XX в. Название подчеркивает связь со случайностью.

Как конструируется ξ по заданной задаче? Общего рецепта нет. Разным математическим задачам соответствуют разные ξ . Совокупность этих соответствий, а также способы вычислительной реализации и есть методы Монте-Карло.

12.2. Общая характеристика методов. Области применения методов можно условно разделить на две части.

ПЕРВАЯ ОБЛАСТЬ: задачи вычислительной математики, а именно вычисление:

- интегралов,
- обратных матриц,
- решение систем линейных алгебраических уравнений,
- решение диф. уравнений и ур-ний в частных производных и другие задачи.

Идея та самая: конструируется какой-либо случайный процесс (или случайная величина), математическое ожидание которой равно интересующей нас величине.

Пример 1. Вычисление интеграла

$$y = \int_a^b f(x) dx.$$

Первый путь решения. Пусть ξ — случайная величина, распределенная равномерно на отрезке $[a, b]$. Тогда случайная величина

$$\eta \equiv f(\xi)$$

имеет математическое ожидание

$$M\eta = Mf(\xi) = \int_a^b f(x) \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} y,$$

$$\text{и } y = (b-a)Mf(\xi).$$

Имея много реализаций: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, можно оценить значение математического ожидания $Mf(\xi)$, и оценкой для y является

$$\hat{y} = (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (b-a)Mf(\xi) = y.$$

О точности и преимуществах такого вычисления будет сказано ниже.

Второй путь решения. Линейно деформируем отрезок $[a, b]$ и функцию $f(x)$ в функцию

$$\tilde{f}(x) = c_3 f(c_1 x + c_2) + c_4$$

выбираем так, чтобы:

- 1) отрезок $[a, b]$ перешел в отрезок $[0, 1]$,
- 2) $0 \leq \tilde{f}(x) \leq 1$. (рис. 18)

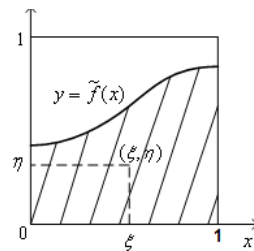


Рис. 18. Интеграл после преобразования

Связь между интегралами линейная

$$Int[f] = A \cdot Int[\tilde{f}] + B$$

выражается через коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4 .

Интеграл от новой функции сведем к вероятности некоторого события. Пусть (ξ, η) — случайная точка, равномерно распределенная в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$. Вероятность p попадания этой точки в заштрихованную область равна интегралу

$$p = P\{\eta_i \leq \tilde{f}(\xi_i)\} = \int_0^1 \tilde{f}(x) dx \equiv y.$$

Производим N бросаний; результаты

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_N, \eta_N).$$

Пусть K — число попаданий в заштрихованную область, т.е. когда $\eta_i \leq \tilde{f}(\xi_i)$. Очевидно, величина $\hat{p} \equiv \frac{K}{N}$ является оценкой интеграла. Формально, пусть

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \eta_i \leq \tilde{f}(\xi_i), \\ 0, & \text{если } \eta_i > \tilde{f}(\xi_i), \end{cases} \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда $M\varepsilon_i = P\{\eta_i \leq \tilde{f}(\xi_i)\} = p$ и

$$\hat{p} = \frac{K}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} M\varepsilon = p = y.$$

Примечание [MA1]: Сделать первый символ p и y курсивом.

Вычисление несобственных интегралов

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Пример 2. Интегралы вида

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ax^2+bx+c} dx$$

выделением **полного квадрата** и введением множителей можно экспоненту преобразовать к плотности **нормального распределения**, так что под интегралом будет вида некоторая функция на нормальную плотность:

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

и тогда интеграл **есть математическое ожидание**

$$y = M\tilde{f}(\xi), \quad \xi \sim N(m, \sigma^2).$$

где ξ подчиняется нормальному закону $N(m, \sigma^2)$. Сгенерируем N раз независимые, нормально распределенные с.в. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ и вычислим

$$\hat{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{f}(\xi_i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} M\tilde{f}(\xi_i) = y$$

Примечание [MA2]: y курсивом

Пример 3. **Общий прием** вычисления несобственных интегралов

$y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ состоит во введении в интеграл подходящей плотности $p(x)$:

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) p(x) dx.$$

Если ξ — случайная величина, распределенная с плотностью $p(x)$, то $y = M\tilde{f}(\xi)$, и тогда

$$y = M\tilde{f}(\xi) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{f}(\xi_i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} y, \quad \xi \sim p(x)$$

