[2018 前期火 5] 統計遺伝学 I: 課題（4 月 17 日）

Toru YOSHIYASU

2018 年 4 月 20 日

Exercises 1-1

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表せば、

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bq \\ cp + dq \end{pmatrix}$$

である。$q \neq 0$ の時、第 4 成分 d は

$$d = \frac{q - cp}{q}$$

と表せる。$q = 0$ の時、$p \neq 0$ に注意すれば $a = 1$ かつ $c = 0$ と同値となり、特に第 4 成分 d は任意の値をとりうる。

Exercises 1-2

仮定より、$M \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2M \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$ となる。

Exercises 1-3

E を 2×2 単位行列とする。この仮定は、方程式 $(M - E) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が自明な解 $p = q = 0$ しか許容しないことと同値。このことは、$M - E$ が逆行列を持たないことと同値。これが求める M の条件である。

Exercises 2-1

l_1 と l_2 を固有値、v_1 と v_2 をそれぞれの固有ベクトルとし、関数を次のように定義する。

```
matrix.desired.eigen <- function(l_1,l_2,v_1,v_2){
   eig <- matrix(c(v_1,v_2),2,2)
   mat <- eig %*% matrix(c(l_1,0,0,l_2),2,2) %*% solve(eig)
   return(mat)
}
```

Exercises 2-2

```
> M %*% eigen(M)[[2]][,1]
         [,1]
[1,] 2.236068
[2,] 4.472136
> 5*eigen(M)[[2]][,1]
[1] 2.236068 4.472136
```

Exercises 2-3

eigen コマンドで求まる固有ベクトルたちは $\mathbb{R}^2$ の基底をなしているので、もう一本の基底の行き先を計算すれば十分。

```
> M %*% eigen(M)[[2]][,2]
     [,1]
[1,]    0
[2,]    0
```

Exercises 2-4

M の逆行列を計算すると、以下のエラーが出た。

```
> solve(M)
Error in solve.default(M) :
 Lapack routine dgesv: system is exactly singular: U[2,2] = 0
```

逆行列が存在するなら、問題文にあるような逆変換が可能である。一方、Exersises 2-3 で見たように、この行列 M はゼロ以外のベクトルもゼロベクトルに移すことがある。つまり、逆変換をゼロベクトルに施そうとしても、行き先が一意に定まらない。これが逆行列を求められない理由である。

Exercises 2-5

行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の固有方程式は、

$$0 = (1-\lambda)(4-\lambda) - 2\cdot 3 = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = \left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{4}$$

だから、固有値は

$$\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$$

である。

Exercises 2-6

行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式は、

$$0 = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda - bc = \left(\lambda - \frac{a+d}{2}\right)^2 - \frac{(a+d)^2}{4} + ad - bc$$

