Listas de Medida

Aluno: Henrique
Prof. Cynthia Bortolotto
T.A. João Ferreira

November 14, 2025

Contents

0 Introdução e Notação

Ao decorrer do curso, vou escrever minhas resoluções dos exercícios nesse arquivo. Tem alguns motivos para isso:

1. Posso reutilizar resultados passados.
2. Está tudo organizado se um futuro henrique quiser rever.
3. Há uma certo senso de completude no final do curso.

Por isso, peço desculpa ao monitor e a professora se não gostarem desse formato, me avisem que eu posso separar os arquivos. O código fonte pode ser encontrado em `https://github.com/hnrq104/medida`.

Eu vou tentar usar uma notação menos esotérica, mas, ás vezes, uma vontade maior se expressa. Por enquanto encontrei os segundos usos no texto:

1. $\bigcup_n$ ou $\sum_n$. Quando o intervalo de índices não está específicado, geralmente estou tomando a união ou o somatório sobre os naturais positivos.

2. $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ é uma notação de combinatória que uso bastante.

3. "Observação" é algo que estou com muita preguiça de tentar provar (se estiver correto), espero poder perguntar em monitorias se a prova é necessária.

4. "a.e" significa "almost everywhere", geralmente sou contra anglicanismos descenessários, mas esse já está encravado em meu vocabulário. Se μ é uma medida e for necessária a especificação, a.e. $[\mu]$ significa quase em todo ponto de acordo com a medida μ.

1 Lista 1 (15/08/2025)

Listagem de problemas:

1. Exercício 1.1 : ✓
2. Exercício 1.2 : ✓
3. Exercício 1.3 : ✓
4. Exercício 1.4 : ✓
5. Exercício 1.5 : ✓
6. Exercício 1.6 : ✓

Problem 1.1.

Esse problema é muito bonitinho e a resposta é negativa. Para resolvê-lo, precisamos da seguinte observação.

Observation 1.1. A coleção de uniões enumeráveis de infinitos conjuntos não vazios disjuntos é não-enumerável. (quase um trava-língua)

Proof. Sejam $\{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$ infinitos conjuntos satisfazendo

1. $E_i \neq \varnothing \; \forall i \in \mathbb{N}$
2. $E_i \cap E_j = \varnothing \; \forall i \neq j \in \mathbb{N}$

A função $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i)$ dada por

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$$

onde $B_i = \varnothing$ se $a_i = 0$ e $B_i = E_i$ se $a_i = 1$ é injetiva. Como $2^{\mathbb{N}}$ é não enumerável, temos o resultado. □

Agora podemos dar continuidade a resolução.

Proposition 1.2. Seja (X, M) uma σ-algebra infinita, então M é não enumerável.

O que fiz antes tava errado :(. Segue a solução do João.

Proof. Suponha que M seja enumerável. Para cada $x \in X$, defina os conjuntos minimais E_x de M,

$$E_x := \bigcap_{\{E_k \in M \,;\, x \in E_k\}} E_k$$

Como M é enumerável, essas interseções são enumeráveis e portanto pertencem a M.

A ideia da prova é mostrar que os E_x particionam o espaço em conjuntos disjuntos, depois ver que eles geram M e concluir que, como M é infinita, devem existir infinitos deles.

Vamos mostrar que o espaço é particionado em conjuntos disjuntos. Sejam x, y tal que $E_x \neq E_y$, afirmo que $x \notin E_y$. Suponha que $x \in E_y$, então pela definição de E_x, $E_x \subseteq E_y$. Do mesmo modo, se $y \in E_x$, então $E_y \subseteq E_x$ e $E_x = E_y$ (contradição). Se $y \notin E_x$, então $E_y - E_x$ é um conjunto disjunto de x que contém y, logo $x \notin E_y$. Para provar que a interseção é vazia, verificamos que se $x \notin E_y$, então $E_x \subset E_x - E_y$, portanto $E_x \cap E_y = \varnothing$.

O próximo passo é mostrar que esses conjuntos geram M. Afirmo que dado $E \in M$

$$E = \bigcup_{E_x \subset E} E_x$$

Claramente temos $\bigcup_{E_x \subset E} E_x \subset E$. Para a outra inclusão, seja $x \in E$, então $x \in E_x \subset E$, pois E é um conjunto que contém x.

Agora para matar a questão. Suponha que houvessem somente finitos E_x, digamos n. Haveria somente 2^n possíveis uniões desses conjuntos, como eles geram M e M é infinita temos uma contradição. Portanto, existem infinitos E_x disjuntos não vazios, M contém todas suas enumeráveis coleções, pela observação 1.1, M não pode ser contável.

$\square$

Problem 1.2.

Proof. Dada uma sequência de funções mensuráveis $\{f_n\} : X \to [-\infty, \infty]$, sabemos que $I(x) = \liminf_n f_n(x)$ e $S(x) = \limsup_n f_n(x)$ são mensuráveis. Além disso, para cada $x \in X$, a sequência $f_n(x)$ converge se e somente se ela não tem valores tendendo para o infinito e $I(x) = S(x)$. A partir dessa caracterização, definimos o conjunto A tal que:

$$A = I^{-1}((-\infty, \infty)) \cap S^{-1}((-\infty, \infty))$$

Isso é, A é o conjunto de pontos de X tal que a sequência $f_n(x)$ é limitada. Note que, como I e S são mensuráveis, A é interseção de conjuntos mensuráveis de X, logo é mensurável. Em particular, as funções $\mathbb{1}_A$ e $\mathbb{1}_{A^c}$ são mensuráveis. Como vimos que somas e multiplicações de funções mensuráveis é mensurável, podemos definir uma H mensurável dada por:

$$H(x) = \mathbb{1}_{A^c}(x) + \mathbb{1}_A(x) \cdot S(x) - \mathbb{1}_A(x) \cdot I(x)$$

Os pontos em que as f_n convergem é então dado por pelo conjunto mensurável $H^{-1}(\{0\})$. Para confirmar essa afirmação, note que se $H(y) = 0$, então $H(y) \neq 1$, logo $y \notin A^c$. Temos que $y \in A$, $I(y) \in (-\infty, \infty)$ e $S(y) \in (-\infty, \infty)$, logo $S(y) - I(y)$ está bem definido (nenhum dos dois é infinito de mesmo sinal) e, temos, $S(y) = I(y)$, ou seja, a sequência $f_n(y)$ converge. Se $H(z) \neq 0$, ou $z \in A^c$, e portanto a sequência $f_n(z)$ não é limitada, ou $S(z) \neq I(z)$ e portanto, a sequência não converge. $\square$

Problem 1.3.

Proposition 1.3. $\mathcal{M}$ é σ-álgebra. Isso é, satisfaz:

1. $X \in \mathcal{M}$
2. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$
3. $\{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{M}$

Proof. (1). $X^c = \varnothing$ enumerável, logo $X \in \mathcal{M}$. (2). Por construção. (3). Dados contáveis conjuntos $C = \{E_1, E_2, \ldots\}$ em $\mathcal{M}$, separe-os em incontáveis (A) e contáveis (B) de forma que:

$$\{E_1, E_2, \ldots\} = A \cup B = \{E_i : E_i \text{ incontável}\} \cup \{E_j : E_j \text{ contável}\}$$

Seja então $H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i = \bigcup_{A_i \in A} A_i \cup \bigcup_{B_i \in B} B_i$. Note que se A não é vazio, i.e. contém ao menos um elemento A_j, então $H^c \subset (A_j)^c$ que é contável. Se A é vazio, então $H = \bigcup_{B_i \in B} B_i$ é uma união enumerável de conjuntos contáveis, logo H é contável. $\square$

Proposition 1.4. μ é uma medida em $\mathcal{M}$.

Proof. Como $\varnothing$ é contável, $\mu(\varnothing) = 0$, além disso, $\mu(E) \in \{0, 1\} \subset [0, \infty]$. Então, basta mostrar que, dada uma coleção disjunta $C = \{E_1, E_2, \dots\} \subset \mathcal{M}$,

$$\sum_{E_i \in C} \mu(E_i) = \mu\Big(\bigcup_{E_i \in C} E_i \Big)$$

Como anteriormente escreva $C = A \cup B$, onde A são os conjuntos incontáveis e B são os contáveis. Se A for vazio, todos os conjuntos E_i são contáveis, então a união deles é contável e temos que os dois lados da equação são 0. Se A possui um conjunto E_j, ele obrigatóriamente é o único em A, pois, como os E_i são disjuntos, todos os outros E_i's estão contidos em $(E_j)^c$ que é enumerável. Portanto, o somatório da esquerda possui somente um valor diferente de 0, vulgo $\mu(E_j) = 1$ e a união da direita contém E_j não enumerável, portanto vale 1 também. □

Problem 1.4.

Vou supor de antemão que as medidas μ_1 e μ_2 são positivas, há um passo em que precisaremos dessa hipótese.

Proposition 1.5. $\mu(E) = \inf\{\mu_1(E \cap F) + \mu_2(E - F) \,:\, F \in \mathcal{M}\}$ é uma medida positiva.

Proof. (1) Sendo ínfimo de valores positivos, claramante $\mu(E) \in [0, \infty]$. (2) $\mu(\varnothing) \leqslant \mu_1(\varnothing) + \mu_2(\varnothing) = 0$. (3) Considere em $\mathcal{M}$ uma sequência qualquer de conjuntos disjuntos $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Queremos mostrar que:

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n)$$

Considere

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_n E_n\right) &= \inf\left\{\mu_1\left(\bigcup_n E_n \cap F\right) + \mu_2\left(\bigcup_n E_n - F\right) \,:\, F \in \mathcal{M}\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \sum_n \mu_2(E_n - F) \,:\, F \in \mathcal{M}\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_n (\mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F)) \,:\, F \in \mathcal{M}\right\}
\end{aligned}$$

Onde usamos na segunda igualdade o fato de que somatórios de valores positivos podem ser rearranjados (e portanto a hipótese de que μ_1 e μ_2 são positivas). Agora note que para todo $F \in \mathcal{M}$ e qualquer E_i temos

$$\inf\{\mu_1(E_i \cap \tilde{F}) + \mu_2(E_i - \tilde{F}) \,:\, \tilde{F} \in \mathcal{M}\} \leqslant \mu_1(E_i \cap F) + \mu_2(E_2 - F)$$

Logo, termo a termo,

$$\sum_n \inf\{\mu_1(E_n \cap \tilde{F}) + \mu_2(E_n - \tilde{F}) \,:\, \tilde{F} \in \mathcal{M}\} \leqslant \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F)$$

i.e.

$$\sum_n \mu(E_n) \leqslant \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F)$$

Como vale para todo F, temos, tomando ínfimos

$$\sum_n \mu(E_n) \leqslant \mu\left(\bigcup_n E_n\right)$$

Falta provar que $\mu\big(\bigcup_n E_n\big) \leqslant \sum_n \mu(E_n)$. Ou, mais sorreteiramente, que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu\big(\bigcup_n E_n\big) \leqslant \left(\sum_n \mu(E_n)\right) + \varepsilon = \sum_n (\mu(E_n) + \varepsilon/2^n)$$

Para cada n, existe $F_n \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E_n) \leqslant \mu_1(E_n \cap F_n) + \mu_2(E_n - F_n) + \varepsilon/2^n$. Tome $F = \bigcup_n (F_i \cap E_i)$. Então,

$$\begin{aligned}
\mu\big(\bigcup_n E_n\big) &\leqslant \mu_1\big(\bigcup_n E_n \cap F\big) + \mu_2\big(\bigcup_n E_n - F\big) \\
&= \sum_n \mu_1(E_n \cap F) + \mu_2(E_n - F) \\
&= \sum_n \mu_1(E_n \cap F_n) + \mu_2(E_n - F_n) \\
&\leqslant \sum_n (\mu(E_n) + \varepsilon/2^n) \\
&= \sum_n \mu(E_n) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade usamos o fato de que os E_n são disjuntos entre si e na segunda desigualdade, a definição dos F_n. Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, tomando $\varepsilon \to 0$, encontramos $\big(\bigcup_n E_n\big) = \sum_n \mu(E_n)$. □

Proposition 1.6. μ é a maior medida menor que μ_1 e μ_2.

Proof. Para todo $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) \leqslant \mu_1(E \cap X) + \mu_2(E - X) = \mu_1(E)$, semelhantemente, $\mu(E) \leqslant \mu_1(E \cap \varnothing) + \mu_2(E - \varnothing) = \mu_2(E)$. Portanto, $\mu(E) \leqslant \min(\mu_1(E), \mu_2(E))$. Agora seja $\tilde{\mu}$ qualquer medida também menor que μ_1 e μ_2. Então, para todo F,

$$\tilde{\mu}(E) = \tilde{\mu}(E \cap F) + \tilde{\mu}(E - F) \leqslant \mu_1(E \cap F) + \mu_2(E - F)$$

Como isso vale para qualquer F, tomando ínfimos, temos

$$\tilde{\mu}(E) \leqslant \mu(E)$$

□

Problem 1.5.

Será útil para a letra (b) duas proposições importantes.

Proposition 1.7. Seja $(X, \mathcal{T})$ espaço topológico e $\mathcal{B}_X$ sua σ-álgebra de Borel. Se $Y \in \mathcal{B}_X$ é um conjunto mensurável, então na topologia induzida $(Y, \mathcal{T} \cap Y)$, a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_Y$ coincide com o conjunto $\{E \cap Y \,:\, E \in \mathcal{B}_X\}$.

Proof. Vamos provar primeiro que $\mathcal{B}_Y \subseteq \{E \cap Y \,:\, E \in \mathcal{B}_X\}$. Então basta mostrar que o segundo conjunto é uma σ-álgebra que contem os abertos. Ele claramente contem os abertos de Y, pois esses são $Y \cap U$ para U aberto de X que são mensuráveis. Falta verificar as propriedades de σ-álgebra. (1) Y pertence ao conjunto, pois $Y = Y \cap Y$ e $Y \in \mathcal{B}_X$. (2) Se $A \cap Y$ é um elemento, então $(A \cap Y)^c_Y = Y - (A \cap Y) = Y \cap A^c$ também pertence, pois $A^c \in \mathcal{B}_X$. Sejam $(A_1 \cap Y, A_2 \cap Y, \dots)$ elementos do conjunto, então $\bigcup_n (A_n \cap Y) = (\bigcup_n A_n) \cap Y$ pertence também. Isso finaliza a primeira parte.

Falta mostrar que $\{E \cap Y \,:\, E \in \mathcal{B}_X\} \subseteq \mathcal{B}_Y$, isso não foi trivial para mim (tive que rever a prova do João na internet); Essa proposição é equivalente a $\{E \in \mathcal{B}_X \,:\, E \cap Y \in \mathcal{B}_Y\} = \mathcal{B}_X$, que segue diretamente do fato que o conjunto da esquerda é uma σ-álgebra que contém os abertos de X. Vamos provar as propriedades: (1) $X \in \mathcal{B}_X$ e $X \cap Y = Y \in \mathcal{B}_Y$, logo X pertence ao conjunto. (2) Se $E \in \mathcal{B}_X$ é tal que $E \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ então $E^c \in \mathcal{B}_X$ tem $E^c \cap Y = Y - E \in \mathcal{B}_Y$. (3) $\bigcup_n E_n$ é tal que $E_n \cap Y \in \mathcal{B}_Y$, então $\bigcup_n E_n \cap Y = \bigcup_n (E_n \cap Y) \in \mathcal{B}_Y$. Portanto, o conjunto que definimos é uma σ-álgebra. Falta verificar que contém os abertos de X, mas segue trivialmente do fato que os abertos de Y são justamente $U \cap Y \in \mathcal{B}_Y$. □

O próximo é bem óbvio, estou inserindo por completude. (Mas é meio chato de provar).

Proposition 1.8. Se $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ são espaços topológicos homeomorfos por um mapa $f : X \to Y$, então vale que $\mathcal{B}_Y = \{f(E_x) : E_x \in \mathcal{B}_X\}$ onde $\mathcal{B}_X$ e $\mathcal{B}_Y$ são as σ-álgebras de Borel em X e Y respectivamente.

Proof. Seja $\mathcal{M} = \{f(E_x) : E_x \in \mathcal{B}_X\}$. $\mathcal{M}$ claramente contém os abertos de Y pois se $U \subset Y$ é aberto, $f^{-1}(U)$ é aberto pertencente a $\mathcal{B}_X$, logo $U = f(f^{-1}(U)) \in \mathcal{M}$. Vamos mostrar que é σ-álgebra. (1) $Y = f(X) \in \mathcal{M}$. (2) $f(E_x) \in \mathcal{M} \Rightarrow (f(E_x))^c = f(E_x^c) \in \mathcal{M}$. (3) $\bigcup_n f(E_x^n) = f(\bigcup_n E_x^n) \in \mathcal{M}$. Portanto mostramos que $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{M}$. Agora para mostrar que $\mathcal{M} \in \mathcal{B}_Y$ usamos mensurabilidade, sendo f^{-1} contínua, ela é mensurável entre σ-álgebras de Borel, logo se $A = f^{-1}(E_x) \in \mathcal{M}$, então, como $E_x \in \mathcal{B}_X$, $A \in \mathcal{B}_Y$. E terminamos a demonstração. □

Agora as letras (a) e (b) saem quase que de graça.

(a) *Proof.* Translações $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tal que $f(x) = f(x) + a$ para algum $a \in \mathbb{R}^d$ são homeomorfismo de $\mathbb{R}^d$ para si próprio. Por 1.8, se $E \in \mathcal{B}^d$ então $f(E) = E + a \in \mathcal{B}^d$. □

(b) *Proof.* Vamos fazer para seções horizontais, a prova para seções verticais é análoga. Para $y \in \mathbb{R}$ e E Borel de $\mathbb{R}^2$, definimos $E_y = E \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$ boreliano. Note que $\mathbb{R} \times \{y\} = \bigcap_n \mathbb{R} \times \{a - 1/n, a + 1/n\}$ é Borel de $\mathbb{R}^2$. Pela proposição 1.7, $\{E_y : E \in \mathcal{B}^2\}$ é a σ-álgebra de Borel induzida por $\mathbb{R} \times \{y\}$, mas esse conjunto é trivialmente homeomorfo a reta $\mathbb{R}$ com a projeção na primeira coordenada. Portanto, por 1.8, as seções horizontais definidas na questão são borelianos da reta. □

Problem 1.6.

Essa questão é bem divertida, estende dupla contagem para medidas.

Proposition 1.9. (a) Os conjuntos H_k são mensuráveis.

