Тема 4. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОЦЕНОК-1

4.1. Метод моментов

Идея метода. **Неизвестный** параметр следует выразить через моменты, а затем моменты заменить **выборочными** моментами.

Сначала напомним, **как оценивать неизвестные моменты распределения.**

Пусть имеется n **независимых** наблюдений $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \equiv \xi$ (**выборка**) над случайной величиной, распределенной по закону с функцией распределения $F(x)$.

Нас интересуют **начальные** моменты порядка k: $m_k = \mathbf{M}\xi^k$:

первый момент $m_1 = \mathbf{M}\xi$, **второй** момент $m_2 = \mathbf{M}\xi^2$ и т.д.

Дежурной оценкой (**несмещенной** и **состоятельной**) является **среднее арифметическое** k-х степеней наблюдений:

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^k . \qquad \textbf{(4.1)}$$

Эти оценки обладают **несмещённостью:**

$$\mathrm{M}\hat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}x_i^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}\xi_i^k = \frac{1}{n}\cdot(m_k \cdot n) = m_k$$

и **состоятельностью**:

$$\mathrm{D}\hat{m}_k = \frac{n\mathrm{D}\xi^k}{n^2} = \frac{1}{n}\ \mathrm{M}\xi^{2k} - (\mathrm{M}\xi^k)^2 = \frac{1}{n}\ m_{2k} - (m_k)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

Построение оценок методом моментов

Метод поясним для случая $\dim a = n = 2$. Имеются n наблюдений $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \equiv \xi$ — **независимых** и **одинаково** распределенных по закону $F(x; a_1, a_2)$ с **неизвестными** параметрами $a = (a_1, a_2)$.

Определим моменты, как функции параметров:

$$m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x; a_1, a_2) = f_1(a_1, a_2),$$

$$m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x; a_1, a_2) = f_2(a_1, a_2).$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} m_1 &= f_1(a_1, a_2), \\ m_2 &= f_2(a_1, a_2). \end{aligned}$$

Пусть система разрешима относительно параметров:

$$\begin{aligned} a_1 &= g_1(m_1, m_2), \\ a_2 &= g_2(m_1, m_2). \end{aligned}$$

Далее, подставляя вместо неизвестных моментов m_k их оценки $\hat{m}_k$, получаем моментные оценки параметров a_1 и a_2:

$$\hat{a}_1 = g_1(\hat{m}_1, \hat{m}_2),$$
$$\hat{a}_2 = g_2(\hat{m}_1, \hat{m}_2).$$

Если нужно оценить неизвестное значение функции $f(a_1, a_2) = ?$ от параметров, подставляем в $f(a_1, a_2)$ оценки этих параметров: $\hat{f} = f(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$.

Свойства оценок, полученных методом моментов

При широких условиях: они

—**состоятельны**;

—**асимптотически нормальны**.

Их **преимущество**: относительная **простота** вычислений.

Несмещенность не гарантируется

Пример 4.1 (оценка параметра показательного распределения).

Известно, что время работы (до **первой** поломки) **любого сложного** устройства (или любой сложной машины) является случайной величиной, распределённой по **показательному** закону с плотностью:

$$p(x; a) = \begin{cases} ae^{-ax}, & \text{если } x \ge 0; \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$ с параметром $a > 0$.

Имеется n **независимых** наблюдений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ над СВ ξ', распределённой по **показательному** закону с **неизвестным** параметром a, который требуется оценить **методом моментов.**

Решение. Вычислим первый момент:

$$m_1 = \mathbf{M}\xi' = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x; a)dx = \int_{0}^{+\infty} xae^{-ax}dx = \frac{1}{a}.$$

Выразим параметр через момент: $a = \dfrac{1}{m_1}$.

В полученной формуле заменим 1-й момент m_1 его оценкой $\hat{m}_1$:

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \bar{\xi}$$ — **среднее выборочное**.

После подстановки получаем:

$$\tilde{a} = \frac{1}{\hat{m}_1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i} = \frac{1}{\bar{\xi}}$$ — **оценка по ММ** найдена.

Пример 4.2 (оценка доли «работоспособных» приборов).

