Diferensiyel Denklem Sistemleri

2 Ocak 2022 Pazar 17:46

Diferensiyel Denklem...

Diferensiyel Denklem Sistemleri (Devamı)

ii)Karakteristik Denklemin Karmaşık Kökleri Varsa

Bu durumda karmaşık köklerin eşleniklerinin de kök olduğu göz önünde tutulmalıdır. Yani $\lambda_1 = a + ib$ kök ise $\lambda_2 = a - ib$ de köktür.

Örneğin ikinci mertebe bir sistemin $\lambda_1 = a + ib$ ve $\lambda_2 = a - ib$ karmaşık kökleri olsun;

$$y_1 = \alpha_1 e^{(a+ib)x}, y_2 = \alpha_2 e^{(a+ib)x}, y_1 = \beta_1 e^{(a-ib)x}, y_2 = \beta_2 e^{(a-ib)x}$$

çözüm takımını oluşturacaktır. Bunlar ilgili sistemde yerine yazılırsa

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha_1 (a + ib) e^{(a+ib)x}, \frac{dy_2}{dx} = \alpha_2 (a + ib) \times e^{(a+ib)x}, (\lambda_1 = a + ib)$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \beta_1 (a - ib) e^{(a-ib)x}, \frac{dy_2}{dx} = \beta_2 (a - ib) e^{(a-ib)x}, (\lambda_2 = a - ib)$$

olur. Euler eşitliğinden

$$e^{ibx} = \cos bx + i\sin bx$$
$$e^{-ibx} = \cos bx - i\sin bx$$

olacağından

$$y_1 = \alpha_1 e^{ax}[\cos bx + i\sin bx] \rightarrow y_2 = \alpha_2 e^{ax}[\cos bx + i\sin bx]$$
$$y_1 = \beta_1 e^{ax}[\cos bx - i\sin bx] \rightarrow y_2 = \beta_2 e^{ax}[\cos bx - i\sin bx]$$

olur. Bütün bunları

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$
$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$$

sisteminde yerine koyalım. Buradaki $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ katsayıları karmaşıkta olabilirler. Çözümün reel kısmı, bir çözüm karmaşık kısmı ise diğer bir çözümdür.

$$\alpha_1 = \alpha_{11} + i\alpha_{12} \quad \beta_1 = \beta_{11} + i\beta_{12}$$
$$\alpha_2 = \alpha_{21} + i\alpha_{22} \quad \beta_2 = \beta_{21} + i\beta_{22}$$

olduğu düşünülürse,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \left[(\alpha_{11}\cos bx - \alpha_{12}\sin bx) + i(\alpha_{12}\cos bx + \alpha_{11}\sin bx)\right]e^{ax} \\
y_2 &= \left[(\alpha_{21}\cos bx - \alpha_{22}\sin bx) + i(\alpha_{22}\cos bx + \alpha_{21}\sin bx)\right]e^{ax} \\
y_1 &= \left[(\beta_{11}\cos bx - \beta_{12}\sin bx) + i(\beta_{12}\cos bx + \beta_{11}\sin bx)\right]e^{ax} \\
y_1 &= \left[(\beta_{21}\cos bx - \beta_{22}\sin bx) + i(\beta_{22}\cos bx + \beta_{21}\sin bx)\right]e^{ax}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu çözümlerin reel ve karmaşık kısımlarının birer çözüm olacağı bilindiğine göre,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= (\alpha_{11} + \beta_{11})\cos bx - (\alpha_{12} + \beta_{12})\sin bx \\
y_2 &= (\alpha_{12} + \beta_{12})\cos bx + (\alpha_{11} + \beta_{11})\sin bx
\end{aligned}
$$

bulunur.

$\lambda_2 = a - ib$ için sadece karmaşık kısım etkileneceğinden çözüm yine yukarıdaki ile aynı olacaktır.

Örnek $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x-2y\\ \frac{dy}{dt} &= 2x+3y\end{aligned}\right\}$ denklem sistemini çözünüz. $\left.\begin{aligned}x&=x(t)\\ y&=y(t)\end{aligned}\right\}$??

Çözüm Sistemin karakteristik denklemi,

$x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$, denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(3-\lambda)A - 2B &= 0\\ 2A + (3-\lambda)B &= 0\end{aligned}$$ elde edilir.

