24|二叉树基础（下）：有了如此高效的散列表，为什么还需要二叉树?

上一节我们学习了树、二叉树以及二叉树的遍历，今天我们再来学习一种特殊的的二叉树，二叉查找树。二叉查找树最大的特点就是，支持动态数据集合的快速插入、删除、查找操作。

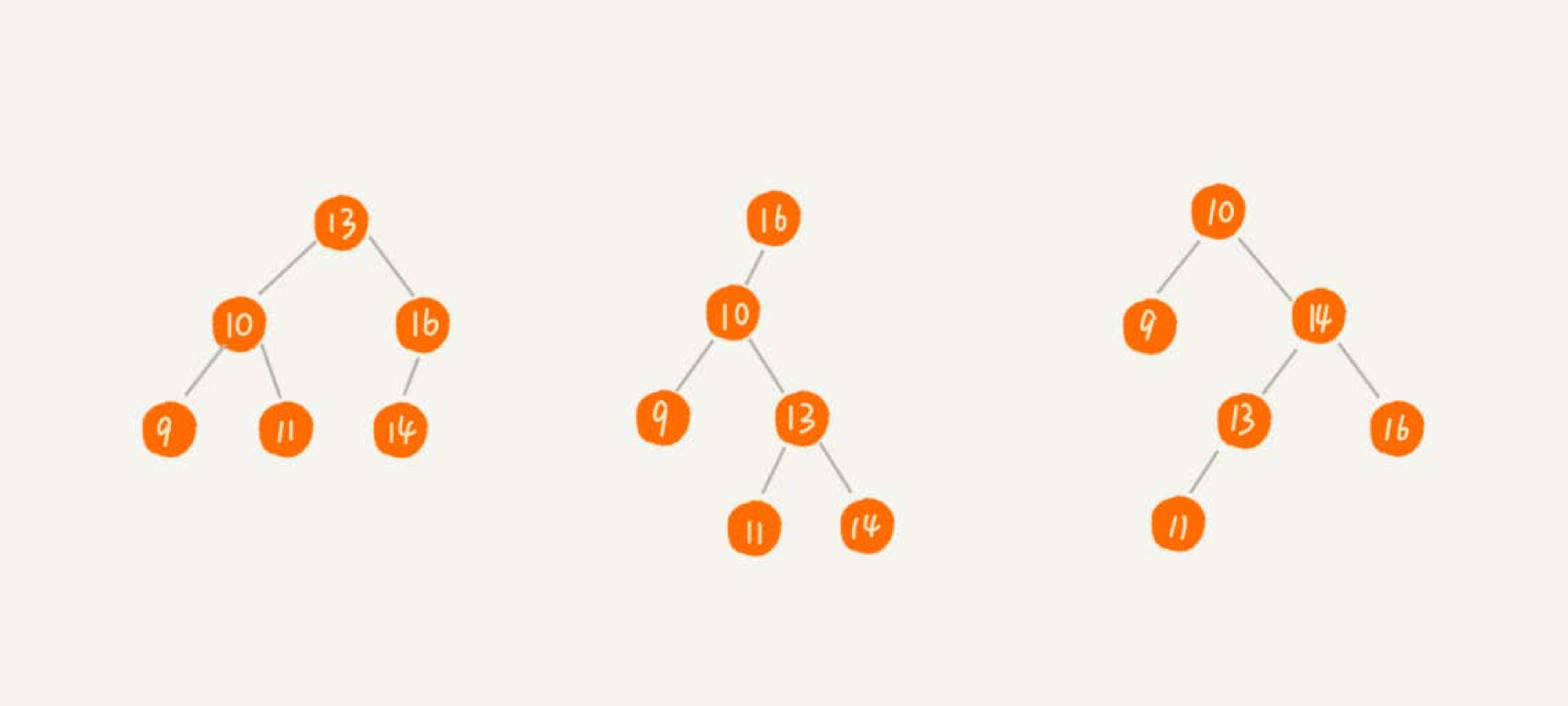
我们之前说过，散列表也是支持这些操作的，并且散列表的这些操作比二叉查找树更高效，时间复杂度是O(1)。既然有了这么高效的散列表，使用二叉树的地方是不是都可以替换成散列表呢？有没有哪些地方是散列表做不了，必须要用二叉树来做的呢？

带着这些问题，我们就来学习今天的内容，二叉查找树！

二叉查找树（Binary Search Tree）

二叉查找树是二叉树中最常用的一种类型，也叫二叉搜索树。顾名思义，二叉查找树是为了实现快速查找而生的。不过，它不仅仅支持快速查找一个数据，还支持快速插入、删除一个数据。它是怎么做到这些的呢？

