Listas de Medida

henrique

September 4, 2025

Contents

0 Introdução e Notação

Ao decorrer do curso, vou escrever minhas resoluções dos exercícios nesse arquivo. Tem alguns motivos para isso:

1. Posso reutilizar resultados passados.
2. Está tudo organizado se um futuro henrique quiser rever.
3. Há uma certo senso de completude no final do curso.

Por isso, peço desculpa ao monitor e a professora se não gostarem desse formato, me avisem que eu posso separar os arquivos. O código fonte pode ser encontrado em `https://github.com/hnrq104/medida`.

Eu vou tentar usar uma notação menos esotérica, mas, ás vezes, uma vontade maior se expressa. Por enquanto encontrei os segundos usos no texto:

1. $\bigcup_n$ ou $\sum_n$. Quando o intervalo de índices não está específicado, geralmente estou tomando a união ou o somatório sobre os naturais positivos.
2. $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ é uma notação de combinatória que uso bastante.
3. "Observação" é algo que estou com muita preguiça de tentar provar (se estiver correto), espero poder perguntar em monitorias se a prova é necessária.
4. "a.e" significa "almost everywhere", geralmente sou contra anglicanismos descenessários, mas esse já está encravado em meu vocabulário.

1 Lista 1 (15/08/2025)

Listagem de problemas:

1. Exercício 1.1 : ✓
2. Exercício 1.2 : ✓
3. Exercício 1.3 : ✓
4. Exercício 1.4 : ✓
5. Exercício 1.5 : ✓
6. Exercício 1.6 : ✓

Problem 1.1.

Esse problema é muito bonitinho e a resposta é negativa. Para resolvê-lo, precisamos da seguinte observação.

Observation 1.1. A coleção de uniões enumeráveis de infinitos conjuntos não vazios disjuntos é não-enumerável. (quase um trava-língua)

Proof. Sejam $\{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$ infinitos conjuntos satisfazendo

1. $E_i \neq \varnothing \ \forall i \in \mathbb{N}$
2. $E_i \cap E_j = \varnothing \ \forall i \neq j \in \mathbb{N}$

A função $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)$ dada por

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$$

onde $B_i = \varnothing$ se $a_i = 0$ e $B_i = E_i$ se $a_i = 1$ é injetiva. Como $2^{\mathbb{N}}$ é não enumerável, temos o resultado. □

Agora podemos dar continuidade a resolução.

Proposition 1.2. Seja (X, M) uma σ-algebra infinita, então M é não enumerável.

O que fiz antes tava errado :(. Segue a solução do João.

Proof. Suponha que M seja enumerável. Para cada $x \in X$, defina os conjuntos minimais E_x de M,

$$E_x := \bigcap_{\{E_k \in M\,;\, x \in E_k\}} E_k$$

Como M é enumerável, essas interseções são enumeráveis e portanto pertencem a M.

A ideia da prova é mostrar que os E_x particionam o espaço em conjuntos disjuntos, depois ver que eles geram M e concluir que, como M é infinita, devem existir infinitos deles.

Vamos mostrar que o espaço é particionado em conjuntos disjuntos. Sejam x, y tal que $E_x \neq E_y$, afirmo que $x \notin E_y$. Suponha que $x \in E_y$, então pela definição de E_x, $E_x \subseteq E_y$. Do mesmo modo, se $y \in E_x$, então $E_y \subseteq E_x$ e $E_x = E_y$ (contradição). Se $y \notin E_x$, então $E_y - E_x$ é um conjunto disjunto de x que contém y, logo $x \notin E_y$. Para provar que a interseção é vazia, verificamos que se $x \notin E_y$, então $E_x \subset E_x - E_y$, portanto $E_x \cap E_y = \varnothing$.

O próximo passo é mostrar que esses conjuntos geram M. Afirmo que dado $E \in M$

$$E = \bigcup_{E_x \subset E} E_x$$

Claramente temos $\bigcup_{E_x \subset E} E_x \subset E$. Para a outra inclusão, seja $x \in E$, então $x \in E_x \subset E$, pois E é um conjunto que contém x.

Agora para matar a questão. Suponha que houvessem somente finitos E_x, digamos n. Haveria somente 2^n possíveis uniões desses conjuntos, como eles geram M e M é infinita temos uma contradição. Portanto, existem infinitos E_x disjuntos não vazios, M contém todas suas enumeráveis coleções, pela observação 1.1, M não pode ser contável.

□

Problem 1.2.

Proof. Dada uma sequência de funções mensuráveis $\{f_n\} : X \to [-\infty, \infty]$, sabemos que $I(x) = \liminf_n f_n(x)$ e $S(x) = \limsup_n f_n(x)$ são mensuráveis. Além disso, para cada $x \in X$, a sequência $f_n(x)$ converge se e somente se ela não tem valores tendendo para o infinito e $I(x) = S(x)$. A partir dessa caracterização, definimos o conjunto A tal que:

$$A = I^{-1}((-\infty, \infty)) \cap S^{-1}((-\infty, \infty))$$

Isso é, A é o conjunto de pontos de X tal que a sequência $f_n(x)$ é limitada. Note que, como I e S são mensuráveis, A é interseção de conjuntos mensuráveis de X, logo é mensurável. Em particular, as funções $\mathbb{1}_A$ e $\mathbb{1}_{A^c}$ são mensuráveis. Como vimos que somas e multiplicações de funções mensuráveis é mensurável, podemos definir uma H mensurável dada por:

$$H(x) = \mathbb{1}_{A^c}(x) + \mathbb{1}_A(x) \cdot S(x) - \mathbb{1}_A(x) \cdot I(x)$$

Os pontos em que as f_n convergem é então dado por pelo conjunto mensurável $H^{-1}(\{0\})$. Para confirmar essa afirmação, note que se $H(y) = 0$, então $H(y) \neq 1$, logo $y \notin A^c$. Temos que $y \in A$, $I(y) \in (-\infty, \infty)$ e $S(y) \in (-\infty, \infty)$, logo $S(y) - I(y)$ está bem definido (nenhum dos dois é infinito de mesmo sinal) e, temos, $S(y) = I(y)$, ou seja, a sequência $f_n(y)$ converge. Se $H(z) \neq 0$, ou $z \in A^c$, e portanto a sequência $f_n(z)$ não é limitada, ou $S(z) \neq I(z)$ e portanto, a sequência não converge. □

Problem 1.3.

