



Diferensiyel Denklem Sistemleri (Devamı)

ii) Karakteristik Denklemin Karmaşık Kökleri Varsa

Bu durumda karmaşık köklerin eşleniklerinin de kök olduğu göz önünde tutulmalıdır. Yani $\lambda_1 = a + ib$ kök ise $\lambda_2 = a - ib$ de köktür.

Örneğin ikinci mertebe bir sistemin $\lambda_1 = a + ib$ ve $\lambda_2 = a - ib$ karmaşık kökleri olsun;

$$y_1 = \alpha_1 e^{(a+ib)x}, y_2 = \alpha_2 e^{(a+ib)x}, y_1 = \beta_1 e^{(a-ib)x}, y_2 = \beta_2 e^{(a-ib)x}$$

çözüm takımını oluşturacaktır. Bunlar ilgili sistemde yerine yazılırsa

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha_1 (a + ib) e^{(a+ib)x}, \frac{dy_2}{dx} = \alpha_2 (a + ib) e^{(a+ib)x}, (\lambda_1 = a + ib)$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \beta_1 (a - ib) e^{(a-ib)x}, \frac{dy_2}{dx} = \beta_2 (a - ib) e^{(a-ib)x}, (\lambda_2 = a - ib)$$

olur. Euler eşitliğinden

$$e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx$$

$$e^{-ibx} = \cos bx - i \sin bx$$

olacağından

$$y_1 = \alpha_1 e^{\alpha x} [\cos bx + i \sin bx] \rightarrow y_2 = \alpha_2 e^{\alpha x} [\cos bx + i \sin bx]$$

$$y_1 = \beta_1 e^{\alpha x} [\cos bx - i \sin bx] \rightarrow y_2 = \beta_2 e^{\alpha x} [\cos bx - i \sin bx]$$

olur. Bütün bunları

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$$

sisteminde yerine koyalım. Buradaki $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ katsayıları karmaşıkta olabilirler. Çözümün reel kısmı, bir çözüm karmaşık kısmı ise diğer bir çözümdür.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_{11} + i\alpha_{12} & \beta_1 &= \beta_{11} + i\beta_{12} \\ \alpha_2 &= \alpha_{21} + i\alpha_{22} & \beta_2 &= \beta_{21} + i\beta_{22}\end{aligned}$$

olduğu düşünülürse,

$$\begin{aligned}
 y_1 &= [(\alpha_{11} \cos bx - \alpha_{12} \sin bx) + i(\alpha_{12} \cos bx + \alpha_{11} \sin bx)] e^{ax} \\
 y_2 &= [(\alpha_{21} \cos bx - \alpha_{22} \sin bx) + i(\alpha_{22} \cos bx + \alpha_{21} \sin bx)] e^{ax} \\
 y_1 &= [(\beta_{11} \cos bx - \beta_{12} \sin bx) + i(\beta_{12} \cos bx + \beta_{11} \sin bx)] e^{ax} \\
 y_2 &= [(\beta_{21} \cos bx - \beta_{22} \sin bx) + i(\beta_{22} \cos bx + \beta_{21} \sin bx)] e^{ax}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu çözümlelerin real ve karmaşık kısımlarının birer çözüm olacağı bilindiğine göre,

$$\begin{aligned}
 y_1 &= (\alpha_{11} + \beta_{11}) \cos bx - (\alpha_{12} + \beta_{12}) \sin bx \\
 y_2 &= (\alpha_{12} + \beta_{12}) \cos bx + (\alpha_{11} + \beta_{11}) \sin bx
 \end{aligned}$$

bulunur.

$\lambda_2 = a - ib$ için sadece karmaşık kısım etkileneneden çözüm yine yukarıdaki ile aynı olacaktır.

Örnek
$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{array} \right\}$$
 denklem sistemini çözünüz.

Çözüm Sistemin karakteristik denklemi,

$$x = Ae^{xt}, \quad y = Be^{yt}, \quad \text{dankende yone fomula}$$

$$(3-\lambda)A - 2B = 0$$

olduğudur.

$$2A + (3-d)B = 0$$

olde editir.

