




VI. HAFTA

6. Hafta

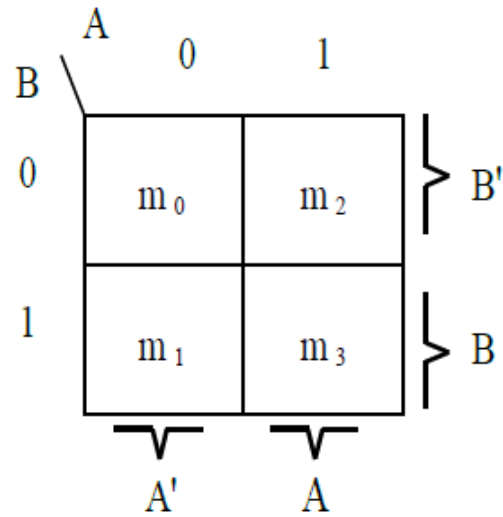
BÖLÜM 6: KARNAUGH HARİTASI



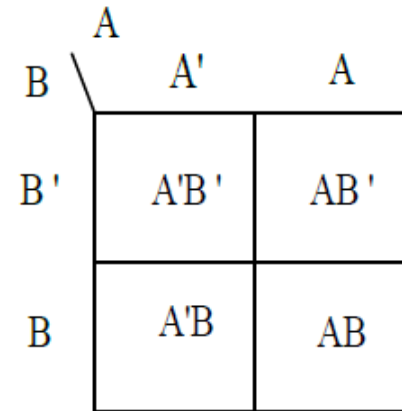
Devre tasarımında lojik eşitlikleri oluşturmak veya oluşturulan lojik eşitlikleri grafiksel olarak sadeleştirmek için yaygın olarak kullanılan yöntemler; **'Karnaugh Haritası'** (Karnaugh Maps) ve **'Quine-McCluskey'** yöntemleridir. Bu bölümde Karnaugh haritası yöntemini açıklayacağız.

'Karnaugh haritası' (Karno çizelgesi), sadeleştirilecek eşitliğin bütün değerlerini sıralamak için kullanılan, eşitliğin alabileceği en basit (sade) şekli içeren, hücrelerin oluşturduğu bir yöntemdir. Giriş değişkenlerinin sayısı artıkcı ifadelerin sadeleştirilmesinin zorlaştığı bu yöntem, giriş değişkenleri sayısının 6'ya kadar olduğu durumlarda iyi bir sonuç verir. Genelde kullanılan; 2, 3 ve 4 giriş değişkenli Karnaugh haritalarıdır (çizelgeleridir).

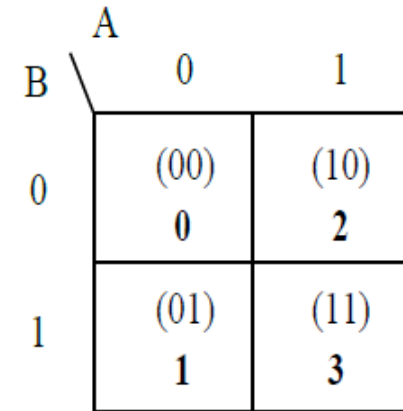
İki, Üç ve Dört Değişkenli Karnaugh Haritaları



(a)



(b)



(c)

Şekil 6.2. İki değişkenli Karnaugh haritasında hücrelerin anlamları.

İki, Üç ve Dört Değişkenli Karnaugh Haritaları

		A			
		AB		11	10
C	00	01			
0	000 A'B'C' 0	010 A'BC' 2	110 ABC' 6	100 AB'C' 4	C
1	001 A'B'C 1	011 A'BC 3	111 ABC 7	101 AB'C 5	
		B			

		C			
		0	1		
AB	00	000 A'B'C' 0	001 A'B'C 1	A	B
01	010 A'BC' 2	011 A'BC 3			
11	110 ABC' 6	111 ABC 7			
10	100 AB'C' 4	101 AB'C 5			
		C			

Şekil 6.3. Üç değerli Karnaugh haritasında hücrelerin oluşturulması.

**Satır ve sütunlardaki 10
ve 11 lere dikkat ediniz!**

BÖLÜM 5: KARNAUGH HARİTASI

Doğruluk Tablosu

Komşular Belli Değil

A	B	C	D	minterm
0	0	0	0	m0
0	0	0	1	m1
0	0	1	0	m2
0	0	1	1	m3
0	1	0	0	m4
0	1	0	1	m5
0	1	1	0	m6
0	1	1	1	m7
1	0	0	0	m8
1	0	0	1	m9
1	0	1	0	m10
1	0	1	1	m11
1	1	0	0	m12
1	1	0	1	m13
1	1	1	0	m14
1	1	1	1	m15

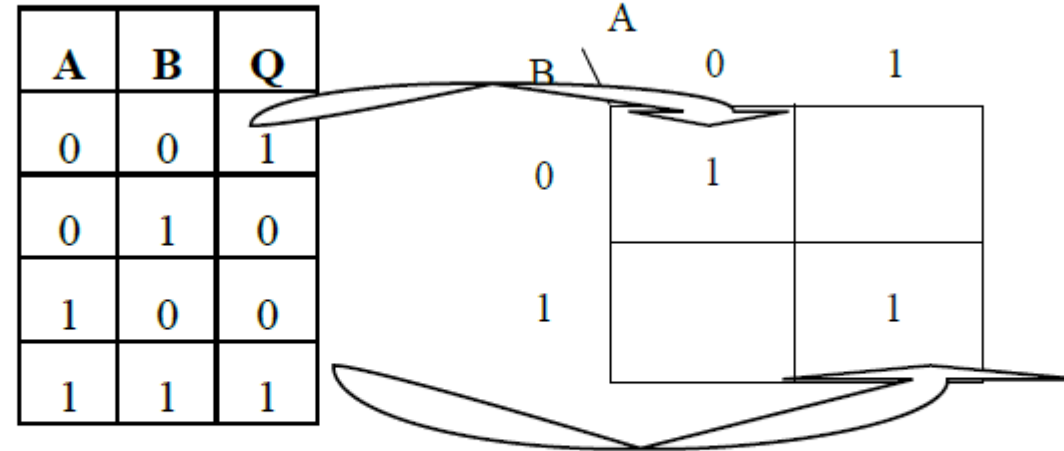
Gray Kod

A	B	C	D	minterm
0	0	0	0	m0
0	0	0	1	m1
0	0	1	1	m3
0	0	1	0	m2
0	1	1	0	m6
0	1	1	1	m7
0	1	0	1	m5
0	1	0	0	m4
1	1	0	0	m12
1	1	0	1	m13
1	1	1	1	m15
1	1	1	0	m14
1	0	1	0	m10
1	0	1	1	m11
1	0	0	1	m9
1	0	0	0	m8