Proposition 1.3. $\mathcal{M}$ é σ-álgebra. Isso é, satisfaz:

1. $X \in \mathcal{M}$
2. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$
3. $\{E_1, E_2, \dots, E_n, \dots\} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{M}$

Proof. (1). $X^c = \varnothing$ enumerável, logo $X \in \mathcal{M}$. (2). Por construção. (3). Dados contáveis conjuntos $C = \{E_1, E_2, \dots\}$ em $\mathcal{M}$, separe-os em incontáveis (A) e contáveis (B) de forma que:

$$\{E_1, E_2, \dots\} = A \cup B = \{E_i : E_i \text{ incontável}\} \cup \{E_j : E_j \text{ contável}\}$$

Seja então $H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i = \bigcup_{A_i \in A} A_i \cup \bigcup_{B_i \in B} B_i$. Note que se A não é vazio, i.e. contém ao menos um elemento A_j, então $H^c \subset (A_j)^c$ que é contável. Se A é vazio, então $H = \bigcup_{B_i \in B} B_i$ é uma união enumerável de conjuntos contáveis, logo H é contável. □

Proposition 1.4. μ é uma medida em $\mathcal{M}$.

Proof. Como $\varnothing$ é contável, $\mu(\varnothing) = 0$, além disso, $\mu(E) \in \{0,1\} \subset [0,\infty]$. Então, basta mostrar que, dada uma coleção disjunta $C = \{E_1, E_2, \dots\} \subset \mathcal{M}$,

$$\sum_{E_i \in C} \mu(E_i) = \mu\Big(\bigcup_{E_i \in C} E_i\Big)$$

Como anteriormente escreva $C = A \cup B$, onde A são os conjuntos incontáveis e B são os contáveis. Se A for vazio, todos os conjuntos E_i são contáveis, então a união deles é contável e temos que os dois lados da equação são 0. Se A possui um conjunto E_j, ele obrigatóriamente é o único em A, pois, como os E_i são disjuntos, todos os outros E_i's estão contidos em $(E_j)^c$ que é enumerável. Portanto, o somatório da esquerda possui somente um valor diferente de 0, vulgo $\mu(E_j) = 1$ e a união da direita contém E_j não enumerável, portanto vale 1 também. ☐

Problem 1.4.

Vou supor de antemão que as medidas μ_1 e μ_2 são positivas, há um passo em que precisaremos dessa hipótese.

Proposition 1.5. $\mu(E) = \inf\{\mu_1(E \cap F) + \mu_2(E - F) \,:\, F \in \mathcal{M}\}$ é uma medida positiva.

Proof. (1) Sendo ínfimo de valores positivos, claramante $\mu(E) \in [0,\infty]$. (2) $\mu(\varnothing) \leqslant \mu_1(\varnothing) + \mu_2(\varnothing) = 0$. (3) Considere em $\mathcal{M}$ uma sequência qualquer de conjuntos disjuntos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Queremos mostrar que:

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n)$$

Considere

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_n E_n\right) &= \inf\left\{\mu_1\left(\bigcup_n E_n \cap F\right) + \mu_2\left(\bigcup_n E_n - F\right) \,:\, F \in \mathcal{M}\right\} \\
&= \inf\left\{ \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \sum_n \mu_2(E_n - F) \,:\, F \in \mathcal{M}\right\} \\
&= \inf\left\{ \sum_n (\mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F)) \,:\, F \in \mathcal{M}\right\}
\end{aligned}$$

Onde usamos na segunda igualdade o fato de que somatórios de valores positivos podem ser rearranjados (e portanto a hipótese de que μ_1 e μ_2 são positivas). Agora note que para todo $F \in \mathcal{M}$ e qualquer E_i temos

$$\inf\{\mu_1(E_i \cap \tilde{F}) + \mu_2(E_i - \tilde{F}) \,:\, \tilde{F} \in \mathcal{M}\} \leqslant \mu_1(E_i \cap F) + \mu_2(E_2 - F)$$

Logo, termo a termo,

$$\sum_n \inf\{\mu_1(E_n \cap \tilde{F}) + \mu_2(E_n - \tilde{F}) \,:\, \tilde{F} \in \mathcal{M}\} \leqslant \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F)$$

i.e.

$$\sum_n \mu(E_n) \leqslant \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F)$$

Como vale para todo F, temos, tomando ínfimos

$$\sum_n \mu(E_n) \leqslant \mu\left(\bigcup_n E_n\right)$$

Falta provar que $\mu\big(\bigcup_n E_n\big) \leqslant \sum_n \mu(E_n)$. Ou, mais sorreteiramente, que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu\big(\bigcup_n E_n\big) \leqslant \Bigg(\sum_n \mu(E_n)\Bigg) + \varepsilon = \sum_n (\mu(E_n) + \varepsilon/2^n)$$

Para cada n, existe $F_n \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E_n) \leqslant \mu_1(E_n \cap F_n) + \mu_2(E_n - F_n) + \varepsilon/2^n$. Tome $F = \bigcup_n (F_i \cap E_i)$. Então,

$$\begin{aligned}
\mu\big(\bigcup_n E_n\big) &\leqslant \mu_1\big(\bigcup_n E_n \cap F\big) + \mu_2\big(\bigcup_n E_n - F\big) \\
&= \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F) \\
&= \sum_n \mu_1(E_n \cap F_n) + \mu_2(E_n - F_n) \\
&\leqslant \sum_n (\mu(E_n) + \varepsilon/2^n) \\
&= \sum_n \mu(E_n) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade usamos o fato de que os E_n são disjuntos entre si e na segunda desigualdade, a definição dos F_n. Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, tomando $\varepsilon \to 0$, encontramos $\big(\bigcup_n E_n\big) = \sum_n \mu(E_n)$. $\square$

Proposition 1.6. μ é a maior medida menor que μ_1 e μ_2.

Proof. Para todo $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) \leqslant \mu_1(E \cap X) + \mu_2(E - X) = \mu_1(E)$, semelhantemente, $\mu(E) \leqslant \mu_1(E \cap \varnothing) + \mu_2(E - \varnothing) = \mu_2(E)$. Portanto, $\mu(E) \leqslant \min(\mu_1(E), \mu_2(E))$. Agora seja $\tilde{\mu}$ qualquer medida também menor que μ_1 e μ_2. Então, para todo F,

$$\tilde{\mu}(E) = \tilde{\mu}(E \cap F) + \tilde{\mu}(E - F) \leqslant \mu_1(E \cap F) + \mu_2(E - F)$$

Como isso vale para qualquer F, tomando ínfimos, temos

$$\tilde{\mu}(E) \leqslant \mu(E)$$

$\square$

Problem 1.5.

Será útil para a letra (b) duas proposições importantes.

Proposition 1.7. Seja $(X, \mathcal{T})$ espaço topológico e $\mathcal{B}_X$ sua σ-álgebra de Borel. Se $Y \in \mathcal{B}_X$ é um conjunto mensurável, então na topologia induzida $(Y, \mathcal{T} \cap Y)$, a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_Y$ coincide com o conjunto $\{E \cap Y \,:\, E \in \mathcal{B}_X\}$.