$A_1, B_1 \neq 0$ qıyma dərəcələri əmən $\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$ olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 + 4 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \mp 4i}{2} = \underline{\underline{3 \mp 2i}}$$

$$\lambda = \underline{3+2i} \text{ ; given}$$

$$\left[\begin{array}{l} 3 - (3+2i) \\ 2A + [3 - (3+2i)]B \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} A - 2B = 0 \\ -2A - 2B = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -2A - 2B = 0 \\ 2A - 2B = 0 \end{array} \right\} \quad \left| \begin{array}{l} -2i - 2 \\ 2 - 2i \end{array} \right. \\ = 4i^2 + 4 \\ = \underline{\underline{-4+4}} = 0$$

- 二 -

二

$$\boxed{A=1}, \quad B=-i$$

$$x = 1 \cdot e^{(3+2i)t}, \quad y = (-i)e^{(3+2i)t}$$

$$x = e^{st} \cdot e^{2it} = e^{st} [\cos 2t + i \sin 2t] = \cancel{e^{st} \cos 2t + i \cancel{e^{st} \sin 2t}}$$

$$y = \underbrace{(-i)}_{= i} e^{3t} [\cos 2t + i \sin 2t] = e^{3t} [-i \cos 2t - i^2 \sin 2t] \\ = e^{3t} [\sin 2t - i \cos 2t]$$

$$= e^{3t} \sin 2t - i e^{3t} \cos 2t$$

Gorel Gözür

$$x = C_1 e^{3t} \cos 2t + C_2 e^{3t} \sin 2t = e^{3t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$$

$$y = c_1 e^{3t} \sin 2t - c_2 e^{3t} \cos 2t = e^{3t} (c_1 \sin 2t - c_2 \cos 2t)$$

Örnek
$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 - y_2 \end{array} \right\}$$
 denklem sisteminin çözümü nedir?

Cözüm $y_1 = Ae^{\lambda x}$, $y_2 = Be^{\lambda x}$ alalım. İlgili değerler sistemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} -A\lambda e^{\lambda x} - Ae^{\lambda x} - Be^{\lambda x} &= 0 \\ -B\lambda e^{\lambda x} + 2Ae^{\lambda x} - Be^{\lambda x} &= 0 \end{aligned}$$

yazılır. Matris gösteriminden

$$\begin{bmatrix} -A(1+\lambda) & -B \\ 2A & -B(\lambda+1) \end{bmatrix} = 0$$

olması gerektiğini biliyoruz. Böylece

$$\begin{vmatrix} -(1+\lambda) & -1 \\ 2 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

karakteristik denklemi bulunur. Kökleri $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}i$, $\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}i$ dir.

$\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}i$ için

$$\begin{cases} -\sqrt{2}iA - B = 0 \\ 2A - \sqrt{2}iB = 0 \end{cases} \rightarrow B = -\sqrt{2}iA$$

olur.

$A = 1$, $B = -\sqrt{2}i$ bulunur. Buna göre,

$$y_1 = e^{(-1+\sqrt{2}i)x}, \quad y_2 = -\sqrt{2}ie^{(-1+\sqrt{2}i)x}$$

yazılır. Euler eşitliğinin yardımıyla

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(-1+\sqrt{2}i)x} \\ &= e^{-x} e^{\sqrt{2}ix} \\ &= e^{-x} (\cos \sqrt{2}x + i \sin \sqrt{2}x) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}y_2 &= -\sqrt{2}ie^{(-1+\sqrt{2}i)x} \\&= -\sqrt{2}ie^{-x}e^{\sqrt{2}ix} \\&= -e^{-x}\sqrt{2i}\left(\cos \cancel{\sqrt{2}x} + i \sin \sqrt{2}x\right) \\&= -e^{-x}\left(\sqrt{2}i \cos \sqrt{2}x - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x\right) \\&= e^{-x}\left(\sqrt{2} \sin \cancel{\sqrt{2}x} - \sqrt{2}i \cos \sqrt{2}x\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan genel çözüm reel ve imajiner kesimler kullanılarak

$$\begin{aligned}\textcolor{red}{*} y_1 &= \left(c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x\right)e^{-x} \\ \textcolor{red}{*} y_2 &= \left(c_1 \sin \sqrt{2}x - \sqrt{2}c_2 \cos \sqrt{2}x\right)e^{-x}\end{aligned}$$

bulunur. Bu çözümlerin lineer bağımsızlığını Wronskiyan determinantının sıfırdan farklı bir değer aldığıını görerek söyleyebiliriz.

