Biçimsel Diller ve Otomata Teorisi

Sunu II

İZZET FATİH ŞENTÜRK

Dilleri Tanımlamak İçin Yeni Bir Yöntem - Özyinelemeli

• Özyinelemeli Tanım; üç aşamalı bir süreç • Kümedeki bazı temel
nesneleri belirleyin • Kümede zaten bildiklerimizden daha
fazla nesne oluşturmak için kurallar verin • Kümede bu şekilde oluşturulanlar dışında hiçbir nesneye izin
verilmediğini beyan edin

• Örnek: Pozitif çift tamsayılar kümesini tanımlayın • ÇİFT, 2 ile bölünebilen tüm

pozitif tam sayıların kümesidir • ÇİFT, n = 1 2 3 4 olmak üzere tüm 2n'lerin kümesidir

...

• Üçüncü yöntem: özyinelemeli tanım
• Kural 1, 2 ÇİFT'tedir • x
ÇİFT'teyse, x+2 de öyledir • ÇİFT
kümesindeki öğeler yalnızca yukarıdaki iki kuraldan üretilebilenlerdir.

Kanıt

• 14'ün ÇİFT kümesinde olduğunu kanıtlayın •

İlk tanım; 14'ü 2'ye bölün ve kalan yok • İkinci tanım; 14 = (2)(7) • Üçüncü tanım; yinelemeli • Kural 1, 2 ÇİFT'te • Kural 2, 2+2 de ÇİFT'te • Kural 2, 4+2 de ÇİFT'te • Kural 2, 6+2 de ÇİFT'te • Kural 2, 8+2 de ÇİFT'te ayrıca ÇİFT'te •

Kural 2, 10+2 de ÇİFT'tedir • Kural 2, 12+2 de ÇİFT'tedir, 14'ün ÇİFT'te olduğu sonucuna varın

Kanıt

- EVEN için başka bir özyinelemeli tanım
  - Kural 1, 2 ÇİFT'tedir •

    Kural 2, x ve y'nin ikisi de ÇİFT'teyse, o zaman x+y de öyledir

- 14'ün ÇİFT'te olduğunu gösterin
  - Kural 1; 2 ÇİFT'te • Kural

    2; x=2, y=2, 4 ÇİFT'te • Kural 2; x=2,

    y=4, 6 ÇİFT'te • Kural 2; x=4, y=4, 8

    ÇİFT'te • Kural 2; x=6, y=8, 14 ÇİFT'te

Özyinelemeli Tanım

- Özyinelemeli tanımı kullanmak (ÇİFT kanıtlamak) yinelemesiz iki tanımdan daha zordur • Ancak bazı avantajları vardır! • Diyelim ki iki
  - sayının toplamının ÇİFT olduğunu da ÇİFT'te bir sayı olduğunu kanıtlamak istiyoruz.
    - İkinci özyinelemeli tanımdan önemsiz sonuç • Bunu birinci tanımdan kanıtlamak kesinlikle daha zor!
- Neden özyinelemeli bir tanım istiyoruz?
  - Diğer olası tanımları anlamak ne kadar kolay • Ne tür teoremleri kanıtlamak isteyebiliriz?

Özyinelemeli Tanım – Pozitif/Negatif Tam Sayılar

• Pozitif tamsayıları tanımlayın •

Kural I, 1 TAM SAYILAR'dadır •

Kural 2, x TAM SAYILAR'daysa x+1 de öyledir

• Tamsayıları, negatif sayıları ve sıfırı da içerecek şekilde tanımlayın

• Kural 1, 1 TAM

SAYILAR'dadır • Kural 2, Hem x hem de y TAM SAYILAR'daysa, o

zaman x+y ve xy ü1-1 = 0 ve tüm pozitif x için, 0 - x = -x

Yinelemeli Tanım – Pozitif Gerçek Sayılar

- Kural 1, x POZİTİF'tedir
- Kural 2, x ve y POZİTİF ise x+y ve xy de öyledir
- Problem •