Proof. Vamos provar primeiro que $\mathcal{B}_Y \subseteq \{E \cap Y \,:\, E \in \mathcal{B}_X\}$. Então basta mostrar que o segundo conjunto é uma σ-álgebra que contem os abertos. Ele claramente contem os abertos de Y, pois esses são $Y \cap U$ para U aberto de X que são mensuráveis. Falta verificar as propriedades de σ-álgebra. (1) Y pertence ao conjunto, pois $Y = Y \cap Y$ e $Y \in \mathcal{B}_X$. (2) Se $A \cap Y$ é um elemento, então $(A \cap Y)^c_Y = Y - (A \cap Y) = Y \cap A^c$ também pertence, pois $A^c \in \mathcal{B}_X$. Sejam $(A_1 \cap Y, A_2 \cap Y, \dots)$ elementos do conjunto, então $\bigcup_n (A_n \cap Y) = (\bigcup_n A_n) \cap Y$ pertence também. Isso finaliza a primeira parte.

Falta mostrar que $\{E \cap Y \,:\, E \in \mathcal{B}_X\} \subseteq \mathcal{B}_Y$, isso não foi trivial para mim (tive que rever a prova do João na internet); Essa proposição é equivalente a $\{E \in \mathcal{B}_X \,:\, E \cap Y \in \mathcal{B}_Y\} = \mathcal{B}_X$, que segue diretamente do fato que o conjunto da esquerda é uma σ-álgebra que contém os abertos de X. Vamos provar as propriedades: (1) $X \in \mathcal{B}_X$ e $X \cap Y = Y \in \mathcal{B}_Y$, logo X pertence ao conjunto. (2) Se $E \in \mathcal{B}_X$ é tal que $E \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ então $E^c \in \mathcal{B}_X$ tem $E^c \cap Y = Y - E \in \mathcal{B}_Y$. (3) $\bigcup_n E_n$ é tal que $E_n \cap Y \in \mathcal{B}_Y$, então $\bigcup_n E_n \cap Y = \bigcup_n (E_n \cap Y) \in \mathcal{B}_Y$. Portanto, o conjunto que definimos é uma σ-álgebra. Falta verificar que contém os abertos de X, mas segue trivialmente do fato que os abertos de Y são justamente $U \cap Y \in \mathcal{B}_Y$. □

O próximo é bem óbvio, estou inserindo por completude. (Mas é meio chato de provar).

Proposition 1.8. Se $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ são espaços topológicos homeomorfos por um mapa $f : X \to Y$, então vale que $\mathcal{B}_Y = \{f(E_x) : E_x \in \mathcal{B}_X\}$ onde $\mathcal{B}_X$ e $\mathcal{B}_Y$ são σ-álgebras de Borel em X e Y respectivamente.

Proof. Seja $\mathcal{M} = \{f(E_x) : E_x \in \mathcal{B}_X\}$. $\mathcal{M}$ claramente contém os abertos de Y pois se $U \subset Y$ é aberto, $f^{-1}(U)$ é aberto pertencente a $\mathcal{B}_X$, logo $U = f(f^{-1}(U)) \in \mathcal{M}$. Vamos mostrar que é σ-álgebra. (1) $Y = f(X) \in \mathcal{M}$. (2) $f(E_x) \in \mathcal{M} \Rightarrow (f(E_x))^c = f(E_x^c) \in \mathcal{M}$. (3) $\bigcup_n f(E_x^n) = f(\bigcup_n E_x^n) \in \mathcal{M}$. Portanto mostramos que $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{M}$. Agora para mostrar que $\mathcal{M} \in \mathcal{B}_Y$ usamos mensurabilidade, sendo f^{-1} contínua, ela é mensurável entre σ-álgebras de Borel, logo se $A = f^{-1}(E_x) \in \mathcal{M}$, então, como $E_x \in \mathcal{B}_X$, $A \in \mathcal{B}_Y$. E terminamos a demonstração. □

Agora as letras (a) e (b) saem quase que de graça.

(a) *Proof.* Translações $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tal que $f(x) = f(x) + a$ para algum $a \in \mathbb{R}^d$ são homeomorfismo de $\mathbb{R}^d$ para si próprio. Por 1.8, se $E \in \mathcal{B}^d$ então $f(E) = E + a \in \mathcal{B}^d$. □

(b) *Proof.* Vamos fazer para seções horizontais, a prova para seções verticais é análoga. Para $y \in \mathbb{R}$ e E Borel de $\mathbb{R}^2$, definimos $E_y = E \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$ boreliano. Note que $\mathbb{R} \times \{y\} = \bigcap_n \mathbb{R} \times \{a - 1/n, a + 1/n\}$ é Borel de $\mathbb{R}^2$. Pela proposição 1.7, $\{E_y : E \in \mathcal{B}^2\}$ é a σ-álgebra de Borel induzida por $\mathbb{R} \times \{y\}$, mas esse conjunto é trivialmente homeomorfo a reta $\mathbb{R}$ com a projeção na primeira coordenada. Portanto, por 1.8, as seções horizontais definidas na questão são borelianos da reta. □

Problem 1.6.

Essa questão é bem divertida, estende dupla contagem para medidas.

Proposition 1.9. (a) Os conjuntos H_k são mensuráveis.

Proof. Como cada E_i é mensurável, definimos as funções mensuráveis $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por:

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{E_j}(x)$$

Então $0 \leqslant f_1 \leqslant \ldots \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant \infty$ é uma sequência crescente mensurável, e portanto:

$$F(x) = \sup_n f_n(x) = \lim_n f_n(x) = \#\{n : x \in E_n\}$$

é uma função mensurável. Temos que $H_k = F^{-1}([k, \infty])$ é um conjunto mensurável. □

Agora vem a parte difícil. Para mostrar a letra (b), esqueçamos $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por enquanto, foquemos em $(E_n)_{n \in [N]}$ finitos.

Definition 1.10. Dada uma sequência finita $(E_n)_{n \in [N]}$ de conjuntos de $\mathcal{M}$. Sejam $H_k^{(N)}$ da seguinte forma:

$$H_k^{(N)} = \{x \in X : \#\{n : x \in E_n\} \geqslant k\}$$

A mesma definição dos H_k, mas para uma coleção finita de no máximo N conjuntos.

Observation 1.11. Temos propriedades simples, que independem de N e da coleção escolhida:

1. Exatamente como na letra (a), $H_k^{(N)}$ é mensurável.
2. $H_0^{(N)} = X$
3. $H_{k+1}^{(N)} \subseteq H_k^{(N)}$
4. $H_{N+1}^{(N)} = \varnothing$, pois nenhum elemento pertence em mais que N conjuntos.

Para qualquer sequência infinita $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos os $H_k^{(N)}$ para os primeiros N conjuntos da sequência.

