Diferensiyel Denklemlerin Laplace ile Çözümü

15 Aralık 2021 Çarşamba 10:55

Diferensiyel Denklemle...

**LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜLMESİ**

Laplece dönüşümü ile diferansiyel denklemlerin çözümü 3 adımda özetlenebilir:

1. Verilen diferansiyel denklemdeki her bir terimin Laplace dönüşümünü yapınız. Bunun sonucunda $Y(s)$'e bağlı cebirsel bir denklem elde edeceksiniz. Aranan $y(t)$ fonksiyonu, $Y(s)$'in ters Laplace'ıdır.
2. $Y(s)$'i yalnız bırakın. Bunun sonucunda genellikle bir kesir elde edilir.
3. $Y(s)$'in ters Laplace dönüşümünü yaparak aranan fonksiyon $y(t)$'yi bulun. Bu aşamadan kesri kısmi kesilere ayırmanız ve ters dönüşüm/integral tablolarına başvurmanız gerekebilir.

Laplace dönüşümü yapılırken $t = 0$'daki başlangıç değerleri doğrudan girildiği için daha sonradan bu sınır şartlarının uygulanmasına gerek yoktur. Diğer bir ifadeyle, Laplace dönüşümü ile bir diferansiyel denklemi çözebilmek için bu başlangıç değerlerine gereksinim vardır. Bu şartların sadece $t = 0$ için verilebiliyor olması, bu güçlü dönüşümün en zayıf halkasıdır. Dolayısıyla Laplace dönüşümü ile sınır-değer problemlerinin çözümü yapılamaz

**ÖRNEK** $$y'' - y = t, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 1$$

diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$$y(t) \overset{\mathcal{L}}{=} Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{y'' - y\} = \mathcal{L}\{t\}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$$
$$= s^2 Y(s) - s - 1$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$
$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t\}$$

$$s^2 Y(s) - s - 1 - Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)\left(s^2 - 1\right) = \frac{1}{s^2} + s + 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2-1)} + \frac{s}{s^2-1} + \frac{1}{s^2-1} \quad **$$

$$\frac{1}{s^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} \quad \text{Tekrar}$$

$$\frac{1}{s^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)} + \frac{s}{s^2-1} + \frac{1}{s^2-1}\right\}$$

I. yol

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)}\right\} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-1} \quad ?? \quad \text{ÖDEV}$$

$(s+1)(s-1)$

Tekrarlayan

II. yol

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)} + \frac{\cancel{s+1}}{s^2-1}\right\}$$

$(s-1)\cancel{(s+1)}$

$$\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s-1}\right\}$$

$t$ $\quad e^t \cdot 1$

$$\boxed{y(t) = \sinh t - t - e^t}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - y(0) - y'(0)$$

sıfıra

**SORU**
$$y'' + y = 2t,$$
$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2},\; y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$
diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$\boxed{t = x + \frac{\pi}{4}}$ , $t=\frac{\pi}{4}$, $x=0$

$x = t - \frac{\pi}{4}$

$y(t) = y(x+\frac{\pi}{4})$

$y'(t) = y'(x+\frac{\pi}{4})$

$y''(t) = y''(x+\frac{\pi}{4})$

$y''+y = 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 2x+\frac{\pi}{2}$ , $y(0)=\frac{\pi}{2}$, $y'(0)=2$

$\mathcal{L}\{y''+y\} = \mathcal{L}\{2x+\frac{\pi}{2}\}$

$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - \frac{\pi}{2}s - 2$

$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$

$\mathcal{L}\{2x\} = \frac{2}{s^2}$ , $\mathcal{L}\{\frac{\pi}{2}\} = \frac{\pi}{2s}$

$s^2Y(s) - \frac{\pi}{2}s - 2 + Y(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{\pi}{2s}$

$(s^2+1)Y(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{\pi}{2s} + \frac{\pi}{2}s + 2$ ***

(2) (s) ($s^2$) ($2s^2$)

$(\cancel{s^2+1})Y(s) = \frac{4+\pi s+\pi s^3+4s^2}{2s^2} = \frac{\pi s(1+s^2)+4(1+s^2)}{2s^2} = \frac{(\cancel{1+s^2})(\pi s+4)}{2s^2}$

$Y(s) = \frac{\pi s+4}{2s^2} = \frac{\pi}{2s} + \frac{2}{s^2}$

$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\pi}{2s} + \frac{2}{s^2}\right\} = \frac{\pi}{2} + 2x$

$y(t) = \frac{\pi}{2} + 2\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + 2t - \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{2t}}$

**SORU** $\dfrac{d^2y}{dt^2}+16y=5\sin t, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$

diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}\{y''+16y\}=\mathcal{L}\{5\sin t\}$$

$$\mathcal{L}\{y''\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{5\sin t\}=\frac{5}{s^2+1}$$

$$s^2Y(s)+16Y(s)=\frac{5}{s^2+1}$$

$$Y(s)(s^2+16)=\frac{5}{s^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{5}{(s^2+1)(s^2+16)}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s^2+1)(s^2+16)}\right\}$$

$$\frac{5}{(s^2+1)(s^2+16)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+16}$$