Üzerine inşa edilecek en küçük pozitif x gerçek sayısı yoktur.
setin geri kalanı

Yinelemeli Tanım – Pozitif Gerçek Sayılar

•

Deneyin • Kural 1, x TAM SAYILAR ise, “.” bir ondalık noktadır ve y herhangi bir sonlu rakam dizisidir, bazı sıfırlarla başlasa bile, o zaman xy POZİTİF'tedir

• İki problem: • Tüm

gerçek sayıları üretmiyor (π dahil değil – sonsuz uzunluk) • Tanım özyinelemeli değil. POZİTİF'in bilinen unsurlarını yeni POZİTİF unsurları yaratmak için kullanmadık. Bunun yerine, bir INTEGERS öğesi ve bir rakam dizisi kullandık.

Yinelemeli Tanım – Pozitif Gerçek Sayılar

•

Deneyin • Kural 1, 1

POZİTİF'tir • x ve y POZİTİF ise, o zaman x+y, x*y ve x/y de öyledir • Sorun:

• Bir küme tanımlar, ancak pozitif gerçek sayılar kümesi değildir (sorunu kontrol edin 17 bölümün sonunda)

Yinelemeli Tanım - Polinomlar

- Polinom, her biri gerçek sayı çarpı x'in kuvveti (x0=1 olabilir) biçiminde olan sonlu bir terim toplamıdır.
- POLİNOM kümesi • Kural 1,

  Herhangi bir sayı POLİNOMAL'dedir • x değişkeni POLİNOMAL'dedir

  - p ve q POLİNOMİAL'deyse, p+q, pq, (p) ve pq de öyledir (pq birleştirme değil, çarpma anlamına gelir)

Yinelemeli Tanım - Polinomlar

• 3x2+7x-9'un POLİNOMDA olduğunu gösterin

• Kural 1; 3 polinomdadır • Kural 2; x polinomdadır • Kural 3; (3)(x) POLİNOMİDE; buna 3x diyelim • Kural 3; (3x)(x) POLİNOMİDE; 3x2 olarak adlandırın • Kural 1; 7 polinomdadır • Kural 3; (7)(x) POLİNOM'dadır • Kural 3; 3x2+7x polinomdadır • Kural 1; -9 POLİNOMAL'dedir • Kural 3; 3x2+7x + (-9) = 3x2+7x-9 POLİNOMAL'dedir Bu sonucu üretebilecek başka diziler de var!

Yinelemeli Tanımın Avantajları - Polinomlar

- Diyelim ki bunu kanıtladık.
  - İki fonksiyonun toplamının türevi, türevlerin toplamıdır

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

ve

  - İki fonksiyonun çarpımının türevi

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]\cdot g(x) + f(x)\cdot \frac{d}{dx}[g(x)]$$

üBir sayının türevinin 0 ve x'in türevinin 1 olduğunu ispatladığımız anda tüm polinomların türevini alabileceğimizi otomatik olarak göstermiş oluyoruz.

Yinelemeli Tanımın Avantajları - Polinomlar

• Sonuçlar • xn'nin

türevinin nxn -1 olduğunu bilmiyoruz üFakat her n için

hesaplanabileceğini biliyoruz .

üBunu yapmak için en iyi algoritmayı vermeden tüm polinomları türevlendirmenin mümkün olduğunu kanıtlayabiliriz.

üBelirli görevlerin bir bilgisayar tarafından yapılmasının mümkün olduğunu kanıtlayabiliriz. bunları yapacak en iyi algoritmaları bilmiyoruz

üBu nedenle özyinelemeli tanımlar bilgisayar teorisi için önemlidir!

Daha Özyinelemeli Tanımlar

• VIII. Henry'nin soyundan gelen insanlar grubu

• Kural 1, VIII.Henry'nin çocuklarının hepsi TODUNLARIN elementleridir • Kural 2, x TODUNLARIN bir elemanıysa, o zaman x'in çocukları da öyledir

• Faktöriyelin tanımı

• Kural 1, 0! = 1

• Kural 2, n! = n*(n-1)! •

Tanımlar yinelemelidir, çünkü kullanılan kurallardan biri kümeyi tanımla kümenin kendisinden bahseder.

