Algoritma Analizi

ÖZYİNELEMELER (RECURRENCES)

Bir ***dizi***, ***seri***, ***fonksiyon***, ***algoritma*** **kendi cinsinden tanımlanmasına özyineleme denir.**

Tanım bölgesi negatif tamsayılar olmayan fonksiyon tanımlanırken:

Temel Adım: Fonksiyonun sıfırdaki değeri belirtilir.

Özyinelemeli adım: Fonksiyonun *bir tamsayıdaki değeri hesaplanırken, fonksiyonun daha küçük tamsayılardaki değer(ler)ini kullanarak* bu değeri veren kural belirtilir.

ÖZYİNELEMELER (RECURRENCES)

- *Örneğin ikinin kuvvetlerinden oluşan dizi aşağıdaki gibi ifade edilebilir*

$\boldsymbol{a_n = 2^n}$

Fakat bu dizi özyinelemeli olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$\boldsymbol{a_0} = 1$, $\boldsymbol{a_{n+1}} = 2 * \boldsymbol{a_n}$

ÖZYİNELEMELER (RECURRENCES)

- **Örnek:** *f* fonksiyonu öz yinelemeli olarak aşağıdaki tanımlanmış olsun;

$\boldsymbol{f(n+1)=2f(n)+3}$ *ve* $f(0)=3$*, olsun* $\boldsymbol{f(1)}$, $\boldsymbol{f(2)}$, $\boldsymbol{f(3)}$ değerleri nedir?

$\boldsymbol{f(1)}= 2f(0)+ 3 = 2 * 3 + 3 = \mathbf{9}$

$\boldsymbol{f(2)} = 2f(1) + 3 = 2 * \mathbf{9} + 3 = \mathbf{21}$

$\boldsymbol{f(3)} = 2f(2) + 3 = 2 * \mathbf{21} + 3 = \mathbf{45}$

$\boldsymbol{f(4)} = 2f(3)+ 3 = 2 * \mathbf{45} + 3 = 93$

ÖZYİNELEMELER (RECURRENCES)

Yinelemeleri çözmek için genel bir prosedür yada yöntem yoktur.

Sadece birtakım teknikler vardır. Bunlardan bir kısmı oluşturulan yineleme için bunlardan çalışır.

Yinelemeler integral, türev, vs. denklemlerinin çözümlerine benzer.

ÖZYİNELEMELER (RECURRENCES)

❖ **Yinelemeleri çözmek konusunda 3 ana yöntem vardır.**

1. **Yerine koyma metodu (substitution)**
2. **Özyineleme ağacı (recursion tree)**
3. **Ana Metot (Master metod)**

❖ Ana yöntemlerin dışında tekrarlı bağıntılar *karakteristik denklemler* kullanarak çözülebilir.

1.Yerine koyma metodu (yöntemi)

- *Bazı tekrarlı bağıntıların çözümü yapılmadan* çözümünün nasıl olabileceği hakkında **tahmin yapılabilir.**
- **Daha sonra yerine konulur.**
- Yerine koyma (tahminler) metodu **bir sınırdır** ve **tahmini ispatlamak** için <u>**tümevarım yöntemi kullanılır.**</u>

1.Yerine koyma metodu (yöntemi)

- **En genel yöntem:**

1.Çözümün şeklini tahmin edin.

2. Tümevarım ile doğrulayın.

3. Sabitleri çözün.

1.Yerine koyma metodu (yöntemi)

Çözümün biçimin tahmin edilmesi:

Ne yazık ki özyinelemelerin çözümü için **doğru bir tahmin yapmanın genel bir yolu yoktur.**

Eğer özyineleme daha önceden gördüğünüz **özyineleme ile benzer ise çözüm tahmini yapmak anlamlıdır.**

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n$$

Eğer **n** değeri **oldukça büyük olduğunda** $\lfloor n/2 \rfloor$ ile $\lfloor n/2 \rfloor + 17$ arasındaki **fark çok büyük olmaz.** Sonuç olarak yerine koyma yöntemi ile $T(n) = O(n \lg n)$ tahmini yapabiliriz.

1.Yerine koyma metodu (yöntemi)

Çözümün biçimin tahmin edilmesi:

İyi bir tahmin yapmanın başka bir yolu da özyineleme üzerinde *kabaca* ***üst*** ve ***alt*** ***sınır*** *tahmini* yapıp **belirsizlikleri indirgemektir.**

Örneğin $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$ özyinelemesi için **alt sınır** $T(n) = \Omega(n)$ ve **üst sınır** $T(n) = O(n^2)$ olarak tahmin edebiliriz.

Daha sonra doğru çözüme ulaşıncaya kadar, **azar azar üst sınırı düşürerek ve alt sınırı yükselterek** $T(n) = \Theta(n \lg n)$ çözüme ulaşabiliriz.

1.Yerine koyma metodu (yöntemi)

Örnek: T(n)=T(n/2)+c, n≥2, ve T(1)=1.

- T(2)=1+c, T(4)=1+**2**c, T(8)=1+**3**c, ...
- T(2^k)=1+**k**c olur.

Burada **n= 2^k**, **T(n)=1+clogn** olur.

1.Yerine koyma metodu (yöntemi)

- **Tümevarım ile ispat:**
- **Temel durum:** *n=1*
- *Tümevarım hipotezi: n=* $\mathbf{2^k}$, *T(n)=T(n/2)+c için doğrudur.*
- ***Tümevarım adımı: n=*** $\mathbf{2^k}$ ***+1***
- ***İspat (proof):***
- ***T(n+1)=T(*** 2^k ***+1)=T(*** 2^{k+1} ***/2)+c***
- ***T(n+1)= T(*** 2^k ****2/2)+c = T(*** 2^k ***) + c= (1+ kc) +c*** *olur.*

T(1)=1 verildi.

T(2^k)=1+kc, burada n=2^k

1.Yerine koyma metodu (yöntemi)

Örnek: **$T(n)=3T(n/2)+cn$**, $n\geq 2$, ve $T(1)=1$.

- **$T(2)=3+2c$**
- $T(4)=3(T(2))+4c=3\mathbf{(3+2c)}+4c=\mathbf{9+10c}=\mathbf{3^2}+[3^1 2^1 \mathbf{c}]+3^0 2^2 \mathbf{c}$
- $T(8)=27+38c=3^3+[3^2 2^1 c+3^1 2^2 c]+3^0 2^3 c$
- $T(16)=81+130c$

$$f(n) = \sum_{0\leq i\leq n} x^i = (x^{n+1}-1) / (x-1)$$

- …
- $T(2^k)=3^k+[3^{k-1}2^1 c+3^{k-2}2^2 c+\ldots+3^1 2^{k-1}c]+3^0 2^k c$, $2^k c$ parantezine alalım
- $T(2^k)=3^k+2^k c[(3/2)^{k-1}+(3/2)^{k-2}+\ldots+(3/2)]$, *serisinin genel denklemi*

1.Yerine koyma metodu (yöntemi)

- $T(2^k)=3^k+2^k c[((3/2)^k-1)/((3/2)-1)]$, burada $\mathbf{n=2^k}$ ve **$\mathbf{k=\log n}$**
- $T(n)=3^{\log n}+cn[((3^{\log n}/n-1)/(1/2)]$, burada $a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$
- $T(n)=n^{\log 3}+2cn(n^{\log 3-1}-1) = n^{1,59}+2cn(n^{0,59}-1)$
- $T(n)=n^{1,59}(1+2c)-2cn$
- $T(n)\in O(n^{1,59})$ dır.