Proof. Como cada E_i é mensurável, definimos as funções mensuráveis $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por:

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{E_j}(x)$$

Então $0 \leqslant f_1 \leqslant \ldots \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant \infty$ é uma sequência crescente mensurável, e portanto:

$$F(x) = \sup_n f_n(x) = \lim_n f_n(x) = \#\{n : x \in E_n\}$$

é uma função mensurável. Temos que $H_k = F^{-1}([k, \infty])$ é um conjunto mensurável. □

Agora vem a parte difícil. Para mostrar a letra (b), esqueçamos $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por enquanto, foquemos em $(E_n)_{n \in [N]}$ finitos.

Definition 1.10. Dada uma sequência finita $(E_n)_{n \in [N]}$ de conjuntos de $\mathcal{M}$. Sejam $H_k^{(N)}$ da seguinte forma:

$$H_k^{(N)} = \{x \in X : \#\{n : x \in E_n\} \geqslant k\}$$

A mesma definição dos H_k, mas para uma coleção finita de no máximo N conjuntos.

Observation 1.11. Temos propriedades simples, que independem de N e da coleção escolhida:

1. Exatamente como na letra (a), $H_k^{(N)}$ é mensurável.
2. $H_0^{(N)} = X$
3. $H_{k+1}^{(N)} \subseteq H_k^{(N)}$
4. $H_{N+1}^{(N)} = \varnothing$, pois nenhum elemento pertence em mais que N conjuntos.

Para qualquer sequência infinita $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos os $H_k^{(N)}$ para os primeiros N conjuntos da sequência.

Lemma 1.12. Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mensuráveis. Para todo $N \in \mathbb{N}$, vale:

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^{N} \mu(E_k)$$

Proof. Vamos seguir por indução. Para $N = 1$, temos de graça que $E_1 = H_1^{(1)}$, logo $\mu(H_1^{(1)}) = \mu(E_1)$. Suponha que o resultado vale para N e olhemos para o caso $N + 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1} \mu(E_n) &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} \mu(E_n) \\ &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} \mu(H_n^{(N)})\end{aligned}$$

Onde usamos a hipótese de indução na segunda igualdade.

Note que $H_k^{(N+1)} = (H_k^{(N)} - E_{N+1}) \cup (H_{k-1}^{(N)} \cap E_{N+1})$. Pois se $x \in X$ aparece em k conjuntos de $(E_n)_{n\in[N+1]}$, ou ele aparece em k dos primeiros N conjuntos, ou aparece em E_{N+1} e pelo menos $k-1$ outros dos primeiros N. Para aproveitar dessa observação, podemos reescrever o somatório

$$\begin{aligned}\mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} \mu(H_n^{(N)}) &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} \mu(H_n^{(N)} - E_{N+1}) + \mu(H_n^{(N)} \cap E_{N+1}) \\ &= \mu(E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N+1} \mu(H_n^{(N)} - E_{N+1}) + \mu(H_n^{(N)} \cap E_{N+1})\end{aligned}$$

Já que $H_{N+1}^{(N)} = \varnothing$. Agora escrevemos $\mu(E_{N+1}) = \mu(H_0^{(N)} \cap E_{N+1}) = \mu(X \cap E_{N+1})$ e reindexamos cada termo da direita no somatório, obtendo

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1} \mu(E_n) &= \sum_{n=1}^{N+1} \mu(H_n^{(N)} - E_{N+1}) + \mu(H_{n-1}^{(N)} \cap E_{N+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} \mu(H_k^{(N+1)})\end{aligned}$$

Provando o passo indutivo. □

Estamos quase finalizados, sentimos até vontade de passar o limite em 1.12 e obter o resultado, mas isso por si só não é suficiente.

Proposition 1.13. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$

Proof. Tomando limites em N no Lema 1.12, temos que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Para obter o resultado, vamos mostrar que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$$

Note que, pela definição dos $H_k^{(N)}$, temos uma sequência crescente $H_k^{(1)} \subseteq H_k^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq H_k$, tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_k^{(n)} = H_k$$

Por conta das inclusões $H_N^{(N)} \subseteq H_N$ e μ ser uma medida positiva, temos, termo a termo, $\mu(H_N^{(N)}) \leqslant \mu(H_N)$. Portanto, já temos um lado da igualdade.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$$

Para o outro lado, observamos que como $H_k^{(N)} \to H_k$ são mensuráveis, $\lim_{n\to\infty} \mu(H_N^{(n)}) = \mu(H_N)$. Portanto, para cada $M > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) \geqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{M} \mu(H_k^{N}) = \sum_{k=1}^{M} \mu(H_k)$$

Como isso vale para todo M, $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(H_k^{(N)}) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$. $\square$

2 Lista 2 (21/08/2025)

Listagem de problemas:

1. Exercício 2.1 : ✓
2. Exercício 2.2 : ✓
3. Exercício 2.3 : ✓
4. Exercício 2.4 : ✓
5. Exercício 2.5 : ✓
6. Exercício 2.6 : ✓
7. Exercício 2.7 : ✓

Para a solução de vários problemas dessa lista, utilizaremos os três principais teoremas vistos em aula até agora. Vamos enunciá-los.

Theorem 2.1. (Convergência Monótona). Dada uma sequência crescente de funções mensuráveis $(f_n)_n$ de X para $[0, \infty]$, satisfazendo:

(a) $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \infty$ para todo $x \in X$

(b) $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$

Então f é mensurável, e

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$$

Theorem 2.2. (Lema de Fatou). Se $f_n : X \to [0, \infty]$ é mensurável, para cada n, então

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Theorem 2.3. (Convergência Dominada). Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis complexas de X tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existe para todo $x \in X$. Se existe uma função $g \in L^1(\mu)$ tal que, para todo n,

$$|f_n(x)| \leqslant |g(x)|$$

então $f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Problem 2.1.

Proof. Essa questão parece muito com a de interseção de conjuntos mensuráveis (Teorema 1.19 Rudin). Se $f_1 \in L^1(\mu)$, como ela é positiva, existe $0 \leqslant M < \infty$ tal que $\int_X f_1 \, d\mu \leqslant M$. Defina g_n mensurável por $g_n = f_1 - f_n$. Temos então que

(a) $0 \leqslant g_1 \leqslant g_2 \leqslant \ldots \leqslant \infty$

(b) $g_n(x) \to f_1(x) - f(x)$ para todo $x \in X$.

Podemos aplicar convergência monótona [2.1] para encontrar:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_1 - f_n \, d\mu = \int_X f_1 - f \, d\mu \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_1 \, d\mu - \int_X f_n \, d\mu \right) = \int_X f_1 \, d\mu - \int_X f \, d\mu \tag{2}$$

$$\int_X f_1 \, d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu - \int_X f \, d\mu \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \tag{4}$$

Onde, crucialmente, usamos na segunda* igualdade que $\int_X f_1 \leqslant M < \infty$.

Se admitimos $f_1 \notin L^1(\mu)$, a igualdade pode não valer. Defina $f_n(x) = 1/n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que $f_n \to f = 0$, logo $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = 0$, mas $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = \infty$ para todo n. □

Problem 2.2.

Proof. Podemos usar diretamente o exemplo patológico da questão 2.1. Mas afim de fazer um diferente, seja $X = \{0, 1\}$ com medida de contáveis. Defina as funções simples (e portanto mensuráveis) h e g dadas por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

Seja $\{f_n\}$, tal que $f_n = h$ se n for par, e $f_n = g$ se n for ímpar. Então claramente, $\liminf_n f_n(x) = 0$ para todo x, mas $\int_X f_n \, d\mu = 1$ para todo n. Portanto

$$0 = \int_X (\liminf_n f_n) d\mu < \liminf_n \int_X f_n d\mu = 1$$

□

Problem 2.3.

Proof. Esse problema é bem legal, envolve aproximar a função pontualmente e perceber que podemos aplicar nossos resultados. Antes de mais nada, dado $\alpha > 0$, defina $g_n : X \to [0, \infty]$, por

$$g_n(x) = n \log(1 + (f(x)/n)^\alpha) = n[\log(n^\alpha + f(x)^\alpha) - \log(n^\alpha)]$$

g_n é composição de uma função contínua por uma mensurável $f \geqslant 0$, é portanto mensurável e da forma que está definida, é positiva. $g(x) \in [0, \infty]$.

Agora, vamos tentar estimar g_n. Pelo teorema do valor médio, dado x fixo,

$$\log(n^\alpha + f(x)^\alpha) - \log(n^\alpha) = \frac{f(x)^\alpha}{y}$$

para $y \in (n^\alpha, n^\alpha + f(x)^\alpha)$. Então, temos

$$n\frac{f(x)^\alpha}{n^\alpha + f(x)^\alpha} \leqslant g_n(x) \leqslant n\frac{f(x)^\alpha}{n^\alpha}$$

E isso já é suficiente para dois casos do problema.

Uma observação antes de brincar com as integrais é que como $\int_X f d\mu \in (0, \infty)$, notamos duas coisas.

1. O conjunto onde f vale infinito tem medida nula.

2. O conjunto onde $f > 0$ tem medida positiva.

O item (1) vale pois, caso contrário, $\int_X f d\mu$ valeria infinito. Da mesma forma, (2) vale pois, caso contrário, como f é positiva, a integral valeria 0. Disso segue que podemos supor, sem perda de generalidade, que f é estritamente positiva e não assume valores infinitos em X (onde f vale 0 não muda as integrais definidas). Agora, feita essa observação, podemos dar continuidade ao resultado.

Se $\alpha = 1$,

$$\frac{nf(x)}{n + f(x)} \leqslant g_n(x) \leqslant f(x)$$

Como o lado esquerdo tende a $f(x)$, temos que $g_n(x) \to f(x)$. Além do mais, $g_n(x) \leqslant f(x) \in L^1(\mu)$, logo, por Convergência Dominada [2.3], temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log(1 + (f(x)/n)^\alpha) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x) d\mu = \int_X f d\mu = c$$

Se $\alpha < 1$, de $g_n(x) \geqslant nf(x)^\alpha/(n^\alpha + f(x)^\alpha) \to \infty$ temos que

$$\infty = \liminf_{n\to\infty} nf(x)^\alpha/(n^\alpha + f(x)^\alpha) \leqslant \liminf_{n\to\infty} g_n(x)$$

Usando o lema de Fatou [2.2],

$$\infty = \int_X \infty d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X n \log(1 + (f(x)/n)^\alpha) d\mu$$

que é o resultado esperado.

Para $\alpha > 1$, terei que usar a dica do João, percebi que só conseguiria usar convergência dominada se $\int_X f^\alpha d\mu < \infty$, (mas não sabemos disso). Então precisamos fazer surgir f sem expoentes na estimativa de g_n, para isso consideramos a sequências de desigualdades, válida para $t \geqslant 0$, $\alpha > 1$.

$$1 + t^\alpha \leqslant (1 + x)^\alpha \leqslant (e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$$

Onde a primeira desigualdade sai, como observado pelo João, imediatamante de

$$\left(\frac{1}{1+t}\right)^\alpha + \left(\frac{t}{1+t}\right)^\alpha \leqslant 1$$

Tomando log's na equação,

$$\log(1 + t^\alpha) \leqslant \log((1 + t)^\alpha) \leqslant \log((e^t)^\alpha) = \alpha t$$

Portanto, $g_n(x) \leqslant n\alpha(f(x)/n) = \alpha f(x) \in L^1(\mu)$. Agora estamos muito felizes, pois sabemos que pontualmente (para cada x fixo).

$$g_n(x) \leqslant \frac{f(x)^\alpha}{n^{\alpha-1}} \to 0$$

Logo, por convergência dominada [2.3],

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\log(1+(f(x)/n)^\alpha)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$$

□

Problem 2.4.

Proof. Essa questão segue quase imediatamante da série de desigualdades

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f| d\mu \tag{5}$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_X \sup_x\{|f_n - f|\} d\mu \tag{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sup_x\{|f_n - f|\}\mu(X) \to 0 \tag{7}$$

Onde em (7) usamos crucialmente que $\mu(X) < \infty$ e a sequência é uniformemente convergente.

Se $\mu(X) = \infty$, segue exatamente da solução do exercício 2.1, com $f_n = 1/n$, $f = 0$, $X = \mathbb{R}$, que a hipótese não pode ser omitida. □

Problem 2.5.

Proof. Minha intuição Riemanianna me matou nessa questão, tenho que abandoná-la. Suponha que o resultado seja falso, i.e. $f \in L^1(\mu)$, mas existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$ existe um mensurável E_δ com $\mu(E_\delta) < \delta$, mas

$$\int_{E_\delta} |f| d\mu > \varepsilon$$

Então, escolhemos uma sequência de $(E_n)_n$, com $\mu(E_n) < 2^{-n}$ e $\int_{E_n} |f| d\mu > \varepsilon$. Note que a união dos E_n tem medida finita.

$$A = \bigcup_n E_n \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = \mu(\bigcup_n E_n) \leqslant \sum_n \mu(E_n) \leqslant 2$$

E se definirmos $A_m = \bigcup_{n\geqslant m} E_n$, achamos uma sequência decrescente de conjuntos de medida finita: $A = A_1 \supset A_2 \supset \ldots$. Além do mais,

$$\mu(A_m) \leqslant \sum_{n\geqslant m} \mu(E_n) \leqslant \sum_{n\geqslant m} 2^{-n} = 2^{-m+1} \to 0$$

Quando $m \to \infty$. Portanto, $\mu(\bigcap_m A_m) \to 0$.

A ideia da prova agora é mostrar que a integral sobre esse conjunto é um limite sobre integrais todas maiores que ε, mas então teríamos que a integral sobre um conjunto de medida nula maior que 0, absurdo. Para isso, defina, para cada m

$$f_m(x) = |f(x)|\mathbb{1}_{A_m}(x)$$

funções mensuráveis, decrescentes e todas dominadas por $|f| \in L^1(\mu)$. Chamando as interseções dos A_m de B, temos que $f_m \to |f| \cdot \mathbb{1}_B$. Pelo teorema da convergência dominada [2.3], temos que

$$\lim_{m\to\infty}\int_X |f| \cdot \mathbb{1}_{A_m} d\mu = \int_X |f| \cdot \mathbb{1}_B d\mu = \int_B |f| d\mu$$

Mas, por hipótese, $\int_X |f| \cdot \mathbb{1}_{A_m} d\mu \geqslant \int_{E_m} |f| d\mu > \varepsilon$. Logo o limite da esquerda deve ser maior ou igual a $\varepsilon > 0$, mas a integral da direita - sobre um conjunto B de medida nula - deveria ser 0. □

Problem 2.6.

Proof. A resolução dessa questão está no livro, cuja prova repetirei aqui. Note no entanto que ela segue diretamente da questão 1.6 da lista anterior, pois provamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$$

como $H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_\infty$, se $\mu(H_\infty) > \varepsilon > 0$, então para todo k, $\mu(H_k) > \varepsilon$. Teríamos por fim que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k) = \infty$.

Eu acho a solução do Rudin mais elegante, pois - ao menos para mim - foi trabalhoso estabelecer a igualdade entre os somatórios. Assim como antes, construa

$$f_N = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{E_k}$$

Temos que f_N é uma sequência crescente de funções que tende a $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_k}$. Pelo teorema da convergência monótona [2.1]

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \tag{8}$$

O termo da esquerda é precisamente $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ que estamos supondo ser $< \infty$. Agora, se a medida do conjunto $\{x : f(x) = \infty\}$ (os x's que aparecem em infinitos E_k's) fosse positiva então estaríamos integrando infinito sobre um conjunto de medida não nula, e a integral da direita seria infinito. Simbólicamente:

$$\int_X f d\mu \geqslant \int_{f^{-1}(\infty)} f d\mu = \mu(f^{-1}(\infty)) \cdot \infty = \infty$$

O que contradiz (8). ∎

Problem 2.7.

Proof. Eu não sei exatamente quanto queremos mostrar nessa questão, provamos em aula que para $f, g \in L^1(\mu)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, a função $\alpha f + \beta g$ é mensurável (onde está bem definida). Seja $A = f^{-1}(\infty) \cap g^{-1}(\infty)$, A é interseção de mensuráveis e portanto mensurável, definimos exatamente como no problema 1.2 a função mensurável

$$h = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c} f - \mathbb{1}_{A^c} g$$

$h(z)$ é 0 se e somente se $f(z)$ e $g(z)$ não são infinitas e $f(z) = g(z)$. Usando h, o conjunto

$$\{z : f(z) = g(z)\} = h^{-1}(0) \cup A$$

é mensurável. ∎

3 Lista 3 (28/08/2025)

Listagem de problemas:

1. Exercício 3.1 : ✓
2. Exercício 3.2 : ✓
3. Exercício 3.3 : ✓
4. Exercício 3.4 : ✓
5. Exercício 3.5 : ✓
6. Exercício 3.6 : ✓

Problem 3.1.

Proof. A resposta dessa pergunta é positiva, mas eu penei um pouco para chegar nessa conclusão. Lembremos que para mostrar que f é Borel mensurável, basta mostrar que, para todo $c \in \mathbb{R}$, a pré-imagem $f^{-1}((c, +\infty))$ é mensurável. Vamos mostrar que essa pré-imagem é uma união enumerável de conjuntos Borel mensuráveis em $\mathbb{R}$.

Seja $A = f^{-1}((c, +\infty))$ e tome $a \in A$, i.e $f(a) > c$, pelas condições de continuidade em f, temos três casos possíveis:

1. f é contínua em a, logo $\exists \delta_a > 0$ tal que $(a - \delta_a, a + \delta_a) \subset A$
2. f é contínua a esquerda em a, logo $\exists \delta_a > 0$ tal que $(a - \delta_a, a] \subset A$
3. f é contínua a direita em a, logo $\exists \delta_a > 0$ tal que $[a, a + \delta_a) \subset A$

Vamos mostrar que A é a união enumerável de seus componentes conexos, como os componentes conexos são intervalos da reta, eles são borelianos e portanto A será boreliano. Para isso, basta notar que em cada componente conexo há um racional que determina ele completamente. Tome $x \in A$ de um componente, olhe para um racional no intervalo associado a x pela condição de continuidade, essa racional é representante da componente conexa. Como os racionais são enumeráveis, essas componentes são enumeráveis e A é mensurável. □

Problem 3.2.

Proof. Basta lembrar bem da definição da integral de Riemann para perceber que a de Lebesgue generaliza ela. Por Riemann, toda função contínua num compacto é integrável e suas somas inferiores e superiores convergem. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ contínua, temos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} L(P, f)$$

onde P é um pontilhamento do compacto $[a, b]$, $L(f, P)$ é a soma inferior de f por P e $|P|$ é o tamanho do maior intervalo do pontilhamento. Podemos expressar $L(P, f)$ como uma soma, se P é $(a = t_0, \dots t_n = b)$, temos

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu([t_{i-1}, t_i))$$

onde $m_i = \inf\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i)\}$.