Многомерные интегралы

$$y = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_k) dx_1, \dots, dx_k = \int \dots \int \tilde{f}(x_1, \dots, x_k) p(x_1, \dots, x_k) dx_1, \dots, dx_k = M\tilde{f}(\xi),$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k), \quad \xi \sim p(x_1, \dots, x_k)$$

вычисляются аналогично, и именно для них сказываются преимущества метода. Генерируем N раз k -мерную с.в. ξ :

$$\xi^1, \xi^2 \dots \xi^N$$

вычисляем N раз значения функции $\tilde{f}(\xi)$, и оценку для $M\tilde{f}(\xi)$:

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^N \tilde{f}(\xi^i) / N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} M\tilde{f}(\xi) = y$$

Об объеме вычислений. Сравнение с квадратурными методами.

Если пользоваться квадратурными формулами, то с ростом размерности k объем

$V_{\text{КВ}}$ **растет экспоненциально,**

а для метода Монте-Карло $V_{\text{МК}}$ — **линейно:**

$$V_{\text{КВ}} = C_1 k, \quad V_{\text{МК}} = C_2 k.$$

Точность М-К метода зависит от числа испытаний N , размерности k влияет только вычисление аргумента: на одно испытание нужно сгенерировать k случайных значений, а не одно.

В таблице приведены данные из книги [Кузин. Основы кибернетики] о сравнении объема V и времени T вычислений по одной и той же задаче; k — размерность интеграла. При малых размерностях выигрывают квадратурные формулы, а при больших — методы Монте-Карло.

Таблица. Сравнение методов по объему вычисления

k	Метод квадратур		Метод Монте-Карло	
	$V_{\text{КВ}}$	$T_{\text{КВ}}$	$V_{\text{МК}}$	$T_{\text{МК}}$
1	10^2	10^{-4} с	10^4	10^{-2} с
3	10^6	1 с	$3 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^{-2}$ с
6	10^{12}	280 ч	$6 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^{-2}$ с

Важное замечание. Для одной и той же задачи можно по-разному сконструировать вероятностную модель ξ , так что объем вычислений при одной и той же точности будет разным.

Например, в задаче Бюффона, если бросать скрепленные в крест - две иголки, считая бросание креста за два бросания иголки, то выигрыш в числе бросаний составит 12,2 раза. Если бросать три иголки, скрепленные звездочкой, то выигрыш составит 44,3 раза. Если бросать четыре скрепленных иголки, то выигрыш составит 107,2 раза:



2 иголки - в 12,2 раз,

3 иголки - в 44,3 раз,

4 иголки - в 107,2 раз.

Эти примеры говорят о том, что сконструировать вероятностную модель ξ дело непростое, и оно требует некоторой математической изобретательности. По этому поводу Хемминг в книге «Численные методы» справедливо замечает: «Прежде чем начинать вычисление по Монте-Карло, советую получить консультацию у хорошего статистика, чтобы узнать, чем он может помочь».

Примечание [MA3]: Не нужно ли курсивом?

Примечание [MA4]: Верное название таблицы?

Примечание [MA5]: Курсивом?

ВТОРАЯ ОБЛАСТЬ: моделирование случайных процессов и явлений с целью выяснения их статистических характеристик. Эта область характерна тем, что **уже имеется математическое описание случайных объектов**. Вообще говоря, характеристики этих объектов можно вычислить через интегралы. Но сделать это бывает весьма трудно. В этих случаях **конструировать случайные процессы для моделирования не надо**, т.к. они заданы самой задачей. Примеры:

1. **Вычисление распределений случайных величин**. Заданы случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ с плотностями $p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$ соответственно; пусть

$$\eta = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k),$$

где функция $f(\cdot)$ — известна. Нужно определить закон распределения (именно, функцию распределения $F_\eta(y)$) для η . Например, заданы случайные величины

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \quad \text{и} \quad \eta = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 2\xi_1 + \xi_2^2 - 4e^{\xi_3}.$$

Для решения нужно много, N раз, сгенерировать серии (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , N раз вычислить

$$N \text{ раз: } (\xi_1, \xi_2, \xi_3)_1, (\xi_1, \xi_2, \xi_3)_2, \dots, (\xi_1, \xi_2, \xi_3)_N, \\ \eta: \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N,$$

— и оценивать $F_\eta(y)$ функцией эмпирического распределения.