だから、固有値は

$$\frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

である。

Exercises 2-7

条件式 $(a+d)^2 - 4(ad-bc) < 0$ に $a=1$ かつ $b=1$ を代入して、

$$0 > (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (d+1)^2 - 4(d-c)$$

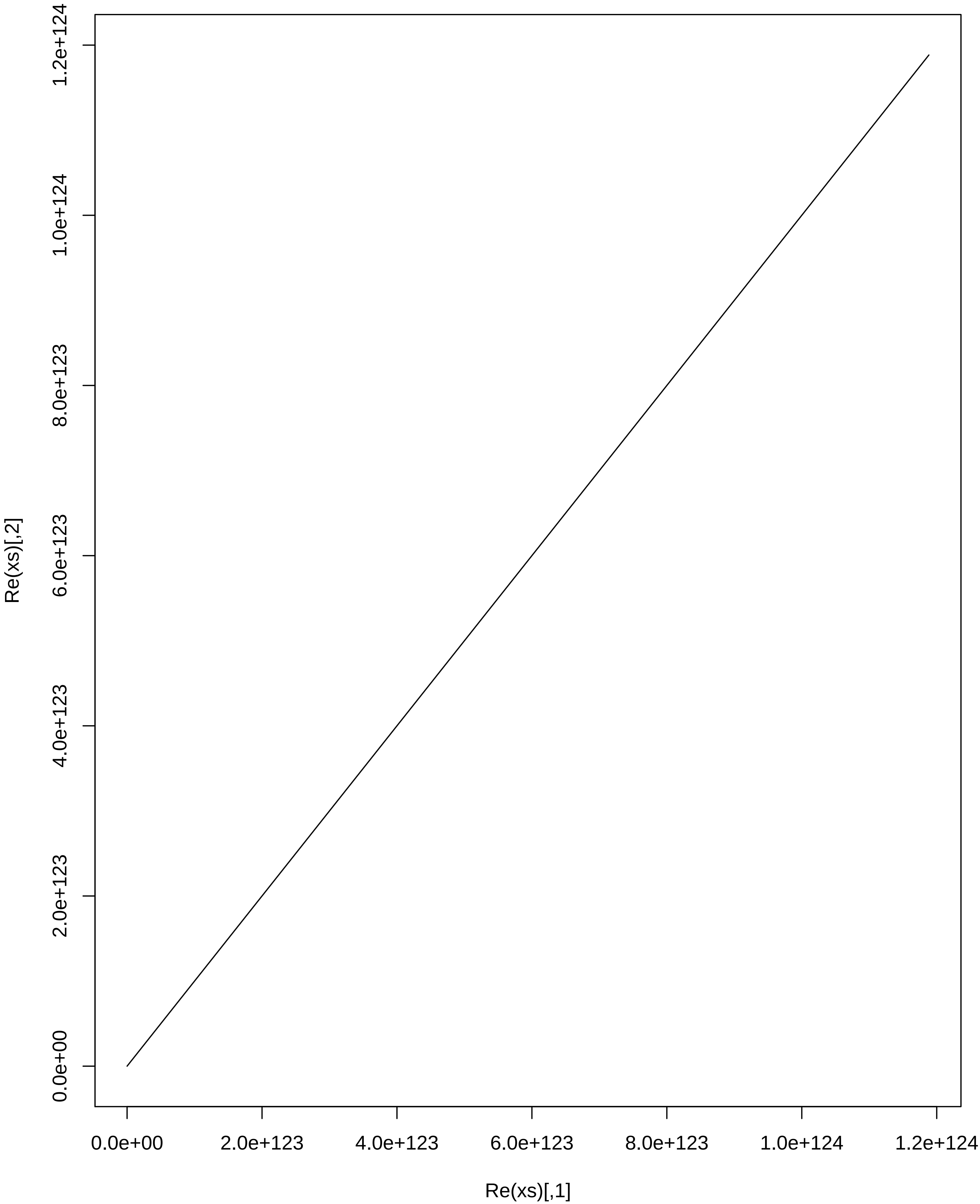
となる。$(c,d)=(-1,1)$ はこれを満たすから、$M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ は複素数の固有値を持つ。

