Listas de Medida

henrique

August 20, 2025

Contents

0 Introdução e Notação

Ao decorrer do curso, vou escrever minhas resoluções dos exercícios nesse arquivo. Tem alguns motivos para isso:

1. Posso reutilizar resultados passados.
2. Está tudo organizado se um futuro henrique quiser rever.
3. Há uma certo senso de completude no final do curso.

Por isso, peço desculpa ao monitor e a professora se não gostarem desse formato, me avisem que eu posso separar os arquivos. O código fonte pode ser encontrado em `https://github.com/hnrq104/medida`.

Eu vou tentar usar uma notação menos esotérica, mas, ás vezes, uma vontade maior se expressa. Por enquanto encontrei os segundos usos no texto:

1. $\bigcup_n$ ou $\sum_n$. Quando o intervalo de índices não está específicado, geralmente estou tomando a união ou o somatório sobre os naturais positivos.
2. $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ é uma notação de combinatória que uso bastante.
3. "Observação" é algo que estou com muita preguiça de tentar provar (se estiver correto), espero poder perguntar em monitorias se a prova é necessária.

1 Lista 1 (15/08/2025)

Problem 1.1.

Esse problema é muito bonitinho e a resposta é negativa. Para resolvê-lo, precisamos da seguinte observação.

Observation 1.1. A coleção de uniões enumeráveis de infinitos conjuntos não vazios disjuntos é não-enumerável. (quase um trava-língua)

Proof. Sejam $\{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$ infinitos conjuntos satisfazendo

1. $E_i \neq \varnothing \; \forall i \in \mathbb{N}$
2. $E_i \cap E_j = \varnothing \; \forall i \neq j \in \mathbb{N}$

A função $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)$ dada por

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$$

onde $B_i = \varnothing$ se $a_i = 0$ e $B_i = E_i$ se $a_i = 1$ é injetiva. Como $2^{\mathbb{N}}$ é não enumerável, temos o resultado. □

Agora podemos dar continuidade a resolução.

Proposition 1.2. Seja (X, M) uma σ-algebra infinita, então M é não enumerável.

O que fiz antes tava errado :(. Segue a solução do João.

Proof. Suponha que M seja enumerável. Para cada $x \in X$, defina os conjuntos minimais E_x de M,

$$E_x := \bigcap_{\{E_k\in M\,;\, x\in E_k\}} E_k$$

Como M é enumerável, essas interseções são enumeráveis e portanto pertencem a M.

A ideia da prova é mostrar que os E_x particionam o espaço em conjuntos disjuntos, depois ver que eles geram M e concluir que, como M é infinita, devem existir infinitos deles.

Vamos mostrar que o espaço é particionado em conjuntos disjuntos. Sejam x, y tal que $E_x \neq E_y$, afirmo que $x \notin E_y$. Suponha que $x \in E_y$, então pela definição de E_x, $E_x \subseteq E_y$. Do mesmo modo, se $y \in E_x$, então $E_y \subseteq E_x$ e $E_x = E_y$ (contradição). Se $y \notin E_x$, então $E_y - E_x$ é um conjunto disjunto de x que contém y, logo $x \notin E_y$. Para provar que a interseção é vazia, verificamos que se $x \notin E_y$, então $E_x \subset E_x - E_y$, portanto $E_x \cap E_y = \varnothing$.

O próximo passo é mostrar que esses conjuntos geram M. Afirmo que dado $E \in M$

$$E = \bigcup_{E_x\subset E} E_x$$

Claramente temos $\bigcup_{E_x\subset E} E_x \subset E$. Para a outra inclusão, seja $x \in E$, então $x \in E_x \subset E$, pois E é um conjunto que contém x.

Agora para matar a questão. Suponha que houvessem somente finitos E_x, digamos n. Haveria somente 2^n possíveis uniões desses conjuntos, como eles geram M e M é infinita temos uma contradição. Portanto, existem infinitos E_x disjuntos não vazios, M contém todas suas enumeráveis coleções, pela observação 1.1, M não pode ser contável.

□

Problem 1.2.

