

Systems of Linear Equations with Matrix 行列で連立方程式

ryamada

2016年12月24日

- 1 変数の数と等式の数 Number of variables and number of equations
- 2 Exercise 1
 - 2.1 Exercise 1-1
 - 2.2 Exercise 1-2

1 変数の数と等式の数 Number of variables and number of equations

変数の数と等式の数が等しいとき(一次独立なら)解が求まる。

それは、線形回帰において、 X が正方行列である、ということと、 X に逆行列が存在するということに対応し、解が求まるとは、 $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0$ になるということ。

$$y = Xa$$

$$a = X^{-1}y$$

```
d <- 10
n <- 10
X <- matrix(rnorm(d*n), ncol=d)
a <- rnorm(d)
a
```

```
## [1] -0.7772115  1.7322038 -1.3431558  1.5664851 -0.5519190 -1.6311468
## [7]  1.6827799 -0.7058661  2.3084458  0.6982689
```

```
y <- X %*% a
a.est <- solve(X) %*% y
a.est
```

```
##           [, 1]
## [1,] -0.7772115
## [2,]  1.7322038
## [3,] -1.3431558
## [4,]  1.5664851
## [5,] -0.5519190
## [6,] -1.6311468
## [7,]  1.6827799
## [8,] -0.7058661
## [9,]  2.3084458
## [10,]  0.6982689
```

線形回帰では以下の計算をした。

$$a = (X^T X)^{-1} X^T y$$

やってみる。

```
a.est2 <- solve(t(X) %*% X) %*% t(X) %*% y
a.est
```

```
##           [,1]
## [1,] -0.7772115
## [2,]  1.7322038
## [3,] -1.3431558
## [4,]  1.5664851
## [5,] -0.5519190
## [6,] -1.6311468
## [7,]  1.6827799
## [8,] -0.7058661
## [9,]  2.3084458
## [10,] 0.6982689
```

```
a
```

```
## [1] -0.7772115  1.7322038 -1.3431558  1.5664851 -0.5519190 -1.6311468
## [7]  1.6827799 -0.7058661  2.3084458  0.6982689
```

確かに結果は同じ。

残差も0になっている。

```
y.hat <- X %*% a.est
y-y.hat
```

```
##           [,1]
## [1,] -3.108624e-15
## [2,] -8.881784e-16
## [3,] -4.440892e-16
## [4,] -5.551115e-15
## [5,]  1.776357e-15
## [6,] -3.552714e-15
## [7,] -8.881784e-16
## [8,]  0.000000e+00
## [9,] -6.883383e-15
## [10,] 6.661338e-16
```

```
sum((y-y.hat)^2)
```

```
## [1] 1.058553e-28
```