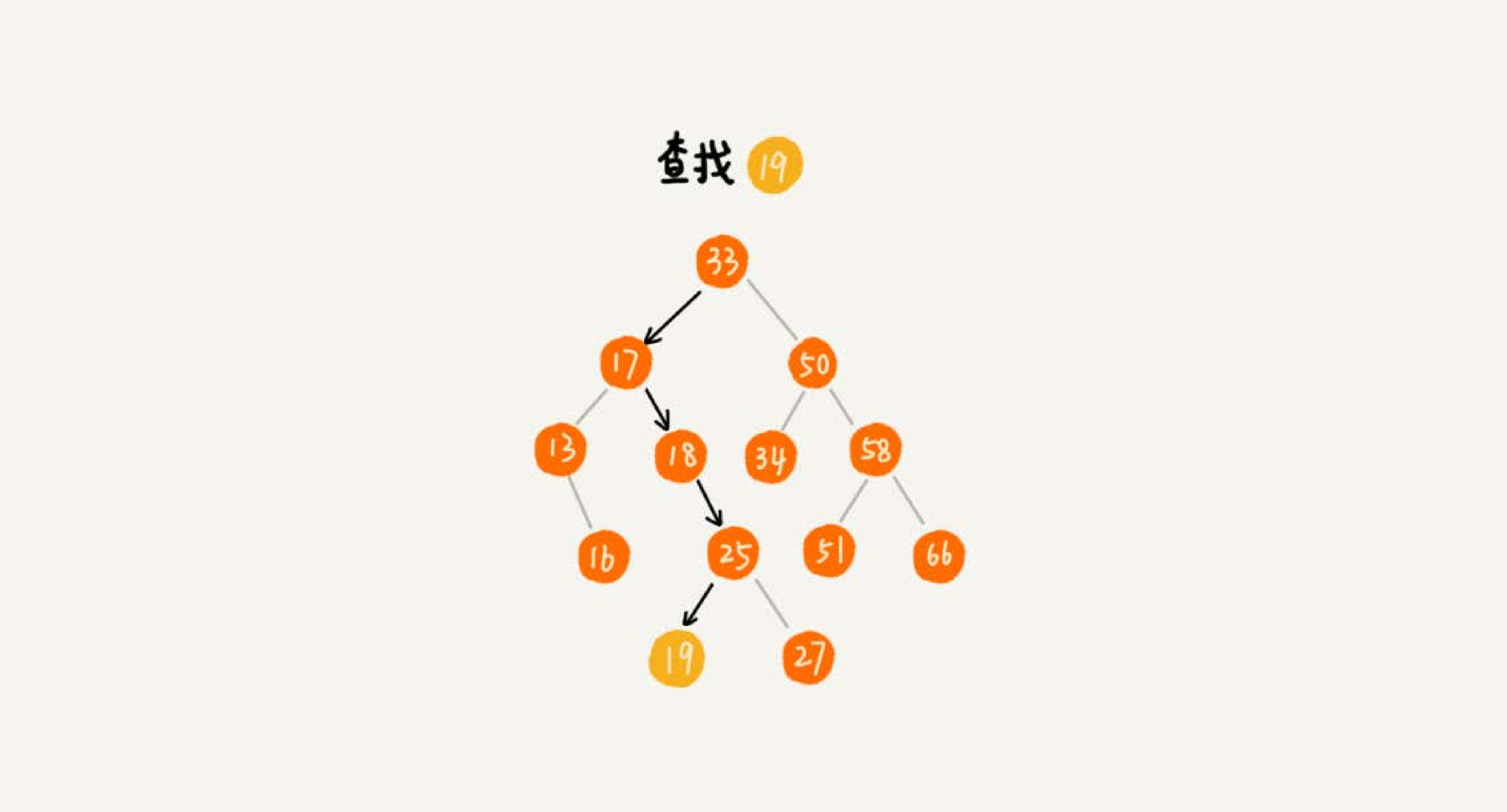
这些都依赖于二叉查找树的特殊结构。二叉查找树要求，在树中的任意一个节点，其左子树中的每个节点的值，都要小于这个节点的值，而右子树节点的值都大于这个节点的值。 我画了几个二叉查找树的例子，你一看应该就清楚了。



前面我们讲到，二叉查找树支持快速查找、插入、删除操作，现在我们就依次来看下，这三个操作是如何实现的。

1.二叉查找树的查找操作

首先，我们看如何在二叉查找树中查找一个节点。我们先取根节点，如果它等于我们要查找的数据，那就返回。如果要查找的数据比根节点的值小，那就在左子树中递归查找；如果要查找的数据比根节点的值大，那就在右子树中递归查找。



这里我把查找的代码实现了一下，贴在下面了，结合代码，理解起来会更加容易。

```
public class BinarySearchTree {
  private Node tree;

  public Node find(int data) {
    Node p = tree;
    while (p != null) {
      if (data < p.data) p = p.left;
      else if (data > p.data) p = p.right;
      else return p;
    }
    return null;
  }
```

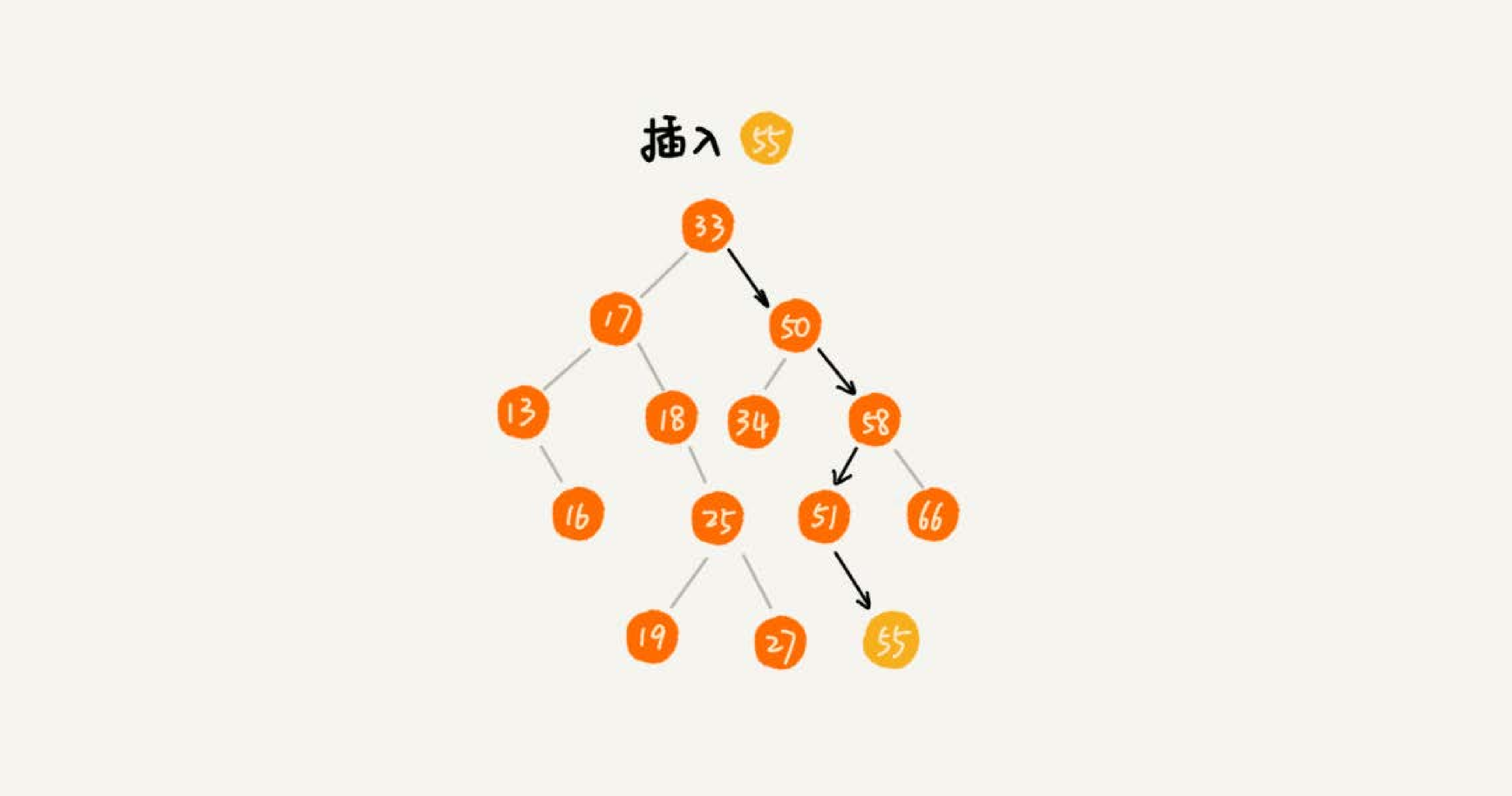
```
 public static class Node {
   private int data;
   private Node left;
   private Node right;

   public Node(int data) {
     this.data = data;
   }
 }
}
```