• Bilgisayar dillerinde, bir yordamın kendisini aramasına izin verdiğimizde, programa özyinelemeli denir.

Özyinelemeli Tanım Örnekleri

• L1 = x+ = {x xx xxx ...} • Kural
1, x L1'dedir • Kural 2, Eğer
w, L1'de herhangi bir kelimeyse , o zaman xw de L1'dedir =

• L4 = x • * {Λ x xx xxx ...}
Kural 1, Λ L4'tedir •
Kural 2, w L4'te herhangi bir kelimeyse, xw de L4'tedir • L2

= xodd = {x xxx xxxxx ...} • Kural 1, x L2'dedir • Kural 2, Eğer w
L2'deki herhangi bir kelime ise, xxw de L2'dedir

Özyinelemeli Tanım Örnekleri

- TAM SAYILAR
  - Kural 1, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 TAM SAYILAR'dadır • Kural 2, w

  TAM SAYILAR'da herhangi bir kelime ise, o zaman w0 w1 w2 w3 w4 w5 w6 w7 w8 w9 aynı zamanda INTEGER'lerdeki kelimelerdir

- Kleene kapatma
  - Kural 1, Eğer S bir dil ise, S'nin tüm kelimeleri S*'dedir • Kural 2, Λ S*'dedir • Kural

  3, Eğer x ve y S*'deyse, o zaman xy dizilimi de öyledir

Önemli Bir Dil: Aritmetik İfadeler

- Bilgisayarlar tarafından sindirilebilir bir biçimde, tek satıra yazılabilen geçerli bir aritmetik ifade tanımlayın

Σ = {0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 + - • Geçersiz • * / ( )} •
(3+5)+6)

Dengesiz parantezler •
2//8+9) Yasak alt dize -) •
(3+(4-)8) Yasak alt dize -) • 2)-(4
Açmadan önce parantezi kapatın • Başka kural var mı?

• // ve */ •
Daha fazlası var mı?

Önemli Bir Dil: Aritmetik İfadeler

- AE'yi uzun bir yasaklanmış alt dizeler ve parantez gereksinimleri listesi yerine yinelemeli bir tanım kullanarak tanımlayın • Kural 1, Herhangi bir sayı (pozitif, negatif, sıfır) AE'dedir • Kural 2, x AE'deyse, öyledir:
  - (i) (x)
  - (ii) -x (x'in eksi işaretiyle başlamaması koşuluyla) • Kural 3, x ve

y AE'deyse, öyledir: • (i) x+y (y'deki ilk sembol + veya - değilse) • (ii) (y'deki ilk sembol + veya - değilse) xy • (iii) x*y • (iv) x/y • (v) x**y (üs almayı gösterir)

Önemli Bir Dil: Aritmetik İfadeler

- En doğal tanım
  - Gerçek hayatta aritmetik ifadeleri tanımak için kullanıyoruz
- Geçerli mi değil mi? (2+4)*(7*(9-3)/4)/
  4*(2+8)-1 • Yasak alt dizileri aramak için diziyi taramayız •
  Parantezleri saymayız • Ayırırız bileşenlerine

Operatör Hiyerarşisi

- AE'nin tanımı bize yazma olasılığını verir.
  - 2+3+4 •
    Belirsiz değil •
  8/4/2 • Belirsiz. 8/
    (4/2)=4 veya (8/4)/2=1 • 3+4*5 • Belirsiz anlamına
  gelebilir. Operatör hiyerarşisini ve soldan sağa yürütmeyi
    benimseyin • Kural 2'yi uygulayın ve istenirse karışıklığı önlemek için
    yeterince parantez koyun
- 8/4/2'deki belirsizlik bir anlam sorunudur. Dizgenin AE'de bir kelime olduğuna şüphe yok. Ne anlama geldiği konusunda sadece şüphe var