Lineer Diferensiyel Denklemler

21 Ekim 2021 Perşembe 18:17

Lineer
Diferensiy...

LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)} \quad ***$$

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

şeklindeki diferansiyel denklemlere birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler denir. Çözümü için

$$\underbrace{\left[P(x).y - Q(x)\right]}_{M(x,y)} dx + \underbrace{dy}_{N(x,y)=1} = 0$$

$M_y \stackrel{?}{=} N_x$

$\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$

$\frac{M_y - N_x}{-M} = f(y)$

şekline getirilir.

$$\frac{dM}{dy} = P(x) \ , \ \frac{dN}{dx} = 0$$

$$\frac{My - Nx}{N} = P(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

şeklinde bulunabilir.

$$e^{\int P(x)dx}[P(x)y - Q(x)]dx + e^{\int P(x)dx}dy = 0$$

$$e^{\int P(x)dx}[\underbrace{P(x)ydx + dy}] = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

$$\cancel{\int} \cancel{d}[e^{\int P(x)dx}y] = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

$$\boxed{e^{\int P(x)dx}y = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c}$$ ***

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c$$

$d(xy) = dx\,y + x\,dy$

$d(e^{\int P(x)dx} \cdot y) =$

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

Örnek $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$ diferansiyel denklemi çözümünü bulunuz.

$P(x) = -2x \quad , \quad Q(x) = x$

$$e^{-\int 2x\,dx} \cdot y = \int x\, e^{-\int 2x\,dx}\, dx + C$$

$$e^{-x^2} \cdot y = \int x\, e^{-x^2}\, dx + C$$

$$e^{-x^2} \cdot y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2} + C e^{x^2}}$$

$-x^2 = t$

$-2x\,dx = dt$

$x\,dx = -\frac{dt}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int e^t\,dt$

$= -\frac{1}{2} e^t$

$= -\frac{1}{2} e^{-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + x$$

$$\frac{dy}{dx} = x(2y+1)$$

$$\int \frac{dy}{2y+1} = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln(2y+1) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\ln(2y+1) = x^2 + C$$

$$2y+1 = e^{x^2+C} = Ce^{x^2}$$

$$\boxed{y = \frac{Ce^{x^2} - 1}{2}}$$

Örnek $y' + (\frac{1}{x})y = \sin x$ diferansiyel denklemi çözümünü bulunuz.

$\underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)}$ $\underbrace{\sin x}_{Q(x)}$

$$e^{\int P(x)dx} \cdot y = \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx + C$$

$$e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot y = \int \sin x\, e^{\int \frac{dx}{x}} dx + C$$

$$e^{\ln x}\, y = \int \sin x\, e^{\ln x} dx + C$$

$$x \cdot y = \int x \sin x\, dx + C$$

$$xy = -x\cos x + \sin x + C$$

$$\boxed{y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}}$$

$\int x \sin x\, dx$, $x = u$, $\sin x\, dx = dv$
$dx = du$, $-\cos x = v$

$\int x\sin x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx$
$= -x\cos x + \sin x + C$

Örnek $e^x[y - 3(e^x + 1)^2]dx + (e^x + 1)dy = 0$ diferansiyel denklemi çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$e^x[y - 3(e^x+1)^2] + (e^x+1)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{e^x[y - 3(e^x+1)^2]}{e^x+1} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{e^x}{e^x+1}y - \frac{3e^x(e^x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{e^x+1}} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{e^x}{e^x+1}y = 3e^x(e^x+1)$$

$e^x+1 = t$ $\int \frac{dt}{t} = \ln(t)$
$e^x dx = dt$

$$e^{\int \frac{e^x}{e^x+1}dx} \cdot y = \int 3e^x(e^x+1)\, e^{\int \frac{e^x}{e^x+1}dx} dx + C$$

$$e^{\ln(e^x+1)} \cdot y = \int 3e^x(e^x+1)\, e^{\ln(e^x+1)} dx + C$$

$(e^x+1)y = 3\int e^x(e^x+1)^2 dx$ $\longrightarrow e^x+1 = t = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \frac{(e^x+1)^3}{3}$

$e^{\ldots} \cdot y = \int \ldots$

$(e^x+1)y = 3\int e^x(e^x+1)^2\,dx \longrightarrow e^x+1=t,\quad e^x dx = dt,\quad = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} = \frac{(e^x+1)^3}{3}$

$(e^x+1)y = (e^x+1)^3 + c$

$$\boxed{y = (e^x+1)^2 + \frac{c}{e^x+1}}$$

*ödev

Örnek $y' + (\tan x)\,y = x\sin 2x$ diferansiyel denklemi çözünüz.

Çeşitli değişken değiştirmeleri

$f'(y)\dfrac{dy}{dx}+f(y).p(x)=Q(x)$ biçimindeki 1.mertebeden lineer denklemlerdir. Bu tür denklemlerde $\boxed{u=f(y)}$ değişken dönüşümü yapılır. Buradan $\dfrac{du}{dx}=f'(y)\dfrac{dy}{dx}$ olur ki böylece ilk denklemimiz $\dfrac{du}{dx}+uP(x)=Q(x)$ halini alır. Elde edilen bu lineer denklem bilinen yollardan biriyle çözülür. Elde edilen sonuçta $u=f(y)$ konularak verilen diferansiyel denklemin çözümü elde edilir. Bu tür denklemlere iyi bir örnek Berneoulli diferansiyel denklemidir.

$y^2+2y=(2y+2)\frac{dy}{dx}$

Örnek $(y+1)\frac{dy}{dx}+x(y^2+2y)=x$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$(y^2)'=2y.y'$

$y^2+2y=u$

$(2y+2)\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$

$2(y+1)\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$

$(y+1)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{du}{dx}$

$\Rightarrow$

$\frac{1}{2}\frac{du}{dx}+x.u=x$

$\frac{du}{dx}+2xu=2x$ (Lineer)

$e^{\int 2x\,dx}.u=\int 2x\,e^{\int 2x\,dx}\,dx+C$

$e^{x^2}.u=\int 2x\,e^{x^2}dx+C$

$x^2=t$
$2x\,dx=dt$ $\Rightarrow \int e^t dt=e^t$

$e^{x^2}.u=e^{x^2}+C$

$u=1+Ce^{-x^2}$

$$\boxed{y^2+2y=1+Ce^{-x^2}}$$

Örnek $x^2 \cos y \dfrac{dy}{dx} = 2x \sin y - 1$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$$\cos y \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}\sin y - \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \sin y = u$$

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x}u - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{2}{x}u = -\frac{1}{x^2} \qquad (\text{Lineer})$$

$$-\int \frac{2}{x}dx = -2\ln x$$

$$e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

$$e^{-\int \frac{2}{x}dx} \cdot u = -\int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{2}{x}dx} dx + C$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot u = -\int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} dx + C$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot u = \frac{1}{3x^3} + C$$

$$u = \frac{1}{3x} + cx^2 \Rightarrow \sin y = \frac{1}{3x} + cx^2$$

$$\boxed{y = \arcsin\left(\frac{1}{3x} + cx^2\right)}$$