Lista 3 de Introdução à Teoria dos Números

VERÃO - IMPA - ENTREGAR ATÉ 27/2/2026

1) Uma pulseira é formada por pedras coloridas, de mesmo tamanho, pregadas em volta de um círculo de modo a ficarem igualmente espaçadas. Duas pulseiras são consideradas iguais se, e somente se, suas configurações de pedras coincidem por uma rotação. Se há pedras disponíveis de $k \geq 1$ cores distintas, mostre que o número de pulseiras diferentes possíveis com n pedras é dado pela expressão

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n} \varphi(d) \cdot k^{n/d}.$$

2) Dadas duas funções $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, definimos o *produto de Dirichlet* (ou *convolução de Dirichlet*) $f * g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ de f e g por

$$f * g(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)g(d_2).$$

(a) Prove que, se $s \in \mathbb{R}$ (ou $s \in \mathbb{C}$) e as séries $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ e $\sum_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s}$ convergem absolutamente então

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{f * g(n)}{n^s}.$$

(b) Prove que, para quaisquer funções $f, g, h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, temos $f * g = g * f$ e $f * (g * h) = (f * g) * h$ (isto é, o produto de Dirichlet é comutativo e associativo), e que a função $I : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ dada por $I(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n > 1 \end{cases}$ é o elemento neutro do produto $*$, i.e., $I * f = f * I = f$, $\forall f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$.

(c) Prove que se f e g são multiplicativas então $f * g$ é multiplicativa.

(d) Prove que, se $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ é tal que $f(1) \neq 0$, então existe uma única função $f^{(-1)} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ tal que $f * f^{(-1)} = f^{(-1)} * f = I$, a qual é dada recursivamente por $f^{(-1)}(1) = 1/f(1)$ e, para $n > 1$,

$$f^{(-1)}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{d|n, d<n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{(-1)}(d).$$

(e) Prove que, se f é multiplicativa, então a função $f^{(-1)}$ definida no item anterior também é multiplicativa.

3) Prove que, se $\alpha > 2$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

4) Mostre que o conjunto

$$\left\{ \frac{\varphi(n)}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

é denso em $[0,1]$, isto é, que , para todo $a \in [0,1]$ e todo $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo n tal que $\left| \frac{\varphi(n)}{n} - a \right| < \epsilon$.

5) Seja $f\colon \mathbb{N} \to [0,+\infty)$ uma função decrescente. Prove que a série

$$\sum_{p \text{ primo}} f(p)$$

converge se, e somente se, a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{\log n}$$

converge. Em particular, mostre que $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = +\infty$, mas $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p \log p}$ converge.

5) Um *número de Sierpiński* é um número números natural ímpar k tal que $k \cdot 2^n + 1$ é composto para todo natural n. Prove que 78557 é um número de Sierpiński, e que existem infinitos números de Sierpiński a partir das congruências

$$78557 \cdot 2^0 + 1 \equiv 0 \pmod 3$$

$$78557 \cdot 2^1 + 1 \equiv 0 \pmod 5$$

$$78557 \cdot 2^7 + 1 \equiv 0 \pmod 7$$

$$78557 \cdot 2^{11} + 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

$$78557 \cdot 2^3 + 1 \equiv 78557 \cdot 2^{39} + 1 \equiv 0 \pmod{73}$$

$$78557 \cdot 2^{15} + 1 \equiv 0 \pmod{19}$$

$$78557 \cdot 2^{27} + 1 \equiv 0 \pmod{37}.$$