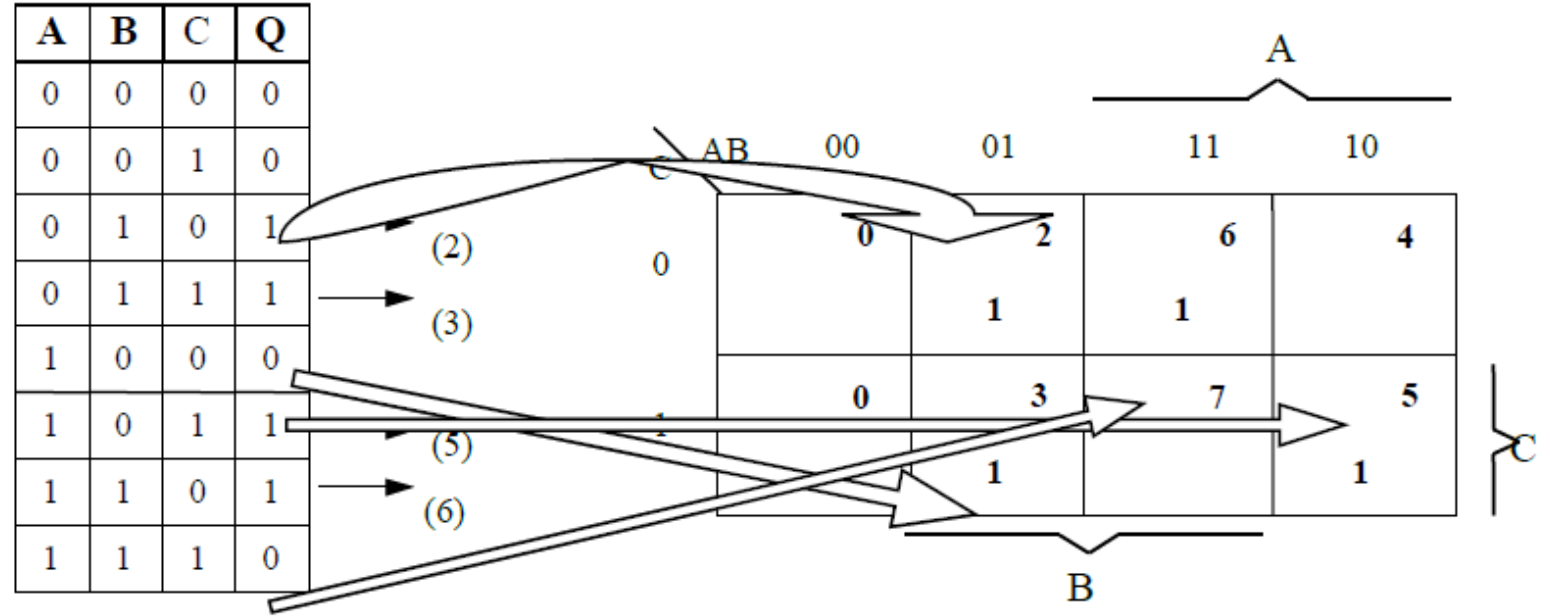
İki, Üç ve Dört Değişkenli Karnaugh Haritaları

A	B	C	D	Q
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

		A			
		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0000 0	0100 4	1100 12	1000 8
	01	0001 1	0101 5	1101 13	1001 9
	11	0011 3	0111 7	1111 15	1011 11
	10	0010 2	0110 6	1110 14	1010 10
		B			



Şekil 6.5. Doğruluk tablosundaki değerlerin Karnaugh haritasındaki hücrelere taşınması.

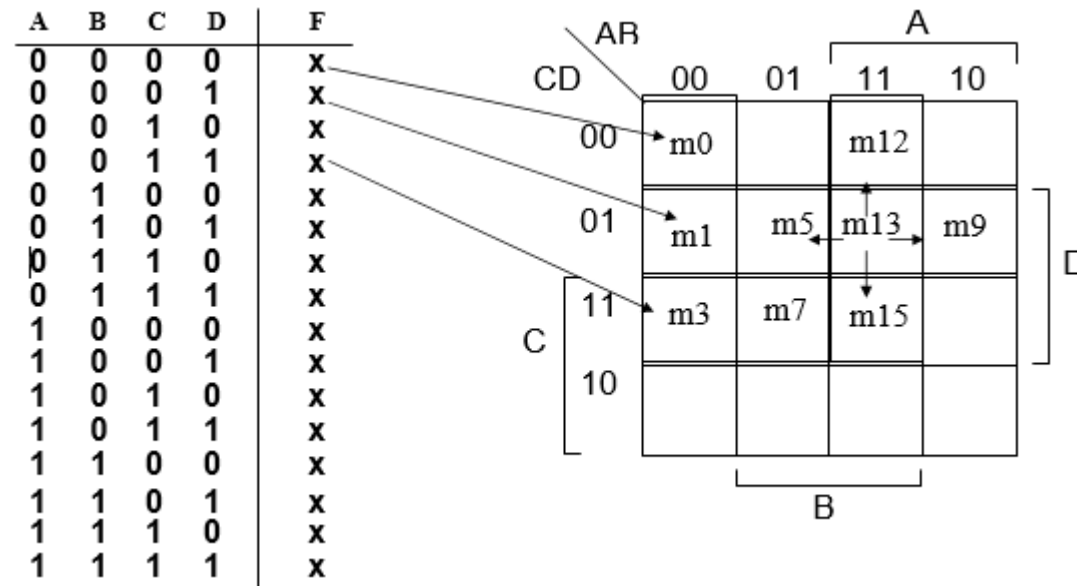


Şekil 6.6. Üç değişkenli doğruluk tablosundaki değerlerin Karnaugh haritasına taşınması.

Kaynak: Prof Dr. Hüseyin Ekiz Matik Devreleri kitabı: Oklar kaymış 3 ve 6 numaralı oklar yanlış hücreyi gösteriyor dikkat!

BÖLÜM 5: KARNAUGH HARİTASI

- Doğruluk Tablosundan K-haritasının elde edilmesi
- Doğruluk tablosundan K-haritası elde edilirken doğruluk tablosundaki satır sayısı kadar K-haritasının hücresi olması gerekir.



