[2018 前期火 5] 統計遺伝学 I: 課題（4 月 24 日）

Toru YOSHIYASU

2018 年 5 月 1 日

Properties of matrices

1. rank
   行列 M の rank とは、M のゼロ以外の固有値の重複を込めた個数のこと。
2. determinant
   行列 M の determinant とは、M の固有値すべての積をとった値のこと。
3. trace
   行列 M の trace とは、M の固有値すべての和をとった値のこと。
4. eigenvalues
   行列 M は基底変換によって単純化でき、ほとんどの場合、各座標軸方向をスカラー倍するものとなる。M の eigenvalues とは、各軸方向の拡大・縮小率のこと。

Affine transformation

1. 変換 $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix}$ は線型だから、2×2 行列で表せる。例えば、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ がこれを満たす。
2. 変換 $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ ax+b \end{pmatrix}$ は $b \neq 0$ のとき線型でないので、2×2 行列で表すことはできない。そこで、ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ をベクトル $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と同一視して、変

換 $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ ax+b \\ 1 \end{pmatrix}$ を表す行列を探す。すると、これを満たす行列として $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が挙げられる。

3. 変換 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 \\ b_1x_1 + b_2x_2 \end{pmatrix}$ は線型なので、2×3 行列で表せる。例えば、$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$ がこれを満たす。

4. 変換 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + c \\ b_1x_1 + b_2x_2 + d \end{pmatrix}$ は $cd \neq 0$ のとき線型でないので、2×3 行列で表すことはできない。そこで、問題 2 と同様に変換 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + c \\ b_1x_1 + b_2x_2 + d \\ 1 \end{pmatrix}$ を表す行列を探す。すると、これを満たす行列として $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & c \\ b_1 & b_2 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が挙げられる。