Exercises 2-8

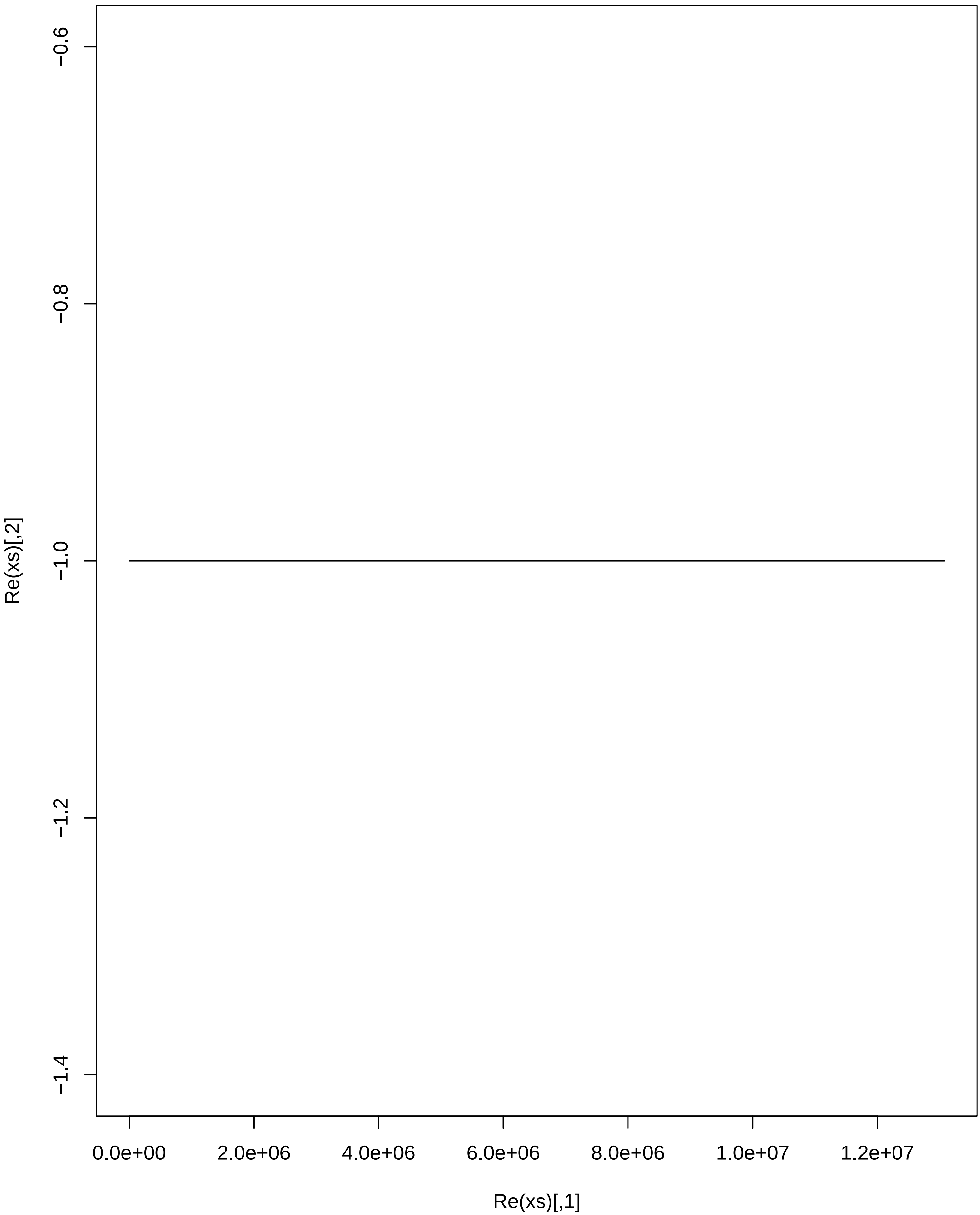
前回の課題で作成した関数

```
my.matrix.exp <- function(x,t){
  eigen.out <- eigen(x)
  s <- eigen.out[[1]]
  V <- eigen.out[[2]]
  return(V %*% diag(exp(t * s)) %*% solve(V))
}
my.exp2.plot <- function(A){
  t <- seq(from=0, to=30, length=100)
  x0 <- c(5,-1)
  xs <- matrix(0,length(t),2)
  for(i in 1:length(t)){
    xs[i,] <- my.matrix.exp(A,t[i]) %*% x0
  }
  matplot(xs,type="l")
  plot(Re(xs),type="l")
}
```

