Ayrık Matematik

Bağıntılar ve Fonksiyonlar

H. Turgut Uyar Ayşegül Gençata Yayımlı Emre Harmancı

2001-2013

Lisans

Konular

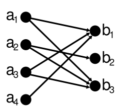
Bağıntı

Tanım
bağıntı: $\alpha \subseteq A \times B \times C \times \cdots \times N$

- çoklu: bağıntının her bir elemanı
- $\alpha \subseteq A \times B$: ikili bağıntı
  - $a\alpha b$ ile $(a, b) \in \alpha$ aynı
- bağıntı gösterilimi:
  - çizimle
  - matrisle

Bağıntı Örneği

Örnek
$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$
$\alpha = \{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_1)\}$



	b_1	b_2	b_3
a_1	1	0	1
a_2	0	1	1
a_3	1	0	1
a_4	1	0	0

$$M_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Bağıntı Bileşkesi

Tanım
bağıntı bileşkesi:
$\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq B \times C$ olsun
$\alpha\beta = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \exists b \in B\ [a\alpha b \wedge b\beta c]\}$

- $M_{\alpha\beta} = M_\alpha \times M_\beta$
  - mantıksal işlemlerle:
    $1 : T, 0 : F, \cdot : \wedge, + : \vee$

Bağıntı Bileşkesi Örneği

Örnek

Bağıntı Bileşkesi Matrisi Örneği

Örnek

$$M_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad M_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Bağıntı Bileşkesinde Birleşme

- bağıntı bileşkesi birleşme özelliği gösterir

$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

$$\begin{aligned}
& (a,d) \in (\alpha\beta)\gamma \\
\Leftrightarrow\ & \exists c\ [(a,c) \in \alpha\beta \wedge (c,d) \in \gamma] \\
\Leftrightarrow\ & \exists c\ [\exists b\ [(a,b) \in \alpha \wedge (b,c) \in \beta] \wedge (c,d) \in \gamma] \\
\Leftrightarrow\ & \exists b\ [(a,b) \in \alpha \wedge \exists c\ [(b,c) \in \beta \wedge (c,d) \in \gamma]] \\
\Leftrightarrow\ & \exists b\ [(a,b) \in \alpha \wedge (b,d) \in \beta\gamma] \\
\Leftrightarrow\ & (a,d) \in \alpha(\beta\gamma)
\end{aligned}$$

$\square$

Bağıntı Bileşkesi Teoremleri

- $\alpha, \delta \subseteq A \times B$, ve
  $\beta, \gamma \subseteq B \times C$ olsun
- $\alpha(\beta \cup \gamma) = \alpha\beta \cup \alpha\gamma$
- $\alpha(\beta \cap \gamma) \subseteq \alpha\beta \cap \alpha\gamma$
- $(\alpha \cup \delta)\beta = \alpha\beta \cup \delta\beta$
- $(\alpha \cap \delta)\beta \subseteq \alpha\beta \cap \delta\beta$
- $(\alpha \subseteq \delta \wedge \beta \subseteq \gamma) \Rightarrow \alpha\beta \subseteq \delta\gamma$

Bağıntı Bileşkesi Teoremleri

$\alpha(\beta \cup \gamma) = \alpha\beta \cup \alpha\gamma$.

$$\begin{aligned}
& (a,c) \in \alpha(\beta \cup \gamma) \\
\Leftrightarrow\ & \exists b\ [(a,b) \in \alpha \wedge (b,c) \in (\beta \cup \gamma)] \\
\Leftrightarrow\ & \exists b\ [(a,b) \in \alpha \wedge ((b,c) \in \beta \vee (b,c) \in \gamma)] \\
\Leftrightarrow\ & \exists b\ [((a,b) \in \alpha \wedge (b,c) \in \beta) \\
& \quad \vee ((a,b) \in \alpha \wedge (b,c) \in \gamma)] \\
\Leftrightarrow\ & (a,c) \in \alpha\beta \vee (a,c) \in \alpha\gamma \\
\Leftrightarrow\ & (a,c) \in \alpha\beta \cup \alpha\gamma
\end{aligned}$$

