

# Listas de Teoria dos Números

Aluno: Henrique Lima Cardoso

February 10, 2026

## Contents

<b>0</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
0.1	Notação	1
<b>1</b>	<b>Lista 1 - 12/1/2026</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Lista 2 - 26/01/2026</b>	<b>12</b>

## 0 Introdução

Ao decorrer do curso, vou escrever minhas resoluções dos exercícios nesse arquivo. Tem alguns motivos para isso:

1. Posso reutilizar resultados passados.
2. Está tudo organizado se um futuro henrique quiser rever.

O código fonte pode ser encontrado em <https://github.com/hnrq104/tn>.

### 0.1 Notaç̄o

Até agora encontrei os seguintes usos de notação não convencional:

- $x \equiv \{a_1, a_2, \dots\} \pmod{c}$  - significa que  $x$  é congruente a um elemento do conjunto  $\{a_i\}$ .
- $x \equiv \frac{a}{b} \pmod{m}$  - significa que  $x \equiv ab^{-1} \pmod{m}$ .

# 1 Lista 1 - 12/1/2026

**Problem 1.1.** Dados inteiros positivos  $a, b$  e  $c$ , dois a dois primos entre si, demonstre que  $2abc - ab - bc - ca$  é o maior número inteiro que não pode expressar-se na forma  $xbc + yca + zab$  com  $x, y$  e  $z$  inteiros não negativos.

*Proof.* Note que como  $(b, c) = 1$ , temos que  $(ab, ac) = a$  e, portanto por Bachét-Bezout existe solução para  $z'ab + y'ca = a$  com  $z', y'$  inteiros. Por sua vez, como  $(a, bc) = 1$ , existe solução para  $ma + nbc = 1$  com  $m, n$  inteiros. Juntando as duas equações, encontramos  $mz'ab + my'ca + nbc = 1$  que é solução para a equação  $xbc + yca + zab = 1$  e, portanto, temos soluções para  $xbc + yca + zab = k$  para qualquer inteiro  $k$ .

Vamos mostrar que  $2abc - ab - bc - ca$  não pode ser escrito como  $xbc + yca + zab$  para  $x, y, z \in \mathbb{N}$ . Suponha, que conseguimos, temos

$$\begin{aligned} 2abc - ab - bc - ca &= xbc + yca + zab \\ 2abc &= (x+1)bc + (y+1)ca + (z+1)ab \end{aligned}$$

tomando a segunda equação módulo  $a$ , achamos

$$0 \equiv (x+1)bc \pmod{a} \Rightarrow x+1 \equiv 0 \pmod{a}$$

ou seja,  $a | (x+1)$ . Como  $x \geq 0$ , devemos ter  $(x+1) \geq a$ . Simetricamente (tomando módulo  $b$  e depois  $c$ ), sabemos que  $(y+1) \geq b$  e  $(z+1) \geq c$ . Mas já encontramos contradição, uma vez que essas desigualdades implicam

$$(x+1)bc + (y+1)ca + (z+1)ab \geq abc + bca + cab = 3abc > 2abc$$

Agora seja  $n > 2abc - ab - bc - ca$ , mostraremos que existe solução natural para  $n = xbc + yac + zab$ . Primeiro, vamos caracterizar as soluções inteiras, que existem pela observação anterior. Note que se  $(x, y, z)$  e  $(x', y', z')$  são soluções, então

$$(x - x')bc + (y - y')ac + (z - z')ab = 0 \tag{1}$$

tomando a equação módulo  $a$ , vemos que  $(x - x') \equiv 0 \pmod{a}$  e portanto  $x' = x + ra$  para algum  $r \in \mathbb{Z}$ . Simetricamente, vemos que  $y' = y + sb$  e  $z' = z + tc$  para  $s, t \in \mathbb{Z}$ . Portanto, [1] se expressa como

$$(ra)bc + (sb)ac + (tc)ab = (r+s+t)abc = 0 \iff (r+s+t) = 0$$

Ou seja, se  $(x_0, y_0, z_0)$  é uma solução inicial, todas as outras soluções são da forma  $(x_0 + ra, y_0 + sb, z_0 + tc)$  onde  $r + s + t = 0$ , é fácil ver que qualquer tripla dessa forma também satisfaz a equação original. Nossa problema se resume então a encontrar soluções inteiras  $(r, s, t)$  para a seguinte série de relações:

$$\begin{aligned} x_0 + ra &> -1 \\ y_0 + sb &> -1 \\ z_0 + tc &> -1 \\ r + s + t &= 0 \end{aligned}$$

Isolando as variáveis e escrevendo  $t$  como  $-(r+s)$ , temos

$$\begin{aligned} -\frac{(x_0 + 1)}{a} &< r \\ -\frac{(y_0 + 1)}{b} &< s \\ r + s &< \frac{(z_0 + 1)}{c} \end{aligned}$$

As duas primeiras desigualdades, implicam que

$$-\left(\frac{(x_0+1)}{a} + \frac{(y_0+1)}{b}\right) < r+s < \frac{(z_0+1)}{c}$$

Notamos (segundo a resolução do livro para um problema similar) que

$$\frac{(z_0+1)}{c} - \left(\frac{(x_0+1)}{a} + \frac{(y_0+1)}{b}\right) = \frac{(z_0+1)}{c} + \frac{(x_0+1)}{a} + \frac{(y_0+1)}{b} = \frac{n+bc+ac+ab}{abc} > 2$$

pois  $n > 2abc - bc - ac - ab$ . Segue que o intervalo  $\left(-\frac{(x_0+1)}{a} - \frac{(y_0+1)}{b}, \frac{(z_0+1)}{c}\right)$  tem ao menos dois inteiros.

Tomando

$$r = \begin{cases} \lceil -(x_0+1)/a \rceil & \text{se } -(x_0+1)/a \notin \mathbb{Z} \\ \lceil -(x_0+1)/a \rceil + 1 & \text{se } -(x_0+1)/a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e  $s$  análoga, sendo

$$s = \begin{cases} \lceil -(y_0+1)/b \rceil & \text{se } -(y_0+1)/b \notin \mathbb{Z} \\ \lceil -(y_0+1)/b \rceil + 1 & \text{se } -(y_0+1)/b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

achamos soluções  $(r, s, t)$  compatíveis com o sistema de desigualdades.

□

**Problem 1.2.** Seja  $p$  um número primo ímpar. Seja  $s$  o menor inteiro positivo que não é resíduo quadrático módulo  $p$ .

(a) Mostre que  $p > s^2 - s$ .

(b) Suponha que  $p > 5$  e que  $-1$  seja resíduo quadrático módulo  $p$ : mostre que  $p > 2s^2 - s$ .

