Rasgele değişken:

Değer bir deney sonucuyla belirtilen değişkene rasgele değişken adı verilir.

1. Bir ailedeki çocuk sayısı
2. Metrobüs hattında günlük taşınan yolcu sayısı
3. Milli futbol takımının yaptığı milli maçlarda oyunda kaydedilen gol sayısı

Kesikli rasgele değişken: X bir rasgele değişken olsun X'in alabileceği değerlerin sayısı sonlu veya sayılabilir sonsuz ~~olursa~~ ise X e kesikli rasgele değişken denir.

Zar deneyi: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sürekli Rasgele değişken: X bir rasgele değişken olsun X bir aralıkta ~~yada~~ birden çok aralıkta her değeri alabiliyorsa X sürekli rasgele değişkendir.

Kimyasal madde deneyi $S = \{$Bir bileşiğin içindeki alkol yüzdesi$\}$

Örnek:

Bir paranın 2 kez atılması deneyinde. Tura sayısı X değişkeni olsun

$S = \{YY, YT, TY, TT\}$

X in alacağı değerler 0, 1, 2

$f(x) = P(X=x)$

$X=x$	0	1	2
$f(x) = P(X=x)$	1/4	1/2	1/4

$f(0) = P(X=0) = \frac{1}{4}$

$f(1) = P(X=1) = \frac{1}{2}$

$f(2) = P(X=2) = \frac{1}{4}$

$f(0) + f(1) + f(2) = 1$

X sonlu sayıdaki $x_1, x_2, \ldots, x_N$ değerlerini $f(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ olasılıkları ile alan kesikli rasgele değişken olsun.

1. $f(x) \geq 0$ tüm x'ler için
2. $\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = 1$ ise $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Bir X değişkeninin x'e eşit ya da küçük olmasını bulmak için kullanılan fonksiyona dağılım fonksiyonu adı verilir.

Dağılım Fonksiyonu

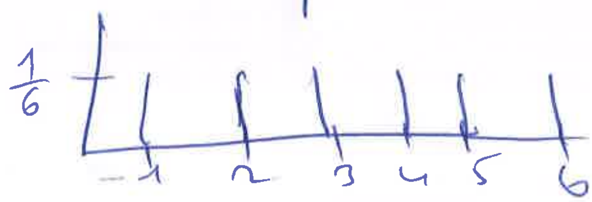
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

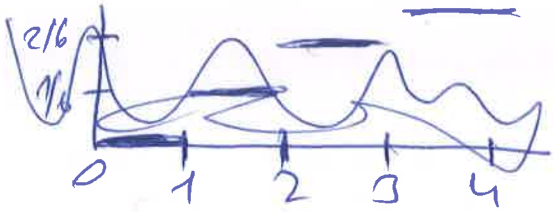
Örnek

Düzgün bir zar bir kere atılıyor. Olasılık fonksiyonunu bulunuz. Grafiğini çiziniz.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$X = x$	1	2	3	4	5	6
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$





$F(X) =$

$X \leq x$	1	2	3	4	5	6
$F(x) = P(X \leq x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

