# Birinci Mertebeden Diferensiyel Denklemler

24 Ekim 2021 Pazar 21:48

Birinci Mertebed...

$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^4 + \cdots$ *

$\frac{dy}{dx} + \cdots =$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \cdots =$ *

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

## BİRİNCİ MERTEBEDEN YÜKSEK DERECELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Birinci dereceden bir diferansiyel denklem kapalı olarak $f(x, y, y') = 0$ biçimindedir. Bazı kolaylıklar sağlayacağından $\dfrac{dy}{dx} = y' = p$ yazılırsa denklem $f(x, y, p) = 0$ halini alır. Eğer $p$ nin derecesi 1 den büyükse bu tür denklemlere birinci mertebeden yüksek dereceli denklem denir. Örneğin;

$$p^2 + py = x^2 \cancel{x} y \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot y = x^2 y$$

$p = \dfrac{dy}{dx}$

$$p^3 - 2p^2 - p = 0$$

denklemleri sırasıyla birinci mertebeden ikinci ve üçüncü dereceden denklemlerdir. Genel olarak birinci mertebeden $n$ dereceden bir denklem

$$p^n + p_1(x, y) - p^{n-1} + p_2(x, y) p^{n-2} + \ldots + p_n(x, y) = 0 \tag{1}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemler aşağıdaki şekillerde çözülebilirler.

$\frac{dy}{dx} = p$

**i. $y'$ye göre (yani $p'$ye göre) çözülebilen denklemler**

(1) denleminin sol tarafının $p$ ye göre bir polinom olduğu ve $n$ tane lineer çarpana ayrıldığı kabul edilir ve (1) denklemi

$F_i(x,y) = F_i$

$$(p - F_1)(p - F_2)\ldots(p - F_n) = 0\,,\ \ (F_i(x,y) = F_i) \tag{2}$$

şeklini alır. (2) deki her bir çarpan sıfıra eşitlenerek $n$ tane 1.dereceden ve 1. mertebeden denkleme varılır. Varılan her bir denklem

$p - F_1 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x,y),$$
$$\frac{dy}{dx} = F_2(x,y)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dy}{dx} = F_n(x,y)$$

biçiminde yazılarak çözülürse

$$f_1(x,y,c)=0, f_2(x,y,c)=0,...., f_n(x,y,c)=0 \tag{3}$$

çözümleri elde edilir. Çözüm ise (3) de verilen $n$ tane fonksiyonun çarpımı

$$f_1(x,y,c), f_2(x,y,c),...f_n(x,y,c)=0$$

şeklinde bulunur.

**Örnek** $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)y=x^2+xy$ diferensiyel denklemini çözümüz?

$$\left(\begin{array}{l}\frac{dy}{dx}=p\\ \frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}\end{array}\right)$$

$$p^2+py=x^2+xy$$

$$p^2+py-x^2-xy=0$$

$$(p-x)(p+x)+y(p-x)=0$$

$$\underbrace{(p-x)}_{=0}\underbrace{(p+x+y)}_{=0}=0$$

i) $p-x=0$

$$\frac{dy}{dx}-x=0$$

$$\int dy=\int x\,dx$$

$$y=\frac{x^2}{2}+c \Rightarrow \boxed{y-\frac{x^2}{2}-c=0}$$

ii) $p+x+y=0$

$$\frac{dy}{dx}+y=-x \quad (\text{Lineer})$$

$$e^{\int dx}\cdot y=-\int xe^{\int dx}dx+C$$

$$e^x\cdot y=-\int xe^x dx+C$$

$$\int xe^x dx$$

$x=u,\ e^x dx=dv$

$dx=du,\ e^x=v$

$$=xe^x-\int e^x dx$$

$$=e^x(x-1)$$

$$e^x\cdot y=-e^x(x-1)+C$$

$$y=-(x-1)+ce^{-x}$$

$$\boxed{y+x-1-ce^{-x}=0}$$

$$\boxed{\left(y-\frac{x^2}{2}-c\right)\left(y+x-1-ce^{-x}\right)=0}$$

**Örnek** $p^3 - 2p^2 - p + 2 = 0$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz. $\left(p = \dfrac{dy}{dx}\right)$