$\square$

Evrik Bağıntı

Tanım

$\alpha^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in \alpha\}$

- $M_{\alpha^{-1}} = M_\alpha^T$

Evrik Bağıntı Teoremleri

- $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$
- $(\alpha \cup \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cup \beta^{-1}$
- $(\alpha \cap \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cap \beta^{-1}$
- $\overline{\alpha}^{-1} = \overline{\alpha^{-1}}$
- $(\alpha - \beta)^{-1} = \alpha^{-1} - \beta^{-1}$
- $\alpha \subset \beta \Rightarrow \alpha^{-1} \subset \beta^{-1}$

Evrik Bağıntı Teoremleri

$\overline{\alpha}^{-1} = \overline{\alpha^{-1}}$.

$$
\begin{array}{rl}
 & (b, a) \in \overline{\alpha}^{-1} \\
\Leftrightarrow & (a, b) \in \overline{\alpha} \\
\Leftrightarrow & (a, b) \notin \alpha \\
\Leftrightarrow & (b, a) \notin \alpha^{-1} \\
\Leftrightarrow & (b, a) \in \overline{\alpha^{-1}}
\end{array}
$$

$\square$

Evrik Bağıntı Teoremleri

$(\alpha \cap \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cap \beta^{-1}$.

$$
\begin{array}{rl}
 & (b, a) \in (\alpha \cap \beta)^{-1} \\
\Leftrightarrow & (a, b) \in (\alpha \cap \beta) \\
\Leftrightarrow & (a, b) \in \alpha \wedge (a, b) \in \beta \\
\Leftrightarrow & (b, a) \in \alpha^{-1} \wedge (b, a) \in \beta^{-1} \\
\Leftrightarrow & (b, a) \in \alpha^{-1} \cap \beta^{-1}
\end{array}
$$

$\square$

Evrik Bağıntı Teoremleri

$(\alpha - \beta)^{-1} = \alpha^{-1} - \beta^{-1}$.

$$
\begin{array}{rcl}
(\alpha - \beta)^{-1} & = & (\alpha \cap \overline{\beta})^{-1} \\
 & = & \alpha^{-1} \cap \overline{\beta}^{-1} \\
 & = & \alpha^{-1} \cap \overline{\beta^{-1}} \\
 & = & \alpha^{-1} - \beta^{-1}
\end{array}
$$

$\square$

Bileşke Evriği

Teorem
$(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$

Tanıt.

$$
\begin{array}{rl}
 & (c, a) \in (\alpha\beta)^{-1} \\
\Leftrightarrow & (a, c) \in \alpha\beta \\
\Leftrightarrow & \exists b\ [(a, b) \in \alpha \wedge (b, c) \in \beta] \\
\Leftrightarrow & \exists b\ [(b, a) \in \alpha^{-1} \wedge (c, b) \in \beta^{-1}] \\
\Leftrightarrow & (c, a) \in \beta^{-1}\alpha^{-1}
\end{array}
$$

$\square$

Bağıntı Nitelikleri

- $\alpha \subseteq A \times A$
  - *A kümesinde ikili bağıntı*
- α^n ifadesi $\alpha\alpha \cdots \alpha$ anlamına gelsin
- birim bağıntı: $E = \{(x, x) \mid x \in A\}$

Yansıma

yansımalı

$\alpha \subseteq A \times A$

$\forall a\ [a \alpha a]$

- $E \subseteq \alpha$
- yansımasız:
  $\exists a\ [\neg(a \alpha a)]$
- ters yansımalı:
  $\forall a\ [\neg(a \alpha a)]$

Yansıma Örnekleri

Örnek

$\mathcal{R}_1 \subseteq \{1,2\} \times \{1,2\}$

$\mathcal{R}_1 = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$

- $\mathcal{R}_1$ yansımalıdır

Örnek

$\mathcal{R}_2 \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

$\mathcal{R}_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$

- $\mathcal{R}_2$ yansımasızdır

tüm elemanların ikilileri varsa yansımalı (1,1), (2,2), (3,3) gibi

hiçbir elemanın tersi yoksa ters yansımalı (1,1), (2,2), (3,3) hiçbiri olmamalı

tüm elemanların sadece bazı ikilileri varsa yansımalı (1,1), (2,2) gibi o zaman yansımasız

Yansıma Örnekleri

Örnek

$\mathcal{R} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

$\mathcal{R} = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$

- $\mathcal{R}$ ters yansımalıdır

Yansıma Örnekleri

Örnek

$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\mathcal{R} = \{(a,b) \mid ab \geq 0\}$