A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

		A			
		00	01	11	10
CD	AB	00	01	11	10
	00	0	0	0	1
	01	0	1	0	1
	11	0	1	0	0
C	10	0	1	0	0

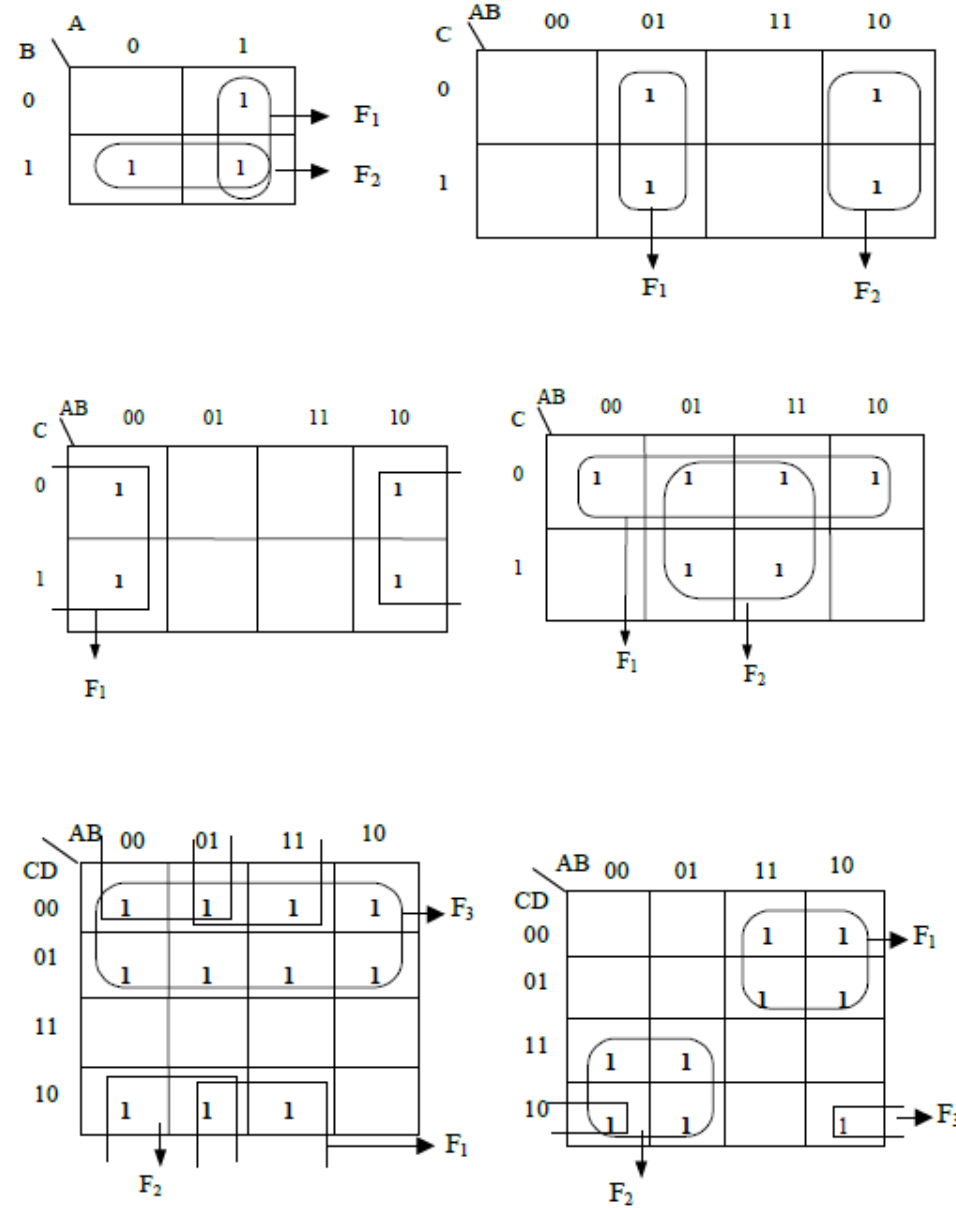
D

Satır ve sütunlardaki 10 ve 11 lere dikkat ediniz!

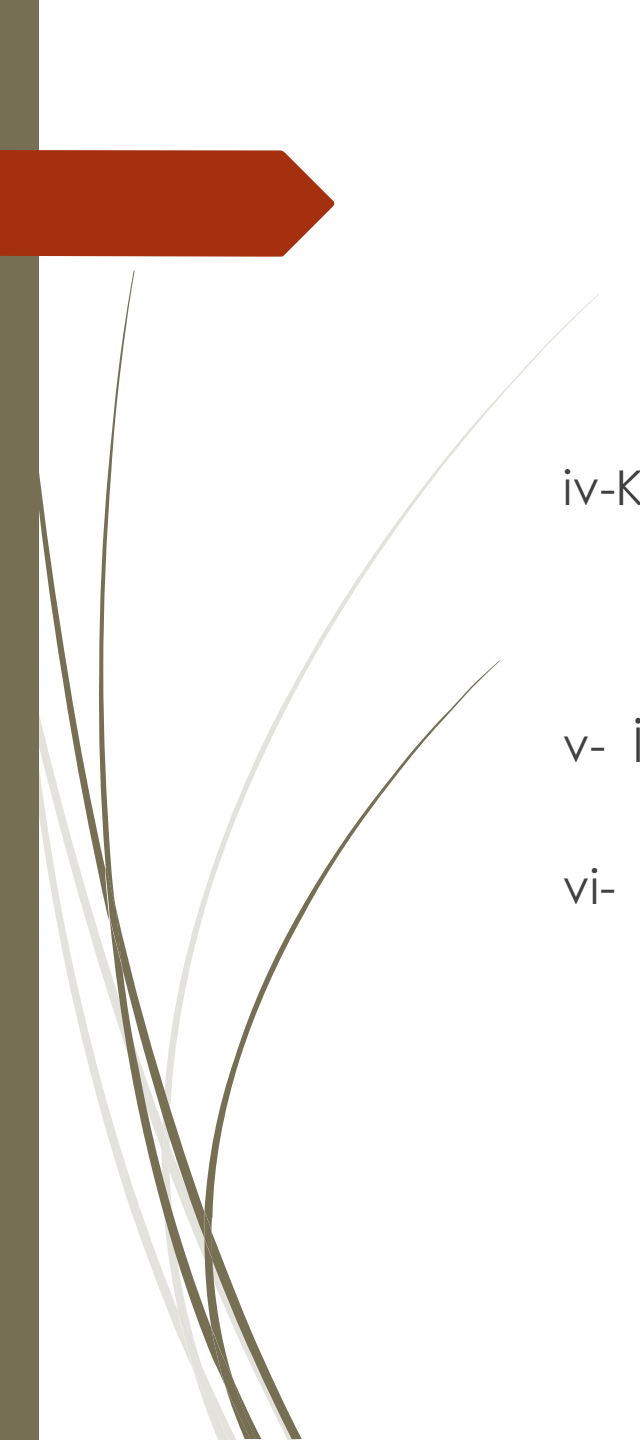


Karnaugh Haritalarındaki Hücrelerin Gruplandırılması ve Gruplardan Eşitliklerin Yazılması