1.Yerine koyma metodu (yöntemi)

- **İspat:** $T(n)=3T(n/2)+cn$, $n\geq 2$, ve $T(1)=1$. *(1)*
- $T(2^k)=3^k+2^k c[((3/2)^k-1)/((3/2)-1)]$, burada $n=2^k$ ve $k=\log n$ *(2)*

Temel durum: $n=1$, $T(1)=1$ ve **$n=2$ → $T(2)=3+2c$**

- **Tümevarım hipotezi: $n=2^k$ → $T(2^k)=3^k+2^k c[((3/2)^k-1)/((3/2)-1)]$**
- **Tümevarım adımı: $n=2^{k+1}$ → $T(2^{k+1})=3^{k+1}+2^{k+1} c[((3/2)^{k+1}-1)/((3/2)-1)]$**

veya

→ $T(2^{k+1})=3^{k+1}+2^{k+2} c[(3/2)^{k+1}2-2]$ *(3)*

1.Yerine koyma metodu (yöntemi)

- Şimdi *(1)* nolu denklemi kullanarak *(3)* nolu denklemi ispatlayalım
- $T(2^k)=3^k.T(2^{k-1})+c2^k \rightarrow$ $n=2^k$ için
- $T(2^{k+1})=3.T(2^k)+c2^{k+1} = 3.(3^k+c2^k[((3/2)^k-1)/((3/2)-1)])+c2^{k+1}$
- $T(2^{k+1})=3^{k+1}+2^k\, c[3.(3/2)^k-3)/(1/2)] +2^{k+1}c= 3^{k+1}+2^{k+1}\, c[3.(3/2)^k-3] +2^{k+1}c$
- $T(2^{k+1})=3^{k+1}+2^{k+1}\, c([3.(3/2)^k-3] +1) = 3^{k+1}+2^{k+1}\, c[(3/2)^{k+1}.2-2]$
- $T(2^{k+1})=3^{k+1}+2^{k+2}\, c[(3/2)^{k+1}2-2]$, (3) nolu denklemi ispatlamış oluyoruz.
- $T(n)\epsilon\ O(n^{1,59})$ dır.

Yerine koyma metodu (yöntemi)
Üst sınırı tahmin ederek çözümü

Örnek: **$T(n) = 4T(n/2) + n$**, ise

- [**$T(1) = \Theta(1)$** olduğunu varsayın.]
- **$O(n^3)$**'ü tahmin edin. (O ve Ω ayrı ayrı kanıtlayın.)
- **$k < n$** için **$T(k) \leq ck^3$** olduğunu varsayın.
- **$T(n) \leq cn^3$**'ü tümevarımla kanıtlayın.

* Notasyon üzerinden (O) tümevarım yöntemi kullanılmaz.

Yerine koyma örneği

T(n) = 4T(n/2) + n

$T(n) \leq cn^3$ *Üst sınır*

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(n/2) + n \\ &\leq 4c(n/2)^3 + n \\ &= (c/2)n^3 + n \\ &= cn^3 - ((c/2)n^3 - n) \leftarrow \textit{istenen} - \textit{kalan} \\ &\leq cn^3 \leftarrow \textit{istenen} \end{aligned}$$

ne zaman ki $(c/2)n^3 - n \geq 0$, örneğin,
eğer $c \geq 2$ ve $n \geq 1$.

kalan

* Sonuç $(\frac{c}{2})n^3$ +n olur.

* İşlemi cn^3 ten büyük olması için bu ifade 0 veya büyük olması gerekir.

Yerine koyma örneği (devam)

- Başlangıç koşullarını da ele almalı, yani, tümevarımı taban şıklarına (base cases) dayandırmalıyız.
- **Taban:** T(n) = Θ(1) *tüm* **n <** $\boldsymbol{n_0}$ için, ki $\boldsymbol{n_0}$ uygun bir sabittir.
- **1 ≤ n <** $\boldsymbol{n_0}$ için, elimizde ***"Θ(1)" ≤ cn3,*** olur; yeterince büyük bir **c** değeri seçersek.

- **Bu, sıkı bir sınır değildir !**

Yerine koyma örneği-Daha sıkı bir üst sınır

$T(n) = O(n^2)$ olduğunu kanıtlayacağız.

Varsayın ki $T(k) \leq ck^2$, $k < n$ için olsun :

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n/2) + n \\
&\leq 4c(n/2)^2 + n \\
&= cn^2 + n \\
&= O(n^2)
\end{aligned}
$$

Yerine koyma örneği-Daha sıkı bir üst sınır

$T(n) = O(n^2)$ olduğunu kanıtlayacağız.

Varsayın ki $T(k) \leq ck^2$; $k < n$: için

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n/2) + n \\
&\leq 4c(n/2)^2 + n \\
&= cn^2 + n \\
&= \cancel{O(n^2)}
\end{aligned}
$$

Yanlış! I.H.(tümevarım hipotezini) kanıtlamalıyız.

$$= cn^2 - (-n)$$ [istenen –kalan]

$$\leq cn^2$$ seçeneksiz durum $c > 0$. Kaybettik!

-n >= 0 sağlanmaz (n değeri negatif olamaz)

Yerine koyma örneği-Daha sıkı bir üst sınır

FİKİR: Varsayım hipotezini güçlendirin.

- Düşük-düzeyli bir terimi ***çıkartın***.

Varsayım hipotezi: $T(k) \le c_1 k^2 - c_2 k$; $k < n$ için.

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(n/2) + n \\ &= 4(c_1(n/2)^2 - c_2(n/2)) + n \\ &= c_1 n^2 - 2c_2 n + n \\ &= c_1 n^2 - c_2 n - (c_2 n - n) \\ &\le c_1 n^2 - c_2 n \text{ eğer } c_2 \ge 1. \end{aligned}$$

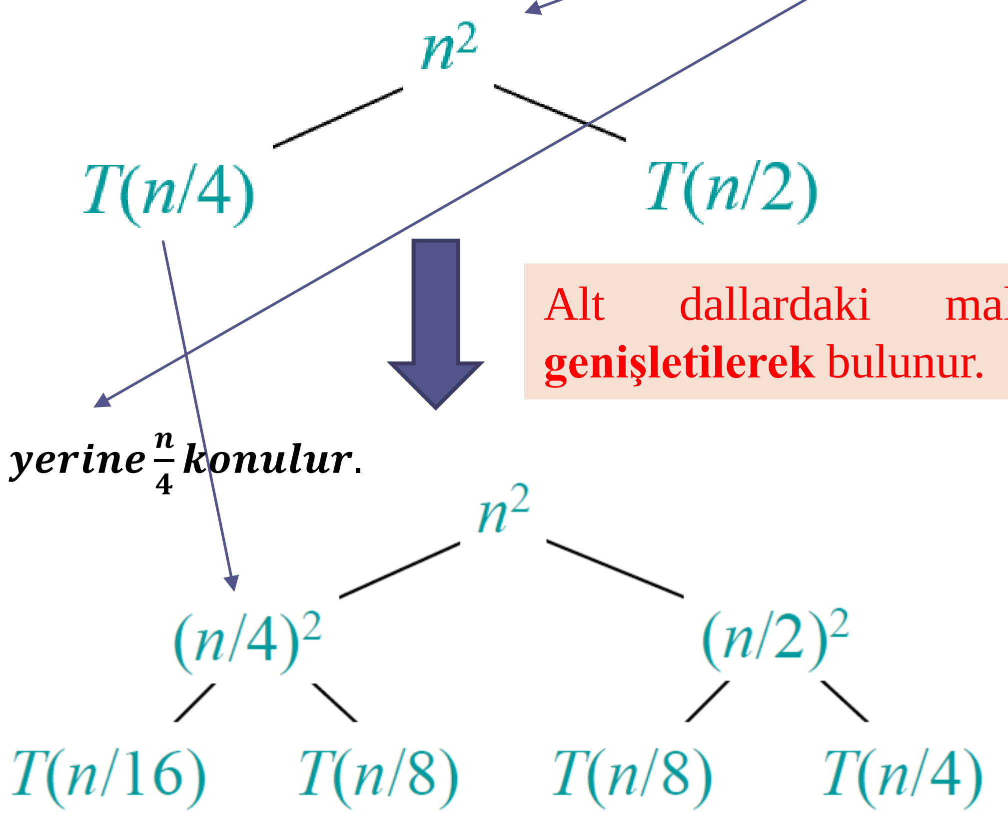
c_1'i başlangıç koşullarını karşılayacak kadar büyük seçin.