- $\mathcal{R}$ yansımalıdır

Bakışlılık

simetri

bakışlı

$\alpha \subseteq A \times A$

$\forall a, b\ [(a = b) \vee (a \alpha b \wedge b \alpha a) \vee (\neg(a \alpha b) \wedge \neg(b \alpha a))]$

$\forall a, b\ [(a = b) \vee (a \alpha b \leftrightarrow b \alpha a)]$

- $\alpha^{-1} = \alpha$
- bakışsız:
  $\exists a, b\ [(a \neq b) \wedge (a \alpha b \wedge \neg(b \alpha a)) \vee (\neg(a \alpha b) \wedge b \alpha a))]$
- ters bakışlı:

$$
\begin{aligned}
& \forall a, b\ [(a = b) \vee (a \alpha b \rightarrow \neg(b \alpha a))] \\
\Leftrightarrow\ & \forall a, b\ [(a = b) \vee \neg(a \alpha b) \vee \neg(b \alpha a)] \\
\Leftrightarrow\ & \forall a, b\ [\neg(a \alpha b \wedge b \alpha a) \vee (a = b)] \\
\Leftrightarrow\ & \forall a, b\ [(a \alpha b \wedge b \alpha a) \rightarrow (a = b)]
\end{aligned}
$$

Bakışlılık Örnekleri

Örnek

$\mathcal{R} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

$\mathcal{R} = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$

- $\mathcal{R}$ bakışsızdır

Bakışlılık Örnekleri

Örnek

$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid ab \geq 0\}$

- $\mathcal{R}$ bakışlıdır

Bakışlılık Örnekleri

Örnek

$\mathcal{R} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2)\}$

- $\mathcal{R}$ bakışlı ve ters bakışlıdır

Geçişlilik

geçişli

$\alpha \subseteq A \times A$

$\forall a, b, c\ [(a \alpha b \wedge b \alpha c) \rightarrow (a \alpha c)]$

- $\alpha^2 \subseteq \alpha$
- geçişsiz:
  $\exists a, b, c\ [(a \alpha b \wedge b \alpha c) \wedge \neg(a \alpha c)]$
- ters geçişli:
  $\forall a, b, c\ [(a \alpha b \wedge b \alpha c) \rightarrow \neg(a \alpha c)]$

Geçişlilik Örnekleri

Örnek

$\mathcal{R} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$

- $\mathcal{R}$ ters geçişlidir

Geçişlilik Örnekleri

Örnek

$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid ab \geq 0\}$

- $\mathcal{R}$ geçişsizdir

Evrik Bağıntı Nitelikleri

Teorem

Yansıma, bakışlılık ve geçişlilik nitelikleri evrik bağıntıda korunur.

Örtüler

- yansımalı örtü:
  $r_\alpha = \alpha \cup E$
- bakışlı örtü:
  $s_\alpha = \alpha \cup \alpha^{-1}$
- geçişli örtü:
  $t_\alpha = \bigcup_{i=1,2,3,\ldots} \alpha^i = \alpha \cup \alpha^2 \cup \alpha^3 \cup \cdots$

Özel Bağıntılar

önce gelen - sonra gelen
$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a - b = 1\}$

- ters yansımalı
- ters bakışlı
- ters geçişli

Özel Bağıntılar

bitişiklik
$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid |a - b| = 1\}$

- ters yansımalı
- bakışlı
- ters geçişli

Özel Bağıntılar

dar sıra
$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a < b\}$

- ters yansımalı
- ters bakışlı
- geçişli

Özel Bağıntılar

kısmi sıra
$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a \leq b\}$

- yansımalı
- ters bakışlı
- geçişli

Özel Bağıntılar

önsıra
$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid |a| \leq |b|\}$

- yansımalı
- bakışsız
- geçişli

Özel Bağıntılar

sınırlı fark

$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+$

$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid |a - b| \leq m\}$

- yansımalı
- bakışlı
- geçişsiz

Özel Bağıntılar

karşılaştırılabilirlik

$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{U} \times \mathbb{U}$

$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid (a \subseteq b) \vee (b \subseteq a)\}$

- yansımalı
- bakışlı
- geçişsiz

Özel Bağıntılar

kardeşlik

- ters yansımalı
- bakışlı
- geçişli

- bir bağıntı nasıl bakışlı, geçişli ve yansımasız olabilir?