Эта задача является **продолжением предыдущего** примера. Задача о том, каков процент $q=?$ **годных** приборов в **большой** партии. Под годными понимаем, например, те приборы, у которых время ξ безотказной работы **больше заданного** времени T: $\xi > T$, т.е.

$$q = P\{\xi > T\} = ?$$

В партии, содержащей $N = 1000$ приборов, каждый прибор имеет своё время безотказной работы. Если наудачу выбираем прибор из партии, то время ξ безотказной работы его есть СВ, распределённая по **показательному** закону:

$$\xi \sim p(x;a) = \begin{cases} ae^{-ax}, \text{ если } x \geq 0; \\ 0, \quad \text{если } x < 0, \end{cases} \quad \text{с параметром } a > 0.$$

Мы хотим найти долю тех приборов в партии, у которых, например, $\xi \geq T = 100$ часов. При **известном** значении параметра a всё очень просто: вычисляем вероятность

$$q = P\{\xi \geq T\} = \int_{T}^{+\infty} p(x;a)dx = \int_{T}^{+\infty} ae^{-ax}dx = e^{-aT} = f(a).$$

Но параметр a **неизвестен**, поэтому берём, например, $n = 20$ приборов, включаем их и измеряем результаты испытаний СВ ξ:

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Следует оценить величину q: $\hat{q} = \hat{q}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Решение. Оценим **методом моментов** параметр a по результатам испытаний $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

$$\mathbf{M}\xi = \frac{1}{a} = m_1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{m_1}.$$

В предыдущем примере получили оценку параметра a:

$$\hat{a} = \frac{1}{\hat{m}_1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}.$$

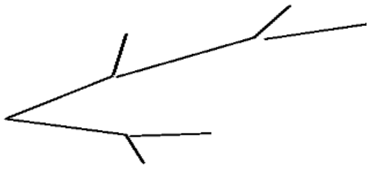
Оценка для q:

$$\hat{q} = f(\hat{a}) = e^{-\hat{a}T} = e^{-nT/\sum \xi_i}.$$

Замечание 4.1. Было бы неграмотно по n наблюдениям определить неизвестную долю q: по числу тех K из n приборов, у которых время безотказной работы оказалось больше T, $\tilde{q} = \frac{K}{n}$. Это неграмотно, потому что $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ — достаточная статистика для параметра a показательного закона . Если мы использовали другую статистику, например K, значит, мы потеряли информацию, следовательно, и точность.

Пример 4.3 (конкретная физическая задача — обработка результатов эксперимента, 1940 г., Дания).

При нейтронном облучении ядер урана начинается расщепление ядра, при котором ядро распадается на две части A и B различного рода (в том числе, различного размера). В камере Вильсона это явление обнаруживается в виде двух траекторий, исходящих из одной точки.



Каждая из этих траекторий далее разделяется на несколько ветвей, возникающих от столкновения с молекулами газа в камере. Количество ветвей (т.е. количество столкновений) зависит от размера (часть A или B; чем больше размер, тем чаще столкновения).

Пусть СВ ξ — количество наблюдаемых ветвей. Если летит часть A, то ξ распределена по **закону Пуассона** с параметром a_1, а если часть B, — то с параметром a_2. Коротко:

$$\text{если } A, \text{ то } \xi \sim Po(a_1),$$

$$\text{если } B, \text{ то } \xi \sim Po(a_2).$$

Априорно мы не знаем, след А или В наблюдаем: $P(A) = P(B)$.

Наблюдались $n = 327$ траекторий. Количество k ветвей, на которые разделяется траектория, указано в таблице (n_k — количество траекторий, в которых наблюдалось k ветвей).

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum_k n_k$
n_k	28	47	81	67	53	74	13	8	3	2	1	327

Основываясь на этих эмпирических данных, найти оценки параметров a_1 и a_2 с помощью **метода моментов**. По соотношению параметров a_1 и a_2 можно судить о соотношении размеров частей А и В

Решение. Сначала нужно записать закон распределения **одного** наблюдения. Как его записать?