Proof. Dada uma sequência de funções mensuráveis $\{f_n\} : X \to [-\infty, \infty]$, sabemos que $I(x) = \liminf_n f_n(x)$ e $S(x) = \limsup_n f_n(x)$ são mensuráveis. Além disso, para cada $x \in X$, a sequência $f_n(x)$ converge se e somente se ela não tem valores tendendo para o infinito e $I(x) = S(x)$. A partir dessa caracterização, definimos o conjunto A tal que:

$$A = I^{-1}((-\infty, \infty)) \cap S^{-1}((-\infty, \infty))$$

Isso é, A é o conjunto de pontos de X tal que a sequência $f_n(x)$ é limitada. Note que, como I e S são mensuráveis, A é interseção de conjuntos mensuráveis de X, logo é mensurável. Em particular, as funções $\mathbb{1}_A$ e $\mathbb{1}_{A^c}$ são mensuráveis. Como vimos que somas e multiplicações de funções mensuráveis é mensurável, podemos definir uma H mensurável dada por:

$$H(x) = \mathbb{1}_{A^c}(x) + \mathbb{1}_A(x) \cdot S(x) - \mathbb{1}_A(x) \cdot I(x)$$

Os pontos em que as f_n convergem é então dado por pelo conjunto mensurável $H^{-1}(\{0\})$. Para confirmar essa afirmação, note que se $H(y) = 0$, então $H(y) \neq 1$, logo $y \notin A^c$. Temos que $y \in A$, $I(y) \in (-\infty, \infty)$ e $S(y) \in (-\infty, \infty)$, logo $S(y) - I(y)$ está bem definido (nenhum dos dois é infinito de mesmo sinal) e, temos, $S(y) = I(y)$, ou seja, a sequência $f_n(y)$ converge. Se $H(z) \neq 0$, ou $z \in A^c$, e portanto a sequência $f_n(z)$ não é limitada, ou $S(z) \neq I(z)$ e portanto, a sequência não converge. □

Problem 1.3.

Proposition 1.3. $\mathcal{M}$ é σ-álgebra. Isso é, satisfaz:

1. $X \in \mathcal{M}$
2. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$
3. $\{E_1, E_2, \dots, E_n, \dots\} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{M}$

Proof. (1). $X^c = \varnothing$ enumerável, logo $X \in \mathcal{M}$. (2). Por construção. (3). Dados contáveis conjuntos $C = \{E_1, E_2, \dots\}$ em $\mathcal{M}$, separe-os em incontáveis (A) e contáveis (B) de forma que:

$$\{E_1, E_2, \dots\} = A \cup B = \{E_i : E_i \text{ incontável}\} \cup \{E_j : E_j \text{ contável}\}$$

Seja então $H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i = \bigcup_{A_i \in A} A_i \cup \bigcup_{B_i \in B} B_i$. Note que se A não é vazio, i.e. contém ao menos um elemento A_j, então $H^c \subset (A_j)^c$ que é contável. Se A é vazio, então $H = \bigcup_{B_i \in B} B_i$ é uma união enumerável de conjuntos contáveis, logo H é contável. □

Proposition 1.4. μ é uma medida em $\mathcal{M}$.

Proof. Basta mostrar que, dada uma coleção disjunta $C = \{E_1, E_2, \dots\} \subset \mathcal{M}$,

$$\sum_{E_i \in C} \mu(E_i) = \mu\Big(\bigcup_{E_i \in C} E_i\Big)$$

Como anteriormente escreva $C = A \cup B$, onde A são os conjuntos incontáveis e B são os contáveis. Se A for vazio, todos os conjuntos E_i são contáveis, então a união deles é contável e temos que os dois lados da equação são 0. Se A possui um conjunto E_j, ele obrigatóriamente é o único em A, pois, como os E_i são disjuntos, todos os outros E_i's estão contidos em $(E_j)^c$ que é enumerável. Portanto, o somatório da esquerda possui somente um valor diferente de 0, vulgo $\mu(E_j) = 1$ e a união da direita contém E_j não enumerável, portanto vale 1 também. □

Problem 1.4.

Vou supor de antemão que as medidas μ_1 e μ_2 são positivas, há um passo em que precisaremos dessa hipótese.

Proposition 1.5. $\mu(E) = \inf\{\mu_1(E \cap F) + \mu_2(E - F) \,:\, F \in \mathcal{M}\}$ é uma medida positiva.

Proof. Sendo ínfimo de valores positivos, claramante $\mu(E) \in [0, \infty]$. Considere em $\mathcal{M}$ uma sequência qualquer de conjuntos disjuntos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Queremos mostrar que:

$$\mu\bigg(\bigcup_n E_n\bigg) = \sum_n \mu(E_n)$$

Considere

$$\begin{aligned}\mu\bigg(\bigcup_n E_n\bigg) &= \inf\bigg\{\mu_1\bigg(\bigcup_n E_n \cap F\bigg) + \mu_2\bigg(\bigcup_n E_n - F\bigg) \,:\, F \in \mathcal{M}\bigg\} \\ &= \inf\bigg\{\sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \sum_n \mu_2(E_n - F) \,:\, F \in \mathcal{M}\bigg\} \\ &= \inf\bigg\{\sum_n (\mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F)) \,:\, F \in \mathcal{M}\bigg\}\end{aligned}$$