Olhando para essa fórmula é claro perceber que cada pontilhamento P está associado com uma função simples menor ou igual a f. A ideia da prova é escolher uma sequência de pontilhamento $(P_n)_n$ (diádicos por exemplo) cujo módulo $|P_n|$ tende a 0 e cada pontilhamento é um refinamento do anterior. Dessa forma, eles definirão uma sequência crescentes de funções que convergem para f, então, aplicando o Teorema da Convergência Monotona [2.1], teremos o resultado para funções positivas. Para estender para uma função g com valores reais quaisquer, escrevemos $g = g^+ - g^-$ e usando a linearidade da integral de Lebesgue e Riemann teremos o resultado para integrais de g também.

De agora em diante, seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua positiva. Seja $P_0 = \{a, b\}$, definiremos indutivamente uma sequência de refinamentos (os diádicos). Dado $P_n = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_m\}$, cortamos cada intervalo no meio, i.e.

$$P_{n+1} = P_n \cup \left\{ \frac{t_i + t_{i+1}}{2} : 0 \leqslant i < m \right\}$$

Claramente, $|P_n| = (b - a)/2^n \to 0$ e, portanto, pelos teoremas da integral de Riemann,

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) \to \int_a^b f dx \tag{9}$$

Agora definimos uma função step s_n associada ao pontilhamento $P_n = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_m\}$,

$$s_n(x) = \begin{cases} \inf\{f(a) : a \in [t_i, t_{i+1})\} & \text{se } x \in [t_i, t_{i+1}] \text{ para } i < m \\ \inf\{f(a) : a \in [t_{m-1}, t_m]\} & \text{se } x \in [t_{m-1}, t_m] \end{cases}$$

Separar o último caso não é necessário, coloquei somente por clareza. Da forma que estão definidos, os s_n são funções simples. Como os P_n são refinamentos, $s_n \leqslant s_{n+1}$ e, além do mais, sendo f uniformemente contínua em $[a, b]$, temos que $s_n \to f$ uniformemente. Por [2.1],

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} s_n d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu \tag{10}$$

Mas por serem funções simples,

$$\int_{[a,b]} s_n d\mu = L(P_n, f) \tag{11}$$

Juntando as equações 9, 10 e 11, obtemos o resultado.

$$\int_a^b f dx = \lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} s_n d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu$$

Para o caso de $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ geral, temos

$$\int_a^b g dx = \int_a^b g^+ dx - \int_a^b g^- dx = \int_{[a,b]} g^+ d\mu - \int_{[a,b]} g^- d\mu = \int_{[a,b]} g d\mu$$

□

Problem 3.3.

Proof. Esse exercício é similar ao 2.5 da lista anterior, pelo menos a resolução do João. Sejam

$$A_n = \{x : |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon_n\}$$
$$B_n = \bigcup_{m \geqslant n} A_m$$

Note que, sendo μ^* uma medida exterior,

$$\mu^*(B_N) \leqslant \sum_{m=N}^{\infty} \mu^*(A_m) \to 0$$

quando $N \to \infty$. Como os B_n são encaixados, isso é o mesmo que dizer $\mu^*(\bigcap_n B_n) = 0$. Agora seja $x \notin \bigcap_n^\infty B_n$, portanto existe n_0 tal que

$$x \notin B_{n_0}, B_{n_0+1}, \dots$$

e, da mesma forma,

$$x \notin A_{n_0}, A_{n_0+1}, \dots$$

Isso significa que para todo $m > n_0$, $|f_{m+1}(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon_m$. Como $\sum_n \varepsilon_n < \infty$, pelo M-teste de Weierstrass, $f_n(x)$ converge. Ou seja, mostramos que $(f_n(x))$ converge em quase todo ponto. □

Problem 3.4.

Lemma 3.1. Seja E um conjunto de Lebesgue em $\mathbb{R}$, existe um boreliano F_σ tal que $F_\sigma \subset E$ e $\mu(E - F_\sigma) = 0$.

Proof. Escreva $\mathbb{R} = \bigcup_n K_n$ para compactos K_n. Dado E conjunto de Lebesgue, afirmo que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um aberto $V \supset E$, tal que $\mu(V - E) < \varepsilon$. Escrevemos

$$E = \bigcup_n \mu(E \cap K_n)$$

Como $\mu(E \cap K_n) < \infty$, pois K_n é compacto, existe aberto $V_n \supset (E \cap K_n)$ com $\mu(V_n - (E \cap K_n)) < \varepsilon/2^n$. Tome $V = \bigcup_n V_n$ aberto, temos que $V - E \subset \bigcup_n V_n - (E \cap K_n)$ e

$$\mu(V - E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n - E \cap K_n) < \varepsilon$$

Isso implica que podemos aproximar por fechados por dentro também, pois aplicando a afirmação para E^c, conseguimos um aberto $W \supset E^c$ (com complementar $W^c \subset E$ fechado) tal que

$$\mu(E - W^c) = \mu(W - E^c) < \varepsilon$$

Para n natural, tome fechados $F_n \subset E$ com $\mu(E - F_n) < 1/n$. Seja $F_\sigma = \bigcup_n F_n \subset E$, então, sendo união enumerável de fechados, F_σ é Boreliano e vale que, para todo n,

$$\mu(E - F_\sigma) \leqslant \mu(E - F_n) < 1/n$$

logo, $\mu(E - F_\sigma) = 0$.

□

Lemma 3.2. Seja s uma função simples de Lebesgue, existe uma função simples h de Borel tal que $h \leqslant s$ e $s = h$ a.e.

Proof. Como s é simples, pode ser escrita da forma

$$s(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{E_n}(x)$$

Para cada E_n, tome pelo lema anterior, um boreliano $B_n \subset E_n$ com $\mu(E_n - B_n) = 0$. A função

$$h(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{B_n}(x)$$

Claramente satisfaz que

$$\mu(\{x : s(x) \neq h(x)\}) = \mu\left(\bigcup_n E_n - B_n\right) \leqslant \sum_n \mu(E_n - B_n) = 0$$

$\square$

Lemma 3.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ limitada de Lebesgue, então existe função de Borel g tal que $f = g$ a.e.

Proof. Seja $f < M$ e escreva novamente $\mathbb{R} = \bigcup_n K_n$ união de compactos. Em cada compacto K_m,

$$\int_{K_m} f d\mu \leqslant M\mu(K_m) < \infty$$

Seja $(s_n) \leqslant f$ sequência de funções simples $s_n : K_m \to \mathbb{R}^+$ de Lebesgue que aproximam f, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_m} s_n d\mu = \int_{K_m} f d\mu$$

Agora, para cada s_n, pelo lema anterior, encontre $h_n = s_n \leqslant f$ a.e. com $h_n \leqslant s_n$ Borel simples. Note que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_m} h_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{K_m} s_n d\mu = \int_{K_m} f d\mu < \infty$$

Afirmo que $H = \sup_n h_n \leqslant f$ Borel mensurável é igual a f em quase todo ponto de K_m. Seja $A = \{x : H(x) \neq f(x)\}$, então

$$A = \bigcup_k \{x : f(x) - H(x) > 1/k\}$$

Suponha que $\mu(x : f(x) - H(x) > 1/k) = C > 0$ para algum k, vale que $\mu(x : f(x) - h_n(x) > 1/k) \geqslant C$ para todo n e portanto,

$$\int_{K_m} f - h_n d\mu \geqslant \frac{C}{k} > 0$$

o que é absurdo, pois $\int_{K_m} f - h_n d\mu \to 0$. Mostramos que $\mu(x : f(x) - H(x) > 1/k) = 0$ para todo k e como consequência que $\mu(A) = 0$.

Conseguimos o resultado para cada compacto K_m. Vamos estender para uma função definida em toda a reta. Para cada m, recupere função boreliana H_m com $H_m \leqslant f$ e $H_m = f$ a.e em K_m que valha 0 em K_m^c - nossa construção anterior permite fazer essa escolha. Tome $G = \sup_m H_m$, teremos que $G = f$ a.e . Para ver que isso vale, note que $G \leqslant f$ e escreva

$$Q = \{x : G(x) \neq f(x)\} = \bigcup_m \{x \in K_m : G(x) < f(x)\} \subset \bigcup_m \{x \in K_m : H_m(x) < f(x)\}$$

Q é união enumerável de conjuntos de medida nula e portanto, tem medida nula. $\square$

Lemma 3.4. (Exercício) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de Lebesgue, então existe função de Borel g tal que $f = g$ a.e.

Proof. Vamos começar com funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ que não atingem infinito, $f(x) < \infty$ para todo x. Defina a sequência de funções Lebesgue $(F_n)_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dadas por $F_n = \min(f, n)$. Como essas são todas limitadas, para cada n, pelo lema anterior, existe boreliana $G_n = F_n$ a.e com $G_n \leqslant F_n$. Defina a boreliana $G = \sup_n G_n \leqslant f$ (tomando sup pela milésima vez), temos que $G = F$ a.e . Para ver isso, assim como antes, seja

$$A = \{x : G(x) \neq f(x)\} = \{x : G(x) < f(x)\} = \bigcup_n \{x : G(x) < f(x) < n\}$$

Mas, semelhantemente à prova anterior,

$$\bigcup_n \{x : G(x) < f(x) < n\} \subset \bigcup_n \{x : G_n(x) < F_n(x)\}$$

A é, portanto, união enumerável de conjuntos de medida nula, logo $\mu(A) = 0$.

Para dar o golpe de misericórdia nas funções reais positivas, se $\infty \in \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$, então seja $E = f^{-1}(\infty)$. Encontre, pelo lema 3.1, um boreliano $B \subset E$ com $\mu(E - B) = 0$ e uma boreliana $G = f\mathbb{1}_{E^c}$ a.e. Então, a função

$$H = G + \infty \cdot \mathbb{1}_B$$

é claramente igual a f a.e.

Para finalizar, estendendo para funções complexas, seja $f = u^+ - u^- + iv^+ - iv^-$ de Lebesgue, aproxime u^+, u^-, v^+, v^- respectivamente por borelianas a^+, a^-, b^+, b^- a.e. Então a função $g = a^+ - a^- + ib^+ - ib^-$ satisfaz que

$$\{x : f(x) \neq g(x)\} \subset [a^+ \neq u^+] \cup [a^- \neq u^-] \cup [b^+ \neq v^+] \cup [b^- \neq v^-]$$

que é união de conjuntos de medida nula. □

Problem 3.5.

Essa questão é a mais simples e vou tentar transcrever o desenho que soluciona ela em palavras. A ideia aqui é que escrevamos uma sequência de funções trapezoidais em $[0, 1]$ que vão ficando cada vez mais fininhas, de forma que integrar sobre elas tenda a 0, mas que cada ponto de $[0, 1]$ chegue a valer 0 e 1 infinitas vezes.

Proof. Vamos construir uma sequência de funções contínuas espertas $(F_n)_n$ em $[0, 1]$.. Para $m \in \{2^k, 2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1\}$, seja $n = m - 2^k$, definimos

$$F_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant (n-1)2^{-k} \\ 2^k(x - (n-1)2^{-k}) & \text{se } (n-1)2^{-k} \leqslant x \leqslant n2^{-k} \\ 1 & \text{se } n2^{-k} \leqslant x \leqslant (n+1)2^{-k} \\ 1 - 2^k(x - (n+1)2^{-k}) & \text{se } (n+1)2^{-k} \leqslant x \leqslant (n+2)2^{-k} \\ 0 & \text{se } x \geqslant (n+2)2^{-k} \end{cases}$$

Onde óbiviamente F_m está definida definida dessa forma quando os casos fazem sentido. Por exemplo quando $m = 2^k$, $n = 0$ o primeiro e o segundo caso não aparecem. Quando $m = 2^{k+1} - 1$, $n = 2^k - 1$, o quarto e o último não aparecem. Essas funções são claramente contínuas, são trapézios que vão ficando cada vez menos espessos. Se $2^k \leqslant m < 2^{k+1}$, uma soma simples sobre funções afins mostra que

$$\int_0^1 F_m dx \leqslant 2^{-k+1} \to 0$$

No entanto, é também fácil perceber que se $k > 2$, para qualquer $x \in [0, 1]$, existem $2^k \leqslant N, M < 2^{k+1}$ tais que $F_N(x) = 0$ e $F_M(x) = 1$. Portanto $F_m(x)$ não converge para nenhum ponto, mesmo que as integrais convirjam. □

Problem 3.6.

Esse é o problema mais legal, não acredito que consiguiria fazê-lo sem uma dica da professora Cynthia. A única função não mensurável que conhecemos até agora é a característica de um conjunto não mensurável, a ideia é tentar formar essa característica somente no liminf. Vamos fazer isso removendo pontualmente o complementar de um conjunto não mensurável infinitas vezes. **Obs:** A escolha esquista de $(0, 1]$ nos conjuntos a seguir é para facilitar a colagem que precisaremos fazer para construir a função f.

Proof. Seja T um conjunto não mensurável de $(0,1]$ e $T' = (0,1] - T$ seu complementar em $(0,1]$, note que T' também é não mensurável. Vamos definir uma função $g(x,t) : \mathbb{R} \times (0,1] \to \{0,1\}$ que será a nossa ferramenta principal para construir f.

Dado t fixo, se $t \in T'$, seja $A_t = (0,1] - \{t\}$, então definimos

$$g(x,t) \begin{cases} \mathbb{1}_{A_t}(x) & \text{se } t \in T' \\ \mathbb{1}_{(0,1]}(x) & \text{se } t \notin T' \end{cases}$$

Note que, trivialmente, para todo $t \in (0,1]$, a função $g(t,x)$ - com a variável em x - é mensurável, além do mais, sua integral sobre x é claramente 1.

Agora a ideia é de alguma forma colar infinitas cópias de g uma acima da outra. Separe $(0,1]$ na união disjunta:

$$(0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{-n}, 2^{-n+1}]$$

Definiremos $g_n(x,t) : \mathbb{R} \times (2^{-n}, 2^{-n+1}] \to \{0,1\}$ da seguinte forma:

$$g_n(x,t) = g(x, t2^n - 1)$$

Por fim, defina $f : \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ colando as g_n.

$$f(x,t) = \begin{cases} \mathbb{1}_{(0,1]}(x) & \text{se } t \leqslant 0 \ \vee \ t > 1 \\ g_n(x,t) & \text{se } t \in (2^{-n}, 2^{-n+1}] \end{cases}$$

Afirmo que f satisfaz as propriedades do exercício. Claramente, $\int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pois, fixando t, nossa função é sempre a indicadora de $(0,1]$ salvo as vezes um único ponto. Para a segunda propriedade, vamos querer verificar que $h(x) = \liminf_{t\to 0} f(x,t)$ é justamente $\mathbb{1}_T(x)$ que não é mensurável. Para isso note que se $x \in T \subset [0,1]$, então $g(x,t) = 1$ para todo t e portanto, $g_n(x,t) = 1$ para qualquer t também. Logo $f(x,t) = 1$ para todo t e $h(x) = 1$. Se $x \in (0,1]^c$ então também, trivialmente $f(x,t) = 0$ para todo t e $h(x) = 0$. Agora, se $x \in T'$, para todo n, vale que

$$g_n\left(x, \frac{x+1}{2^n}\right) = \mathbb{1}_{A_x}(x) = 0$$

e, para qualquer outro $t \in (2^{-n}, 2^{-n+1}]$,

$$g_n(x,t) = 1$$

Em particular, sendo colagem desses valores, vale que para valores arbitrariamente pequenos de t atingimos $f(x,t) = 0$ e portanto $h(x) = \liminf_{t\to 0} f(x,t) = 0$. Segue dos casos anteriores que $\liminf_{t\to 0} f(x,t) = \mathbb{1}_T(x)$ que não é mensurável. $\square$

4 Lista 4 (04/09/2025)

Listagem de problemas:

1. Exercício 4.1 : ✓
2. Exercício 4.2 : ✓
3. Exercício 4.3 : ✓
4. Exercício 4.4 : ✓
5. Exercício 4.5 : ✓/☹ (Se sortear pode corrigir)
   (a) ✓
   (b) ✓
   (c) ✓
   (d) ☹/✓(Acho que não está suficientemente detalhada - alguns passos omissos)
   (e) ☹/✓(Não acredito que seja uma prova de verdade)

Problem 4.1.

Proof. Sabemos que para qualquer $E \subset \mathbb{R}$, $\lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E - A)$. Queremos mostrar então que a outra desigualdade vale, i.e. $\lambda^*(E) \geqslant \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E - A)$.

Se $\lambda^*(E) = \infty$, não há nada a fazer. Suponha que $\lambda^*(E) < \infty$ e dado $\varepsilon > 0$ encontre um aberto V com $E \subset V$ tal que

$$\lambda^*(V) < \lambda^*(E) + \varepsilon.$$

Note crucialmente que a condição que A satisfaz significa que $A \in M_F$ e sendo V aberto, então $V \in M_F$ também. Logo, $\lambda^*(V) = \lambda^*(V \cap A) + \lambda^*(V - A)$. Portanto, temos

$$\lambda^*(E) + \varepsilon > \lambda^*(V) = \lambda^*(V \cap A) + \lambda^*(V - A) \geqslant \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E - A).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, terminamos a demonstração. □

Problem 4.2.

Proof. Vamos seguir a dica do Rudin para esse exercício. Seja $\{K_\alpha\}$ a coleção de todos os subconjuntos compactos de X com $\mu(K_\alpha) = 1$. Essa coleção não é vazia pois X está nela. Defina o compacto (interseção de compactos)

$$K = \bigcap_\alpha K_\alpha.$$

Vamos mostrar que K satisfaz as propriedades exigidas.

Naturalmente, se houvesse subcompacto próprio $H \subsetneq K$ com $\mu(H) = 1$, então teriamos que $K \subset H \subset X$ e $K = H$, absurdo. Como $\mu(K) \leqslant \mu(X) = 1$, falta só mostrar que $\mu(K) \geqslant 1$. Seja V aberto com $K \subset V$, então $X - V$ é um compacto e em particular

$$X - V \subset X - K = X \cap \left(\bigcup_\alpha K_\alpha^c \right) \subset \bigcup_\alpha K_\alpha^c.$$

Tomando uma subcobertura finita, notamos que

$$X - V \subset X \cap \bigcup_{i=1}^n K_{\alpha_i}^c = \bigcup_{i=1}^n (X - K_{\alpha_i})$$

Portanto,

$$\mu(X - V) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(X - K_{\alpha_i}) = 0$$

e temos $1 = \mu(X \cap V) \leqslant \mu(V)$. Como isso vale para qualquer V aberto que contém K, tomando ínfimos, temos que $\mu(K) \geqslant 1$. $\square$

Problem 4.3.

