

# Listas de Medida

henrique

August 17, 2025

## Contents

<b>0</b>	<b>Introdução e Notação</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Lista 1 (15/08/2025)</b>	<b>1</b>

## 0 Introdução e Notação

Ao decorrer do curso, vou escrever minhas resoluções dos exercícios nesse arquivo. Tem alguns motivos para isso:

1. Posso reutilizar resultados passados.
2. Está tudo organizado se um futuro henrique quiser rever.
3. Há uma certo senso de completude no final do curso.

Por isso, peço desculpa ao monitor e a professora se não gostarem desse formato, me avisem que eu posso separar os arquivos.

Eu vou tentar usar uma notação menos esotérica, mas, às vezes, uma vontade maior se expressa. Por enquanto encontrei os segundos usos no texto:

1.  $\bigcup_n$  ou  $\sum_n$ . Quando o intervalo de índices não está especificado, geralmente estou tomando a união ou o somatório sobre os naturais positivos.
2.  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  é uma notação de combinatória que uso bastante.
3. "Observação" é algo que estou com muita preguiça de tentar provar (se estiver correto), espero poder perguntar em monitorias se a prova é necessária.

## 1 Lista 1 (15/08/2025)

### Problem 1.1.

Esse problema é muito bonitinho e a resposta é negativa. Para resolvê-lo, precisamos da seguinte observação.

**Observation 1.1.** A coleção de uniões enumeráveis de infinitos conjuntos não vazios disjuntos é não-enumerável. (quase um trava-língua)

Agora podemos dar continuidade a resolução.

**Proposition 1.2.** Seja  $(X, M)$  uma  $\sigma$ -álgebra infinita. Existem infinitos conjuntos não vazios disjuntos em  $M$ .

*Proof.* Seja  $C$  uma coleção maximal de conjuntos disjuntos não vazios de  $M$ . Suponha que  $|C| = m < \infty$  sendo da seguinte forma:

$$C = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Note que  $X \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} A_i$ , pois se não, poderíamos adicionar  $X - \bigcup_{1 \leq i \leq m} A_i$  à nossa coleção contradizendo maximalidade.  $C$  é, portanto, uma partição finita de  $X$  em conjuntos disjuntos. Olhemos para todas as possíveis uniões finitas de elementos de  $C$  ( $2^m$  delas considerando  $\emptyset$ ), como são finitos, existe um conjunto  $B \in M$  diferente delas. Repartindo  $B$ , temos:

$$B = \bigcup_{\{i \mid A_i \cap B \neq \emptyset\}} B \cap A_i$$

Como  $B \neq \emptyset$  e escolhemos  $B$  a evitar uniões de elementos de  $C$  sabemos que

$$\emptyset \neq B \subsetneq \bigcup_{\{i \mid A_i \cap B \neq \emptyset\}} A_i$$

Portanto, existe  $A_j$  com  $A_j - B \neq \emptyset$  e  $A_j \cap B \neq \emptyset$ . Podemos então trocar  $A_j$  por  $A_j - B$  e  $A_j \cap B$ , contradizendo a maximalidade. Logo  $|C|$  não pode ser finito.  $\square$

**Corollary 1.3.** Uma  $\sigma$ -álgebra infinita  $(X, M)$  não é enumerável.

*Proof.* Pela proposição anterior, existem infinitos conjuntos disjuntos distintos em  $M$ . Logo  $M$  é não enumerável pela observação e pela terceira propriedade de  $\sigma$ -álgebras.  $\square$

**Problem 1.2.**

*Proof.* Dada uma sequência de funções mensuráveis  $\{f_n\} : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ , sabemos que  $I(x) = \liminf_n f_n(x)$  e  $S(x) = \limsup_n f_n(x)$  são mensuráveis. Além disso, para cada  $x \in X$ , a sequência  $f_n(x)$  converge se e somente se ela não tem valores tendendo para o infinito e  $I(x) = S(x)$ . A partir dessa caracterização, definimos o conjunto  $A$  tal que:

$$A = I^{-1}((-\infty, \infty)) \cap S^{-1}((-\infty, \infty))$$

Isso é,  $A$  é o conjunto de pontos de  $X$  tal que a sequência  $f_n(x)$  é limitada. Note que, como  $I$  e  $S$  são mensuráveis,  $A$  é interseção de conjuntos mensuráveis de  $X$ , logo é mensurável. Em particular, as funções  $\mathbb{1}_A$  e  $\mathbb{1}_{A^c}$  são mensuráveis. Como vimos que somas e multiplicações de funções mensuráveis é mensurável, podemos definir uma  $H$  mensurável dada por:

$$H(x) = \mathbb{1}_{A^c}(x) + \mathbb{1}_A(x) \cdot S(x) - \mathbb{1}_A(x) \cdot I(x)$$