$X=x$	-3	0	2	3
$P(X=x)$:	0,2	0,1	0,4	c

3 X kesikli değişken olasılık yoğunluk fonksiyon

a) c değerini bulunuz

b) X hangi değeri en büyük olasılıkla alır

c) $P(X>0)=?$

d) $X=-2$ olması olasılığı nedir

e) X'in dağılım fonksiyonunu bulunuz

f) F(X)'i tablo olarak gösteriniz

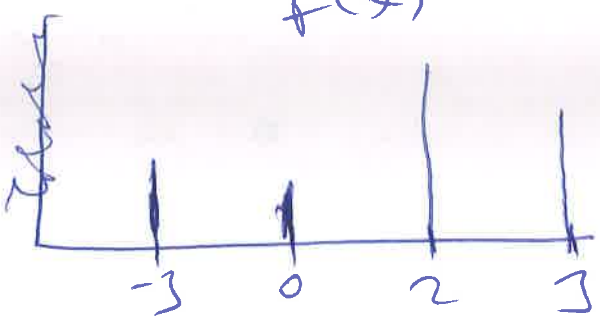
g) f(x) ve F(x)'in grafiğini çiziniz

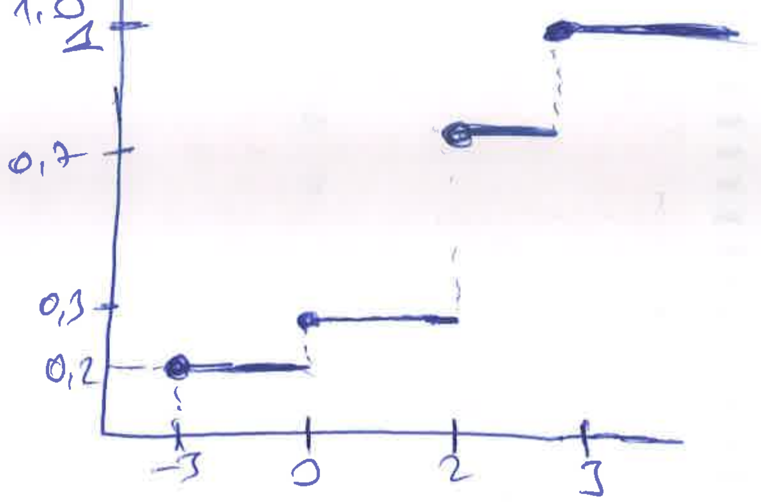
a) $c=0,3$ b) 2   c) $0,4+0,3=0,7$

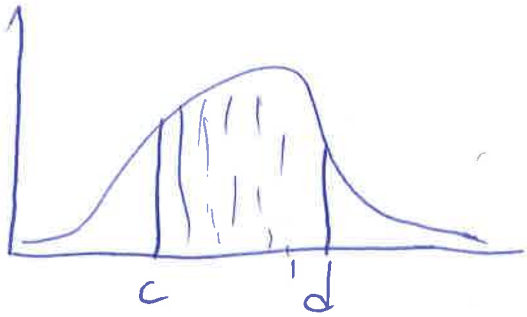
d)

$X=x$	-3	0	2	3
$F(x)=P(X\leq x)$	0,2	0,3	0,7	1,0

f(x)







X $-\infty, \infty$ aralığında tanımlı sürekli rastgele değişken olsun

1. $f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

şartları sağlanırsa $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

$P(c<X<d) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ = $f(x)$ eğrisi x ekseni ve $x=c, X=d$ doğruları arasında sınırlanan alandır.

$P(c<X<d) = P(c \leq X \leq d) = P(c \leq X < d)$

$= P(c < X \leq d)$

$P(X=x) = 0$

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & d.d \end{cases}$$

a) olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunu gösteriniz

$$\int_0^{\infty} 2 \cdot e^{-2x}\,dx = 2 \cdot -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^{\infty} = 0 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-0} = 0 - (-1) = 1$$

b) $P(X \leq 1) = \int_0^1 2 \cdot e^{-2x}\,dx = 2 \cdot -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 =$

$$-e^{-2x} \Big|_0^1$$

$$-e^{-2} - (-e^{-2 \cdot 0}) = 1 - e^{-2} = ?$$

c) $P(1 < X \leq 3) = ?$

$$-e^{-2x} \Big|_1^3 = -e^{-6} - (-e^{-2}) = e^{-2} - e^{-6}$$

5

$f(x) = \frac{1}{14}(3x+1) \qquad 1 < x < 3$

a) $f(x) \geq$ bul

b) ~~$P(x > 2{,}5)$~~ $P(1{,}3 < x < 2)$

$F(x) = \int_1^x \frac{1}{14}(3t+1)\,dt$

$\frac{3t^2}{28} + \frac{t}{14} \Big|_1^x$

$\frac{3x^2}{28} + \frac{x}{14} - \frac{3}{28} - \frac{1}{14}$

$\frac{3x^2-3}{28} + \frac{x-1}{14} = \frac{3x^2-3+2x-2}{28} = \frac{3x^2+2x-5}{28}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{28}(3x^2+2x-5) & 1 < x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