Örnek
$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{array} \right\}$$
 denklem sistemini çözünüz.

Çözüm Bu denklem sisteminin karakteristik denklemi,

$$\begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0 \text{ olur.}$$

Bu denklemin sanal ve eşlenik kökleri $\lambda_1 = 3 + 3i, \lambda_2 = 3 - 3i$ bulunur. Önce bu köklerden birincisi göz önüne alındığında,

$x = Ae^{\lambda_1 t}, y = Be^{\lambda_1 t}$ denklem sisteminin bir çözümü olur. Burada A, B genel olarak kompleks sayılardır. Bu değerler denklem sisteminde yerlerine konulursa,

$$\lambda_1 A = 4A - 2B$$

$$\lambda_2 B = 5A + 2B$$

veya

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - 4)A + 2B &= 0 \\ -5A + (\lambda_1 - 2)B &= 0\end{aligned}$$

bulunur. $\lambda_1 = 3 + 3i$ değeri yerine konulursa,

$$\begin{aligned}(-1 + 3i)A + 2B &= 0 \\ -5A + (1 + 3i)B &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. “sıfır” çözüm takımından başka, $A = 2, B = 1 - 3i$ bulunur. Bu değerler yerine konulursa kompleks çözüm,

$$x = 2e^{(3+3i)t}, y = (1-3i)e^{(3+3i)t}$$

$$x = 2(\cos 3t + i \sin 3t) e^{3t}$$

$$y = [(\cos 3t + 3 \sin 3t) + i(-3 \cos 3t + \sin 3t)] e^{3t}$$

bulunur. Bu fonksiyon çifti, şüphesiz verilen denklem sisteminin bir kompleks çözümüdür. O zaman bu fonksiyonların real kısımları bir özel çözüm, sanal kısımları da ikinci bir özel çözümüdür. Öyleyse,

$$\begin{aligned} x &= 2(\cos 3t) e^{3t} & x &= 2(\sin 3t) e^{3t} \\ y &= (\cos 3t + 3 \sin 3t) e^{3t} & y &= (-3 \cos 3t + \sin 3t) e^{3t} \end{aligned}$$

sistemin birer çözümleridir. Bu fonksiyonların Wronskian'ı

$$W = \begin{vmatrix} 2 \cos 3t & 2 \sin 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t & -3 \cos 3t + \sin 3t \end{vmatrix} \neq 0 \text{ dır.}$$

Öyleyse bu fonksiyonlar aralarında lineer bağımsızdırlar. Buna göre genel çözüm,

$$x = 2(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) e^{3t}$$

$$y = [c_1(\cos 3t + 3 \sin 3t) + c_2(-3 \cos 3t + \sin 3t)] e^{3t}$$

bulunur.

iii) Karakteristik Denklemin Reel ve Birbirine Eşit Kökleri Varsa

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n$$

.

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n$$

sistemi için

$$\begin{bmatrix} a_{11}(x) - \lambda & a_{12}(x) & \dots & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) - \lambda & \dots & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & \dots & a_{nn}(x) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n p_n = 0$ karakteristik denkleminin bazı kökleri tekrarlı ve λ_1, k kat tekrarlı ise sistemin k tane çözümü,

$$\begin{aligned}y_{10} &= \alpha_1 e^{\lambda_1 x}, \quad y_{20} = \alpha_2 e^{\lambda_1 x}, \dots, \quad y_{n0} = \alpha_n e^{\lambda_1 x} \\y_{11} &= (\alpha_{11}x + a_{12})e^{\lambda_1 x}, \quad y_{21} = (\alpha_{21}x + a_{22})e^{\lambda_1 x}, \dots, \quad y_{n1} = (\alpha_{n1}x + a_{n2})e^{\lambda_1 x} \\&\dots \\y_{1k} &= (\alpha_{11}x^{k-1} + a_{12}x^{k-2} + \dots + a_{1k})e^{\lambda_1 x}, \quad y_{2k} = (\alpha_{21}x^{k-1} + a_{22}x^{k-2} + \dots + a_{2k})e^{\lambda_1 x}, \dots\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır.

