Diferensiyel Denklem Sistemleri (Laplace)

9 Ocak 2022 Pazar 19:52

Diferensiyel Denklem...

DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN LAPLACE YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

$X(s) \leftarrow x(t), y(t) \rightarrow Y(s)$

Burada birinci dereceden lineer denklem sisteminin çözümünü Laplace dönüşümü tekniğiyle yapacağız. Bu uygulama aşağıdaki adımlardan oluşur:

1.Adım: Her iki denkleme de Laplace dönüşümü uygulanır ve başlangıç koşulları eklenirse denklem sistemi X(s) ve Y(s) den oluşan iki bilinmeyenli lineer cebirsel denklem haline getirilir.

2. Adım: 1. adımda elde edilen lineer sistemden X(s) ve Y(s) çekilir.

3. Adım: Verilen başlangıç değer probleminin çözümü olan

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} \quad \text{ve} \quad y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek .

X(0) = 8 ve Y(0) = 3 başlangıç koşulları altında,

X′ = 2X − 3Y

Y′ = Y − 2X

diferansiyel denklem sistemini Laplace dönüşümlerini kullanarak çözelim.

$$\mathcal{L}\{x'\} = \mathcal{L}\{2x-3y\} \qquad \mathcal{L}\{x'\} = sX(s) - x(0) = sX(s) - 8$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{y-2x\} \qquad \mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 3$$

$$sX(s) - 8 = 2X(s) - 3Y(s)$$
$$sY(s) - 3 = Y(s) - 2X(s)$$

$$(s-2)X(s) + 3Y(s) = 8$$
$$2X(s) + (s-1)Y(s) = 3$$

$$W = \begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 - 3s + 2 - 6 = s^2 - 3s - 4 \neq 0$$

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{W} = \frac{8s-8-9}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4}, \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s-17}{s^2-3s-4}\right\}$$

$$\frac{8s-17}{(s-4)(s+1)} = \underset{(s+1)}{\frac{A}{s-4}} + \underset{(s-4)}{\frac{B}{s+1}} \Rightarrow 8s-17 = A(s+1) + B(s-4)$$

$s=4,\quad 15 = 5A \Rightarrow A = 3$

$s=-1,\quad -25 = -5B \Rightarrow B = 5$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+1}\right\} = 3e^{4t} + 5e^{-t}$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{W} = \frac{3s-6-16}{s^2-3s-4} = \frac{3s-22}{s^2-3s-4}, \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-22}{s^2-3s-4}\right\}$$

$$\frac{3s-22}{(s-4)(s+1)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow 3s-22 = A(s+1) + B(s-4)$$

$s=4,\quad -10 = 5A \Rightarrow A = -2$

$s=-1,\quad -25 = -5B \Rightarrow B = 5$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{s-4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+1}\right\} = -2e^{4t} + 5e^{-t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= 3e^{4t} + 5e^{-t} \\ y(t) &= -2e^{4t} + 5e^{-t} \end{aligned}}$$

Örnek .
X(0) = –1, X′(0) = –1, Y(0) = 1 ve Y′ (0) = 0   başlangıç koşulları altında,

$X'' + Y' = \cos t$
$Y'' - X = \sin t$

diferansiyel denklem sistemini Laplace dönüşümlerini kullanarak çözünüz.

$\mathcal{L}\{x''+y'\} = \mathcal{L}\{\cos t\}$
$\mathcal{L}\{y''-x\} = \mathcal{L}\{\sin t\}$,

$\mathcal{L}\{x''\} = s^2X(s) - sX(0) - x'(0) = s^2X(s)+s+1$
$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sY(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s$
$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - Y(0) = sY(s) - 1$

$$s^2X(s)+s+\cancel{1}+sY(s)-\cancel{1} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$s^2Y(s) - s - X(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$s^2X(s)+sY(s) = \frac{s}{s^2+1} - s = \frac{s-s^3-s}{s^2+1} = -\frac{s^3}{s^2+1}$$

$$-X(s) + s^2Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + s = \frac{s^3+s+1}{s^2+1}$$

$$-s/\ s^2X(s)+sY(s) = -\frac{s^3}{s^2+1}$$

$$* \quad -X(s)+s^2Y(s) = \frac{s^3+s+1}{s^2+1}$$

$+$

$$X(s)\,(\cancel{-s^3-1}) = \frac{s^4+s^3+s+1}{s^2+1} = \frac{s^3(s+1)+(s+1)}{s^2+1} = \frac{(s+1)(\cancel{s^3+1})}{s^2+1}$$

$$X(s) = -\frac{s+1}{s^2+1} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{s+1}{s^2+1}\right\}$$

$$x(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\boxed{x(t) = -\cos t - \sin t}$$

$$\cancel{s^2}Y(s) = \frac{s^3+s+1}{s^2+1} - \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{\cancel{s^3}}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1}, \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} \Rightarrow \boxed{y(t) = \cos t}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = -\cos t - \sin t \\ y(t) = \cos t \end{array}}$$ ***