Homework 3

Takuma Yamamiya (M1)

2018/4/27

1 Q1

1.1 rank

行列の rank は、行列を行ベクトルあるいは列ベクトルの集合とみなしたときに、異なる方向を持つベクトルの数の少ない方の値を示す。相似な行列では同じ値になる。行列 A に対して、rank(A) $<$ min(A の行数,A の列数) が成り立つとき、行列内に同じ方向を示すベクトルが含まれることがわかる。この場合、固有値の少なくとも一つは 0 になり、この行列によるベクトルの変換は不可逆的なものになる。rank(A)=min(A の行数,A の列数) の時、行列 A の固有値は全て 0 ではない。
行列の形で与えられたデータセットから、定数倍関係にあるベクトルの存在を発見することができる。

1.2 determinant

Determinant は正方行列に対して定義される値で、eigen value の総乗であることが知られている。相似な行列では同じ値になる。つまり eigen value のうちに 1 つでも 0 が含まれると、determinant は 0 になる。
Determinant が 0 の場合、eigen value のうち少なくとも 1 つは 0 のため、その行列は逆行列をもたない。
($A = VSV^{-1}$ と固有値分解すると、

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とできる。($\lambda_1 \sim \lambda_n$ は A の eigen value)
$A^{-1} = VS^{-1}V^{-1}$ であるが、S^{-1} は $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ... \frac{1}{\lambda_n}$ を成分とする対角行列で

あるので、A^{-1} が定義されるためには、全ての eigen value が 0 ではない必要がある。)

1.3 trace

Trace も Determinant と同様に、正方行列に定義される値で、主対角成分の和である。eigen value の総和であることが知られている。相似な行列では同じ値になる。

1.4 eigenvalue

Eigenvalue は正方行列 A を固有値分解して、

$$A = VSV^{-1}$$

となったときの、対角行列 S の対角成分である。
各 eigenvalue は対となる eigenvector をもち、A はその eigenvector を eigenvalue 倍、同じ方向に延長、あるいは縮小する変換を行う。
行列 A によるベクトルの変換は、回転行列 V による回転の後、eigenvector の値だけスカラー倍され、V^{-1} によって先ほどと反対方向に回転される、という変換と理解できる。
rank,determinant,trace は eigenvalue が求められれば、計算することができる。つまり eigenvalue が同じ正方行列は上の 3 つが同じ値となる。
分散共分散行列では eigenvalue は全て正になる。対称行列でもあるので、正定値行列と呼ばれる。任意のベクトル v、正定値行列 M に対し、以下の式が成り立つことが知られている。

$$v^T M v > 0$$

1.5 Summary

Rank, determinant, trace, eigenvalue はいずれも与えられた行列のデータを集約した値、あるいは数列として扱うことができ、非常に要素の多いデータセット間の比較などに役立てることができる。 多変数多サンプルのデータセットは規則性や類似性などのデータの読み取りが困難であるが、分散共分散行列を求めて、Determinant, trace, eigenvalue を計算することで、自由度が低い読み取りやすいデータに変換されるため、データのばらつきの調査に役立てることができる。

2 Q2

The matrix A that does a transformation that moves a point $(x, 0)$to(x, ax) is,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix}$$

So, the matrix A' that does a affine transformation that moves a point $(x, 0)\ to\ (x, ax + b)$is,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ax + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

The matrix B that does a transformation that moves a point $(x_1, x_2, 0)\ to\ (ax_1 + ax_2, bx_1 + bx_2)$is,

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & s \\ b_1 & b_2 & t \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2 + x_2 \\ b_1x_1 + b_2x_2 \end{pmatrix}$$

So, the matrix B' does a affine transformation that moves a point $(x_1, x_2, 0)\ to\ (ax_1 + ax_2 + c, bx_1 + bx_2 + d)$is,

$$B' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & s & c \\ b_1 & b_2 & t & d \\ 0 & 0 & u & 1 \end{pmatrix}$$

$$B' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + c \\ b_1x_1 + b_2x_2 + d \\ 1 \end{pmatrix}$$