DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

x değişkeni y fonksiyonunu ve bu fonksiyonun çeşitli mertebeden türevlerini içeren her kapalı bağıntının bir alt kümesi bir diferansiyel denklem tanımlar. Genel olarak bir diferansiyel denklem $F(x, y, y', y'', ... y^{(n)}) = 0$ şeklinde tanımlanır. Diferansiyel denklemlerde her zaman değişken ve fonksiyon görülmeyebilir. Örneğin $y''' = 0$ denklemi bir diferansiyel denklemdir. Eğer diferansiyel denklem y ve y' 'e göre lineerse denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Aksi halde lineer olmayan (nonlineer) denklem denir.

Eğer bir denklem bağımlı değişken y 'nin veya herhangi bir türevinin ikinci veya daha büyük derecelerden kuvvetlerini içeriyorsa veya y ve y' nün türevlerinin çarpımını içeren terimler içeriyorsa bu denklem lineer değildir.

Örnek

$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2dy}{dx}+2y^2=0$ lineer değildir.(y 'nin kuvveti alınmış)

$\frac{d^2y}{dx^2}+2(\frac{dy}{dx})^2+y=0$ lineer değildir.(y' nün kuvveti alınmış)

$\frac{d^2y}{dx^2}+2y\frac{dy}{dx}+y=0$ lineer değildir.(bağımlı değişken y , y' ile çarpılmış)

$y'''-y'=0$ lineerdir.

$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$ lineerdir.

$y'''+2y''+y=\sin x+x$ lineerdir.

Diferansiyel denklemin içerdiği en yüksek türev sayısına o diferansiyel denklemin mertebesi denir.

Diferansiyel denklemdeki en yüksek türevli ifadenin parantez kuvvetine o diferansiyel denklemin derecesi denir. Diferansiyel denklemler mertebelerine göre sınıflandırılırlar. Derecelerine göre sınıflandırılmazlar.

Diferansiyel Denklemin Çözümü

Diferansiyel denklemi çözmek demek $y = f(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ biçiminde fonksiyon bulmaktır ki bu fonksiyon ve gerekli sayıdaki türevleri denklemde yerine konulduğunda denklem sağlansın.

Bir diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan her $y = f(x)$ fonksiyonuna diferansiyel denklemin ***çözümü*** veya ***integrali*** denir. Bir diferansiyel denklemi çözmek demek, türevleri ile birlikte verilen diferansiyel denklemde yerlerine konulduğu zaman, denklemi özdeş olarak sağlayan bütün fonksiyonları bulmak demektir. Diferansiyel denklemlerin çözümü **genel, özel** ve **tekil** olmak üzere üç türdür. n. mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümü, sayıca daha aşağı düşürülemeyen n tane keyfi sabiti içerir. Bu çözüme diferansiyel **denklemin ilkeli** de denir. Örneğin, $y' - y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = ce^x$ dir. Diferansiyel denklemin mertebesi kaç ise genel çözümündeki c sabitlerinin sayısı da o kadardır. Örneğin, $y'' + 4y = 0$ ikinci mertebeden denkleminin çözümü $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ olmak üzere iki sabit içerir.

Genel Çözüm

Denklemin mertebesi kadar sayıda keyfi sabit içeren çözüme denir.

Özel Çözüm

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ biçimindeki koşullara başlangıç koşulları denir. Başlangıç koşulları kullanılarak genel çözümdeki keyfi sabitlerin bulunuş yerlerine konulmasıyla elde edilen çözüme denir.

Tekil(Ayrık=Singüler) Çözüm

Genel ve özel çözümden olmayan ancak diferansiyel denklemi sağlayan çözümlerde vardır. Bunlara tekil çözümler denir.

Özel çözümler, genel çözümlerden sözü edilen sabitlere özel değerler vermek suretiyle elde edilir. Örneğin, $y' - y = 0$ diferansiyel denkleminin özel çözümleri

$$y = e^x,\ y = -\sqrt{2}e^x, y = \frac{1}{2}e^x, ...vb \text{ dir.}$$

Bunlardan başka bazı diferansiyel denklemlerin, bu denklemi sağlayan, fakat genel çözümlerden bulunamayan bir veya birkaç çözümü olabilir ki bu çözümlere **tekil çözümler** denir. Örneğin, $y'(y-x)+xy-x^2=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y = \frac{-x^2}{2} + C$$

dir. Buna ek olarak denklemin bu genel çözümündeki C sabitine değer vererek elde edilemeyen $y = x$ çözümü de mevcuttur. Buradan hareketle $y = x$ bu diferansiyel denklemin tekil çözümüdür.

$$\frac{dy}{dx}+y=2\cos x$$

diferansiyel denkleminin çözümünü düşünelim. Bu denklemin çözümü demek x cinsinden y'nin değerinin bulunması demektir. Peki, y ’ yi nasıl alalım ki bu denklemi sağlasın. Mesela $y(x)=sinx+\cos x$ bir çözüm olabilir mi? Bakalım. Bunun için x’e göre türev alınırsa,

$$y'(x)=\cos x-\sin x$$

olur. Bu değerleri diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$\cos x - \sin x + (\sin x + \cos x) = 2\cos x$$

