Bloque 1

4. Calcular los siguientes límites

<u>Definición de límite:</u> Sea f: A $\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que la función f tiene por límite l en el punto a (es decir, $\lim_{x \to a} f(x) = l$), si $\forall \mathcal{E} >,\ \exists \partial > 0 \,/\, 0 < |x - a| < \partial \Rightarrow |f(x) - l| < \mathcal{E}$

- Límite por la derecha: $\lim_{x \to a^+} f(x) = l,\quad \forall \mathcal{E} > 0,\ \exists \partial > 0 \,/\, a < x < a + \partial \Rightarrow |f(x) - l| < \mathcal{E}$
- Límite por la izquierda: $\lim_{x \to a^-} f(x) = l,\quad \forall \mathcal{E} > 0, \exists \partial > 0 \,/\, a - \partial < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \mathcal{E}$

<u>Definición de infinitésimo:</u> Se dice que la función $f(x)$ es un infinitésimo cuando x tiende a a si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y se escribe como $< f(x), a >$.
<u>Infinitésimos equivalentes:</u> Se dice que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Además, cualquier infinitésimo que aparezca como factor o divisor en la expresión de un límite puede sustituirse por otro infinitésimo equivalente.

a) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^3-1}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right) = \frac{0}{3} = 0$

b) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^m-x^n}{x^n-1}\right) = \frac{1^m-1^n}{1^n-1} = \frac{m-n}{n}$

c) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 5x}{x}\right) = \frac{0}{0} =^* \lim_{x \to 0} \left(\frac{5x}{x}\right) = 5$

$* < \sin x\,, 0 > \approx < x, 0 >$

d) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (-1)^x = -1^0 = 1$

e) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1-a^x}{2x \ln a}\right) = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{-(a^x-1)}{2x \ln a}\right) =^* \lim_{x \to 0} \left(\frac{-(\ln a^x)}{2x \ln a}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{-(x \ln a)}{2x \ln a}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{-x}{2x}\right) = -\frac{1}{2}$

$* < a^x - 1{,}0 > \approx < \ln a^x - 1{,}0 >$

f) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{2x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1^\infty}{2} = 0$

g) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^3-27}}{\sqrt[3]{x^2+6x-27}}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt[3]{(x-3)(x^2+3x+9)}}{\sqrt[3]{(x-3)(x+9)}}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt[3]{(x^2+3x+9)}}{\sqrt[3]{(x+9)}}\right) = \sqrt[3]{\frac{27}{12}} = \frac{3}{\sqrt[3]{12}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{4}$

h) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}\right) = \frac{0}{0} = = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{-(\cos x-\sin x)}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}\right)$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\cos x) = \frac{-2\sqrt{2}}{2}$

i) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right))\right) = \infty \times 0 =^* \lim_{x\to-\infty}\left(x^2\,\frac{1}{2x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$* < 1-\cos x\,, 0 > \approx < \frac{x^2}{2}, 0 > \to < 1-\cos\frac{1}{x}, 0 > \approx < \frac{1}{2x^2}, 0 >$

j) $\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}\ln(x+e^{2x}))} = e^{\lim_{x\to 0}(\frac{\ln(x+e^{2x})}{x})} = e^{\frac{0}{0}} =* e^{\lim_{x\to 0}(\frac{1+2e^{2x}}{x+e^{2x}})} =$

$e^{\frac{3}{1}} = e^3$

* Regla de L'Hopital

Bloque 2

16. Estudiar crecimiento y extremos de las siguientes funciones

Sea una función $f\colon I \to \mathbb{R}$, derivable en I, es estrictamente creciente si $f(x)' > 0$ (y monótona creciente si $f(x)' \geq 0$). Entonces, es estrictamente decreciente si $f(x)' < 0$ (y monótona decreciente si $f(x)' \leq 0$).

Extremos relativos: Sea una función $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y x_0 un punto interior de I, entonces x_0 es un máximo relativo si $f(x_0) \geq f(x)\ \ \forall\, x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap I$. Y x_0 es un mínimo relativo si $f(x_0) \leq f(x)\ \ \forall\, x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap I$.
Extremos absolutos: Sea una función $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y x_0 un punto interior de I, entonces x_0 es un máximo absoluto si $f(x_0) \geq f(x)\ \ \forall\, x \in I$. Y x_0 es un mínimo relativo si $f(x_0) \leq f(x)\ \ \forall\, x \in I$.

a) $f_1(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ Dom: $\mathbb{R}$

$$f_1'(x) = \frac{2x^2(1+x^2) - 2x\,x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2 + 2x^4 - 2x^4}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \longrightarrow f_1'(x) \text{ siempre} > 0$$

$$f_1'(x) = 0 \to 2x^2 = 0 \to x = 0$$

$f_1'(-1) > 0$ | 0 | $f_1'(1) > 0$

- Crecimiento: Es creciente en todo $\mathbb{R}$
- Extremos:

  Candidatos

  1. Extremos del intervalo: No está definida en un intervalo cerrado.

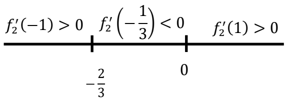
  2. Puntos donde $f_1'(x) = 0$: $x = 0$ $\to$ La primera derivada siempre es mayor que 0, por lo tanto, es un punto de inflexión.