2. **Моделирование сложных вероятностных процессов** физики, химии, техники, систем управления с целью выяснения их статистических характеристик

Например, стрельба по многим целям из разных орудий на различных расстояниях с различными вероятностями поражения. Целей может быть различное число, они могут лететь на различных скоростях и высотах.

Вычислить такие характеристики, как **распределение времени на уничтожение целей** (или **среднее время уничтожения**),

распределение **числа залпов** до уничтожения, практически невозможно.

Записать в формульном виде эти характеристики, хотя вероятностный процесс задан, весьма **трудно**, проделывать **физический эксперимент** — весьма **накладно**.

Разумный способ решения состоит в **проведении статистического эксперимента** на цифровой модели.

3. **Моделирование систем массового обслуживания** с целью выяснения их характеристик и влияния различных факторов на эти характеристики.

4. **Моделирование алгоритмов обработки статистической информации** с целью выяснения их качества (например, алгоритма распознавания образов, или алгоритма, по которому управляется ракета, догоняющая цель, или алгоритма, по которому на приемной стороне системы связи производится обработка сигнала, и т.д.).

12.3. Способы генерирования случайных величин

Основой моделирования случайных объектов являются способы получения случайных величин.

Будем предполагать, что мы располагаем генератором случайной величины ξ , равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$:

$$\xi \sim R[0, 1].$$

1. **Моделирование случайного события** с вероятностью $P(A) = p$. Событие

$$A = \{\xi < c\},$$

где c — константа, является случайным. Надо лишь подобрать c так, чтобы вероятность $P(A)$ события была равна заданной p . Если $\xi \sim R[0, 1]$, то ясно, что $c = p$. Итак,

$$A = \{\xi < p\}, \quad \xi \sim R[0, 1], \quad P(A) = p.$$

— случайное событие, имеющее заданную вероятность p .

2. **Биномиальная случайная величина η с параметрами n и p** может быть получена как число успехов в серии из n независимых испытаний с вероятностью успеха p .

Генерируем n независимых, распределенных по $R[0, 1]$, случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$; по каждому определяем

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_i < p, \text{ успех,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad \text{и вычисляем} \quad \eta = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

3. **Нормальная случайная величина.** Наиболее простой способ ее получения состоит в использовании центральной предельной теоремы. Случайная величина — сумма n случайных величин

$$\eta = \left[(\xi_1 + \dots + \xi_n) - \frac{n}{2} \right] / \sqrt{\frac{n}{12}},$$

где ξ_i независимы и распределены равномерно на $[0, 1]$, подчиняется приближенно нормальному закону с параметрами 0 и 1. Выбор значения n зависит от того, насколько хорошо мы должны выдержать нормальными «хвосты» распределения η . Для большинства практических применений достаточно брать $n = 6$; получим

$$\eta = \sqrt{2} \left(\sum_{i=1}^6 \xi_i - 3 \right).$$

Это соответствует совпадению функций распределения с точностью 0,002 в любой точке. Если нужна нормальная случайная величина

$$\zeta \sim N(m, \sigma^2)$$

с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 , мы ее получим из η :

$$\zeta = \sigma\eta + m$$

4. **Коррелированные случайные величины.** Требуется получить случайные коррелированные величины

а) (η_1, η_2) с коэфф. корр. $r(\eta_1, \eta_2) = r$ и $M\eta_i = 0$, $D\eta_i = 1$, $i = 1, 2$.

Генерируем независимые случайные величины

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad M\varepsilon_i = 0, D\varepsilon_i = 1, i = 1, 2$$

и полагаем

$$\eta_1 = \varepsilon_1, \quad \eta_2 = c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2.$$

Коэффициенты c_1 и c_2 подбираем из условий:

$$D\eta_2 = 1 \text{ и } r(\eta_1, \eta_2) = M(\eta_1 \eta_2) = r: \quad r(\eta_1, \eta_2) = \frac{M(\eta_1^\circ \cdot \eta_2^\circ)}{\sqrt{D\eta_1 D\eta_2}}$$

$$M(\eta_1 \eta_2) = M c_1 \varepsilon_1 \{ \varepsilon_1 (+c_2 \varepsilon_2) \} = M c_1 \varepsilon_1^2 = c_1 = r,$$

$$D\eta_1 = D\varepsilon_1 = 1, \quad D\eta_2 = D(c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2) = c_1^2 + c_2^2 = 1, \quad c_2 = \sqrt{1 - r^2}.$$