2.二叉查找树的插入操作

二叉查找树的插入过程有点类似查找操作。新插入的数据一般都是在叶子节点上，所以我们只需要从根节点开始，依次比较要插入的数据和节点的大小关系。

如果要插入的数据比节点的数据大，并且节点的右子树为空，就将新数据直接插到右子节点的位置；如果不为空，就再递归遍历右子树，查找插入位置。同理，如果要插入的数据比节点数值小，并且节点的左子树为空，就将新数据插入到左子节点的位置；如果不为空，就再递归遍历左子树，查找插入位置。



同样，插入的代码我也实现了一下，贴在下面，你可以看看。

```
public void insert(int data) {
  if (tree == null) {
    tree = new Node(data);
    return;
  }

  Node p = tree;
  while (p != null) {
    if (data > p.data) {
      if (p.right == null) {
        p.right = new Node(data);
        return;
      }
```

```
        p = p.right;
      } else { // data < p.data
        if (p.left == null) {
          p.left = new Node(data);
          return;
        }
        p = p.left;
      }
    }
  }
```

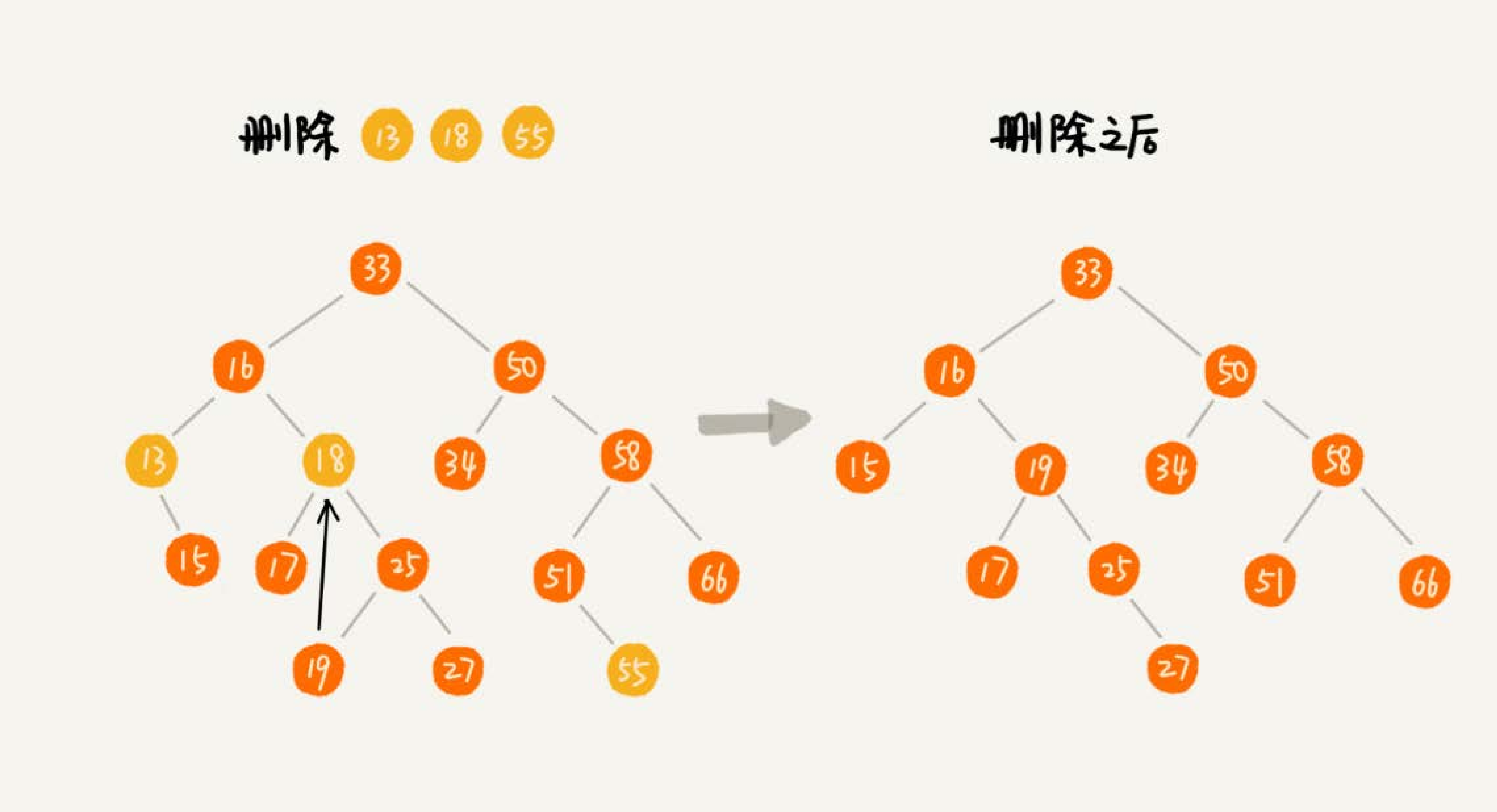
3.二叉查找树的删除操作

二叉查找树的查找、插入操作都比较简单易懂，但是它的删除操作就比较复杂了 。针对要删除节点的子节点个数的不同，我们需要分三种情况来处理。

第一种情况是，如果要删除的节点没有子节点，我们只需要直接将父节点中，指向要删除节点的指针置为null。比如图中的删除节点55。

第二种情况是，如果要删除的节点只有一个子节点（只有左子节点或者右子节点），我们只需要更新父节点中，指向要删除节点的指针，让它指向要删除节点的子节点就可以了。比如图中的删除节点13。