Известны **условные** распределения. Для частицы A это $\boldsymbol{Po}(a_1)$, а для частицы B это $\boldsymbol{Po}(a_2)$. Априорно $P(A) = P(B) = 1/2$. Полная вероятность получить k ветвей (формула **полной вероятности**):

$$P\{\xi = k\} = P\{\xi = k \mid A\}P(A) + P\{\xi = k \mid B\}P(B) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^k}{k!}e^{-a_1} + \frac{a_2^k}{k!}e^{-a_2}\right).$$

Применяем **метод моментов**:

$$\mathrm{M}\xi = m_1 = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} kP\ \ k \mid a_1 \ + \sum_{k=0}^{\infty} kP\ \ k \mid a_2 \ \right] = \frac{1}{2}\ \ a_1 + a_2\ ,$$

$$M\xi^2 = m_2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{\xi = k\} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\ k\,|\,a_1\ + \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\ k\,|\,a_2\ \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ (a_1 + a_1^2) + (a_2 + a_2^2)\ =\ \frac{1}{2}\ (a_1 + a_2) + (a_1^2 + a_2^2)$$

(здесь учтено, что второй момент m_2 для СВ, распределённой по закону **Пуассона** $\boldsymbol{Po}(a)$, равен сумме $(a^2 + a)$).

$$m_1 = \frac{1}{2}\ a_1 + a_2\ ,$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\ (a_1 + a_2) + (a_1^2 + a_2^2)$$

Выразим a_2 через a_1 из первого уравнения

$$a_2 = 2m_1 - a_1,$$

и подставим в второе. В результате получим квадратное уравнение, решая которое имеем:

$$a_{1,2} = m_1 \pm \sqrt{m_2 - m_1 - m_1^2}\,. \qquad \textbf{(4.4)}$$

Вместо неизвестных m_1 и m_2 подставим в выборочные моменты

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ и } \hat{m}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\,.$$

В результате получаем оценки:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \hat{m}_1 + \sqrt{\hat{m}_2 - \hat{m}_1 - \hat{m}_1^2}\,; \\ \hat{a}_2 = \hat{m}_1 - \sqrt{\hat{m}_2 - \hat{m}_1 - \hat{m}_1^2}\,. \end{cases} \qquad \textbf{(4.5)}$$

Вычислим $\hat{m}_1$ и $\hat{m}_2$:

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{327}\sum_{k=0}^{10} kn_k = \frac{1}{327}(0\cdot 28 + 1\cdot 47 + 2\cdot 81 + \ldots + 10\cdot 1) = 2{,}838.$$

$$\hat{m}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{10} k^2 n_k = \frac{1}{327}(0^2\cdot 28 + 1^2\cdot 47 + 2^2\cdot 81 + \ldots + 10^2\cdot 1) = 11{,}42.$$

Теперь применим наши оценки $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ к имеющимся данным:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \hat{m}_1 + \sqrt{\hat{m}_2 - \hat{m}_1 - \hat{m}_1^2} \approx 3{,}57; \\ \hat{a}_2 = \hat{m}_1 - \sqrt{\hat{m}_2 - \hat{m}_1 - \hat{m}_1^2} \approx 2{,}11. \end{cases}$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ ПО МЕТОДУ МОМЕНТОВ

4.1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — **выборка** из генеральной совокупности, распределённой по закону **Пуассона** $\boldsymbol{Po}(\lambda)$. Найти оценку **неизвестного** параметра λ **методом моментов**.

4.2. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — **выборка** из **нормально** распределённой генеральной совокупности $N(m, \sigma^2)$. Найти оценки **неизвестных** параметров m и σ^2 **методом моментов**.

4.3. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — **выборка** из генеральной совокупности, распределённой по закону $\chi^2(k)$. Найти оценку **неизвестного** параметра k **методом моментов**.

4.4. Рассмотрим n систем с временами работы до первого отказа соответственно $X_1, X_2, ..., X_n$. Предположим, что $X_1, X_2, ..., X_n$ — **независимые** (в совокупности) и **одинаково распределённые** случайные величины с **показательным** распределение $\boldsymbol{E}(\lambda)$. Пусть, наконец, x_i, $i = \overline{1, n}$, — измеренные значения времени отказа i-й системы (в часах). Используя метод моментов, найти оценку вероятности $\mathbf{P}\{X_1 \geq 1\}$ того, что первая система будет работать бесперебойно в течение часа.

4.2. Метод максимального правдоподобия (МП-метод)

Пусть $x \equiv (x_1, x_2, ..., x_n)$ — совокупность наблюдений случайного характера. Эти наблюдения (как всегда) являются конкретными значениями многомерной случайной величины $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ (**не обязательно выборка**), закон распределения $p_\xi(x; a)$ известен с точностью до параметра a (будем считать $p_\xi(x; a)$ **плотностью** распределения, если СВ ξ — **непрерывна**, и **вероятностью**, если СВ ξ — **дискретна**). Размерность R параметра a — произвольна.