Получаем:

$$\eta_1 = \varepsilon_1, \quad \eta_2 = r\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \sqrt{1 - r^2}.$$

б) Если же требуются случайные величины (ζ_1, ζ_2) с коэффициентом корреляции

$$r(\zeta_1, \zeta_2) = r \quad \text{и} \quad M\zeta_i = m_i, D\zeta_i = \sigma_i^2, i = 1, 2,$$

то на основе (η_1, η_2) определяем нужные с.в.:

$$\zeta_1 = m_1 + \sigma_1 \eta_1,$$

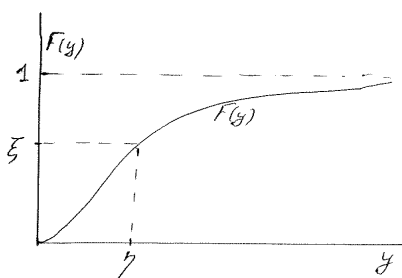
$$\zeta_2 = m_2 + \sigma_2 \eta_2,$$

Мат. ож. и дисперсии, очевидно, такие, как нужно, а коэф. корр. не изменяется при линейном преобразовании с положительными σ_1 и σ_2 .

5. Метод обратной функции.

Случайная величина с произвольным непрерывным законом распределения.

Пусть нам нужна случайная величина η с функцией распределения $F(y)$.



Она может быть получена как корень уравнения (рис. 19):

$$\xi = F(\eta), \text{ где } \xi \sim R[0, 1]. \quad (1)$$

Действительно, случайная величина

$$\eta = F^{-1}(\xi)$$

имеет нужное распределение; ее функция распределения $F_\eta(y)$ имеет вид

Рис. 19. Генерация при непрерывном распределении

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{F^{-1}(\xi) < y\} = P\{\xi < F(y)\} = F_\xi(F(y)) = F(y)$$

в силу того, что $\xi \sim R[0, 1]$:

$$F_\xi(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Пример. Получение случайной величины η с показательным распределением, с плотностью $p_\eta(y) = \lambda e^{-\lambda y}$.

Примечание [MA6]: Знак корня заканчивается на r^2 ? ε уже не под знаком корня? Если должно быть под знаком корня, то поправьте, пожалуйста.

Ее функция распределения

$$F_{\eta}(y) = \int_0^y p_{\eta}(z) dz = \int_0^y \lambda e^{-\lambda z} dz = 1 - e^{-\lambda y}, \quad y > 0.$$

Имеем уравнения: $\xi = F(\eta)$, где $\xi \sim R[0, 1]$:

$$\xi = 1 - e^{-\lambda \eta}$$

Функция, обратная к $F_{\eta}(\cdot)$: $\eta = F_{\eta}^{-1}(\xi) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi)$

Поскольку $(1 - \xi)$ — тоже равномерно распределена на $[0, 1]$, то

$$\eta = -\frac{1}{\lambda} \ln \xi$$

имеет тоже плотность $p_{\eta}(y)$.

б. **Дискретные случайные величины.** Пусть нам нужна дискретная случайная величина η , принимающая значения

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \quad \text{с вероятностями } p_1, p_2, \dots, p_n, \dots \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

(их может быть **конечное** число). Идея остается той же, что и в предыдущем случае — корень уравнения

$$\xi = F(\eta), \quad \text{где } \xi \sim R[0, 1],$$

хотя вычислительные процедуры обычно отличаются (Рис. 20); здесь мы имеем дело с табличным заданием ступенчатой функции.

Обозначим

$$F_n = \sum_{k=1}^n p_k \equiv P\{\eta \leq y_n\}, \quad n = 1, 2, \dots, F_0 = 0.$$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ точками F_n . Если выпало такое значение $\xi \sim R(0, 1)$, что

$$F_{n-1} < \xi \leq F_n,$$

то полагаем $\eta = y_n$. Ясно, что

$$P\{\eta = y_n\} = F_n - F_{n-1} = p_n.$$

Процесс вычислений строится следующим образом: значение n , начиная с 1, увеличиваем до момента, когда впервые реализуется событие $F_n \geq \xi$;

Рис. 20 Генерации при дискретном распределении. это значение n берется для $\eta = y_n$.