第三种情况是，如果要删除的节点有两个子节点，这就比较复杂了。我们需要找到这个节点的右子树中的最小节点，把它替换到要删除的节点上。然后再删除掉这个最小节点，因为最小节点肯定没有左子节点（如果有左子结点，那就不是最小节点了），所以，我们可以应用上面两条规则来删除这个最小节点。比如图中的删除节点18。



老规矩，我还是把删除的代码贴在这里。

```
public void delete(int data) {
  Node p = tree; // p指向要删除的节点，初始化指向根节点
  Node pp = null; // pp记录的是p的父节点
  while (p != null && p.data != data) {
    pp = p;
    if (data > p.data) p = p.right;
    else p = p.left;
  }
  if (p == null) return; // 没有找到

  // 要删除的节点有两个子节点
```

```
  if (p.left != null && p.right != null) { // 查找右子树中最小节点
    Node minP = p.right;
    Node minPP = p; // minPP表示minP的父节点
    while (minP.left != null) {
      minPP = minP;
      minP = minP.left;
    }
    p.data = minP.data; // 将minP的数据替换到p中
    p = minP; // 下面就变成了删除minP了
    pp = minPP;
  }

  // 删除节点是叶子节点或者仅有一个子节点
  Node child; // p的子节点
  if (p.left != null) child = p.left;
  else if (p.right != null) child = p.right;
  else child = null;

  if (pp == null) tree = child; // 删除的是根节点
  else if (pp.left == p) pp.left = child;
  else pp.right = child;
}
```

实际上，关于二叉查找树的删除操作，还有个非常简单、取巧的方法，就是单纯将要删除的节点标记为“已删除”，但是并不真正从树中将这个节点去掉。这样原本删除的节点还需要存储在内存中，比较浪费内存空间，但是删除操作就变得简单了很多。而且，这种处理方法也并没有增加插入、查找操作代码实现的难度。

4.二叉查找树的其他操作

除了插入、删除、查找操作之外，二叉查找树中还可以支持快速地查找最大节点和最小节点、前驱节点和后继节点。这些操作我就不一一展示了。我会将相应的代码放到GitHub上，你可以自己先实现一下，然后再去上面看。

二叉查找树除了支持上面几个操作之外，还有一个重要的特性，就是中序遍历二叉查找树，可以输出有序的数据序列，时间复杂度是**O(n)**，非常高效。因此，二叉查找树也叫作二叉排序树。

支持重复数据的二叉查找树

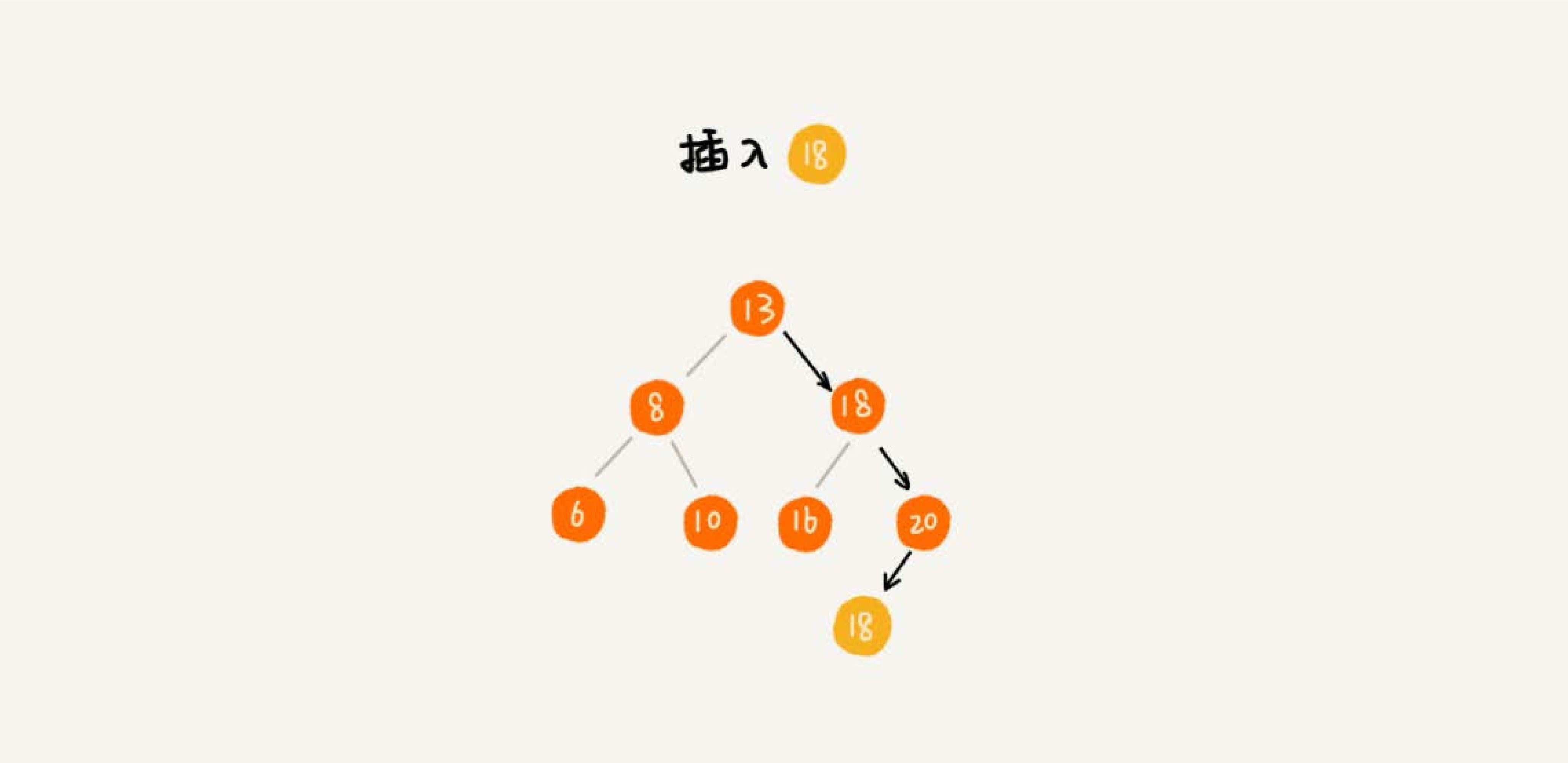
前面讲二叉查找树的时候，我们默认树中节点存储的都是数字。很多时候，在实际的软件开发中，我们在二叉查找树中存储的，是一个包含很多字段的对象。我们利用对象的某个字段作为键值（key）来构建二叉查找树。我们把对象中的其他字段叫作卫星数据。

