kadai3

Akiko Sada

2018年5月1日

Q1

Re-read “Properties of matrices”, then describe “rank”, “determinant”, “trace” and “eigen values as you like

Q1-1.階数(rank)

行の基本変形によって行列を左上から右下に斜めに０が増えるように並べた階段行列にしたとき、すべての成分が0にならない行列の数を階数またはランクといい、rankAまたはrank(A)と表す。行の基本変形とは①１つの行をk倍する。②1つの行に他の行をk倍して加える。③2つの行を入れかえる。の３つ。

```
X <- matrix(c(2,1,-1,1,0,2,1,2,-8),3,3) #1 for example
X
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    1    1
## [2,]    1    0    2
## [3,]   -1    2   -8
```

```
X1 <-matrix(c(2,1,1),1,3)
X2 <-matrix(c(1,0,2),1,3)
X3 <-matrix(c(-1,2,-8),1,3)
Xa<-rbind(X1,X2,X3) # same as #1
Xb<-rbind(X2,X1,X3) #行の基本変形③
#Xb
Xc<-rbind(X2,X1-2*X2,X3+X2)#行の基本変形①②
#Xc
Xd <-rbind(X2,X1-2*X2,X3+X2-2*(X1-2*X2))
Xd #rank(A)=2
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    2
## [2,]    0    1   -3
## [3,]    0    0    0
```

```
library(Matrix)
rankMatrix(X)[[1]] # 同じく
```

```
## [1] 2
```

Q-1-2.行列式(Determinant)

行列が数の配列を表すのに対し、行列式は正方行列それぞれが持っている固有の数値であり、正方行列の性質を表す指標（行列による変換の倍率）となる。一つの実数で示され、n次の正方行列Aの行列式は絶対値のような記号|A|か、det(A)と表記される。

行列式の定義1

$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\ldots a_{n\sigma(n)}$:行列の各行のどこかの成分（どこかの列のもの）をすべて掛け合わせたもの。

sgn(σ): 組み合わせにより、負号を適当に変えている。

∑σ∈Sn: これらについて、「n次置換全体について和をとって」いる。（全てのパターンについての合計をとっている）

引用：https://qiita.com/nognog/items/2c3a42c620044e8b17ef (https://qiita.com/nognog/items/2c3a42c620044e8b17ef)

$$|A| = \sum_{\sigma \in Sn} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\ldots a_{n\sigma(n)}$$

行列式の定義2(帰納的見地から)

n次の正方行列A

n=1のとき、|A|=|a|=a

n>1のとき (第j列で展開、あるいは第i行で展開。n=2の時は|A|=ad-bc,n=3の時はサラスの公式もある)

$$|A| = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \ldots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}$$

$\tilde{a}_{nj}$ は余因子

引用（改変）：すぐわかる線形代数

```
X2<-matrix(c(1,-3,2,-5,0,4,6,1,-2),3,3)#例として
X2
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1   -5    6
## [2,]   -3    0    1
## [3,]    2    4   -2
```

```
det(X2)
```

```
## [1] -56
```

Q-1-3. トレース(跡) (Trace)

正方行列Aに対して対角成分の和をトレースといい、trAと表す。 トレースの公式

① Tr(A+B)=TrA+TrB

② Tr(cA)=cTrA

③ Tr(AB)=Tr(BA)

```
A=matrix(c(1,3,2,4),2,2)#例
B=matrix(c(5,6,7,8),2,2)
A
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    2
## [2,]    3    4
```

```
B
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    5    7
## [2,]    6    8
```

```
sum(diag(A+B))# Trace公式 ①
```

```
## [1] 18
```

```
sum(diag(A))+sum(diag(B))# Trace公式 ①
```

```
## [1] 18
```

```
sum(diag(2*A)) # Trace公式 ②
```

```
## [1] 10
```

```
2*sum(diag(A)) # Trace公式 ②
```

```
## [1] 10
```

```
sum(diag(A%*%B))# Trace公式 ③
```

```
## [1] 70
```

```
sum(diag(B%*%A))# Trace公式 ③
```

```
## [1] 70
```

Q-1-4.固有値(Eigen values)

あるベクトルを線形変換してもまったく同じ方向の場合がある。このようなベクトルを固有ベクトルといい、元のベクトルの何倍になったかを固有値という。

下の例では、固有値λ=-4,2

λ=-4に対する固有ベクトルはy=-2x

λ=2に対する固有ベクトルはy=x

```
C=matrix(c(0,4,2,-2),2,2)#例として
C
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    0    2
## [2,]    4   -2
```

```
eigen(C)
```

```
## eigen() decomposition
## $values
## [1] -4  2
## 
## $vectors
##            [,1]      [,2]
## [1,] -0.4472136 0.7071068
## [2,]  0.8944272 0.7071068
```

Q2

Linear model, “y=ax + b” can be considered as an affine transformation. Assume a transformation that moves a point (x,0) to (x,ax). Make a matrix that does the transformation. Then make a matrix that moves a point (x,0) to x,ax+b). How about a matrix that moves (x1,x2,0) to (a1x1 + a2x2,b1x1+b2x2). Then a matrix that moves (x1,x2,0) to (a1x1+a2x2+c,b1x1+b2x2+d).

Q2-1

a transformation that moves a point (x,0) to (x,ax)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ a, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix}$$

Q2-2

Then make a matrix that moves a point (x,0) to (x,ax+b)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0,0 \\ a,0,b \\ 0,0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ax+b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Q2-3

How about a matrix that moves (x1,x2,0) to (a1x1 + a2x2,b1x1+b2x2).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1,a2,0,0 \\ b1,b2,0,0 \\ 0,0,0,0 \\ 0,0,0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1x1+a2x2 \\ b1x1+b2x2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Q2-4

Then a matrix that moves (x1,x2,0) to (a1x1+a2x2+c,b1x1+b2x2+d).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1,a2,0,c \\ b1,b2,0,d \\ 0,0,0,0 \\ 0,0,0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1x1+a2x2+c \\ b1x1+b2x2+d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$