

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Môn: trí tuệ nhân tạo

Nội dung: Bài tập huấn luyện mạng ANN (tính toán thủ công)

Đề bài:

Cho một mạng ANN có 1 đầu vào, 1 đầu ra, không có lớp ẩn, và có các tham số như sau:

- Input $x = 0.5$, output $= 1$, trọng số khởi tạo $w = 0.8$, bias khởi tạo $b = 0.2$.
- Hàm kết nối là hàm tuyến tính: $u = wx + b$.
- Hàm kích hoạt là hàm sigmoid và hàm lỗi là MSE như sau:

$$\text{Activation } \hat{y} = f(u) = \frac{1}{(1 + e^{-u})} \quad \text{Loss } L = \frac{1}{2}(y - \hat{y})^2$$

Yêu cầu:

- 1) Tính đầu ra dự đoán, giá trị lỗi, gradients, và cập nhật trọng số và bias theo phương pháp gradient descent cho 1 epoch. Cho biết tốc độ học là 0.1.
- 2) Sử dụng trọng số và bias vừa tính được ở bước 1, tính lại đầu ra mới và giá trị lỗi mới. Nhận xét về sự tăng/giảm của lỗi. Tính tỷ lệ (%) thay đổi lỗi.
- 3) Thay đổi tốc độ học thành 0.5. Hãy làm lại các bước (1) và (2). Nhận xét ảnh hưởng của tốc độ học đến sự thay đổi của lỗi.

Lưu ý: Làm tròn đến 4 chữ số sau dấu phẩy thập phân.

Dữ liệu đề bài:

$$x = 0.5, \quad y = 1, \quad w = 0.8, \quad b = 0.2$$

$$u = wx + b, \quad \hat{y} = f(u) = \frac{1}{(1 + e^{-u})}, \quad L = \frac{1}{2}(y - \hat{y})^2$$

Mạng ANN gồm một đầu vào, một đầu ra và không có lớp ẩn:

$$x \xrightarrow{w,b} u = wx + b \xrightarrow{\text{sigmoid}} \hat{y}$$

1. Tính đầu ra dự đoán, giá trị lỗi, gradients, và cập nhật trọng số và bias theo phương pháp gradient descent cho 1 epoch. Cho biết tốc độ học là 0.1.

1.1. Lan truyền thuận

- Tính giá trị tuyến tính:

$$u = wx + b = 0.8 \times 0.5 + 0.2 = 0.6000$$

- Tính giá trị dự đoán sau khi qua hàm sigmoid:

$$\hat{y} = \frac{1}{1 + e^{-u}} = \frac{1}{1 + e^{-0.6}} = 0.6456563062 \approx 0.6457$$

- Tính hàm mất mát MSE:

$$L = \frac{1}{2}(y - \hat{y})^2 = \frac{1}{2}(1 - 0.6457)^2 = 0.0627797267 \approx 0.0628$$

1.2. Lan truyền ngược

- Đạo hàm của loss theo \hat{y} :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{y}} = \hat{y} - y = 0.6457 - 1 = -0.3543436938 \approx -0.3543$$

- Đạo hàm của sigmoid theo đầu vào u :

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial u} = \hat{y}(1 - \hat{y}) = 0.6457(1 - 0.6457) = 0.2287842405 \approx 0.2288$$

- Đạo hàm của u theo w và b :

$$\frac{\partial u}{\partial w} = x = 0.5, \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 1$$

- Sử dụng quy tắc chuỗi để tính gradient theo w :

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \frac{\partial L}{\partial \hat{y}} \times \frac{\partial \hat{y}}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial w}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w} = (-0.3543)(0.2288)(0.5) = -0.0405341264 \approx -0.0405$$

- Tương tự với gradient theo b:

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \frac{\partial L}{\partial \hat{y}} \times \frac{\partial \hat{y}}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = (-0.3543)(0.2288)(1) = -0.0810682528 \approx -0.0811$$

1.3. Cập nhật trọng số và bias

Công thức cập nhật:

$$w \leftarrow w - \eta \frac{\partial L}{\partial w}, b \leftarrow b - \eta \frac{\partial L}{\partial b}$$

Áp dụng với $\eta = 0.1$:

$$w_{\text{new}} = 0.8 - 0.1 \times (-0.0405) = 0.8040534126 \approx 0.8041$$

$$b_{\text{new}} = 0.2 - 0.1 \times (-0.0811) = 0.2081068253 \approx 0.2081$$

2. Sử dụng trọng số và bias vừa tính được ở bước 1, tính lại đầu ra mới và giá trị lỗi mới. Nhận xét về sự tăng/giảm của lỗi. Tính tỷ lệ (%) thay đổi lỗi.