前面我们讲的二叉查找树的操作，针对的都是不存在键值相同的情况。那如果存储的两个对象键值相同，这种情况该怎么处理呢？我这里有两种解决方法。

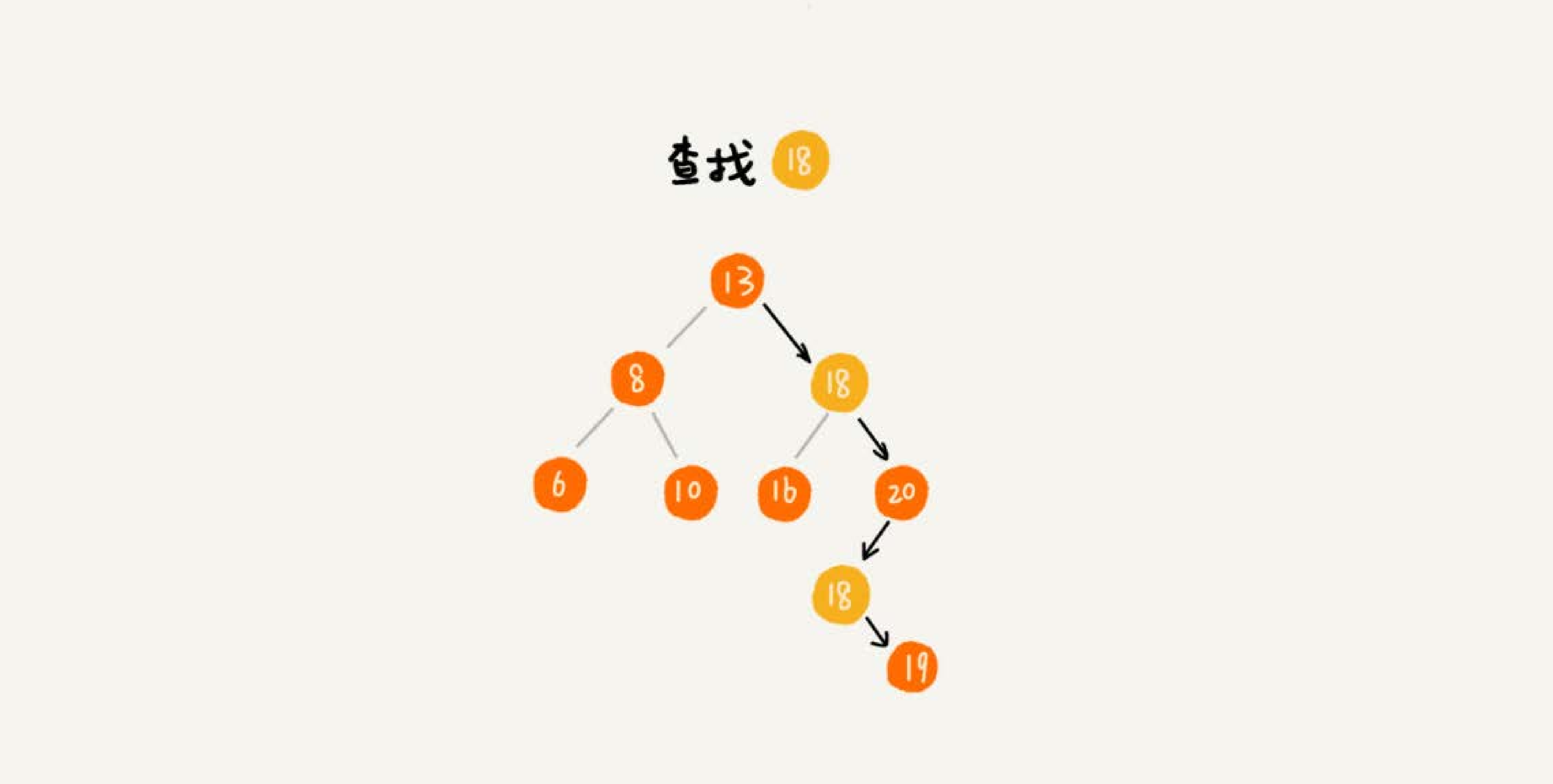
第一种方法比较容易。二叉查找树中每一个节点不仅会存储一个数据，因此我们通过链表和支持动态扩容的数组等数据结构，把值相同的数据都存储在同一个节点上。