$A, B \neq 0$ çözüm olması için $\det\begin{bmatrix}3-\lambda & -2\\ 2 & 3-\lambda\end{bmatrix} = 0$ olmalıdır.

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)^2+4 = 9-6\lambda+\lambda^2+4 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

$$\Delta = b^2-4ac = 36-4.1.13 = -16 < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \mp 4i}{2} = 3 \mp 2i$$

$\lambda_1 = 3+2i$ için

$$\left.\begin{aligned}[3-(3+2i)]A - 2B &= 0\\ 2A + [3-(3+2i)]B &= 0\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}-2Ai - 2B &= 0\\ 2A - 2B.i &= 0\end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix}-2i & -2\\ 2 & -2i\end{vmatrix}$$

$= 4i^2+4$

$= -4+4=0$,

$-2Ai = 2B$

$-Ai = B$

$\boxed{A=1}$, $\boxed{B=-i}$

$$\boxed{x = 1.e^{(3+2i)t} \quad , \quad y = (-i)e^{(3+2i)t}} \longleftrightarrow \boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$$

$$x = e^{3t}\cdot e^{2it} = e^{3t}[\cos 2t + i\sin 2t] = e^{3t}\cos 2t + i\,e^{3t}\sin 2t$$

$$y = (-i)\,e^{3t}[\cos 2t + i\sin 2t] = e^{3t}[-i\cos 2t - i^2\sin 2t]$$

$$= e^{3t}[\sin 2t - i\cos 2t]$$

$$= e^{3t}\sin 2t - i\,e^{3t}\cos 2t$$

Genel çözüm

$$x = c_1 e^{3t}\cos 2t + c_2 e^{3t}\sin 2t = e^{3t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t)$$

$$y = c_1 e^{3t}\sin 2t - c_2 e^{3t}\cos 2t = e^{3t}(c_1\sin 2t - c_2\cos 2t)$$

Örnek $\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= -y_1 - y_2\\ \frac{dy_2}{dx} &= 2y_1 - y_2\end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözümü nedir?

Çözüm $y_1 = Ae^{\lambda x},\ y_2 = Be^{\lambda x}$ alalım. İlgili değerler sistemde yerine yazılırsa,

$$-A\lambda e^{\lambda x} - Ae^{\lambda x} - Be^{\lambda x} = 0$$
$$-B\lambda e^{\lambda x} + 2Ae^{\lambda x} - Be^{\lambda x} = 0$$

yazılır. Matris gösteriminden

$$\begin{bmatrix} -A(1+\lambda) & -B \\ 2A & -B(\lambda+1) \end{bmatrix} = 0$$

olması gerektiğini biliyoruz. Böylece

$$\begin{vmatrix} -(1+\lambda) & -1 \\ 2 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

karakteristik denklemi bulunur. Kökleri $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}i$, $\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}i$ dir.

$\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}i$ için

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{2}iA - B &= 0 \\ 2A - \sqrt{2}iB &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow B = -\sqrt{2}iA$$

olur.

$A = 1, \quad B = -\sqrt{2}i$ bulunur. Buna göre,

$$y_1 = e^{(-1+\sqrt{2}i)x}, \; y_2 = -\sqrt{2}ie^{(-1+\sqrt{2}i)x}$$

yazılır. Euler eşitliğinin yardımıyla

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(-1+\sqrt{2}i)x} \\ &= e^{-x}e^{\sqrt{2}ix} \\ &= e^{-x}\left(\cos\sqrt{2}x + i\sin\sqrt{2}x\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
y_2 &= -\sqrt{2}ie^{(-1+\sqrt{2}i)x} \\
&= -\sqrt{2}ie^{-x}e^{\sqrt{2}ix} \\
&= -e^{-x}\sqrt{2}i\left(\cos\sqrt{2}x + i\sin\sqrt{2}x\right) \\
&= -e^{-x}\left(\sqrt{2}i\cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\right) \\
&= e^{-x}\left(\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x - \sqrt{2}i\cos\sqrt{2}x\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan genel çözüm reel ve imajiner kesimler kullanılarak

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \left(c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\right)e^{-x} \\
y_2 &= \left(c_1\sin\sqrt{2}x - \sqrt{2}c_2\cos\sqrt{2}x\right)e^{-x}
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu çözümlerin lineer bağımsızlığını Wronskiyen determinantının sıfırdan farklı bir değer aldığını görerek söyleyebiliriz.