Onde usamos na segunda igualdade o fato de que somatórios de valores positivos podem ser rearranjados (e portanto a hipótese de que μ_1 e μ_2 são positivas). Agora note que para todo $F \in \mathcal{M}$ e qualquer E_i temos

$$\inf\{\mu_1(E_i \cap \tilde{F}) + \mu_2(E_i - \tilde{F}) \,:\, \tilde{F} \in \mathcal{M}\} \leqslant \mu_1(E_i \cap F) + \mu_2(E_2 - F)$$

Logo, termo a termo,

$$\sum_n \inf\{\mu_1(E_n \cap \tilde{F}) + \mu_2(E_n - \tilde{F}) \,:\, \tilde{F} \in \mathcal{M}\} \leqslant \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F)$$

i.e.

$$\sum_n \mu(E_n) \leqslant \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F)$$

Como vale para todo F, temos, tomando ínfimos

$$\sum_n \mu(E_n) \leqslant \mu\bigg(\bigcup_n E_n\bigg)$$

Falta provar que $\mu\big(\bigcup_n E_n\big) \leqslant \sum_n \mu(E_n)$. Ou, mais sorreteiramente, que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\bigcup_n E_n) \leqslant \bigg(\sum_n \mu(E_n)\bigg) + \varepsilon = \sum_n (\mu(E_n) + \varepsilon/2^n)$$

Para cada n, existe $F_n \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E_n) \leqslant \mu_1(E_n \cap F_n) + \mu_2(E_n - F_n) + \varepsilon/2^n$. Tome $F = \bigcup_n (F_i \cap E_i)$. Então,

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_n E_n) &\leqslant \mu_1(\bigcup_n E_n \cap F) + \mu_2(\bigcup_n E_n - F) \\ &= \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F) \\ &= \sum_n \mu_1(E_n \cap F_n) + \mu_2(E_n - F_n) \\ &\leqslant \sum_n (\mu(E_n) + \varepsilon/2^n) \\ &= \sum_n \mu(E_n) + \varepsilon\end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade usamos o fato de que os E_n são disjuntos entre si e na segunda desigualdade, a definição dos F_n. Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, tomando $\varepsilon \to 0$, encontramos $\big(\bigcup_n E_n\big) = \sum_n \mu(E_n)$. $\square$

Proposition 1.6. μ é a maior medida menor que μ_1 e μ_2.

Proof. Para todo $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) \leqslant \mu_1(E \cap X) + \mu_2(E - X) = \mu_1(E)$, semelhantemente, $\mu(E) \leqslant \mu_1(E \cap \varnothing) + \mu_2(E - \varnothing) = \mu_2(E)$. Portanto, $\mu(E) \leqslant \min(\mu_1(E), \mu_2(E))$. Agora seja $\tilde{\mu}$ qualquer medida também menor que μ_1 e μ_2. Então, para todo F,

$$\tilde{\mu}(E) = \tilde{\mu}(E \cap F) + \tilde{\mu}(E - F) \leqslant \mu_1(E \cap F) + \mu_2(E - F)$$

Como isso vale para qualquer F, tomando ínfimos, temos

$$\tilde{\mu}(E) \leqslant \mu(E)$$

□

Problem 1.5.

Será útil para a letra (b) duas proposições importantes.

Proposition 1.7. Seja $(X, \mathcal{T})$ espaço topológico e $\mathcal{B}_X$ sua σ-álgebra de Borel. Se $Y \in \mathcal{B}_X$ é um conjunto mensurável, então na topologia induzida $(Y, \mathcal{T} \cap Y)$, a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_Y$ coincide com o conjunto $\{E \cap Y : E \in \mathcal{B}_X\}$.

Proof. Vamos provar primeiro que $\mathcal{B}_Y \subseteq \{E \cap Y : E \in \mathcal{B}_X\}$. Então basta mostrar que o segundo conjunto é uma σ-álgebra que contem os abertos. Ele claramente contem os abertos de Y, pois esses são $Y \cap U$ para U aberto de X que são mensuráveis. Falta verificar as propriedades de σ-álgebra. (1) Y pertence ao conjunto, pois $Y = Y \cap Y$ e $Y \in \mathcal{B}_X$. (2) Se $A \cap Y$ é um elemento, então $(A \cap Y)^c_Y = Y - (A \cap Y) = Y \cap A^c$ também pertence, pois $A^c \in \mathcal{B}_X$. Sejam $(A_1 \cap Y, A_2 \cap Y, \dots)$ elementos do conjunto, então $\bigcup_n (A_n \cap Y) = (\bigcup_n A_n) \cap Y$ pertence também. Isso finaliza a primeira parte.