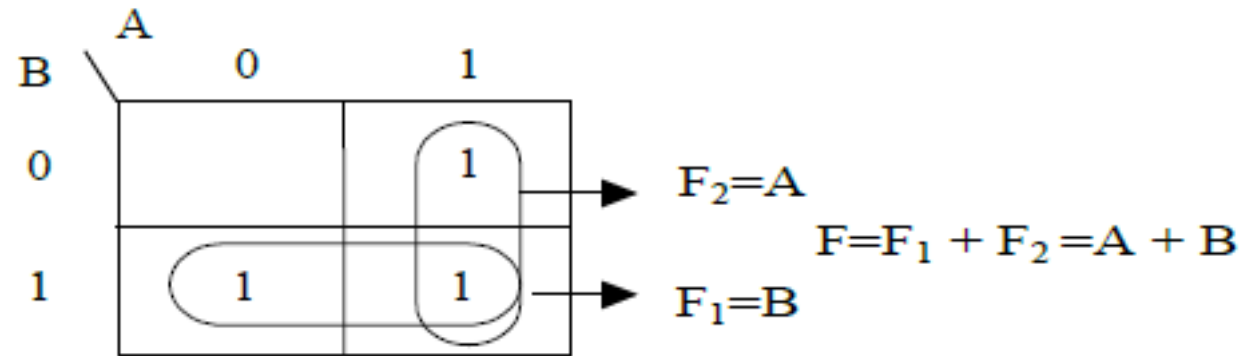
- i- Yan yana veya alt alta bulunan bir, iki veya ikinin kuvveti sayıdaki hücreler gruplandırılabilir. ($2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$,.....).
- ii- Her bir gruba farklı bir isim verilir.
- iii- Herhangi bir gruba girmiş olan '1', başka bir gruba girebilir. Bu işlem sonucun daha ksalmasına yardımcı olur (Şekil 6.7).



Şekil 6.7. Karnaugh haritasında gruplandırma örnekleri.

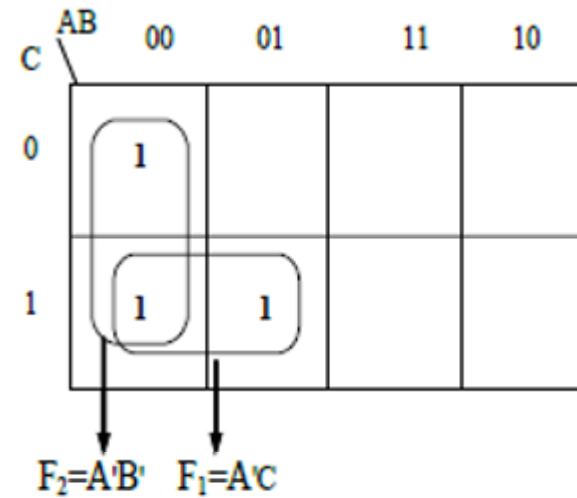
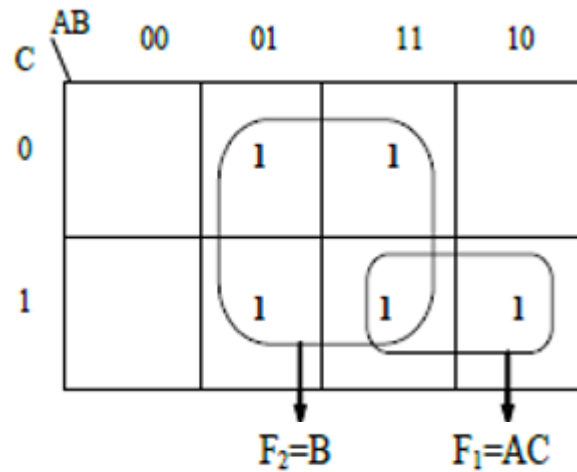
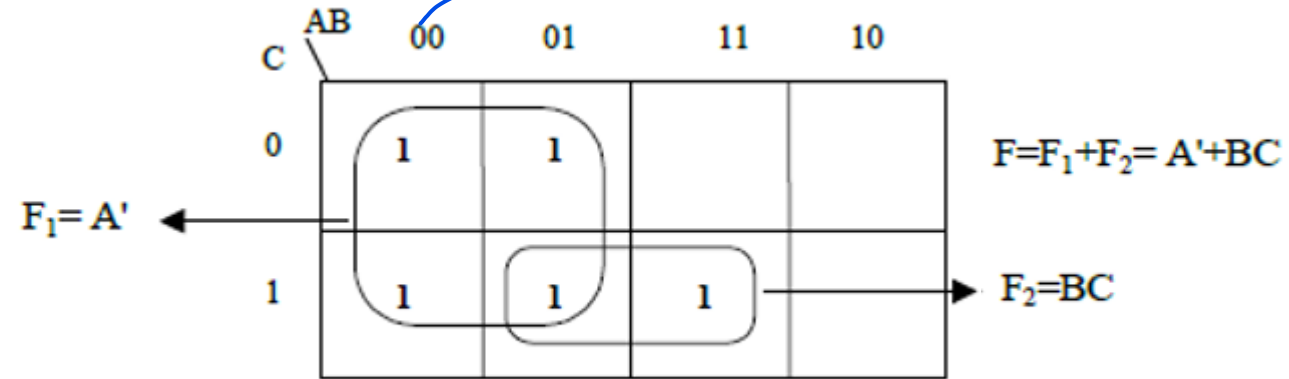
- 
- iv-Karnaugh çizelgesini sağa sola veya yukarı aşağı bükecek olursak, çizelge silindirik bir şekle dönüşebilir. Bu durumda çizelgenin alt ve üst hücrelerinde bulunan veya başta ve sondaki hücrelerde olan 1 değerleri bitişik sayılabileceğinden gruplandırma yapılabilir.
 - v- İki değişkenli Karnaugh'da aynı grup içerisinde **dört adet, üç değişkenli** Karnaugh'da sekiz adet '1' olması durumunda fonksiyon sonucu '1' olur.
 - vi- Oluşturulan grupların ifade ettikleri kombinasyonlar, grubun bulunduğu kolon(lar) ve satır(lar)da hücreler boyunca değişim göstermeyen değişkenler alınarak oluşturulur. Değişim gösteren değişkenler ise göz ardı edilir

