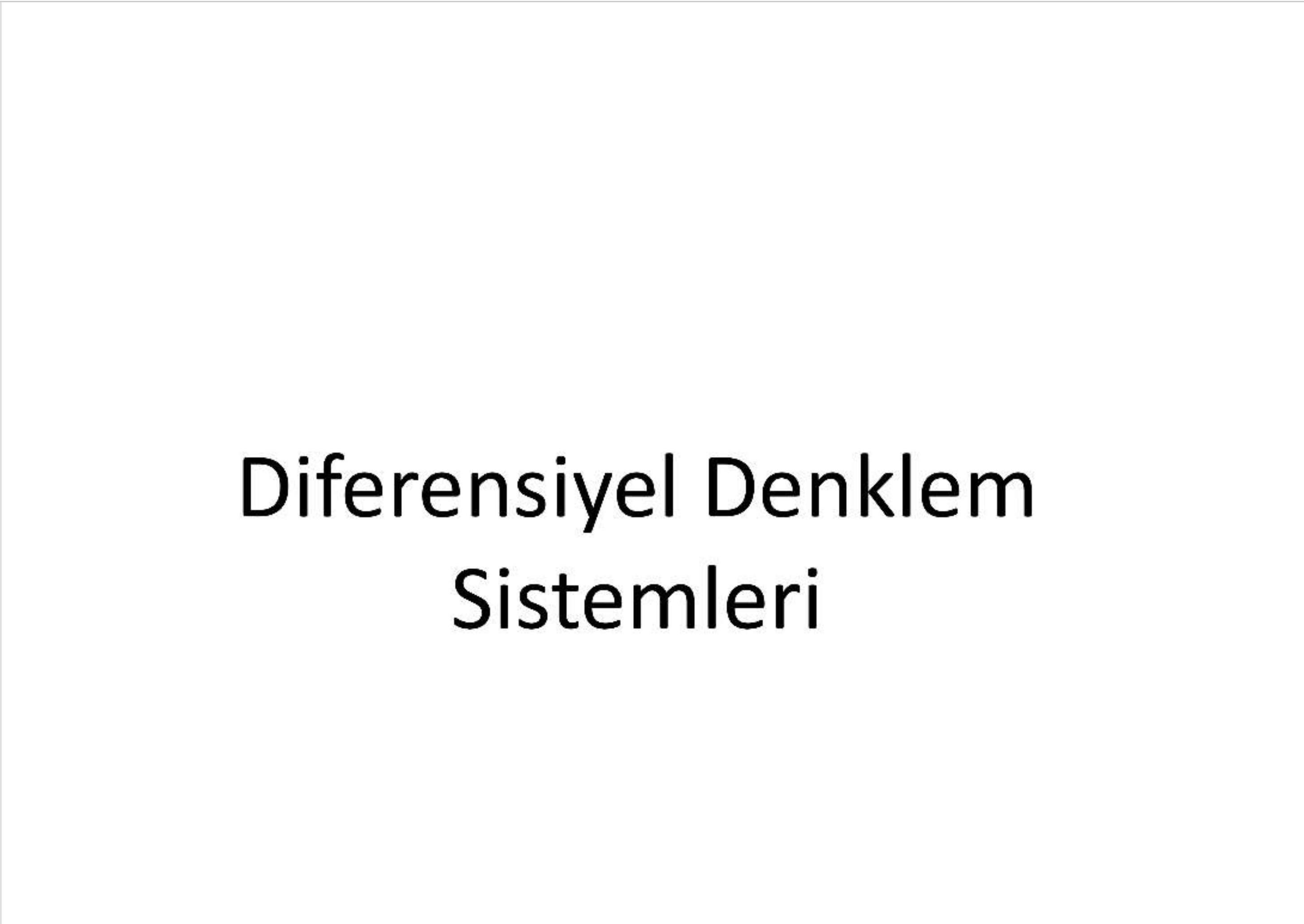
Diferensiyel Denklem Sistemleri 1

30 Aralık 2021 Perşembe 22:37

Diferensiyel
Denklem...



DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

x bağımsız değişkeninin y ve z gibi iki fonksiyonunu ihtiva eden

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z,y',z') &= 0 \\ G(x,y,z,y',z') &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$y, z = ?$

Av- Avcı

x y

$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \dots =$

şeklindeki birinci mertebeden bir diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Böyle bir sistemi çözmek, türev alınarak bu sistemi tek bir diferansiyel denkleme indirgemekle mümkün olmaktadır. Şöyle ki;

Verilen sistemde x' e göre türev alınırsa,

$2x+3y=6$
$6x-3y=4$

y, z

$$F_x + Fy\frac{dy}{dx} + F_z\frac{dz}{dx} + F_{y'}\frac{dy'}{dx} + F_{z'}\frac{dz'}{dx} = 0$$

$$G_x + Gy\frac{dy}{dx} + G_z\frac{dz}{dx} + G_{y'}\frac{dy'}{dx} + G_{z'}\frac{dz'}{dx} = 0$$

$$F_x + F_y y' + F_z z' + F_{y'} y'' + F_{z'} z'' = 0$$

$$G_x + G_y y' + G_z z' + G_{y'} y'' + G_{z'} z'' = 0$$

elde edilir. Böylece verilen denklem sistemi ile son denklemlerden z, z', z'' değerleri elimine edilerek ,

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

İkinci mertebeden bir diferansiyel denklem ele geçer. Bu denklem bilinen metotlarla çözülerek

$$f_1(x, y, C_1, C_2) = 0$$

veya

$$y = f_2(x, C_1, C_2)$$

genel integrali elde edilir. Buradan y ve y' bulunup verilen sistemde yerine konularak bu kez

$$F_1(x, z, C_1, C_2) = 0 \text{ veya } z = F_2(x, C_1, C_2)$$

bulunur.

ÖRNEK

$$y'' - 9y + z' + 3z = e^{x}$$

$$y' + y - z' = x$$

$z' = y' + y - x$, $z'' = y'' + y' - 1$

$y = y(x)$

$z = z(x)$

diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: Birinci denklemin x'e göre türevi alınarak ,

$$y''' - 9y' + z'' + 3z' = -e^{x}$$

bulunur. İkinci denklem ise 3 ile çarpılarak ,

$$3y' + 3y - 3z' = 3x$$

bulunur. Bu denklemler toplanarak ,

$$y''' - 6y + 3y + z'' = -e^{-x} + 3x$$

elde edilir.

$y'' - 9y' + z'' + \cancel{3z'} = -e^{-x}$

$3y' + 3y - 3\cancel{z'} = 3x$

$+$

$y''' - 9y' + z'' + 3y' + 3y = -e^{-x} + 3x$

$y''' - 9y' + y'' + y' - 1 + 3y' + 3y = -e^{-x} + 3x$

$\boxed{y''' + y'' - 5y' + 3y = -e^{-x} + 3x + 1}$

$$z'' = y'' + y' - 1$$

yazılarak,

$$y''' - 6y' + 3y + y'' + y' - 1 = -e^{-x} + 3x$$

veya

$$\boxed{y''' + y'' - 5y' + 3y = -e^{-x} + 3x + 1}$$

y = yh+yp

sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$$y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 e^{-3x} - \frac{1}{8} e^{-x} + x - 6$$

olarak bulunur. Bu değer,

$$\boxed{y' + y - z' = x}$$

z' = y' + y - x

denkleminde yerine yazılarak,

$$(2C_1 + C_2) e^{x} + 2C_2 x e^{x} - 2C_3 e^{-3x} + x - 5 - z' = x$$

veya

$$z' = \left(2C_1 + C_2 + 2C_2 x\right)e^x - 2C_3 e^{-3x} - 5$$

bulunur. Buradan da integral alınarak ,

$$z = 2C_1 xe^x + C_2 xe^x + 2C_2 xe^x - 2C_2 e^x + \frac{2C_3}{3} e^{-3x} - 5x + C_4$$

veya

$$z = \left(2C_1 + 3C_2\right)xe^x - 2C_2 e^x + \frac{2}{3} C_3 e^{-3x} - 5x + C_4$$

bulunur .O halde sistemin genel çözümü ,

$$\boxed{\begin{aligned} y &= C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3 e^{-3x} - \frac{1}{8} e^{-x} + x - 6 \\ z &= \left(2C_1 + 3C_2\right)xe^x - 2C_2 e^x + \frac{2}{3} C_3 e^{-3x} - 5x + C_4 \end{aligned}}$$

****

şeklinde elde edilir.