Elde edilen çözümlerin lineer bağımsızlığı kontrol edilerek genel çözüme gidilmelidir.

Örnek * $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$ denklem sistemini çözünüz.

$$x = x(t) \\ y = y(t)$$

$$x = A e^{\lambda t}, \quad y = B e^{\lambda t} \quad \text{qidzim olun.}$$

$$(3-\lambda)A - B = 0 \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2 = ? \\ 4A + (-1-\lambda)B = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ (\lambda - 1)^2 = 0, \quad \underbrace{\lambda = 1, \text{ çift katlı}}$$

$$\lambda = 1 \text{ için}$$

$$\begin{cases} 2A - B = 0 \\ 4A - 2B = 0 \end{cases}$$

$$2A = B, \quad A = k, \quad k = 1 \text{ için}$$

$$A = 1, \quad B = 2$$

$$n = e^t, \quad y = 2e^t$$

$$x = (A_1 t + A_2) e^t, \quad y = (B_1 t + B_2) e^t$$

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y \quad \text{olduğundan qidzimler yerine yazılır.}$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x - y$$

$$A_1 e^t + (A_1 t + A_2) e^t = 3(A_1 t + A_2) e^t - (B_1 t + B_2) e^t$$

$$B_1 e^t + (B_1 t + B_2) e^t = 4(A_1 t + A_2) e^t - (B_1 t + B_2) e^t$$

$$A_1 + A_1 t + A_2 \xrightarrow{3} 3A_1 t + 3A_2 - B_1 t - B_2$$

$$B_1 + B_1 t + B_2 = 4A_1 t + 4A_2 - B_1 t - B_2$$

$$(2A_1 - B_1)t + 2A_2 - A_1 - B_2 = 0$$

$$(4A_1 - 2B_1)t + 4A_2 - 2B_2 - B_1 = 0$$

$$2A_1 - B_1 = 0$$

$$4A_1 - 2B_1 = 0$$

$$2A_1 = B_1$$

$$A_1 = k, \quad B_1 = 2k$$

$$k = 1, \quad \boxed{A_1 = 1, \quad B_1 = 2}$$

$$2A_2 - A_1 - B_2 = 0$$

$$4A_2 - 2B_2 - B_1 = 0$$

$$2A_2 - B_2 = k$$

$$4A_2 - 2B_2 = 2k$$

$$2A_2 - B_2 = 1$$

$$4A_2 - 2B_2 = 2$$

$$A_2 = \frac{1+B_2}{2}$$

$$B_2 = 1, \quad A_2 = \frac{1+B_2}{2}$$

$$k=1, \boxed{A_1=1}, \boxed{B_1=2}$$

$$\begin{cases} x = (A_1 t + A_2) e^t = (t+1) e^t \\ y = (B_1 t + B_2) e^t = (2t+1) e^t \end{cases}$$

$$B_2 = n_1, \quad A_2 = \frac{1+n}{2}$$
$$n=1, \boxed{B_2=1}, \boxed{A_2=1}$$

$$\begin{cases} u = c_1 e^t + c_2 (t+1) e^t \\ y = 2c_1 e^t + c_2 (2t+1) e^t \end{cases}$$

Örnek $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases}$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm Buradaki karakteristik denklem

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \text{ 'dir.}$$

Bu denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

bulunur. Buna göre

$$x = A e^{2t}, \quad y = B e^{2t}$$

bir çözümüdür. Bu değerler diferansiyel denklemde yerine yazılırsa

$$-A + B = 0$$

elde edilir. Buradan

$A = B = k$ elde edilir. k herhangi bir değer alabileceğinden $k = 1$ için $A = B = 1$ bulunur. O zaman

$$x = e^{2t} = y$$

çözümü elde edilir.