2. Özyineleme ağacı (Recursion tree) metodu

- **Bu metot genelde hep çalışır.**
- **Çok sıkı kuralları olan bir yöntem değildir.**
- *Uygularken çok dikkatli olunması gerekir.* Yanlış cevaplar üretilebilir.
- Özyineleme **cevabın ne olduğunu bulmak** ve **sonrada bu cevabın doğru olup olmadığını kanıtlamak için yerine koymak metodunu bulmaktır.**
- Öte yandan özyineleme-ağacı metodu "öngörü" olgusunu geliştirir.

2.Özyineleme ağacı (Recursion tree) metodu - örnek

- $T(n) = T(n/4) + T(n/2) + n^2$: çözün



Alt dallardaki maliyet **genişletilerek** bulunur.

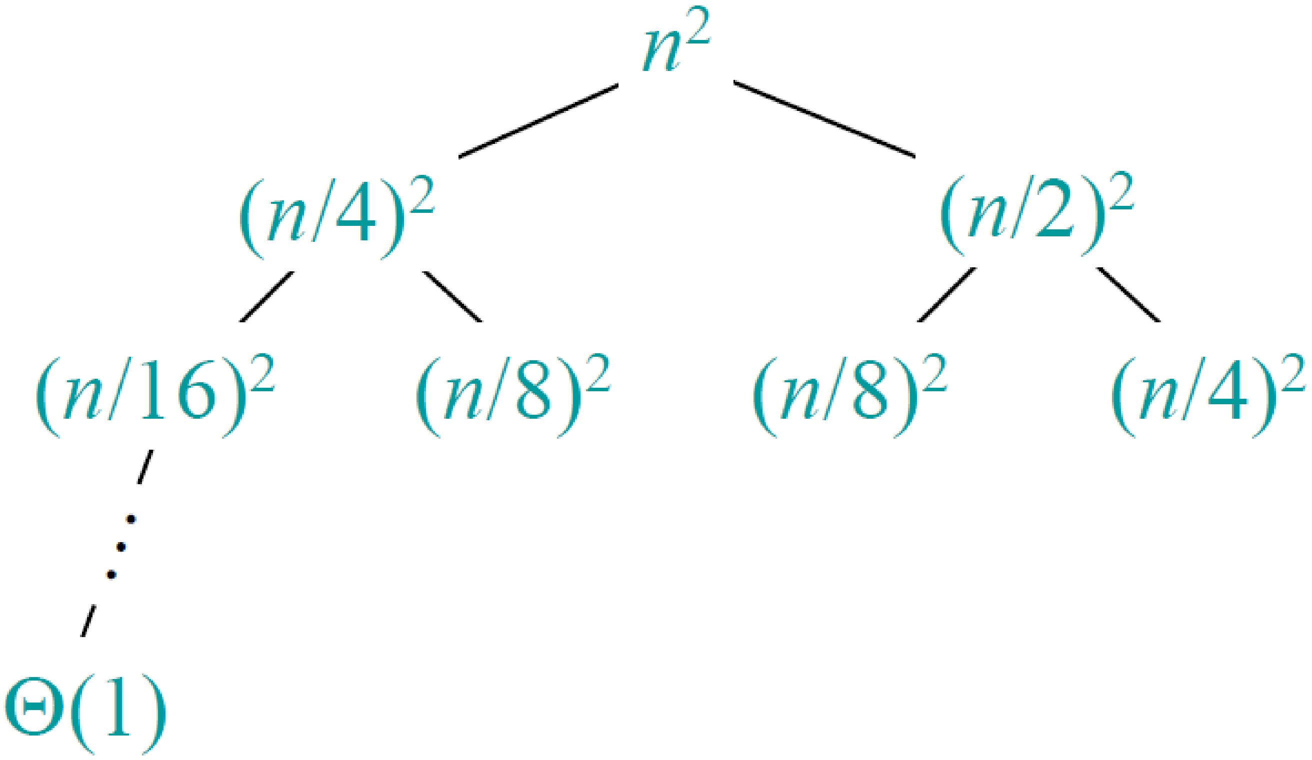
n $\boldsymbol{yerine\ \frac{n}{4}\ konulur}$.

* Çözüm için **<u>üst sınır bulunmaya yoğunlaşmak gerekir.</u>**

- Burada n sayısı 2'nin tam kuvveti olup tüm alt problemler tamsayı boyutludur.
- En üst seviyedeki *maliyet* ile *alt dallardaki maliyet* genişletilerek bulunulur.

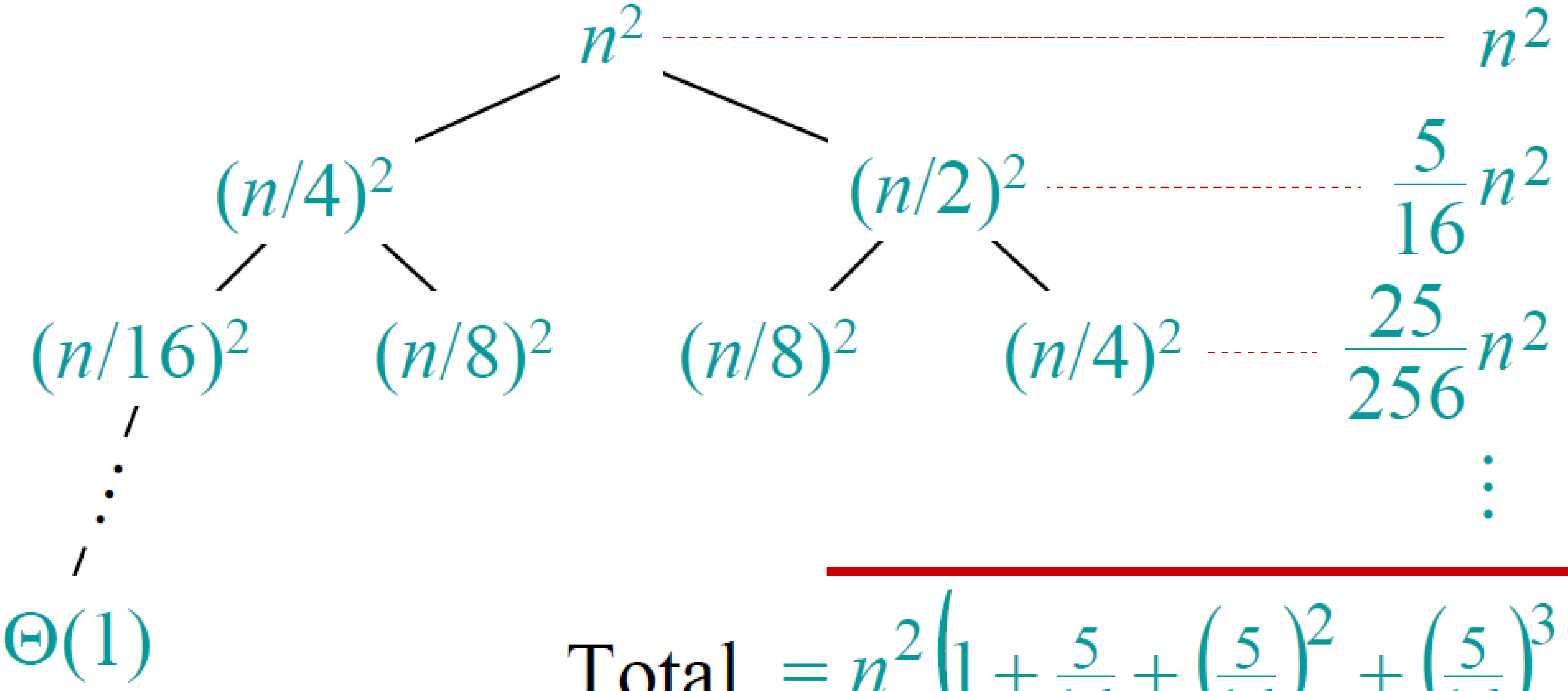
2. Özyineleme ağacı (Recursion tree) metodu-örnek

$$T(n) = T(n/4) + T(n/2) + n^2:$$



2. Özyineleme ağacı (Recursion tree) metodu -örnek

$T(n) = T(n/4) + T(n/2) + n^2$:



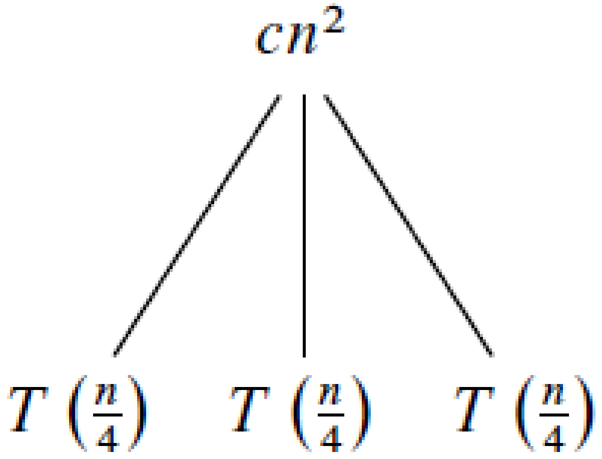
$$\text{Total} = n^2\left(1 + \frac{5}{16} + \left(\frac{5}{16}\right)^2 + \left(\frac{5}{16}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$= \Theta(n^2)$$

Geometrik seri

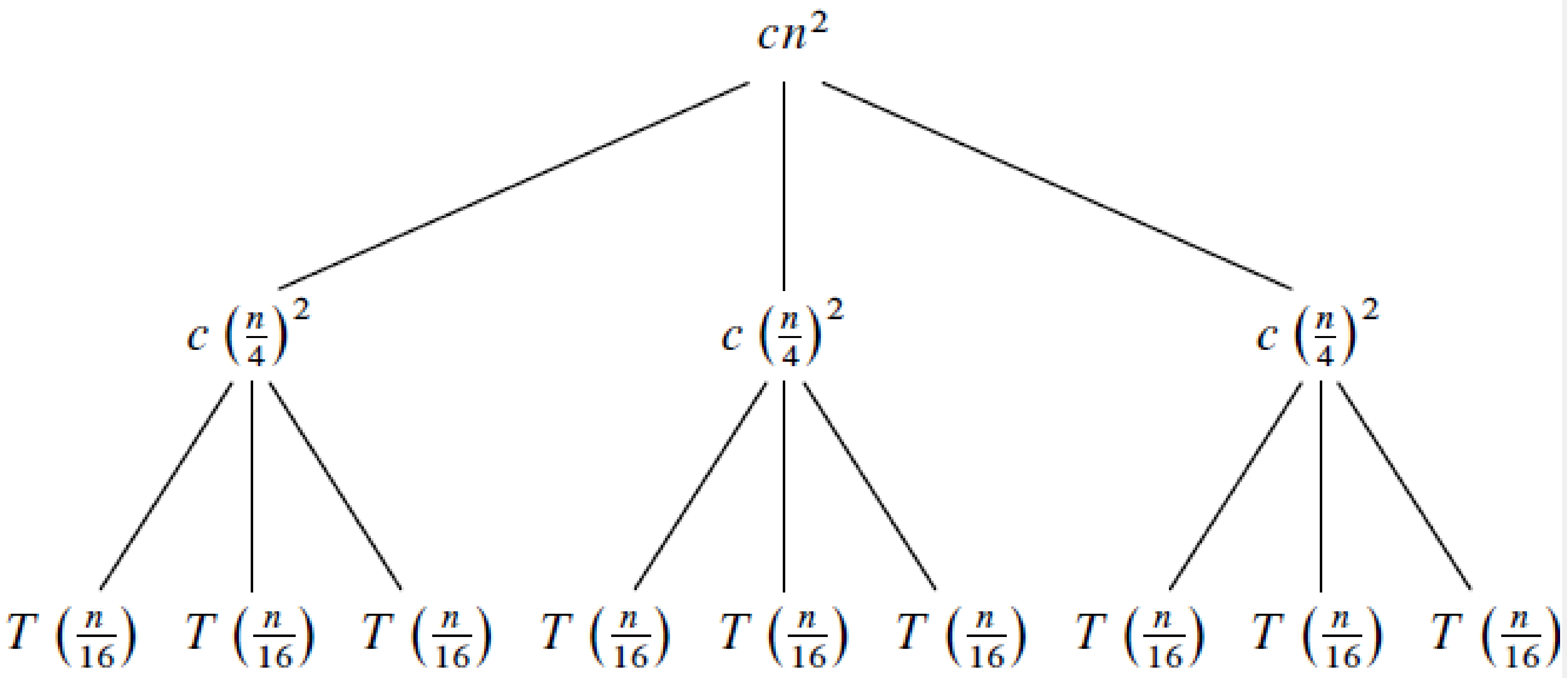
2. Özyineleme ağacı (Recursion tree) metodu- örnek

$$T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$$



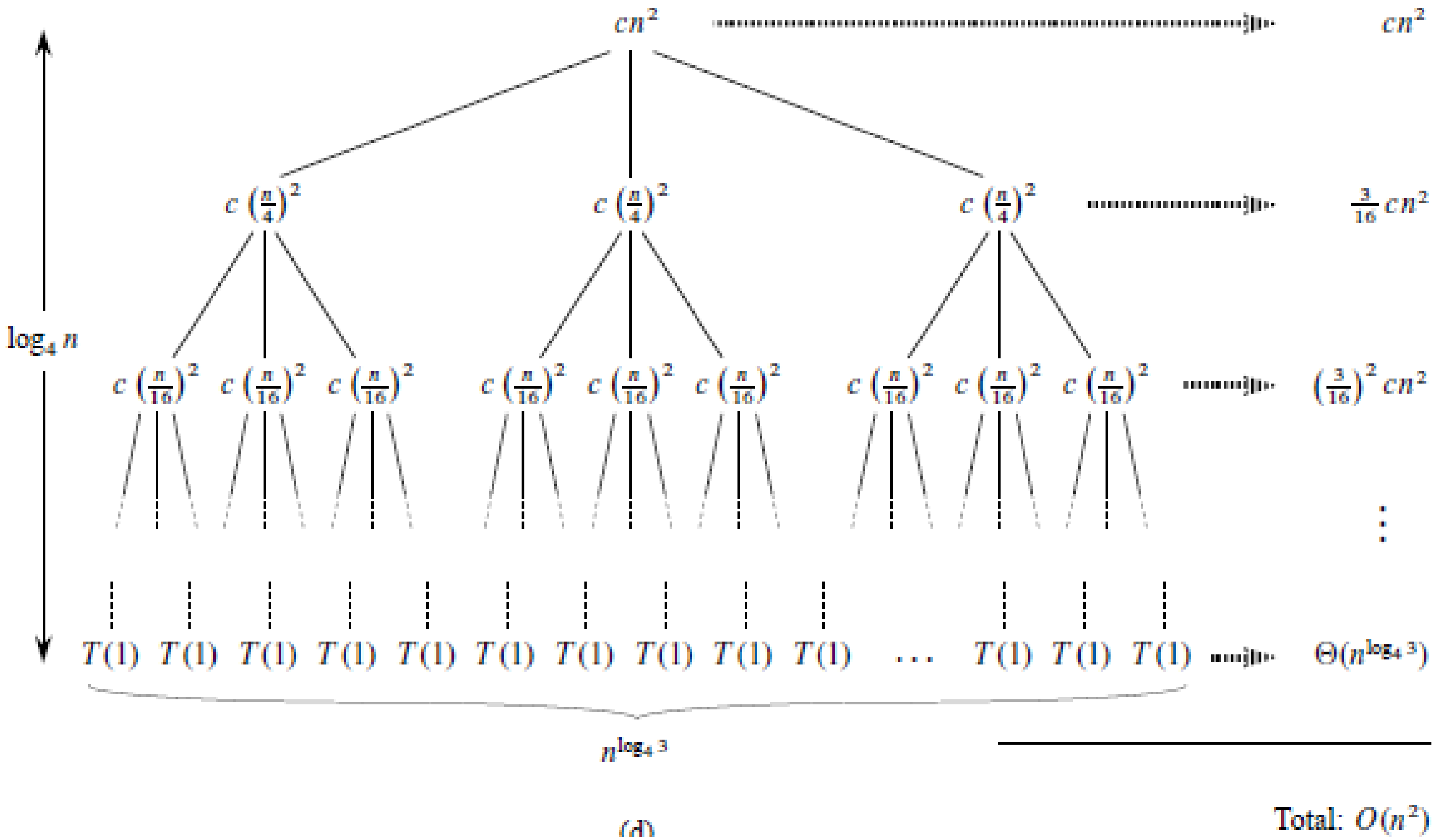
2. Özyineleme ağacı (Recursion tree) metodu- örnek