Lemma 1.12. Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mensuráveis. Para todo $N \in \mathbb{N}$, vale:

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^{N} \mu(E_k)$$

Proof. Vamos seguir por indução. Para $N = 1$, temos de graça que $E_1 = H_1^{(1)}$, logo $\mu(H_1^{(1)}) = \mu(E_1)$. Suponha que o resultado vale para N e olhemos para o caso $N + 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1} \mu(E_n) &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} \mu(E_n)\\ &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} \mu(H_n^{(N)})\end{aligned}$$

Onde usamos a hipótese de indução na segunda igualdade.

Note que $H_k^{(N+1)} = (H_k^{(N)} - E_{N+1}) \cup (H_{k-1}^{(N)} \cap E_{N+1})$. Pois se $x \in X$ aparece em k conjuntos de $(E_n)_{n\in[N+1]}$, ou ele aparece em k dos primeiros N conjuntos, ou aparece em E_{N+1} e pelo menos $k-1$ outros dos primeiros N. Para aproveitar dessa observação, podemos reescrever o somatório

$$\begin{aligned}\mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} \mu(H_n^{(N)}) &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} \mu(H_n^{(N)} - E_{N+1}) + \mu(H_n^{(N)} \cap E_{N+1})\\ &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N+1} \mu(H_n^{(N)} - E_{N+1}) + \mu(H_n^{(N)} \cap E_{N+1})\end{aligned}$$

Já que $H_{N+1}^{(N)} = \varnothing$. Agora escrevemos $\mu(E_{N+1}) = \mu(H_0^{(N)} \cap E_{N+1}) = \mu(X \cap E_{N+1})$ e reindexamos cada termo da direita no somatório, obtendo

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1} \mu(E_n) &= \sum_{n=1}^{N+1} \mu(H_n^{(N)} - E_{N+1}) + \mu(H_{n-1}^{(N)} \cap E_{N+1})\\ &= \sum_{k=1}^{N+1} \mu(H_k^{(N+1)})\end{aligned}$$

Provando o passo indutivo. ∎

Estamos quase finalizados, sentimos até vontade de passar o limite em 1.12 e obter o resultado, mas isso por si só não é suficiente.

Proposition 1.13. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$

Proof. Tomando limites em N no Lema 1.12, temos que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Para obter o resultado, vamos mostrar que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$$

Note que, pela definição dos $H_k^{(N)}$, temos uma sequência crescente $H_k^{(1)} \subseteq H_k^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq H_k$, tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_k^{(n)} = H_k$$

Por conta das inclusões $H_N^{(N)} \subseteq H_N$ e μ ser uma medida positiva, temos, termo a termo, $\mu(H_N^{(N)}) \leqslant \mu(H_N)$. Portanto, já temos um lado da igualdade.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$$

Para o outro lado, observamos que como $H_k^{(N)} \to H_k$ são mensuráveis, $\lim_{n\to\infty} \mu(H_N^{(n)}) = \mu(H_N)$. Portanto, para cada $M > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) \geqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{M} \mu(H_k^{N}) = \sum_{k=1}^{M} \mu(H_k)$$

Como isso vale para todo M, $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$. $\square$

2 Lista 2 (21/08/2025)

Listagem de problemas:

1. Exercício 2.1 : ✓
2. Exercício 2.2 : ✓
3. Exercício 2.3 : ✓
4. Exercício 2.4 : ✓
5. Exercício 2.5 : ✓
6. Exercício 2.6 : ✓
7. Exercício 2.7 : ✓

Para a solução de vários problemas dessa lista, utilizaremos os três principais teoremas vistos em aula até agora. Vamos enunciá-los.

Theorem 2.1. (Convergência Monótona). Dada uma sequência crescente de funções mensuráveis $(f_n)_n$ de X para $[0, \infty]$, satisfazendo:

(a) $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \infty$ para todo $x \in X$

(b) $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$

Então f é mensurável, e

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$$

Theorem 2.2. (Lema de Fatou). Se $f_n : X \to [0, \infty]$ é mensurável, para cada n, então

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Theorem 2.3. (Convergência Dominada). Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis complexas de X tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existe para todo $x \in X$. Se existe uma função $g \in L^1(\mu)$ tal que, para todo n,

$$|f_n(x)| \leqslant |g(x)|$$

então $f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Problem 2.1.

Proof. Essa questão parece muito com a de interseção de conjuntos mensuráveis (Teorema 1.19 Rudin). Se $f_1 \in L^1(\mu)$, como ela é positiva, existe $0 \leqslant M < \infty$ tal que $\int_X f_1 \, d\mu \leqslant M$. Defina g_n mensurável por $g_n = f_1 - f_n$. Temos então que

(a) $0 \leqslant g_1 \leqslant g_2 \leqslant \ldots \leqslant \infty$

(b) $g_n(x) \to f_1(x) - f(x)$ para todo $x \in X$.

Podemos aplicar convergência monótona [2.1] para encontrar:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_1 - f_n \, d\mu = \int_X f_1 - f \, d\mu \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_1 \, d\mu - \int_X f_n \, d\mu \right) = \int_X f_1 \, d\mu - \int_X f \, d\mu \tag{2}$$

$$\int_X f_1 \, d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu - \int_X f \, d\mu \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \tag{4}$$

Onde, crucialmente, usamos na segunda* igualdade que $\int_X f_1 \leqslant M < \infty$.

Se admitimos $f_1 \notin L^1(\mu)$, a igualdade pode não valer. Defina $f_n(x) = 1/n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que $f_n \to f = 0$, logo $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = 0$, mas $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = \infty$ para todo n. $\square$

Problem 2.2.

Proof. Podemos usar diretamente o exemplo patológico da questão 2.1. Mas afim de fazer um diferente, seja $X = \{0, 1\}$ com medida de contáveis. Defina as funções simples (e portanto mensuráveis) h e g dadas por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

Seja $\{f_n\}$, tal que $f_n = h$ se n for par, e $f_n = g$ se n for ímpar. Então claramente, $\liminf_n f_n(x) = 0$ para todo x, mas $\int_X f_n \, d\mu = 1$ para todo n. Portanto

$$0 = \int_X (\liminf_n f_n) d\mu < \liminf_n \int_X f_n d\mu = 1$$

□

Problem 2.3.

Proof. Esse problema é bem legal, envolve aproximar a função pontualmente e perceber que podemos aplicar nossos resultados. Antes de mais nada, dado $\alpha > 0$, defina $g_n : X \to [0, \infty]$, por

$$g_n(x) = n \log(1 + (f(x)/n)^\alpha) = n[\log(n^\alpha + f(x)^\alpha) - \log(n^\alpha)]$$

g_n é composição de uma função contínua por uma mensurável $f \geqslant 0$, é portanto mensurável e da forma que está definida, é positiva. $g(x) \in [0, \infty]$.

