Moment Çıkaran Fonksiyon (1)

X rastgele değişkeninin sıfır civarındaki momentlerini hesaplamada moment çıkaran fonksiyon kullanılır.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak yeni fonksiyon elde edilir. Elde edilen fonksiyondan momentler hesaplanır.

Tanım: X rastgele bir değişken ve t parametre

$$E\left[e^{tx}\right] = M_x(t)$$

$-h^2 < t < h^2$ ise

$$M_x(t) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\infty} e^{x_j \cdot t} \cdot P(x_j) & \text{Kesikli R.D.} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} f(x)\, dx & \text{Sürekli R.D.} \end{cases}$$

$M_x(t)$ yerine bundan sonra $M(t)$ kullanılacaktır.

Örnek:

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{10} & , \ x = 1,2,3,4 \\ 0 & , \ D.d. \end{cases}$$

$$M(t) = E\left[e^{tx}\right] = \sum_{j=1}^{4} e^{tx}\left(\frac{x}{10}\right)$$

$$= e^{1t}\left(\frac{1}{10}\right) + e^{2t}\left(\frac{2}{10}\right) + e^{3t}\left(\frac{3}{10}\right) + e^{4t}\left(\frac{4}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{10} e^{t}\left[1 + 2e^{t} + 3e^{2t} + 4e^{3t}\right]$$

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} h \cdot e^{-hx} & 0 \le x \\ 0 & D.d \end{cases}$$

$t < h$

$$M(t) = \int_{0}^{\infty} e^{tx} \cdot h e^{-hx}\, dx = h \int_{0}^{\infty} e^{x(t-h)}\, dx$$

$$= h \cdot \frac{1}{(t-h)} \cdot e^{x(t-h)} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= h\left(\frac{1}{t-h}\right)(0-1)$$

$$= \frac{h}{h-t}$$

Moment çıkaran fonksiyonun özellikleri ②

1- Moment çıkaran fonksiyonun 1. türevinde $t=0$ konulsa

$$M'(t=0) = \frac{d(M(t))}{dt}\Big|_{t=0} = E(X) = m$$

$$M''(t=0) = \frac{d^2(M(t))}{dt^2}\Big|_{t=0} = E(X^2)$$

$$M^{(n)}(t=0) = \frac{d^n(M(t))}{dt^n}\Big|_{t=0} = E(X^n)$$

Örnek

$$P(X) = \begin{cases} 0,25 & x = 0,1,2,3 \\ 0 & d.d \end{cases}$$

X'in 1. 2. 3. momentlerini bulunuz.

$$M(t) = E(e^{tx}) = \sum_{t=0}^{3} e^{tx} \cdot (0,25) = e^{0t} \cdot 0,25 + e^{1t}(0,25) + e^{2t}(0,25) + e^{3t}(0,25)$$

$$M(t) = 0,25(1 + e^t + e^{2t} + e^{3t}) \ast$$

$$\mu'(t) = 0,25(e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t}) \ast \quad E(X) = \mu'(0) = 1,5$$

$$\mu''(t) = 0,25(e^t + 4e^{2t} + 9e^{3t}) \quad E(X^2) = \mu''(0) = 3,5$$

$$\mu'''(t) = 0,25(e^t + 8e^{2t} + 27e^{3t}) \quad E(X^3) = \mu'''(0) = \underline{9}$$

Örnek:

$$F(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-x} & 0 \leq x \\ 0 & D.d. \end{cases}$$

Varyansı bulunuz. (Moment çıkaran fonksiyon yolu ile)

a) $M(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot x e^{-x} dx = \int_0^\infty x e^{(t-1)x} dx$

$U = x \quad dV = e^{(t-1)} dx \rightarrow dx = du$

$$V = \frac{1}{t-1} e^{(t-1)x}$$

$UV - \int V du$

$x \cdot \frac{1}{t-1} e^{(t-1)x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{t-1} e^{(t-1)x} dx$

$t < 1 \quad \lim_{x \to \infty} x \cdot e^{(t-1)x} \to 0$

$M(t) = - \left(\frac{1}{t-1} \cdot \left(-\frac{1}{t-1} \right) \cdot e^{(t-1)x} \right) \Big|_0^\infty$

$M(t) = \frac{1}{(t-1)^2} - 0 = \frac{1}{(t-1)^2} \quad t \neq 1$

$M'(t) = \left[(t-1)^{-2} \right]' = -2 \frac{1}{(t-1)^3} \Rightarrow M'(0) = 2 = E(x) = M$

$M''(t) = \frac{6}{(t-1)^4} \; ; \; M''(0) = 6 = E(x^2)$

$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 6 - 2^2 = 2$

Özellik 2

X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $M_x(t)$ olsun, a ve b sabit bir sayı olmak üzere $Y = aX+b$ değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_y(t) = E(e^{ty}) = E\left[e^{t(aX+b)}\right] = e^{tb} E(e^{aXt}) = e^{tb} \cdot M_x(at)$$

Özellik 3

Moment çıkaran fonksiyonlar tekniği iki rastgele değişken moment çıkaran fonksiyonları aynı ise bu değişkenlerin dağılımları aynıdır.