ÖRNEK

$$* \; y'' - z = 0 \longrightarrow y''' - z' = 0 \longrightarrow y^{IV} - z'' = 0$$
$$z'' - y = 0$$

diferansiyel denklem sisteminin $y(0)=0,\ y(\pi/2)=1,\ z(0)=0,\ z(\pi/2)=-1$ şartlarını sağlayan çözümünü bulunuz.

$$y^{(IV)} - z'' = 0$$
$$+ \quad z'' - y = 0$$
$$y^{(IV)} - y = 0$$

$r^4 - 1 = 0, \quad (r^2-1)(r^2+1) = 0, \quad r_{1,2} = \mp 1, \quad r_{2,3} = \mp i$

$$\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x} \; *$$

$z = y''$ old.dan .

$$y' = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - c_3 \sin x + c_4 \cos x$$
$$y'' = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$$

$$\boxed{z = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x} \; *$$

$y(0)=0 \Rightarrow \quad 0 = c_1 e^{-0} + c_2 e^{0} + c_3 \cos 0 + c_4 \sin 0$

$$\boxed{c_1 + c_2 + c_3 = 0}$$

$y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow \quad 1 = c_1 e^{-\pi/2} + c_2 e^{\pi/2} + c_3 \cos\frac{\pi}{2} + c_4 \sin\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{c_1 e^{-\pi/2} + c_2 e^{\pi/2} + c_4 = 1}$$

$z(0) = 0 \Rightarrow \quad 0 = c_1 e^{-0} + c_2 e^{0} - c_3 \cos 0 - c_4 \sin 0$

$$\boxed{c_1 + c_2 - c_3 = 0}$$

$z(\frac{\pi}{2}) = -1 \Rightarrow \quad -1 = c_1 e^{-\pi/2} + c_2 e^{\pi/2} - c_3 \cos\frac{\pi}{2} - c_4 \sin\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{c_1 e^{-\pi/2} + c_2 e^{\pi/2} - c_4 = -1}$$

$c_3 = 0$

$c_4 = 1$

$c_1 e^{-\pi/2} + c_2 e^{\pi/2} = 0$

$c_1 + c_2 = 0$

$$\boxed{c_1 = c_2 = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \sin x \\ z = -\sin x \end{array}\right\} \text{çözümüdür}$$

ÖRNEK

$$\left.\begin{aligned}(D^2-2)x-3y&=e^{2t}\\(D^2+2)y+x&=0\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}x&=x(t)\\y&=y(t)\end{aligned}\right\}$$

denklem sistemini çözünüz. $t=0$ iken $x=y=1$, $Dx=Dy=0$ şartlarını sağlayan özel çözümü bulunuz.

ÇÖZÜM: İlk denkleme D^2 operatörü uygulanırsa

$$D^{(4)}x-2D^{(2)}x-3D^{(2)}y=4e^{2t}$$

elde edilir. Ayrıca yine ilk denklemden

$$D^{(2)}x=2x+3y+e^{2t}$$

bulunur.

$$D^{(2)}y=-x-2y$$

ifadesi de ilk denklemde yerine yazılırsa

$$(D^4-1)x=6e^{2t}$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t + \frac{2}{5} e^{2t}$$

bulunur. Bulunan sonuç ilk denklemde yerine yazılırsa

$$y = \frac{1}{3}\left[\left(D^2 - 2\right)x - e^{2t}\right] = -\frac{1}{3}\left(C_1 e^t + C_2 e^{-t}\right) - \left(C_3 \cos t + C_4 \sin t\right) - \frac{1}{15} e^{2t}$$

elde edilir

ÖRNEK

$$3v' + 2v + w' - 6w = 5e^x$$

$$4v' + 2v + w' - 8w = 5e^x + 2x - 3$$

$$\left.\begin{array}{l} v = v(x) \\ w = w(x) \end{array}\right\} ?$$

sisteminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: Birinci denklemden ikinci denklem çıkartılarak,

