Cauchy- Euler Diferensiyel Denklemi

2 Aralık 2021 Perşembe 14:15

Cauchy-
Euler...

Cauchy-Euler ve Legendre Denklemi

Değişken katsayılı diferansiyel denklemler, diferansiyel denklemlerin özel bir sınıfını oluştururlar. Ancak, elemanter (basit) anlamda, bu denklemlerin genel bir teorisini kurmak mümkün olamamıştır. Ne var ki bu tür denklemlerden bazı özel türler elemanter olarak incelenebilmektedir. Ayrıca bazı yöntemler geliştirilerek, sınırlıda olsa, birçok denklemin çözülmesinde, belirli şartlar yerine gelmediği takdirde, başarılı olunabilmektedir. Bunların dışında elemanter olmayan yöntemlerden yararlanılmaktadır.

n. mertebeden lineer bir diferansiyel denklem;

$$b_n(x)y^{(n)}+b_{n-1}(x)y^{(n-1)}+b_{n-2}(x)y^{(n-2)}+\ldots+b_2(x)y''+b_1(x)y'+b_0(x)y=g(x) \qquad (1)$$

biçiminde yazılabilen bir denklemdir. Burada $b_j(x)$; $(j=n,n-1,...,2,1,0)$ katsayıları ve $g(x)$ fonksiyonu bir (a,b) aralığında x in sürekli ve tek değerli $b_n(x)$ fonksiyonları farzedilecektir. $g(x)$=0 olması halinde (1) denklemine HOMOJEN VEYA İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DENKLEM denir.

$b_n(x) \neq 0$ olmak üzere;

$$y^{(n)}+\frac{b_{n-1}(x)}{b_n(x)}y^{(n-1)}+\frac{b_{n-2}(x)}{b_n(x)}y^{(n-2)}+......+\frac{b_2(x)}{b_n(x)}y''\frac{b_1(x)}{b_n(x)}y'+\frac{b_0(x)}{b_n(x)}y=\frac{g(x)}{b_n(x)}$$ biçiminde

yazılırsa ve

$$,\ldots,\frac{b_2(x)}{b_n(x)}=a_2(x),\frac{b_1(x)}{b_n(x)}=a_1(x),\frac{b_0(x)}{b_n(x)}=a_0(x),\frac{g(x)}{b_n(x)}=f(x)$$ şeklinde düşünülerek

(1.1) denklemi

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)\,y^{(n-2)} + \dots\dots\dots + a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x) \qquad (2)$$

şekline girer. (2) denkleminde değişken katsayılı bir diferansiyel denklemin başka bir şeklidir.

Değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin bazı özel denklemleri vardır. Bunlar Cauchy (Euler) lineer diferansiyel denklemi ve Legendre lineer diferansiyel denklemidir. Bu denklemlerden kısaca söz edelim.

Cauchy(Euler) Lineer Diferansiyel Denklemi

$a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ sabitler olmak üzere,

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = q(x) \qquad (3)$$

biçimindeki denklemlere denir. $a_n = 1$ alınması halinde;

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = q(x) \qquad (4)$$

Euler diferansiyel denklemi denildiğini de görebilmekteyiz. Bu denklemler basit bir dönüşümle sabit katsayılı denklemlere dönüşürler. Önce 2. mertebeden bir denklem alalım:

$$* \boxed{x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = q(x)} \qquad (5)$$

bu denklemde $x = e^t$ dönüşümü yapılırsa $t = \ln x$ olur. Buradan gerekli türevlere geçilirse;

$y(x(t)) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ *

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \longrightarrow \frac{d^2t}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$

$y(t(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ *

, $\frac{d}{dt} = D$

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = D.y \cdot \frac{1}{x}$

$\boxed{x \frac{dy}{dx} = Dy}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}\right)\right] \frac{dt}{dx}$

$= \left[\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{dy}{dt} \cdot \left(\frac{d}{\cancel{dt}} \cdot \frac{\cancel{dt}}{dx}\right)\right] \frac{dt}{dx}$

$= \left[\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{dy}{dt} \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)\right] \frac{dt}{dx}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\right)\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2t}{dx^2}$

$= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$

bulunur. Böylece (5) denklemi sabit katsayılı;

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (a_1 - 1)\frac{dy}{dt} + a_0 y = f(e^t)$$

denklemine dönüşür. Bu özellik (3) ve (4) içinde mevcuttur. Gerçekten;

$$x^n \frac{d}{dx^n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)............\left(\frac{d}{dt} - n + 2\right)\left(\frac{d}{dt} - n + 1\right)$$

$* \; x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$

$= D^2y - Dy$

$= (D^2 - D)\, y$

$D = \frac{d}{dt}$

$x \frac{dy}{dx} = Dy$

$\boxed{x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)\, y}$

$= (D^2 - D)\,y$

$\boxed{x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)\,y}$

$x \frac{dy}{dx} = Dy$

$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)\,y$

$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)\,y$

$\vdots$

$x^n \frac{d^ny}{dx^n} = D(D-1)(D-2)\ldots(D-n+1)\,y$

dir. Bu formül $n=1,2$ için doğrudur. $n-1$ içinde doğruluğunu kabul edelim ve n için doğruluğunu ispat edelim. $n-1$ için;

$D(x+y) = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$

$$x^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left(\frac{d}{dt}-n+2\right)$$

dir. Bunu önce;

$\frac{d}{dt} = D$

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} = \frac{1}{x^{n-1}}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left(\frac{d}{dt}-n+2\right)$$

$Dy = \frac{dy}{dt}$

şeklinde yazalım ve iki tarafın türevini alalım.

$Dy^2 = \frac{dy^2}{dt}$

$D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ //

$Du = \frac{du}{dt}$

$D^2y = \frac{d^2y}{dt^2}$

$\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) \neq \frac{d^2y}{dt^2}$

$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

$$x^n\frac{d^n}{dx^n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left(\frac{d}{dt}-n+2\right)\left(\frac{d}{dt}-n+1\right)$$

elde edilir.Bu dönüşümden sonra (3) ve (4) denklemleri $\frac{d}{dt} = D$ olmak üzere,

$\left[a_nD(D-1)(D-2)\ldots\ldots\ldots(D-n+1) + a_{n-1}D(D-1)(D-2)\ldots\ldots\ldots(\mathrm{D-n+2}) + a_1D + a_0\right]y = q(e^t)$

veya $\left[\mathrm{D}(D-1)(\mathrm{D}-2)\ldots\ldots\ldots(D-n+1) + a_{n-1}D(D-1)(D-2)\ldots\ldots\ldots(\mathrm{D-n+2}) + a_1D + a_0\right]y = q(e^t)$

biçimine girer. Bu ise sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemdir. //

Örnek $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$ diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$x=e^t$, veya $t=\ln x$ $\qquad \frac{d}{dt}=D$

$x\frac{dy}{dx}=Dy$,

$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=D(D-1)y$

$D(D-1)y+Dy+y=0$

$(D^2-D+D+1)y=0$

$(D^2+1)y=0$

$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+y=0} \Rightarrow r^2+1=0$

$r=\mp i$, $\quad y_h=c_1\sin t+c_2\cos t$

$$\boxed{y=c_1\cdot\sin(\ln x)+c_2\cos(\ln x)}$$

Örnek $x^2y''-xy'+y=x\ln x$ diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$x=e^t$, veya $t=\ln x$ dönüşümü yapılır, $\frac{d}{dt}=D$ olmak üzere

$xy'=Dy$

$x^2y''=D(D-1)y$

$D(D-1)y-Dy+y=e^t.t$

$(D^2-D-D+1)y=te^t$

$(D^2-2D+1)y=te^t$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=te^t} \quad *$$

i) $y_h=?$

$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0$

$r^2-2r+1=0$

$(r-1)^2=0$, $r=1$ çift katlı

$$\boxed{y_h=c_1e^t+c_2te^t} \quad *$$

ii) $y_p=?$

$U.C=\{te^t, e^t\}$

$\tilde{U.C}=\{t^2e^t, te^t\}$

$\tilde{U.C}=\{t^3e^t, \cancel{t^2e^t}\}$

$y_p=At^3e^t$

$y'=A(3t^2e^t+t^3e^t)=Ae^t(t^3+3t^2)$

$y''=A.e^t(t^3+3t^2+3t^2+6t)$

$=Ae^t(t^3+6t^2+6t)$

$A\cancel{e^t}(\cancel{t^3}+\cancel{6t^2}+6t-\cancel{2t^3}-\cancel{6t^2}+\cancel{t^3})=t\cancel{e^t}$