Os pontos em que as  $f_n$  convergem é então dado por pelo conjunto mensurável  $H^{-1}(\{0\})$ . Para confirmar essa afirmação, note que se  $H(y) = 0$ , então  $H(y) \neq 1$ , logo  $y \notin A^c$ . Temos que  $y \in A$ ,  $I(y) \in (-\infty, \infty)$  e  $S(y) \in (-\infty, \infty)$ , logo  $S(y) - I(y)$  está bem definido (nenhum dos dois é infinito de mesmo sinal) e, temos,  $S(y) = I(y)$ , ou seja, a sequência  $f_n(y)$  converge. Se  $H(z) \neq 0$ , ou  $z \in A^c$ , e portanto a sequência  $f_n(z)$  não é limitada, ou  $S(z) \neq I(z)$  e portanto, a sequência não converge.  $\square$

**Problem 1.3.**

**Proposition 1.4.**  $\mathcal{M}$  é  $\sigma$ -álgebra. Isso é, satisfaz:

1.  $X \in \mathcal{M}$
2.  $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$
3.  $\{E_1, E_2, \dots, E_n, \dots\} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{M}$

*Proof.* (1).  $X^c = \emptyset$  enumerável, logo  $X \in \mathcal{M}$ . (2). Por construção. (3). Dados contáveis conjuntos  $C = \{E_1, E_2, \dots\}$  em  $\mathcal{M}$ , separe-os em incontáveis ( $A$ ) e contáveis ( $B$ ) de forma que:

$$\{E_1, E_2, \dots\} = A \cup B = \{E_i : E_i \text{ incontável}\} \cup \{E_j : E_j \text{ contável}\}$$

Seja então  $H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i = \bigcup_{A_i \in A} A_i \cup \bigcup_{B_i \in B} B_i$ . Note que se  $A$  não é vazio, i.e. contém ao menos um elemento  $A_j$ , então  $H^c \subset (A_j)^c$  que é contável. Se  $A$  é vazio, então  $H = \bigcup_{B_i \in B} B_i$  é uma união enumerável de conjuntos contáveis, logo  $H$  é contável.  $\square$

**Proposition 1.5.**  $\mu$  é uma medida em  $\mathcal{M}$ .

*Proof.* Basta mostrar que, dada uma coleção disjunta  $C = \{E_1, E_2, \dots\} \subset \mathcal{M}$ ,

$$\sum_{E_i \in C} \mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_{E_i \in C} E_i\right)$$

Como anteriormente escreva  $C = A \cup B$ , onde  $A$  são os conjuntos incontáveis e  $B$  são os contáveis. Se  $A$  for vazio, todos os conjuntos  $E_i$  são contáveis, então a união deles é contável e temos que os dois lados da equação são 0. Se  $A$  possui um conjunto  $E_j$ , ele obrigatoriamente é o único em  $A$ , pois, como os  $E_i$  são disjuntos, todos os outros  $E_i$ 's estão contidos em  $(E_j)^c$  que é enumerável. Portanto, o somatório da esquerda possui somente um valor diferente de 0, vulgo  $\mu(E_j) = 1$  e a união da direita contém  $E_j$  não enumerável, portanto vale 1 também.  $\square$

**Problem 1.4.**

Vou supor de antemão que as medidas  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são positivas, há um passo em que precisaremos dessa hipótese.