第二种方法比较不好理解，不过更加优雅。

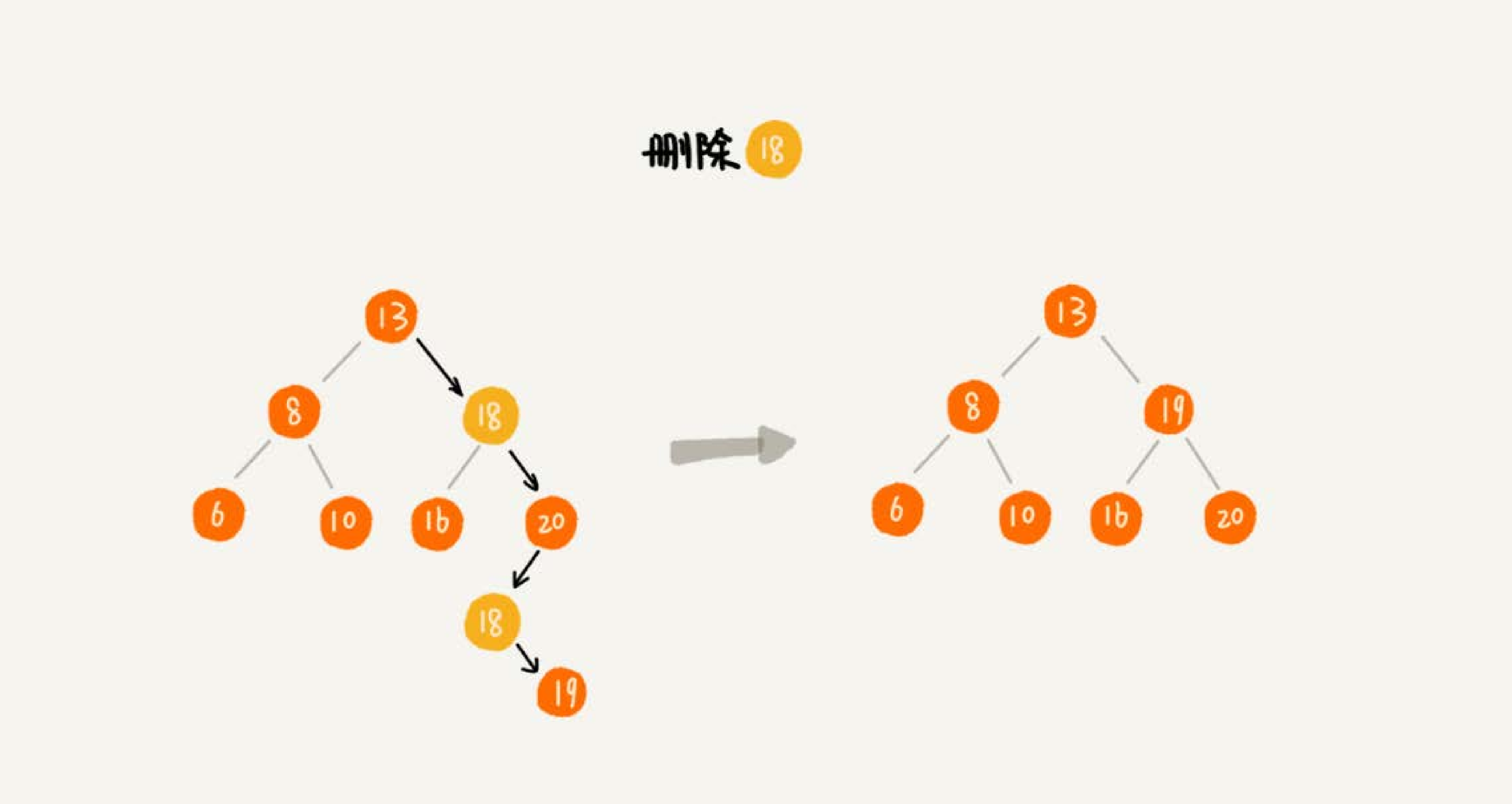
每个节点仍然只存储一个数据。在查找插入位置的过程中，如果碰到一个节点的值，与要插入数据的值相同，我们就将这个要插入的数据放到这个节点的右子树，也就是说，把这个新插入的数据当作大于这个节点的值来处理。



当要查找数据的时候，遇到值相同的节点，我们并不停止查找操作，而是继续在右子树中查找，直到遇到叶子节点，才停止。这样就可以把键值等于要查找值的所有节点都找出来。



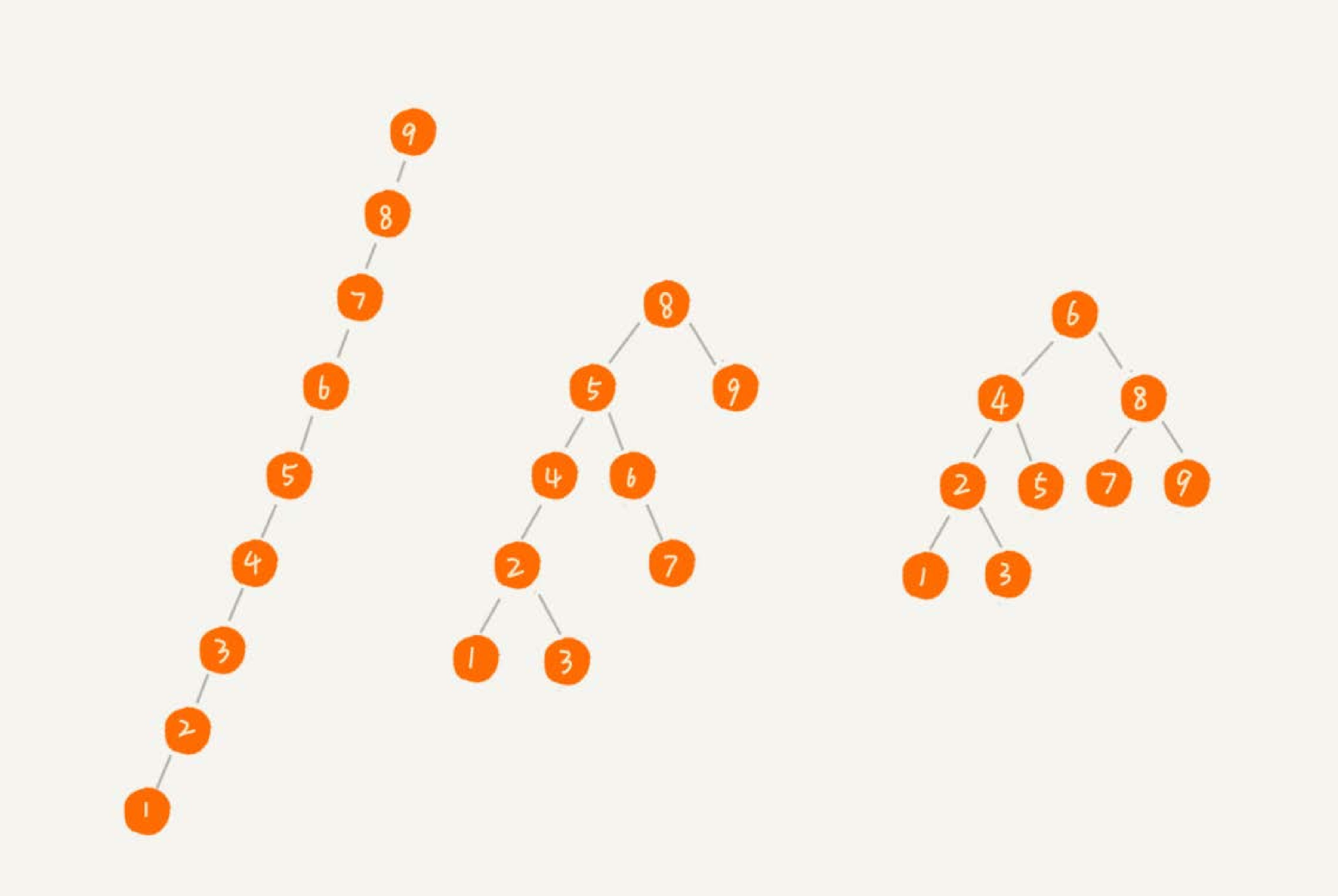
对于删除操作，我们也需要先查找到每个要删除的节点，然后再按前面讲的删除操作的方法，依次删除。