*Proof. (a)* Como  $1$  é sempre resíduo quadrático, sabemos que  $s \geq 2$ . Notamos que, pela propriedade multiplicativa dos símbolos de Legendre, para todo  $1 \leq k \leq (s-1)$ , vale que

$$\left(\frac{ks}{p}\right) = \left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{s}{p}\right) = 1 \cdot -1 = -1.$$

Isto é, nenhum dos números  $\{s, 2s, \dots, (s-1)s\}$  são resíduos quadráticos. Como  $p$  é um primo ímpar, temos que ao menos  $(p-1)/2$  elementos de  $\mathbb{Z}_p$  não são resíduos quadráticos, logo  $p > s$ . Suponha que  $p < s(s-1)$ , então existe  $1 \leq k < (s-1)$  tal que

$$sk < p < s(k+1).$$

Isso é,  $s(k+1) = p + r$  onde  $0 < r < s$  e temos  $s(k+1) \equiv r \pmod{p}$ . Portanto  $-1 = \left(\frac{s(k+1)}{p}\right) = \left(\frac{r}{p}\right) = 1$ , absurdo. □

*Proof. (b)* Segue muito similarmente da letra anterior. Note que como  $p > 5$ , se  $s = 2$ ,  $p > 2 \cdot 2^2 - 2 = 6$ , já que o próximo primo ímpar é 7. Podemos supor que  $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$  e  $s > 2$ . Já que temos  $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ , sabemos que para todo  $1 \leq k \leq (s-1)$ ,

$$\left(\frac{-2sk}{p}\right) = \left(\frac{2sk}{p}\right) = -1.$$

Agora suponha que  $p < 2s^2 - s$  ou, posto de forma mais instrutiva,  $p < 2s(s-1) + s$ . Então existe  $1 \leq k \leq (s-1)$  tal que

$$p \in (2sk - s, 2sk + s).$$

Note que como  $p$  é um primo maior que  $s$ , ele não pode estar nas bordas destes intervalos (que são múltiplas de  $s$ ). Se vale que  $2sk - s < p < 2sk$ , então  $2sk = p + r$  onde  $0 < r < s$ , logo  $-1 = \left(\frac{2ks}{p}\right) = \left(\frac{r}{p}\right) = 1$ , o que é absurdo. Se por outro lado, vale que  $2sk < p < 2sk + s$ , então podemos escrever  $2sk = p - r$  onde  $0 < r < s$  e  $2sk \equiv -r \pmod{p}$ , teríamos  $-1 = \left(\frac{2ks}{p}\right) = \left(\frac{-r}{p}\right) = 1$ , absurdo também.  $\square$

A seguinte definição será útil para os próximos dois problemas.

**Definition 1.1.** Dado  $p$  primo e  $n \neq 0$  inteiro,

$$\nu_p(n) = \max\{\alpha \in \mathbb{N} : p^\alpha \mid n\}$$

**Problem 1.3.** Seja  $p$  um primo ímpar,  $a$  um inteiro e  $n$  um inteiro positivo. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  inteiros negativos, com  $\alpha > 0$ . Prove:

- (a) Se  $p^\beta$  e  $p^\alpha$  são as maiores potências de  $p$  que dividem  $n$  e  $a - 1$  respectivamente então  $p^{\alpha+\beta}$  é a maior potência que divide  $a^n - 1$ .
- (b) Se  $n$  é ímpar e  $p^\beta$  e  $p^\alpha$  são as maiores potências de  $p$  que dividem  $n$  e  $a + 1$  respectivamente então  $p^{\alpha+\beta}$  é a maior potência de  $p$  que divide  $a^n + 1$ .

*Proof.* (a) Considere o caso particular  $\nu_p(a-1) = \alpha > 0$  e  $\nu_p(n) = \beta = 0$ , queremos mostrar que  $\nu_p(a^n - 1) = \alpha$ , temos

$$\begin{aligned} a^n - 1 &= (a - 1) \cdot \left( \sum_{j=0}^{n-1} a^j \right) \\ \nu_p(a^n - 1) &= \nu_p(a - 1) + \nu_p \left( \sum_{j=0}^{n-1} a^j \right) = \alpha + \nu_p \left( \sum_{j=0}^{n-1} a^j \right) \end{aligned}$$

então basta mostrar que  $\nu_p \left( \sum_{j=0}^{n-1} a^j \right) = 0$ . Verificamos que, como  $\nu_p(a - 1) > 0$ ,  $p \mid (a - 1)$ , ou seja  $a \equiv 1 \pmod{p}$ . Mas então

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^j \equiv \sum_{j=0}^{n-1} 1 \equiv n \not\equiv 0 \pmod{p},$$

ou seja  $p \nmid \sum_{j=0}^{n-1} a^j$  e  $\nu_p \left( \sum_{j=0}^{n-1} a^j \right) = 0$ .

Vamos provar induutivamente para  $n = p^\beta$ ,  $\beta \geq 1$ , o caso base principal é  $n = p$ . Queremos mostrar que  $\nu_p(a^p - 1) = \nu_p(a - 1) + 1$ , ou seja, como antes, que  $\nu_p \left( \sum_{j=0}^{p-1} a^j \right) = 1$ . Como  $\nu_p(a - 1) = \alpha$ , escrevemos  $a = p^\alpha s + 1$  com  $(p, s) = 1$ . O somatório se traduz como  $\left( \sum_{j=0}^{p-1} (p^\alpha s + 1)^j \right)$ . Se  $\alpha \geq 2$ , segue que

$$\sum_{j=0}^{p-1} (p^\alpha s + 1)^j \equiv \sum_{j=0}^{p-1} 1 \equiv p \pmod{p^2}$$

logo  $p \mid \sum_{j=0}^{p-1} (p^\alpha s + 1)^j$ , mas  $p^2$  não, e portanto  $\nu_p \left( \sum_{j=0}^{p-1} a^j \right) = 1$ . Se  $\alpha = 1$ , temos

$$\sum_{j=0}^{p-1} (ps + 1)^j \equiv \sum_{j=0}^{p-1} (1 + jps) \equiv p + ps \cdot (p(p-1)/2) \equiv p \pmod{p^2}$$

e o resultado segue também.

Para o passo induutivo, suponha que o resultado vale para  $\beta \geq 1$  e seja  $n = p^{\beta+1}$ . Então,

$$a^n - 1 = a^{p^{\beta+1}} - 1 = (a^p)^{p^\beta} - 1,$$

por indução com os parâmetros  $(a = a^p)$  e  $(n = p^\beta)$ , temos

$$\nu_p(a^n - 1) = \nu_p(a^p - 1) + \nu_p(p^\beta) = \nu_p(a - 1) + 1 + \beta = \nu_p(a - 1) + \nu_p(p^{\beta+1}),$$

o que prova a afirmação.

Já temos o suficiente para o caso geral, suponha que  $\nu_p(a - 1) = \alpha \geq 1$  e  $\nu_p(n) = \beta$ , de onde  $n = p^\beta \cdot k$  com  $(p, k) = 1$ . Então

$$a^n - 1 = (a^{p^\beta})^k - 1 = (a^{p^\beta} - 1) \cdot \left( \sum_{j=0}^{k-1} (a^{p^\beta})^j \right),$$

já sabemos que  $\nu_p((a^{p^\beta} - 1)) = \alpha + \beta$ , então basta mostrar que o somatório não é divisível por  $p$ . Notamos, pelo teorema de Fermat, que para qualquer  $\beta \geq 1$ ,

$$a^{p^\beta} = (a^p)^{p^{\beta-1}} \equiv a^{p^{\beta-1}} \pmod{p},$$

ou seja  $a^{p^\beta} \equiv a \pmod{p}$ , mas  $a \equiv 1 \pmod{p}$  pois  $\nu_p(a - 1) \geq 1$ . No somatório, isso se traduz como

$$\sum_{j=0}^{k-1} (a^{p^\beta})^j \equiv \sum_{j=0}^{k-1} 1 \equiv k \not\equiv 0 \pmod{p},$$

pois  $(k, p) = 1$ . Isto finaliza a demonstração.  $\square$

A prova do segundo item é quase que idêntica a do primeiro, só fazemos uso da outra fatoração usual. Serei um pouco mais sucinto.