Agora, vamos tentar estimar g_n. Pelo teorema do valor médio, dado x fixo,

$$\log(n^\alpha + f(x)^\alpha) - \log(n^\alpha) = \frac{f(x)^\alpha}{y}$$

para $y \in (n^\alpha, n^\alpha + f(x)^\alpha)$. Então, temos

$$n \frac{f(x)^\alpha}{n^\alpha + f(x)^\alpha} \leqslant g_n(x) \leqslant n \frac{f(x)^\alpha}{n^\alpha}$$

E isso já é suficiente para dois casos do problema.

Uma observação antes de brincar com as integrais é que como $\int_X f d\mu \in (0, \infty)$, notamos duas coisas.

1. O conjunto onde f vale infinito tem medida nula.

2. O conjunto onde $f > 0$ tem medida positiva.

O item (1) vale pois, caso contrário, $\int_X f d\mu$ valeria infinito. Da mesma forma, (2) vale pois, caso contrário, como f é positiva, a integral valeria 0. Disso segue que podemos supor, sem perda de generalidade, que f é estritamente positiva e não assume valores infinitos em X (onde f vale 0 não muda as integrais definidas). Agora, feita essa observação, podemos dar continuidade ao resultado.

Se $\alpha = 1$,

$$\frac{nf(x)}{n + f(x)} \leqslant g_n(x) \leqslant f(x)$$

Como o lado esquerdo tende a $f(x)$, temos que $g_n(x) \to f(x)$. Além do mais, $g_n(x) \leqslant f(x) \in L^1(\mu)$, logo, por Convergência Dominada [2.3], temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log(1 + (f(x)/n)^\alpha) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x) d\mu = \int_X f d\mu = c$$

Se $\alpha < 1$, de $g_n(x) \geqslant nf(x)^\alpha/(n^\alpha + f(x)^\alpha) \to \infty$ temos que

$$\infty = \liminf_{n\to\infty} nf(x)^\alpha/(n^\alpha + f(x)^\alpha) \leqslant \liminf_{n\to\infty} g_n(x)$$

Usando o lema de Fatou [2.2],

$$\infty = \int_X \infty d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X n \log(1 + (f(x)/n)^\alpha) d\mu$$

que é o resultado esperado.

Para $\alpha > 1$, terei que usar a dica do João, percebi que só conseguiria usar convergência dominada se $\int_X f^\alpha d\mu < \infty$, (mas não sabemos disso). Então precisamos fazer surgir f sem expoentes na estimativa de g_n, para isso consideramos a sequências de desigualdades, válida para $t \geqslant 0$, $\alpha > 1$.

$$1 + t^\alpha \leqslant (1 + x)^\alpha \leqslant (e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$$

Onde a primeira desigualdade sai, como observado pelo João, imediatamante de

$$\left(\frac{1}{1+t}\right)^\alpha + \left(\frac{t}{1+t}\right)^\alpha \leqslant 1$$

Tomando log's na equação,

$$\log(1 + t^\alpha) \leqslant \log((1 + t)^\alpha) \leqslant \log((e^t)^\alpha) = \alpha t$$

Portanto, $g_n(x) \leqslant n\alpha(f(x)/n) = \alpha f(x) \in L^1(\mu)$. Agora estamos muito felizes, pois sabemos que pontualmente (para cada x fixo).

$$g_n(x) \leqslant \frac{f(x)^\alpha}{n^{\alpha-1}} \to 0$$

Logo, por convergência dominada [2.3],

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log(1 + (f(x)/n)^\alpha) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$$

□

Problem 2.4.

Proof. Essa questão segue quase imediatamante da série de desigualdades

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \tag{5}$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_X \sup_x \{|f_n - f|\} d\mu \tag{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_x \{|f_n - f|\} \mu(X) \to 0 \tag{7}$$

Onde em (7) usamos crucialmente que $\mu(X) < \infty$ e a sequência é uniformemente convergente.

Se $\mu(X) = \infty$, segue exatamente da solução do exercício 2.1, com $f_n = 1/n$, $f = 0$, $X = \mathbb{R}$, que a hipótese não pode ser omitida. □

Problem 2.5.

Proof. Minha intuição Riemanianna me matou nessa questão, tenho que abandoná-la. Suponha que o resultado seja falso, i.e. $f \in L^1(\mu)$, mas existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$ existe um mensurável E_δ com $\mu(E_\delta) < \delta$, mas

$$\int_{E_\delta} |f| d\mu > \varepsilon$$

Então, escolhemos uma sequência de $(E_n)_n$, com $\mu(E_n) < 2^{-n}$ e $\int_{E_n} |f| d\mu > \varepsilon$. Note que a união dos E_n tem medida finita.

$$A = \bigcup_n E_n \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = \mu\big(\bigcup_n E_n\big) \leqslant \sum_n \mu(E_n) \leqslant 2$$

E se definirmos $A_m = \bigcup_{n \geqslant m} E_n$, achamos uma sequência decrescente de conjuntos de medida finita: $A = A_1 \supset A_2 \supset \dots$. Além do mais,

$$\mu(A_m) \leqslant \sum_{n \geqslant m} \mu(E_n) \leqslant \sum_{n \geqslant m} 2^{-n} = 2^{-m+1} \to 0$$

Quando $m \to \infty$. Portanto, $\mu(\bigcap_m A_m) \to 0$.

A ideia da prova agora é mostrar que a integral sobre esse conjunto é um limite sobre integrais todas maiores que ε, mas então teríamos que a integral sobre um conjunto de medida nula maior que 0, absurdo. Para isso, defina, para cada m

$$f_m(x) = |f(x)| \mathbb{1}_{A_m}(x)$$

funções mensuráveis, decrescentes e todas dominadas por $|f| \in L^1(\mu)$. Chamando as interseções dos A_m de B, temos que $f_m \to |f| \cdot \mathbb{1}_B$. Pelo teorema da convergência dominada [2.3], temos que

$$\lim_{m \to \infty} \int_X |f| \cdot \mathbb{1}_{A_m} d\mu = \int_X |f| \cdot \mathbb{1}_B d\mu = \int_B |f| d\mu$$

Mas, por hipótese, $\int_X |f| \cdot \mathbb{1}_{A_m} d\mu \geqslant \int_{E_m} |f| d\mu > \varepsilon$. Logo o limite da esquerda deve ser maior ou igual a $\varepsilon > 0$, mas a integral da direita - sobre um conjunto B de medida nula - deveria ser 0. ☐

Problem 2.6.

Proof. A resolução dessa questão está no livro, cuja prova repetirei aqui. Note no entanto que ela segue diretamente da questão 1.6 da lista anterior, pois provamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$$

como $H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_\infty$, se $\mu(H_\infty) > \varepsilon > 0$, então para todo k, $\mu(H_k) > \varepsilon$. Teríamos por fim que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k) = \infty$.