$6At=t \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{6}}$

$$\boxed{y_p=\frac{1}{6}t^3e^t}$$

$y=y_h+y_p=c_1e^t+c_2te^t+\frac{1}{6}t^3e^t$

$y=e^t\left(c_1+tc_2+\frac{t^3}{6}\right)$

$$\boxed{y=x\left(c_1+c_2\ln x+\frac{\ln^3x}{6}\right)} \quad ***$$

Örnek $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x\frac{dy}{dx}-2y=3x+x^2\ln x$ diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$x=e^t$ veya $t=\ln x$ dönüşümü yapılırsa, $\frac{d}{dt}=D$ olmak üzere

$x\frac{dy}{dx}=Dy$

$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=D(D-1)y$

$x^3\frac{d^3y}{dx^3}=D(D-1)(D-2)y$

$[D(D-1)(D-2)+2D-2]y=3e^t+e^{2t}.t$

$[D(D^2-3D+2)+2D-2]y=3e^t+te^{2t}$

$[D^3-3D^2+2D+2D-2]y=3e^t+te^{2t}$

$$[D(D^2-3D+2)+2D-2]y=$$

$$[D^3-3D^2+2D+2D-2]y = 3e^t+te^{2t}$$

$$[D^3-3D^2+4D-2]y = 3e^t+te^{2t}$$

$$\boxed{y'''-3y''+4y'-2y=3e^t+te^{2t}} \quad **$$

i) $y_h=?$

$$y'''-3y''+4y'-\cancel{2y}=0$$

$$r^3-3r^2+4r-2=0$$

$$1-3+4-2=0 \checkmark$$

± 1, ± 2

$$\begin{array}{l|l} r^3-3r^2+4r-2 & r-1 \\ \hline r^3-r^2 & r^2-2r+2 \\ \hline -2r^2+4r-2 & \\ -2r^2+2r & \\ \hline 2r-2 & \\ 2r-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$r^3-3r^2+4r-2=(r-1)(r^2-2r+2)$$

$r_1=1$

$$\Delta=b^2-4ac = 4-4\cdot1\cdot2 = -4<0$$

$$r_{2,3}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\mp 2i}{2} = 1\mp i$$

$$\boxed{y_h=c_1e^t+e^t(c_2\sin t+c_2\cos t)}$$

ii) $y_p=?$

$$U.C=\{e^t, te^{2t}, e^{2t}\}$$

$$\widetilde{UC}=\{te^t, te^{2t}, e^{2t}\}$$

$$y_p=Ate^t+Bte^{2t}+Ce^{2t}$$

ÖDEV

$A, B, C=?$

$$y=y_h+y_p$$

Legendre Diferansiyel Denklemi

Euler diferansiyel denkleminin benzeri özelliğinde ve aynı şekilde değerlendirilen, değişken katsayılı bir diferansiyel denklem türüdür. Bir önceki alt bölümde incelediğimiz Euler diferansiyel denkleminde, her terimde, türev mertebesine eşit bir x çarpanı bulunurken, Legendre diferansiyel denkleminde, x yerine α ve β sabitler olmak üzere, $(\alpha x+\beta)$ gibi x in birinci dereceden aynı bir çokterimlisinin kuvvetleri bulunmaktadır. Buna göre $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ sabit katsayılar olmak üzere, Legendre diferansiyel denklemi,

$$(\alpha x+\beta)^n \frac{d^n y}{dx^n}+a_1(\alpha x+\beta)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+a_{n-1}(\alpha x+\beta)\frac{dy}{dx}+a_n y=f(x)$$

yapısındadır. Buradan $\boxed{\alpha x+\beta=e^t}$ dönüşümü yapılmak suretiyle, sabit katsayılı bir diferansiyel denkleme ulaşılacaktır. $D=\dfrac{d}{dt}$ olmak üzere, aşağıdaki işlemleri gerçekleştirelim.