$$-v' + 2w = 3 - 2x$$

bulunur. Bu denklemde türetilerek ,

$$-v'' + 2w' = -2$$

elde edilir. Böylece,

$$w = \frac{3}{2} - x + \frac{1}{2} v' \,;\; w' = -1 + \frac{1}{2} v''$$

konularak,

$$3v' + 2v - 1 + \frac{1}{2} v'' - 9 + 6x - 3v' = 5e^x \quad \text{veya} \quad \frac{1}{2} v'' + 2v = 5e^x + 10 - 6x$$

den ,

$$v'' + 4v = 10e^x + 20 - 12x$$

elde edilir. Bu denklemin genel çözümü ,

$$v = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2e^x - 3x + 5$$

olduğundan,

$$w = \frac{3}{2} - x + \frac{1}{2} v' \Rightarrow w = C_2 \cos 2x - C_1 \sin 2x + e^x - x$$

elde edilir.

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Bilinmeyen fonksiyonları birinci dereceden (lineer) olan bir normal sisteme **lineer diferansiyel denklem sistemi** denir. Bağımsız değişken x ve bağımlı değişken y olmak üzere;

$y_1, y_2, \dots, y_n$

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x)$$

.

.

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \qquad (1)$$

şeklinde yazılan n tane birinci mertebeden denklemden oluşan, n. mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemidir.

Sistem $\forall\, i$ için $b_i(x)=0$ ise homojen lineer diferansiyel denklem sistemi, en az bir i için $b_i(x)\neq 0$ ise homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sistemi adını alır.

$\forall i, j$ için $a_{ij}(x)$ ler sabit ise sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemi adını alır.

Verilen (1) denklem sisteminin matris ile ifadesi,

$$Y'=\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ . \\ . \\ . \\ y_n' \end{bmatrix}_{n\times 1},\ Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}_{n\times 1},\ A(X)=\begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & . & . & . & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & . & . & . & a_{2n}(x) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & . & . & . & a_{nn}(x) \end{bmatrix}_{n\times n} \text{ ve } B(x)=\begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ . \\ . \\ . \\ b_n(x) \end{bmatrix}_{n\times 1} \text{ olmak}$$

üzere

$$\boxed{Y' = A(x)Y + B(x)}$$

$$[\ \ ]_{n\times 1} + [\ \ ]_{n\times 1}$$

şeklindedir.

$y_1 = \phi_1(x)$, $y_2 = \phi_2(x)$, $y_3 = \phi_3(x)$, $\ldots$, $y_n = \phi_n(x)$ şeklindeki fonksiyonlardan oluşan $Y = \phi(\mathrm{x})$ vektörü sistemi sağlayan fonksiyonların vektörü olup, sistemin **çözüm vektörü** adını alır. n bilinmeyen fonksiyonlu birinci mertebeden lineer bir denklem sistemi n. mertebeden lineer bir diferansiyel denkleme dönüştürülerek çözülebilir. Bunun için sistemi oluşturan denklemlerde *(n-1)* kere uygun türev alınıp, sonuçta bir bilinmeyen fonksiyon hariç diğer fonksiyonlar yok edilirse bir bilinmeyen fonksiyonlu ve n. mertebeden lineer bir diferansiyel denklem oluşur. Bu denklemin çözümü, sistemin çözümünü elde etmemizi sağlar. Şimdi de bu söylediklerimize aşağıda ifade edelim:

$$y^{(n)} = -a_1(\mathrm{x})y^{(n-1)} - a_2(\mathrm{x})y^{(n-2)} - \ldots - a_n(\mathrm{x})y + f(\mathrm{x}) \qquad (2)$$

denklemini

$y'' = y_3$

$y = y_1$, $y' = y_2$, … , $y^{(n-1)} = y_n$ alarak bir sisteme dönüştürülerek

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2$$

$y' = y_2$, $y = y_1$

$\boxed{y_2 = y_1'}$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_3$$

.

.