Eu tinha uma resposta super complicada para essa pergunta, por sorte o Bruno - aluno de Doutorado - viu a questão e respondeu de maneira muito mais simples.

Proof. Vamos mostrar que esses são os fechos de abertos limitados da reta. Uma inclusão é óbvia, pois para toda $f \in C_c(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f = \overline{f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})}$ é o fecho do aberto limitado $f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Agora para todo aberto A limitado em $\mathbb{R}$, vamos mostrar que existe uma função contínua f com $A = f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$, seguirá que $\overline{A} = \operatorname{supp} f$. Como estamos na reta, escreva A como união enumerável de intervalos disjuntos (suas componentes conexas)

$$A = \bigcup_{n=1} (a_n, b_n)$$

sendo A limitado, $\inf a_n > \infty$ e $\sup b_n < \infty$. Então, defina f contínua sendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ (b_n - x)(x - a_n) & \text{se } x \in (a_n, b_n) \end{cases}$$

Claramente, como A é limitado, o suporte de f é compacto e $f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) = A$, pois $f(x) \neq 0$ sse $x \in A$. $\square$

Problem 4.4.

Essa questão é fácil mas é bem longa, dá uma preguiça miserável escrevê-la. Vamos seperá-la em partes.

Proposition 4.1. $\rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{se } x_1 = x_2 \\ 1 + |y_1 - y_2| & \text{se } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

é uma métrica de $\mathbb{R}^2$.

Proof. Temos que verificar as propriedades usuais - todas são claras, mas farei a fim de completude. Não negatividade e separabilidade segue de que

$$\rho((a, b), (x, y)) = 0 \iff a = x \wedge b = y$$

e ρ é positiva. Simetria segue diretamente da definição e de que $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$. Para desigualdade triangular, temos que analisar dois casos, sejam $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, $p_3 = (x_3, y_3)$ três pontos de $\mathbb{R}^2$, então

1. Se $x_1 = x_3$, então $\rho(p_1, p_3) = |y_1 - y_3| \leqslant |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| \leqslant \rho(p_1, p_2) + \rho(p_2, p_3)$.
2. Se $x_1 \neq x_3$, então já temos que $x_1 \neq x_2$ ou $x_2 \neq x_3$, em ambos os casos

$$\rho(p_1, p_3) = 1 + |y_1 - y_3| \leqslant 1 + |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| \leqslant \rho(p_1, p_2) + \rho(p_2, p_3).$$

$\square$

Proposition 4.2. O espaço $(\mathbb{R}^2, \rho)$ é localmente compacto.

Proof. Para todo ponto $p = (x, y)$, a bola aberta de raio $1/2$ ao redor de p é $B_{(p,1/2)} = \{x\} \times (y - 1/2, y + 1/2)$ é aberto. Vamos mostrar que seu fecho, $B_{[p,1/2]} = \{x\} \times [y - 1/2, y + 1/2]$, é compacto. Para isso, vamos usar somente que $[y - 1/2, y + 1/2]$ é compacto em $\mathbb{R}$. Seja $\{U_\alpha\}_\alpha$ uma cobertura aberta de $B_{[p,1/2]}$. Então

$$B_{[p,1/2]} \subset (\{x\} \times \mathbb{R}) \cap \bigcup_\alpha U_\alpha$$

Fixando o eixo $e_1 = x$ e tomando projeções π_2 na segunda coordenada, vemos que

$$B_{[p,1/2]} \subset \bigcup_\alpha U_\alpha \iff [y - 1/2, y + 1/2] \subset \bigcup_\alpha \pi_2((\{x\} \times \mathbb{R}) \cap U_\alpha).$$

Mas é óbvio pela definição de ρ (que condiz com a métrica usual de $\mathbb{R}$ se a primeira coordenada está fixa) que $\pi_2((\{x\} \times \mathbb{R}) \cap U_\alpha)$ são conjuntos abertos em $\mathbb{R}$. Logo, como $[y - 1/2, y + 1/2]$ é compacto, obtemos um conjunto finito de indices $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$, tal que

$$[y - 1/2, y + 1/2] \subset \bigcup_{i=1}^{N} \pi_2((\{x\} \times \mathbb{R}) \cap U_{\alpha_i})$$

Claramente, $B_{[p,1/2]} \subset \bigcup_{i=1}^N U_{\alpha_i}$. Como a cobertura aberta foi tomada arbitráriamente, provamos que $B_{[p,1/2]}$ é compacto. □

Proposition 4.3. Para $f \in C_c((\mathbb{R}^2, \rho))$, existem no máximo finitos $x_1, \dots x_n$ tais quais $f(x, y) \neq 0$ para algum y.

Proof. Antes de provar o resultado, perceba que, dado $x \in \mathbb{R}$ fixo, o conjunto

$$\{x\} \times \mathbb{R} = \bigcup_{y \in \mathbb{R}} B_{((x,y),1/2)}$$

é união de abertos e portanto aberto do nosso espaço métrico. Agora o resultado segue quase que imediatamente por contradição, suponha que f de suporte compacto não satisfaz a condição. Então existem infinitos x_α com $f(x_\alpha, y)$ diferente de 0 para algum y. Em particular, vale a seguinte inclusão natural

$$\text{supp f} \subset \bigcup_\alpha \{x_\alpha\} \times \mathbb{R} \tag{12}$$

pois, se $x_\beta \notin \{x_\alpha\}_\alpha$, então, para qualquer $y, z \in \mathbb{R}$ e α, $\rho((x_\beta, y), (x_\alpha, z)) >= 1$. Logo, (x_β, y) não é valor de aderência de nenhuma sequência de $f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Note que a cobertura em (12) óbviamente não admite subcobertura finita, absurdo. □

Proposition 4.4. (Exercício) Defina, para $f \in C_c((\mathbb{R}^2, \rho))$ o funcional linear

$$\Lambda(f) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} f(x_j, y) dy.$$

Seja μ a medida recuperada pelo TRR. Se E é o eixo-x então $\mu(E) = \infty$ e $\mu(K) = 0$ para todo compacto $K \subset E$.

Proof. Primeiramente temos que mostrar que o conjunto é mensurável. Vamos fazer algo melhor e mostrar que ele é boreliano. Note que ele é interseção enumerável de abertos

$$\mathbb{R} \times \{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} B_{((x,0),1/n)}.$$

Portanto, faz sentido tomar μ sobre ele. Vamos mostrar que para qualquer aberto V que contém o eixo x, $\mu(V) = \infty$, para isso, por definição, basta exibir uma sequência de funções $f_n \prec V$ com $\Lambda(f_n) \to \infty$.

Falta uma ideia boa para essa parte, mostrar que V é gordo em infinitos pontos. Defina os conjuntos A_n onde V é um pouco espesso

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}; \{x\} \times (-1/n, 1/n) \subset V\}$$

Note que, como V é aberto e contém $\mathbb{R} \times \{0\}$, claramente todo ponto $x \in \mathbb{R}$ pertence a algum A_n, i.e

$$\mathbb{R} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Como $\mathbb{R}$ é não enumerável e temos na direita uma união enumerável, precisamos que algum A_n seja não enumerável e portanto infinito. Seja A_M então um dos conjuntos infinitos e escolha infinitos pontos distintos $(x_k)_k \in A_M$. Agora estamos prontos para definir nossa sequência de funções de suporte compacto em V. Seja G função real com $[-1/2M, 1/2M] \prec G \prec (-1/M, 1/M)$, naturalmente

$$\int_{\mathbb{R}} G dy \geqslant \frac{1}{M}$$

Defina f_n sendo

$$f_n(x,y) = \begin{cases} G(y) & \text{se } x = x_k \text{ para algum } k \leqslant n \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}.$$

Claramente $f_n \prec V$, no entanto,

$$\Lambda(f_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} f_n(x_m, y) dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} G(y) dy \geqslant \frac{n}{M} \to \infty$$

quando $n \to \infty$. Como consequência, $\mu(V) = \infty$. Portanto para qualquer aberto $V \supset E$, $\mu(V) = \infty$, logo $\mu(E) = \infty$.

Para mostrar que para todo compacto $K \subset E$, $\mu(K) = 0$, vamos construir outra sequência (f_n), dessa vez com $K \prec f_n$, mas que $\Lambda(f_n) \to 0$. Lembrando da prova da proposição 4.3 e notamos que K é finito. Escrevendo $K = \{(x_1, 0), \ldots, (x_M, 0)\}$ fica claro o que devemos fazer. Seja g_n uma função real contínua com $[-1/2n, 1/2n] \prec g_n \prec (-1/n, -1/n)$, análogamente ao caso anterior definimos

$$f_n(x,y) = \begin{cases} g_n(y) & \text{se } x = x_k \text{ para algum } k \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}.$$

É imediato que $K \prec f_n$, mas note que

$$\Lambda(f_n) = \sum_{k=1}^{M} \int_{\mathbb{R}} f_n(x_k, y) dy = \sum_{k=1}^{M} \int_{\mathbb{R}} g_n(y) dy \leqslant \frac{2M}{n} \to 0$$

quando $n \to 0$, portanto $\mu(K) \leqslant 0$. □

Problem 4.5.

(a) *Proof.* Fazendo duas iterações temos

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

Indutivamente, se $C_n = \bigcup_m^M [a_m, b_m]$ é união finita de intervalos fechados disjuntos, então, por definição

$$C_{n+1} = \bigcup_m^M \left[a_m, \frac{2a_m + b_m}{3}\right] \cup \left[\frac{a_m + 2b_m}{3}, b_m\right]$$

também é união finita de intervalos fechados disjuntos.

Claramente os C_n são compactos encaixados não vazios, portanto $C = \bigcap_n C_n$ é um compacto não vazio. □

(b) *Proof.* Vamos mostrar por indução que depois da n-ésima iteração, todos intervalos tem tamanho igual a 3^{-n}. Note que isso implica o resultado, pois, sendo C interseção de todos os C_n, não contém nenhum intervalo de medida positiva. É claro para $n = 0$. Como na n-ésima iteração removemos o terço do meio de todos os intervalos que sobraram em C_{n-1} (todos de tamanho $3^{-(n-1)}$), só sobram intervalos de tamanho 3^{-n}, o que demonstra o passo indutivo. □

(c) *Proof.* Basta notar que ao remover os terços do intervalos fechados de C_n, temos que $\mu(C_{n+1}) = (2/3)\mu(C_n)$, pois de cada intervalo fechado conexo, deixamos somente $2/3$ dele sobrando. Portanto, $\mu(C_n) = (2/3)^n \mu(C_0) = (2/3)^n$ e temos

$$\forall n \quad \mu(C) \leqslant \mu(C_n) \leqslant (2/3)^n$$

ou seja, $\mu(C) = 0$. □

(d) *Proof.* Há inúmeras formas de fazer isso, vou fazer a que acredito ser a mais intuitiva - mas não acho que é a mais fácil. Note que em cada iteração da construção, nunca removemos os pontos extremos dos intervalos fechados, sempre removemos abertos propriamente contidos no meio dos intervalos. Isso quer dizer que em qualquer momento da construção, se C_n é a união disjunta

$$C_n = \bigcup_m [a_m, a_m + 3^{-n}]$$

então, para cada m, $a_m, 3^{-n} \in C$. Além do mais, em cada iteração, cada intervalo é dividido em um intervalo da "esquerda" e um intervalo da "direita", como visto na letra (a).

Seja E e D símbolos para esquerda e direita, a ideia será construir uma injeção de $\{E, D\}^{\mathbb{N}}$ para C usando sequências de pontos extremais dos C_n - em cada passo da construção de C decidimos se escolhemos um ponto esquerdo ou direito. Dada uma sequência $(a_0, a_1, \dots) \in \{E, D\}^{\mathbb{N}}$, definimos uma sequência $f((a_n)_n) = (c_0, c_1, \dots)$ em C iterativamente. Para o primeiro elemento, temos

$$c_0 = \begin{cases} 0 & \text{se } a_0 = E \\ 1 & \text{se } a_0 = D \end{cases}$$

Agora, suponha que já construímos até c_n. Se $a_n = E$, então no n-ésimo passo escolhemos um ponto extremal esquerdo e portanto em C_{n+1} temos um conjunto do tipo $[c_n, c_n + 3^{-n-1}]$. Agora definimos

$$c_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{se } a_{n+1} = E \\ c_n + 3^{-n-1} & \text{se } a_{n+1} = D \end{cases}.$$

Semelhantemente, se $a_n = D$, então no passo anterior escolhemos c_n extremal direito e, portanto, em C_{n+1} temos um conjunto do tipo $[c_n - 3^{-n-1}, c_n]$. Definimos

$$c_{n+1} = \begin{cases} c_n - 3^{-n-1} & \text{se } a_{n+1} = E \\ c_n & \text{se } a_{n+1} = D \end{cases}$$

A afirmação é que cada sequência assim definida é convergente em C e sequências distintas convergem em pontos distintos. Para mostrar que $(c_1, c_2, \dots)$ converge em C, note que todos os elementos pertencem a C e para cada n, $|c_{n+1} - c_n| \leqslant 3^{-n-1}$, portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_{n+1} - c_n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n-1} < \infty$$

Pelo M-teste de Weierstrass, (c_n) converge, como C é fechado, (c_n) converge em um ponto de C.

Vamos mostrar que sequências diferentes de E, D geram pontos diferentes de C. Sejam $a = (a_n)_n \neq b = (b_n)_n$ ambas em $\{E, D\}^{\mathbb{N}}$, seja n_0 o primeiro natural tal que $a_{n_0} \neq b_{n_0}$, então no n_0-passo, uma sequência escolheu ir para a esquerda e a outra escolheu ir para a direita. Suponha sem perda de generalidade que $a_{n_0} = E$ e $b_{n_0} = D$, então se $n_0 = 0$, fica claro que para todo $n > 0$, $f(a)_n \in [0, 1/3]$ e $f(b)_n \in [2/3, 1]$, logo as sequências associadas não podem convergir no mesmo ponto. Semelhantemente, se $n_0 > 0$, então sem perda de generalidade, suponha que $a_{n_0-1} = b_{n_0-1} = E$, temos que $[f(a)_{n_0} = c_{n_0-1}, c_{n_0-1} + 3^{-n_0} = f(b)_{n_0}] \subset C_{n_0}$ e desse momento adiante, para $n > n_0$,

$$f(a)_n \in [f(a)_{n_0+1}, f(a)_{n_0+1} + 3^{-n_0-1}]$$

mas

$$f(b)_n \in [f(b)_{n_0+1} - 3^{-n_0-1}, f(b)_{n_0+1}]$$

e $f(b)_{n_0} - f(a)_{n_0} = 3^{-n_0}$, portanto são sempre disjuntos por uma distância 3^{-n_0-1}, isso é as sequências $f(a)_n$ e $f(b)_n$ não podem convergir no mesmo ponto. Isso prova a injetividade de f e a não enumerabilidade de C. $\square$

(e) Antes de fato solucionar a questão, vamos olhar para o que acontece em C_1. Podemos escrever $x \in [0, 1]$ como

$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \cdots + \frac{x_n}{3^n} + \dots$$

onde cada x_n é igual a 0, 1 ou 2. Na primeira etapa C_1, ao remover a terça parte, estamos removendo justamente os números $x \in [0, 1]$ cuja representação ternária tem $x_1 = 1$, com a exceção de $1/3 = 0.1 = 0.0222 \cdots = 0.0\bar{2}$ que permanece. Na segunda etapa, removemos dos que sobraram os que tem $x_2 = 1$, com exceção daqueles cujo último digito não 0 é $x_2 = 1$ que podem ser escritos como $0.x_1 1 = 0.x_1 0\bar{2}$. Podemos sempre substituir o algarismo 1 final pela sequência $0222\dots$ e obter o mesmo número, então de forma geral, em cada etapa n, estamos removendo os números restantes que em ternário tem $x_n = 1$. Sendo a interseção de todos esses C_n, C não possui 1 em sua representação em base 3. Vamos tentar formalizar por indução.

Proposition 4.5. *C_n é o conjunto de pontos de $0.x_1x_2x_3 \cdots x_n \cdots \in [0, 1]$ com $x_1 \dots x_n$ diferentes de 1. Além do mais, C_n pode ser expresso como uma união disjunta*

$$C_n = \bigcup_{m}^{2^n} [a_m, a_m + 3^{-n}]$$

onde cada a_m é da forma $0.x_1x_2 \dots x_n\bar{0}$ com cada $x_i \in \{0, 2\}$ - por isso 2^n deles.

Proof. A prova, como quase todas as anteriores, será por indução. Claramente C_1 satisfaz isso,

$$C_1 = [0, 0.1 = 0.0\bar{2}] \cup [0.2, 1 = 0.\bar{2}]$$

Suponha que vale para C_n, vamos provar que vale para C_{n+1}. Basta usar a identidade que vimos na letra (a), precisamente, na etapa $n+1$, teremos que o conjunto

$$[a_m, a_m + 3^{-n}]$$

se tornará

$$[a_m, a_m + 3^{-n-1}] \cup [a_m + 2 \cdot 3^{-n-1}, a_m + 3^{-n}]$$

Se a_m era da forma $0.x_1 \dots x_n 0\bar{0}$, conseguimos em C_{n+1}, além de a_m, um novo $a'_m = 0.x_1 \dots x_n 2\bar{0}$ que representa o intervalo direito. Como isso vale para todo a_m, na etapa $n+1$ estamos de fato construindo toda as $n+1$ sequências de $0, 2$ até o $(n+1)$ digito. Segue naturalmente, olhando para esses intervalos, que removemos exatamente os números contendo o digito 1 na $(n+1)$ casa decimal, provando a hipótese de indução. $\square$

Corollary 4.6. (Exercício) C é exatamente os números de $[0, 1]$ que não contém 1 em sua expansão ternária.

Proof. Segue do fato de C ser a interseção de todos os C_n. $\square$

5 Lista 5 (11/09/2025)

Listagem de problemas:

1. Exercício 5.1 : ✓
2. Exercício 5.2 : ✓
3. Exercício 5.3 : ✓
4. Exercício 5.4 : ☹/✓ (a menos do Lema.)
5. Exercício 5.5 : ✓

Problem 5.1.

Para não que eu não me confunda, vamos definir novamente funções semicontínuas.