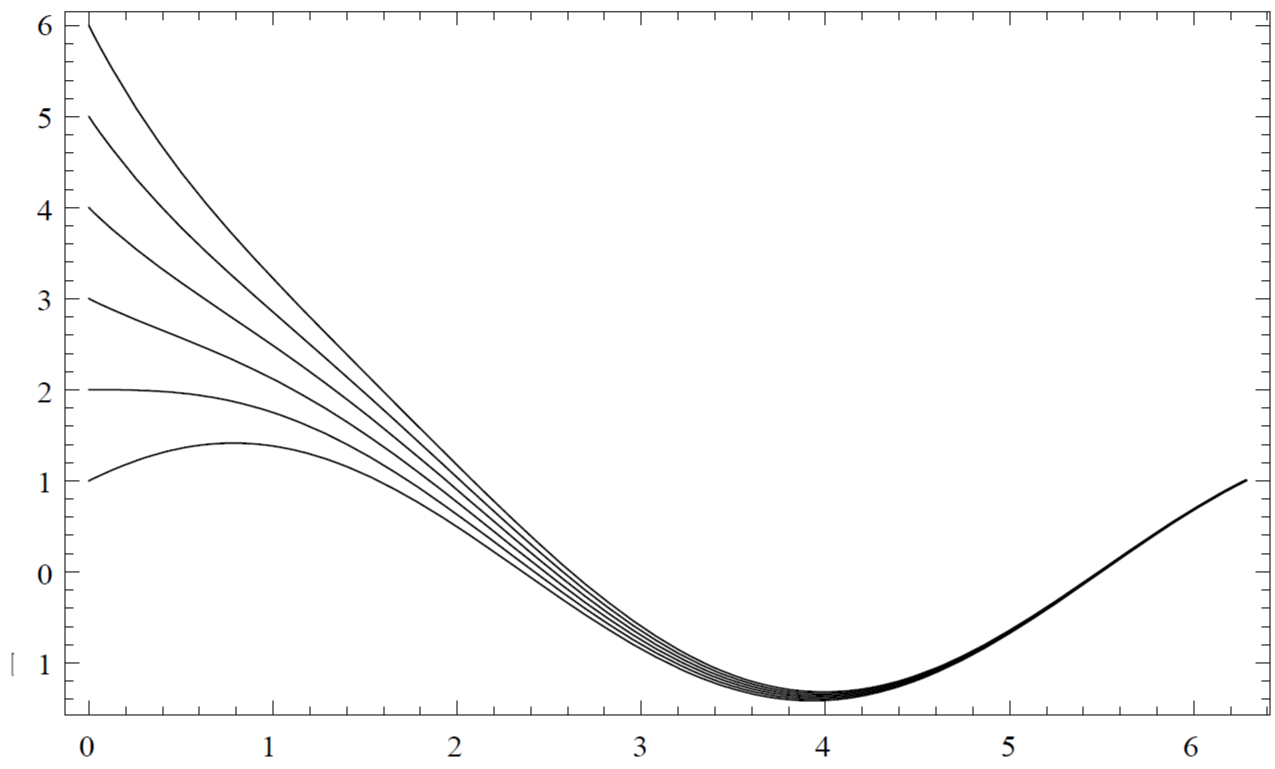
denklemi sağladığı görülür. Dolayısıyla bu bir özel çözümdür. Peki, başka çözümler var mı? $y(x) = sinx + \cos x + e^{-x}$ de bir çözüm olabilir mi?

$$y'(x) = \cos x - sinx - e^{-x}$$

değeri denklemde yerine yazılırsa,

$$\cos x - sinx - e^{-x} + \left(sinx + \cos x + e^{-x}\right) = 2\cos x$$

denklemi sağlar. Benzer şekilde $y(x)=sinx+\cos x-e^{-x}$ de denklemin özel bir çözümü olacaktır. O zaman bu denklemin bütün çözümlerini içeren genel çözümü c_1 keyfi bir sabit olmak üzere $y(x)=sinx+\cos x+c_1e^{-x}$ olarak yazılır. Bir diferansiyel denklemin çözümü $y=f(x)$ biçiminde açık fonksiyon olarak bulunacağı gibi $g(x,y)=0$ biçiminde kapalı fonksiyon formunda da bulunabilir. Her iki durumda da elde edilen çözüm fonksiyonun grafiğine diferansiyel denklemin **çözüm eğrisi** veya **integral eğrisi** denir. Şekil II.1 de örnekteki diferansiyel denklemin çözüm eğrilerinin birkaçının grafiği görülmektedir. Bunlar kolları yukarıda olan bir parabol eğri ailesini göstermektedir.