Eu acho a solução do Rudin mais elegante, pois - ao menos para mim - foi trabalhoso estabelecer a igualdade entre os somatórios. Assim como antes, construa

$$f_N = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{E_k}$$

Temos que f_N é uma sequência crescente de funções que tende a $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_k}$. Pelo teorema da convergência monótona [2.1]

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \tag{8}$$

O termo da esquerda é precisamente $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)$ que estamos supondo ser $<\infty$. Agora, se a medida do conjunto $\{x : f(x) = \infty\}$ (os x's que aparecem em infinitos E_k's) fosse positiva então estaríamos integrando infinito sobre um conjunto de medida não nula, e a integral da direita seria infinito. Simbólicamente:

$$\int_X f d\mu \geqslant \int_{f^{-1}(\infty)} f d\mu = \mu(f^{-1}(\infty)) \cdot \infty = \infty$$

O que contradiz (8). ∎

Problem 2.7.

Proof. Eu não sei exatamente quanto queremos mostrar nessa questão, provamos em aula que para $f, g \in L^1(\mu)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, a função $\alpha f + \beta g$ é mensurável (onde está bem definida). Seja $A = f^{-1}(\infty) \cap g^{-1}(\infty)$, A é interseção de mensuráveis e portanto mensurável, definimos exatamente como no problema 1.2 a função mensurável

$$h = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c} f - \mathbb{1}_{A^c} g$$

$h(z)$ é 0 se e somente se $f(z)$ e $g(z)$ não são infinitas e $f(z) = g(z)$. Usando h, o conjunto

$$\{z : f(z) = g(z)\} = h^{-1}(0) \cup A$$

é mensurável. ∎

3 Lista 3 (28/08/2025)

Listagem de problemas:

1. Exercício 3.1 : ✓
2. Exercício 3.2 : ✓
3. Exercício 3.3 : ✓
4. Exercício 3.4 : ✓
5. Exercício 3.5 : ✓
6. Exercício 3.6 : ✓

Problem 3.1.

Proof. A resposta dessa pergunta é positiva, mas eu penei um pouco para chegar nessa conclusão. Lembremos que para mostrar que f é Borel mensurável, basta mostrar que, para todo $c \in \mathbb{R}$, a pré-imagem $f^{-1}((c, +\infty))$ é mensurável. Vamos mostrar que essa pré-imagem é uma união enumerável de conjuntos Borel mensuráveis em $\mathbb{R}$.

Seja $A = f^{-1}((c, +\infty))$ e tome $a \in A$, i.e $f(a) > c$, pelas condições de continuidade em f, temos três casos possíveis:

1. f é contínua em a, logo $\exists \delta_a > 0$ tal que $(a - \delta_a, a + \delta_a) \subset A$
2. f é contínua a esquerda em a, logo $\exists \delta_a > 0$ tal que $(a - \delta_a, a] \subset A$
3. f é contínua a direita em a, logo $\exists \delta_a > 0$ tal que $[a, a + \delta_a) \subset A$

Vamos mostrar que A é a união enumerável de seus componentes conexos, como os componentes conexos são intervalos da reta, eles são borelianos e portanto A será boreliano. Para isso, basta notar que em cada componente conexo há um racional que determina ele completamente. Tome $x \in A$ de um componente, olhe para um racional no intervalo associado a x pela condição de continuidade, essa racional é representante da componente conexa. Como os racionais são enumeráveis, essas componentes são enumeráveis e A é mensurável. $\square$

Problem 3.2.

Proof. Basta lembrar bem da definição da integral de Riemann para perceber que a de Lebesgue generaliza ela. Por Riemann, toda função contínua num compacto é integrável e suas somas inferiores e superiores convergem. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ contínua, temos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} L(P, f)$$

onde P é um pontilhamento do compacto $[a, b]$, $L(f, P)$ é a soma inferior de f por P e $|P|$ é o tamanho do maior intervalo do pontilhamento. Podemos expressar $L(P, f)$ como uma soma, se P é $(a = t_0, \dots t_n = b)$, temos

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu([t_{i-1}, t_i))$$

onde $m_i = \inf\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i)\}$.

Olhando para essa fórmula é claro perceber que cada pontilhamento P está associado com uma função simples menor ou igual a f. A ideia da prova é escolher uma sequência de pontilhamento $(P_n)_n$ (diádicos por exemplo) cujo módulo $|P_n|$ tende a 0 e cada pontilhamento é um refinamento do anterior. Dessa forma, eles definirão uma sequência crescentes de funções que convergem para f, então, aplicando o Teorema da Convergência Monotona [2.1], teremos o resultado para funções positivas. Para estender para uma função g com valores reais quaisquer, escrevemos $g = g^+ - g^-$ e usando a linearidade da integral de Lebesgue e Riemann teremos o resultado para integrais de g também.

De agora em diante, seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua positiva. Seja $P_0 = \{a, b\}$, definiremos indutivamente uma sequência de refinamentos (os diádicos). Dado $P_n = \{t_0 < t_1 < \dots < t_m\}$, cortamos cada intervalo no meio, i.e.

$$P_{n+1} = P_n \cup \left\{ \frac{t_i + t_{i+1}}{2} : 0 \leqslant i < m \right\}$$

Claramente, $|P_n| = (b - a)/2^n \to 0$ e, portanto, pelos teoremas da integral de Riemann,

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) \to \int_a^b f dx \tag{9}$$

Agora definimos uma função step s_n associada ao pontilhamento $P_n = \{t_0 < t_1 < \dots < t_m\}$,

$$s_n(x) = \begin{cases} \inf\{f(a) : a \in [t_i, t_{i+1})\} & \text{se } x \in [t_i, t_{i+1}] \text{ para } i < m \\ \inf\{f(a) : a \in [t_{m-1}, t_m]\} & \text{se } x \in [t_{m-1}, t_m] \end{cases}$$

Separar o último caso não é necessário, coloquei somente por clareza. Da forma que estão definidos, os s_n são funções simples. Como os P_n são refinamentos, $s_n \leqslant s_{n+1}$ e, além do mais, sendo f uniformemente contínua em $[a, b]$, temos que $s_n \to f$ uniformemente. Por [2.1],

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} s_n d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu \tag{10}$$

Mas por serem funções simples,

$$\int_{[a,b]} s_n d\mu = L(P_n, f) \tag{11}$$

Juntando as equações 9, 10 e 11, obtemos o resultado.

$$\int_a^b f dx = \lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} s_n d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu$$

Para o caso de $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ geral, temos

$$\int_a^b g dx = \int_a^b g^+ dx - \int_a^b g^- dx = \int_{[a,b]} g^+ d\mu - \int_{[a,b]} g^- d\mu = \int_{[a,b]} g d\mu$$

□

Problem 3.3.