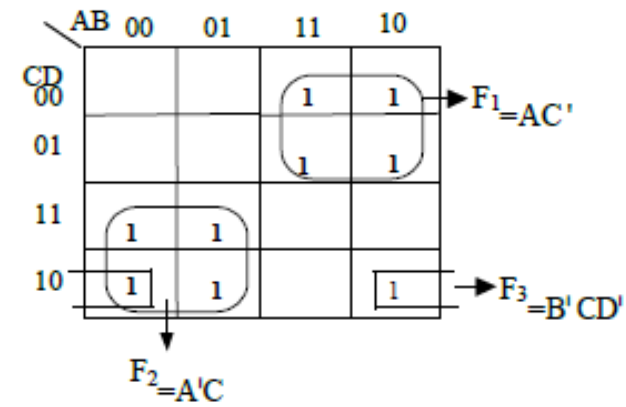
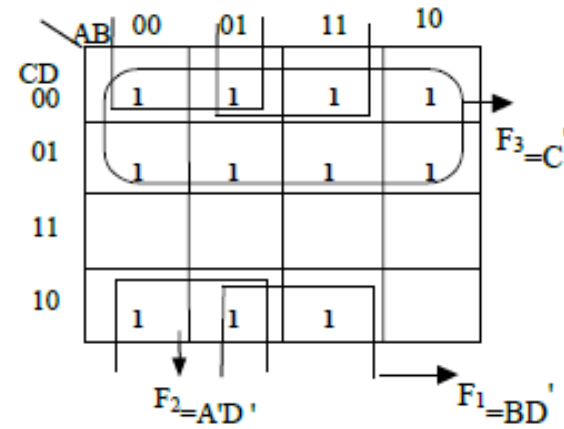
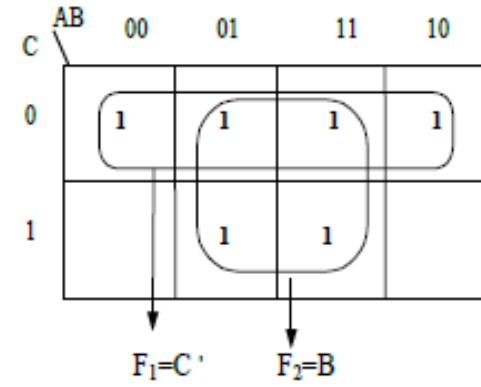
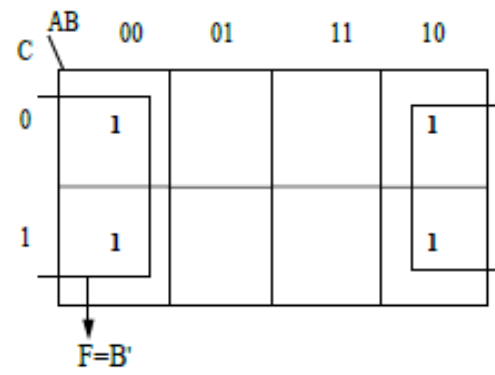
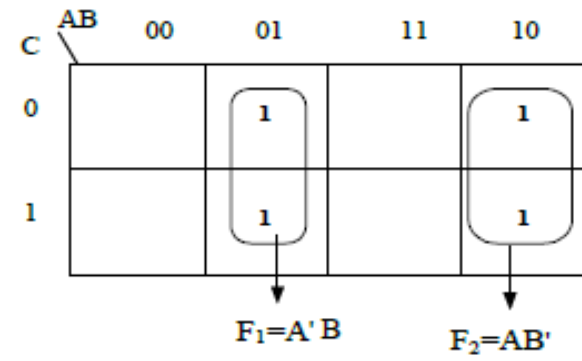
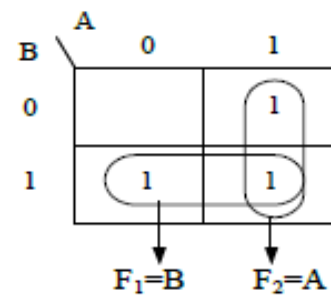
Örnek 1: Şekil 6.8'de verilen iki değişkenli Karnaugh'da bulunan değerleri gruplandırarak, gruplara ait eşitlikleri yazalım.



Şekil 6.8. Karnaugh haritasında gruplandırmalardan fonksiyonların yazılması.

Örnek 2: Şekil 6.9'da görülen 3 değişkenli Karnaugh haritalarında oluşturulan gruplara ait eşitlikleri bulalım ve sonuç eşitliğini yazalım.