$(s^2+16)$ $\quad$ $(s^2+1)$

$$5=(As+B)(s^2+16)+(Cs+D)(s^2+1)$$

$$5=As^3+16As+Bs^2+16B+Cs^3+Cs+Ds^2+D$$

$A+C=0$ * $\qquad A=0,\ C=0$

$-/\ B+D=0$ $\qquad 15B=5,\ B=\frac{1}{3}$

$16A+C=0$ * $\qquad D=-\frac{1}{3}$

$16B+D=5$

$$y(t)=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}-\frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\}$$

$$y(t)=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{12}\sin 4t \quad //$$

ÖDEV

**SORU** $\dfrac{d^3y}{dt^3} - 5\dfrac{d^2y}{dt^2} + 7\dfrac{dy}{dt} - 3y = 20\sin t, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad y''(0)=-2$

diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

**SORU** $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+y=te^{-t}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2$ , $y(t)$, $Y(s)$

diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$\mathcal{L}\{y''+2y'+y\}=\mathcal{L}\{te^{-t}\},$

$\mathcal{L}\{y''\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-s-2$

$\mathcal{L}\{y'\}=sY(s)-y(0)=sY(s)-1$

$\mathcal{L}\{te^{-t}\}=\dfrac{1}{(s+1)^2}$

$s^2Y(s)-s-2+2sY(s)-2+Y(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2}$

$\underbrace{(s^2+2s+1)}_{(s+1)^2}Y(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2}+s+4$

$Y(s)=\dfrac{1}{(s+1)^4}+\dfrac{s}{(s+1)^2}+\dfrac{4}{(s+1)^2}$

$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^4}+\dfrac{s}{(s+1)^2}+\dfrac{4}{(s+1)^2}\right\}$

$=\dfrac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{(s+1)^4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1-1}{(s+1)^2}\right\}+4\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^2}\right\}$

$=\dfrac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{(s+1)^4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\cancel{s+1}}{(s+1)^{\cancel{2}}}\right\}+3\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^2}\right\}$

$=\dfrac{1}{6}t^3e^{-t}+e^{-t}+3te^{-t}=e^{-t}\left(\dfrac{t^3}{6}+3t+1\right)$ //

**SORU** $$\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+6y=0,\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=5$$

diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}\{y''-5y'+6y\}=\mathcal{L}\{0\}$$

$$\mathcal{L}\{y''\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-s-5$$

$$\mathcal{L}\{y'\}=sY(s)-y(0)=sY(s)-1$$

$$s^2Y(s)-s-\cancel{5}-5sY(s)+\cancel{5}+6Y(s)=0$$

$$(s^2-5s+6)Y(s)=s$$

$$Y(s)=\frac{s}{s^2-5s+6}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-5s+6}\right\}$$

$$\frac{s}{s^2-5s+6}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-3}$$

$(s-3)$ $(s-2)$

$(s-2)(s-3)$

$$s=A(s-3)+B(s-2)$$

$s=2,\quad 2=-A \Rightarrow A=-2$

$s=3,\quad 3=B$

$$y(t)=-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$\boxed{y(t)=-2e^{2t}+3e^{3t}}$$

**SORU** $$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+5y=0, \qquad y(0)=2, \quad y'(0)=4$$

diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$\mathcal{L}\{y''-2y'+5y\}=0$

$\mathcal{L}\{y''\}=s^2Y(s)-s\,y(0)-y'(0)=s^2Y(s)-2s-4$

$\mathcal{L}\{y'\}=sY(s)-y(0)=sY(s)-2$

$s^2Y(s)-2s-4-2sY(s)+4+5Y(s)=0$

$(s^2-2s+5)Y(s)=2s$

$Y(s)=\dfrac{2s}{s^2-2s+5}$

$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s}{s^2-2s+5}\right\}=2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1-1}{s^2-2s+5}\right\}$

$=2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s-1)^2+4}\right\}$

$=2e^{t}\cos 2t+\sin 2t\cdot e^{t}$

$=e^{t}(2\cos 2t+\sin 2t)$ //

**SORU** $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = \sin 2t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}\{y'' + y\} = \mathcal{L}\{\sin 2t\},$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$s^2Y(s) - 1 + Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$(s^2+1)Y(s) = \frac{2}{s^2+4} + 1$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$2 = (As+B)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+4)$$

$$2 = As^3 + As + Bs^2 + B + Cs^3 + 4Cs + Ds^2 + 4D$$

$$* \; A + C = 0 \qquad - \quad A = 0, \; C = 0$$

$$- \; B + D = 0 \qquad 3D = 2$$

$$* \; A + 4C = 0 \quad - \quad D = \frac{2}{3}, \quad B = -\frac{2}{3}$$

$$- \; B + 4D = 2$$

$$y(t) = -\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{3}\sin 2t + \frac{5}{3}\sin t}$$

$***$