.

$$\frac{dy_n}{dx} = -a_1(x)y_n - a_2(x)y_{(n-1)} - \ldots - a_n(x)y_1 + f(x) \qquad (3)$$

şeklindeki lineer sisteme ulaşılır. Bu sistemin katsayılar matrisi

$$A(X)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . \; . \; . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . \; . \; . & 0 \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ 0 & 0 & 0 & . \; . \; . & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & . \; . \; . & -a_1(x) \end{bmatrix}$$ ve kaynak vektörü

$$B(x)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ f(x) \end{bmatrix}$$ biçimindedir. (2) denkleminde $f(x)=0$ ise (3) sistemi homojen bir sistem;

sabit katsayılı ise (3) da sabit katsayılı bir sistem olur

HOMOJEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n$$

.

.

.

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n \qquad (4)$$

Şeklindeki sistemlerdir. Matrisel olarak $Y' = AY$ şeklindedir. $y_1^{(1)}(x), \mathrm{y}_2^{(1)}(x),,...,y_n^{(1)}(x)$ sistemi bir çözüm takımı ise bunların sabit katsayıları ve lineer kombinasyonları da sistemin çözümüdür. Sistemin bir diğer çözüm takımı $y_1^{(2)}(x), y_2^{(2)}(x),..., y_n^{(2)}(x)$ ise $y_1^{(1)}(x) + y_1^{(2)}(x),\ \mathrm{y}_2^{(1)}(x) + y_2^{(2)}(x),...,\mathrm{y}_n^{(1)}(x) + y_n^{(2)}(x)$ de bir çözüm takımıdır.

(4) sistemini n tane çözüm takımı $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, ..., y_n^{(1)}$

$$y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, ..., y_n^{(2)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, ..., y_n^{(n)}$$

olmak üzere,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & . & . & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & . & . & y_n^{(2)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & . & . & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

determinantı sistemin tanımlı olduğu (a,b) aralığında sıfıra eşit değilse bu n tane çözüm takımının oluşturduğu fonksiyon topluluğuna (4) sisteminin çözümlerinin **Temel Çözüm Takımı** denir.

W determinantına da çözümlerin **Wronskiyeni** adı verilir. Determinantın sıfırdan farklı olması gereği lineer bağımsızlığın gerçekleşmesini sağlamak içindir.

HOMOJEN OLMAYAN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x)$$

.

.

.

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x)$$

şeklindeki sistemlerdir. Bu tip sistemlerin çözümünde homojen olmayan lineer denklem çözümünde tanıtılan sabitlerin değişimi yöntemi kullanılabilir. Bu yönteme göre $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}$, $y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}$, … , $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}$ sistemin homojen kısmının bir temel çözüm takımı olmak üzere genel çözüm,

$$y_1 = c_1 y_1^{(1)} + c_2 y_1^{(2)} + ... + c_n y_1^{(n)}$$
$$y_2 = c_1 y_2^{(1)} + c_2 y_2^{(2)} + ... + c_n y_2^{(n)}$$

.

.

.

$$y_n = c_1 y_n^{(1)} + c_2 y_n^{(2)} + ... + c_n y_n^{(n)}$$

olur. Yukarıdaki sistemde $c_1, c_2, ..., c_n$ sabitleri $c_i(x), (c = 1, ..., n)$ düşünülerek homojen olmayan sistemdeki $b_i(x)(c = 1, ..., n)$ sağlayacak şeklilde $c_1, c_2, ..., c_n$ leri belirlemekle çözüme gidilir. Sonuç olarak diyebilriz ki; homojen olmayan lineeer denklem sisteminin genel çözümünü bulmak için ilgili homojen sistemin temel çözüm sistemini bulmak yeterlidir.

SABİT KATSAYILI HOMOJEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}(\cancel{x})y_1 + a_{12}(\cancel{x})y_2 + \ldots + a_{1n}(\cancel{x})y_n$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)\,y_1 + a_{22}(x)\,y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n$$

.

.

.

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n$$

biçiminde veya matris gösterimiyle $\frac{dy}{dx} = Ay$ şeklindedir. Burada,

$$\frac{dy}{dx}=\begin{vmatrix}\frac{dy_1}{dx}\\ \frac{dy_2}{dx}\\ .\\ .\\ .\\ \frac{dy_n}{dx}\end{vmatrix} \quad , \quad A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \quad , \quad y=\begin{vmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{vmatrix}$$ olarak alınmıştır.