Proof. Esse exercício é similar ao 2.5 da lista anterior, pelo menos a resolução do João. Sejam

$$A_n = \{x : |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon_n\}$$
$$B_n = \bigcup_{m\geqslant n} A_m$$

Note que, sendo μ^* uma medida exterior,

$$\mu^*(B_N) \leqslant \sum_{m=N}^{\infty} \mu^*(A_m) \to 0$$

quando $N \to \infty$. Como os B_n são encaixados, isso é o mesmo que dizer $\mu^*(\bigcap_n B_n) = 0$. Agora seja $x \notin \bigcap_n^\infty B_n$, portanto existe n_0 tal que

$$x \notin B_{n_0}, B_{n_0+1}, \ldots$$

e, da mesma forma,

$$x \notin A_{n_0}, A_{n_0+1}, \ldots$$

Isso significa que para todo $m > n_0$, $|f_{m+1}(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon_m$. Como $\sum_n \varepsilon_n < \infty$, pelo M-teste de Weierstrass, $f_n(x)$ converge. Ou seja, mostramos que $(f_n(x))$ converge em quase todo ponto. □

Problem 3.4.

Lemma 3.1. Seja E um conjunto de Lebesgue em $\mathbb{R}$, existe um boreliano F_σ tal que $F_\sigma \subset E$ e $\mu(E - F_\sigma) = 0$.

Proof. Escreva $\mathbb{R} = \bigcup_n K_n$ para compactos K_n. Dado E conjunto de Lebesgue, afirmo que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um aberto $V \supset E$, tal que $\mu(V - E) < \varepsilon$. Escrevemos

$$E = \bigcup_n \mu(E \cap K_n)$$

Como $\mu(E \cap K_n) < \infty$, pois K_n é compacto, existe aberto $V_n \supset (E \cap K_n)$ com $\mu(V_n - (E \cap K_n)) < \varepsilon/2^n$. Tome $V = \bigcup_n V_n$ aberto, temos que $V - E \subset \bigcup_n V_n - (E \cap K_n)$ e

$$\mu(V - E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n - E \cap K_n) < \varepsilon$$

Isso implica que podemos aproximar por fechados por dentro também, pois aplicando a afirmação para E^c, conseguimos um aberto $W \supset E^c$ (com complementar $W^c \subset E$ fechado) tal que

$$\mu(E - W^c) = \mu(W - E^c) < \varepsilon$$

Para n natural, tome fechados $F_n \subset E$ com $\mu(E - F_n) < 1/n$. Seja $F_\sigma = \bigcup_n F_n \subset E$, então, sendo união enumerável de fechados, F_σ é Boreliano e vale que, para todo n,

$$\mu(E - F_\sigma) \leqslant \mu(E - F_n) < 1/n$$

logo, $\mu(E - F_\sigma) = 0$.

□

Lemma 3.2. Seja s uma função simples de Lebesgue, existe uma função simples h de Borel tal que $h \leqslant s$ e $s = h$ a.e.

Proof. Como s é simples, pode ser escrita da forma

$$s(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{E_n}(x)$$

Para cada E_n, tome pelo lema anterior, um boreliano $B_n \subset E_n$ com $\mu(E_n - B_n) = 0$. A função

$$h(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{B_n}(x)$$

Claramente satisfaz que

$$\mu(\{x : s(x) \neq h(x)\}) = \mu\left(\bigcup_n E_n - B_n\right) \leqslant \sum_n \mu(E_n - B_n) = 0$$

□

Lemma 3.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ limitada de Lebesgue, então existe função de Borel g tal que $f = g$ a.e.

Proof. Seja $f < M$ e escreva novamente $\mathbb{R} = \bigcup_n K_n$ união de compactos. Em cada compacto K_m,

$$\int_{K_m} f d\mu \leqslant M\mu(K_m) < \infty$$

Seja $(s_n) \leqslant f$ sequência de funções simples $s_n : K_m \to \mathbb{R}^+$ de Lebesgue que aproximam f, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_m} s_n d\mu = \int_{K_m} f d\mu$$

Agora, para cada s_n, pelo lema anterior, encontre $h_n = s_n \leqslant f$ a.e. com $h_n \leqslant s_n$ Borel simples. Note que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_m} h_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{K_m} s_n d\mu = \int_{K_m} f d\mu < \infty$$

Afirmo que $H = \sup_n h_n \leqslant f$ Borel mensurável é igual a f em quase todo ponto de K_m. Seja $A = \{x : H(x) \neq f(x)\}$, então

$$A = \bigcup_k \{x : f(x) - H(x) > 1/k\}$$

Suponha que $\mu(x : f(x) - H(x) > 1/k) = C > 0$ para algum k, vale que $\mu(x : f(x) - h_n(x) > 1/k) \geqslant C$ para todo n e portanto,

$$\int_{K_m} f - h_n d\mu \geqslant \frac{C}{k} > 0$$

o que é absurdo, pois $\int_{K_m} f - h_n d\mu \to 0$. Mostramos que $\mu(x : f(x) - H(x) > 1/k) = 0$ para todo k e como consequência que $\mu(A) = 0$.

Conseguimos o resultado para cada compacto K_m. Vamos estender para uma função definida em toda a reta. Para cada m, recupere função boreliana H_m com $H_m \leqslant f$ e $H_m = f$ a.e em K_m que valha 0 em K_m^c - nossa construção anterior permite fazer essa escolha. Tome $G = \sup_m H_m$, teremos que $G = f$ a.e . Para ver que isso vale, note que $G \leqslant f$ e escreva

$$Q = \{x : G(x) \neq f(x)\} = \bigcup_m \{x \in K_m : G(x) < f(x)\} \subset \bigcup_m \{x \in K_m : H_m(x) < f(x)\}$$

Q é união enumerável de conjuntos de medida nula e portanto, tem medida nula. □

Lemma 3.4. (Exercício) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de Lebesgue, então existe função de Borel g tal que $f = g$ a.e.

Proof. Vamos começar com funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ que não atingem infinito, $f(x) < \infty$ para todo x. Defina a sequência de funções Lebesgue $(F_n)_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dadas por $F_n = \min(f, n)$. Como essas são todas limitadas, para cada n, pelo lema anterior, existe boreliana $G_n = F_n$ a.e com $G_n \leqslant F_n$. Defina a boreliana $G = \sup_n G_n \leqslant f$ (tomando sup pela milésima vez), temos que $G = F$ a.e . Para ver isso, assim como antes, seja

$$A = \{x : G(x) \neq f(x)\} = \{x : G(x) < f(x)\} = \bigcup_n \{x : G(x) < f(x) < n\}$$

Mas, semelhantemente à prova anterior,

$$\bigcup_n \{x : G(x) < f(x) < n\} \subset \bigcup_n \{x : G_n(x) < F_n(x)\}$$

A é, portanto, união enumerável de conjuntos de medida nula, logo $\mu(A) = 0$.