Markov Eşitsizliği

X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu bilinmiyorsa bu değişkenin üst olasılıkları hesaplamada kullanılır.

Teorem

$X > 0$ c sabit bir sayı

$$P(X > c) \le \frac{E(X)}{c} \rightarrow \text{Markov eşitsizliği}$$

Örnek: X bir çocuk tiyatrosunda rastgele seçilmiş çocukların yaşlarını gösteren rastgele değişkendir. Bu değişkenin ortalaması $E(X) = 5.5$ ise bir çocuğun yaşının en az 17 olma olasılığı nedir?

$$P(X > 17) \le \frac{5.5}{17} = 0,32$$

↓

Bu olasılık çok düşük olmalıdır. Bu Markov eşitsizliğinin zayıf yanıdır. Chebyshev eşitsizliği kullanılmalıdır.

Chebyshev Eşitsizliği $\quad$ ⑤

$k > 1$ bir veri setinin ortalamadan k standart sapma uzaklığı dakı aralığına düşen değerlerin oranı en az

$1 - \dfrac{1}{k^2}$ 'dir.

$\bar{x} \mp 2s \rightarrow 1 - \dfrac{1}{4} = 0{,}75 < P$

$\bar{x} \mp 3s \rightarrow 1 - \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{8}{9} = 0{,}89 < P$

Teorem

X, ortalaması M varyansı σ^2 olan negatif olmayan değerler alan ve bir olasılık dağılımına sahip olduğu bilinen rastgele bir değişken ise

$k > 0$ için

$P\left(|X - M| \geq k \cdot \sigma \right) \leq \dfrac{1}{k^2}$

veya

$P\left(|X - M| < k\sigma \right) \geq 1 - \dfrac{1}{k^2}$

Örnek

Bir sınıftaki öğrencilerin istatistik dersi not ortalaması 70 ve standart sapması ise, 58 ile 82 arasında not alan öğrencilerin oranı en az kaçtır?

$P\left(|X - M| < k\sigma \right) \geq 1 - \dfrac{1}{k^2}$

$P\left(58 < x < 82 \right) = P\left(58 - 70 < x < 82 - 70 \right)$

$\qquad = P\left(|X - 70| \leq 12 \right) \geq 1 - \dfrac{1}{k^2}$

$k \cdot \sigma = 12 \qquad = P\left(|X - 70| < 12 \right) \geq 1 - \dfrac{1}{9}$

$k \cdot 4 = 12$

$k = 3 \qquad\qquad P\left(|X - 70| < 12 \right) \geq \dfrac{8}{9} = 0{,}89$

Büyük Sayılar Kanunu

Zayıf büyük sayılar kanunu olarak bilinen teorem en çok kullanılan istatistik teoremlerindendir.

Teorem

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ $n \to \infty$ Dağılımları aynı

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow M$$

Ortalaması bilinmeyen bir yığından çekilen örneklerin birim sayısı arttırıldığında örnek ortalaması yığın ortalamasına yaklaşacaktır. $\varepsilon > 0$ ve çok küçük bir sayı ise

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|\bar{x} - M| < \varepsilon\right) = 1 \quad \Leftarrow$$

Veya

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|\bar{x} - M| \geq \varepsilon\right) = 0$$

İspat: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \dfrac{n \cdot M}{n} = M$

$E(\bar{x}) = E\left(\dfrac{x_1}{n}\right) + E\left(\dfrac{x_2}{n}\right) + \cdots + E\left(\dfrac{x_n}{n}\right) = \dfrac{M}{n} + \cdots + \dfrac{M}{n} = n\dfrac{M}{n} = M$

$Var(\bar{x}) = Var\left(\dfrac{x_1}{n}\right) + Var\left(\dfrac{x_2}{n}\right) + \cdots + Var\left(\dfrac{x_n}{n}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n^2} + \cdots + \dfrac{\sigma^2}{n^2} = \dfrac{\sigma^2 \cdot n}{n^2} = \dfrac{\sigma^2}{n}$

$\forall \varepsilon > 0$ için

$$P\left(|\bar{x} - M| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var(\bar{x})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|\bar{x} - M| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Soru1. $P(X) = \begin{cases} Cx^2 & x = 1,2,3 \\ 0 & D.D. \end{cases}$

fonksiyon olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

C kaçtır.

$P(x > 2) = ?$

Soru2.

$f(x) = \begin{cases} Kx(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & D.d. \end{cases}$

a) K nedir?

b) $P(0,5 \le x \le 0,9) = ?$

c) $F(x) = ?$

d) $P(x \le 0,3 \setminus x \le 0,5)$ olasılığı kaçtır?

Soru 3. Bir grup ev kadınının televizyon seyretme süresi bir ayda ortalama 3 saattir. Standart sapması ise 0.5 saattir.

2 ile 4 saat arası TV seyretme olasılığı