Sistemin genel halde çözmeden önce $n=2$ özel halini inceleyelim:

$$\frac{dy_1}{dx}=a_{11}y_1+a_{12}y_2$$
$$\frac{dy_2}{dx}=a_{21}y_1+a_{22}y_2 \tag{5}$$

$\frac{dy_1}{dx}=\alpha_1 \lambda e^{\lambda x}$, $\frac{dy_2}{dx}=\alpha_2 \lambda e^{\lambda x}$

Bu sistemin çözümünü

$$\boxed{y_1(x)=\alpha_1 e^{\lambda x}, \quad y_2(x)=\alpha_2 e^{\lambda x}} \tag{6}$$

olsun

$\alpha_1=?$ $\alpha_2=?$, $\lambda=?$

veya vektörel notasyonla

$$y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{vmatrix} e^{\lambda x}$$

şeklinde arayalım. Burada α_1, α_2 ve λ bilinmeyen sabit sayılar olup α_1, α_2 sayılarının her ikisinin birden aynı zamanda sıfıra eşit olmadığı varsayılmaktadır.(6) ' daki ifadeleri (5)'te yerine koyup

$$\lambda \alpha_1 e^{\lambda x} = a_{11}\alpha_1 e^{\lambda x} + a_{12}\alpha_2 e^{\lambda x}$$
$$\lambda \alpha_2 e^{\lambda x} = a_{21}\alpha_1 e^{\lambda x} + a_{22}\alpha_2 e^{\lambda x}$$

$\Rightarrow [(a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2] e^{\lambda x} = 0$, $e^{\lambda x} \neq 0$

$[a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2] e^{\lambda x} = 0$

$e^{\lambda x}$ ile sadeleştirdikten sonra , α_1, α_2 ve λ için

$$(a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0$$
$$a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2 = 0 \qquad (7)$$

$\alpha_1, \alpha_2 = ?$

bağlantıları elde edilir. Bu denklemler vektörel notasyonla

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad A - \lambda I$ $\qquad \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix}$ $\qquad | \quad |$

$(A-\lambda I)\alpha = 0$ veya $A\alpha = \lambda\alpha$ şeklinde yazılabilir. Burada $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ konmuştur.(7) sisteminin α_1 ve α_2 'ye göre sıfırdan farklı çözümün olması için

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

veya

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{12})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \qquad (8)$$

koşulu sağlanmalıdır. Böylece, (6)'daki fonksiyonların (5) denklem sisteminin çözümü olması için , λ sayısının A matrisinin özdeğeri, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ vektörünün ise bu özdeğere karşı düşen öz vektör olması gerekmektedir.(8) denklemine (5) sisteminin **karakteristik denklemi** denir. Karakteristik denklemin köklerinin reel ve sanal olmalarına, reel olması halinde köklerin birbirinden farklı veya eşit oluşlarına göre üç ayrı durum vardır.

Karakteristik Değer Yöntemi

Karakteristik Kökler Reel ve Birbirinden Farklı İse

Bu durumda karakteristik denklemin farklı her kökü için lineer bağımsız bir çözüm takımı bulunacaktır.

Örneğin $\lambda = \lambda_1$ için $y_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = \alpha_2 e^{\lambda_1 x}, ..., y_n = \alpha_n e^{\lambda_1 x}$ şeklinde olacaktır.

$\lambda = \lambda_2$ için $y_1 = \beta_1 e^{\lambda_2 x}, y_2 = \beta_2 e^{\lambda_2 x}, ..., y_n = \beta_n e^{\lambda_2 x}$ şeklinde bulunur.

Ayrıca çözümlerin sabit katlarının lineer kombinasyonlarının da sistemin bir çözümüdür. Buna göre;

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= c_1\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + c_2\alpha_2 e^{\lambda_1 x} + ... + c_n\alpha_n e^{\lambda_1 x} \\
y_2(x) &= c_1\beta_1 e^{\lambda_2 x} + c_2\beta_2 e^{\lambda_2 x} + ... + c_n\beta_n e^{\lambda_2 x} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{genel çözümdür.} \\
y_n(x) &= c_1\mu_1 e^{\lambda_n x} + c_2\mu_2 e^{\lambda_n x} + ... + c_n\mu_n e^{\lambda_n x}
\end{aligned}$$

ÖRNEK $\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_1 + 4y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= 2y_1 + 3y_2\end{aligned}\right\}$ sisteminin genel çözümünü bulunuz. $y_1(t),\ y_2(t)$??