Функция $p_\xi(x; a)$ при фиксированном значении x является функцией параметра a и называется **функцией правдоподобия**. **МП-оценка** — это такое значение a^* параметра, при котором функция правдоподобия максимальна:

$$p_\xi(x; a^*) = \max_a p_\xi(x; a).$$

Оценка $a^*(x)$, т.е. точка максимума является функцией наблюдений, подчеркнём её случайность:

$$a^*(\xi).$$

Если максимум достигается внутри области определения, и $p_\xi(x; a)$ является гладкой функцией переменной a, то МП-оценка a^* является решением системы уравнений:

$$\frac{\partial \ln p_\xi(x; a)}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, ..., R.$$

Логарифм экстремальную точку не изменяет, но заменяет произведение на сумму, если наблюдения независимы

Известно, что (при выполнении тех же условий, что для неравенства Рао_Крамера) МП-оценки

- состоятельны,
- асимптотически нормальны,
- асимптотически эффективны.

Последнее означает, что МП-метод приводит к оценкам, наилучшим по точности.

Пример 4.4. Число вызовов, поступивших на АТС, оказалось равным:

в первую минуту $x_1 = 150$;
во вторую минуту — $x_2 = 200$;
в третью минуту — $x_3 = 120$.

Считать, что число вызовов на АТС в течение одной минуты является случайной величиной, распределённой по закону **Пуассона** с **неизвестным** параметром a: $\xi_i \sim \boldsymbol{Po}(a)$, $i = \overline{1,3}$. Построить оценку для этого параметра **методом максимального правдоподобия**.

Решение. Отвлекаемся от конкретных значений трёх наблюдений. Закон распределения **одного** наблюдения с номером *i* имеет вид:

$$p(x_i;a) = \frac{a^{x_i}}{x_i!}e^{-a},\text{ аргумент } x_i \text{ — дискретный: } x_i = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\mathbf{M}\xi_i \equiv m_1 = a,\ i = \overline{1,3}.$$

Закон распределения всех n наблюдений имеет вид:

$$p(x;a) = \frac{a^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}e^{-na},\text{ где } x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Проведём несложные преобразования: (продиф-ем и приравняем 0):

$$\frac{\partial \ln p(x;a)}{\partial a} \equiv \left[-an + \ln a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)\right]'_a \equiv -n + \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} x_i + 0 = 0,$$

откуда

$$a^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{или} \quad a^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Пример 4.5. Оценить параметр λ **простейшего потока** событий по n наблюдениям: $\xi_i \sim Po(a = \lambda T)$, $i = \overline{1,n}$. Время T известно.

Решение. Распределение выборки имеет вид:

$$p(x_1, \ldots, x_n;\, a = \lambda T) = e^{-\lambda T n}\frac{(\lambda T)^{(x_1 + \ldots + x_n)}}{x_1! \cdot \ldots \cdot x_n!}.\text{ где } \lambda T = a.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \ln p}{\partial \lambda} \equiv \frac{\partial \ln p}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial \lambda} \equiv \left[-n + \frac{1}{\lambda T}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \cdot T = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\lambda T, \qquad \hat{\lambda} = \frac{1}{nT}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \hat{\lambda} = \frac{1}{nT}\sum_{i=1}^{n} \xi_i .$$

Пример 4.6. Испытание прибора состоит в повышении напряжения до некоторого определённого уровня. Неизвестным параметром a является вероятность p выхода при этом прибора из строя, $a = p$. Отказ прибора произошёл при $k = 7$-м испытании. Найти МП-оценку неизвестной вероятности.

Решение. Сначала выпишем закон распределения наших наблюдений. В нашем случае это одно наблюдение

$k = 7$ — число испытаний

до первого «успеха» (выхода прибора из строя).

Вводим СВ

ξ — количество испытаний до первого «успеха».

Она имеет геометрическое распределение:

$$P_\xi(k;a) = P\{\xi = k, a\} = (1-a)^{k-1} a .$$

Здесь записана вероятность такого события:

$(k-1)$ неуспехов подряд, а затем при k-м испытании — успех.