Definition 5.1. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita semicontínua inferior (SCI) se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((\alpha, \infty))$ é aberto. Similarmente, f é dita semicontinua superior (SCS) se $f^{-1}((-\infty, \beta))$ é aberto para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

Vamos mostrar que as proposições (a), (b) e (d) são verdadeiras, mas (c) é falso.

(a) *Proof.* Sejam f_1, f_2 SCS e seja $\beta \in \mathbb{R}$ qualquer, queremos mostrar que $(f_1 + f_2)^{-1}((-\infty, \beta))$ é aberto. Podemos escrever esse conjunto como a seguinte união aberta

$$(f_1 + f_2)^{-1}((-\infty, \beta)) = \bigcup_{x+y\leqslant\beta} [f_1^{-1}((-\infty, x)) \cap f_2^{-1}((-\infty, y))]$$

Portanto, a pre-imagem é aberta e $f_1 + f_2$ é SCS. Note que aqui não usamos nada sobre a positividade de f_1 e f_2, então essa hipótese não é necessária. □

(b) *Proof.* Análogo à (a), se f_1, f_2 são SCI e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$(f_1 + f_2)^{-1}((\alpha, \infty)) = \bigcup_{x+y\geqslant\alpha} [f_1^{-1}((x, \infty)) \cap f_2^{-1}((y, \infty))]$$

é aberto. Como isso vale para todo α, $f_1 + f_2$ é SCI. Novamente não precisamos da hipótese de positividade. □

Antes de mostrar que (c) é falsa usando um contra-exemplo, vamos mostrar que (d) é verdadeira. Precisamos de um lema - (e aqui sem perda de generalidade, vamos supor que nosso contra-domínio é a reta estendida)

Lemma 5.2. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma sequência de funções SCI, então $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ é SCI.

Proof. Note que para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f(x) > \alpha$ se somente se existe n com $f_n(x) > \alpha$. Então podemos escrever

$$(\sup_{n\in\mathbb{N}} f)^{-1}((\alpha, \infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n((\alpha, \infty]).$$

Como para qualquer α, $(\sup_{n\in\mathbb{N}} f)^{-1}((\alpha, \infty])$ é união de abertos, então $\sup_n f$ é SCI. □

Agora conseguimos provar (d).

(d) *Proof.* Seja $F_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$, por (a), todos os F_n são SCI. Como f_i são positivas, os F_n são crescentes, portanto

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$$

pelo lema anterior, esse somatório é SCI. Aqui usamos fortemente a hipótese que as f_i são positivas. $\square$

Vamos mostrar que (c) é falso.

(c) *Proof.* Vimos em aula que se F é fechado, $\mathbb{1}_F$ é SCS. Considere a série de SCS's $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}\left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right](x).$$

Claramente, $F(0) = 0$, logo $0 \in F^1((-\infty, 1/2))$, mas para valores arbitrariamente próximos - $\frac{1}{2n}$ - não pertencem a $F^1((-\infty, 1/2))$, logo esse conjunto não pode ser aberto ao redor de 0. $\square$

Vimos que (a), (b) e (d) independem do espaço topológico do domínio. Sobre a positividade, só a usamos em (d) e aqui foi necessário para assegurar que a sequência das somas finitas era crescente, é fácil ver no entanto que essa hipótese é completamente necessária.

Proposition 5.3. Existe uma sequência de funções SCI's $(f_n)_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$$

completamente descontínua.

Proof. Como antes, se F é fechado, $\mathbb{1}_F$ é SCS e portanto, $-\mathbb{1}_F$ é SCI. Agora basta considerar

$$G(x) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} -\mathbb{1}[\{q\}](x)$$

a função que vale -1 nos racionais e 0 nos irracionais. Óbviamente G não é nem SCI, nem SCS e ela serve de contra-exemplo.

$\square$

Problem 5.2.

Eu gostei muito desse problema - até porque fui eu quem propus ☺. Vamos dividir a questão em etapas, a primeira sobre a existência, a segunda sobre as aproximações por S.C.I's. Será necessária uma observação que eu não vou provar.

Remark 5.4. Existe uma sequência de reais positivos $(a_n)_n$ menores que 1, tal que

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} (1 - a_n) > 0.$$

Uma que funciona é a fórmula de Viète, por exemplo

Agora podemos construir nosso conjunto.

Proof. A ideia é criar um conjunto de Cantor gordo removendo frações de tamanhos diferentes em cada etapa. Seja α_n uma sequência de números positivos menores que 1 tal que

$$1 > \prod_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n) = \alpha > 0.$$

A ideia será na n-ésima iteração da construção de Cantor, remover uma α_n fração do conjunto restante em abertos de maneira esperta - sem deixar um intervalo de tamanho $1/n$. Sobrará, no final de todos os passos, uma α-fração do intervalo [0,1] que terá medida positiva e nenhum intervalo de medida positiva.

Seja $C_0 = [0,1]$. Suponha que seguimos as intruções anteriores até $n-1$, então temos

$$C_{n-1} = \bigcup_m [a_m, b_m]$$

de forma que $b_m - a_m < 1/(n-1)$ e

$$\mu(C_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1}(1-a_k)$$

Para cada m, divida $[a_m, b_m]$ em n intervalos de medida igual

$$[a_m, b_m] = [a_m, t_1] \cup \bigcup_{i=2}^{n-1}(t_i, t_{i+1}] \cup (t_n, b_m]$$

Como $b_m - a_m \leqslant 1$, cada um deles certamente tem medida menor ou igual que $1/n$. Separe de cada subintervalo, uma fração aberta α_n do centro deles, por exemplo,

$$(x_i, y_i) \subset (t_i, t_{i+1})$$

onde $t_i < x_i, y_i < t_{i+1}$ e $y - x = \alpha_n(t_{i+1} - t_i)$. Removendo de $[a_m, b_m]$ a união desses intervalinhos (x_i, y_i), estaremos claramente removendo uma fração α_n de $[a_m, b_m]$. Fazendo isso para cada m, teremos removido em intervalos abertos, uma fração α_n de C_{n-1}, obtendo C_n. Pela forma que construimos, C_n não contém intervalos de tamanho maior que $1/n$ e claramente,

$$\mu(C_n) = (1-\alpha_n)\mu(C_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_n).$$

Por construção, os C_n são compactos encaixados e sua interseção forma um conjunto de Cantor K de medida positiva sem qualquer intervalo positivo. Por não ter nenhum intervalo, seu interior é vazio, logo na reta, o conjunto é totalmente desconexo. $\square$

Vamos mostrar que a indicadora do conjunto K construído, não pode ser aproximada por baixo por funções S.C.I.

Proof. Seja $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função S.C.I com $v \leqslant \mathbb{1}_K$, vamos mostrar que $v \leqslant 0$ e, portanto

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathbb{1}_K - v)d\mu > \mu(K)$$

Suponha que exista x com $v(x) = c > 0$, em particular, teríamos um aberto não vazio $v^{-1}((c/2, \infty)) \subset K$, pois $v(x) > 0 \implies \mathbb{1}_K(x) > 0$, mas K como construído era totalmente desconexo - de interior vazio - absurdo. $\square$

Problem 5.3.

Antes de começar, precisamos de um leminha que eu havia esquecido.

Lemma 5.5. Seja (X, μ) espaço de medida positiva finita. Se $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, então $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$.

Proof. Seja $f \in L^p(\mu)$, queremos mostrar que $f \in L^q(\mu)$. O caso $p = \infty$ é óbvio. Se $p < \infty$, tome $r > q$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}$$

Em particular,

$$\frac{q}{p} + \frac{q}{r} = 1$$

Podemos aplicar Hölder com p/q e r/q em $|f|^q$ para obter

$$\int_X |f|^q d\mu = \int_X 1 \cdot |f|^q d\mu \leqslant \left(\int_X (|f|^q)^{p/q} d\mu \right)^{q/p} \left(\int_X 1^{r/q} d\mu \right)^{q/r} = (||f||_p)^q (\mu(X))^{q/r} < \infty$$

□

Portanto, para a questão, como $f \in L^2(\mu)$, sabemos que está em $L^1(\mu)$ também.

Proof. **(Do Exercício)** Talvez não é a mais intuitiva, mas a prova do Rudin parece ser a mais simples.

Para essa questão eu acho mais útil usar a definição geométrica de convexidade. Uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa se para todo ponto t, φ está acima da reta tangente a φ no ponto t.

Em termos analíticos, se definirmos

$$\alpha = \sup_{x<t} \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x}$$
$$\beta = \inf_{y>t} \frac{\varphi(y) - \varphi(t)}{y - t}$$

as tangentes esquerda e direita no ponto t, então a proposição se expressa como

$$\varphi(z) \geqslant \varphi(t) + \max(\alpha, \beta)(z - t) \tag{13}$$

para todo z em $\mathbb{R}$.

Para provar Jensen, basta integrar sobre essa desigualdade com $z = f(x)$ e t sendo o valor médio da função. Formalizando, seja

$$t = \int_\Omega f(x) d\mu$$

Note que, como $a < f < b$, temos

$$a = \int_\Omega a d\mu < \int_\Omega f(x) d\mu < \int_\Omega b d\mu = b$$

logo $t \in (a, b)$. Fazendo a substituição em (13) e lembrando que $f(x) \in \mathbb{R}$, temos

$$\varphi(f(x)) \geqslant \varphi\left(\int_\Omega f d\mu \right) + \max(\alpha, \beta) \left(f(x) - \int_\Omega f d\mu \right)$$

Integrando sobre x, o termo da direita cancela e ficamos com a desigualdade de Jensen.

$$\int_\Omega \varphi \circ f d\mu \geqslant \varphi\left(\int_\Omega f d\mu \right)$$

□

Problem 5.4.

☹ Fiquei longe de resolver esse exercício. Um Henrique do futuro pode encontrar a solução aqui, na seção 2.1.5.

Como fui mal na prova ☹, vou escrever a solução a menos do lema necessário - que não provarei.

Lemma 5.6. Seja $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$ uma sequência tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty.$$

Existe sequência de índices $\{n_j\} \subset \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j} < \infty \quad \wedge \quad \lim_{j\to\infty} \frac{n_{j+1}}{n_j} = 1.$$

Proof. **Do Exercício.** Aplique o lema anterior na sequência

$$a_N = \int_X \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{e(mf_n(x))}{N} \right|^p d\mu$$

Conseguimos uma subsequência a_{n_j} satisfazendo que

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{N_j} < \infty \quad \wedge \quad \lim_{j\to\infty} \frac{N_{j+1}}{N_j} = 1$$

Em particular

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_X \left| \sum_{n=1}^{N_j} \frac{e(mf_n(x))}{N_j} \right|^p d\mu < \infty. \tag{14}$$

Vamos mostrar que em quase todo ponto x,

$$\sum_{n=1}^{N_j} \frac{e(mf_n(x))}{N_j} \to 0. \tag{15}$$

Suponha que o limite não é 0 para algum conjunto E de medida positiva, escrevemos E como a seguinte união

$$E = \bigcup_{M\in\mathbb{N}} \left\{ x : \limsup_{j\to\infty} \left| \sum_{n=1}^{N_j} \frac{e(mf_n(x))}{N_j} \right| > \frac{1}{M} \right\}.$$

Por E ser uma união enumerável de medida positiva, existe algum M, tal que o M-ésimo conjunto dessa união tem medida positiva, seja esse conjunto E_M. Se $x \in E_M$, então, para infinitos j's

$$\left| \sum_{n=1}^{N_j} \frac{e(mf_n(x))}{N_j} \right| > \frac{1}{M}$$

e portanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{N_j} \frac{e(mf_n(x))}{N_j} \right| = \infty.$$

Mas então, substituindo E_M no somatório (14),

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_M}\left|\sum_{n=1}^{N_j}\frac{e(mf_n(x))}{N_j}\right|^p=\int_{E_M}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{N_j}\frac{e(mf_n(x))}{N_j}\right|^p d\mu=\int_{E_M}\infty d\mu=\infty$$

O que contradiz (14) ser finito.

Agora concluimos que se (15) vale a.e, então equidistribuição vale a.e. Note que para N suficientemente grande, existem índices da subsequência N_j e N_{j+1} com $N_j \leqslant N < N_{j+1}$ e $j \to \infty$ quando $N \to \infty$. Podemos portanto escrever

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{e(mf_n(x))}{N}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{N_j}\frac{e(mf_n(x))}{N}+\sum_{n=N_j+1}^{N}\frac{e(mf_n(x))}{N}\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{n=1}^{N_j}\frac{e(mf_n(x))}{N}\right|+\frac{N-N_j}{N} \\
&\leqslant \left|\sum_{n=1}^{N_j}\frac{e(mf_n(x))}{N}\right|+\frac{N_{j+1}-N_j}{N_j} \\
&\leqslant \left|\sum_{n=1}^{N_j}\frac{e(mf_n(x))}{N}\right|+\frac{N_{j+1}}{N_j}-1 \to 0
\end{aligned}$$

quando $j \to \infty$. Isso completa a demonstração.

□

Problem 5.5.

Há duas formas que eu conheço de resolver esse problema. Uma ideia é mostrar a desigualdade reversa de Hölder e repetir a prova de Minkowski com as desigualdades invertidas. A outra, que é bem mais rápida, é repetir a prova do Prof. Roberto em seu livro de Análise do Rn - vou fazer essa.

Proof. Estenda a definição de $||f||_p$ para $p \in (0,1)$ sendo justamente

$$||f||_p=\left(\int_X |f|^p\right)^{1/p}$$

Queremos mostrar que para $f, g \geqslant 0$,

$$||f+g||_p \geqslant ||f||_p+||g||_p \tag{16}$$

Vamos analisar primeiramente o caso em que $0 < ||f||_p, ||g||_p < \infty$. Note que, sob essa hipótese, (16) é equivalente a

$$\frac{||f+g||_p}{||f||_p+||g||_p}=\left|\left|\frac{f+g}{||f||_p+||g||_p}\right|\right|_p \geqslant 1 \tag{17}$$

O truque do professor Roberto é perceber que se $||f||_p$ e $||g||_p$ são positivas, podemos escrever

$$\frac{f+g}{||f||_p+||g||_p}=\frac{\lambda f}{||f||_p}+\frac{(1-\lambda)g}{||g||_p}$$

onde

$$\lambda=\frac{||f||_p}{||f||_p+||g||_p}\in(0,1).$$

Elevando os dois lados de (17) por p e lembrando da positividade de f e g, notamos que

$$\left|\left|\frac{f+g}{||f||_p+||g||_p}\right|\right|_p \geqslant 1 \iff \int_X \left(\frac{f+g}{||f||_p+||g||_p}\right)^p d\mu \geqslant 1$$

Usando a concavidade de x^p e a expansão com o λ anterior, temos

$$\begin{aligned}\int_X \left(\frac{f+g}{||f||_p+||g||_p}\right)^p d\mu &\geqslant \int_X \lambda\left(\frac{f}{||f||_p}\right)d\mu + \int_X (1-\lambda)\left(\frac{g}{||g||_p}\right)d\mu \\ &= \lambda + 1 - \lambda = 1.\end{aligned}$$

O que demonstra a desigualdade.

Falta o caso em que alguma das duas funções tem "norma" 0 ou ∞. Suponha sem perda de generalidade que $||f||_p = 0$, então definindo $E = \{x : f(x) > 0\}$, sabemos que

$$\mu(E) = 0$$

Portanto,

$$\int_X (f+g)^p d\mu = \int_{X-E} (f+g)^p d\mu = \int_{X-E} g^p d\mu = \int_X g^p d\mu$$

e vale a igualdade $||f+g||_p = ||g||_p$. No outro caso, se $||f||_p = \infty$, então naturalmente,

$$\int_X (f+g)^p d\mu \geqslant \int_X f^p d\mu = \infty$$

e a desigualdade vale trivialmente. $\square$

6 Lista 6 (2/10/2025)

Listagem de problemas:

1. Exercício 6.1 : ✓
2. Exercício 6.2 : ✓
3. Exercício 6.3 : ✓
4. Exercício 6.4 : ✓
5. Exercício 6.5 : ✓

Para esse primeiro problema, vamos utilizar a versão mais fraca de Radon-Nikodym provada em aula.

Theorem 6.1. (Radon-Nikodym Fraco) Se μ e λ são medidas positivas finitas de $(X, \mathcal{M})$, então existe um par único de medidas positivas finitas λ_a e λ_s de $(X, \mathcal{M})$ satisfazendo:

(a)
$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu \tag{18}$$

(b) Existe um único $h \in L^1(\mu)$ tal que:
$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu \tag{19}$$

Problem 6.1. Seja μ medida positiva σ-finita e λ medida complexa. Prove que o Teorema de Radon-Nikodym ainda vale.

Proof. Unicidade segue assim como foi mostrado em aula. Dados λ e μ, suponha que exista pares (λ_a, λ_s) e (λ_a', λ_s') satisfazendo as conclusões do teorema. Então,

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s = \lambda_a' + \lambda_s'$$

logo

$$\lambda_a - \lambda_a' = \lambda_s' - \lambda_s$$

mas $\lambda_a - \lambda_a' \ll \mu$ e $(\lambda_s' - \lambda_s) \perp \mu$, portanto os dois lados da equação anterior devem ser 0, e a decomposição é idêntica. Sobre a unicidade da função h, note que se existisse outra h' que também satisfaz

$$\lambda_a(E) = \int_E h' d\mu$$

então seguiria que para todo $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E h - h' d\mu = 0$$

pelo problema [6.2], $h - h' = 0$ μ-qtp.

Vamos provar a existência para λ com sinal. Tomando a decomposição de Lebesgue $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ em medidas positivas finitas, podemos aplicar o Teorema [6.1] em ambas para obter

$$\lambda^+ = \lambda_a^+ + \lambda_s^+, \quad \lambda_s^+ \perp \mu, \quad \lambda_a^+(E) = \int_E h^+ d\mu$$

e

$$\lambda^- = \lambda_a^- - \lambda_s^-, \quad \lambda_s^- \perp \mu \quad \text{e} \quad \lambda_a^-(E) = \int_E h^- d\mu.$$

Agora vamos verificar que

$$\lambda_a = \lambda_a^+ - \lambda_a^-, \quad \lambda_s^+ - \lambda_s^-, \quad h = h^+ - h^-$$

satisfazem as conclusões do teorema.