$$p^2(p-2) - (p-2) = 0$$

$$(p-2)(p^2-1) = 0$$

$$\underbrace{(p-2)}_{0}\underbrace{(p-1)}_{0}\underbrace{(p+1)}_{0} = 0$$

i) $p-2=0$

$$\frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

$$\int dy = \int 2\,dx$$

$$y = 2x + C$$

$$\boxed{y - 2x - C = 0}$$

ii) $p-1=0$

$$\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$\int dy = \int dx$$

$$y = x + C$$

$$\boxed{y - x - C = 0}$$

iii) $p+1=0$

$$\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$\int dy = \int -dx$$

$$y = -x + C$$

$$\boxed{y + x - C = 0}$$

$$\boxed{(y-2x-c)(y-x-c)(y+x-c) = 0}$$

**Örnek** $xp^2+(y-1-x^2)p-x(y-1)=0$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$\left(p=\dfrac{dy}{dx}\right)$

$$xp^2-x^2p+(y-1)(p-x)=0$$

$$xp(p-x)+(y-1)(p-x)=0$$

$$\underbrace{(p-x)}_{0}\underbrace{(xp+y-1)}_{0}=0$$

i) $p-x=0$

$\dfrac{dy}{dx}-x=0$

$\int dy=\int x\,dx$

$y=\dfrac{x^2}{2}+C$

$\boxed{y-\dfrac{x^2}{2}-C=0}$

ii) $xp+y-1=0$

$x\dfrac{dy}{dx}+y-1=0$

$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x}$ (Lineer)

$e^{\int \frac{dx}{x}}\cdot y=\int \dfrac{1}{x}e^{\int\frac{dx}{x}}dx+c$

$x.y=\int \dfrac{1}{x}.x\,dx+c$

$xy=x+c$

$y=1+\dfrac{c}{x}$

$\boxed{y-1-\dfrac{c}{x}=0}$

$$\boxed{\left(y-\frac{x^2}{2}-c\right)\left(y-1-\frac{c}{x}\right)=0}$$

**ii) y'ye Göre Çözülebilen Denklemler**

$\boxed{y=f(x,p)}$ biçimindeki denklemlerdir. Bu tür denklemlerin çözümünde önce $x$'e göre türev alınırsa bu denklemden

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{df}{dx}+\frac{df}{dp}\frac{dp}{dx}$$

biçimindeki bir denkleme varılır. Vardığımız bu denklem $p$ 'ye göre 1. derece ve 1. mertebe bir diferansiyel denklemdir. Çözümü ise $Q(x,p,c)=0$ şeklindedir. Verilen denklemin çözümü ise $y=F(x,p)$ ve $Q(x,p,c)=0$ parametrik denklemleriyle verileceği gibi iki denklem arasında $p$ parametresinin yok edilmesiyle çözüm elde edilir.

**Örnek** $xp^2-2yp+4x=0$ diferansiyel denklemini çözün. $(p=\frac{dy}{dx})$

$$xp^2+4x=2yp$$

$$y=\frac{xp^2+4x}{2p}=\frac{xp^2}{2p}+\frac{4x}{2p}=\frac{xp}{2}+\frac{2x}{p}$$

$$y=\frac{xp}{2}+\frac{2x}{p}$$

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{p}{2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{2}{p}+2x\cdot\left(-\frac{1}{p^2}\right)\cdot\frac{dp}{dx}$$

$$p-\frac{p}{2}-\frac{2}{p}=\frac{dp}{dx}\left(\frac{x}{2}-\frac{2x}{p^2}\right)$$