*Proof. (b)* Caso  $\nu_p(n) = \beta = 0$  e  $\nu_p(a + 1) = \alpha \geq 1$ . Escrevemos

$$a^n + 1 = (a + 1) \cdot \left( \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^j \right) \Rightarrow \nu_p(a^n + 1) = \alpha + \nu_p \left( \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^j \right)$$

como  $\alpha \geq 1$ ,  $a \equiv -1 \pmod{p}$ , ou seja

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^j \equiv \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{2j} \equiv n \not\equiv 0 \pmod{p}$$

e portanto  $\nu_p \left( \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^j \right) = 0$ .

Caso  $n = p$ ,  $\nu_p(a + 1) = \alpha \geq 1$ . Como no caso anterior, basta mostrar que  $\nu_p \left( \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j a^j \right) = 1$ . Escrevemos  $a = p^\alpha s - 1$  com  $(p, s) = 1$ . Substituindo no somatório,

$$\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j a^j = \sum_{j=0}^{p-1} (-p^\alpha s + 1)^j \equiv p + p^\alpha s \cdot (p(p-1)/2) \equiv p + p^{\alpha+1}(p-1)/2 \pmod{p^{2\alpha}}$$

como  $\alpha \geq 1$  e  $p$  é ímpar, tomado a última equivalência módulo  $p^2$  vemos que  $\left( \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j a^j \right) \equiv p \pmod{p^2}$ , e isso nos dá o resultado que queríamos.

Caso  $n = p^{\beta+1}$  com  $\beta \geq 1$ ,  $\nu_p(a + 1) = \alpha \geq 1$ . Exatamente como antes, suponha, por indução, que o resultado é válido para  $n = p^\beta$ , segue que

$$\nu_p(a^n + 1) = \nu_p \left( (a^p)^{p^\beta} + 1 \right) = \nu_p(a^p + 1) + \nu_p(p^\beta) = \alpha + 1 + \beta.$$

onde usamos o caso anterior da prova na última igualdade.

Caso  $n = p^\beta k$  com  $(k, p) = 1$  e  $\beta \geq 1$ ,  $\nu_p(a+1) = \alpha \geq 1$ . Escrevemos (como no item anterior),

$$a^n + 1 = (a^{p^\beta} + 1) \cdot \left( \sum_{j=0}^{k-1} (-a^{p^\beta})^j \right).$$

Pelo caso indutivo, já sabemos que  $\nu_p(a^{p^\beta} + 1) = \alpha + \beta$ , basta mostrar que  $\sum_{j=0}^{k-1} (-a^{p^\beta})^j \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Mas, pela mesma observação de antes, se  $\beta \geq 1$ ,  $a^{p^\beta} \equiv a \pmod{p}$  e, como  $a \equiv -1 \pmod{p}$ , temos

$$\sum_{j=0}^{k-1} (-a^{p^\beta})^j \equiv \sum_{j=0}^{k-1} (-1 \cdot -1)^j \equiv k \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

O que completa a demonstração.  $\square$

**Problem 1.4.** (a) Prove que  $\text{ord}_{2^k} 5 = 2^{k-2}$ , para todo  $k \geq 2$ .

(b) Prove que se  $a$  é um inteiro ímpar e  $k \geq 2$  então existem  $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$  e  $j \in \mathbb{Z}$  com  $0 \leq j < 2^{k-2}$ , únicamente determinados, tais que  $a \equiv \varepsilon_j \cdot 5^j \pmod{2^k}$ .

*Proof.* (a) Vamos provar por indução em  $k$ . O resultado é claro para  $k = 2$  pois  $5 \equiv 1 \pmod{4}$ . Suponha que vale para  $k \geq 2$ , vamos provar para  $k+1$ . Isto é, queremos mostrar que  $t = \text{ord}_{2^{k+1}} 5 = 2^{k-1}$ , sabemos que

$$\text{ord}_{2^k} 5 \mid t = \text{ord}_{2^{k+1}} 5 \mid \varphi(2^{k+1}) = 2^k \Rightarrow t \in \{2^{k-2}, 2^{k-1}, 2^k\}.$$

Como  $5$  não é raiz primitiva módulo  $4$ , não pode ser raiz primitiva módulo  $2^k$  para  $k \geq 2$ . Logo  $t \in \{2^{k-2}, 2^{k-1}\}$  e basta mostrar que  $5^{2^{k-2}} \not\equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$ . Para isso, vamos calcular  $\nu_2(5^{2^{k-2}} - 1)$ . Vamos usar uma fatoração esperta, repetindo o fato que  $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ , temos

$$(5^{2^{k-2}} - 1) = (5^{2^{k-3}} + 1)(5^{2^{k-4}} + 1) \dots (5^2 + 1)(5 + 1)(5 - 1) = 4 \cdot \prod_{j=0}^{k-3} (5^{2^j} + 1). \quad (2)$$

Como  $5 \equiv 1 \pmod{4}$ , para qualquer número par  $s$ ,  $5^s \equiv 1 \pmod{4}$  e portanto  $5^s + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ . Em particular,  $\nu_2(5^s + 1) = 1$ . Usando esse fato na expressão acima, temos

$$\nu_2(5^{2^{k-2}} - 1) = \nu_2(4) + \sum_{j=0}^{k-3} \nu_2(5^{2^j} + 1) = 2 + k - 2 = k.$$

Portanto  $2^{k+1} \nmid 5^{2^{k-2}} - 1$ , ou seja  $5^{2^{k-2}} \not\equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$ .  $\square$

*Proof.* (b) Essa prova é um belo problema de contagem. Note que como  $5 \equiv 1 \pmod{4}$ , para todo  $k$ ,  $5^k \equiv 1 \pmod{4}$ . No entanto, para  $k \geq 2$ , há exatamente  $2^k/4$  classes de equivalência módulo  $2^k$  que são congruentes a  $1$  módulo  $4$ . Como  $\text{ord}_{2^k} 5 = 2^{k-2} = 2^k/4$ , segue que

$$\{\bar{5}^k \pmod{2^k} : 0 \leq k \leq \text{ord}_{2^k} 5 = 2^{k-2}\} = \{\bar{a} \pmod{2^k} : a \equiv 1 \pmod{4}\}.$$

Particularmente, se  $a \equiv 1 \pmod{4}$ , então existe um único  $0 \leq j \leq 2^{k-2}$  tal que  $5^j \equiv a \pmod{2^k}$ . Caso  $a \equiv -1 \pmod{4}$ , então existe um único  $0 \leq j \leq 2^{k-2}$  tal que  $5^k \equiv -a \pmod{2^k}$ , logo  $a \equiv -5^j \pmod{2^k}$ . Note que os pares  $(\varepsilon_j, j)$  estão únicamente determinados pois, se  $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$  então  $\varepsilon_i 5^i \not\equiv \varepsilon_j 5^j \pmod{4}$  e se  $\varepsilon_i = \varepsilon_j$ , então  $5^i \equiv 5^j$ , mas  $0 \leq i \neq j < \text{ord}_{2^k} 5$  o que é absurdo.  $\square$

**Problem 1.5.** Qual é o menor natural  $n$  para o qual existe  $k$  natural de modo que os 2026 últimos dígitos na representação decimal de  $n^k$  são iguais a 1?