Para dar o golpe de misericórdia nas funções reais positivas, se $\infty \in \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$, então seja $E = f^{-1}(\infty)$. Encontre, pelo lema 3.1, um boreliano $B \subset E$ com $\mu(E - B) = 0$ e uma boreliana $G = f\mathbb{1}_{E^c}$ a.e. Então, a função

$$H = G + \infty \cdot \mathbb{1}_B$$

é claramente igual a f a.e.

Para finalizar, estendendo para funções complexas, seja $f = u^+ - u^- + iv^+ - iv^-$ de Lebesgue, aproxime u^+, u^-, v^+, v^- respectivamente por borelianas a^+, a^-, b^+, b^- a.e. Então a função $g = a^+ - a^- + ib^+ - ib^-$ satisfaz que

$$\{x : f(x) \neq g(x)\} \subset [a^+ \neq u^+] \cup [a^- \neq u^-] \cup [b^+ \neq v^+] \cup [b^- \neq v^-]$$

que é união de conjuntos de medida nula. □

Problem 3.5.

Essa questão é a mais simples e vou tentar transcrever o desenho que soluciona ela em palavras. A ideia aqui é que escrevamos uma sequência de funções trapezoidais em $[0, 1]$ que vão ficando cada vez mais fininhas, de forma que integrar sobre elas tenda a 0, mas que cada ponto de $[0, 1]$ chegue a valer 0 e 1 infinitas vezes.

Proof. Vamos construir uma sequência de funções contínuas espertas $(F_n)_n$ em $[0,1]$.. Para $m \in \{2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1}-1\}$, seja $n = m - 2^k$, definimos

$$F_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant (n-1)2^{-k} \\ 2^k(x-(n-1)2^{-k}) & \text{se } (n-1)2^{-k} \leqslant x \leqslant n2^{-k} \\ 1 & \text{se } n2^{-k} \leqslant x \leqslant (n+1)2^{-k} \\ 1-2^k(x-(n+1)2^{-k}) & \text{se } (n+1)2^{-k} \leqslant x \leqslant (n+2)2^{-k} \\ 0 & \text{se } x \geqslant (n+2)2^{-k} \end{cases}$$

Onde óbiviamente F_m está definida definida dessa forma quando os casos fazem sentido. Por exemplo quando $m = 2^k$, $n = 0$ o primeiro e o segundo caso não aparecem. Quando $m = 2^{k+1}-1$, $n = 2^k - 1$, o quarto e o último não aparecem. Essas funções são claramente contínuas, são trapézios que vão ficando cada vez menos espessos. Se $2^k \leqslant m < 2^{k+1}$, uma soma simples sobre funções afins mostra que

$$\int_0^1 F_m dx \leqslant 2^{-k+1} \to 0$$

No entanto, é também fácil perceber que se $k > 2$, para qualquer $x \in [0,1]$, existem $2^k \leqslant N, M < 2^{k+1}$ tais que $F_N(x) = 0$ e $F_M(x) = 1$. Portanto $F_m(x)$ não converge para nenhum ponto, mesmo que as integrais convirjam. □

Problem 3.6.

Esse é o problema mais legal, não acredito que consiguiria fazê-lo sem uma dica da professora Cynthia. A única função não mensurável que conhecemos até agora é a característica de um conjunto não mensurável, a ideia é tentar formar essa característica somente no liminf. Vamos fazer isso removendo pontualmente o complementar de um conjunto não mensurável infinitas vezes. **Obs:** A escolha esquista de $(0,1]$ nos conjuntos a seguir é para facilitar a colagem que precisaremos fazer para construir a função f.

Proof. Seja T um conjunto não mensurável de $(0,1]$ e $T' = (0,1] - T$ seu complementar em $(0,1]$, note que T' também é não mensurável. Vamos definir uma função $g(x,t) : \mathbb{R} \times (0,1] \to \{0,1\}$ que será a nossa ferramenta principal para construir f.

Dado t fixo, se $t \in T'$, seja $A_t = (0,1] - \{t\}$, então definimos

$$g(x,t) \begin{cases} \mathbb{1}_{A_t}(x) & \text{se } t \in T' \\ \mathbb{1}_{(0,1]}(x) & \text{se } t \notin T' \end{cases}$$

Note que, trivialmente, para todo $t \in (0,1]$, a função $g(t,x)$ - com a variável em x - é mensurável, além do mais, sua integral sobre x é claramente 1.

Agora a ideia é de alguma forma colar infinitas cópias de g uma acima da outra. Separe $(0,1]$ na união disjunta:

$$(0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{-n}, 2^{-n+1}]$$

Definiremos $g_n(x,t) : \mathbb{R} \times (2^{-n}, 2^{-n+1}] \to \{0,1\}$ da seguinte forma:

$$g_n(x,t) = g(x, t2^n - 1)$$

Por fim, defina $f : \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ colando as g_n.

$$f(x,t) = \begin{cases} \mathbb{1}_{(0,1]}(x) & \text{se } t \leqslant 0 \ \vee \ t > 1 \\ g_n(x,t) & \text{se } t \in (2^{-n}, 2^{-n+1}] \end{cases}$$

Afirmo que f satisfaz as propriedades do exercício. Claramente, $\int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pois, fixando t, nossa função é sempre a indicadora de $(0,1]$ salvo as vezes um único ponto. Para a segunda propriedade, vamos querer verificar que $h(x) = \liminf_{t\to 0} f(x,t)$ é justamente $\mathbb{1}_T(x)$ que não é mensurável. Para isso note que se $x \in T \subset [0,1]$, então $g(x,t) = 1$ para todo t e portanto, $g_n(x,t) = 1$ para qualquer t também. Logo $f(x,t) = 1$ para todo t e $h(x) = 1$. Se $x \in (0,1]^c$ então também, trivialmente $f(x,t) = 0$ para todo t e $h(x) = 0$. Agora, se $x \in T'$, para todo n, vale que

$$g_n\left(x, \frac{x+1}{2^n}\right) = \mathbb{1}_{A_x}(x) = 0$$

e, para qualquer outro $t \in (2^{-n}, 2^{-n+1}]$,

$$g_n(x,t) = 1$$

Em particular, sendo colagem desses valores, vale que para valores arbitrariamente pequenos de t atingimos $f(x,t) = 0$ e portanto $h(x) = \liminf_{t\to 0} f(x,t) = 0$. Segue dos casos anteriores que $\liminf_{t\to 0} f(x,t) = \mathbb{1}_T(x)$ que não é mensurável. $\square$