b) $\frac{1}{28}(3x^2+2x-5)\Big|_{1,3}^{2}$

$\frac{1}{28}(3.4+2.2-5) - \left[\frac{1}{28}(3.1{,}69+2.1{,}3-5)\right]$

$\frac{11-2{,}53}{28} = \frac{8{,}47}{28} = 0{,}3025$

6 Kesikli Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri

Tanım: X kesikli rastgele değişkenin

$$E(X) = \mu_X = \sum_{i=1}^{N} x_i f(x_i)$$

ile tanımlanan değerine X kesikli rastgele değişkenin beklenen değeri (veya matematiksel umut) adı verilir.

Beklenen değer, bir rastgele değişkenin olasılıkla ağırlıklandırılmış ortalaması demektir.

ÖRNEK

R rastgele değişkeni aşağıdaki olasılık fonksiyonuna sahiptir. E(R) nedir?

$$P(r) = \begin{cases} 1/5 & r=0 \\ 2/5 & r=1 \\ 2/5 & r=2 \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$E(R) = \mu_R = \sum_{r=0}^{2} r \cdot P(r) = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

Örnek

Yazı gelme olasılığı $\frac{2}{3}$ ve tura gelme olasılığı $1/3$ olan bir madeni para 3 kez atılıyor. X üst yüze gelen yazı sayısı ise X'in beklenen değeri kaçtır?

X	0	1	2	3
P(X)				

$$S = \{(YYY), (YY\overset{4/27}{T}), (Y\overset{4/27}{T}Y), (\overset{4/27}{T}YY), (TTY), (TYT), (YTT), (TTT)\}$$

3 Yazı　　2 Yazı　　1 Yazı　　0 Yazı

$P(YYY) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$　　$P(TYY) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

$P(YYT) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$　　$P(YTT) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

$P(YTY) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$　　$P(TTT) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

$\times 3$

$P(0) = \frac{1}{27}$　　$P(1) = \frac{6}{27}$　　$P(2) = \frac{12}{27}$　　$P(3) = \frac{8}{27}$

X	0	1	2	3	Σ
P(X)	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	1
X·Px	0	$\frac{6}{27}$	$\frac{24}{27}$	$\frac{24}{27}$	$\boxed{2}$

Beklenen Değerin Özellikleri

1. $E(c) = c$
2. $E(X+c) = E(X) + c$
3. $E(cX) = c \cdot E(X)$
4. $X \geq 0 \quad E(X) \geq 0$
5. $X \leq Y \quad E(X) \leq E(Y)$
6. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
7. $|E(X)| \leq E(|X|)$
8. X ve Y bağımsız ise
   $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$
9. $E(X^2) \neq [E(X)]^2$
10. $E(aX+b) = a\,E(X) + b$

Kesikli Rastgele Değişkenin Varyansı

Varyans nedir? Değeri ne ifade eder?