つまり、

$$X^{-1} = (X^T X)^{-1} X^T$$

なわけである。

計算してみる。

```
X1 <- solve(X)
X2 <- solve(t(X)%*%X) %*% t(X)
round(X1, 8)
```

```
##           [, 1]      [, 2]      [, 3]      [, 4]      [, 5]
## [1,]  0.71140144 -0.60472478 -0.37596932 -0.23048953 -0.73143927
## [2,] -0.10991394 -0.26194624  0.03006912 -0.09961373 -0.12961374
## [3,]  0.48662866 -0.79574041 -0.80060129 -0.59896037 -0.52867154
## [4,]  0.49128612  0.02114678 -0.38154592 -0.17013005 -0.09941512
## [5,] -0.07310616 -0.21528443 -0.19573327  0.10927246 -0.11109627
## [6,] -1.13345220  1.10196719  0.85422461  0.63586160  1.46689992
## [7,] -0.23070294  0.05200230  0.01446923  0.05254362 -0.17724835
## [8,] -1.02937887  0.99568780  0.64447441  0.75086442  1.47974125
## [9,]  0.53033316 -0.51340655 -0.23051980 -0.20010358 -0.61053699
## [10,] 0.91061001 -0.89921377 -0.95430309 -0.49620487 -0.69369841
##           [, 6]      [, 7]      [, 8]      [, 9]      [, 10]
## [1,] -0.48900060  0.4096200 -0.50155281 -0.45032457 -0.4777826
## [2,]  0.16614166  0.2760187  0.20434033 -0.35455511 -0.4037815
## [3,] -0.17229870  0.2653686 -0.72863749 -0.60472991 -0.3371587
## [4,]  0.02141072 -0.2894664 -0.19781469  0.30975645 -0.1657830
## [5,] -0.17624625  0.2159692 -0.05343315 -0.27410113 -0.3247149
## [6,] -0.14993515 -0.4068465  0.98630120  1.03702686  1.0897214
## [7,]  0.05176604 -0.0104048  0.17694718  0.09020358 -0.1230412
## [8,]  0.05594381 -0.2482461  0.96244043  0.79060115  1.9074444
## [9,] -0.12842167 -0.1862306 -0.39048343 -0.32517974 -0.7696064
## [10,] 0.05768277  0.3535710 -0.84082209 -0.29310243 -0.2403868
```

```
round(X2, 8)
```

```
##           [, 1]      [, 2]      [, 3]      [, 4]      [, 5]
## [1,]  0.71140144 -0.60472478 -0.37596932 -0.23048953 -0.73143927
## [2,] -0.10991394 -0.26194624  0.03006912 -0.09961373 -0.12961374
## [3,]  0.48662866 -0.79574041 -0.80060129 -0.59896037 -0.52867154
## [4,]  0.49128612  0.02114678 -0.38154592 -0.17013005 -0.09941512
## [5,] -0.07310616 -0.21528443 -0.19573327  0.10927246 -0.11109627
## [6,] -1.13345220  1.10196719  0.85422461  0.63586160  1.46689992
## [7,] -0.23070294  0.05200230  0.01446923  0.05254362 -0.17724835
## [8,] -1.02937887  0.99568780  0.64447441  0.75086442  1.47974125
## [9,]  0.53033316 -0.51340655 -0.23051980 -0.20010358 -0.61053699
## [10,] 0.91061001 -0.89921377 -0.95430309 -0.49620487 -0.69369841
##           [, 6]      [, 7]      [, 8]      [, 9]      [, 10]
## [1,] -0.48900060  0.4096200 -0.50155281 -0.45032457 -0.4777826
## [2,]  0.16614166  0.2760187  0.20434033 -0.35455511 -0.4037815
## [3,] -0.17229870  0.2653686 -0.72863749 -0.60472991 -0.3371587
## [4,]  0.02141072 -0.2894664 -0.19781469  0.30975645 -0.1657830
## [5,] -0.17624625  0.2159692 -0.05343315 -0.27410113 -0.3247149
## [6,] -0.14993515 -0.4068465  0.98630120  1.03702686  1.0897214
## [7,]  0.05176604 -0.0104048  0.17694718  0.09020358 -0.1230412
## [8,]  0.05594381 -0.2482461  0.96244043  0.79060115  1.9074444
## [9,] -0.12842167 -0.1862306 -0.39048343 -0.32517974 -0.7696064
## [10,] 0.05768277  0.3535710 -0.84082209 -0.29310243 -0.2403868
```

```
round(X1-X2, 8)
```

```
##      [, 1] [, 2] [, 3] [, 4] [, 5] [, 6] [, 7] [, 8] [, 9] [, 10]
## [1,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
## [2,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
## [3,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
## [4,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
## [5,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
## [6,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
## [7,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
## [8,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
## [9,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
## [10,]   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
```

確かにそうになっている。

もう一度式を見てみる。

$$X^{-1} = (X^T X)^{-1} X^T$$

両辺に右から $(X^T)^{-1}$ を掛けて

$$X^{-1} (X^T)^{-1} = (X^T X)^{-1}$$

となる。

これは逆行列の一般的な性質

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

について、 $A = X^T, B = X$ と置いたものである。

ちなみに、 AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ が $B^{-1} A^{-1}$ であることは

$$ABB^{-1}A^{-1}$$

を二通りでかっこで区切ることで解る。

$$ABB^{-1}A^{-1} = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$

右辺は、

$$A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

これから中辺が

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$$

となるから、この式の意味することは AB の逆行列が $B^{-1}A^{-1}$ であることである。

2 Exercise 1

2.1 Excercise 1-1

連立方程式

$$\begin{aligned}3a_1 + 2a_2 - 4a_3 &= 4 \\2a_1 - 6a_2 + 3a_3 &= -1 \\5a_1 + a_2 + 4a_3 &= 3\end{aligned}$$

は

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, 2, -4 \\ 2, -6, 3 \\ 5, 1, 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3, 2, -4 \\ 2, -6, 3 \\ 5, 1, 4 \end{pmatrix}$$

と置けば

$$y = X\mathbf{a}$$

となり、線形回帰の形である。

これを利用して、上の連立方程式を解け。

2.2 Exercise 1-2

変数の数と等式の数が多い連立方程式を作って、連立方程式として書き、それを行列を使って解け。