2.1. Lan truyền thuận với tham số mới

$$u_{\text{new}} = 0.8041 \times 0.5 + 0.2081 = 0.6101335316 \approx 0.6101$$

$$\hat{y}_{\text{new}} = \frac{1}{1 + e^{-0.6101}} = 0.6479712618 \approx 0.6480$$

2.2. Tính giá trị lỗi mới

$$L_{\text{new}} = \frac{1}{2} (1 - 0.6480)^2 = 0.0619621162 \approx 0.0620$$

- Lỗi giảm từ $L = 0.0628$ xuống $L_{\text{new}} = 0.0620$.

- Tính tỷ lệ phần trăm thay đổi (giảm) của lỗi so với ban đầu:

$$\% \text{ giảm lỗi} = \frac{L - L_{\text{new}}}{L} \times 100\% = \frac{0.0628 - 0.0620}{0.0628} \times 100 \approx 1.3023\%$$

Nhận xét: Với learning rate = 0.1, sau 1 epoch lỗi giảm nhẹ (~1.3023%). Mô hình cập nhật nhỏ và hội tụ chậm nhưng ổn định.

3. Thay đổi tốc độ học thành 0.5. Hãy làm lại các bước (1) và (2). Nhận xét ảnh hưởng của tốc độ học đến sự thay đổi của lỗi.

3.1. Cập nhật tham số

- Từ bước lan truyền ban đầu, gradients là:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = -0.0405341264, \frac{\partial L}{\partial b} = -0.0811$$

- Cập nhật trọng số w và b với $\eta = 0.5$

$$w_{\text{new}} = 0.8 - 0.5 \times (-0.0405) = 0.8202670632 \approx 0.8203$$
$$b_{\text{new}} = 0.2 - 0.5 \times (-0.0811) = 0.2405341264 \approx 0.2405$$

3.2. Lan truyền thuận với tham số mới ($\eta = 0.5$)

$$u_{\text{new}} = 0.8202670632 \times 0.5 + 0.2405341264 = 0.6506676580 \approx 0.6507$$
$$\hat{y}_{\text{new}} = \frac{1}{1 + e^{-0.6506676580}} = 0.6571609021 \approx 0.6572$$
$$L_{\text{new}} = \frac{1}{2}(1 - 0.6571609021)^2 = 0.0587693235 \approx 0.0588$$

- Tỷ lệ thay đổi (giảm) lỗi:

$$\% \text{ giảm lỗi} = \frac{0.0627797267 - 0.0587693235}{0.0627797267} \times 100\% \approx 6.3881\%$$

Nhận xét: Với learning rate $\eta = 0.5$, lỗi giảm nhanh hơn (~6.4%) so với $\eta = 0.1$. Tuy nhiên, nếu η lớn hơn nữa, quá trình học có thể dao động hoặc không hội tụ.

Bảng tóm tắt kết quả

Biến	Ban đầu	Sau 1 epoch ($\eta=0.1$)	Sau 1 epoch ($\eta=0.5$)
w	0.8000	0.8041	0.8203
b	0.2000	0.2081	0.2405
\hat{y} (dự đoán)	0.6457	0.6480	0.6572
L (loss)	0.0628	0.0620	0.0588
Giảm lỗi (%)	-	1.3023%	6.3881%

3.3. Nhận xét tổng quát

- Khi η nhỏ (0.1), mạng học chậm nhưng ổn định.
- Khi η lớn (0.5), mạng học nhanh hơn nhưng có nguy cơ dao động.
- Sau mỗi epoch, trọng số và bias được cập nhật theo hướng giảm lỗi, thể hiện quá trình học hiệu quả của gradient descent.