Notamos imediatamente que $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$. Como λ_a^+ e λ_a^- são absolutamente contínuas em relação a μ, segue que $\lambda_a \ll \mu$. Da mesma forma, λ_s^+ e λ_s^- perpendiculares a μ, implica $\lambda_s \perp \mu$. Por fim, h é soma de funções em $L^1(\mu)$, portanto está em $L^1(\mu)$ e

$$\lambda_a(E) = \lambda_a^+(E) - \lambda_a^-(E) = \int_E h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu = \int_E h d\mu.$$

Para provar o resultado para λ complexa, basta notar que podemos decompor λ em $\lambda_1 + i\lambda_2$, ambas medidas com sinal. Isso segue imediatamente do fato que, dado $E \in \mathcal{M}$ e uma partição $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$,

$$\mathrm{Re}(\lambda(E)) = \mathrm{Re}\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_i)\bigg) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(\lambda(E_i)) < \infty$$

e o mesmo vale para parte imaginária. Portanto aplicando o Teorema para λ_1 e λ_2, escolhendo as medidas $\lambda_a = \lambda_{1a} + i\lambda_{2a}$, $\lambda_s = \lambda_{1s} + i\lambda_{2s}$ e a função $h = h_1 + ih_2$, segue como no caso com sinal que eles satisfazem as conclusões do Teorema.

$\square$

Problem 6.2. Seja $\mu(X) < \infty$, $f \in L^1(\mu)$, S um conjunto fechado no plano complexo e suponha que as médias

$$\mathbb{E}[f \mid E] = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu$$

estejam dentro de S para todo $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E) > 0$. Então $f(x) \in S$ μ-qtp.

Proof. Note que $\mathbb{C} \setminus S$ é um conjunto aberto, portanto pode ser escrito como união enumerável de bolas abertas, escrevemos

$$\mathbb{C} \setminus S = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{(q_n, r_n)}$$

onde cada $B_{(q_n,r_n)}$ é um disco aberto do plano complexo centrado em q_n de raio r_n.

Se $\mu(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus S)) = 0$, não há nada para provar - já vale $f(x) \in S$ μ-qtp. Caso contrário, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(f^{-1}(B_{(q_n,r_n)})) \neq 0$, chamando $A = f^{-1}(B_{(q_n,r_n)})$ temos

$$\forall x \in A \quad |f(x) - q_n| < r_n.$$

Tirando a média sobre A e comparando sua distância a q_n, encontramos

$$\left|\frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x) d\mu - q_n\right| \leqslant \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(x) - q_n| d\mu < \frac{1}{\mu(A)} \int_A r_n d\mu = r_n$$

Como a $|\mathbb{E}[f \mid A] - q_n| < r_n$, segue que $\mathbb{E}[f \mid A] \in B_{(q_n,r_n)}$ e portanto fora de S, contradizendo a hipótese. $\square$

Problem 6.3. Estenda o Teorema 3 da última aula (dualidade dos espaços $L^p(\mu)$ com μ positiva finita) para μ positiva σ-finita.

(Escrevendo por extenso) Suponha que $1 \leqslant p < \infty$, μ é uma medida σ-finita em X e Φ é um funcional linear limitado em $L^p(\mu)$. Então existe uma única $g \in L^q(\mu)$, onde q é o expoente conjugado de p, tal que

$$\Phi(f) = \int_X fg d\mu \quad (f \in L^p(\mu)). \tag{20}$$

Além do mais, se Φ e g estão relacionados como em [20], então

$$||\Phi|| = ||g||_q \tag{21}$$

Para essa questão, precisaremos de um lema bonitinho do Rudin. Uma forma de compatificar medidas positivas σ-finitas.

Lemma 6.2. Se μ é uma medida positiva σ-finita em $(X, \mathcal{M})$, então existe uma função $w \in L^1(\mu)$ tal que $0 < w < 1$.

Proof. Seja $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, com $\mu(X_n) < \infty$. Para cada n, defina $w_n(x) = 0$ se $x \notin X_n$ e

$$w_n(x) = \frac{2^{-n-1}}{1 + \mu(X_n)}$$

se $x \in X_n$. A função $w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ satisfaz as propriedades exigidas. □

Agora podemos resolver o problema.

Proof. Suponha que μ seja positiva σ-finita em $(X, \mathcal{M})$ e seja w como no lema anterior. Então, $wd\mu$ é uma medida finita em $\mathcal{M}$. Definimos a transformação linear $T : L^p(wd\mu) \to L^p(d\mu)$ dada por

$$T(F) = w^{1/p}F.$$

Note que está bem definida e mantém normas, uma vez que, se $F \in L^p(wd\mu)$, então

$$||T(F)||_p = \left| \int_X |T(F)|^p d\mu \right|^{1/p} = \left| \int_X |F|^p wd\mu \right|^{1/p} = ||F||_p < \infty.$$

Como $w > 0$, $T^{-1} : \tilde{F} \mapsto w^{-1/p}\tilde{F}$ também está definida, já que

$$\left| \int_X |T^{-1}(\tilde{F})|^p wd\mu \right|^{1/p} = \left| \int_X |\tilde{F}|^p d\mu \right|^{1/p} = ||\tilde{F}||_p < \infty$$

e portanto T é uma isometria.

Sendo $L^p(\mu)$ e $L^p(w\mu)$ espaços isométricos por T, se Φ é um funcional linear limitado de $L^p(\mu)$, então $\Phi \circ T$ é um funcional linear limitado de $L^p(wd\mu)$. Portanto, pelo teorema provado em aula, sendo q o exponte conjugado a p, existe uma única $G \in L^q(wd\mu)$ com $||G||_q = ||\Phi \circ T|| = ||\Phi||$ com

$$(\Phi \circ T)(F) = \int_X GFwd\mu \quad \forall F \in L^p(wd\mu).$$

Se $p > 1$, defina $g = Gw^{1/q} \in L^q(\mu)$. Segue que

$$\left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q} = \left(\int_X |G|^q wd\mu \right)^{1/q} = ||G||_q = ||\Phi \circ T|| = ||\Phi||$$

onde usamos que T é uma isometria na última igualdade. Se $p = 1$, defina $g = G$, de onde segue que $||g||_\infty = ||G||_\infty = ||\Phi \circ T|| = ||\Phi||$. Para finalizar,

$$\phi(f) = \phi(w^{-1/p}f) = \int_X w^{-1/p} fGwd\mu = \int_X fgd\mu$$

para cada $f \in L^p(\mu)$ e provamos o teorema. □

Problem 6.4. Suponha que (g_n) é uma sequência de funcões contínuas positivas em $I = [0, 1]$, μ é um medida positiva de Borel em I, m é a medida de Lebesgue e que

(a) $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$, m-a.e

(b) $\int_I g_n dm = 1$

(c) $\lim_{n\to\infty} \int_I f g_n dm = \int_I f d\mu$ para toda $f \in C(I)$.

Segue que $\mu \perp m$?

Remark 6.3. Ideia da prova Passei muito tempo tentando provar que valia a conclusão - obrigado **Ênio** por me dizer que era falso - a quantidade de dados nesse problema nos induz ao erro. É mais fácil ver que isso não segue nem se $\mu = m$. A ideia é construir uma sequência de funções (g_n) que aproximam bem a integral de Riemann, isto é $\int_I f g_n dm$ é quase uma soma de Riemann, mas que ainda satisfaça a condição (a).

Proof. **(Solução do Exercício)** O resultado não segue. Tomando $\mu = m$, encontraremos uma sequência (g_n) que satisfaz todas as condições da hipótese. Como dito no remark vamos tentar recriar a integral de Riemann [Problema 3.2], usando amigas antigas - funções trapezoidas [Problema 3.6].

Para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos definir uma funções auxiliares trapezoidais de largura menor que $2/4^n$ e altura 1. Seja para cada $1 \leqslant i \leqslant 2^n - 1$, defina

$$h_n^i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [i/2^{-n}, i/2^{-n} + 4^{-n}] \\ 8^n(x - (i/2^{-n} - 8^{-n})) & \text{se } x \in [i/2^{-n} - 8^{-n}, i/2^{-n}] \\ 1 - 8^n(x - (i/2^{-n} + 4^{-n})) & \text{se } x \in [i/2^{-n} + 4^{-n}, i/2^{-n} + 4^{-n} + 8^{-n}] \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Isso é, h_n^i é um trapézio de altura 1, de base superior de tamanho 4^{-n} e base inferior com tamanho $2\cdot 8^{-n} + 4^{-n}$. Os h_n^i são claramente contínuas e vamos definir a função $h_n = \sum_{i=1}^{2^n-1} h_n^i$. É fácil calcular a integral de h_n, pois os trapézios são disjuntos, obtemos que

$$\int_I h_n dm = \sum_{i=1}^{2^n-1} \left(\frac{1}{8^n} + \frac{1}{4^n}\right) = \frac{4^n - 1}{8^n} \approx \frac{1}{2^n}.$$

Normalizando, nossa sequência (g_n) será

$$g_n = \frac{8^n}{4^n - 1} h_n \approx 2^n h_n$$

por construção, (g_n) satisfaz (b).

Vamos provar que vale (a). Note que é fácil calcular $m\{g_n > 0\}$, basta somar as bases dos trapézios e temos que

$$m\{g_n > 0\} = \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{2}{8^n} + \frac{1}{4^n} \leqslant \frac{4}{2^n}.$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\{g_n > 0\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n} < \infty$$

E pelo Problema 2.6, o conjunto de x que aparecem em infinitos $\{g_n > 0\}$ tem medida nula. Portanto, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ m-qtp.

Agora basta verificar que (c) vale e terminar a demonstração. Aqui está a grande sacada, integrar contra g_n é basicamente tirar a média sobre os n-diádicos (múltiplos de 2^{-n}), pelos teorema de convergência da integral de Riemann, isso nos dá um pontilhamento que converge para a integral no intervalo ($S(f; P_n) \to \int f dt$). Formalizando, dado $f \in C(I)$, note que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I g_n f dm = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{8^n}{4^n-1} \int_I h_n^i f dm.$$

Sendo contínua num compacto, existe constante M com $|f| < M$. Portanto podemos, sem preocupação, aproximar os termos do limite por

$$\int_I g_n f dm \approx 2^n \sum_{i=1}^{2^n-1} \int_{\{h_n^i>0\}} h_n^i f dm.$$

Agora note que (majorando a parte não constante do trapézio)

$$2^n \sum_{i=1}^{2^n-1} \int_{\{h_n^i>0\}} h_n^i f dm = 2^n \sum_{i=1}^{2^n-1} \left(\int_{\{h_n^i=1\}} f dm \pm \frac{2M}{8^n} \right)$$

e muito felizmente

$$2^n 2^n \left(\pm \frac{2M}{8^n} \right) \to 0.$$

Portanto, sendo $J_{i(n)} = [i/2^n, i/2^n + 4^{-n}]$, uma ótima aproximação para nossas integrais é

$$\int_I g_n f dm \approx 2^n \sum_{i=1}^{2^n-1} \int_{J_{i(n)}} f dm$$

e mostramos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I g_n f dm = \lim_{n\to\infty} 2^n \sum_{i=1}^{2^n-1} \int_{J_{i(n)}} f dm.$$

Usando o teorema do valor médio para integrais, existe $x_{i(n)} \in J_{i(n)}$ tal que

$$\int_{J_{i(n)}} f dm = 4^{-n} f(x_{i(n)})$$

E portanto,

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sum_{i=1}^{2^n-1} \int_{J_{i(n)}} f dm = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{f(x_{i(n)})}{2^n}.$$

Moralmente acabamos, pois o termo da direita é uma soma de Riemann que tende para a integral de f. De outra forma, os conjuntos $P_n = \{x_{i(n)}\}$ são pontilhamentos, por construção $|P_n| < 2^{-n+1}$ e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{f(x_{i(n)})}{2^n} = \lim_{P_n} S(f; P_n) = \int_0^1 f dt = \int_I f dm.$$

□

Problem 6.5. Seja μ uma medida complexa na σ-álgebra $\mathcal{M}$. Se $E \in \mathcal{M}$, defina

$$\lambda(E) = \sup \sum |\mu(E_i)|,$$

o supremo sendo tirado sobre todas as partições finitas $\{E_i\}$ de E. Segue que $\lambda = |\mu|$?

Proof. Naturalmente, como partições enumeráveis englobam partições finitas, segue que $\lambda(E) \leqslant |\mu|(E)$ para todo $E \in \mathcal{M}$. Vamos mostrar que para qualquer partição enumerável $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de E, podemos aproximar arbitráriamente bem a soma $\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|$ por partições finitas. Como $|\mu|$ é uma medida positiva finita, vale que $|\mu|(E) < \infty$ e portanto, para qualquer partição $\{E_i\}$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| = C < \infty$$

e por consequência converge. Agora, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N_ε tal que

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |\mu(E_i)| > C - \varepsilon$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |\mu(E_i)| + \left|\mu\left(\bigcup_{i=N_\varepsilon+1}^{\infty} E_i\right)\right| > C - \varepsilon$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, verificamos que $\lambda(E) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|$, como isso vale para toda partição $\{E_i\}$, $\lambda(E) \geqslant \mu(E)$. $\square$

7 Lista 7 (9/10/2025)

Listagem de problemas:

1. Exercício 7.1 : ✓
2. Exercício 7.2 : ✓
3. Exercício 7.3 : ✓
4. Exercício 7.4 :
   (a) ✓
   (b) ✓
   (c) ☹
   (d) ☹
   (e) +-

Problem 7.1. (Teorema de Ergoroff) Seja $\mu(X) < \infty$, (f_n) uma sequência de funções complexas mensuráveis que convergem pontualmente em todo X e $\varepsilon > 0$. Prove que existe um conjunto mensurável $E \subset X$, com $\mu(X - E) < \varepsilon$ tal que (f_n) converge uniformemente em E.

Proof. Seja f o limite pontual de (f_n), como a sequência é mensurável, f é mensurável. Definimos os conjuntos mensuráveis

$$S(n,k) = \bigcap_{m \geqslant n} \{x : |f_m(x) - f(x)| < 1/k\}$$

Como interseção de menos termos, $S(n,k) \subset S(n+1,k)$. Como para cada x, $f_n(x) \to f(x)$, sempre existe n_0 com $x \in S(n_0,k)$. Portanto, para cada k, vale que

$$S(1,k) \subset S(2,k) \subset \dots \subset S(n,k) \subset \dots \to X.$$

Agora podemos construir nosso conjunto esperto com um argumento diagonal. Como $\mu(X) < \infty$, encontramos n_1 tal que

$$S(n_1, 1) > \mu(X) - \varepsilon/2$$

e, indutivamente em i, $n_i > n_{i-1}$ satisfazendo

$$S(n_i, i) > \mu(X) - \varepsilon/2^i.$$

Seja $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} S(n_i, i)$. Por construção, $\mu(A) > \mu(X) - \varepsilon$. Vamos mostrar que (f_n) é uniformemente convergente em A.

Dado $\delta > 0$, seja $k = \lceil 1/\delta \rceil$, escolhendo $x \in A$ qualquer, como $x \in S(n_k, k)$ vale que para $n \geqslant n_k$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{\lceil 1/\delta \rceil} < \delta$$

Como n_k independe do x escolhido, segue que a sequência é uniformemente convergente. □

Problem 7.2. Suponha que $\mu(X) < \infty$, $f_n \in L^1(\mu)$, $f_n(x)$ convergente em $f(x)$ a.e, e que existe $p > 1$ e $C < \infty$ tal que $\int_X |f_n|^p d\mu < C$, para todo n. Prove que

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f - f_n| d\mu = 0$$

Proof. Note, antes de mais nada, que, pelo Lema de Fatou [2.2],

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_X \limsup_{n\to\infty} |f_n|^p d\mu \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n|^p d\mu < C$$

e $f \in L^p(\mu)$. Em particular,

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \leqslant (||f||_p + ||f_n||_p)^p \leqslant 2^p C$$

é uniformemente limitado. Como $p > 1$ e $\mu(X) < \infty$, segue que $|f - f_n| \in L^1(\mu)$ para todo n. Sem perda de generalidade então, podemos substituir nossa sequência (f_n) por $(g_n) = (f - f_n)$ que satisfaz as mesmas hipóteses. Queremos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |g_n| d\mu = 0$$

sabendo que $g_n \to 0$ a.e. e $||g_n||_1 < \infty$ e $||g_n||_p < D$ para todo n.

Podemos usar o teorema de Ergoroff [7.1] para obter uma sequência de conjuntos A_m, com $\mu(A_m) < 1/m$ satisfazendo que g_n é uniformemente convergente em cada $X - A_m$. Para cada m, o limite acima se expressa então como

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_m} |g_n| d\mu + \int_{X-A_m} |g_n| d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_m} |g_n| d\mu$$

Usando Hölder na direita com p e seu conjugado $q < \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_m} |g_n| d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(A_m)^{1/q} \left(\int_{X-A_m} |g_n|^p d\mu \right)^{1/p} \leqslant \mu(A_m)^{1/q} D$$

Como isso vale para todo m, fazendo $m \to \infty$, segue que $\mu(A_m)^{1/q} \to 0$ e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |g_n| d\mu = 0$$

□

Problem 7.3. Suponha que X consista de dois pontos a e b; defina $\mu(\{a\}) = 1$, $\mu(\{b\}) = \mu(X) = \infty$. É verdade, para essa μ, que $L^\infty(\mu)$ é o dual de $L^1(\mu)$?

Proof. Não. Vamos mostrar que $L^1(\mu) \cong \mathbb{C}$ que é seu próprio dual, mas $L^\infty(\mu) \cong \mathbb{C}^2$. Vamos exibir um isomorfismo para cada um dos dois espaços.

Seja $T : L^1(\mu) \to \mathbb{C}$ transformação linear, dada por

$$T(f) = f(a).$$

Queremos mostrar que T é uma transformação linear bijetiva que preserva normas, teremos então que será isomorfismo entre espaços de Banach. Note que se $f \in L^1(\mu)$, então $f(b) = 0$ e portanto $||f||_1 = |f(a)| = |T(f)|$, logo T preserva normas. T é sobrejetiva pois, dado $z \in \mathbb{C}$, defina $f \in L^1(\mu)$ por $f(a) = z$ e $f(b) = 0$, segue que $T(f) = z$. Falta mostrar que é injetiva; se $T(f) = 0$, então $f(a) = 0$, mas como $f \in L^1(\mu)$, temos que $f(b) = 0$ e portanto $f \equiv 0$. Segue que $L^1(\mu) \cong \mathbb{C}$.

Para ser mais exato no segundo isomorfismo, vamos provar que $L^\infty(\mu) \cong (\mathbb{C}^2, ||\cdot||_\infty)$, tomando a norma do máximo em $\mathbb{C}^2$. Como todas as normas de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ são equivalentes, ainda vale que nessa norma, $(\mathbb{C}^2)^* = \mathbb{C}^2$.