Tanım: X rastgele değişkeninin varyansı

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

olup X kesikli bir rastgele değişken ise

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \sum_x \left[x - E(X)\right]^2 f(x)$$

$$E(X) = \mu_X$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

$$\boxed{Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2} \rightarrow \text{İspatı Araştırma ödevi}$$

Örnek

X kesikli rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir. X'in varyansını bulunuz.

$$P(X) = \begin{cases} 1/4 & x=1 \\ 1/4 & x=2 \\ 2/4 & x=3 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{3} x\,P(X) = 1\left(\frac{1}{4}\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right) + 3\cdot\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 P(X) = 1^2\left(\frac{1}{4}\right) + 2^2\left(\frac{1}{4}\right) + 3^2\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{23}{4}$$

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = \frac{23}{4} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}$$

Sürekli Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri

Tanım. $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olan bir X rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Tanım. $g(x)$ x'in gerçek değerli bir fonksiyonu X, $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rastgele değişken ise

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\, dx \quad \text{olur.}$$

Önemli not: olasılık yoğunluk fonksiyonu $x = c$ etrafında simetrik ise $E(X) = c$'dir.

Örnek
X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8} x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^2 x \, \frac{3}{8} \cdot x^2 \, dx = \int_0^2 \frac{3}{8} x^3 dx = \frac{3}{8} \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{12}{8}$$

Sürekli Rastgele Değişkenin Varyansı

Tanım: O.y.f. $f(x)$ olan bir X rastgele değişkenin varyansı

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$\mu = E(X)$ $\qquad$ $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

Örnek: Varyansı bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

$E(X) = \frac{12}{8} \rightarrow$ önceki örnekte hesaplandı

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{3}{8}x^2\,dx = \int_0^2 x^4 \cdot \frac{3}{8}\,dx$$

$$\frac{3}{8}\,\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{32}{5} - \frac{0}{5}\right) = \frac{96}{40} = 2{,}4$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= 2{,}4 - \left(\frac{12}{8}\right)^2 = 0{,}15$$

Moment Kavramı

Bir değişkenin beklenen değer ve varyansından başka önemli karakteristiklerinden biri de çeşitli mertebeden momentleridir.

Terimlerin sıfırdan veya aritmetik ortalamadan sapmalarının değişik kuvvetlerinin beklenen değerine moment adı verilir.

Tanım

a bir gerçel sayı $\qquad r \to Z^+$

$E[(X-a)^r]$ ne X rastgele değişkenin a civarında r. mertebeden momenti denir.

$$\mu_r = E[(X-a)^r] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i-a)^r \cdot p(x_i) & ; X \text{ kesikli r.d.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i-a)^r f(x_i)\,dx & ; X \text{ sürekli r.d.} \end{cases}$$

$a=0$ ise

$$m_r = E[(X)^r] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^r \, p(x_i) & ; X \text{ kesikli r.d.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i)^r f(x_i)\,dx & ; X \text{ sürekli r.d.} \end{cases}$$

$r=0 \qquad E(X^0) = 1 = m_0$

$r=1 \qquad E(X) = \mu = m_1$

r için $E(X^r) = m_r$ yazılır.

$a=\mu$ alınırsa

$E[(X-\mu)^r] = \mu_r$ olup

$r=1$ iken

$E[(X-\mu)^1] = 0$

Momentler Arasındaki İlişki

$$E\left[(X-\mu)^r\right] = \mu_r \qquad E\left[(X)^r\right] = m_r$$

$$\mu_r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \mu^i \cdot m_{r-i}$$

$r=1$ için

$$\mu_1 = E\left[(X-\mu)^1\right] = 0$$

$r=2$ için

$$\mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = Var(X) = \overset{E(X^2)}{m_2} - \overset{E(X)}{m_1}{}^2$$

$r=3$

$$\mu_3 = E\left[(X-\mu)^3\right] = m_3 - 3m_1 \cdot m_2 + 2m_1^3$$

$r=4$

$$\mu_4 = E\left[(X-\mu)^4\right] = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$$

Çarpıklık katsayısı

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

α_3	Dağılım
$\alpha_3 = 0$	Simetrik
$\alpha_3 > 0$	Sağa çarpık
$\alpha_3 < 0$	Sola çarpık

Basıklık katsayısı

$$\beta_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

β_4	Dağılım
$\beta_4 = 3$	Normal
$\beta_4 > 3$	Sivri
$\beta_4 < 3$	Basık