**Proposition 1.6.**  $\mu(E) = \inf\{\mu_1(E \cap F) + \mu_2(E - F) : F \in \mathcal{M}\}$  é uma medida positiva.

*Proof.* Sendo ínfimo de valores positivos, claramente  $\mu(E) \in [0, \infty]$ . Considere em  $\mathcal{M}$  uma sequência qualquer de conjuntos disjuntos  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Queremos mostrar que:

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n)$$

Considere

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_n E_n\right) &= \inf \left\{ \mu_1\left(\bigcup_n E_n \cap F\right) + \mu_2\left(\bigcup_n E_n - F\right) : F \in \mathcal{M} \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \sum_n \mu_2(E_n - F) : F \in \mathcal{M} \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_n (\mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F)) : F \in \mathcal{M} \right\} \end{aligned}$$

Onde usamos na segunda igualdade o fato de que somatórios de valores positivos podem ser rearranjados (e portanto a hipótese de que  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são positivas). Agora note que para todo  $F \in \mathcal{M}$  e qualquer  $E_i$  temos

$$\inf\{\mu_1(E_i \cap \tilde{F}) + \mu_2(E_i - \tilde{F}) : \tilde{F} \in \mathcal{M}\} \leq \mu_1(E_i \cap F) + \mu_2(E_i - F)$$

Logo, termo a termo,

$$\sum_n \inf\{\mu_1(E_n \cap \tilde{F}) + \mu_2(E_n - \tilde{F}) : \tilde{F} \in \mathcal{M}\} \leq \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F)$$

i.e.

$$\sum_n \mu(E_n) \leq \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F)$$

Como vale para todo  $F$ , temos, tomando ínfimos

$$\sum_n \mu(E_n) \leq \mu\left(\bigcup_n E_n\right)$$

Falta provar que  $\mu(\bigcup_n E_n) \leq \sum_n \mu(E_n)$ . Ou, mais sorrateiramente, que para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \left(\sum_n \mu(E_n)\right) + \varepsilon = \sum_n (\mu(E_n) + \varepsilon/2^n)$$

Para cada  $n$ , existe  $F_n \in \mathcal{M}$  tal que  $\mu(E_n) \leq \mu_1(E_n \cap F_n) + \mu_2(E_n - F_n) + \varepsilon/2^n$ . Tome  $F = \bigcup_n (F_n \cap E_i)$ . Então,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_n E_n\right) &\leq \mu_1\left(\bigcup_n E_n \cap F\right) + \mu_2\left(\bigcup_n E_n - F\right) \\ &= \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F) \\ &= \sum_n \mu_1(E_n \cap F_n) + \mu_2(E_n - F_n) \\ &\leq \sum_n (\mu(E_n) + \varepsilon/2^n) \\ &= \sum_n \mu(E_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade usamos o fato de que os  $E_n$  são disjuntos entre si e na segunda desigualdade, a definição dos  $F_n$ . Como isso vale para todo  $\varepsilon > 0$ , tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , encontramos  $\mu(\bigcup_n E_n) = \sum_n \mu(E_n)$ .  $\square$

**Proposition 1.7.**  $\mu$  é a maior medida menor que  $\mu_1$  e  $\mu_2$ .

*Proof.* Para todo  $E \in \mathcal{M}$ ,  $\mu(E) \leq \mu_1(E \cap X) + \mu_2(E - X) = \mu_1(E)$ , semelhantemente,  $\mu(E) \leq \mu_1(E \cap \emptyset) + \mu_2(E - \emptyset) = \mu_2(E)$ . Portanto,  $\mu(E) \leq \min(\mu_1(E), \mu_2(E))$ . Agora seja  $\tilde{\mu}$  qualquer medida também menor que  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Então, para todo  $F$ ,

$$\tilde{\mu}(E) = \tilde{\mu}(E \cap F) + \tilde{\mu}(E - F) \leq \mu_1(E \cap F) + \mu_2(E - F)$$

Como isso vale para qualquer  $F$ , tomando ínfimos, temos

$$\tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$$

$\square$

**Problem 1.5.**

Falta alguma ideia boa aqui

**Problem 1.6.**

Essa questão é bem divertida, estende dupla contagem para medidas.

**Proposition 1.8.** (a) Os conjuntos  $H_k$  são mensuráveis.

*Proof.* Como cada  $E_i$  é mensurável, definimos as funções mensuráveis  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  por:

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{E_j}(x)$$

Então  $0 \leq f_1 \leq \dots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq \infty$  é uma sequência crescente mensurável, e portanto:

$$F(x) = \sup_n f_n(x) = \lim_n f_n(x) = \#\{n : x \in E_n\}$$

é uma função mensurável. Temos que  $H_k = F^{-1}([k, \infty])$  é um conjunto mensurável.  $\square$

Agora vem a parte difícil. Para mostrar a letra (b), esqueçamos  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  por enquanto, foquemos em  $(E_n)_{n \in [N]}$  finitos.