$(2p)\ (p)\ (2)$ $\quad (p^2)\ (2)$

$$\frac{2p^2-p^2-4}{2p}=\frac{dp}{dx}\left(\frac{xp^2-4x}{2p^2}\right)$$

$$\frac{\cancel{p^2-4}}{\cancel{2p}}=\frac{dp}{dx}\cdot\left(\frac{xp^2-4x}{\cancel{2p^2}}\right) \longrightarrow x(\cancel{p^2-4})$$

$$1=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{x}{p}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dp}{p}$$

$$\ln x+\ln c=\ln p$$

$$p=x.c \Rightarrow \frac{dy}{dx}=xc\ ,\ \int dy=\int c.x\,dx$$

$$\boxed{y=\frac{cx^2}{2}+c_1}$$

**iii) x'e göre Çözülebilen Diferansiyel Denklemler**

$x = f(y,p)$ biçimindeki denklemlerdir. Bu tür denklemlerde önce $y$ ye göre türev alınır.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df}{dy} + \frac{df}{dp}\frac{dp}{dy}$$

şeklini alır. Bu ise

$$\frac{1}{p} = \frac{df}{dy} + \frac{df}{dp}\frac{dp}{dy}$$

yani

$$\frac{1}{p} = f(y.p,\frac{dp}{dy})$$

halini almış olur. Bu diferansiyel denklem çözülürse $Q(y,p,c)=0$ sonucuna varılır. $x = f(y,p)$ , $Q(y,p,c)=0$ parametrik denklemlerinde $p$ yok edilerek çözüme ulaşılır.

**Örnek** $p^2 - y^2 + 2e^x y = e^{2x}$ diferansiyel denklemini çözün. ($p = \frac{dy}{dx}$)

$$p^2 - y^2 + 2e^x y - e^{2x} = 0$$

$$p^2 - (y^2 - 2e^x y + e^{2x}) = 0$$

$$p^2 - (y - e^x)^2 = 0$$

$$(\underbrace{p - y + e^x}_{=0})(\underbrace{p + y - e^x}_{=0}) = 0$$

i) $p - y + e^x = 0$

$\frac{dy}{dx} - y = -e^x$ (Lineer)

$e^{-\int dx} \cdot y = -\int e^x \cdot e^{-\int dx} dx + C$

$e^{-x} y = -\int \underbrace{e^x \cdot e^{-x}}_{1} dx + C$

$e^{-x} \cdot y = -x + C$

$y = -xe^x + ce^x$

$\boxed{y + xe^x - ce^x = 0}$

ii) $p + y - e^x = 0$

$\frac{dy}{dx} + y = e^x$

$e^{\int dx} \cdot y = \int e^x e^{\int dx} dx + C$

$e^x \cdot y = \int e^{2x} dx + C$

$e^x \cdot y = \frac{e^{2x}}{2} + C$

$y = \frac{e^x}{2} + ce^{-x}$

$\boxed{y - \frac{e^x}{2} - ce^{-x} = 0}$

$$\boxed{(y + xe^x - ce^x)\left(y - \frac{e^x}{2} - ce^{-x}\right) = 0}$$

ÖDEV

**Örnek** $2y.y' - x.(y')^2 - x = 0$ diferansiyel denklemini çözün.

**Örnek** $y + xy' = x^4(y')^2$ diferansiyel denklemini çözün. $\quad , y' = p$

$$y = x^4p^2 - xp$$

$$\frac{dy}{dx} = p = 4x^3p^2 + x^4 \cdot 2p\frac{dp}{dx} - p - x\frac{dp}{dx}$$

$$2p - 4x^3p^2 = \frac{dp}{dx}\left(2x^4p - x\right)$$

$$-2p(1 - 2\cancel{x^3} p) = \frac{dp}{dx} \cdot x(2x^3\cancel{p} - 1)$$

$$\int -\frac{2dx}{x} = \int \frac{dp}{p}$$

$$-2\ln x + \ln c = \ln p$$

$$\boxed{p = \frac{c}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c}{x^2}$$

$$\int dy = \int c \cdot \frac{dx}{x^2}$$

$$\boxed{y = -\frac{c}{x} + c_1}$$