Falta mostrar que $\{E \cap Y : E \in \mathcal{B}_X\} \subseteq \mathcal{B}_Y$, isso não foi trivial para mim (tive que rever a prova do João na internet); Essa proposição é equivalente a $\{E \in \mathcal{B}_X : E \cap Y \in \mathcal{B}_Y\} = \mathcal{B}_X$, que segue diretamente do fato que o conjunto da esquerda é uma σ-álgebra que contém os abertos de X. Vamos provar as propriedades: (1) $X \in \mathcal{B}_X$ e $X \cap Y = Y \in \mathcal{B}_Y$, logo X pertence ao conjunto. (2) Se $E \in \mathcal{B}_X$ é tal que $E \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ então $E^c \in \mathcal{B}_X$ tem $E^c \cap Y = Y - E \in \mathcal{B}_Y$. (3) $\bigcup_n E_n$ é tal que $E_n \cap Y \in \mathcal{B}_Y$, então $\bigcup_n E_n \cap Y = \bigcup_n (E_n \cap Y) \in \mathcal{B}_Y$. Portanto, o conjunto que definimos é uma σ-álgebra. Falta verificar que contém os abertos de X, mas segue trivialmente do fato que os abertos de Y são justamente $U \cap Y \in \mathcal{B}_Y$. □

O próximo é bem óbvio, estou inserindo por completude. (Mas é meio chato de provar).

Proposition 1.8. Se $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ são espaços topológicos homeomorfos por um mapa $f : X \to Y$, então vale que $\mathcal{B}_Y = \{f(E_x) : E_x \in \mathcal{B}_X\}$ onde $\mathcal{B}_X$ e $\mathcal{B}_Y$ são as σ-álgebras de Borel em X e Y respectivamente.

Proof. Seja $\mathcal{M} = \{f(E_x) : E_x \in \mathcal{B}_X\}$. $\mathcal{M}$ claramente contém os abertos de Y pois se $U \subset Y$ é aberto, $f^{-1}(U)$ é aberto pertencente a $\mathcal{B}_X$, logo $U = f(f^{-1}(U)) \in \mathcal{M}$. Vamos mostrar que é σ-álgebra. (1) $Y = f(X) \in \mathcal{M}$. (2) $f(E_x) \in \mathcal{M} \Rightarrow (f(E_x))^c = f(E_x^c) \in \mathcal{M}$. (3) $\bigcup_n f(E_x^n) = f(\bigcup_n E_x^n) \in \mathcal{M}$. Portanto mostramos que $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{M}$. Agora para mostrar que $\mathcal{M} \in \mathcal{B}_Y$ usamos mensurabilidade, sendo f^{-1} contínua, ela é mensurável entre σ-álgebras de Borel, logo se $A = f^{-1}(E_x) \in \mathcal{M}$, então, como $E_x \in \mathcal{B}_X$, $A \in \mathcal{B}_Y$. E terminamos a demonstração. □

Agora as letras (a) e (b) saem quase que de graça.

(a) *Proof.* Translações $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tal que $f(x) = f(x) + a$ para algum $a \in \mathbb{R}^d$ são homeomorfismo de $\mathbb{R}^d$ para si próprio. Por 1.8, se $E \in \mathcal{B}^d$ então $f(E) = E + a \in \mathcal{B}^d$. □

(b) *Proof.* Vamos fazer para seções horizontais, a prova para seções verticais é análoga. Para $y \in \mathbb{R}$ e E Borel de $\mathbb{R}^2$, definimos $E_y = E \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$ boreliano. Note que $\mathbb{R} \times \{y\} = \bigcap_n \mathbb{R} \times \{a - 1/n, a + 1/n\}$ é Borel de $\mathbb{R}^2$. Pela proposição 1.7, $\{E_y : E \in \mathcal{B}^2\}$ é a σ-álgebra de Borel induzida por $\mathbb{R} \times \{y\}$, mas esse conjunto é trivialmente homeomorfo a reta $\mathbb{R}$ com a projeção na primeira coordenada. Portanto, por 1.8, as seções horizontais definidas na questão são borelianos da reta. □

Problem 1.6.

Essa questão é bem divertida, estende dupla contagem para medidas.

Proposition 1.9. (a) Os conjuntos H_k são mensuráveis.