Diferansiyel denklem sisteminin ikinci özel çözümü,

$$x = (A_1 t + A_2) e^{2t}, \quad y = (B_1 t + B_2) e^{2t}$$

elde edilir. Bu değerler denklem sisteminde yerine konulduğunda,

elde edilir. Bu değerler denklem sisteminde yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned} A_1 + 2A_2 + 2A_1t &= (A_1 + B_1)t + A_2 + B_2 \\ B_1 + 2B_2 + 2B_1t &= (3B_1 - A_1)t - A_2 + 3B_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\left. \begin{aligned} A_1 - B_1 &= 0 \\ A_1 + A_2 - B_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ve

$$\begin{aligned} A_1 - B_1 &= 0 \\ B_1 - A_1 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

$$\begin{aligned} A_2 - B_2 &= -1 \\ A_2 - B_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 - A_1 &= 0 \\ B_1 + A_2 - B_2 &= 0 \\ \hline &= \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

denklem sistemleri elde edilir. Burada $A_1 = B_1 = k$ olduğundan, k 'nın "sıfır" dan farklı herhangi bir değeri için örneğin $k = 1$ için $A_1 = B_1 = 1$ elde edilir. $A_2 - B_2 = -1$ bağıntısında A_2 veya B_2 'den birisi "sıfır" olabilir. $A_2 = 0$ içi $B_2 = 1$ bulunur. Bu durumda diferansiyel denklem sistemini sağlayan bir çözüm,

$$x = te^{2t}, \quad y = (t+1)e^{2t}$$

bulunur. O zaman denklem sisteminin genel çözümü

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, \quad y = c_1 e^{2t} + c_2 (t+1) e^{2t} \quad \text{**}$$

elde edilir.

Örnek $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 5y \end{cases}$ sistemini çözünüz.

$$x = A_1 e^{\lambda t}, \quad y = B_1 e^{\lambda t}$$

$$\begin{cases} (-3-\lambda)A_1 + B_1 = 0 \\ -A_1 + (-5-\lambda)B_1 = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1, B_1 ? \\ \end{array} \right. \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 15 + 3\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 4)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -4 \text{ için}$$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ -A_1 - B_1 = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = -B_1, \quad A_1 = k_1, \quad B_1 = -k_1 \\ A_1 = 1, \quad B_1 = -1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\lambda = -4} \quad \text{gibi kötli}$$

$$x = (A_1 t + A_2) e^{-4t}, \quad y = (B_1 t + B_2) e^{-4t}$$

$$\frac{dx}{dt} = A_1 e^{-4t} - 4(A_1 t + A_2) e^{-4t}$$

$$\frac{dy}{dt} = B_1 e^{-4t} - 4(B_1 t + B_2) e^{-4t}$$

$$A_1 - 4(A_1 t + A_2) = -3(A_1 t + A_2) + (B_1 t + B_2)$$

$$B_1 - 4(B_1 t + B_2) = -(A_1 t + A_2) - 5(B_1 t + B_2)$$

$$* A_1 - 4A_1 t - 4A_2 = -3A_1 t - 3A_2 + B_1 t + B_2$$

$$B_1 - 4B_1 t - 4B_2 = -A_1 t - A_2 - 5B_1 t - 5B_2$$

$$(A_1 + B_1)t + (A_2 + B_2 - A_1) = 0$$

$$(-A_1 - B_1)t + (-A_2 - B_2 - B_1) = 0$$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ -A_1 - B_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 + B_2 - A_1 = 0 \\ -A_2 - B_2 - B_1 = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = -B_1$$

$$A_1 = k_1, \quad B_1 = -k$$

$$\lambda = 1, \quad \boxed{A_1 = 1, \quad B_1 = -1}$$

$$\begin{cases} A_2 + B_2 = 1 \\ -A_2 - B_2 = -1 \end{cases}$$

$$A_2 = 1 - B_2$$

$$A_2 = k_1, \quad B_2 = 1 - k$$

$$\boxed{A_2 = 2, \quad B_2 = -1}$$

$$\boxed{x = (t+2)e^{-4t}, \quad y = (-t-1)e^{-4t}}$$

$$x = c_1 e^{-4t} + c_2 (t+2) e^{-4t}$$

$$y = c_1 e^{-4t} + c_2 (-t-1) e^{-4t}$$