Пример. Случайная величина, распределенная по закону Пуассона. Пусть ξ равномерно распределена на $[0, 1]$ и

$$F_n = P\{\eta \leq n\} = \sum_{i=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!} \right), \quad n \geq 0.$$

Примечание [MA7]: Сделать индексы курсивом

Примечание [MA8]: Сделать индексы курсивом

$$F_0 = e^{-\lambda}, F_1 = e^{-\lambda}(1 + \lambda), \dots, F_n = e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}\right), \dots,$$

Первое целое значение n при возрастании n , начиная с 0, для которого

$$F_n \geq \xi, \text{ или } e^\lambda F_n \geq e^\lambda \xi,$$

$$\text{т.е. } \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}\right) \geq e^\lambda \cdot \xi \dots \dots (*)$$

и есть искомое значение случайной величины.

Итак, первое n , $n \geq 0$, для которого выполняется (*), является пуассоновской случайной величиной с параметром λ .

12.4. Выбор числа испытаний

При реализации метода Монте-Карло возникает вопрос о выборе числа N испытаний. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые наблюдения, причем

$$M\xi_i = m = ?, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Рассматривается оценка

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \text{ для } m.$$

Требуется выбрать N таким образом, чтобы погрешность

$$\delta = \hat{m} - m$$

была по абсолютному значению не более допустимой величины δ_0 с вероятностью не меньшей заданной P_d (близкой к 1), то есть должно выполняться неравенство:

$$P(N) \equiv P\left\{\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i - m\right| \leq \delta_0\right\} \geq P_d.$$

Оценим вероятность в левой части неравенства, как функцию N , используя центральную предельную теорему:

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i - m\right) \sim N\left(0, \frac{D\xi}{N}\right)$$

$$P(N) \approx \Phi\left(\delta_0 / \sqrt{\frac{D\xi}{N}}\right) - \Phi\left(-\delta_0 / \sqrt{\frac{D\xi}{N}}\right) = 2\Phi\left(\delta_0 / \sqrt{\frac{D\xi}{N}}\right) - 1 \geq P_d,$$

или

$$\delta_0 / \sqrt{\frac{D\xi}{N}} \geq \Phi^{-1}\left(\frac{1 + P_d}{2}\right) \equiv Q_p,$$

что дает необходимое число испытаний

$$N > \frac{Q_p^2}{\delta_0^2} D\xi = N_0.$$

Однако, дисперсия $D\xi$ обычно неизвестна (ведь даже $M\xi$ неизвестно). Предположим, что смогли оценить ее сверху:

Примечание [МА9]: Индекс δ — русская буква? Если да, то в формулах ниже нужно снять курсив с нижнего индекса δ .

$$D_{\max} \geq D\xi.$$

Тогда получим

$$N_1 = \frac{Q_p^2}{\delta_0^2} D_{\max} \geq N_0 \quad (2)$$

Примечание [МА10]: D курсивом или нет? По всему разделу разные варианты написания.

и будем использовать N_1 испытаний (с увеличением N вероятность события $|\hat{m} - m| \leq \delta_0$ лишь увеличивается).

В качестве D_{\max} можно использовать аналитическую оценку или статистическую верхнюю доверительную границу для $D\xi$.

Пример. Пусть методом Монте-Карло оценивается вероятность p случайного события A .

$$P(A) = p = ?$$

Многokrатно генерируем случайное событие A . Пусть ε_i — случайная

величина,
$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{если } A \\ 0, & \text{если } \bar{A} \end{cases}$$

равная 1, если в i -м испытании событие A появляется, и 0, если не появляется. Тогда

$$\hat{p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \quad \text{и} \quad M\varepsilon_i = p.$$

Будем полагать, что N достаточно велико для того, чтобы считать \hat{p} нормальной случайной величиной. Для $P_d = 0,997$ получаем $Q_p \approx 3$. Поскольку

$$D\varepsilon = p(1-p) \leq 1/4 = D_{\max}; \text{ получим}$$

$$N_1 = Q^2 \frac{D_{\max}}{\delta_0^2} = 9 \frac{1/4}{\delta_0^2} = \frac{2.25}{\delta_0^2}.$$

Если $\delta_0 = 0,01$, то $N \approx 22 \cdot 10^3$.

В заключение отметим **основные особенности** метода Монте-Карло:

- 1) **приспособленность метода к многомерным задачам;**
- 2) помехоустойчивость к сбоям машины;
- 3) погрешность **с ростом N** уменьшается как **c/\sqrt{N}** , например, для уменьшения погрешности в 10 раз число испытаний увеличивается в 100 раз.