Tanım



Bir deneye ait

$S \rightarrow$ Örnek uzayı

S'nin her A olayına aşağıdaki özellikleri sağlayan $P(A)$ sayısı atanabiliyorsa $P(A)$'ya A olayının olasılığı adı verilir.

1. $P(A) \geq 0$ 2. $P(S) = 1$

3. $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ olayları bir S örnek uzayında ikişerli ayrık olaylar dizisi ise $(A_i \cap A_j) = \emptyset$ $i \neq j$

Sonsuz sayıda örnek noktası

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Sonlu sayıda örnek noktası

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$P(A) = 0 \rightarrow$ imkansız olay

$P(A) = 1 \rightarrow$ kesin olay

Örnek

Hilesiz bir madeni para iki kez atılıyor. En az bir yazı gelme olasılığı nedir?

| P1 | P2 |
|---|---|
| Y | T |
| Y | Y |
| T | Y |
| T | T |

$$S = \{\underset{p}{YY}, \underset{p}{YT}, \underset{p}{TY}, \underset{p}{TT}\}$$

$$\left.\begin{aligned} 4p &= 1 \\ p &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \text{ Para hilesiz}$$

$$S = \{\overset{1}{YY}, \overset{1}{YT}, \overset{1}{TY}, TT\}$$

$$A = \{(YY), (YT), (TY)\}$$

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Teorem

Bir deneyde N farklı sonuç eşit olarak elde ediliyorsa ve bu sonuçlardan n tanesi bir A olayını oluşturuyorsa A'nın meydana gelme olasılığı

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

$$P(A) = \frac{\text{İlgilenilen A olayındaki örnek noktalarının sayısı}}{\text{Örnek uzaydaki noktaların sayısı}}$$

Örnek: 52 kartlık oyun kağıdı destesinden rastgele bir kart seçilsin

a) Papaz
b) Kırmızı bir kart
c) Birli
d) Sinek

gelme olasılığı nedir?

a) A = {Kart papazdır}
4 papaz

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

b) B = {Kartın kırmızı gelmesi}

$$P(B) = \frac{26}{52}$$

c) C = {Kartın birli gelmesi}

$$P(C) = \frac{4}{52}$$

d) Gelen kağıdın sinek olması

$$P(D) = \frac{13}{52}$$

Örnek bir para 3 kez atılıyor gelen yazı sayısına ilişkin örnek uzayı oluşturunuz. Örnek uzayın herbir elemanına karşılık gelen olasılıkları hesaplayınız. (4)

Bir paranın 3 kez atılışı = 3 paranın birlikte atılışı

$$S = \{0, 1, 2, 3\}$$

$2^3 = 8$ mümkün sonuç

$$\underbrace{YYY}_{3\text{ yazı}} \quad \underbrace{YYT, YTY, TYY}_{2\text{ yazı}} \quad \underbrace{TTY, TYT, YTT}_{1\text{ yazı}} \quad \underbrace{TTT}_{0\text{ yazı}}$$

$$P(3) = \frac{1}{8} \quad P(2) = \frac{3}{8} \quad P(1) = \frac{3}{8} \quad P(0) = \frac{1}{8}$$

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1$$

# TEOREM

A ve B herhangi iki olay

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A ve B ayrık iki olay olsaydı

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ olacaktı } \emptyset$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ ikişerli ayrık olaylar olsun

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Ayrıca $A_1, A_2, \ldots, A_n$ S örnek uzayını oluştursun

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1 = P(S)$$

A B C gibi herhangi 3 olay

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + (-1)^{n-1} (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Koşullu olasılık ve bağımsızlık (6)

Tanım.

A ve B meydana gelme olasılıkları sıfır olmayan iki olay olup S evrensel kümesinde tanımlı olsun.

B olayı olduktan sonra A olayının olma olasılığı A'nın koşullu olasılığıdır. $P(A \setminus B)$ şeklinde gösterilir.

$$\boxed{P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B) > 0}$$

Örnek! İki zar birlikte atılıyor. Toplam 6 gelmişse, zarlardan birinin 2 gelme olasılığı.