$$T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$$



2. Özyineleme ağacı (Recursion tree) metodu- örnek

$$T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$$



3. Ana Metod (The Master Method)

- **Ana method** aşağıda belirtilen yapıdaki yinelemelere uygulanır:

  - $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$,

burada $\boldsymbol{a \geq 1}$, $\boldsymbol{b > 1}$, ve f **asimptotik olarak pozitiftir.**

Not: Asimptotik pozitif, *n değeri yeterince büyük ($n \geq n_0$) olduğunda f değeri pozitiftir.*

- *Özyineleme ağacı ile çözümünden farklı olarak* burada **her problem aynı boyutta olması gerekir.**

3. Ana Metod (The Master Method)

$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$

- ***T(n)*** *bir algoritmanın çalışma süresidir.*
- ***n/b*** boyutunda ***a*** *tane alt problem* **özyineleme olarak çözülür** ve her biri ***T(n/b)***süresindedir.
- ***f(n)*** **problemin bölünmesi** ve **sonuçların birleştirilmesi için** geçen süredir.

- **Örnek:** Merge-sort için $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ yazılabilir.

3. Ana Metod (The Master Method)

- $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$

Burada **n/b** ya da $\lfloor \boldsymbol{n/b} \rfloor$ ya da $\lceil \boldsymbol{n/b} \rceil$ anlamında yorumlarız.

O zaman ***T(n)*** **aşağıdaki asimptotik sınırlara sahiptir**.

1. Eğer bazı $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ sabiti için $\boldsymbol{f(n)=O(n^{\log_b^{a-\varepsilon}})}$ ise $\boldsymbol{T(n)= \theta(n^{\log_b^{a}})}$ olur.
2. Eğer $\boldsymbol{f(n)= O(n^{\log_b^{a}})}$ *ise* ***o zaman*** $\boldsymbol{T(n)= \theta(n^{\log_b^{a}}\lg n)}$ *olur.*
3. *Eğer bazı* $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ sabiti için **f(n)=**$\boldsymbol{\Omega(n^{\log_b^{a+\varepsilon}})}$ ve ***bazı c<1 sabiti*** ve de ***yeterince büyük n*** için $\boldsymbol{a*f(n/b) \leq c*f(n)}$ ise o zaman $\boldsymbol{T(n)= \theta(f(n))}$ olur.

- *Özyineleme ağacında alt dallara inildikçe f küçülmelidir.*
- *Yani toplamdaki artış miktarı azalmalıdır.*

3. Ana Metod (The Master Method) -Örnek

- $T(n) = 9T(n/3) + n$
- $a = 9, b = 3$ ve $f(n) = n$ $\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$

$\varepsilon = 1$ için ***f(n)*** $O(n^{\log_3 9-\varepsilon})$ olduğundan ana teoremin **1. durumu** uygulayabiliriz ve $\boldsymbol{T(n)=\Theta(n^2)}$ sonucunu elde ederiz.

3. Ana Metod (The Master Method) -Örnek

- $T(n) = T(2n/3) + 1$

- a=1 , b=3/2 ve **f(n)=1** ve $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$ olur.
- $\Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(1)$ ve de $f(n)$ ‘de 1’e eşit olduğundan

2. durum uygulanır ve böylece özyinelemenin çözümü $f(n) = \Theta(\lg n)$ olur.

3. Ana Metod (The Master Method) -Örnek

- $T(n)=3\,T(n/4)+n\lg n$
- $a=3$, $b=4$ ve $f(n)=n\lg n$ ve $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(n^{0.793})$
- $\varepsilon \approx 0.2$ olduğunda $f(n)=\Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})$ *için düzenlilik koşulunu sağladığını gösterirsek* ***3. durum uygulanır.***

a*f(n/b)≤ c*f(n) durumu

- ***Yeterince büyük n ve c=3/4 için***
- $af(n/b) = 3(n/4)\lg(n/4) \le (3/4)\, n \lg n = cf(n)$ ***olur.***
- ***Sonuç olarak, durum 3 uygulanabilir. Bu durumda özyineleme sonucu*** $T(n)=\theta(n\lg n)$ *olur*.

3. Ana Metod (The Master Method) -Örnek

- **T(n)=2 T(n/2)+n lgn**

a=2, b=2 ve f(n)=n lgn ve $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = O(n)$

f(n)=n lgn ***asimptotik olarak*** $n^{\log_b a + \varepsilon} = n$ **değerinden** **büyüktür.**

Bu sonuca bakarak durum 3 'ün uygulanması düşünülebilir.

Fakat her zaman bu ifade polinomiyal olarak büyük değildir.