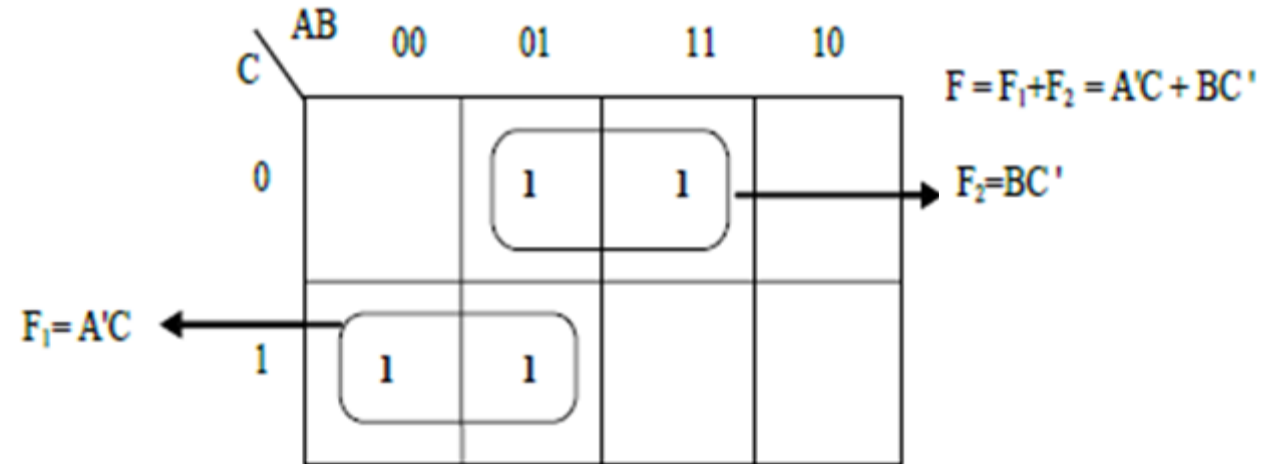




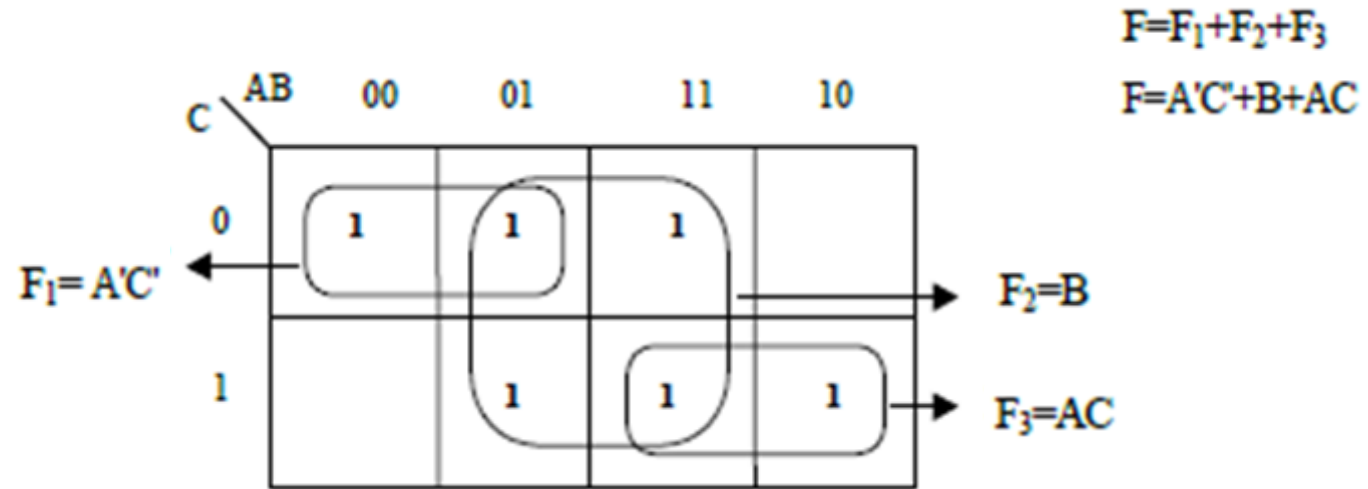
Şekil 6.10. Karnaugh haritasında yapılan gruplardan eşitliklerin yazılması.

Karnaugh Haritası Kullanarak Boolean Eşitliklerin Sadeleştirilmesi

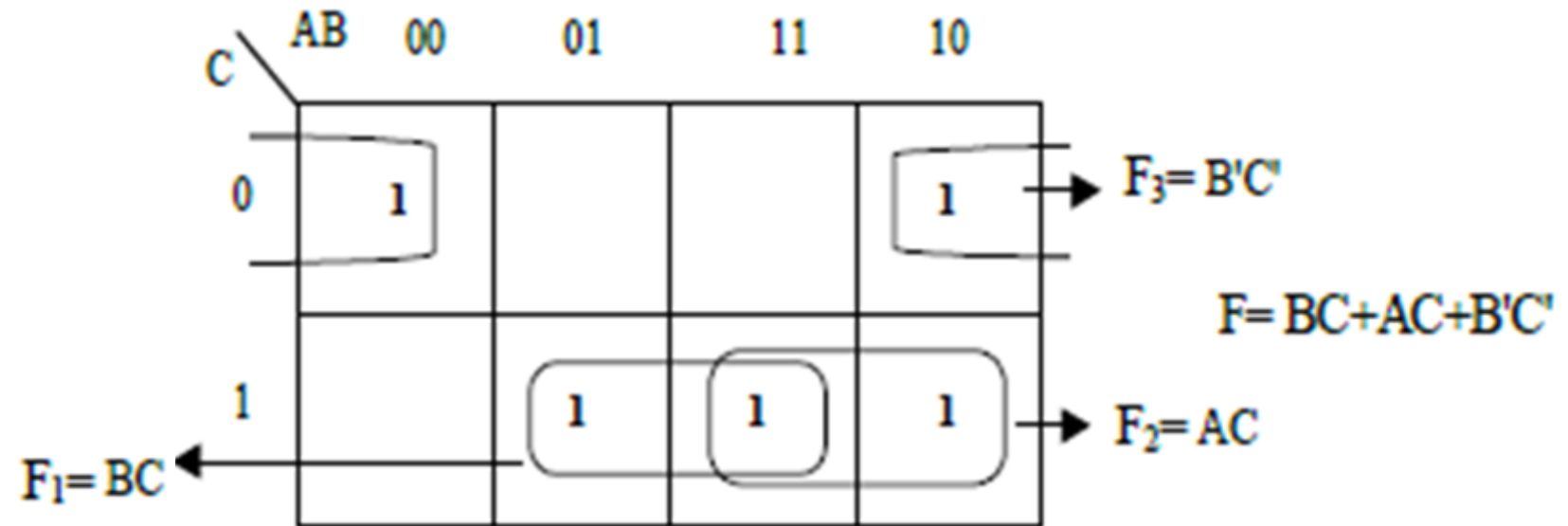
► Örnek 4: $F = A'BC + A'B'C + ABC' + A'BC'$ lojik eşitliğini sadeleştirelim



Örnek : $F=A'B'C'+A'BC'+ABC'+A'BC+ABC+AB'C$ lojik eşitliğini Karnaugh haritası yardımıyla sadeleştirelim.

