

Yüksek Mertebeden Lineer Diferensiyel Denklemler

2.2 İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

x bağımsız ve y bağımlı değişken olmak üzere genel olarak ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem

$$G(x, y, y', y'') = 0 \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. Burada G fonksiyonu y, y' ve y'' ye göre lineer ise (4) denklemine **lineer denklem** denir. Yani

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x) \quad (2.5)$$

biçimindeki denklemler lineer olarak adlandırılır. Burada $A(x), B(x), C(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonları bir I (muhtemelen sınırsız) açık aralığı üzerinde sürekli.

Örnek.

$$e^x y'' + (\cos x)y' + (1 + \sqrt{x})y = \tan^{(-1)} x$$

denklemini ikinci mertebeden lineer bir denklemdir.

Örnek

$$y'' = y \cdot y'$$

ve

$$y'' + 3(y')^2 + 4y^3 = 0$$

denklemleri ise ikinci mertebeden **lineer olmayan** denklemlerdir.

Denklem (2.5) in sağ tarafında bulunan $F(x)$ fonksiyonu, I aralığı üzerinde sıfıra özdeş ise, (2.5) denklemine **lineer homojen**; aksi taktirde **lineer homojen olmayan** denklem denir.

Örnek

$$x^2 y'' + 2xy' + 3y = \cos x$$

ikinci mertebeden **lineer, homojen olmayan** bir denklem,

$$x^2 y'' + 2xy' + 3y = 0$$

ise bununla ilgili olan ikinci mertebeden **lineer homojen** denklemlerdir.

2.2.1 İkinci Mertebeden Lineer Homogen Denklemler

İkinci mertebeden genel lineer

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x)$$

diferansiyel denklemi ele alalım. Burada $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonları I da sürekli ve $\forall x \in I$ $A(x) \neq 0$ dır. Yukarıdaki denklemin her iki tarafı $A(x)$ 'e bölünürse, denklem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2.6)$$

biçiminde ifade edilebilir.

İlk olarak (2.5) ile ilgili olan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2.7)$$

homogen denklemi inceleyeceğiz.

Theorem (Superposition prensibi).

y_1 ve y_2 , (2.7) ile verilen homogen denklemin I aralığı üzerinde iki çözümü olsun, C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \quad (2.8)$$

ifadeside (2.7) ile verilen denklemin I aralığı üzerinde bir çözümüdür.

Örnek.

$$y_1(x) = \cos x \quad \text{ve} \quad y_2(x) = \sin x$$

fonksiyonlarının

$$y'' + y = 0$$

denkleminin çözümleri oldukları kolaylıkla görülebilir. Teorem, bu çözümlerin örneğin;

$$y(x) = 3y_1(x) - 2y_2(x) = 3\cos x - 2\sin x$$

gibi herhangi bir lineer birleşiminde denklemin bir çözümü olduğunu belirtir. Tersine, $y'' + y = 0$ denkleminin her bir çözümünün, bu denklemin y_1 ve y_2 özel çözümlerinin bir lineer birleşimi olduğunu ilerde göreceğiz.

Teorem

Varlık ve Teklik p, q ve f fonksiyonları a noktasını içeren bir I aralığı üzerinde sürekli olsun. Bu takdirde, b_0 ve b_1 verilen sabitler olmak üzere

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2.6)$$

denklemini, I aralığının tamamında,

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir tek (bir ve yalnız bir) çözüme sahiptir.

Örnek.

$$y'' + y = 0$$

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = -2$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulalım.

Çözüm: Bir önceki örnekte $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ (tüm reel eksen üzerinde) $y'' + y = 0$ denkleminin çözümü olduğunu söylemiştik. (Teorem yardımıyla) Başlangıç koşullarından

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1$$

ve

$$y'(0) = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_2$$

$C_1 = 3$ ve $C_2 = -2$ bulunur. Sonuç olarak başlangıç değer problemimizin çözümü

$$y(x) = 3 \cos x - 2 \sin x$$

dür. Görüldüğü gibi keyfi sabitler basit bir lineer denklem sisteminden bulunabilmektedir. □

Örnek

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulalım.