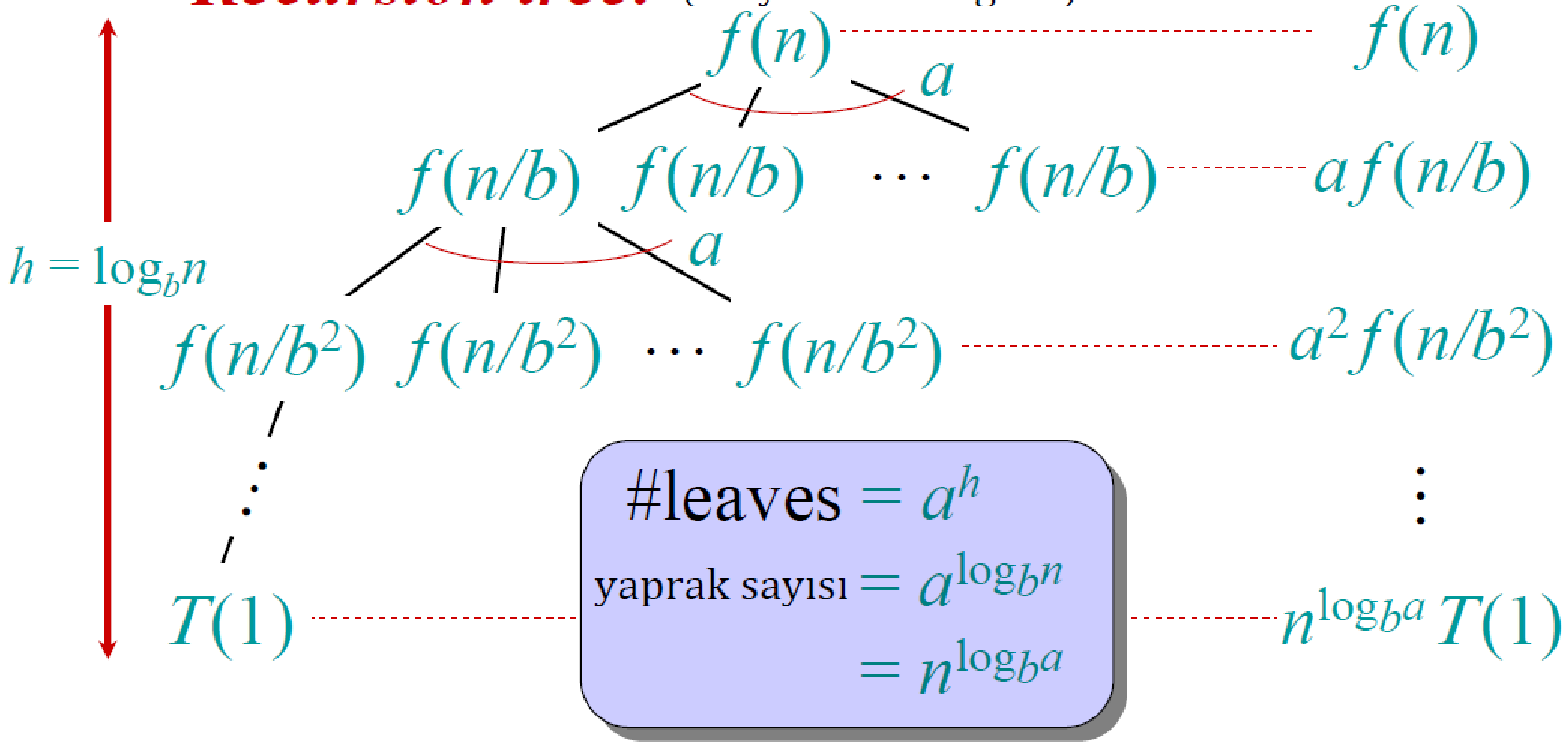
Herhangi bir pozitif ε değeri için f (n)/ $n^{\log_b a}$ **= n lgn/ n = lg n** oranı asimptotik olarak n^{ε} *'den azdır.*

Sonuç olarak bu problem durum 2 ve durum 3 arasında boşluğa düşer.

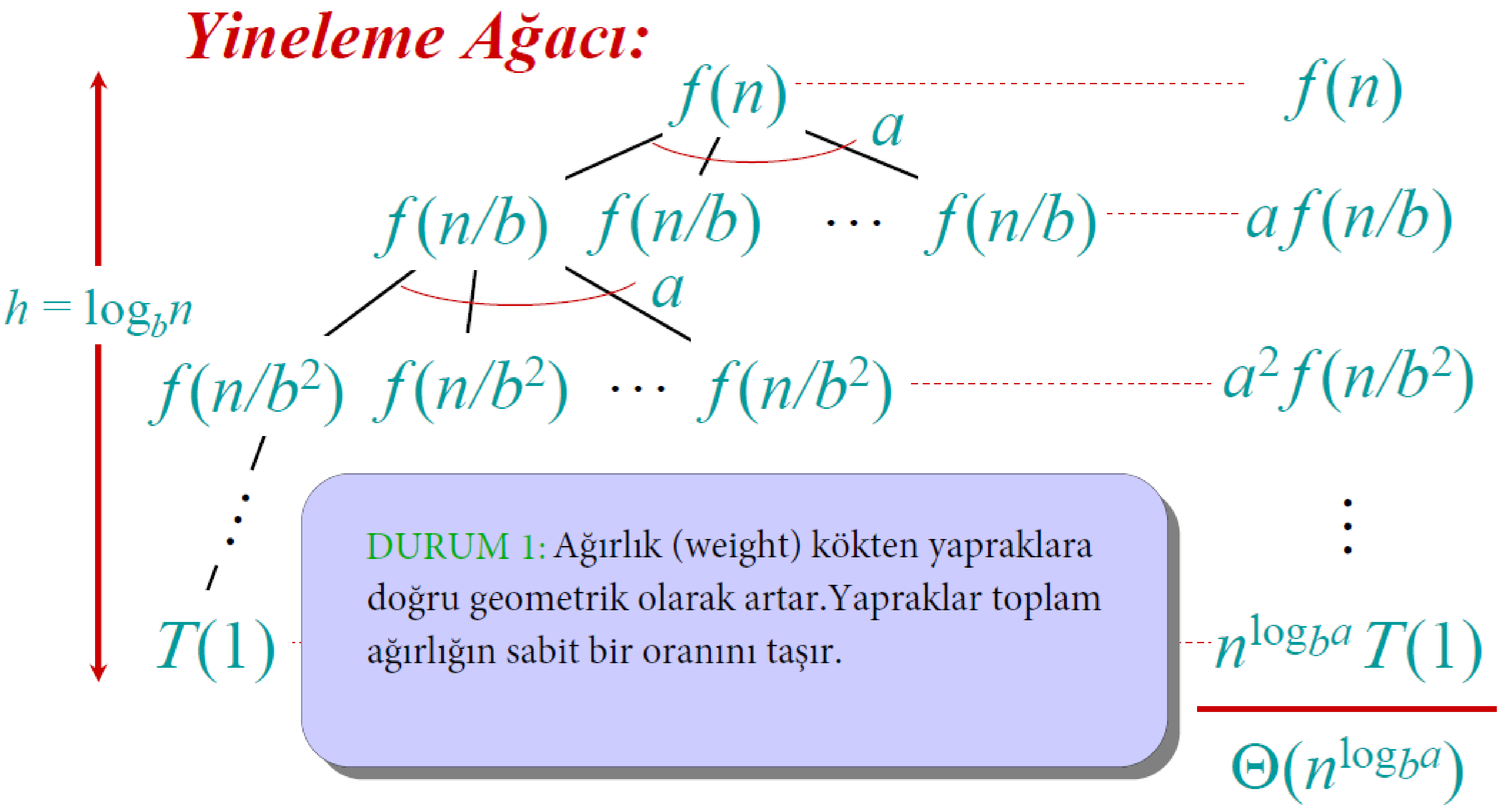
Master teoremdeki düşünce

a T(n/b) + f (n)

Recursion tree: (Özyineleme Ağacı)