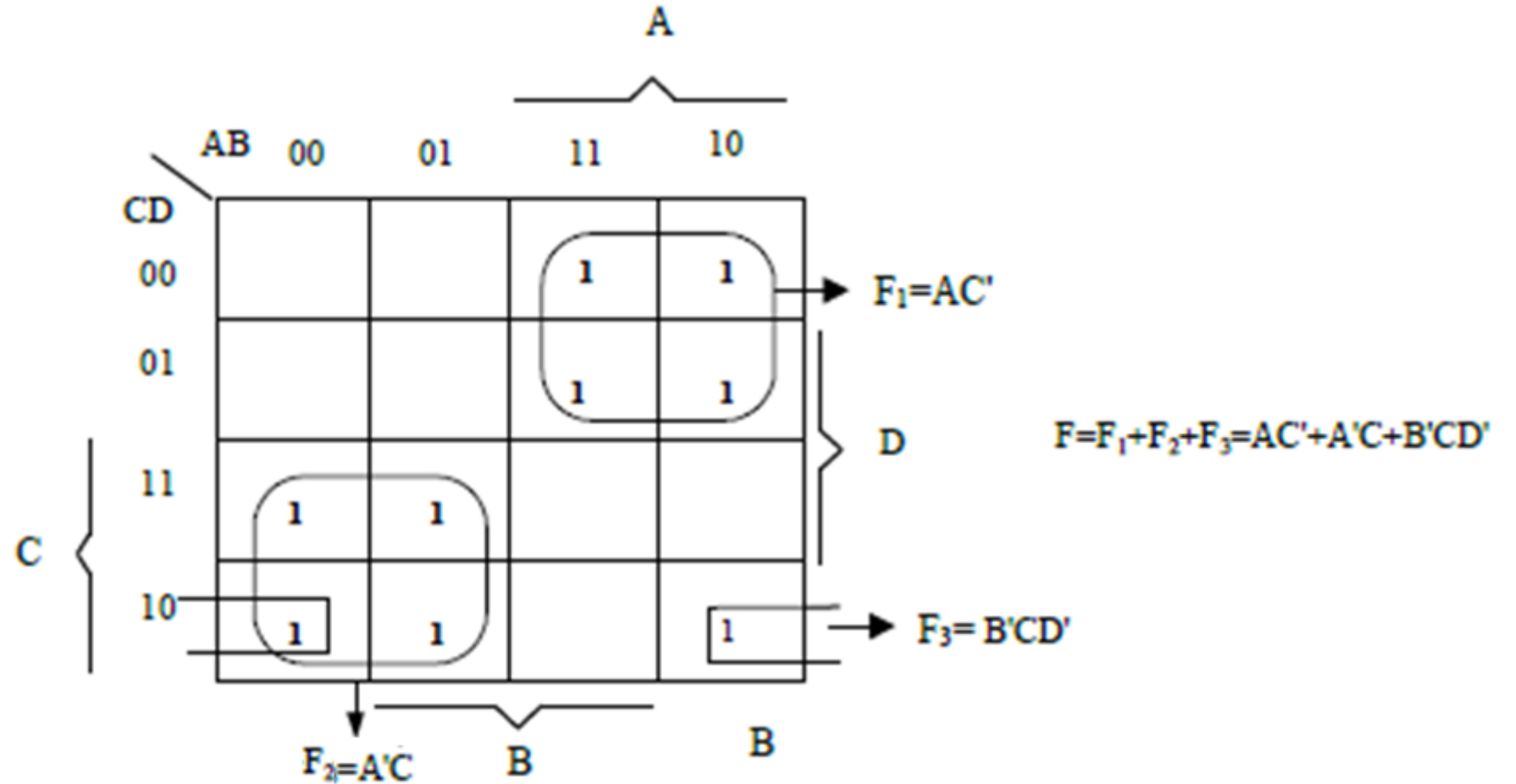


Örnek 7: $F = A'B'C' + AB'C' + A'BC + AB'C + ABC$ eşitliğini Karnaugh haritası yardımıyla basitleştirelim.

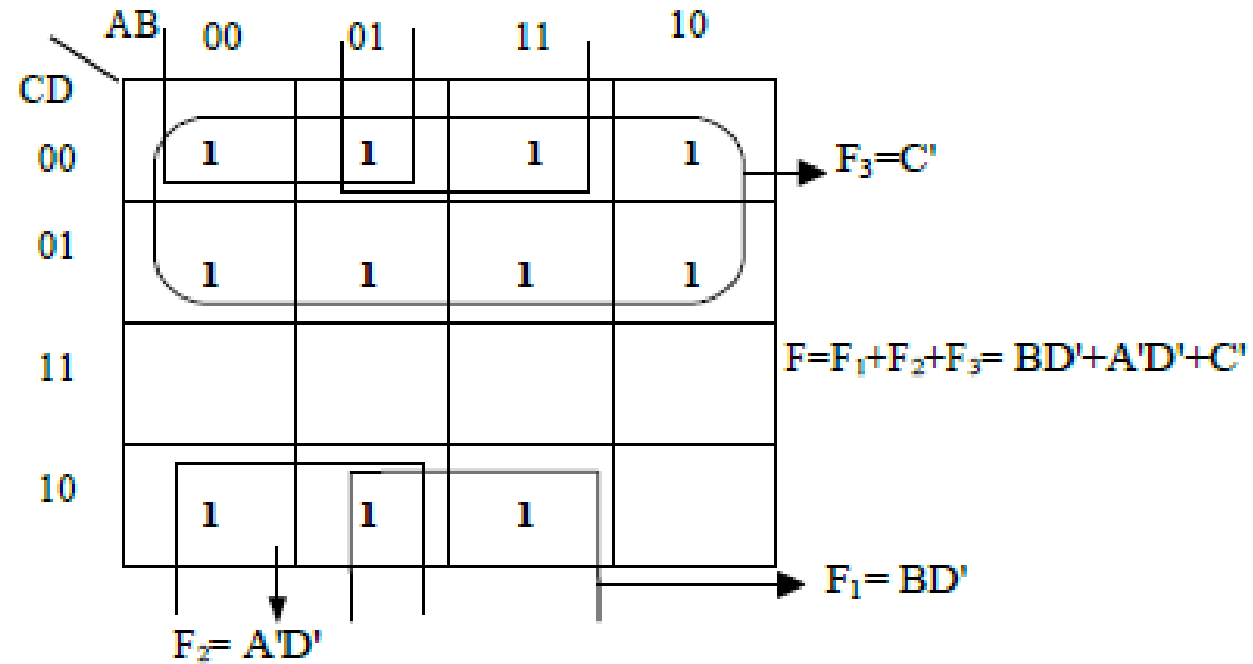


Örnek 8: Aşağıda verilen Boolean eşitliğini Karnaugh haritası kullanarak sadeleştirelim.

$$F = ABC'D' + AB'C'D' + ABC'D + AB'C'D + A'B'CD + A'BCD + A'B'CD' + A'BCD' + AB'CD'$$



Örnek 9: $F = \sum(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)$ şeklinde verilen bir minterm ifadesini sadeleştirerek, lojik eşitlik halinde yazalım.