Defina $G : L^\infty(\mu) \to \mathbb{C}^2$ por

$$G(f) = (f(a), f(b)) \in \mathbb{C}^2.$$

G é óbviamente linear. Sobrejetividade segue direto também, dado $(z,w) \in \mathbb{C}^2$, tomando f tal que $f(a) = z$ e $f(b) = w$, segue que $||f||_\infty = \max(|a|,|b|) < \infty$, logo $f \in L^\infty(\mu)$ e $G(f) = (z,w)$. Para injetividade, se $G(f) = 0$, então por definição $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$, donde $f \equiv 0$. Basta verificar que preserva normas, mas já foi visto, uma vez que

$$|G(f)| = \max(|f(a)|,|f(b)|) = ||f||_\infty.$$

Temos então que G é isomorfismo de espaços de Banach e portanto $L^\infty(\mu) \cong \mathbb{C}^2$.

□

Problem 7.4. (Integral de Lebesgue-Stiltjes) Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função crescente.

(a) Prove que F tem um número contável de descontinuidades.

(b) Se x_0 é um ponto de descontinuidade, prove que

$$F(x_0)^+ = \lim_{\substack{x > x_0 \\ x \to x_0}} F(x)$$

está bem definido.

(c) (Levemente Modificada) Possívelmente modificando F em seus pontos de descontinuidade x_0, assuma que $F(x_0) = F(x_0)^+$. Prove que existe uma única medida μ nos Borelianos de $[a,b]$ tal que $\mu((c,b]) = F(b) - F(c)$. Escrevemos, para $f \in L^1(\mu)$

$$\int_a^b f(x)d\mu(x) = \int_a^b f(x)dF(x).$$

(d) Prove que se F for continuamente diferenciável, então

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)dx.$$

para toda $f \in L^1(\mu)$.

(e) Seja (x_n) uma sequência em $[a,b]$, (α_n) uma sequência de números positivos tal que

$$\sum_{n=1}^\infty \alpha_n < \infty.$$

Seja

$$j_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_n \\ 1 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e defina a função

$$F(x) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n j_n(x).$$

Para $f \in L^1(dF)$, encontre

$$\int_a^b f(x)dF(x).$$

Proof. Vamos fazer as partes mais fáceis primeiro, não acho que vou conseguir fazer tudo :p

Começamos com **(b)** que é a mais fácil de todas. Vamos mostrar que para todo $x \in (a,b)$ as funções

$$F^+(x) = \lim_{t\to x^+} F(t) \quad \text{e} \quad F^-(x) = \lim_{t\to x^-} F(t)$$

estão bem definidas (para $x = a$ somente F^+ faz sentido, enquanto que para $x = b$ só F^-). Como F é crescente, notamos que se $t \to x^+$, então $F(t)$ é decrescente (monótona) e limitada por baixo por $F(x)$ portanto $F^+(x)$ é convergente e existe. Da mesma forma, quando $t \to x^-$, então $F(t)$ é monótona crescente limitada por $F(x)$, logo $F^-(x)$ existe. Como observado antes, a mesma prova mostra que $F^+(a)$ e $F^-(b)$ existem e estão bem definidos também. Em particular, se x_0 é um ponto de descontinuidade, $x_0 \in (a,b)$, os limites existem.

Para provar **(a)**, chamamos $D \subset [a,b]$, o conjunto dos pontos de descontinuidade. Por definição, $t \in D$ se e somente se (onde estiver bem definido)

$$F^+(t) - F(t) > 0 \quad \vee \quad F(t) - F^-(t).$$

Isso é, num ponto de descontinuidade a função "pula" um intervalo positivo. Vamos associar únicamente a cada $t \in D$, um intervalo aberto da reta (o intervalo que pulamos no ponto t), esses intervalos serão disjuntos e portanto, serão enumeráveis. Para cada $t \in D$, se $F^+(t) - F(t) > 0$, associamos a t o aberto

$$A_t = \{x : F(t) < x < (F(t) + F^+(t))/2\}$$

caso contrário, sendo $F(t) - F^-(t) > 0$, definimos

$$A_t = \{x : (F(t) + F^-(t))/2 < x < F(t)\}.$$

Vamos mostrar que se $t < t' \in D$, então $A_t \cap A_{t'} = \varnothing$. Para isso, olhando para os limites dos intervalos, basta perceber que

$$\frac{F(t) + F^+(t)}{2} \leqslant \frac{F(t') + F^-(t')}{2}$$

que vale pois, como F é crescente, $F(t) \leqslant F(t')$ e, tomando $c \in (t,t')$, sabemos que $F^+(t) \leqslant F(c) \leqslant F^-(t')$. Como associamos a cada $t \in D$ conjuntos abertos disjuntos de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é Lindelöf, vale que D é enumerável.

Sobre (c) e (d). Eu acredito conhecer a solução para ambas as letras. A ideia seria mostrar que, considerando $\mu([c,d]) = F(d) - F(c)$, formariámos uma pré-medida sobre o semi-anel desses conjuntos (os intervalos de $[a,b]$), por sua vez, esse semi-anel pode ser únicamente estendido para uma álgebra com uma única extensão da pré-medida também. E aí estariámos quase que finalizados,já a extensão da álgebra para a σ-álgebra de Catheodory seria única e conteria os Borelianos. Dessa forma, qualquer medida boreliana de $[a,b]$ é únicamente determinada pelos valores tomados nos intervalos da forma $[c,d]$, (c,d), $(c,d]$, $[c,d]$. Para a letra (d), bastaria verificar que, sendo F diferenciável, a medida λ em $[a,b]$ definida por $\lambda(E) = \int_E F' dt$ seria boreliana e coincidiria com μ nos intervalos de $[a,b]$, como, novamente, isso determina únicamente a medida, ela seria idêntica a μ onde definida. Não consegui escrever esse argumento de maneira convincente, então fica esse diálogo só para que um futuro eu possa revê-lo.

(e) A sequência, como dada, pode ter vários termos repetidos, substituindo se for necessário os α_m por $\sum_{x_n = x_m} \alpha_n$, podemos sem modificar a função F, supor que cada x_n aparece somente uma vez na sequência.

Seja μ a medida dada por F de acordo com a letra (c), vamos mostrar que μ está concentrada em $\bigcup_n \{x_n\}$ e determiná-la nesses pontos.

Da forma que foi definida,

$$\mu([a,b]) = F(b) - F(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

Segue da finitude do espaço que dado um x_n fixo da nossa sequência,

$$\mu(\{x_n\}) = \lim_{k\to\infty} \mu((x_n - 1/k, x_n]) = \lim_{k\to\infty} F(x_n) - F(x_n - 1/k)$$

Expandindo esse limite e escolhendo uma indexação arbitrária para o somatório em F (que é absolutamente convergente), temos

$$\mu(\{x_n\}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{x_m \leqslant x_n} \alpha_m - \sum_{\substack{x_m \leqslant \\ x_n - 1/k}} \alpha_m$$

Ou colocando de maneira mais limpa (usando funções indicadoras)

$$\mu(\{x_n\}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{1}[(x_n - 1/k) < x_m \leqslant x_n]\alpha_m$$

Note que α_n sempre pertence ao somatório e como todos os termos são positivos,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{1}[(x_n - 1/k) < x_m \leqslant x_n]\alpha_m \geqslant \alpha_n.$$

Vamos mostrar o outro lado da desigualdade. Fixado $\varepsilon > 0$, tomamos M tal que

$$\sum_{m=M}^{\infty} \alpha_m < \varepsilon$$

Dos primeiros M termos $(x_1, x_2, \ldots x_M)$ distintos de x_n, deve haver um mais próximo, digamos a distância δ de x_n. Se $k > 1/\delta$, vale que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{1}[(x_n - 1/k) < x_m \leqslant x_n]\alpha_m \leqslant$$
$$\alpha_n + \left(\sum_{m=1}^{M} \mathbb{1}[(x_n - 1/k) < x_m < x_n]\alpha_m \right) + \varepsilon = \alpha_n + \varepsilon$$

portanto, fazendo $\varepsilon \to 0$, $\mu(\{x_n\}) = \lim_{k\to\infty} \mu((x_n - 1/k, x_n]) = \alpha_m$.

O que fizemos acima implica que $\mu([a,b]) = \mu(\bigcup_n \{x_n\})$ e portanto, nossa medida está concentrada num número enumerável de pontos. Em particular, vale que

$$\int_{[a,b]} f d\mu = \int_{\{x_n\}_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x_n\}) f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f(x_n).$$

□

Observation 7.1. Últimamente, tenho achado essa forma de provas comentadas piores. Perco mais tempo pensando em como escrever a prova do que de fato tendo a ideia para a resolução do problema. Para as próximas listas, tentarei organizar as provas em passos mais atômicos e que presumo que sejam mais fáceis de corrigir. Acho que facilitará o entendimento.

E grande João :) , por favor meta bronca no que tiver feio, mal escrito, errado e etc. Acho que os outros já passaram bastante por isso, mas eu ainda preciso treinar muito a clareza dos meus argumentos.

Um abração enorme.

8 Lista 8 (30/10/2025)

Listagem de problemas:

- Exercício 8.1 : ✓
- Exercício 8.2 : ✓
- Exercício 8.3 :
  (a) ✓
  (b) ☹
- Exercício 8.4 : ✓
- Exercício 8.5 : ✓

Problem 8.1. Uma função f é dita $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ se para toda bola B, $f \cdot \mathbb{1}_B \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Mostre que o Teorema de Diferenciação de Lebesgue ainda vale para $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Proof. Seja B bola aberta arbitrária. Como $f \cdot \mathbb{1}_B \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pelo teorema da diferenciação de Lebesgue, para quase todo $x \in B$,

$$f(x)\mathbb{1}_B(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(x)} f(z)\mathbb{1}_B(z)dz.$$

Como $x \in B$, $f(x)\mathbb{1}_B = f(x)$ e, para r suficientemente pequeno, temos

$$\frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(x)} f(z)\mathbb{1}_B(z)dz = \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(x)} f(z)dz.$$

Portanto, para quase todo $x \in B$, vale

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(x)} f(z)dz.$$

Como $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0)$ é união enumerável de bolas abertas, vale que quase todo ponto é de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. □

Problem 8.2. Seja φ uma função Lebesgue mensurável em $\mathbb{R}^n$, que satisfaza seguinte propriedade: para todo retângulo n-dimensinal Q

$$\left| \int_Q \varphi(x)dx \right| \leqslant \frac{Mm(Q)}{1+m(Q)}$$

para alguma constante M. Mostre que para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(kx)f(x)dx = 0.$$

Lemma 8.1. Seja x um ponto de Lebesgue de $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Seja $\{E_i\}$ uma sequência de conjuntos borelianos que contém x, se existe $\alpha > 0$ e sequência de bolas $B_i(x, r_i)$ satisfazendo

1. $E_i \subset B_i(x, r_i)$
2. $m(E_i) > \alpha \cdot m(B_i(x, r_i))$
3. $\lim_{i\to\infty} r_i = 0$

então

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{m(E_i)} \int_{E_i} |f - f(x)|dm = 0$$

Proof. Usando os dados do enunciado,

$$\frac{1}{m(E_i)} \int_{E_i} |f - f(x)|dm \leqslant \frac{1}{\alpha m(B_i(x, r_i))} \int_{B_i(x,r_i)} |f - f(x)|dm$$

tomando $i \to \infty$, pelo teorema da diferenciação de Lebesgue, o lado direito tende a 0. □

Lemma 8.2. Seja S_Q o conjunto de funções simples de $\mathbb{R}^n$ cujas pré-imagens por um valor são sempre um retângulo. Isso é, se $s \in S$, então

$$s = \sum_{j=1}^{N} c_j \mathbb{1}_{Q_j}$$

onde os c_j são complexos e Q_j são retângulos.

Se $1 \leqslant p < \infty$, então S_Q é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proof. Basta notar que S_Q é denso em $C_c(\mathbb{R}^n)$ na norma $||\cdot||_\infty$ que por sua vez é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leqslant p < \infty$. Mas isso segue fácilmente do fato que as funções em $C_c(\mathbb{R}^n)$ são uniformemente contínuas. Dado $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, tomamos Q um cubo grande tal que $\text{supp}(f) \subset Q$, dado qualquer $\varepsilon > 0$, escolhemos $\delta > 0$ de forma que $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dividindo Q em cubos menores $\{Q_j\}_{j=1}^N$ de diâmetro menor que δ, escolha x_j em qualquer um desses cubos e defina

$$s = \sum_{j=1}^{N} f(x_j)\mathbb{1}_{Q_j}.$$

Segue que

$$\int_Q |f - s|^p dm \leqslant \int_Q ||f - s||_\infty^p dm \leqslant \int_Q \varepsilon^p dm = \varepsilon^p m(Q)$$

fazendo $\varepsilon \to 0$, segue S_Q é denso em $C_c(\mathbb{R}^n)$ em qualquer L^p. □

Proof. (Do problema [8.2]) Como φ é integrável em qualquer retangulo Q, ela pertence a $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Em $\mathbb{R}^n$, qualquer bola B de raio r centrada em x, contém um cubo Q centrado em x de lado $2r/\sqrt{n}$ e satisfaz que

$$\frac{m(Q)}{m(B)} \geqslant \frac{2^n r^n}{D n^{n/2} r^n} > C > 0$$

Portanto, sempre podemos formar conjuntos bonitinhos, com respeito ao Lema [8.1] para usar Diferenciação de Lebesgue. Sai do Lema que em todo ponto de Lebesgue de φ (e portanto quase todo ponto)

$$|\varphi(x)| = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{m(Q_i)} \left| \int_{Q_i} \varphi(x)dm \right| \leqslant \lim_{i\to\infty} \frac{M}{(1 + m(Q_i))} = M$$

onde Q_i é uma sequência retângulos que decresce adequadamente com as bolas, que podemos sempre tomar pela observação anterior. Em particular, vale que $||\varphi||_\infty \leqslant M$.

Agora, dado um retângulo $Q \subset \mathbb{R}^n$, vamos calcular o limite para $f = \mathbb{1}_Q$. Temos

$$\lim_{k\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(kx)\mathbb{1}_Q(x)dm(x) \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \int_Q \varphi(kx)dm(x) \right|$$

fazendo a substituição $u = kx$ em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\left|\int_Q \varphi(kx)dm(x)\right| = \frac{1}{k^n}\left|\int_{kQ} \varphi(u)dm(u)\right| \leqslant \frac{Mm(kQ)}{k^n(1+m(kQ))} \leqslant \frac{M}{k^n}$$

que tende para 0 quando $k \to \infty$, ou seja

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(kx)\mathbb{1}_Q(x)dm(x)\right| = 0.$$

Por linearidade da integral, para qualquer função $s \in S_Q$, como definida no Lema [8.2], vale que

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(kx)s(x)dm(x)\right| = 0.$$

Agora para provar o resultado, dado $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$, pelo Lema [8.2], tome $s \in S_Q$ com

$$||f - s||_1 < \varepsilon$$

e seja $h = f - s$, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(kx)f(x)dm(x)\right| &\leqslant \lim_{k\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(kx)s(x)dm(x)\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(kx)h(x)dm(x)\right| \\ &\leqslant 0 + \int_{\mathbb{R}^n} ||\varphi||_\infty |h(x)|dm(x) \\ &\leqslant M||h||_1 = M\varepsilon\end{aligned}$$

Como isso vale para qualquer ε, segue que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(kx)f(x)dm(x) = 0.$$

□

Problem 8.3. Seja $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e considere o operador maximal centrado

$$Mg(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)} |g(y)|dy.$$

Seja $n \geqslant 3$ e considere $f_\alpha = |x|^{-\alpha}$, onde $0 < \alpha < n$.

(a) Mostre que $Mf_\alpha(x) = C_\alpha f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, onde C_α é uma constante.

(b) ** Para cada $0 < \alpha < n$, decida se $C_\alpha = 1$ ou $C_\alpha > 1$ e prove.

Proof. Prova de (a). Seguindo a dica da Prof. Cynthia, vamos ver como Mf_α se comporta sobre escalonamentos. Seja $z \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$, calculamos $Mf_\alpha(tz)$ (fazendo a substituição $x = ty$, $dx = |t^n|dy$) e encontramos

$$\sup_{r>0}\frac{1}{m(B_r)}\int_{B_r(tz)} |x|^{-\alpha}dx = \sup_{r>0}\frac{1}{m(B_r)}\int_{B_{r/t}(z)} |ty|^{-\alpha}t^n dy \tag{22}$$

$$= t^{-\alpha}\sup_{r>0}\frac{t^n}{m(B_r)}\int_{B_{r/t}(z)} |y|^{-\alpha}dy \tag{23}$$

$$= t^{-\alpha}\sup_{r>0}\frac{1}{m(B_{r/t})}\int_{B_{r/t}(z)} |y|^{-\alpha}dy = t^{-\alpha}Mf_\alpha(z). \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

Portanto, para determinar Mf_α em $\mathbb{R}^n$, basta encontrar seus valores para $|z| = 1$, pois temos

$$Mf_\alpha(z) = |z|^{-\alpha} Mf_\alpha\left(\frac{z}{|z|}\right).$$

Se mostrarmos que para todo z com $|z| = 1$, $Mf_\alpha(z) = C_\alpha$, onde C_α é uma constante positiva fixa, então teremos justamente que $Mf_\alpha(x) = C_\alpha |x|^{-\alpha}$ para todo $x \neq 0$, que é quase o que gostariámos de provar.