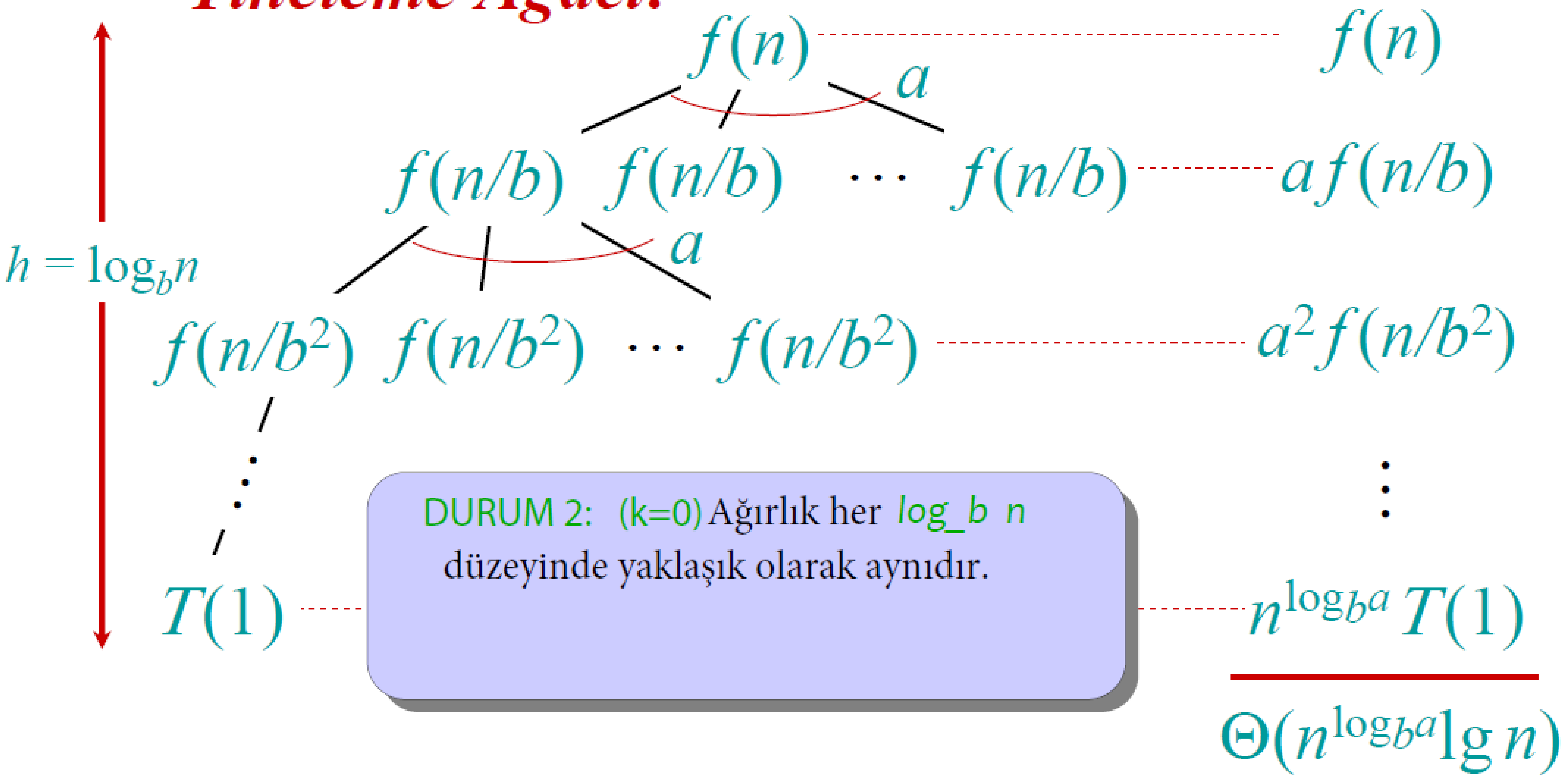
Master teoremdeki düşünce



DURUM 1: Ağırlık (weight) kökten yapraklara doğru geometrik olarak artar. Yapraklar toplam ağırlığın sabit bir oranını taşır.

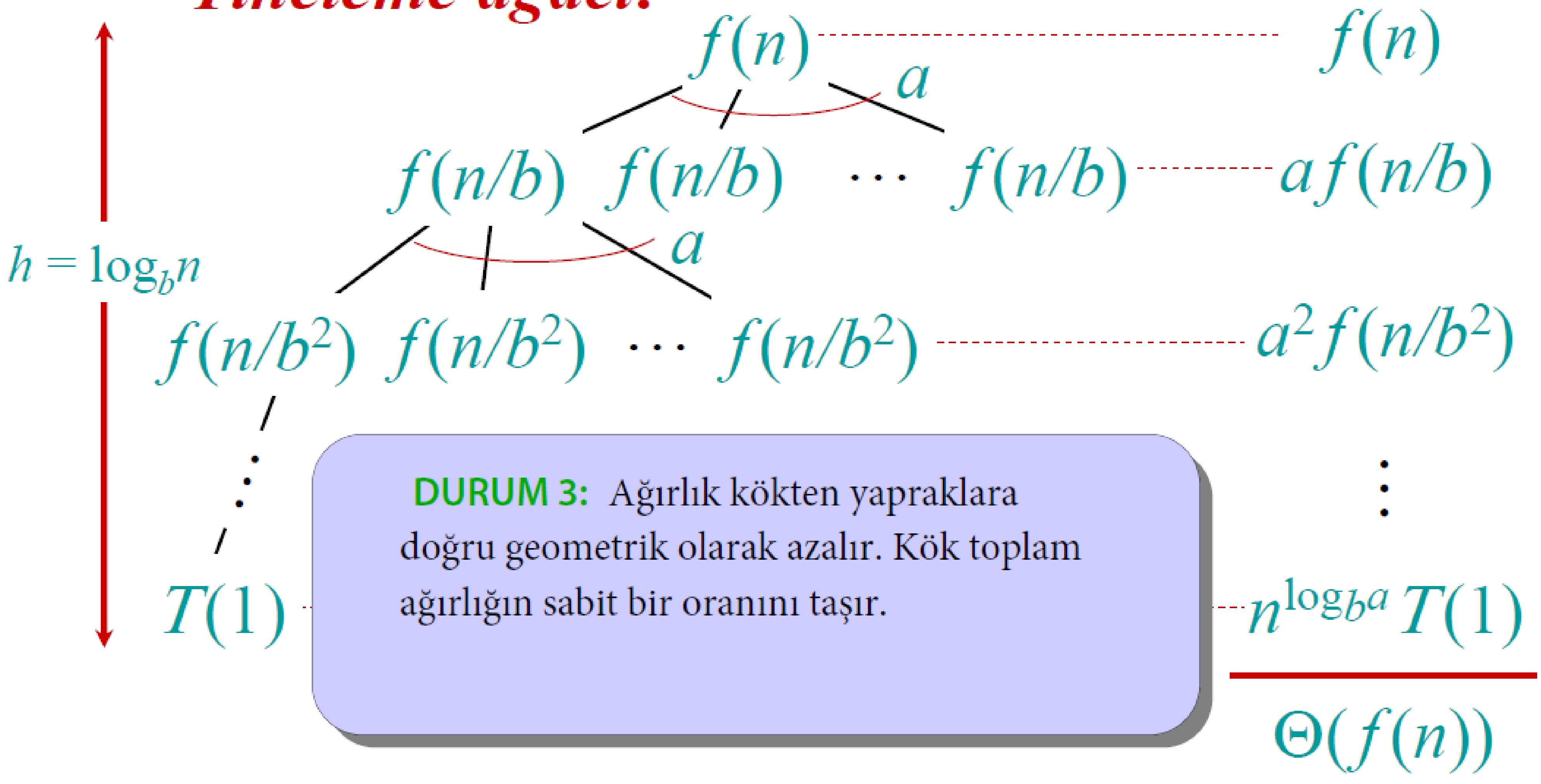
Master teoremdeki düşünce

Yineleme Ağacı:



Master teoremdeki düşünce

Yineleme ağacı:



DURUM 3: Ağırlık kökten yapraklara doğru geometrik olarak azalır. Kök toplam ağırlığın sabit bir oranını taşır.

Böl ve hükmet tasarım paradigması

1. Problemi (anlık durumu) alt problemlere **böl**.
2. Alt problemleri özyinelemeli olarak çözüp, onları **fethet**.
3. Alt problem çözümlerini **birleştir**.

Örnek: Birleştirme sıralaması (Merge Sort)

1. ***Bölmek:*** Kolay.
2. ***Hükmetmek:*** 2 altdizilimi özyinelemeli sıralama.
3. ***Birleştirmek:*** Doğrusal-zamanda birleştirme.

$$T(n) = 2\,T(n/2) + \Theta(n)$$

altproblem sayısı

altproblem boyutu

bölme ve birleştirme işi

İkili arama (Binary Search)

- Sıralı dizilimin bir elemanını bulma:

1. ***Böl:*** Orta elemanı belirle.
2. ***Hükmet:*** 1 altdizilimde özyinelemeli arama yap.
3. ***Birleştir:*** Kolay.