$$\left\{\begin{array}{l}(\alpha x+\beta)\dfrac{dy}{dx} = \alpha Dy \\ (\alpha x+\beta)^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = \alpha^2 D(D-1)y \\ (\alpha x+\beta)^3\dfrac{d^3y}{dx^3} = \alpha^3 D(D-1)(D-2)y \\ \vdots\end{array}\right.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\alpha e^{-t}\frac{dy}{dt}=\alpha e^{-t}Dy$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\alpha e^{-t}\frac{d}{dt}(\alpha e^{-t}\frac{dy}{dt})=\alpha e^{-t}\{-\alpha e^{-t}\frac{dy}{dt}+\alpha e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\}$$

$$=\alpha^2e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})=\alpha^2e^{-2t}(D^2-D)\,\mathrm{y}=\alpha^2e^{-2t}D(D-1)\,\mathrm{y}$$

…………………………………………………………………........

…………………………………………………………………

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\alpha^n e^{-nt}.D(D-1)(D-2).....(D-n+1)y$$

olur. Bu şekilde hesaplanan türevlerle, diferansiyel denkleme gidilirse,

$$e^{nt}.\alpha^n e^{-nt} D(D-1).....(D-n+1)y+......+a_{n-1}e^t \alpha e^{-t} Dy + a_n y = f(\frac{e^t-\beta}{\alpha})$$

ve her terimde $e^{nt}e^{-nt}=1$ olacağından,

$$F(D)\,\mathrm{y} = f(\frac{e^t-\beta}{\alpha})$$

şeklinde bir denklem elde edilecektir. Bu sabit katsayılı, n. mertebeden ikinci taraflı bir denklem olup, çözülürse

$$y=\phi(t,c_1,c_2...c_n)$$

şeklinde bir fonksiyon bulunacaktır.

$$\alpha x+\beta = e^t \qquad \rightarrow \qquad t = In(\alpha x+\beta)$$

olacağından, Legendre diferansiyel denkleminin genel çözümü,

$$y=\phi\{In(\alpha x+\beta),c_1,c_2,....c_n\}$$

olur.[2]

Örnek $(1+2x)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2(1+2x)\dfrac{dy}{dx}-12y=3x+1$

diferensiyel denklemini çözünüz.

$2x+1=e^t$, $t=\ln(2x+1)$ $\qquad x=\dfrac{e^t-1}{2}$

$(1+2x)\dfrac{dy}{dx}=2Dy$

$(1+2x)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}=4D(D-1)y$

$\left(4D(D-1)-2.2D-12\right)y=\dfrac{3}{2}(e^t-1)+1$

$\left(4D^2-4D-4D-12\right)y=\dfrac{3}{2}e^t-\dfrac{1}{2}$

$4(y''-2y'-3y)=\dfrac{3}{2}e^t-\dfrac{1}{2}$

$$\boxed{y''-2y'-3y=\frac{3}{8}e^t-\frac{1}{8}}$$

i) $y_h=?$

$y''-2y'-3y=0$

$r^2-2r-3=0$

$(r-3)(r+1)=0$

$r_1=3,\quad r_2=-1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y_h=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}}$

ii) $y_p=?$

$U.C=\{e^t,1\}$

$y_p=Ae^t+B$

$y'=Ae^t$

$y''=Ae^t$

$Ae^t-2Ae^t-3Ae^t-3B=\dfrac{3}{8}e^t-\dfrac{1}{8}$

$-4A=\dfrac{3}{8}\Rightarrow\boxed{A=-\dfrac{3}{32}}$ $\qquad -3B=-\dfrac{1}{8}$ $\quad\boxed{B=\dfrac{1}{24}}$

$$\boxed{y_p=-\frac{3}{32}e^t+\frac{1}{24}}$$

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{3}{32} e^{t} + \frac{1}{24}$$

$$\boxed{y = c_1 \cdot (2x+1)^3 + \frac{c_2}{2x+1} - \frac{3}{32}(2x+1) + \frac{1}{24}}$$ +1