*Proof.* Esse problema é cabuloso e não fui capaz de resolvê-lo sozinho, nem mesmo com dicas - a solução escrita aqui segue a da revista Eureka.

Note que a questão se resume a achar o menor  $n > 0$  tal que existe  $k$  satisfazendo

$$n^k \equiv \sum_{j=0}^{2025} 10^j \equiv \frac{10^{2026} - 1}{9} \equiv -1 \cdot 9^{-1} \pmod{10^{2026}},$$

equivalentemente, usando o Teorema Chinês dos Restos,

$$\begin{aligned} n^k &\equiv -9^{-1} \pmod{2^{2026}} \\ n^k &\equiv -9^{-1} \pmod{5^{2026}}. \end{aligned}$$

A ideia da prova é inicialmente restringir  $n$ , fazemos isso olhando para congruências simples. Vamos olhar módulo potências de 2. Como  $n^k$  deve terminar com 1, temos que  $n$  tem que ser ímpar. Olhando a primeira congruência módulo 8, temos

$$n^k \equiv -1 \pmod{8},$$

mas como todo número ímpar ao quadrado é 1 módulo 8, devemos ter que  $n \equiv -1 \pmod{8}$  e  $k \equiv 1 \pmod{2}$  ou seja  $k = 2l + 1$ . Olhando módulo 16, segue que  $n$  é congruente a 7 ou 15. Mas, se  $n$  fosse 15, teríamos  $15^{2l+1} \equiv -1 \equiv -9^{-1} \pmod{16}$ , o que é absurdo pois  $-1 \cdot -9 \equiv 9 \not\equiv 1 \pmod{16}$ . Portanto  $n \equiv 7 \pmod{16}$  e essa é nossa primeira congruência de importância.

Olhando módulo 5, vemos que  $n^{2l+1} \equiv -(-1)^{-1} \equiv 1 \pmod{5}$ , logo  $n \equiv 1 \pmod{5}$ . Isso segue, pois  $-1^{2l+1} \equiv -1$  e  $-3^{2l+1} \equiv 2^{2l+1} \in \{-2, 2\}$  portanto nem 2 e nem 3 podem ser tais que elevados a um ímpar dão  $-1 \pmod{5}$ .

Sabemos então que  $n \equiv 1 \pmod{5}$  e que  $n \equiv 7 \pmod{16}$ , resolvendo o sistema, temos que  $n \equiv 71 \pmod{80}$  e aqui devemos fazer um salto de fé e sonhar que 71 seja solução.

Vamos tentar calcular  $t_5 := \text{ord}_{5^{2026}} 71$  usando o problema anterior. Notamos que  $t_5 | \varphi(5^{2026}) = 4 \cdot 5^{2025}$ . Uma boa estratégia é entender o valor de  $\nu_5(71^s - 1)$ , se este for maior ou igual a 2026 temos que  $71^s \equiv 1 \pmod{5^{2026}}$ . Pelo primeiro item do exercício anterior [1.3], temos

$$\nu_5(71^s - 1) = \nu_5(s) + \nu_5(71 - 1) = \nu_5(s) + 1,$$

portanto, se  $s = 5^{2025}$ , vemos que

$$\nu_5(71^{5^{2025}} - 1) = 2026 \Rightarrow 71^{5^{2025}} \equiv 1 \pmod{5^{2026}},$$

mas, crucialmente, se  $s = 5^x$  com  $x < 2025$ , então  $\nu_5(71^{5^x} - 1) = x + 1 < 2026$ , e portanto  $t_5 \neq 5^x$ . Isso significa que temos  $t_5 = 5^{2025}$ .

Para calcular  $t_2 := \text{ord}_{2^{2026}} 71$  usaremos a mesma fatoração que no exercício anterior [2]. Como  $t_2 | \varphi(2^{2026}) = 2^{2025}$ ,  $t_2$  é da forma  $2^x$  para algum  $x \geq 1$ . Vamos calcular  $\nu_2(71^{2^x} - 1)$  usando a fatoração. Note que

$$\begin{aligned} (71^{2^x} - 1) &= (71 - 1) \cdot \prod_{j=0}^{x-1} (71^{2^j} + 1) = (71 - 1) \cdot (71 + 1) \cdot \prod_{j=1}^{x-1} (71^{2^j} + 1) \\ \nu_2(71^{2^x} - 1) &= \nu_2(70) + \nu(72) + \sum_{j=1}^{x-1} \nu_2(71^{2^j} + 1) \end{aligned}$$

Como  $71 \equiv -1 \pmod{8}$ , para qualquer  $x \geq 1$  vale que  $71^{2^x} = (-1^2)^{2^{x-1}} \equiv 1 \pmod{8}$ , ou seja  $71^{2^x} + 1 \equiv 2 \pmod{8}$ . Portanto  $\nu_2(71^{2^j} + 1) = 1$ . Substituindo na equação acima temos:

$$\nu_2(71^{2^x} - 1) = 1 + 3 + x - 1 = x + 3.$$

Assim como antes, segue que  $71^{2^{2023}} \equiv 1 \pmod{2^{2026}}$ , mas  $71^{2^x} \not\equiv 1 \pmod{2^{2026}}$  para qualquer  $x \leq 2022$ . Logo sabemos que  $t_2 = 2^{2023}$ .

Agora estamos quase prontos. Como  $71 \equiv 1 \pmod{5}$ ,  $t_5 = 5^{2025}$  e há exatamente  $5^{2025}$  números  $0 \leq m < 5^{2026}$  com  $m \equiv 1 \pmod{5}$ , segue que para cada um deles, existe  $0 \leq s < t_5$  com  $71^s \equiv m \pmod{5^{2025}}$ . Em particular, como  $\frac{-1}{9} \equiv 1 \pmod{5}$ , segue que existe  $0 \leq k_5 < t_5$  com

$$71^{k_5} \equiv -(9)^{-1} \pmod{5^{2026}}.$$

Da mesma forma,  $71 \equiv 7 \pmod{16}$ , portanto  $71^x \equiv \{1, 7\} \pmod{16}$ . Mas existem exatamente  $2^{2023}$  números  $0 \leq m < 2^{2026}$  com  $m \equiv \{1, 7\} \pmod{16}$ , portanto para cada um deles existe um único  $0 \leq s < t_2$  com  $71^s \equiv m \pmod{2^{2026}}$ . Em particular, como  $-1 \equiv 7 \cdot 9 \pmod{16}$ , segue que  $\frac{-1}{9} \equiv 7 \pmod{16}$  e existe  $0 \leq k_2 < t_2$  com

$$71^{k_2} \equiv -(9)^{-1} \pmod{2^{2026}}.$$

Como  $(t_2, t_5) = (2^{2023}, 5^{2025}) = 1$ , pelo teorema chinês dos restos, existe  $k > 0$  natural grande satisfazendo

$$\begin{aligned} 71^k &> 10^{2027} \\ k &\equiv k_2 \pmod{t_2} \\ k &\equiv k_5 \pmod{t_5} \end{aligned}$$

E por fim (graças a deus),

$$\begin{aligned} 71^k &= 71^{k_2+q \cdot t_2} \equiv -9^{-1} \pmod{2^{2026}} \\ 71^k &= 71^{k_5+r \cdot t_5} \equiv -9^{-1} \pmod{5^{2026}} \\ 71^k &\equiv \frac{10^{2026} - 1}{9} \equiv \underbrace{111 \dots 1}_{2026} \pmod{10^{2026}} \end{aligned}$$

Portanto,  $n = 71$ .