Örnek $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 4x-2y\\ \frac{dy}{dt} &= 5x+2y\end{aligned}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm Bu denklem sisteinin karakteristik denklemi,

$$\begin{bmatrix} a_1-\lambda & b_1 \\ a_2 & b_2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-6\lambda+18=0 \text{ olur.}$$

Bu denklemin sanal ve eşlenik kökleri $\lambda_1=3+3i, \lambda_2=3-3i$ bulunur. Önce bu köklerden birincisi göz önüne alındığında,

$x=Ae^{\lambda_1 t}, y=Be^{\lambda_1 t}$ denklem sisteminin bir çözümü olur. Burada A, B genel olarak kompleks sayılardır. Bu değerler denklem sisteminde yerlerine konulursa,

$$\lambda_1 A = 4A-2B$$
$$\lambda_2 B = 5A+2B$$

veya

$$(\lambda_1 - 4)\,\mathrm{A} + 2B = 0$$
$$-5A + (\lambda_1 - 2)\,\mathrm{B} = 0$$

bulunur. $\lambda_1 = 3 + 3i$ değeri yerine konulursa,

$$(-1 + 3i)A + 2B = 0$$
$$-5A + (1 + 3i)B = 0$$

elde edilir. “sıfır” çözüm takımından başka, $A = 2, B = 1 - 3i$ bulunur. Bu değerler yerine konulursa kompleks çözüm ,

$$x = 2e^{(3+3i)t}, y = (1 - 3i)e^{(3+3i)t}$$

$$x = 2(\cos 3t + i \sin 3t)e^{3t}$$
$$y = [(\cos 3t + 3\sin 3t) + i(-3\cos 3t + \sin 3t)]e^{3t}$$

bulunur. Bu fonksiyon çifti, şüphesiz verilen denklem sisteminin bir kompleks çözümüdür. O zaman bu fonksiyonların reel kısımları bir özel çözüm, sanal kısımları da ikinci bir özel çözümdür. Öyleyse,

$$\begin{aligned} x &= 2(\cos 3t)e^{3t} \\ y &= (\cos 3t + 3\sin 3t)e^{3t} \end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} x &= 2(\sin 3t)e^{3t} \\ y &= (-3\cos 3t + \sin 3t)e^{3t} \end{aligned}$$

sistemin birer çözümleridir. Bu fonksiyonların Wronskian'ı

$$W = \begin{vmatrix} 2\cos 3t & 2\sin 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t & -3\cos 3t + \sin 3t \end{vmatrix} \neq 0 \text{ dır.}$$

Öyleyse bu fonksiyonlar aralarında lineer bağımsızdırlar. Buna göre genel çözüm,

$$x = 2(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)e^{3t}$$
$$y = [c_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + c_2(-3\cos 3t + \sin 3t)]e^{3t}$$

bulunur.

iii)Karakteristik Denklemin Reel ve Birbirine Eşit Kökleri Varsa

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n$$

.

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n$$

sistemi için

$$\begin{bmatrix} a_{11}(x)-\lambda & a_{12}(x) & . \ . \ . & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x)-\lambda & . \ . \ . & a_{2n}(x) \\ . & . & . \ . \ . & . \\ . & . & . \ . \ . & . \\ . & . & . \ . \ . & . \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & . \ . \ . & a_{nn}(x)-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n p_n = 0$ karakteristik denkleminin bazı kökleri tekrarlı ve λ_1, k kat tekrarlı ise sistemin k tane çözümü,

$$y_{10} = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} \ , \ y_{20} = \alpha_2 e^{\lambda_1 x} \ ,\ldots, \ y_{n0} = \alpha_n e^{\lambda_1 x}$$
$$y_{11} = (\alpha_{11}x + a_{12})e^{\lambda_1 x} \ , \ y_{21} = (\alpha_{21}x + a_{22})e^{\lambda_1 x} \ ,\ldots, \ y_{n1} = (\alpha_{n1}x + a_{n2})e^{\lambda_1 x}$$
$$\ldots$$
$$y_{1k} = (\alpha_{11}x^{k-1} + a_{12}x^{k-2} + \ldots + a_{1k})e^{\lambda_1 x} \ , \ y_{2k} = (\alpha_{21}x^{k-1} + a_{22}x^{k-2} + \ldots + a_{2k})e^{\lambda_1 x} \ ,\ldots$$

şeklinde olacaktır.

