Riccati Diferensiyel Denklemi

24 Ekim 2021 Pazar 21:29

Riccati Diferensiy...

$y' + P(x) y = Q(x) y^n$

$\left(\frac{1}{u}\right)'$

$= (u^{-1})' = -1 . u^{-2} . \frac{du}{dx}$

$P(x), Q(x)$ ve $R(x)$ integre edilebilir fonksiyonlar ve $R(x) \neq 0$ olmak üzere

$$\boxed{y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2}$$

formundaki diferensiyel denklemlere Riccati Diferensiyel denklemi adı verilir. y_1 bu denklemin özel bir çözümü ise $\boxed{y = y_1 + \frac{1}{u}}$ değişken dönüşümü yapılarak u'ya göre lineer olan birinci mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilir.

$u(x)$

u'

$y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$ dir. y ve y' nün değerleri denklemde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} = P(x) + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + R(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$\left\{y_1' - \left[P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2\right]\right\} - \frac{u'}{u^2} = Q(x)\frac{1}{u} + 2R(x)\frac{y_1}{u} + \frac{R(x)}{u^2}$$

bulunur. y_1 in bir özel çözüm olması nedeni ile,

$$y_1' - \left[P(x) + Q(x) y_1 + R(x) y_1^{\,2} \right] = 0$$

olduğu dikkate alınırsa

$$-\frac{u'}{u} - Q(x) - 2y_1 R(x) - \frac{1}{u} R(x) = 0$$

$\boxed{y = y_1 + \frac{1}{u}} \to$ Lineer

$y = y_1 + z \to$ Bernoulli

veya

$$u' + \left[Q(x) + 2y_1 R(x) \right] u = -R(x)$$

sonucuna ulaşılır. Bu da u'ya göre yazılmış birinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir.

NOT: $\boxed{y = y_1 - \frac{1}{u}}$ değişken dönüşümü de yapılabilir.

Örnek $y' + y^2 - 1 = 0$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1 = 1$ dir. Genel çözümünü bulalım.

$y' = 0$

$y^2 = 1$

$0 + 1 - 1 = 0$

$0 = 0$ ✓

$y = y_1 + \frac{1}{u}$, $u = u(x)$

$y = 1 + \frac{1}{u}$, $y' = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dx}$, $y^2 = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 = 1 + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2}$

$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} + \cancel{1} + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2} - \cancel{1} = 0$

$\frac{du}{dx} - 2u - 1 = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} - 2u = 1$ (lineer) ✓

$e^{\int 2dx} \cdot u = \int 1 \cdot e^{-\int 2dx} dx + C$

$e^{-2x} \cdot u = \int e^{-2x} dx + C$

$e^{-2x} u = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C \Rightarrow \boxed{u = -\frac{1}{2} + Ce^{2x}}$

$$\boxed{y = 1 + \frac{1}{u} = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2} + Ce^{2x}}}$$

Örnek $y' - y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ ✓ diferansiyel denkleminin $y_1 = \frac{-1}{x}$ gibi özel bir çözümü olduğuna göre bu denklemin genel çözümünü bulunuz.

$y' = \frac{1}{x^2}$, $y^2 = \frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0$

$y = y_1 + \frac{1}{u}$

$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{u}$, $y^2 = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right)^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xu} + \frac{1}{u^2}$

$y' = \frac{1}{x^2} + \left(-\frac{1}{u^2}\right)\frac{du}{dx}$

$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{xu} + \frac{1}{u^2}\right) + \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right) + \frac{1}{x^2} = 0$

$\cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} - \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{xu} - \frac{1}{u^2} - \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x.u} + \cancel{\frac{1}{x^2}} = 0$

$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} + \frac{3}{xu} - \frac{1}{u^2} = 0$

$-\int \frac{3}{x} dx$ $\quad$ $-\int \frac{3}{x} dx$

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}+\frac{3}{xu}-\frac{1}{u^2}=0$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{3}{x}u+1=0,$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{3}{x}u=-1 \quad (\text{Lineer})$$

$$\Rightarrow e^{-\int\frac{3}{x}dx}\cdot u=-\int e^{-\int\frac{3}{x}dx}dx+C$$

$$e^{-3\ln x}\cdot u=-\int e^{-3\ln x}dx+c$$

$$\frac{u}{x^3}=-\int\frac{dx}{x^3}+C$$

$$\frac{u}{x^3}=\frac{1}{2x^2}+C$$

$$u=\frac{x}{2}+cx^3=\frac{x+Cx^3}{2}$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{x}+\frac{1}{u}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x+Cx^3}}$$

Örnek $y'=(1-x)y^2+(2x-1)y-x$ diferansiyel denklemi $y_1=ax+b$ gibi özel bir çözüm bularak çözün.

$$y'=a,\qquad y^2=(ax+b)^2=a^2x^2+2abx+b^2$$

$$a=(1-x)(a^2x^2+2abx+b^2)+(2x-1)(ax+b)-x$$

$$a=a^2x^2+2abx+b^2-a^2x^3-2abx^2-b^2x+2ax^2+2bx-ax-b-x$$

$$a=-a^2x^3+(a^2-2ab+2a)x^2+(2ab-b^2+2b-a-1)x+(b^2-b)$$

$$-a^2=0 \qquad a=0$$

$$-b^2+2b-1=0,\quad b^2-2b+1=0,\quad (b-1)^2=0,\quad b=1$$

$$b^2-b=0,\quad b(b-1)=0,\quad b=0,\ b=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{a=0}\\ \boxed{b=1}\end{array}\right\}\quad y_1=1$$

$$y=y_1+\frac{1}{u}=1+\frac{1}{u},\qquad y'=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx},\qquad y^2=\left(1+\frac{1}{u}\right)^2=1+\frac{2}{u}+\frac{1}{u^2}$$

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}=(1-x)\left(1+\frac{2}{u}+\frac{1}{u^2}\right)+(2x-1)\left(1+\frac{1}{u}\right)-x$$

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}=\cancel{1}+\frac{2}{u}+\frac{1}{u^2}\cancel{-x}-\cancel{\frac{2x}{u}}-\frac{x}{u^2}+\cancel{2x}+\cancel{\frac{2x}{u}}\cancel{-1}-\frac{1}{u}\cancel{-x}$$

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + \frac{1-x}{u^2}$$

$$\frac{du}{dx} = -u - 1 + x$$

$$\frac{du}{dx} + u = x - 1 \quad (\text{Lineer d.d})$$

$$e^{\int dx} \cdot u = \int (x-1)\, e^{\int dx}\, dx + C$$

$$e^{x} \cdot u = \int (x-1)\, e^{x}\, dx + C$$

$$e^{x} \cdot u = e^{x}(x-1) - e^{x} + C$$

$$u = x - 1 - 1 + Ce^{-x}$$

$$\boxed{u = x - 2 + Ce^{-x}}$$

$$\boxed{y = 1 + \frac{1}{u} = 1 + \frac{1}{x - 2 + Ce^{-x}}}$$

$\int xe^{x}dx$, $x = u$, $e^{x}dx = dv$
$dx = du$, $e^{x} = v$

$$\int xe^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x}dx$$
$$= e^{x}(x-1)$$

Örnek $(1-x^3)y' - y^2 + x^2y + 2x = 0$ diferansiyel denklemini $y = ax^2 + bx + c$ gibi bir özel çözüm bularak çözün.