□

**Problem 1.6.** O símbolo de Legendre  $(\frac{a}{p})$  pode ser estendido para o símbolo de Jacobi  $(\frac{a}{n})$ , que está definido para  $a$  inteiro arbitrário e  $n$  inteiro positivo ímpar por  $(\frac{a}{n}) = (\frac{a}{p_1})^{\alpha_1} \dots (\frac{a}{p_k})^{\alpha_k}$  se  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$  é a fatoração prima de  $n$  (onde os  $(\frac{a}{p_j})$  são dados pelo símbolo de Legendre usual); temos  $(\frac{a}{1}) = 1$  para todo inteiro  $a$ .

Prove as seguintes propriedades do símbolo de Jacobi, que podem ser usadas para calcular rapidamente símbolos de Legendre (e de Jacobi):

1. Se  $a \equiv b \pmod{n}$  então  $(\frac{a}{n}) = (\frac{b}{n})$ .
2.  $(\frac{a}{n}) = 0$  se  $\gcd(a, n) \neq 1$  e  $(\frac{a}{p}) \in \{-1, 1\}$  se  $\gcd(a, n) = 1$ .
3.  $(\frac{ab}{n}) = (\frac{a}{n})(\frac{b}{n})$ ; em particular,  $(\frac{a^2}{n}) \in \{0, 1\}$ .
4.  $(\frac{a}{mn}) = (\frac{a}{m})(\frac{a}{n})$ ; em particular,  $(\frac{a}{n^2}) \in \{0, 1\}$ .
5. Se  $m$  e  $n$  são positivos e ímpares, então  $(\frac{m}{n}) = (-1)^{(m-1)/2 \cdot (n-1)/2} (\frac{n}{m})$ .

$$6. \left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{(n-1)/2}.$$

$$7. \left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{(n^2-1)/8} \text{ se } n \text{ é ímpar.}$$

*Proof.* (1) Note que se  $a \equiv b \pmod{n}$ , então  $a \equiv b \pmod{p_j}$  para todo  $1 \leq j \leq k$ . Pela propriedade usual do símbolo de Legendre,  $\left(\frac{a}{p_j}\right) = \left(\frac{b}{p_j}\right)$  para todo  $j$  e, portanto,

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{p_j}\right)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^r \left(\frac{b}{p_j}\right)^{\alpha_j} = \left(\frac{b}{n}\right).$$

(2) Se  $(a, n) \neq 1$ , então existe algum primo  $p_i$  tal que  $p_i \mid a$ , portanto  $\left(\frac{a}{p_i}\right) = 0$  e

$$\prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{p_j}\right)^{\alpha_j} = 0.$$

Por outro lado, se  $(a, n) = 1$ , então para todos os primos  $p_i$ , temos que  $p_i \nmid a$  e temos  $\left(\frac{a}{p_i}\right) \in \{-1, 1\}$ . Portanto

$$\prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{p_j}\right)^{\alpha_j} \in \{-1, 1\}.$$

(3) Basta abrir a conta e usar a propriedade dos símbolos usuais de Legendre,

$$\left(\frac{ab}{n}\right) = \prod_{j=1}^r \left(\frac{ab}{p_j}\right)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{p_j}\right)^{\alpha_j} \left(\frac{b}{p_j}\right)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{p_j}\right)^{\alpha_j} \prod_{j=1}^r \left(\frac{b}{p_j}\right)^{\alpha_j} = \left(\frac{a}{n}\right) \left(\frac{b}{n}\right).$$

(4) Sejam  $q_1 \dots q_r$  os primos que dividem  $n$  ou  $m$ . Escrevemos  $n = q_1^{\alpha_1} \dots q_r^{\alpha_r}$  e  $m = q_1^{\beta_1} \dots q_r^{\beta_r}$  onde os  $\alpha_i$  e  $\beta_j$  podem potencialmente ser 0. Temos

$$nm = q_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots q_r^{\alpha_r + \beta_r}$$

e logo

$$\left(\frac{a}{nm}\right) = \prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{q_j}\right)^{\alpha_j + \beta_j} = \prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{q_j}\right)^{\alpha_j} \prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{q_j}\right)^{\beta_j}.$$

Agora notamos que se  $q_j \nmid n$ , então  $\alpha_j = 0$  e se  $q_i \nmid m$ , então  $\beta_i = 0$ , então os produtórios acima se expressam como

$$\left(\frac{a}{nm}\right) = \prod_{q_j \mid n} \left(\frac{a}{q_j}\right)^{\alpha_j} \prod_{q_i \mid m} \left(\frac{a}{q_i}\right)^{\beta_i} = \left(\frac{a}{n}\right) \left(\frac{a}{m}\right).$$

(5) Esse é mais interessante, vamos usar reciprocidade quadrática e as propriedades anteriores. Primeiramente, note que por (2), a fórmula é válida se  $(m, n) \neq 1$ , já que tanto  $\left(\frac{m}{n}\right) = 0$  quanto  $\left(\frac{n}{m}\right) = 0$ . Podemos supor então que  $(m, n) = 1$ . Outro caso de interesse é que se  $a^2 \mid m$ , então  $m = a^2 m'$  e por (3),  $\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m'}{n}\right)$ . Já que o mesmo vale para o "denominador" do símbolo de Legendre, podemos supor ainda mais que  $m$  e  $n$  são livres de quadrados. Ou seja, podemos considerar (ad hoc) que suas fatorações são  $n = p_1 \dots p_l \cdot r_1 \dots r_k$  e  $m = q_1 \dots q_t \cdot s_1 \dots s_h$  onde os  $p_i \equiv q_j \equiv 1 \pmod{4}$ , os  $r_i \equiv s_j \equiv 3 \pmod{4}$  e os primos das fatorações são todos distintos.