**Definition 1.9.** Dada uma sequência finita  $(E_n)_{n \in [N]}$  de conjuntos de  $\mathcal{M}$ . Sejam  $H_k^{(N)}$  da seguinte forma:

$$H_k^{(N)} = \{x \in X : \#\{n : x \in E_n\} \geq k\}$$

A mesma definição dos  $H_k$ , mas para uma coleção finita de no máximo  $N$  conjuntos.

**Observation 1.10.** Temos propriedades simples, que independem de  $N$  e da coleção escolhida:

1. Exatamente como na letra (a),  $H_k^{(N)}$  é mensurável.
2.  $H_0^{(N)} = X$
3.  $H_{k+1}^{(N)} \subseteq H_k^{(N)}$
4.  $H_{N+1}^{(N)} = \emptyset$ , pois nenhum elemento pertence em mais que  $N$  conjuntos.

Para qualquer sequência infinita  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definimos os  $H_k^{(N)}$  para os primeiros  $N$  conjuntos da sequência.

**Lemma 1.11.** Seja  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mensuráveis. Para todo  $N \in \mathbb{N}$ , vale:

$$\sum_{k=1}^N \mu(H_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^N \mu(E_k)$$

*Proof.* Vamos seguir por indução. Para  $N = 1$ , temos de graça que  $E_1 = H_1^{(1)}$ , logo  $\mu(H_1^{(1)}) = \mu(E_1)$ . Suponha que o resultado vale para  $N$  e olhemos para o caso  $N + 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N+1} \mu(E_n) &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^N \mu(E_n) \\ &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^N \mu(H_n^{(N)}) \end{aligned}$$

Onde usamos a hipótese de indução na segunda igualdade.

Note que  $H_k^{(N+1)} = (H_k^{(N)} - E_{N+1}) \cup (H_{k-1}^{(N)} \cap E_{N+1})$ . Pois se  $x \in X$  aparece em  $k$  conjuntos de  $(E_n)_{n \in [N+1]}$ , ou ele aparece exatamente em  $k$  conjuntos dos primeiros  $N$  conjuntos, ou aparece em  $E_{N+1}$  e pelo menos  $k-1$  outros dos primeiros  $N$ . Para aproveitar dessa observação, podemos reescrever o somatório

$$\begin{aligned} \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^N \mu(H_n^{(N)}) &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^N \mu(H_n^{(N)} - E_{N+1}) + \mu(H_n^{(N)} \cap E_{N+1}) \\ &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N+1} \mu(H_n^{(N)} - E_{N+1}) + \mu(H_n^{(N)} \cap E_{N+1}) \end{aligned}$$

Já que  $H_{N+1}^{(N)} = \emptyset$ . Agora escrevemos  $\mu(E_{N+1}) = \mu(H_0^{(N)} \cap E_{N+1}) = \mu(X \cap E_{N+1})$  e reindexamos cada termo da direita no somatório, obtendo

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N+1} \mu(E_n) &= \sum_{n=1}^{N+1} \mu(H_n^{(N)} - E_{N+1}) + \mu(H_{n-1}^{(N)} \cap E_{N+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} \mu(H_k^{(N+1)}) \end{aligned}$$

Provando o passo indutivo. □

Estamos quase finalizados, sentimos até vontade de passar o limite em 1.11 e obter o resultado, mas isso por si só não é suficiente.

**Proposition 1.12.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$

*Proof.* Tomando limites em  $N$  no Lema 1.11, temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \mu(H_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Para obter o resultado, vamos mostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \mu(H_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$$

Note que, pela definição dos  $H_k^{(N)}$ , temos uma sequência crescente  $H_k^{(1)} \subseteq H_k^{(2)} \subseteq \dots \subseteq H_k$ , tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_k^{(n)} = H_k$$

Por conta das inclusões  $H_N^{(N)} \subseteq H_N$  e  $\mu$  ser uma medida positiva, temos, termo a termo,  $\mu(H_N^{(N)}) \leq \mu(H_N)$ . Portanto, já temos um lado da igualdade.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \mu(H_k^{(N)}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$$

Para o outro lado, observamos que como  $H_N^{(N)} \rightarrow H_N$  são mensuráveis,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(H_N^{(N)}) = \mu(H_N)$ . Portanto, para cada  $M > 0$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \mu(H_k^{(N)}) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^M \mu(H_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^M \mu(H_k)$$

Como isso vale para todo  $M$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \mu(H_k^{(N)}) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$ . □