Uyuşma Bağıntıları

Tanım

uyuşma bağıntısı: γ

- yansımalı
- bakışlı

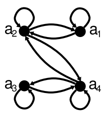
- çizerek gösterilimde oklar yerine çizgiler
- matris gösterilimi merdiven şeklinde

- $\alpha\alpha^{-1}$ bir uyuşma bağıntısıdır

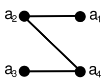
Uyuşma Bağıntısı Örneği

Örnek

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \\ \mathcal{R} &= \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), \\ &\quad (a_3, a_3), (a_4, a_4), \\ &\quad (a_1, a_2), (a_2, a_1), \\ &\quad (a_2, a_4), (a_4, a_2), \\ &\quad (a_3, a_4), (a_4, a_3)\} \end{aligned}$$



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} 1 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Uyuşma Bağıntısı Örneği

Örnek ($\alpha\alpha^{-1}$)

P: kişiler, L: diller

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$

$L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$

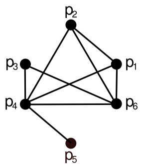
$\alpha \subseteq P \times L$

$$M_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad M_{\alpha^{-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Uyuşma Bağıntısı Örneği

Örnek ($\alpha\alpha^{-1}$)
$\alpha\alpha^{-1} \subseteq P \times P$

$$M_{\alpha\alpha^{-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



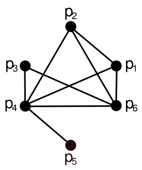
Uyuşanlar Sınıfı

Tanım
uyuşanlar sınıfı: $C \subseteq A$
$\forall a, b\ [a \in C \wedge b \in C \rightarrow a\gamma b]$

- en üst uyuşanlar sınıfı:
  başka bir uyuşanlar sınıfının altkümesi değil
- bir eleman birden fazla EÜS'ye girebilir
- eksiksiz örtü: C_γ
  tüm EÜS'lerin oluşturduğu küme

Uyuşanlar Sınıfı Örneği

Örnek ($\alpha\alpha^{-1}$)



- $C_1 = \{a_4, a_6\}$
- $C_2 = \{a_2, a_4, a_6\}$
- $C_3 = \{a_1, a_2, a_4, a_6\}$ (EÜS)

$$\begin{aligned} C_\gamma(A) \quad = \quad & \{\{a_1, a_2, a_4, a_6\}, \\ & \{a_3, a_4, a_6\}, \\ & \{a_4, a_5\}\} \end{aligned}$$

Eşdeğerlilik Bağıntıları

Tanım
eşdeğerlilik bağıntısı: ϵ
- yansımalı
- bakışlı
- geçişli

- eşdeğerlilik sınıfları (bölmelemeler)
- her eleman tek bir eşdeğerlilik sınıfına girer
- eksiksiz örtü: C_ϵ

Eşdeğerlilik Bağıntısı Örneği

Örnek
$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid \exists m \in \mathbb{Z}\ [a - b = 5m]\}$

- $\mathcal{R}$ bağıntısı $\mathbb{Z}$ kümesini 5 eşdeğerlilik sınıfına bölmeler

Kaynaklar

Okunacak: Grimaldi
- Chapter 5: Relations and Functions
  - 5.1. Cartesian Products and Relations
- Chapter 7: Relations: The Second Time Around
  - 7.1. Relations Revisited: Properties of Relations
  - 7.4. Equivalence Relations and Partitions

Yardımcı Kitap: O'Donnell, Hall, Page
- Chapter 10: Relations

Fonksiyonlar

Tanım
fonksiyon: $f : X \to Y$
$\forall x \in X\ \forall y_1, y_2 \in Y\ (x, y_1), (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

- X: tanım kümesi, Y: değer kümesi
- $y = f(x)$ ile $(x, y) \in f$ aynı
- y, x'in f altındaki *görüntüsü*
- $f : X \to Y$ ve $X_1 \subseteq X$ olsun
  altküme görüntüsü: $f(X_1) = \{f(x) \mid x \in X_1\}$

Altküme Görüntüsü Örnekleri

Örnek
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$

$f(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$
$f(\{-2, 1\}) = \{1, 4\}$

Fonksiyon Nitelikleri

Tanım
$f : X \to Y$ fonksiyonu birebir (ya da injektif):
$\forall x_1, x_2 \in X\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Tanım
$f : X \to Y$ fonksiyonu örten (ya da sürjektif):
$\forall y \in Y\ \exists x \in X\ f(x) = y$