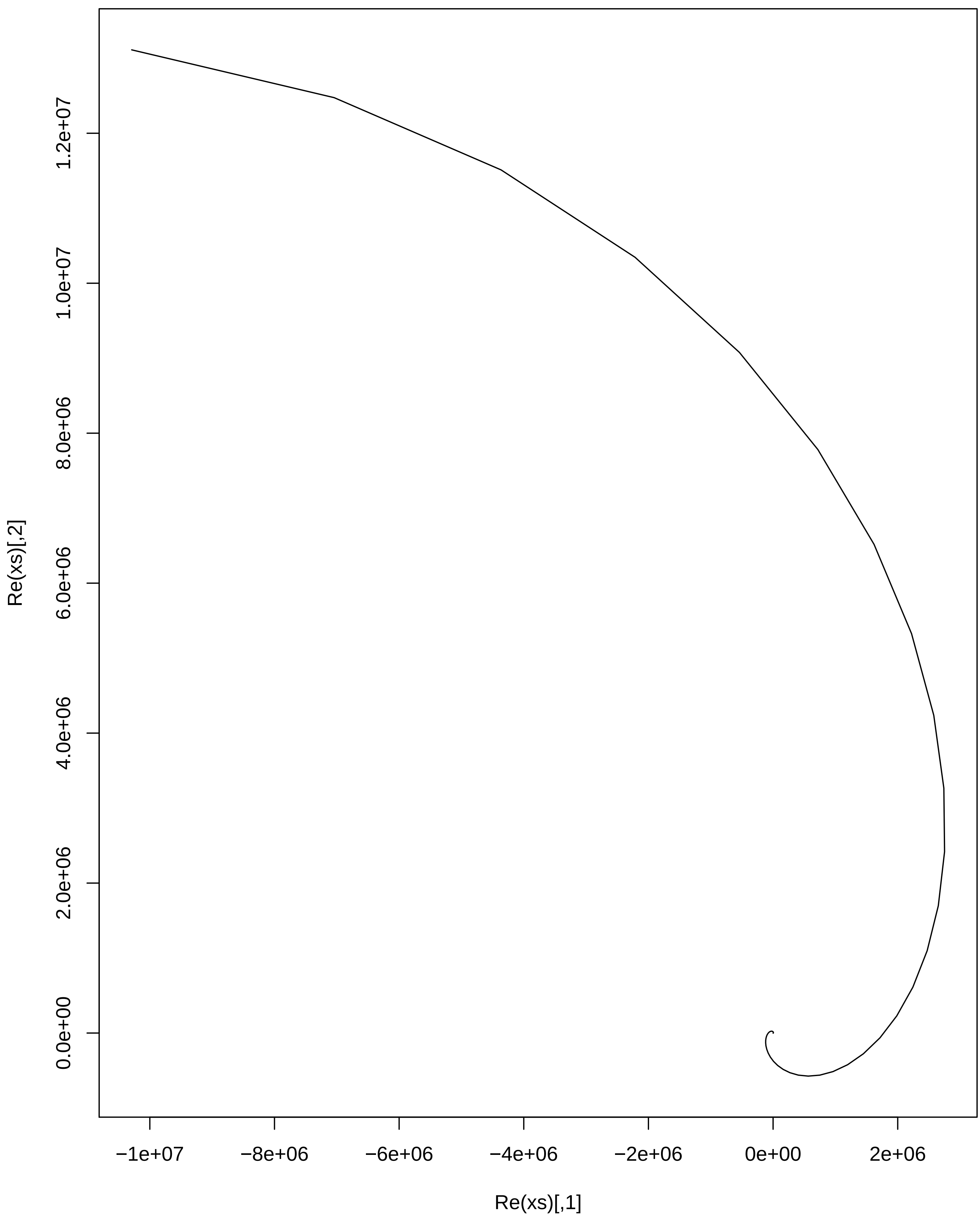
を用いる。異なる二つの 0 でない実固有値を持つものとして $\begin{pmatrix}5 & 4.5\\ 4.5 & 5\end{pmatrix}$ 、一つの固有値が 0 でもう一つの固有値が 0 でない実数となるものとして $\begin{pmatrix}0.5 & 0.5\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 、二つの固有値が複素数のものとして $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ を考える。それぞれの出力結果は以下のようになった。



Re(xs)[,2]
1.2e+124
1.0e+124
8.0e+123
6.0e+123
4.0e+123
2.0e+123
0.0e+00
0.0e+00
2.0e+123
4.0e+123
6.0e+123
8.0e+123
1.0e+124
1.2e+124
Re(xs)[,1]



−0.6
−0.8
−1.0
−1.2
−1.4
Re(xs)[,2]
0.0e+00
2.0e+06
4.0e+06
6.0e+06
8.0e+06
1.0e+07
1.2e+07
Re(xs)[,1]


Re(xs)[,2]
1.2e+07
1.0e+07
8.0e+06
6.0e+06
4.0e+06
2.0e+06
0.0e+00
−1e+07
−8e+06
−6e+06
−4e+06
−2e+06
0e+00
2e+06
Re(xs)[,1]

Exercises 3-1

点 $(1,2)$ を動かさないことから、この分だけ平行移動することで線型変換の部分を先に求める。$(2,2) \mapsto (3,5)$ は $(1,0) \mapsto (2,3)$、$(1,3) \mapsto (4,6)$ は $(0,1) \mapsto (3,4)$ と解釈されて、線型変換の部分を表す行列 $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ となる。点 (x_1, x_2) が移る点 (y_1, y_2) は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

と計算される。したがって、求めるアフィン変換の 3×3 行列表示は $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 3 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。実際、

```
> A <- matrix(c(2,3,0,3,4,0,-7,-9,1),3,3)
> A %*% matrix(c(1,2,1),3,1)
     [,1]
[1,]    1
[2,]    2
[3,]    1
> A %*% matrix(c(2,2,1),3,1)
     [,1]
[1,]    3
[2,]    5
[3,]    1
> A %*% matrix(c(1,3,1),3,1)
     [,1]
[1,]    4
[2,]    6
[3,]    1
```

となる。