Após todas nossas suposições, temos (usando a propriedade (3) e (4) várias vezes)

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{q_1 \dots q_t \cdot s_1 \dots s_h}{p_1 \dots p_l \cdot r_1 \dots r_k}\right) = \left(\frac{q_1 \dots q_t}{p_1 \dots p_l}\right) \left(\frac{s_1 \dots s_h}{r_1 \dots r_k}\right) \left(\frac{q_1 \dots q_t}{r_1 \dots r_k}\right) \left(\frac{s_1 \dots s_h}{p_1 \dots p_l}\right),$$

ou seja,

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{(q_i, p_j)} \left(\frac{q_i}{p_j}\right) \cdot \prod_{(s_i, p_j)} \left(\frac{s_i}{p_j}\right) \cdot \prod_{(q_i, r_j)} \left(\frac{q_i}{r_j}\right) \cdot \prod_{(s_i, r_j)} \left(\frac{s_i}{r_j}\right).$$

Pela lei da reciprocidade quadrática, se  $h$  é um primo com  $h \equiv 1 \pmod{4}$  e  $g$  é outro primo qualquer, então  $\left(\frac{h}{g}\right) = \left(\frac{g}{h}\right)$  e se ambos  $g$  e  $h$  forem congruentes a 3 módulo 4, então  $\left(\frac{h}{g}\right) = -\left(\frac{g}{h}\right)$ . Podemos usar isso na expressão acima para obter

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{(q_i, p_j)} \left(\frac{p_j}{q_i}\right) \cdot \prod_{(s_i, p_j)} \left(\frac{p_j}{s_i}\right) \cdot \prod_{(q_i, r_j)} \left(\frac{r_j}{q_i}\right) \prod_{(s_i, r_j)} -\left(\frac{r_j}{s_i}\right),$$

de forma que (juntando os produtórios)

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{kh} \left(\frac{n}{m}\right).$$

Para o resultado, basta mostrar que  $kh \equiv (n-1)/2 \cdot (m-1)/2 \pmod{2}$  (note que são inteiros uma vez que  $n$  e  $m$  são ímpares). Vamos olhar para  $n$  e  $m$  módulo 4, observamos que

$$n \equiv p_1 \dots p_l \cdot r_1 \dots r_k \equiv r_1 \dots r_k \equiv 3^k \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } k \equiv 0 \pmod{2} \\ 3 & \text{se } k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \pmod{4}$$

o resultado análogo segue para  $m$  e  $h$ . Disso já obtemos que se  $h$  ou  $k$  forem pares, então  $n$  ou  $m$  são 1 módulo 4, portanto  $(n-1)/2$  ou  $(m-1)/2$  é par e  $hk \equiv 0 \equiv (n-1)/2 \cdot (m-1)/2 \pmod{2}$ . Se ambos  $h$  e  $k$  forem ímpares, então  $n \equiv m \equiv 3 \pmod{4}$ , logo  $(n-1)/2$  e  $(m-1)/2$  são ímpares e  $hk \equiv 1 \equiv (n-1)/2 \cdot (m-1)/2 \pmod{2}$  concluindo a demonstração.

**(6)** Vamos fazer uma análise semelhante a **(5)**. Pelo observado anteriormente, podemos supor que  $n$  é livre de quadrados e se escreve  $n = p_1 \dots p_l \cdot r_1 \dots r_k$  com os  $p_i \equiv 1 \pmod{4}$  e  $r_i \equiv 3 \pmod{4}$ . Abrindo o símbolo de Jacobi, temos então

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = \prod_{p_i} \left(\frac{-1}{p_i}\right) \prod_{r_j} \left(\frac{-1}{r_j}\right).$$

Como  $\left(\frac{-1}{x}\right) = 1$  se  $x$  é primo e  $x \equiv 1 \pmod{4}$  e  $\left(\frac{-1}{x}\right) = -1$  se  $x$  for um primo com  $x \equiv 3 \pmod{4}$ , segue que

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^k$$

ou seja, para mostrar a igualdade, basta verificar que  $k \equiv (n-1)/2 \pmod{2}$  e já fizemos isso na prova da propriedade anterior.

**(7)** Seguindo a mesma ideia, vamos fatorar  $n$  de maneira esperta. Vimos que, sem perda de generalidade, podemos supor  $n$  livre de quadrados, então escrevemos a fatoração prima de  $n$  como

$$n = (p_1^+ p_2^+ \dots p_l^+) \cdot (p_1^- p_2^- \dots p_k^-) \cdot (q_1^+ q_2^+ \dots q_r^+) \cdot (q_1^- q_2^- \dots q_s^-)$$

onde cada  $p_i^+ \equiv 1 \pmod{8}$ ,  $p_i^- \equiv -1 \pmod{8}$ ,  $q_i^+ \equiv 3 \pmod{8}$  e  $q_i^- \equiv -3 \pmod{8}$ . Usando a propriedade **(4)**, temos

$$\left(\frac{2}{n}\right) = \prod_{p_i^+} \left(\frac{2}{p_i^+}\right) \cdot \prod_{p_i^-} \left(\frac{2}{p_i^-}\right) \cdot \prod_{q_i^+} \left(\frac{2}{q_i^+}\right) \cdot \prod_{q_i^-} \left(\frac{2}{q_i^-}\right).$$

Por reciprocidade quadrática, sabemos que para todo  $i$  vale  $\left(\frac{2}{p_i^+}\right) = \left(\frac{2}{p_i^-}\right) = 1$  e  $\left(\frac{2}{q_i^+}\right) = \left(\frac{2}{q_i^-}\right) = -1$ , portanto, a equação acima reduz-se para

$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{r+s}.$$

Para finalizar a demonstração, basta mostrar que  $r+s \equiv (n^2-1)/8 \pmod{2}$  ou, equivalentemente, desejamos mostrar

$$r+s \equiv 0 \pmod{2} \iff n \equiv \{-1, 1\} \pmod{8} \quad \text{e} \quad r+s \equiv 1 \pmod{2} \iff n \equiv \{-3, 3\} \pmod{8}.$$

Notamos primeiramente que

$$n = (p_1^+ p_2^+ \dots p_l^+) \cdot (p_1^- p_2^- \dots p_k^-) \cdot (q_1^+ q_2^+ \dots q_r^+) \cdot (q_1^- q_2^- \dots q_s^-) \equiv (1)^l \cdot (-1)^k \cdot (3)^r \cdot (-3)^s \pmod{8},$$

ou seja,  $n \equiv \varepsilon \cdot (3)^r \cdot (-3)^s \pmod{8}$  onde  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ . Agora para a análise de casos. Se  $r+s$  for par, então ou  $r$  e  $s$  são pares onde  $n \equiv \varepsilon \cdot 1 \cdot 1 \in \{-1, 1\} \pmod{8}$  ou  $r$  e  $s$  são ímpares e temos  $n \equiv \varepsilon \cdot 3 \cdot -3 \equiv -\varepsilon \in \{-1, 1\} \pmod{8}$ . Se, por outro lado,  $r+s$  for ímpar, então ou  $r$  é ímpar e  $s$  é par onde  $n \equiv \varepsilon \cdot 3 \cdot 1 \in \{3, -3\} \pmod{8}$  ou  $r$  é par e  $s$  é ímpar, onde também temos  $n \equiv \varepsilon \cdot 1 \cdot -3 \in \{3, -3\} \pmod{8}$ . O que conclui a demonstração.  $\square$

## 2 Lista 2 - 26/01/2026

**Problem 2.1.** Sejam  $a, n \in \mathbb{N}^*$  e considere a sequência  $(x_k)$  definida por  $x_1 = a, x_{k+1} = a^{x_k}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Demonstre que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{k+1} \equiv x_k \pmod{n}$  para todo  $k \geq N$ .