$y_1 = Ae^{\lambda t}, \quad y_2 = Be^{\lambda t}$ olsun , $A, B, \lambda = ?$

$\frac{dy_1}{dt} = A\lambda e^{\lambda t}, \quad \frac{dy_2}{dt} = B\lambda e^{\lambda t}$

$A\lambda e^{\lambda t} = Ae^{\lambda t} + 4Be^{\lambda t}$

$B\lambda e^{\lambda t} = 2Ae^{\lambda t} + 3Be^{\lambda t}$

$\Rightarrow \quad [(1-\lambda)A + 4B]e^{\lambda t} = 0 \quad , \quad e^{\lambda t} \neq 0$

$[2A + (3-\lambda)B]e^{\lambda t} = 0$

$$\text{**}\ \left.\begin{aligned}(1-\lambda)A + 4B &= 0 \\ 2A + (3-\lambda)B &= 0\end{aligned}\right\} \quad A, B = ?$$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ olmalıdır.

$(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$

$3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow (\lambda-5)(\lambda+1) = 0, \quad \boxed{\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -1}$ **

$-5 \quad 1$

$\lambda_1 = 5$ için

$$\left.\begin{aligned}-4A + 4B &= 0 \\ 2A - 2B &= 0\end{aligned}\right\} \quad A = B, \quad \begin{aligned}B &= k \\ A &= k\end{aligned} \quad , \quad k = 1 \text{ için} , \quad \boxed{A = 1,\ B = 1}$$

$$\boxed{y_1 = e^{5t}, \quad y_2 = e^{5t}}$$

$\lambda_2 = -1$ için

$$\left.\begin{aligned}2A + 4B &= 0 \\ 2A + 4B &= 0\end{aligned}\right\} \quad A = -2B, \quad \begin{aligned}B &= k \\ A &= -2k\end{aligned} \quad , \quad k = 1 \text{ için} \quad \boxed{A = -2,\ B = 1}$$

$$\boxed{y_1 = -2e^{-t}, \quad y_2 = e^{-t}}$$

Çözüm : $\boxed{\begin{aligned}y_1 &= c_1 e^{5t} - 2c_2 e^{-t} \\ y_2 &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}\end{aligned}}$ ***

ÖRNEK $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x + y \\ \frac{dy}{dt} &= 3x + 2y \end{aligned}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

$x(t),\ y(t) = ?$

ÇÖZÜM Bu denklem sisteminin bir çözümü $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$ olsun. Burada A, λ ve B bulunması gereken sabit sayılardır. x, y 'nin bu değerleri sistemde yerine konulursa ,

$$\begin{aligned} ***\quad \lambda A e^{\lambda t} &= 4Ae^{\lambda t} + Be^{\lambda t} \\ \lambda B e^{\lambda t} &= 3Ae^{\lambda t} + 2Be^{\lambda t} \end{aligned}$$

$e^{\lambda t} \neq 0$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} (4-\lambda)A + B &= 0 \\ 3A + (2-\lambda)B &= 0 \end{aligned}$$

$3A + B = 0$
$3A + B = 0$

olur. Burada $A = 0, B = 0$ bir çözümdür. A, B 'nin bu değerleri $x = 0, y = 0$ çözümünü verir. Amacımız bu 'sıfır' çözümünden farklı bir çözüm bulmaktır. Bunun için,

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

olmalıdır. Bu denklemin kökleri $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$ 'dir.

$\lambda_1 = 1$ için,

$$3A_1 + B_1 = 0$$

elde edilir. Bu sistemi sağlayan sonsuz sayıda çözüm takımı vardır. Bunlarda birisi, $A_1 = 1$ için $B_1 = -3$ olur. Bu durumda verilen diferansiyel denklem sisteminin bir çözümü ,

$x = e^t$, $y = -3e^t$ olur.