B: { Toplam 6 gelmesi }  A: { Zarlardan birinin 2 gelmesi }

$A = \{(2,1), (2,3), (2,4), (2,5) (2,6) \dots (6,2)\}$

$B = \{(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)\}$

$P(B) = \frac{5}{36}$  $P(A) = \left(\frac{10}{36}\right)$  $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$

$$P(A \setminus B) = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$$

Örnek

Bir büyük alışveriş merkezinde bir ay boyunca yapılan bir çalışmada 1400 kişi rastgele seçiliyor ve aşağıdaki tablo oluşturuluyor.

| Cinsiyet | E-posta adresi: Var | Yo | Toplam |
|---|---|---|---|
| Erkek | 550 | 250 | 800 |
| Kadın | 400 | 200 | 600 |
| Toplam | 950 | 450 | 1400 |

a) Rastgele seçilen bir kişinin e posta adresi varsa, bu kişinin kadın olma olasılığı nedir?

b) Rastgele seçilen bir kişi kadınsa e posta adresi olmama olasılığı nedir?

8

Tanım: İlk olayın ardışık meydana gelme olasılığı çarpım kuralı kullanılarak hesaplanabilir.

B verilmişken A'nın olasılığı

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \setminus B)$$

Veya

$$P(A \cap B) = P(B \setminus A) \cdot P(A)$$

n tane A olayı için

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \setminus A_1) \cdot P(A_3 \setminus A_1 \cap A_2)$$

$$\cdot P(A_n \setminus A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Örnek Bir kutuda 30 disket var. 5'i arızalıdır. 4 disket arka arkaya rastgele seçiliyor. 4 diskette de sağlam olma olasılığı nedir?

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2 \setminus A_1) P(A_3 \setminus (A_1 \cap A_2)) \cancel{P(A_4 \setminus A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$$

$$\cdot P(A_4 \setminus A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$\frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{23}{28} \cdot \frac{22}{27}$$

Tanım: Bir B olayının ortaya çıkması A olayının ortaya çıkması üzerinde hiçbir etki yapmıyorsa B olayı ile A olayı bağımsız iki olaydırlar. 9

$P(A \setminus B) = P(A) \qquad P(B \setminus A) = P(B)$

ise

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ A ve B olayları bağımsızdır.

$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$

ise bağımsız olaylardır.

Örnek Bir oyun kağıdı destesinden tekrar yerine koymadan 3 kart çekiliyor $A_1$ ilk kartın 4'lü olması $A_2$ ikinci kartın kız olması, $A_3$ üçüncü kartın 1'li olması ise $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ olasılığı nedir?

$P(A_1) = \frac{4}{52}$

$P(A_2 \setminus A_1) = \frac{4}{51}$

$P(A_3 \setminus (A_1 \cap A_2)) = \frac{4}{50}$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{50}$

$= 0{,}00048$

Örnek

Bir veteriner kliniğinde bir yavru kedi ve bir yavru köpek kendilerini sahiplenecek bir aile beklemektedirler. Kedinin sahiplenilme olasılığı 0,85, köpeğininki ise 0,88'dir. Aynı hafta içinde her iki hayvanın birer yuva bulma olasılığı nedir?

~~$P(A \cap B \cap C)$~~ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}85 \cdot 0{,}88 = 0{,}748$

## BAYES Kuralı

Bilinen $P(A \setminus B)$ koşullu olasılığını kullanarak bilinmeyen bir $P(B \setminus A)$ koşullu olasılığını elde etmeye dayanır.

$P(B_i) > 0 \quad i = 1, 2, \ldots, k \quad$ tüm $i \neq j$ için

$B_i \cap B_j = \emptyset$

$B_1, B_2, \ldots, B_k$ olayları $S$ örnek uzayının bir ayrımını oluşturan Herhangi bir $A$ olayı bu örnek uzayın içinde yer alıyorsa

$A \cap B_1, A \cap B_2, \ldots, A \cap B_k$ da $A$'nın bir ayrımını oluşturur.