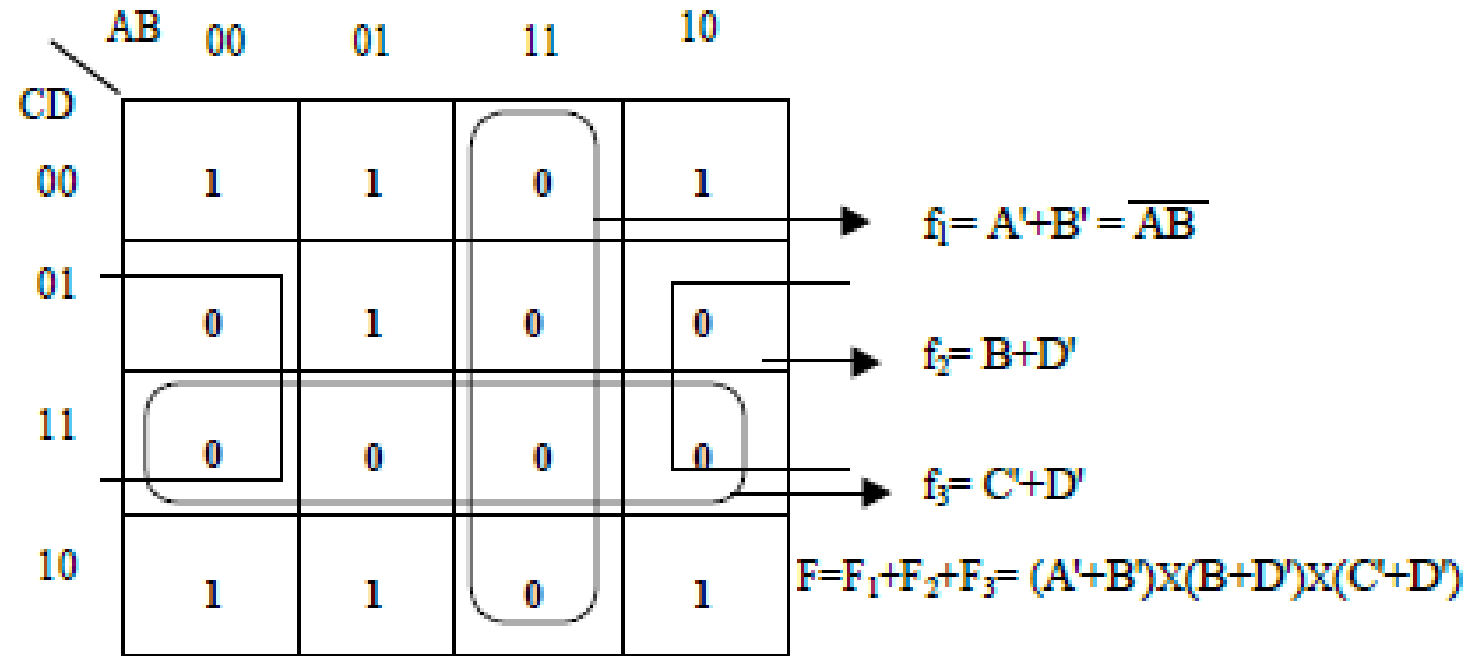
Toplamlar arpımı İle Karnaugh Haritası

Buraya kadar olan örnekler hep mintermlerin toplamı Şeklinde eşitliklerin sadeleştirilmesi idi. Makstermlerin arpımı Şeklinde olan eşitlikleri sadeleŐtirmede, doğruluk tablosu çıkıŐ sütunundaki '0' olan değerler Karnaugh haritasına taşınır. Eęer eşitlik minterm olarak verilmiŐse, mintermleri temsil eden hücrelere 1 yazıldıktan sonra kalan hücreler 0'larla doldurulur. Hücrelerdeki 0'lar gruplanarak makstermlerin çarpımı yazılır.

Örnek 11: $F(A,B,C,D) = \sum(0, 2, 4, 5, 6, 8, 10)$ minterm ifadesini Karnaugh haritasındaki 0'ları kullanarak sadeleştirilmiş eşitlik olarak yazalım.

Verilen eşitlikteki rakamlar, temsil edildikleri hücrelere '1' yazılması suretiyle Karnaugh'ya taşınır. '1' yazılmayan tüm hücrelere '0' yazılarak, '0'lar gruplandırılır. Gruplardan **maksterm'ler** yazılır.

Maksterm'lerin yazılması işleminde değeri değişmeyen değişken '1' ise değişkenin değili, değişken değeri '0' ise değişkenin kendisi yazılır.



Farketmeyen Durumlu (Don't Care'li) Lojik Eşitlikler

Karnaugh haritasında bulunan 1 ve 0'lar lojik fonksiyonun oluşmasında bir anlam ifade eder. Bununla beraber, giriş değişkenlerinin kesin değerler olmadığı durumlar da bulunabilir.

Örneğin; dört bitle ifade edilen onluk sistemde, 9'dan sonraki altı kombinasyon hiçbir zaman oluşmaz. Bu durumda, oluşmayan (kullanılmayan) kombinasyonların aldığı değerler göz ardı edilebilir. **'Fark etmeyen durumlar'** olarak isimlendirilen bu durumlar, eşitlikleri basitleştirmeye yardım eder.

Fark etmeyen kombinasyonların temsil ettikleri hücrelere '1' veya '0' değerlerini koymak mümkün değildir. Bu nedenle, oluşmayan kombinasyonları temsil eden hücrelere **'X' veya 'd' işareti (1 ve 0 ifadelerinden ayırmak için)** yerleştirilir. Karnaugh haritasında gruplandırma yapılırken, fark etmeyenli hücreler 0 veya 1 olarak kabul edilebilir. Karar, hangi kabulün fonksiyonu daha basit hale getireceğine göre verilir.

Örnek : $F = S(1,3,7,11,15)$ ve farketmez durumları $d = S(0,2,5)$ olan bir fonksiyonu sadeleştirelim.

Sadeleştirme işlemi için, eşitlikte bulunan sayıların temsil ettiği hücrelere '1', farketmez durumlarını temsil eden hücrelere 'x' işareti konur. Oluşan '1'ler gruplandırma işlemine tabi tutulur. 'x' işaretli hücreler, 1 veya 0 olarak düşünülebilir. Örnekte fark etmeyen durumlardan birisi '1', diğeri '0' olarak kabul edilmiştir.

AB \ CD	00	01	11	10
00	X			
01	1	X		
11	1	1	1	1
10	X			

$F = F_1 + F_2 = A'D + CD$

$F_1 = A'D$

$F_2 = CD$

Şekil 6.23. Fark etmeyen durumları kullanarak boolean eşitlerin elde edilmesi.