Vamos mostrar que $Mf_\alpha(x)$ é finito para $x \neq 0$ e infinito para $x = 0$, faremos isso considerando $r < |z|/2$ e $r \geqslant |z|/2$ no supremo. Seja $z \neq 0$ e $r < |z|/2$, então segue que

$$\frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(z)} |x|^{-\alpha} dx \leqslant \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(z)} |z/2|^{-\alpha} dx \leqslant (2/|z|)^\alpha$$

pois, na bola $B_r(z)$ o ponto mais próximo da origem tem norma $|z| - r \geqslant |z|/2$. Se $r \geqslant |z|/2$, podemos cotar superiormente por

$$\frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(z)} |x|^{-\alpha} dx \leqslant \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_{2r}(0)} |x|^{-\alpha} dx.$$

Usando coordenadas polares, a integral da direita pode ser determinada como

$$\int_{B_{2R}(0)} |x|^{-\alpha} dx = \int_0^{2R} r^{n-1} dr \int_{S^{n-1}} |rs|^{-\alpha} ds = \int_0^{2R} r^{n-1-\alpha} dr \int_{S^{n-1}} ds = A(2R)^{n-\alpha}. \tag{26}$$

Onde A é uma constante positiva vindo da integral em r e da medida total de S^{n-1}. Substituindo no que tinhamos antes,

$$\frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(z)} |x|^{-\alpha} dx \leqslant \frac{Ar^{n-\alpha}}{m(B_r)} = Dr^{-\alpha}$$

Em que D é também uma constante obtida das outras. De qualquer forma, como $r \geqslant |z|/2$, conseguimos outro bound de $D2^\alpha/|z|$. Juntando ambos os resultados, segue que para $z \neq 0$, $Mf_\alpha(z)$ está cotado por algum $C/|z|^\alpha$ e é portanto finito. Além disso, para $z = 0$, podemos aplicar o mesmo cálculo da integral que usamos em [26] para inferir que

$$Mf_\alpha(0) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r(0)} |x|^{-\alpha} dx = \sup_{r>0} Cr^{-\alpha} = \infty.$$

Agora basta confirmar a observação feita anteriormente, se mostrarmos que para todo z com $|z| = 1$, $Mf_\alpha(z) = C_\alpha$, teremos terminado a prova. Mas isso segue simplesmente de uma mudança de variáveis, sejam $v \neq w$, com $|v| = |w| = 1$, então existe uma transformação $T \in O(n)$ tal que $Aw = v$. Sendo ortogonal, T manda bolas em bolas de mesmo tamanho também, portanto

$$\int_{B_r(v)} |x|^\alpha dx = \int_{T^{-1}(B_r(v))} |T(y)|^{-\alpha} |\det(T)| dy = \int_{B_r(w)} |y|^{-\alpha} dy$$

e justamente, tomando supremos sobre r

$$Mf_\alpha(v) = Mf_\alpha(w).$$

Chamando um desses valores de C_α, mostramos que $Mf_\alpha(z) = C_\alpha |z|^{-\alpha}$ para $z \neq 0$ e $Mf_\alpha(0) = \infty$. □

Problem 8.4. Seja E um conjunto de Lebesgue em $\mathbb{R}$, os limites superiores e inferiores dos quocientes

$$\frac{m(E \cap (x - \delta, x + \delta))}{2\delta}$$

são chamados das densidades superiores e inferiores de E em x. Se esses são iguais, seu valor em comum $D_E(x)$ é a densidade de E em x. Se $D_E(x) = 1$, x é um ponto de densidade de E. Prove que $D_E(x) = 1$ para quase todo ponto $x \in E$ e que $D_E(x) = 0$ para quase todo ponto $x \notin E$.

Proof. Basta notar que a função $\mathbb{1}_E$ pertence a $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ uma vez que, para qualquer bola B,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x)\mathbb{1}_E(x)dx \leqslant m(B) < \infty.$$

Por [8.1], quase todo ponto de $\mathbb{R}$ é de Lebesgue para $\mathbb{1}_E$, ou seja, para quase todo x,

$$\mathbb{1}_E(x) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{m(B_\delta)} \int_{B_\delta(x)} \mathbb{1}_E dm = \lim_{\delta\to 0} \frac{m(E\cap(x-\delta,x+\delta))}{2\delta}.$$

E temos que $D_E(x) = 1$ para quase todo $x \in E$ e $D_E(x) = 0$ para quase todo ponto $x \notin E$. □

Problem 8.5. Seja $A, B \subset \mathbb{R}$, seja $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$. Suponha que $m(A) > 0$ e $m(B) > 0$, prove que $A + B$ contém um intervalo.

Proof. Vou seguir o outline do Rudin. Sejam $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$ pontos de densidade [Prob. 8.4], mostrarei que existe um intervalo ao redor de $c_0 = a_0 + b_0$. Defina, para E mensurável, $x \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$

$$d_E(x,\delta) = \frac{m(E\cap(x-\delta,x+\delta))}{2\delta}.$$

Temos que $\lim_{\delta\to 0} d_A(a_0,\delta) = 1$ e $\lim_{\delta\to 0} d_B(b_0,\delta) = 1$.

Tome δ pequeno o suficiente tal que para todo $\delta' < \delta$, $d_A(a_0,\delta') > 2/3$ e $d_B(b_0,\delta') > 2/3$. Agora, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo ou negativo defina $B_\varepsilon = \{c_0 + \varepsilon - b;\ |b - b_0| < \delta/2,\ b \in B\}$. Crucialmente,

$$B_\varepsilon \subset (a_0 + \varepsilon - \delta/2, a_0 + \varepsilon + \delta/2) \subset (a_0 - |\varepsilon| - \delta/2, a_0 + |\varepsilon| + \delta/2).$$

Além disso, sendo uma translação de uma vizinhança de b_0 em B (multiplicada por -1), vale que

$$m(B_\varepsilon) = m(B\cap(b_0-\delta/2, b_0+\delta/2)) > 2\delta/3. \tag{27}$$

Se $|\varepsilon| < \delta/2$, vale que $d_A(a_0, \delta/2 + |\varepsilon|) > 2/3$, ou seja

$$m(A\cap(a_0 - |\varepsilon| - \delta/2, a_0 + |\varepsilon| + \delta/2)) > \frac{2\delta + 4|\varepsilon|}{3}. \tag{28}$$

Agora, notamos que

$$\begin{aligned} m(A\cap(a_0 - |\varepsilon| - \delta/2, a_0 + |\varepsilon| + \delta/2)) + m(B_\varepsilon)& \\ &> \frac{2\delta}{3} + \frac{2\delta + 4|\varepsilon|}{3} \\ &> \delta + 2|\varepsilon| \\ &= m((a_0 - |\varepsilon| - \delta/2, a_0 + |\varepsilon| + \delta/2)) \end{aligned}$$

Onde usamos [27] e [28] na primeira desigualdade e $\delta > 2|\varepsilon|$ na segunda. Segue que $m(A\cap B_\varepsilon) > 0$ e portanto $A\cap B_\varepsilon \neq \varnothing$. Mas isso significa que para algum $b \in B$, $c_0 + \varepsilon - b \in A$ e, portanto, somando b, $c_0 + \varepsilon \in A + B$. Como isso vale para todo ε com $|\varepsilon| < \delta/2$, segue que $(c_0 - \delta/2, c_0 + \delta/2) \subset A + B$.

□

9 Lista 9 (7/11/2025)

Listagem de problemas:

- Exercício 9.1 : ✓
- Exercício 9.2 : ✓
- Exercício 9.3 : ✓
- Exercício 9.4 : ✓
- Exercício 9.5 : ✓
- Exercício 9.6 : ✓

Problem 9.1. Prove a desigualdade de Young para $1 < p, q, r < \infty$. Isso é, se

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r},$$

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in L^q(\mathbb{R})$ e vale que

$$||f * g||_{L^q} \leqslant ||f||_{L^p} \cdot ||g||_{L^r}.$$

Proof. Vou seguir a prova do Grafakos. Note que, sendo p', q', r' os conjugados de p, q, r respectivamente:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1,$$

vale que

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{q} + (1 - \frac{1}{p}) + (1 - \frac{1}{r}) = 2 - (\frac{1}{r} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}) = 1 \tag{29}$$

$$\frac{p}{q} + \frac{p}{r'} = p(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r'}) - \frac{p}{p'} = p - \frac{p}{p'} = p(1 - \frac{1}{p'}) = 1 \tag{30}$$

$$\frac{r}{q} + \frac{r}{p'} = 1. \tag{31}$$

Onde a última igualdade segue simétricamente de trocar r por p. Young segue de usar Hölder em uma separação esperta usando essas identidades. Expandindo $f * g$ temos

$$\begin{aligned}
|f * g|(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f|(y)|g|(x-y)dm(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|f|(y))^{p/q}(|f|(y))^{p/r'}(|g|(x-y))^{r/q}(|g|(x-y))^{r/p'}dm(y)
\end{aligned}$$

Agrupando os termos com os mesmos denominadores nos expoentes, temos

$$|f * g|(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (|f|(y))^{p/r'}[(|f|(y))^{p/q}(|g|(x-y))^{r/q}](|g|(x-y))^{r/p'}dm(y).$$

Hölder com (r', q, p') nos dá

$$|f * g|(x) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|f|(y))^p dm(y)\right)^{1/r'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|f|(y))^p (|g|(x-y))^r dm(y)\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|g|(x-y))^r dm(y)\right)^{1/p'}$$

Por invariância da medida de Lebesgue por translação, temos

$$|f * g|(x) \leqslant (||f||_p)^{p/r'}(||g||_r)^{r/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(|f|(y))^p(|g|(x-y))^r dm(y)\right)^{1/q}$$

Tomando a norma $L^q(\mathbb{R}^n)$ da expressão, obtemos o resultado.

$$||f * g||_q \leqslant (||f||_p)^{p/r'}(||g||_r)^{r/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(|f|(y))^p(|g|(x-y))^r dm(y)dm(x)\right)^{1/q}$$

Usando Fubini na direita (e a invariância de translação novamente)

$$\begin{aligned}||f * g||_q &\leqslant (||f||_p)^{p/r'}(||g||_r)^{r/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(|f|(y))^p dm(y)\int_{\mathbb{R}^n}(|g|(x-y))^r dm(x)\right)^{1/q}\\ &= (||f||_p)^{p/r'}(||g||_r)^{r/p'}(||f||_p)^{p/q}(||g||_r)^{r/q} = ||f||_p||g||_r.\end{aligned}$$

□

Problem 9.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua com $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Prove que temos

$$\int_{\infty}^{\infty}|f(x+h) - f(x)|dx \leqslant c|h|,$$

onde c é uma constante que não depende de h.

Proof. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vale que para todo $x \in \mathbb{R}$ e $h > 0$

$$|f(x+h) - f(x)| = \left|\int_x^{x+h} f'(y)dm(y)\right| \leqslant \int_x^{x+h}|f'(y)|dm(y).$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x+h) - f(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}}\int_x^{x+h}|f'(y)|dm(y)dm(x).$$

Usando funções indicadoras, a integral dupla se expressa como

$$\int_{\mathbb{R}}\int_x^{x+h}|f'(y)|dm(y)dm(x) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}[x \leqslant y \leqslant x+h]|f'(y)|dm(y)dm(x).$$

Por Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_x^{x+h}|f'(y)|dm(y)dm(x) &= \int_{\mathbb{R}}|f'(y)|dm(y)\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}[x \leqslant y \leqslant x+h]dm(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}}|f'(y)|dm(y)\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}[y-h \leqslant x \leqslant y]dm(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}}|f'(y)|dm(y)h = h||f'||_1\end{aligned}$$

e o resultado segue para $c = ||f'||_1$. Para $h < 0$ as mesmas contas valem, a única diferença é que a indicadora se torna $\mathbb{1}[x+h \leqslant y \leqslant x]$.

□

Problem 9.3. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua tal que $f' \in L^2([0,1])$. Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 \leqslant y < x \leqslant 1$ forem tais que $|x-y| < \delta$, então

$$\frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|} < \varepsilon.$$

Proof. Essa é uma aplicação fácil de Hölder. Como $m([0,1]) = 1 < \infty$, então $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)dt.$$

Em particular,

$$\frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|} \leqslant \frac{1}{|x-y|}\left(\int_x^y |f'(t)|dt\right)^2 = \frac{1}{|x-y|}\left(\int_{[0,1]} \mathbb{1}_{[y,x]}(t)|f'(t)|dt\right)^2$$

Usando Hölder com $f' \in L^2([0,1])$ e $\mathbb{1}_{[y,x]} \in L^2([0,1])$ e $(p,q) = (2,2)$ temos

$$\frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|} \leqslant \frac{1}{|x-y|} \cdot ||\mathbb{1}_{[y,x]}||_2^2 \cdot ||f'||_2^2 = |x-y| \cdot ||f'||_2^2$$

Portanto, para qualquer $\varepsilon > 0$, escolhendo $\delta < \varepsilon/||f'||_2^2$, segue a desigualdade desejada. $\square$

Problem 9.4. Seja $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ funções não decrescentes para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponha que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty.$$

Prove que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

em quase todo ponto.

Proof. Sendo uma série de funções não decrescentes, f é não decrescente e portanto é diferenciável qtp com $f' \geqslant 0$. Da mesma forma, cada f_n é diferenciável qtp com $f_n' \geqslant 0$ e portanto removendo um conjunto de medida nula, a série $\sum_n f_n'$ faz sentido qtp. De agora em diante portanto, nossas integrais serão feitas sobre o conjunto E onde todas as derivadas, tanto a de f quanto as dos f_n, existem.

Vamos mostrar primeiramente que $f' \geqslant \sum_n f_n'$ qtp. Isso é, queremos mostrar que para $x \in E$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{h\to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}$$

Mas isso segue diretamente do Lema de Fatou uma vez que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \liminf_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{h\to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{h\to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}
\end{aligned}$$

Depois me mostraram uma forma mais direta de fazer isso, mas eu gosto do Lema de Fatou, vou deixar-lo.

Para a outra desigualdade, vamos mostrar que é válido qtp em todo intervalo compacto $[a,b]$, como $\mathbb{R}$ é união enumerável desses intervalos, seguirá que vale qtp em $\mathbb{R}$. A estratégia será mostrar que

$$\int_a^b f' - \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n'\right) dm = 0$$

Note que, como $f' \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$, isso implicaria que $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ qtp em $[a,b]$. Expandindo a integral anterior,

$$\int_a^b f' - \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n'\right) dm = \int_a^b \lim_{N\to\infty} f' - \sum_{n=1}^{N} f_n' dm. \tag{32}$$

Como f é não-decrescente e finita em todo ponto, segue da 'desigualdade fundamental do cálculo' que

$$\int_a^b f' \leqslant f(b) - f(a)$$

e portanto $f' \in L^1([a,b])$, logo podemos usar o Teorema da Convergência Dominada [2.3] com f' em [32] para obter que

$$\int_a^b \lim_{N\to\infty} f' - \sum_{n=1}^{N} f_n' dm = \lim_{N\to\infty} \int_a^b f' - \sum_{n=1}^{N} f_n' dm.$$

Como

$$f = \sum_{n\leqslant N} f_n + \sum_{n>N} f_n$$

temos

$$f' = \sum_{n\leqslant N} f_n' + \left(\sum_{n>N} f_n\right)' \Rightarrow f' - \sum_{n\leqslant N} f_n' = \left(\sum_{n>N} f_n\right)'.$$

Substituindo no limite anterior e lembrando que $\sum_{n>N} f_n$ é uma função crescente bem definida, temos, usando a desigualdade fundamental do cálculo,

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b f' - \sum_{n=1}^{N} f_n' dm = \lim_{N\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{n>N} f_n\right)' dm \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{n>N} f_n(b) - f_n(a) = 0$$

como queriámos mostrar. $\square$

Problem 9.5. Sejam $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ espaços σ-finitos. Seja $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty)$ uma função mensurável no espaço produto. Prove que para $1 \leqslant p < \infty$

$$\left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2\right)^p d\mu_1\right)^{1/p} \leqslant \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)^p d\mu_1\right) d\mu_2.$$

Proof. Essa segue sendo contra-intuitiva para mim, o truque me escapa muito fácilmente. Defina em X_1

$$H(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2$$

já vimos que H é mensurável. A desigualdade de Minkovski segue de expandir $||H||_p^p$.

$$\begin{aligned} ||H||_p^p = \int_{X_1} H(x_1)^p d\mu_1 &= \int_{X_1} H(x_1)^{p-1} H(x_1) d\mu_1 \\ &= \int_{X_1} H(x_1)^{p-1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2\right) d\mu_1 \\ &= \int_{X_1} \int_{X_2} H(x_1)^{p-1} f(x_1, x_2) d\mu_2 d\mu_1 \end{aligned}$$

Usando Fubini (ou Tonelli)

$$||H||_p^p = \int_{X_2} \int_{X_1} H(x_1)^{p-1} f(x_1, x_2) d\mu_1 d\mu_2$$

Aplicando Hölder na integral interior com $(p/(p-1), p)$, achamos

$$||H||_p^p \leqslant \int_{X_2} ||H||_p^{p-1}\bigg(\int_{X_1} f(x_1, x_2)^p d\mu_1\bigg)^{1/p} d\mu_2$$

E, portanto, se $||H||_p \neq 0, \infty$, segue que

$$||H||_p \leqslant \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)^p d\mu_1\right)^{1/p} d\mu_2.$$

Se $||H||_p = 0$, temos $f = 0$ qtp e a desigualdade vale trivialmente.

Se $||H||_p = \infty$, o argumento é um pouco mais complicado, mas segue de aproximar o espaços em partes finitas e f por funções limitadas. Tome sequência $A_n \nearrow X_1$ e $B_m \nearrow X_2$ e $f_N = \min(f, N)$, então, para todo (n, m, N) vale que

$$\left(\int_{A_n}\left(\int_{B_m} f_N(x_1, x_2) d\mu_2\right)^p d\mu_1\right)^{1/p} \leqslant \int_{A_n}\left(\int_{B_m} f_N(x_1, x_2)^p d\mu_1\right) d\mu_2.$$

tomando $N \to \infty$ e em seguida $n, m \to \infty$ segue por convergência monótona que

$$\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2\right)^p d\mu_1\right)^{1/p} \leqslant \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)^p d\mu_1\right) d\mu_2.$$

□

Problem 9.6. Sejam A, B conjuntos mensuráveis de medida positiva em $\mathbb{R}$. Usando convolução de funções, prove que

$$A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$$

contém um segmento.

Proof. Essa é muito bonitinha. Sendo $m(A), m(B) > 0$, existe algum intervalo compacto $[-N, N]$ com $m(A \cap [-N, N]) > 0$ e $m(A \cap [-N, N]) > 0$, vamos supor que A e B são limitados contidos em $[-N, N]$ então. Pela suposição, $\mathbb{1}_A$ e $\mathbb{1}_B$ ambas pertencem a $L^p(\mathbb{R})$ para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$, em particular (tomando $(p, q) = (2, 2)$) vale que a convolução

$$\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B$$

é uniformemente contínua e diferente de 0 em todo ponto, pois

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B(x) dm(x) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(y)\mathbb{1}_B(x-y) dm(y) dm(x)$$

e por Fubini

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B(x) dm(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(y) dm(y) \int_R \mathbb{1}_B(x-y) dm(x) = m(A)m(B).$$

Logo, $\{\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B > 0\}$ é um conjunto aberto, não vazio (logo possui intervalos) e se $\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B(x) > 0$, então

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(y)\mathbb{1}_B(x-y) dm(y) > 0$$

e existe $a \in A$ (de fato existe um conjunto de medida positiva) tal que $x - a \in B$. □