- $f(X) = Y$

Tanım
$f : X \to Y$ fonksiyonu bijektif:
f fonksiyonu birebir ve örten

Birebir Fonksiyon Örnekleri

Örnek
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 3x + 7$

$$\begin{array}{rlcl} & f(x_1) & = & f(x_2) \\ \Rightarrow & 3x_1 + 7 & = & 3x_2 + 7 \\ \Rightarrow & 3x_1 & = & 3x_2 \\ \Rightarrow & x_1 & = & x_2 \end{array}$$

Karşı Örnek
$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$g(x) = x^4 - x$

$$\begin{array}{lclcl} g(0) & = & 0^4 - 0 & = & 0 \\ g(1) & = & 1^4 - 1 & = & 0 \end{array}$$

Örten Fonksiyon Örnekleri

Örnek
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^3$

Karşı Örnek
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$f(x) = 3x + 1$

Fonksiyon Bileşkesi

Tanım
$f : X \to Y, g : Y \to Z$ olsun

$g \circ f : X \to Z$
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

- fonksiyon bileşkesi değişme özelliği göstermez
- fonksiyon bileşkesi birleşme özelliği gösterir:
  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Fonksiyon Bileşkesi Örnekleri

Örnek (değişme özelliği)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$g(x) = x + 5$

$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = x^2 + 5$

$f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$(f \circ g)(x) = (x + 5)^2$

Fonksiyon Bileşkesi Teoremleri

Teorem

$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ olsun
f birebir $\wedge$ g birebir $\Rightarrow g \circ f$ birebir

Tanıt.

$$\begin{array}{rrcl} & (g \circ f)(a_1) & = & (g \circ f)(a_2) \\ \Rightarrow & g(f(a_1)) & = & g(f(a_2)) \\ \Rightarrow & f(a_1) & = & f(a_2) \\ \Rightarrow & a_1 & = & a_2 \end{array}$$

□

Fonksiyon Bileşkesi Teoremleri

Teorem

$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ olsun
f örten $\wedge$ g örten $\Rightarrow g \circ f$ örten

Tanıt.

$\forall z \in Z\ \exists y \in Y\ g(y) = z$
$\forall y \in Y\ \exists x \in X\ f(x) = y$
$\Rightarrow \forall z \in Z\ \exists x \in X\ g(f(x)) = z$

□

Birim Fonksiyon

Tanım

birim fonksiyon: 1_X

$1_X : X \rightarrow X$
$1_X(x) = x$

Evrik Fonksiyon

Tanım

$f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu evrilebilir:
$\exists f^{-1} : Y \rightarrow X\ [f^{-1} \circ f = 1_X \wedge f \circ f^{-1} = 1_Y]$

- f^{-1}: f fonksiyonunun evriği

Evrik Fonksiyon Örnekleri

Örnek

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$f(x) = 2x + 5$

$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 5) = \frac{(2x+5)-5}{2} = \frac{2x}{2} = x$
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x-5}{2}) = 2\frac{x-5}{2} + 5 = (x - 5) + 5 = x$

Fonksiyon Evriği

Teorem
Bir fonksiyon evrilebilirse evriği tektir.

Tanıt.
$f : X \to Y$ olsun

$g, h : Y \to X$ olsun, öyle ki:
$g \circ f = 1_X \wedge f \circ g = 1_Y$
$h \circ f = 1_X \wedge f \circ h = 1_Y$

$h = h \circ 1_Y = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = 1_X \circ g = g$ □

Evrilebilir Fonksiyon

Teorem
Bir fonksiyon yalnız ve ancak birebir ve örten ise evrilebilir.

Evrilebilir Fonksiyon

Evrilebilir ise birebirdir.
$f : A \to B$

$$\begin{aligned} & f(a_1) = f(a_2) \\ \Rightarrow\ & f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2)) \\ \Rightarrow\ & (f^{-1} \circ f)(a_1) = (f^{-1} \circ f)(a_2) \\ \Rightarrow\ & 1_A(a_1) = 1_A(a_2) \\ \Rightarrow\ & a_1 = a_2 \end{aligned}$$

□

Evrilebilir ise örtendir.
$f : A \to B$

$$\begin{aligned} & b \\ =\ & 1_B(b) \\ =\ & (f \circ f^{-1})(b) \\ =\ & f(f^{-1}(b)) \end{aligned}$$

□

Evrilebilir Fonksiyon

Birebir ve örten ise evrilebilirdir.
$f : A \to B$

- f örten $\Rightarrow \forall b \in B\ \exists a \in A\ f(a) = b$
- $g : B \to A$ fonksiyonu $a = g(b)$ ile belirlensin

- $g(b) = a_1 \neq a_2 = g(b)$ olabilir mi?
- $f(a_1) = b = f(a_2)$ olması gerekir
- olamaz: f birebir

□

Güvercin Deliği İlkesi

Tanım
Güvercin Deliği İlkesi (Dirichlet kutuları):
m adet güvercin n adet deliğe yerleşirse ve $m > n$ ise,
en az bir delikte birden fazla güvercin vardır.