Çözüm: $y_1(x) = e^x$ ve $y_2(x) = 2e^x$ (tüm reel eksen üzerinde) $y'' - 2y' + y = 0$ denkleminin çözümleri olduğu kolaylıkla görülebilir. Teorem yardımıyla

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^x + c_2 2e^x$$

fonksiyonunda denklemimizin bir çözümü olduğunu söyleyebilir ve başlangıç koşullarını sağlayan c_1 ve c_2 yi bulabilirsek başlangıç değer problemimizi çözümünü bulmuş oluruz. Başlangıç koşullarından

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 2e^0 = 3$$

ve

$$y'(0) = c_1 e^0 + c_2 2e^0 = 1$$

Çözümü olmayan (sağlayan c_1 ve c_2 nin bulunamayacağı)

$$c_1 + 2c_2 = 3$$

$$c_1 + 2c_2 = 1$$

denklem sistemi gelir.

Çözümümüzün nasıl fonksiyonlar olması durumunda başlangıç koşulları yardımıyla keflerimizi (c_1 ve c_2) bulabileceğimizi görelim. □

Tanım

$y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonları bir $[a, b]$ kapalı aralığında reel değerli ve türevlenebilir fonksiyonlar olsun

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

determinantı $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonlarının *Wronskiye*ni olarak adlandırılır. $W(y_1(x), y_2(x))$ olarak gösterilir.

Tanım

$y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonları bir $[a, b]$ kapalı aralığında doğrusal bağımlıdır ancak ve ancak $[a, b]$ kapalı aralığındaki her x için $W(y_1(x), y_2(x)) = 0$

Örnek

$y_1(x) = e^x$ ve $y_2(x) = 2e^x$ fonksiyonlarının Wronskiyeni

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^x \\ e^x & 2e^x \end{vmatrix} = 0$$

$y_1(x) = e^x$ ve $y_2(x) = 2e^x$ fonksiyonları doğrusal bağımlıdır.

Örnek

$y_1(x) = \sin x$ ve $y_2(x) = \cos x$ fonksiyonlarının Wronskiyeni

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$y_1(x) = \sin x$ ve $y_2(x) = \cos x$ fonksiyonları doğrusal bağımsızdır.

Theorem

p ve q fonksiyonları açık bir I aralığı üzerinde sürekli olmak üzere y_1 ve y_2

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

homojen denkleminin **doğrusal bağımsız** iki çözümü olsun. Eğer $Y(x)$ bu homojen denklemin I aralığı üzerindeki herhangi bir çözümü ise, bu taktirde $\forall x \in I$

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

olacak şekilde c_1 ve c_2 sabitleri vardır.

İkinci Mertebe Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklemler

A,B,C sabitleri olmak üzere

$$Ay'' + By' + C = f(x) \quad (1)$$

biçimindeki denklemlere ikinci mertebeden sabit katsayılı adi türevli lineer diferansiyel denklem denir. Böyle bir denklemin çözümü homojen kısmın genel çözümü ile taraflı denklemin özel çözümlerin toplamına eşittir.

$$Ay'' + By' + C = 0 \quad (2)$$

denklemine (1) 'in homojen kısmı denir. Genel çözüm $y = y_h + y_p$ şeklinde bulunur.

(y = denklemin genel çözümü, y_h = denklemin homojen çözümü, y_p = denklemin özel çözümü)

Bilindiği gibi herhangi bir diferansiyel denklemin genel çözümü denklemin mertebesi kadar sayıda keyfi sabit içerir. Burada keyfi sabitler homojen çözümünden (y_h) gelirler.

Homojen çözümün bulunuşu

$$Ay'' + By' + Cy = 0 \quad (3)$$

denkleminin genel çözümünü (y_h) bulmak istiyoruz

$$y = e^{rx}$$

denkleminin bir çözümü olsun. Böylece $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$ olur ve bunlar (3) denklemini sağlamalıdır. $[Ar^2 + Br + C]e^{rx} = 0$ elde edilir. e^{rx} çarpanı sıfır olamayacağından köşeli parantezin içi sıfırdır. Yani

$$Ar^2 + Br + C = 0 \quad (4)$$

olur. Bu denkleme (3) denkleminin karakteristik denklemi denir. r 'ye göre 2.dereceden olan (4) denkleminin diskriminantına göre kökler 3 durumda incelenir.

1. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, ise iki farklı reel kök vardır ($r_1 \neq r_2$). Bu durumda $y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ olarak bulunur.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise çakışık iki kök vardır. ($r_1 = r_2 = r$) Bu durumda $y_h = (c_1 + xc_2) e^{rx}$ şeklinde bulunur.

3. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise reel kök yoktur. Yani sanal iki kök bulunur. ($r_{1,2} = \alpha \mp i\beta$). Bu durumda $y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ şeklinde elde edilir.

Örnek $y'' + 2y' - 3y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Örnek $y'' - 4y' + 4y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Örnek $y'' - 6y' + 10y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Örnek $\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{3dy}{dx} - 5y = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.