Örnek

$y=e^{3x}$ fonksiyonu $y'''-4y''-4y'+16y=0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olup olmadığını gösterin.

$$y=e^{3x} \Rightarrow y'=3e^{3x} \Rightarrow y''=9e^{3x} \Rightarrow y'''=27e^{3x}$$

Türev değerleri diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$27e^{3x}-36e^{3x}-12e^{3x}+16e^{3x}=0 \Rightarrow -5e^{3x}=0$$

olur.Bu ise mümkün değildir.Yani $-5e^{3x}\neq 0$ dır.Dolayısıyla $y=e^{3x}$ fonksiyonu diferansiyel denklemin çözümü değildir.

Başlangıç Değer ve Sınır Değer Problemleri

Bir diferansiyel denklem mertebesine bağlı olarak, çözüm fonksiyonu bir veya birden fazla sabit içerir. Bu sabitlerin değerlerinin bulunması için diferansiyel denklem ile birlikte ek olarak bazı koşulların da verilmesi gerekir. Eğer bu ek koşul veya koşullar, bağımsız değişkenin sadece bir noktadaki değeri için verilmişse buna **başlangıç koşulu**, bu tür probleme de **başlangıç değerli problem** denir. Koşullar, bağımsız değişkenin birden çok noktasındaki değeri için verilmişse buna **sınır koşulu denir.** Bu tür probleme de **sınır değerli problem** denir.

Örnek $y'' = 8x, \; y(1) = 0, \; y'(1) = 1$

Probleminde iki koşul da $x = 1$ noktasında verildiğinden bir başlangıç değerli(koşullu) problemdir.

Örnek $y'' + 3y' = 5e^x; \; y(0) = 1, \; y(1) = 1$

Probleminde iki koşul da $x = 0$ ve $x = 1$ gibi iki farklı noktada verildiğinden bir sınır değerli(koşullu) problemdir.

Örnek $y=2x+Ce^{x}$ ifadesinin $\dfrac{dy}{dx}-y=2(1-x)$ diferansiyel denklemi sağladığını gösteriniz ve $y(0)=3$ ile tanımlanan özel çözümünü bulunuz.

$y=2x+Ce^{x}$ ifadesini $\dfrac{dy}{dx}-y=2(1-x)$ diferansiyel denkleminde yerine yazalım:

$$\left(2x+Ce^{x}\right)'-\left(2x+Ce^{x}\right)=2(1-x)\Rightarrow 2+Ce^{x}-2x-Ce^{x}=2-2x=2(1-x)$$

Denklemi sağladı. Özel çözüm $3=2.0+Ce^{0}\Rightarrow C=3$ olarak alındığında özel çözüm:

$$y=2x+Ce^{x}=2x+3e^{x}$$

olarak bulunur.

Keyfi Sabitlerin Elemine Edilmesi

Birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklem $f(x, y, y') = 0$ ve çözümü $g(x, y, c) = 0$ olsun. Burada c sıfır dahil pozitif ve negatif her reel değeri olabilir. Bir diferansiyel denklemin çözümünün bulunması işleminin tersi olan işlem keyfi sabitler içeren bir fonksiyon verildiğinde bu sabitlerin elimine ederek verilen fonksiyonu çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulmaktır. Aslında bir diferansiyel denklemin çözümü bulunduktan sonra çözümün doğru olup olmadığını anlamak için daima bu işleme başvurulur.

Örnek $y=(c+\sin x)^2$ fonksiyonunun c sabitini elemine ediniz. Bu fonksiyonu çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz.

Örnek $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$ fonksiyonunda c_1 ve c_2 sabitlerini elemine ediniz.

Örnek. $\rho = \alpha(1-\cos\theta)$ Kardiyoid ailesinin diferansiyel denklemini oluşturalım. Burada α bir parametredir.

Bu tür problemlerde parametre yok edilerek ailenin diferansiyel denklemine ulaşılmaya çalışılır.

$$\rho = \alpha(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{d\rho}{d\theta} = \alpha\sin\theta \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\rho}{d\theta}$$

α nın bu değeri ailenin denkleminde yerine konulup düzenlenirse ailenin diferansiyel denklemi elde edilir.

$$\rho = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\rho}{d\theta}(1-\cos\theta) \Rightarrow \rho\sin\theta d\theta = (1-\cos\theta)d\rho$$

Örnek. $x\sin\alpha + y\cos\alpha = 1$ doğru ailesinin diferansiyel denklemini oluşturalım. Burada α bir parametredir.

Ailenin denklemini, x bağımsız ve y bağımlı değişken olmak üzere türetelim.

$\sin\alpha + y'\cos\alpha = 0 \Rightarrow y' = -\tan\alpha$ bulunur.

$\sin^2\alpha = \dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$ ilişkilerini dikkate alarak

$\sin^2\alpha = \dfrac{(y')^2}{1+(y')^2}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+(y')^2}$ yazabiliriz. Ailenin denklemini, her iki yanı $\cos\alpha$ ile bölerek

$$x\tan\alpha + y = \frac{1}{\cos\alpha} \tag{1.2}$$

formunda yazalım. $\tan\alpha = -y'$ olduğunu da dikkate alarak (1.2) yerine

$-xy' + y = \dfrac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow (-xy'+y)^2 = \left(\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = 1+(y')^2$ alarak sonucu buluruz.