- $f : X \to Y$ olsun:
  $|X| > |Y|$ ise f birebir bir fonksiyon olamaz
- $\exists x_1, x_2 \in X\ [x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)]$

Güvercin Deliği İlkesi Örnekleri

Örnek

- 367 kişinin arasında en az ikisinin doğum günü aynıdır.
- 0 ile 100 arasında tamsayı notlar alınan bir sınavda,
  en az iki öğrencinin aynı notu almasının kesin olması için
  sınava kaç öğrenci girmiş olmalıdır?

Genelleştirilmiş Güvercin Deliği İlkesi

Tanım

Genelleştirilmiş Güvercin Deliği İlkesi:
m adet nesne n adet kutuya dağıtılırsa,
en az bir kutuda en az $\lceil m/n \rceil$ adet nesne olur.

Örnek

100 kişinin arasında en az 9 kişi ($\lceil 100/12 \rceil$) aynı ayda doğmuştur.

Güvercin Deliği İlkesi Örneği

Teorem

$S = \{1,2,3,\ldots,9\}$ kümesinin 6 elemanlı herhangi bir altkümesinde toplamı 10 olan iki sayı vardır.

Bu sorunun cevabında he zaman toplamı 10 olan en az bir ikili alınması gerektiğini göstermemiz gerekmektedir. Öncelikle S kümesinde toplamları 10 olan ikili grupları sıralayalım. 1+9=10; 2+8=10; 3+7=10; 4+6=10; ve geriye yalnızca “5” sayısı kalmaktadır. Sonuç olarak 10 toplamasını sağlayan 4 ikili ve ayrı kalan “5” ile 5 grup oluşur.

Delik: Sayıların seçilebileceği grup sayısı burada 5’tir.

Güvercin: Seçilecek elaman sayısı burada 6’dır.

Bu durumda 5 gruptan 6 sayı almamız gerekmektedir. Güvercin Deliği ilkesine göre en az bir gruptan iki elaman almamız gerekir. Bu da, her zaman toplamı 10 olan en az bir ikili seçilecek demektir.

Güvercin Deliği İlkesi Örneği

Teorem

S kümesi en büyüğü 14 olabilen 6 elemanlı bir pozitif tamsayılar kümesi olsun. S'nin boş olmayan altkümelerinin eleman toplamlarının hepsi birbirinden farklı olamaz.

Tanıt Denemesi

$A \subseteq S$
s_A : A'nın elemanlarının toplamı

- delik: $1 \leq s_A \leq 9 + \cdots + 14 = 69$
- güvercin: $2^6 - 1 = 63$

Tanıt.

$|A| \leq 5$ olan altkümelere bakalım.

- delik: $1 \leq s_A \leq 10 + \cdots + 14 = 60$
- güvercin: $2^6 - 2 = 62$

□

Güvercin Deliği İlkesi Örneği

Teorem

$S = \{1, 2, 3, \ldots, 200\}$ kümesinden seçilecek 101 elemanın içinde en az bir çift vardır ki, çiftin bir elemanı diğerini böler.

Tanıt Yöntemi

- $\forall n\ \exists! p\ [n = 2^r p \wedge r \in \mathbb{N} \wedge \exists t \in \mathbb{Z}\ [p = 2t + 1]]$ olduğu gösterilecek
- bu teorem kullanılarak asıl teorem tanıtlanacak

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197 ve 199

46 sayı

Güvercin Deliği İlkesi Örneği

Teorem

$\forall n\ \exists! p\ [n = 2^r p \wedge r \in \mathbb{N} \wedge \exists t \in \mathbb{Z}\ [p = 2t + 1]]$

Varlık Tanıtı.