二叉查找树的时间复杂度分析

好了，对于二叉查找树常用操作的实现方式，你应该掌握得差不多了。现在，我们来分析一下，二叉查找树的插入、删除、查找操作的时间复杂度。

实际上，二叉查找树的形态各式各样。比如这个图中，对于同一组数据，我们构造了三种二叉查找树。它们的查找、插入、删除操作的执行效率都是不一样的。图中第一种二叉查找树，根节点的左右子树极度不平衡，已经退化成了链表，所以查找的时间复杂度就变成了O(n)。



我刚刚其实分析了一种最糟糕的情况，我们现在来分析一个最理想的情况，二叉查找树是一棵完全二叉树（或满二叉树）。这个时候，插入、删除、查找的时间

复杂度是多少呢？

从我前面的例子、图，以及还有代码来看，不管操作是插入、删除还是查找，时间复杂度其实都跟树的高度成正比，也就是**O(height)**。既然这样，现在问题就转变成另外一个了，也就是，如何求一棵包含n个节点的完全二叉树的高度？

树的高度就等于最大层数减一，为了方便计算，我们转换成层来表示。从图中可以看出，包含n个节点的完全二叉树中，第一层包含1个节点，第二层包含2个节点，第三层包含4个节点，依次类推，下面一层节点个数是上一层的2倍，第K层包含的节点个数就是2^(K-1)。

不过，对于完全二叉树来说，最后一层的节点个数有点儿不遵守上面的规律了。它包含的节点个数在1个到2^(L-1)个之间（我们假设最大层数是L）。如果我们把每一层的节点个数加起来就是总的节点个数n。也就是说，如果节点的个数是n，那么n满足这样一个关系：

```
n >= 1+2+4+8+...+2^(L-2)+1
n <= 1+2+4+8+...+2^(L-2)+2^(L-1)
```

借助等比数列的求和公式，我们可以计算出，L的范围是[$\log_2(n+1)$, $\log_2 n +1$]。完全二叉树的层数小于等于$\log_2 n +1$，也就是说，完全二叉树的高度小于等于$\log_2 n$。

显然，极度不平衡的二叉查找树，它的查找性能肯定不能满足我们的需求。我们需要构建一种不管怎么删除、插入数据，在任何时候，都能保持任意节点左右子树都比较平衡的二叉查找树，这就是我们下一节课要详细讲的，一种特殊的二叉查找树，平衡二叉查找树。平衡二叉查找树的高度接近logn，所以插入、删除、查找操作的时间复杂度也比较稳定，是O(logn)。

解答开篇

我们在散列表那节中讲过，散列表的插入、删除、查找操作的时间复杂度可以做到常量级的O(1)，非常高效。而二叉查找树在比较平衡的情况下，插入、删除、查找操作时间复杂度才是O(logn)，相对散列表，好像并没有什么优势，那我们为什么还要用二叉查找树呢？

我认为有下面几个原因：

第一，散列表中的数据是无序存储的，如果要输出有序的数据，需要先进行排序。而对于二叉查找树来说，我们只需要中序遍历，就可以在O(n)的时间复杂度内，输出有序的数据序列。

第二，散列表扩容耗时很多，而且当遇到散列冲突时，性能不稳定，尽管二叉查找树的性能不稳定，但是在工程中，我们最常用的平衡二叉查找树的性能非常稳定，时间复杂度稳定在O(logn)。

第三，笼统地来说，尽管散列表的查找等操作的时间复杂度是常量级的，但因为哈希冲突的存在，这个常量不一定比logn小，所以实际的查找速度可能不一定比O(logn)快。加上哈希函数的耗时，也不一定就比平衡二叉查找树的效率高。

第四，散列表的构造比二叉查找树要复杂，需要考虑的东西很多。比如散列函数的设计、冲突解决办法、扩容、缩容等。平衡二叉查找树只需要考虑平衡性这一个问题，而且这个问题的解决方案比较成熟、固定。

最后，为了避免过多的散列冲突，散列表装载因子不能太大，特别是基于开放寻址法解决冲突的散列表，不然会浪费一定的存储空间。

综合这几点，平衡二叉查找树在某些方面还是优于散列表的，所以，这两者的存在并不冲突。我们在实际的开发过程中，需要结合具体的需求来选择使用哪一个。

内容小结

今天我们学习了一种特殊的二叉树，二叉查找树。它支持快速地查找、插入、删除操作。

二叉查找树中，每个节点的值都大于左子树节点的值，小于右子树节点的值。不过，这只是针对没有重复数据的情况。对于存在重复数据的二叉查找树，我介绍了两种构建方法，一种是让每个节点存储多个值相同的数据；另一种是，每个节点中存储一个数据。针对这种情况，我们只需要稍加改造原来的插入、删除、查找操作即可。

在二叉查找树中，查找、插入、删除等很多操作的时间复杂度都跟树的高度成正比。两个极端情况的时间复杂度分别是O(n)和O(logn)，分别对应二叉树退化成链表的情况和完全二叉树。

为了避免时间复杂度的退化，针对二叉查找树，我们又设计了一种更加复杂的树，平衡二叉查找树，时间复杂度可以做到稳定的O(logn)，下一节我们具体来讲。

课后思考

今天我讲了二叉树高度的理论分析方法，给出了粗略的数量级。如何通过编程，求出一棵给定二叉树的确切高度呢?

欢迎留言和我分享，我会第一时间给你反馈。

我已将本节内容相关的详细代码更新到GitHub，戳此即可查看。

精选留言:

- 失火的夏天 2018-11-14 00:27:55

  确定二叉树高度有两种思路：第一种是深度优先思想的递归，分别求左右子树的高度。当前节点的高度就是左右子树中较大的那个+1；第二种可以采用层次遍历的方式，每一层记录都记录下当前队列的长度，这个是队尾，每一层队头从0开始。然后每遍历一个元素，队头下标+1。直到队头下标等于队尾下标。这个时候表示当前层遍历完成。每一层刚开始遍历的时候，树的高度+1。最后队列为空，就能得到树的高度。 [108赞]

作者回复2018-11-14 09:39:34
大家可以看看这条留言

- 拉欧 2018-11-14 08:55:34
递归法，根节点高度=max(左子树高度，右子树高度)+1 [37赞]

作者回复2018-11-14 09:37:46
精髓

- 一般社员 2018-11-14 10:07:50
老师，不理解删除有两个子节点那段代码，最后删除minp，不是minpp.left =null,minp =null吗 [14赞]

- Smallfly 2018-11-15 23:38:02
老师我有一个疑问，二叉树删除时，如果待删除节点有两个子节点，能否用左子树中的最大值来替换待删除节点呢？ [11赞]