İkili arama

Sıralı dizilimin bir elemanını bulma:

1. Böl: Orta elemanı belirle.

2. Hükmet: 1altdizilimde özyinelemeli arama yap.

3.Birleştir: Kolay.

Örnek: 9' u bul.

3	5	7	8	9	12	15

İkili arama

Sıralı dizilimin bir elemanını bulma:

1. ***Böl:*** Orta elemanı belirle.
2. ***Hükmet:*** 1altdizilimde özyinelemeli arama yap.
3. ***Birleştir:*** Kolay.

Örnek: 9'u bul.

3	5	7	8	9	12	15

İkili arama

3	5	7	8	9	12	15
3	5	7	8	9	12	15
3	5	7	8	9	12	15
3	5	7	8	9	12	15

İkili arama için yineleme

$$T(n) = 1\,T(n/2) + \Theta(1)$$

altproblem sayısı

altproblem boyutu

bölme ve birleştime işi

İkili arama için yineleme (Master Metot)

$$T(n) = 1\,T(n/2) + \Theta(1)$$

altproblem sayısı

altproblem boyutu

bölme ve birleştime işi

f(n)=1

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = n^0 = 1 \Rightarrow \text{DURUM 2 } (k = 0)$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(\lg n)\,.$$

Bir sayının üstellenmesi

Problem: a^n 'yi $n \in \mathbb{N}$ iken hesaplama.

Saf (Naive) algorithm: $\Theta(n)$.

* Birleştirme işlemi, 1 veya 2 çarpma yapmaktır.
Buda sabit bir zamandır.

Böl-ve-fethet algoritması:

$$a^n = \begin{cases} a^{n/2} \cdot a^{n/2} & n \text{ çift sayıysa;} \\ a^{(n-1)/2} \cdot a^{(n-1)/2} \cdot a & n \text{ tek sayıysa.} \end{cases}$$

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1) \;\Rightarrow\; T(n) = \Theta(\lg n)\,.$$

Matrislerde çarpma
Standart algoritma

for $i \leftarrow 1$ **to** n *(i 1'den n'ye kadar)*

do for $j \leftarrow 1$ **to** n *(j 1'den n'ye kadar)*

do $c_{ij} \leftarrow 0$

for $k \leftarrow 1$ **to** n

do $c_{ij} \leftarrow c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$

Koşma süresi $= \Theta(n^3)$

Böl-ve-fethet algoritması

FİKİR:

$n \times n$ matris = $(n/2)\times(n/2)$ altmatrisin 2×2 matrisi:

$$\left[\begin{array}{c|c} r & s \\ \hline t & u \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} e & f \\ \hline g & h \end{array}\right]$$

$$C = A \cdot B$$

$$\left.\begin{aligned} r &= ae + bg \\ s &= af + bh \\ t &= ce + dh \\ u &= cf + dg \end{aligned}\right\}$$

recursive (özyinelemeli)

8 çarpma $(n/2)\times(n/2)$ altmatriste,

4 toplama $(n/2)\times(n/2)$ altmatriste.

- Elimizde 8 tane (n/2) × (n/2) boyutlu küçük matris oldu. **Sonucu bulmak için özyinelemeli çarpım yapıyoruz.**
- (n/2) × (n/2) boyutlu küçük matrisleri topluyoruz.
- **Herhangi iki matrisi toplamak için gerekli süre n^2 dir.**
- **Not: Matrisler 2'nin katı değilse 0 ile tamamlanır.**

Böl ve fethet algoritması

$$T(n) = 8\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

altmatris sayısı

altmatris boyutu

altmatrisleri toplama işi

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 8} = n^3 \Rightarrow \text{DURUM 1} \Rightarrow T(n) = \Theta(n^3)$$

Master teoremine göre

Sıradan algoritmadan daha iyi değil.

Strassen Yöntemi

$$T(n) = 8\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

- Toplam ... *a*
  işlemin...
  dayanm...
- A ve B ... -
  kullana...

```
                        [ 2  3  4  0 ]
[ 2  3  4 ]    ===>     [ 1  5  7  0 ]
[ 1  5  7 ]    ===>     [ 0  0  0  0 ]
                        [ 0  0  0  0 ]
```

Strassen Yöntemi

- **2×2 matrisleri yalnız 7 özyinelemeli çarpmayla çözülmesi:**

- $P_1 = a \cdot (f - h)$
- $P_2 = (a + b) \cdot h$
- $P_3 = (c + d) \cdot e$
- $P_4 = d \cdot (g - e)$
- $P_5 = (a + d) \cdot (e + h)$
- $P_6 = (b - d) \cdot (g + h)$
- $P_7 = (a - c) \cdot (e + f)$

$$r = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$$
$$s = P_1 + P_2$$
$$t = P_3 + P_4$$
$$u = P_5 + P_1 - P_3 - P_7$$

Toplama işlemi sıra bağımsızdır. Çarpma işleminde sıra bağımsızlık yoktur. 7 çarpma, 18 toplama /çıkarma işlemi

Strassen Yöntemi

2×2 matrisleri yalnız 7 özyinelemeli çarpmayla çözülmesi:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= a \cdot (f - h) \\
P_2 &= (a + b) \cdot h \\
P_3 &= (c + d) \cdot e \\
P_4 &= d \cdot (g - e) \\
P_5 &= (a + d) \cdot (e + h) \\
P_6 &= (b - d) \cdot (g + h) \\
P_7 &= (a - c) \cdot (e + f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= P_5 + P_4 - P_2 + P_6 \\
&= (a + d)(e + h) \\
&\quad + d(g - e) - (a + b)h \\
&\quad + (b - d)(g + h) \\
&= ae + ah + de + dh \\
&\quad + dg - de - ah - bh \\
&\quad + bg + bh - dg - dh \\
&= ae + bg
\end{aligned}
$$

Strassen Algoritması

1. ***Böl:*** A ve B'yi $(n/2)\times(n/2)$ altmatrislere böl. $+$ ve $-$ kullanarak çarpılabilecek terimler oluştur.
2. ***Fethet:*** $(n/2)\times(n/2)$ altmatrislerde özyinelemeli 7 çarpma yap.
3. ***Birleştir:*** $+$ve $-$ kullanarak $(n/2)\times(n/2)$ altmatrislerde C 'yi oluştur.

$$T(n) = 7\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

Strassen Algoritması

$$T(n) = 7\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 7} \approx n^{2.81} \;\Rightarrow\; \text{CASE 1} \;\Rightarrow\; T(n) = \Theta(n^{\lg 7})$$

2.81 değeri 3' den çok küçük görünmeyebilir ama, fark üstelde olduğu için, yürütüm süresine etkisi kayda değerdir. Aslında, $n \geq 32$ değerlerinde Strassen'in algoritması günün makinelerinde normal algoritmadan daha hızlı çalışır.

Bugünün en iyi değeri (teorik merak açısından): $\Theta(n^{2.376\cdots})$.

Kaynakça

- Algoritmalar : Prof. Dr. Vasif NABİYEV, Seçkin Yayıncılık
- Algoritmalara Giriş : Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest and Clifford Stein, Palme YAYINCILIK
- Algoritmalar : Robert Sedgewick , Kevin Wayne, Nobel Akademik Yayıncılık
- M.Ali Akcayol, Gazi Üniversitesi, Algoritma Analizi Ders Notları
- Doç. Dr. Erkan TANYILDIZI, Fırat Üniversitesi, Algoritma Analizi Ders Notları