$\lambda_2 = 5$ için,

$$-A_2 + B_2 = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3-3=0 \checkmark$$

$$3A_2 - 3B_2 = 0$$

$A_2 = B_2$

elde edilir.

$$\boxed{A_2 = B_2 = 1}$$

bulunur. Böylece sistemin lineer bağımsız bir özel çözümü de $x = e^{5t}$, $y = e^{5t}$ bulunur. Sonuç olarak verilen diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü,

$$\boxed{\begin{aligned} x &= c_1 e^{t} + c_2 e^{5t} \\ y &= -3c_1 e^{t} + c_2 e^{5t} \end{aligned}}$$

olarak elde edilir.

ÖRNEK $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x \end{aligned}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM $x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t}$ bu sistemin bir özel çözümü olsun. Bu değerler denklem sisteminde yerine konulursa,

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)A - B = 0 \\ &-2A - \lambda B = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu sistemden aşağıdaki karakteristik denklem elde edilir.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Bu denklemin kökleri $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ bulunur.

$\lambda_1 = 2$ için,

$$\left.\begin{array}{l} -A_1 - B_1 = 0 \\ -2A_1 - 2B_1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A_1 = 1, B_1 = -1 \text{ olur.}$$

O zaman, verilen denklem sistemini sağlayan çözüm takımı, $x = e^{2t}$, $y = -e^{2t}$ elde edilir.

$\lambda_2 = -1$ için,

$$\left.\begin{array}{l} 2A_2 - B_2 = 0 \\ -2A_2 + B_2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A_2 = 1, B_2 = 2 \text{ olur.}$$

Buradan $x = e^{\ t}$, $y = 2e^{\ t}$ elde edilir. Bu durumda verilen denklem sisteminin genel çözümü,

$$\begin{array}{l} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\ y = -c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{\ t} \end{array} \quad \text{elde edilir.}$$

$\rightarrow y = y(x), \quad z = z(x)$

ÖRNEK $\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -3y + \sqrt{2}\,z \\ \frac{dz}{dx} &= \sqrt{2}y - 2z \end{aligned}\right\}$ sisteminin çözümü nedir?

ÇÖZÜM $y = \alpha_1 e^{\lambda x}$ ve $z = \alpha_2 e^{\lambda x}$ şeklindeki çözümlerini araştıralım:

Bunları ve türevlerini sistemde yerine taşır ve hepsi bir tarafta toplanırsa,

$$-\alpha_1 \lambda e^{\lambda x} - 3\alpha_1 e^{\lambda x} + \sqrt{2}\alpha_2 e^{\lambda x} = 0$$
$$-\alpha_2 \lambda e^{\lambda x} + \sqrt{2}\alpha_1 e^{\lambda x} - 2\alpha_2 e^{\lambda x} = 0$$

elde edilir.

Buna göre; $\begin{vmatrix} -3\alpha_1 - \alpha_1\lambda & \sqrt{2}\alpha_2 \\ \sqrt{2}\alpha_1 & -\alpha_2\lambda - 2\alpha_2 \end{vmatrix} = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $\begin{vmatrix} -3-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ olur.

Karakteristik denklem , $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ olur.

Karakteristik kökler, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$ olur.

$\lambda_1 = -1$ için α_1 ve α_2 katsayılarını belirleyelim.

$$-2\alpha_1 + \sqrt{2}\alpha_2 = 0 \quad \sqrt{2}\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

buradan da $\alpha_2 = \sqrt{2}\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 = \sqrt{2}$ ve $\alpha_1 = 1$ çözümün tabanıdır.

$\lambda_2 = -4$ için

$$\alpha_1 + \sqrt{2}\alpha_2 = 0 \quad \sqrt{2}\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \quad \alpha_1 = -\sqrt{2}\alpha_2 \text{ 'den}$$

$$\alpha_1 = -\sqrt{2}\,,\ \alpha_2 = 1$$

çözümün tabanıdır. Buna göre iki çözüm takımı vardır.

$$\left.\begin{aligned} y &= c_1 e^{-x} + \sqrt{2}c_2 e^{-4x} \\ z &= -\sqrt{2}c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x} \end{aligned}\right\}$$

sistemin genel çözümüdür.