Parametrelerin Değişimi Metodu

Parametrelerin Değişimi Metodu

Herhangi bir önemli matematiksel güçlük yaratmadan kolayca uygulanabilen ve kesin sonuca giden bir yöntemdir. Yalnız bu metodun uygulanabilmesi için $f(x)$ fonksiyonunun bir UC fonksiyonu olması veya UC fonksiyonunun lineer kombinasyonu olması koşulu vardır. Örneğin; $\tan x$ bir UC fonksiyonu olmadığı için $y'' + y = \tan x$ denkleminin Belirsiz Katsayılar Metodu ile çözümü mümkün değildir. Bu nedenle sabit katsayılı veya değişken katsayılı homojen olmayan herhangi bir lineer adi diferansiyel denklem çözmek için yeni bir metoda gereksinim vardır. Bu metoda parametrelerin değişimi metodu adı verilir. Sabit katsayılı veya değişken katsayılı homojen olmayan herhangi bir lineer diferansiyel denklem verilmiş olsun. Eğer bu denklemin homojen kısmının genel çözümü biliniyorsa parametrelerin değişimi metodu kullanılarak denklem bir $y(p)$ özel çözümü ve sonuç olarak denklemin genel çözümü bulunabilir. Örnek olarak;

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{1}$$

denklemini ele alalım. Bunun homojen çözümü

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{2}$$

olsun. Parametrelerin değişimi metodunda (2) denklemi c_1 ve c_2 yerine

$$y_p = v_1(x)\,y_1(x) + v_2(x)\,y_2(x) \tag{3}$$

yazılır. Amacımız bu fonksiyonun (1) denkleminin özel bir çözümünün olabilmesi için $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ değerini bulmaktır. Bunun için önce yukarıdaki denklem ve birinci türevini yazalım.

$$y_p' = y_1'v_1 + y_2'v_2 + v_1'y_1 + v_2'y_2 \tag{4}$$

burada y_p'' nin değerini bulmadan önce v_1 ve v_2 nin türevlerini içeren son iki terimin

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0 \tag{5}$$

olduğu kabul edilir. Bu kabulden sonra (4) denklemi yeniden yazılır ve türevi alınırsa;

$$y_p' = y_1'v_1 + y_2'v_2 \tag{6}$$

$$y_p'' = y_1''v_1 + y_2''v_2 + y_1'v_1' + y_2'v_2' \tag{7}$$

bulunur. Daha sonra (3), (6) ve (7) denklemleri (1) denkleminde yerine konulur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$y_1'v_1 + y_2'v_2 = 0$$
$$y_1'v_1' + y_2'v_2' = \frac{f(x)}{a_0}$$

elde edilir. Burada amaç v_1' ve v_2' türevlerini bulmaktır. y_1 ve y_2 lineer bağımsız olduklarından,

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

olmalıdır. Buna göre

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \dfrac{f(x)}{a_0} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{f(x)\,y_2}{a_0\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right)}$$

elde edilir. Ayrıca

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \dfrac{f(x)}{a_0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 f(x)}{a_0\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right)}$$

elde edilir. Buradan $v_1 = -\int^x \frac{f(x).y_2}{a_0 W(y_1, y_2)}dx$, $v_2 = \int^x \frac{y_1 f(x)}{a_0 W(y_1, y_2)}dx$ elde edilir. Bu değerler (2) denkleminde yerine yazılarak özel çözüme dolayısıyla genel çözüme ulaşılır.

Örnek $y'' + y = \tan x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Soru. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Soru $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sec x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Soru $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Soru $y'' - 3y' + 2y = \sin e^{-x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.