Воспользуемся методом **МП**.

$$\ln P_\xi(k;a) = (k-1)\ln(1-a) + \ln a \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \ln P_\xi(k;a)}{\partial a} = (k-1)\frac{-1}{(1-a)} + \frac{1}{a}$$

$$\frac{\partial \ln P_\xi(k;a)}{\partial a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k-1)\frac{1}{(1-a)} = \frac{1}{a}, \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (k-1) = \frac{(1-a)}{a} = \frac{1}{a} - 1, \quad \Leftrightarrow \quad a^* = \frac{1}{k}.$$

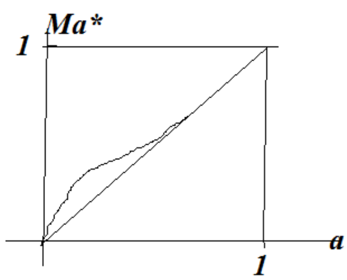
Чтобы подчеркнуть, что a^* — функция случайной величины, записываем

$$a^* = \frac{1}{\xi}.$$

Если нас интересует **несмещённость** этой оценки, вычислим её математическое ожидание:

$$\mathbf{M}a^* = \mathbf{M}\frac{1}{\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\mathbf{P}\{\xi = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(1-a)^{k-1} a = \frac{a}{1-a}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-a)^k}{k} = \text{узнаем логарифм}$$

$$= \frac{a}{1-a}\cdot(-\ln a) = \frac{-a\ln a}{1-a}. \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}a^* = \frac{-a\ln a}{1-a} \neq a.$$



Оценка a^* **не является несмещённой.**

Замечание 4.2. При вычислении $\mathbf{M}a^*$ использован следующий ряд:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \qquad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \quad |x| < 1 .$$

Подставив в этот ряд $x = -(1-a)$, $0 < a < 1$, получим то, что нужно:

$$-\ln a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-a)^k}{k}.$$

Пример 4.7. Продолжение предыдущего. Для оценки **вероятности отказа прибора** испытывалось n приборов. В результате были получены следующие результаты: $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Построить МП-оценку a^* для вероятности $p \equiv a$ отказа прибора.

Решение. В этом случае **закон распределения наблюдений** имеет вид:

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_n; a) = \prod_{i=1}^{n} (1-a)^{k_i - 1} a = (1-a)^{k_1 + \ldots + k_n} \cdot \left(\frac{a}{1-a}\right)^n.$$

Поэтому

$$\ln P(k_1, k_2, \ldots, k_n; a) = \ln(1-a) \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i + n \ln \frac{a}{1-a},$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial a} = \frac{-1}{1-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i + n\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{1-a}\right] = \frac{-1}{1-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i + \frac{n}{a(1-a)};$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{1-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i + \frac{n}{a(1-a)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{n}{a}.$$

Получили следующую оценку:

$$a^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} k_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i / n} = \frac{1}{k_{cp}},$$ где k_{cp} — **среднее**.

Подчёркивая случайность, запишем $a^* = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}$.

Замечание 4.3. Если перейти к другой параметризации, а именно, вместо a использовать параметр $b = \frac{1}{a}$, то анализ оценки упростится. Оценка будет иметь вид:

$$b^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n} \quad \text{или} \quad b^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n}.$$

$$\mathbf{M}b^* = b, \qquad \mathbf{D}b^* = \frac{b^2}{n}.$$

Пример 4.8. МП-оценка параметра равномерного распределения.

Пусть $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — выборка из совокупности, распределенной по **равномерному** закону $R[0, a]$ с **неизвестным** правым концом $a > 0$. Плотность распределения выборки, очевидно, равна

$$p(x_1, \ldots, x_n; a) = \begin{cases} 1/a^n, & \text{если } 0 < x_i < a,\ i = \overline{1,n}; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1/a^n, & \text{если } \min\limits_i x_i > 0,\ \max\limits_i x_i < a; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

поскольку

$$p(x_i; a) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, & \text{если } 0 < x_i < a; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Все имеющиеся измерения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **положительны**: $\min\limits_i x_i > 0$. Фиксируем их. В результате получаем функцию **правдоподобия** $p(x_1, \ldots, x_n; a) = p(a)$ (функцию аргумента a). Она оказалась разрывной, поэтому искать её **максимум** с помощью операции дифференцирования **нельзя**. Построим график **функции правдоподобия** $p(x_1, \ldots, x_n; a) = p(a)$. Очевидно, что она достигает своего **максимума** в точке $a^* = \max\limits_{1 \le i \le n} x_i$.