**Observation 2.1.** Note que, se  $a > 1$ , a sequência  $(x_k)$  é estritamente crescente já que  $x_{k+1} = a^{x_k} \geq 2^{x_k} > x_k$  e tende para infinito.

*Proof.* Caso  $a = 1$ , então o resultado segue pois  $x_k = 1$  para todo  $k$ . Vamos provar os outros casos por indução em  $n$ .

Caso  $a \neq 1$ . Para  $n = 1$  é óbvio, uma vez que  $x_k \equiv 0 \pmod{1}$  para todo  $k$  independente de  $a$ . Seja  $n > 1$  e suponha que vale para todo  $m < n$  i.e. existe  $N_m$  tal que se  $k \geq N_m$ , então  $x_{k+1} \equiv x_k \pmod{m}$ . Fatorando  $n$ , podemos supor que

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

com os  $p_i$  sendo primos distintos. Pelo Teorema Chinês dos Restos, o problema se resume a mostrar que existe  $N$  tal que para todo  $k \geq N$ , vale para todo  $i$ ,

$$x_{k+1} \equiv x_k \pmod{p_i^{\alpha_i}}.$$

Vamos encontrar um  $N_i$  para cada  $p_i$  e tomar  $N = \max\{N_i : 1 \leq i \leq r\}$ . Se  $(a, p_i) = p_i$ , temos  $a = p_i q$  e basta que  $x_k \geq \alpha_i$  para  $x_{k+1} = a^{x_k} = (p_i \cdot q)^{x_k} \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ . Como  $x_k \rightarrow \infty$ , existe  $N_i$  satisfazendo  $x_k \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$  para todo  $k \geq N_i$ . Por outro lado, se  $(a, p_j) = 1$ , podemos usar indutivamente o resultado para  $m = \varphi(p_j^{\alpha_j}) < n$  de onde segue que existe  $M_j$  tal que

$$x_{k+1} \equiv x_k \pmod{m = \varphi(p_j^{\alpha_j})} \quad \forall k \geq M_j,$$

portanto

$$x_{k+2} = a^{x_{k+1}} = a^{m \cdot t + x_k} \equiv a^{x_k} = x_{k+1} \pmod{p_j^{\alpha_j}} \quad \forall k \geq M_j$$

e portanto, podemos tomar  $N_j = M_j + 1$ . Tomando  $N$  o máximo dos  $N_i$ , segue que

$$\forall k \geq N, \forall 1 \leq i \leq r \quad x_{k+1} \equiv x_k \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

e, por fim,

$$x_{k+1} \equiv x_k \pmod{n} \quad \forall k \geq N$$

□

**Problem 2.2.** (a) Seja  $F_n = 2^{2^n} + 1$  o  $n$ -ésimo número de Fermat. Prove que todo fator primo de  $F_n$  é da forma  $k \cdot 2^{n+1}$ .

(b) Prove que, se  $n \geq 2$ , então todo fator primo de  $F_n$  é da forma  $k \cdot 2^{n+2} + 1$ .

(c) Mostre que  $2^{2^5} + 1$  é composto.

*Proof.* Vamos fazer o item (a) e (b) simultaneamente. Note que, se  $p \mid F_n$ , então  $p$  é ímpar e

$$2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p} \quad \wedge \quad 2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p},$$

logo  $t := \text{ord}_p 2 \mid 2^{n+1}$ , i.e  $t := 2^q$  com  $1 \leq q \leq 2^{n+1}$ . Agora usamos um truque já visto [2], escrevemos

$$2^{2^n} + 1 = 2^{2^n} - 1 + 2 = \prod_{m=0}^{n-1} (2^{2^m} + 1) + 2. \tag{3}$$

Vamos provar que  $q = n + 1$ . Se  $q \leq n$ , sabemos do fato que  $(2^{2^{q-1}})^2 \equiv 1 \pmod{p}$  e  $2^{2^{q-1}} \not\equiv 1 \pmod{p}$  que  $2^{2^{q-1}} \equiv -1 \pmod{p}$  e, portanto, tomando [3] módulo  $p$ , achamos

$$\prod_{m=0}^{n-1} (2^{2^m} + 1) + 2 \equiv 0 + 2 \not\equiv 0 \pmod{p}$$

absurdo, pois, por hipótese,  $p \mid F_n$ . Portanto  $q = n + 1$  e temos  $t = 2^{n+1}$ , logo  $t = 2^{n+1} \mid \varphi(p) = p - 1$  e segue a letra **(a)**,  $p = k \cdot 2^{n+1} + 1$ . Para a letra **(b)**, basta perceber que, caso  $n \geq 2$ , então, pela letra **(a)**,  $p \equiv 1 \pmod{8}$ , ou seja  $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ , logo  $2^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$  e segue (da mesma forma que antes) que  $t = 2^{n+1} \mid (p-1)/2$ , ou seja  $p = k \cdot 2^{n+2} + 1$ .

Para a parte **(c)**, usamos **(b)** e torcemos que achemos um fator rapidamente. Fazendo as contas vemos que  $k = 5$  funciona. Isso é

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

onde  $641 = 5 \cdot (2^7) + 1$ . Essas contas foram feitas nesse [script](#) que está no github.  $\square$

**Problem 2.3.** Seja  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$  um número real.

- (a) Prove que, se  $\text{ord}\alpha > 2$  então existe  $\lambda > 1$  tal que para infinitos inteiros positivos  $n$ , temos  $a_n \geq \lambda^n$ .
- (b) Prove que  $\text{ord}\alpha \geq 1 + \exp(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n+1)}{n})$ .
- (c) Prove que para todo  $c \geq 2$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\text{ord}\alpha = 1 + \exp(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n+1)}{n}) = c$ .
- (d) Determine  $\text{ord}\alpha$  se  $a_n = 2^n, \forall n \geq 0$ .

*Proof.* **(a)** Note que, como  $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq 2q_{n-2}$ , segue (por indução) que  $q_n \geq C2^{n/2}$  para alguma constante positiva  $C$ . Portanto, para  $1 < \gamma < \sqrt{2}$  e  $n$  suficientemente grande, vale que  $q_n \geq \gamma^n$  (na verdade, no pior caso,  $q_n$  cresce como a sequência de Fibonacci). Portanto, se  $\text{ord}\alpha > 2$ , segue que

$$\text{ord}\alpha - 2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} > \varepsilon > 0$$

para algum  $\varepsilon > 0$  e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log(\gamma^n)} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} > \varepsilon$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{n \log \gamma} > \varepsilon$$

i.e., existe sequência infinita  $(n_j)$  tal que

$$\frac{\log a_{n_j+1}}{n_j \log \gamma} > \varepsilon \quad \text{e} \quad a_{n_j+1} > (\gamma^\varepsilon)^{n_j}.$$

Como  $\gamma^\varepsilon > 1$ , tomado  $1 < \beta < \gamma^\varepsilon$ , segue que para  $n_j$  suficientemente grande,

$$a_{n_j+1} > (\gamma^\varepsilon)^{n_j} > \beta^{n_j+1},$$

finalizando a questão.