Elde edilen çözümlerin lineer bağımsızlığı kontrol edilerek genel çözüme gidilmelidir.

Örnek $\ast$ $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 4x - y \end{aligned}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

$x = x(t)$
$y = y(t)$

$x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$ çözüm olsun.

$(3-\lambda)A - B = 0$, $A, B = ?$
$4A + (-1-\lambda)B = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$-3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda - 1)^2 = 0$, $\lambda = 1$, çift katlı

$\lambda = 1$ için

$\left.\begin{aligned} 2A - B &= 0 \\ 4A - 2B &= 0 \end{aligned}\right\}$ $2A = B$, $A = k$, $B = 2k$, $k = 1$ için $\boxed{A = 1, \quad B = 2}$

$\boxed{x = e^t, \quad y = 2e^t}$ $\ast\ast$

$x = (A_1 t + A_2)e^t$, $y = (B_1 t + B_2)e^t$

$\frac{dx}{dt} = 3x - y$
$\frac{dy}{dt} = 4x - y$ olduğundan çözümler yerine yazılırsa.

$A_1 \cancel{e^t} + (A_1 t + A_2)\cancel{e^t} = 3(A_1 t + A_2)\cancel{e^t} - (B_1 t + B_2)\cancel{e^t}$

$B_1 \cancel{e^t} + (B_1 t + B_2)\cancel{e^t} = 4(A_1 t + A_2)\cancel{e^t} - (B_1 t + B_2)\cancel{e^t}$

$A_1 + A_1 t + A_2 = 3A_1 t + 3A_2 - B_1 t - B_2$

$B_1 + B_1 t + B_2 = 4A_1 t + 4A_2 - B_1 t - B_2$

$(2A_1 - B_1)t + 2A_2 - A_1 - B_2 = 0$
$(4A_1 - 2B_1)t + 4A_2 - 2B_2 - B_1 = 0$

$2A_1 - B_1 = 0$; $2A_2 - A_1 - B_2 = 0$
$4A_1 - 2B_1 = 0$; $4A_2 - 2B_2 - B_1 = 0$

$2A_1 = B_1$

$A_1 = k$, $B_1 = 2k$

$k = 1$, $\boxed{A_1 = 1, \ B_1 = 2}$

$2A_2 - B_2 = k$
$4A_2 - 2B_2 = 2k$ $\Rightarrow$ $2A_2 - B_2 = 1$
$4A_2 - 2B_2 = 2$

$A_2 = \frac{1 + B_2}{2}$

$B_2 = n$, $A_2 = \frac{1+n}{2}$

$k=1,\ \boxed{A_1 = 1,\ B_1 = 2}$

$B_2 = n,\quad A_2 = \frac{1+n}{2}$

$n=1,\ \boxed{B_2 = 1},\ \boxed{A_2 = 1}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (A_1 t + A_2)e^t = (t+1)e^t \\ y &= (B_1 t + B_2)e^t = (2t+1)e^t \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= c_1 e^t + c_2 (t+1) e^t \\ y &= 2c_1 e^t + c_2 (2t+1) e^t \end{aligned}}$$

Örnek $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + 3y \end{aligned}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm Buradaki karakteristik denklem

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \text{ 'dır.}$$

Bu denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

bulunur. Buna göre

$$x = Ae^{2t}\ ,\ y = Be^{2t}$$

bir çözümdür. Bu değerler diferansiyel denklemde yerine yazılırsa

$-A+B=0$

elde edilir. Buradan

$A=B=k$ elde edilir. k herhangi bir değer alabileceğinden $k=1$ için $A=B=1$ bulunur. O zaman

$$x=e^{2t}=y$$

çözümü elde edilir.