作者回复2018-11-16 10:08:51
好像也可以

- 2018-11-26 21:10:45
姜威老大没写总结笔记了吗？我是个算法菜鸟萌新，一直看着姜大佬的笔记总结学习。。。 [8赞]

- Monday 2018-11-17 00:24:30
1、思考题：leetcode 104 题，可以使用递归法。
递归公式： depth =Math.max(maxDepth(node.left), maxDepth(node.right))+ 1;
递归出口： depth = 0 (node == null)
2、二叉查找树的删除操作（无重复的数据）leetcode 450。
根据老师的思路，先不看代码，自己写了好长段时间，写出来都跑过leetcode的所有案例。回过头来再看老师的删除的代码，感觉到了巧妙之处就是：当删除节点有两个子节点的情况，很巧得一起套用了删除结点子节点个数小于1的两种场景。 [7赞]

作者回复2018-11-20 10:19:30
是的 钻研精神值得称赞

- 莫弹弹 2018-11-14 08:45:43
在sf的微信公众号上刚好看到二叉树相关的文章，二叉树常规操作都有了，基本思路是：

- 只有一个根结点时，二叉树深度为 1
- 只有左子树时，二叉树深度为左子树深度加 1

- 只有右子树时，二叉树深度为右子树深度加 1
- 同时存在左右子树时，二叉树深度为左右子树中深度最大者加 1

https://mp.weixin.qq.com/s/ONKJyusGCIE2ctwT9uLv9g [7赞]

作者回复2018-11-14 09:38:05

- spark 2018-11-15 11:27:27

  p.data = minP.data; // 将 minP 的数据替换到 p 中
  p = minP; // 下面就变成了删除 minP 了
  pp = minPP;

  总于看明白这段代码了……各位老铁，单纯看这3行代码是看不出是删除后继节点的，是要结合后面的代码来看的……不过说实话这种代码是不好看的懂……… [4赞]

  作者回复2018-11-15 19:07:20
  是不好看懂

- 追风者 2018-11-15 11:38:33

  更新二十多篇了，王老师把前面文章的课后思考题都总结回答一下吧。 [3赞]

  作者回复2018-11-15 19:07:03
  好的 基础篇完了后会集中答疑一下

- 一个慢慢爬行的普通人 2018-11-14 23:55:48

  p = minP; // 下面就变成了删除 minP 了...
  pp = minPP;
  老师，对这里不太搞懂，似乎也有些人对这里感到困惑，老师可以对这两句集中解释下嘛 [3赞]

  作者回复2018-11-15 09:57:25
  好的。我们用后继节点替换到要删除节点的位置。 然后就变成删除后继节点的问题了。为了逻辑统一 代码书写简洁。我们把后继节点赋给了p

- 等风来 2018-11-14 17:00:20

  老师:删除示例的25节点的右节点[21]错误;
  删除节点有两个节点

p = minP; // 下面就变成了删除 minP 了...
pp = minPP;
是不是应该改成: minPP.Left = minP.Right; [3赞]

作者回复2018-11-15 10:03:54
图已经改正 多谢指出。
代码应该没错

- Ryan-Hou 2018-11-14 10:11:13
平衡树相比于哈希表，保存了节点数据间的顺序信息，所以操作的时间复杂度上会比哈希表大(因为额外的提供了顺序性，对应的会有代价)。也正因为保存了顺序性，平衡树可以方便的实现min, max, ceil, floor 等操作，所以个人认为这两种数据结构最大的不同在于这里，有不同的取舍 [2赞]

- allean 2019-01-14 21:27:47
连续看好几遍，每一次的感受都更深刻，谢谢老师。可是有一点要吐槽下，老师给变量命名也有点太随意了啊，二叉树删除节点那个，好多p啊，看的晕了都 [1赞]

- kakasi 2018-11-28 23:13:14
老师，看了二叉树的优点和适用场景，跳表不是都满足吗？ [1赞]

- james 2018-11-22 17:27:23
散列表装载因子不能太大，特别是基于开放寻址法解决冲突的散列表，不然会浪费内存空间。
修改：应该是装在因子不能太小吧 [1赞]

- Phil 2018-11-18 14:13:58
对于二叉搜索树各种操作的复杂度，有更容易理解的解释方法:每次操作后数据量都减少了一半，所以复杂度自然是logN。 [1赞]

作者回复2018-11-19 08:57:26

- 追风者 2018-11-15 17:07:20
老师，删除操作的代码有点不明白下面这三行在搞什么？

p.data = minP.data; // 将minP的数据替换到p中
p = minP; // 下面就变成了删除minP了
pp = minPP;
[1赞]

作者回复2018-11-15 19:01:53

已经回复其他同学的留言了 你扒拉扒拉看看

- feifei 2018-11-15 11:56:00

```
/**
* 计算层级的重点于在写出递推公式
*
* count(level) = max(count(level.left),count(level.right))
*
* @param root
* @param index
* @return
*/
public int getBinaryLevel(treeNode root, int index) {
if (null == root) {
return index;
}

int maxleftLevel = 0;
if (root.left != null) {
maxleftLevel = getBinaryLevel(root.left, index + 1);
}

int maxRightLevel = 0;

if (root.right != null) {
maxRightLevel = getBinaryLevel(root.right, index + 1);
}

return Math.max(maxleftLevel, maxRightLevel) + 1;
} [1赞]
```

- qpm 2018-11-14 15:29:44

hi，老师。一直都每天在专栏里学习，我希望可以向你提点课程设计上的建议。
算法的学习过程整体来说还是由浅入深的，从线性结构到非线性结构，从树概念深入学习二叉树等等，我觉得文章末尾的习题可以有一道和下一篇文章有所关联的问题，方便我们思考过后可以更容易地学习下一篇文章，也算是一个链表的思维方式。
专栏至此非常有用，深入浅出，谈及了很多算法书本上没说到的点。感谢老师 [1赞]

作者回复2018-11-15 10:07:29
嗯嗯 多谢建议 非常好。不过专栏已经定稿的差不多了。估计临时改也来不及了。抱歉

- Sharry 2018-11-14 12:13:37

```
template<typename T>
int getTreeHeight(TreeNode<T> *node) {
if (node == NULL) {
return -1;
}
int leftHeight = getTreeHeight(node->left);
int rightHeight = getTreeHeight(node->right);
return (leftHeight > rightHeight ? leftHeight : rightHeight) + 1;
} [1赞]
```