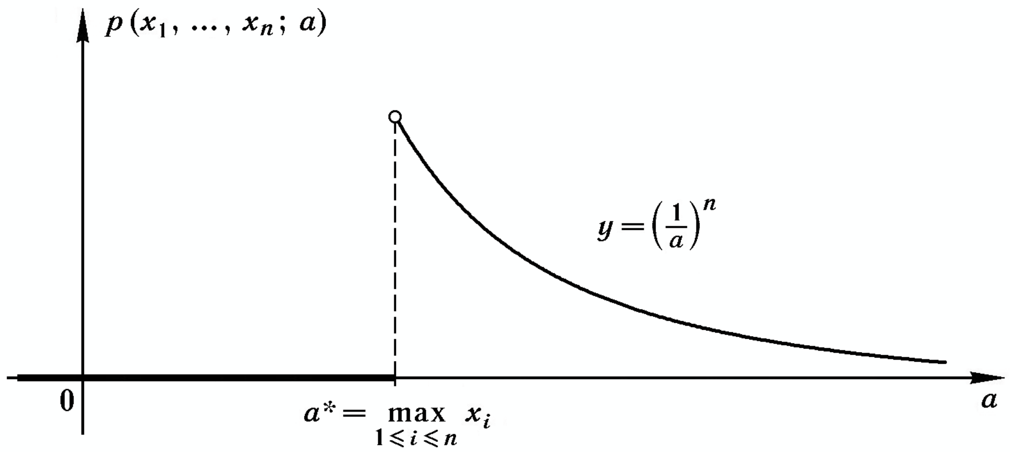


Рис. 4.1

Подчеркивая случайность, пишем

$$a^* = \max_{1 \le i \le n} \xi_i .$$

Проанализируем эту оценку. Её функция распределения имеет вид:

$$F_{a^*}(y) = \mathbf{P}\{\max_i \xi_i < y\} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{\xi_i < y\} = \left(F_\xi(y)\right)^n = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0, \\ (y/a)^n, & \text{если } y \in [0, a], \\ 1, & \text{если } y > a. \end{cases}$$

Дифференцируя её, найдём плотность распределения:

$$p_{a^*}(y) = \left(F_{a^*}(y)\right)' = \begin{cases} ny^{n-1}/a^n, & \text{если } y \in [0, a]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$\mathbf{M}a^* = \int_0^a y p_{a^*}(y)dy = \frac{n}{n+1}a.$$

Поскольку $\mathbf{M}a^* = \frac{n}{n+1}a \neq a$, оценка a^* — **смещенная**. Её дисперсия

$$\mathbf{D}a^* = \int_0^a y^2 p_{a^*}(y)dy - (\mathbf{M}a^*)^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}a^2.$$

Эту оценку легко исправить — сделать **несмещенной**, умножив на коэффициент $\frac{n+1}{n}$. В результате получим **несмещённую** оценку

$$\hat{a} = \frac{n+1}{n}\max_i x_i : \quad M\hat{a} = a \text{ при } \textbf{любом } a,$$

дисперсия которой

$$\mathbf{D}\hat{a} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \mathbf{D}a^* = \frac{1}{(n+2)n}a^2.$$

Замечаем, что она убывает быстрее, чем $1/n$. Это **противоречит** неравенству (2.7) раздела 2.2. Однако, в этом примере условия **неравенства** Рао-Крамера **не выполняются**, и дисперсия может убывать **быстрее**. Это ещё один пример **сверхэффективной** оценки.

Пример 4.9 (оценка связанных параметров).

Имеются три **неизвестные** величины a, b, c. Каждая измерялась **отдельно** n раз со **случайными** погрешностями. Результаты **независимых** измерений таковы:

для a: $x \equiv (x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i \sim N(a, \sigma^2)$, $i = \overline{1, n}$;

для b: $y \equiv (y_1, y_2, ..., y_n)$, где $y_i \sim N(b, \sigma^2)$, $i = \overline{1, n}$;

для c: $z \equiv (z_1, z_2, ..., z_n)$, где $z_i \sim N(c, \sigma^2)$, $i = \overline{1, n}$.