Diferansiyel denklem sisteminin ikinci özel çözümü,

$$x=(A_1t+A_2)e^{2t}\ ,\ y=(B_1t+B_2)e^{2t}$$

elde edilir. Bu değerler denklem sisteminde yerine konulduğunda, elde edilir. Bu değerler denklem sisteminde yerine konulduğunda,

$$
\begin{aligned}
&A_1 + 2A_2 + 2A_1 t = (A_1 + B_1)\,\mathrm{t} + \mathrm{A}_2 + B_2 \\
&B_1 + 2B_2 + 2B_1 t = (3B_1 - A_1)\,\mathrm{t} - \mathrm{A}_2 + 3B_2
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan,

$$
\left.\begin{aligned}
&A_1 - B_1 = 0 \\
&A_1 + A_2 - B_2 = 0
\end{aligned}\right\}
$$

ve

$A_1 - B_1 = 0$
$B_1 - A_1 = 0$ }

$A_2 - B_2 = -1$
$A_2 - B_2 = -1$

$$\left.\begin{aligned} B_1 - A_1 &= 0 \\ B_1 + A_2 - B_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemleri elde edilir. Burada $A_1 = B_1 = k$ olduğundan, k 'nın "sıfır" dan farklı herhangi bir değeri için örneğin $k = 1$ için $A_1 = B_1 = 1$ elde edilir. $A_2 - B_2 = -1$ bağıntısında A_2 veya B_2'den birisi "sıfır" olabilir. $A_2 = 0$ içi $B_2 = 1$ bulunur. Bu durumda diferansiyel denklem sistemini sağlayan bir çözüm,

$$\boxed{x = te^{2t} \ , \ y = (t+1)e^{2t}}$$

bulunur. O zaman denklem sisteminin genel çözümü

$$\boxed{x = c_1 e^{2t} + c_2 te^{2t} \ , \ y = c_1 e^{2t} + c_2 (t+1)e^{2t}}$$ **

elde edilir.

Örnek $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-3x+y\\ \frac{dy}{dt}&=-x-5y\end{aligned}\right\}$ sistemini çözünüz.

$x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$

$$\left.\begin{aligned}(-3-\lambda)A+B&=0\\ -A+(-5-\lambda)B&=0\end{aligned}\right\} A, B = ?$$

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ -1 & -5-\lambda\end{vmatrix} = 15+3\lambda+5\lambda+\lambda^2+1$$
$$= \lambda^2+8\lambda+16$$
$$= (\lambda+4)^2 = 0$$

$\boxed{\lambda=-4}$ çift katlı

$\lambda_1=-4$ için

$$\left.\begin{aligned}A+B&=0\\ -A-B&=0\end{aligned}\right\} \quad A=-B \ , \ A=k, \ B=-k$$

$\boxed{A=1, \ B=-1}$

$x=(A_1t+A_2)e^{-4t}$, $y=(B_1t+B_2)e^{-4t}$

$$\frac{dx}{dt} = A_1e^{-4t}-4(A_1t+A_2)e^{-4t}$$

$$\frac{dy}{dt} = B_1e^{-4t}-4(B_1t+B_2)e^{-4t}$$

$$A_1-4(A_1t+A_2) = -3(A_1t+A_2)+(B_1t+B_2)$$
$$B_1-4(B_1t+B_2) = -(A_1t+A_2)-5(B_1t+B_2)$$

$$*\ A_1-4A_1t-4A_2 = -3A_1t-3A_2+B_1t+B_2$$
$$B_1-4B_1t-4B_2 = -A_1t-A_2-5B_1t-5B_2$$

$$(A_1+B_1)t+(A_2+B_2-A_1)=0$$
$$(-A_1-B_1)t+(-A_2-B_2-B_1)=0$$

$$\begin{aligned}A_1+B_1&=0\\ -A_1-B_1&=0\end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned}A_2+B_2-A_1&=0\\ -A_2-B_2-B_1&=0\end{aligned}$$

$A_1=-B_1$

$A_1=k, \ B_1=-k$

$k=1, \ \boxed{A_1=1, \ B_1=-1}$

$$\begin{aligned}A_2+B_2&=1\\ -A_2-B_2&=-1\end{aligned}$$

$A_2=1-B_2$

$A_2=k, \ B_2=1-k$, $k=2, \ \boxed{A_2=2, \ B_2=-1}$

$$\boxed{x=(t+2)e^{-4t}, \quad y=(-t-1)e^{-4t}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= c_1 e^{-4t} + c_2 (t+2) e^{-4t} \\ y &= c_1 e^{-4t} + c_2 (-t-1) e^{-4t} \end{aligned}}$$ **