$n = 1$: $r = 0, p = 1$
$n \leq k$: $n = 2^r p$ varsayalım
$n = k + 1$:

$$\begin{array}{ll} n = 2: & r = 1, p = 1 \\ n \text{ asal } (n > 2): & r = 0, p = n \\ \neg(n \text{ asal}): & n = n_1 n_2 \\ & n = 2^{r_1} p_1 \cdot 2^{r_2} p_2 \\ & n = 2^{r_1 + r_2} \cdot p_1 p_2 \end{array}$$

□

Teklik Tanıtı.

tek değilse:

$$\begin{array}{lllll} n & = & 2^{r_1} p_1 & = & 2^{r_2} p_2 \\ & \Rightarrow & 2^{r_1 - r_2} p_1 & = & p_2 \\ & \Rightarrow & 2 | p_2 & & \end{array}$$

□

Güvercin Deliği İlkesi Örneği

Teorem

$S = \{1, 2, 3, \ldots, 200\}$ kümesinden seçilecek 101 elemanın içinde en az bir çift vardır ki çiftin bir elemanı diğerini böler.

Tanıt.

- $T = \{t \mid t \in S, \exists i \in \mathbb{Z}\ [t = 2i + 1]\}$, $|T| = 100$
- let $f : S \to T$, $r \in \mathbb{N}$
  $s = 2^r t \to f(s) = t$
  - S'den 101 eleman seçilirse en az ikisinin T'deki görüntüsü aynı olur: $f(s_1) = f(s_2) \Rightarrow 2^{m_1} t = 2^{m_2} t$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{2^{m_1} t}{2^{m_2} t} = 2^{m_1 - m_2}$$

□

Rekürsif Fonksiyonlar

Tanım

rekürsif fonksiyon: kendisi cinsinden tanımlanan fonksiyon

$f(n) = h(f(m))$

- *tümevarımla tanımlanan fonksiyon*: her adımda boyutu küçülen rekürsif bir fonksiyon

$$f(n) = \begin{cases} k & n = 0 \\ h(f(n-1)) & n > 0 \end{cases}$$

Rekürsiyon Örneklerii

Örnek

$$f91(n) = \begin{cases} n - 10 & n > 100 \\ f91(f91(n+11)) & n \leq 100 \end{cases}$$

Örnek (faktöryel)

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \cdot f(n-1) & n > 0 \end{cases}$$

M(99) = M(M(110)) ; 99 ≤ 100
= M(100) ; 110 > 100
= M(M(111)) ; 100 ≤ 100
= M(101) ; 111 > 100
= 91 ; 101 > 100

Euclid Algoritması

Örnek (ortak bölenlerin en büyüğü)

$$obeb(a, b) = \begin{cases} b & b|a \\ obeb(b, a \bmod b) & b \nmid a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} obeb(333, 84) &= obeb(84, 333 \bmod 84) \\ &= obeb(84, 81) \\ &= obeb(81, 84 \bmod 81) \\ &= obeb(81, 3) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Fibonacci Dizisi

Fibonacci dizisi

$$F_n = fib(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & n > 2 \end{cases}$$

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	...
1	1	2	3	5	8	13	21	...

Fibonacci Dizisi

Teorem

$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

Tanıt.

$$\begin{aligned} n = 2: \quad \sum_{i=1}^{2} F_i^2 &= {F_1}^2 + {F_2}^2 = 1 + 1 = 1 \cdot 2 = F_2 \cdot F_3 \\ n = k: \quad \sum_{i=1}^{k} F_i^2 &= F_k \cdot F_{k+1} \\ n = k+1: \quad \sum_{i=1}^{k+1} F_i^2 &= \sum_{i=1}^{k} F_i^2 + {F_{k+1}}^2 \\ &= F_k \cdot F_{k+1} + {F_{k+1}}^2 \\ &= F_{k+1} \cdot (F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} \cdot F_{k+2} \end{aligned}$$

□

Ackermann Fonksiyonu

Ackermann fonksiyonu

$$ack(x, y) = \begin{cases} y + 1 & x = 0 \\ ack(x-1, 1) & y = 0 \\ ack(x-1, ack(x, y-1)) & x > 0 \wedge y > 0 \end{cases}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/McCarthy_91_function

Kaynaklar

Okunacak: Grimaldi

- Chapter 5: Relations and Functions
  - 5.2. Functions: Plain and One-to-One
  - 5.3. Onto Functions: Stirling Numbers of the Second Kind
  - 5.5. The Pigeonhole Principle
  - 5.6. Function Composition and Inverse Functions

Yardımcı Kitap: O'Donnell, Hall, Page

- Chapter 11: Functions