  3. Puntos donde $f_1(x)$ no es derivable: Es derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser cociente de dos funciones derivables.

b) $f_2(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2} = (x^3 + x^2)^{\frac{1}{3}}$ Dom: $(-1, +\infty)$

$$f_2'(x) = \frac{(x^3+x^2)^{-\frac{2}{3}}}{3} 3x^2 + 2x = \frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}$$

$$f_2'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x\,(3x+2) = 0 \;\rightarrow x_1 = 0 \;\; x_2 = -\frac{2}{3}$$



- Crecimiento: Creciente en $(-1, -\frac{2}{3}) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $(-\frac{2}{3}, 0)$.
- Extremos:

  <u>Candidatos</u>

  1. Extremos del intervalo: No está definida en un intervalo cerrado.

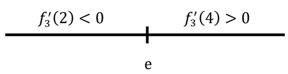
  2. Puntos donde $f_2'(x) = 0$: $x_2 = -\frac{2}{3}$ $\rightarrow$ Máximo (por el signo de la primera derivada en su entorno) y $x_3 = 0$ $\rightarrow$ Mínimo (por el signo de la primera derivada en su entorno).

  3. Puntos donde $f_1(x)$ no es derivable: Es derivable en todo su dominio por ser un cociente de funciones derivables.

c) $f_3(x) = \frac{x}{\ln x}$ Dom: $(0, +\infty)$

$$f_3'(x) = \frac{\ln x - \frac{x}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln x)^2}$$

$$f_3'(x) = 0 \rightarrow \ln(x) - 1 = 0 \rightarrow x = e$$



- Crecimiento: Creciente en $(e, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, e)$.
- Extremos:

  <u>Candidatos</u>

  1. Extremos del intervalo: No está definida en un intervalo cerrado.

  2. Puntos donde $f_3'(x) = 0$: $x_2 = e$ $\rightarrow$ Mínimo (por el signo de la primera derivada en su entorno).

3. Puntos donde $f_3(x)$ no es derivable: Es derivable en todo su dominio por ser cociente de funciones derivables.

d) $f_4(x) = \frac{1}{1+e^x}$ Dom: $\mathbb{R}$

$$f_4'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$f_4'(x) = 0 \rightarrow \ -e^x \neq 0$$

- Crecimiento: Creciente en $(e, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, e)$.
- Extremos:

  Candidatos

  1. Extremos del intervalo: No está definida en un intervalo cerrado.

  2. Puntos donde $f_4'(x) = 0$: No hay.

  3. Puntos donde $f_4(x)$ no es derivable: Es derivable en todo su dominio.

Bloque 3

4. Calcular la ecuación de la recta tangente en x=2 a la función $f(x) = \int_4^{x^2} ln\ (t^3 + 4)dt$

Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integrable: Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y sea $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ la integral indefinida. Entonces $F_a(x)$ es derivable en cualquier punto $c\ \epsilon\ [a, b]$ en el que f es continua siendo $F_a{}'(c) = f(c)$.

Ecuación de la recta tangente: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

En x=2:

$$f(2) = \int_4^{2^2} \ln(t^3 + 4)\, dt = 0$$

Para poder calcularlo es necesario el 1er Teorema Fundamental del Cálculo:

$f'(x) = \ln((x^2)^3 + 4)(2x) \to f'(2) = \ln(2^3 + 4) \times 4 = 4\ln 68$

Por lo que la ecuación de la recta tangente es: $y\ = 4 \ln 68(x - 2)$

Cálculo de primitivas

6. $\int \frac{dx}{(arc\cos x)^5(\sqrt{1-x^2})}$

Método de integración por sustitución (cambio de variable):

Puesto que la derivada de $arc\cos x$ es $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$t = arc\cos x \rightarrow dt = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \rightarrow dx = -dt\sqrt{1-x^2}$, y así tenemos una integral inmediata del tipo: $\int \frac{dx}{x^n} = \frac{x^n+1}{n+1}$

$$-\int \frac{dt\,\sqrt{1-x^2}}{(t)^5\left(\sqrt{1-x^2}\right)} = -\int \frac{dt}{t^5} = -\int t^{-5}dt = \frac{1}{4t^4}$$

Deshaciendo el cambio de variable: $\int \frac{dx}{(arc\cos x)^5(\sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{4(arc\cos x)^4}$