Между параметрами a, b, c имеется связь:

$$a + b + c = 0. \qquad \textbf{(4.6)}$$

Найти **несмещённые** оценки для параметров a, b, c и **сравнить** их с оценками, которые **не учитывают** связь, т.е. с оценками

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \quad \hat{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i, \quad \hat{c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i,$$

имеющими, очевидно, дисперсии: $\mathbf{D}\hat{a} = \mathbf{D}\hat{b} = \mathbf{D}\hat{c} = \frac{\sigma^2}{n}$ (сравнить также дисперсии в одном и другом случае).

Решение. Выпишем закон распределения **всех** наблюдений:

$$p(x, y, z; a, b, c) = p_x(x; a)\cdot p_y(y; b)\cdot p_z(z; c) =$$

$$= C_1 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i - a)^2}\cdot C_1 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(y_i - b)^2}\cdot C_1 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(z_i - c)^2}.$$

Прологарифмируем выражение для плотности:

$$\ln p(x,y,z;a,b,c) =$$

$$= C_2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - b)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(z_i - c)^2 .$$

Найти **МП-оценку** означает решить следующую задачу на **условный** экстремум:

найти $\max\limits_{a,b,c} \ln p(x,y,z;a,b,c)$ при **условии** связи $a+b+c=0$.

Составляем функцию **Лагранжа**:

$$L(a,b,c,\lambda) = \ln p(a,b,c) + \lambda(a+b+c)$$

и находим **безусловный** экстремум:

$$\frac{\partial L}{\partial a} \equiv \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) + \lambda = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial b} \equiv \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - b) + \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} \equiv \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(z_i - c) + \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv a+b+c = 0.$$

Из первых трёх уравнений находим выражения:

$$a^* = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \lambda\sigma^2\right), \quad b^* = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i + \lambda\sigma^2\right), \quad c^* = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i + \lambda\sigma^2\right).$$

Из четвёртого уравнения (подставляя a^*, b^*, c^*) находим λ:

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i + 3\lambda\sigma^2\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{1}{3n\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i\right).$$

Окончательно получаем **оценки**:

$$a^* = \frac{1}{3n}\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} z_i\right),$$

$$b^* = \frac{1}{3n}\left(2\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} z_i\right),$$

$$c^* = \frac{1}{3n}\left(2\sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i\right).$$

Проверим **несмещённость** оценок:

$$\mathbf{M}a^* = \frac{1}{3n}(2na - nb - nc) = \frac{n}{3n}(2a - b - c) = \frac{1}{3}(3a - a - b - c) = a.$$

Аналогично получаются равенства $\mathbf{M}b^* = b$, $\mathbf{M}c^* = c$.

Определим дисперсии:

$$\mathrm{D}a^* = \mathrm{D}b^* = \mathrm{D}c^* = \frac{1}{9n^2}(4n\sigma^2 + n\sigma^2 + n\sigma^2) = \frac{2}{3}\frac{\sigma^2}{n}.$$

Сравнивая эти дисперсии с дисперсиями оценок $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ (без учёта связи), получаем, что дисперсии оценок уменьшились.

Замечание 4.4. Задачу можно было бы решать с одинаковым успехом при различных дисперсиях измерений и различных количествах наблюдений.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ ПО МП-МЕТОДУ

4.5. Независимые СВ имеют биномиальные распределения соответственно $Bi(n_1, p)$, $Bi(n_2, p)$, …, $Bi(n_k, p)$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — значения, которые приняли эти СВ в некотором эксперименте. Найти **МП-оценку** параметра p. Показать, что полученная оценка является н**есмещённой**, и вычислить её **дисперсию**.

4.6. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка из генеральной совокупности, имеющей **равномерное** распределение $R[a, b]$. Найти **МП-оценки** параметров a и b по выборке.

4.7. СВ ξ имеет следующую **плотность** распределения:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} kx & \text{при } x \in [0, \sqrt{2/k}], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, \sqrt{2/k}]. \end{cases}$$

Найти **МП-оценку** математического ожидания СВ ξ по выборке **объёма** n.

4.8. Длина $\boldsymbol{l}$ объекта измерялась **независимо** друг от друга **двумя** приборами. Оба прибора дают при измерении **случайные** ошибки, имеющие **нормальное** распределение со средним, равным **нулю**, и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2. Найти **МП-оценку** величины $\boldsymbol{l}$, если первым прибором сделано n_1 измерений, а вторым — n_2 измерений.