Proof. Como cada E_i é mensurável, definimos as funções mensuráveis $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por:

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{E_j}(x)$$

Então $0 \leqslant f_1 \leqslant \ldots \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant \infty$ é uma sequência crescente mensurável, e portanto:

$$F(x) = \sup_n f_n(x) = \lim_n f_n(x) = \#\{n : x \in E_n\}$$

é uma função mensurável. Temos que $H_k = F^{-1}([k, \infty])$ é um conjunto mensurável. □

Agora vem a parte difícil. Para mostrar a letra (b), esqueçamos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por enquanto, foquemos em $(E_n)_{n\in[N]}$ finitos.

Definition 1.10. Dada uma sequência finita $(E_n)_{n\in[N]}$ de conjuntos de $\mathcal{M}$. Sejam $H_k^{(N)}$ da seguinte forma:

$$H_k^{(N)} = \{x \in X : \#\{n : x \in E_n\} \geqslant k\}$$

A mesma definição dos H_k, mas para uma coleção finita de no máximo N conjuntos.

Observation 1.11. Temos propriedades simples, que independem de N e da coleção escolhida:

1. Exatamente como na letra (a), $H_k^{(N)}$ é mensurável.
2. $H_0^{(N)} = X$
3. $H_{k+1}^{(N)} \subseteq H_k^{(N)}$
4. $H_{N+1}^{(N)} = \varnothing$, pois nenhum elemento pertence em mais que N conjuntos.

Para qualquer sequência infinita $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos os $H_k^{(N)}$ para os primeiros N conjuntos da sequência.

Lemma 1.12. Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mensuráveis. Para todo $N \in \mathbb{N}$, vale:

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^{N} \mu(E_k)$$

Proof. Vamos seguir por indução. Para $N = 1$, temos de graça que $E_1 = H_1^{(1)}$, logo $\mu(H_1^{(1)}) = \mu(E_1)$. Suponha que o resultado vale para N e olhemos para o caso $N + 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1} \mu(E_n) &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} \mu(E_n) \\ &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} \mu(H_n^{(N)})\end{aligned}$$

Onde usamos a hipótese de indução na segunda igualdade.

Note que $H_k^{(N+1)} = (H_k^{(N)} - E_{N+1}) \cup (H_{k-1}^{(N)} \cap E_{N+1})$. Pois se $x \in X$ aparece em k conjuntos de $(E_n)_{n\in[N+1]}$, ou ele aparece em k dos primeiros N conjuntos, ou aparece em E_{N+1} e pelo menos $k-1$ outros dos primeiros N. Para aproveitar dessa observação, podemos reescrever o somatório

$$\begin{aligned}\mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} \mu(H_n^{(N)}) &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} \mu(H_n^{(N)} - E_{N+1}) + \mu(H_n^{(N)} \cap E_{N+1}) \\ &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N+1} \mu(H_n^{(N)} - E_{N+1}) + \mu(H_n^{(N)} \cap E_{N+1})\end{aligned}$$

Já que $H_{N+1}^{(N)} = \varnothing$. Agora escrevemos $\mu(E_{N+1}) = \mu(H_0^{(N)} \cap E_{N+1}) = \mu(X \cap E_{N+1})$ e reindexamos cada termo da direita no somatório, obtendo

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1} \mu(E_n) &= \sum_{n=1}^{N+1} \mu(H_n^{(N)} - E_{N+1}) + \mu(H_{n-1}^{(N)} \cap E_{N+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} \mu(H_k^{(N+1)})\end{aligned}$$

Provando o passo indutivo. $\square$

Estamos quase finalizados, sentimos até vontade de passar o limite em 1.12 e obter o resultado, mas isso por si só não é suficiente.

Proposition 1.13. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$

Proof. Tomando limites em N no Lema 1.12, temos que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Para obter o resultado, vamos mostrar que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$$

Note que, pela definição dos $H_k^{(N)}$, temos uma sequência crescente $H_k^{(1)} \subseteq H_k^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq H_k$, tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_k^{(n)} = H_k$$

Por conta das inclusões $H_N^{(N)} \subseteq H_N$ e μ ser uma medida positiva, temos, termo a termo, $\mu(H_N^{(N)}) \leqslant \mu(H_N)$. Portanto, já temos um lado da igualdade.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$$

Para o outro lado, observamos que como $H_N^{(N)} \to H_N$ são mensuráveis, $\lim_{n\to\infty} \mu(H_N^{(N)}) = \mu(H_N)$. Portanto, para cada $M > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) \geqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{M} \mu(H_k^{N}) = \sum_{k=1}^{M} \mu(H_k)$$

Como isso vale para todo M, $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$. $\square$