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} (A \cap B_i)$$ ve $i \neq j$ olmak üzere

$$(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$$

$$A = A\cap S = A\cap(B_1\cup\ldots\cup B_k)$$
$$= (A\cap B_1)\cup\ldots\cup(A\cap B_k)$$

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\ldots+P(A\cap B_k)$$

$$P(A)= P(B_1).P(A|B_1)+\ldots+P(B_k)\,P(A|B_k)$$

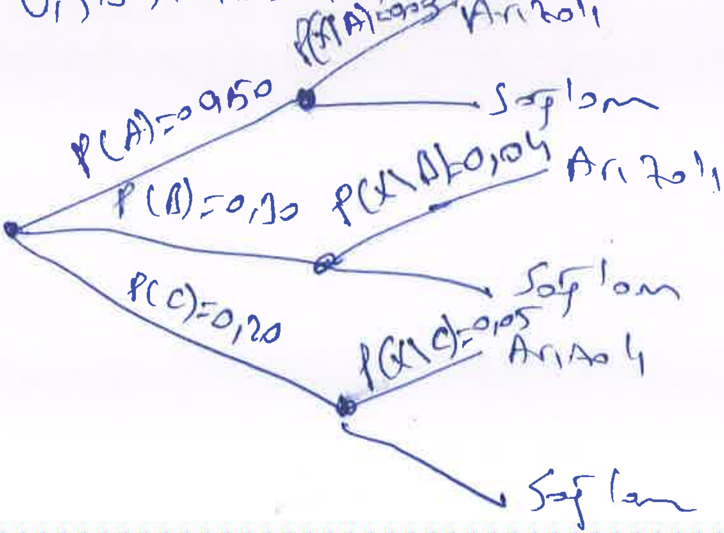
$$\boxed{P(A)=\sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A|B_i)}$$

## Örnek

Bir fabrikada üretilen malların %50'si A makinasında %30'u B makinasında, %20'si C makinasında üretilmektedir. A'daki üretimin %3'ü, B'dekinin %4'ü, C'dekinin %5'i kusurludur. Seçilen bir ürünün kusurlu olma olasılığı nedir? X: kusurlu olma

$$P(X)=P(A).P(X|A)+P(B)\,P(X|B)+P(C)\,P(X|C)$$

$$P(X)= 0{,}50\times0{,}03+0{,}30\times0{,}04+0{,}20\times0{,}05=0{,}037$$



# BAYES TEOREMİ

12

$P(B_i) > 0 \quad i = 1, 2, \ldots k \quad$ tüm $i \neq j$ $B_i \cap B_j = \emptyset$

$B_1, B_2, \ldots, B_k$ Sarnek uzayının ayrımını oluştursun.

Herhangi bir A olayı bu örnek uzayında yer alıyorsa

$$P(B_i \setminus A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)}$$

$$P(B_i \setminus A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A \setminus B_i)}{P(B_1) \cdot P(A \setminus B_1) + P(B_2) P(A \setminus B_2) + \cancel{P(B_3)} + P(B_k) P(A \setminus B_k)}$$

Örnek

Önceki soruda kusurlu ürünün A makinasında üretilme olasılığı nedir?

$$P(A \setminus X) = \frac{P(A) \cdot P(X \setminus A)}{P(A) \cdot P(X \setminus A) + P(B) \cdot P(X \setminus B) + P(C) \cdot P(X \setminus C)}$$

$$P(A \setminus X) = \frac{0{,}50 \; (0{,}03)}{0{,}50 \cdot (0{,}03) + 0{,}30 \cdot (0{,}04) + 0{,}20 \cdot (0{,}05)}$$

$P(A \setminus X) = 0{,}41$