**(b)** Suponha, por absurdo, que  $\text{ord}\alpha < 1 + \exp(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n+1)}{n})$ , então existem  $\gamma, \gamma' \in \mathbb{R}$  tal que

$$2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} < \gamma' < \gamma < 1 + \exp(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n+1)}{n}). \quad (4)$$

Da primeira desigualdade e da propriedade do  $\limsup$  segue que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$

$$\frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} < \gamma' - 2 \quad \text{e} \quad \log a_{n+1} < (\gamma' - 2) \log q_n,$$

como  $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} < 2a_{n+1}q_n$ , segue que, para todo  $n \geq N$

$$\log q_{n+1} < \log 2 + \log a_{n+1} + \log q_n \leq \log(2) + (\gamma' - 1) \log q_n$$

Resolvendo a recorrência até  $N$ , temos para  $n > N$ ,

$$\log q_n < \log 2 \cdot \left( \sum_{m=0}^{n-N-1} (\gamma' - 1)^m \right) + (\gamma' - 1)^{n-N} \log q_N$$

ou seja, existe alguma constante positiva  $K \in \mathbb{R}$ , tal que, para todo  $n$  maior que  $N$ ,

$$\log q_n < K(\gamma' - 1)^n.$$

Pela segunda desigualdade de [4], segue que existe sequência  $(n_j)$  infinita, tal que para todo  $j$  vale

$$\exp\left(\frac{\log \log(a_{n_j} + 1)}{n_j}\right) > \gamma - 1$$

portanto

$$\log(a_{n_j} + 1) > (\gamma - 1)^{n_j},$$

pela concavidade do  $\log$ ,

$$\log a_{n_j} + 1 > \log a_{n_j} + \frac{1}{a_{n_j}} > \log(a_{n_j} + 1) > (\gamma - 1)^{n_j}$$

e sendo bem gastosos e supondo  $n_j$  suficientemente grande,

$$\log a_{n_j} > \frac{(\gamma - 1)^{n_j}}{2}.$$

Agora vamos calcular um lowerbound para  $\text{ord}\alpha$  usando essa sequência, segue que

$$\text{ord}\alpha > 2 + \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n_j}}{\log q_{n_j-1}} > 2 + \lim_{n_j \rightarrow \infty} \frac{(\gamma - 1)^{n_j}}{2K(\gamma' - 1)^{n_j-1}} = \infty.$$

o que é absurdo (na verdade provamos que deve ser que  $\text{ord}\alpha = \infty$ , de onde a desigualdade segue trivialmente).

Para (c), se  $c = 2$  basta tomar  $a_n = 1$  e o resultado segue. Caso  $c > 2$ , queremos  $a_n \in \mathbb{Z}$  tal que

$$1 + \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n + 1)}{n}\right) = c$$

desenvolvendo, uma alternativa seria

$$a_n + 1 = \exp \exp(n \log(c - 1)).$$

Para facilitar as contas, vamos tomar  $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots]$  para  $a_n$  sendo

$$a_n = \lceil \exp \exp(n \log(c - 1)) \rceil \in \mathbb{N}^*$$

e veremos que  $\text{ord}\alpha = c$ . Já sabemos que

$$\begin{aligned}\text{ord}\alpha &\geq 1 + \exp\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n + 1)}{n}\right) \\ &\geq 1 + \exp\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(\exp \exp(n \log(c - 1)))}{n}\right) \\ &\geq 1 + \exp\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \log(c - 1)\right) = c\end{aligned}$$

Para a outra desigualdade, lembramos que

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq a_n q_{n-1}$$

e portanto, por indução

$$\log q_n \geq \sum_{j=1}^n \log a_j$$

substituindo nossos valores e usando a soma da progressão aritmética, temos

$$\log q_n \geq \sum_{j=1}^n \exp(j \log(c - 1)) = \frac{\exp((n+1) \log(c-1)) - \exp(\log(c-1))}{\exp(\log(c-1)) - 1} = \frac{(c-1)^{n+1} - (c-1)}{c-2}.$$

Temos também que (para  $n$  suficientemente grande)

$$\log a_{n+1} \leq \log(2 \exp \exp((n+1) \log(c-1))) = \log(2) + \exp(n \log(c-1)) = \log(2) + (c-1)^{n+1}$$

Logo,

$$\text{ord}\alpha = 2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} \leq 2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(c-2)((c-1)^{n+1} + \log(2))}{(c-1)^{n+1} - (c-1)} = 2 + c - 2 = c.$$

**(d)** Basta usar o que já conhecemos. De  $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ , temos

$$\sum_{i=1}^n \log a_i \leq q_n \leq \sum_{i=1}^n \log(a_i + 1) \leq \sum_{i=1}^n \log(a_i + 1) \leq \sum_{i=1}^n \log(a_i) + \frac{1}{a_i}$$

portanto, se  $a_n = 2^n$ , segue

$$\frac{n(n-1) \log 2}{2} = \log 2 \left( \sum_{i=1}^n i \right) \leq \log q_n \leq \log 2 \left( \sum_{i=1}^n i \right) + 1 = \frac{n(n-1) \log 2}{2} + 1$$

ou seja  $\log q_n = \Theta(n^2)$ , substituindo na fórmula de  $\text{ord}\alpha$ , vemos

$$\text{ord}\alpha = 2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} = 2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \log 2}{\Theta(n^2)} = 2.$$

□

**Problem 2.4.** Seja  $\alpha = [a_0; a_1, a_2 \dots] \in \mathbb{R}$ . Prove que, se  $q_n \leq q < q_{n+1}$ ,  $(p, q) = 1$  e  $p/q \neq p_n/q_n$  então vale  $|p/q - \alpha| < 1/q^2$  se e somente se vale uma das seguintes condições:

- (i)  $\alpha_{n+1} \geq 2$ ,  $p/q = (p_{n+1} - p_n)/(q_{n+1} - q_n)$  e  $a_{n+1} + \beta_{n+1} - 2 < \alpha_{n+2}$  ou
- (ii)  $\alpha_{n+1} \geq 2$ ,  $p/q = (p_n + p_{n-1})/(q_n + q_{n-1})$  e  $(\alpha_{n+1} - 2)\beta_{n+1} < 1$ .

*Proof.* **RESOLUÇÃO INCOMPLETA.** Vou fazer só a volta que envolve somente manipulações feias. Suponha que vale (i), notamos primeiramente que

$$pq_{n+1} - qp_{n+1} = p_{n+1}q_{n+1} - p_nq_{n+1} - q_{n+1}p_{n+1} + q_np_{n+1} = q_np_{n+1} - p_nq_{n+1} = (-1)^n$$

logo  $(p, q) = 1$  e  $p/q \neq p_n/q_n$ . Temos também que

$$q_n \leq (a_{n+1} - 1)q_n \leq (a_{n+1} - 1)q_n + q_{n-1} = q = q_{n+1} - q_n < q_{n+1}$$

já que  $a_{n+1} \geq 2$ . Para estimar o erro da aproximação, notamos

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| &\leq \left| \alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| + \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+2} + \beta_{n+2})q_{n+1}^2} + \frac{|pq_{n+1} - qp_{n+1}|}{qq_{n+1}} \\ &= \frac{1}{(\alpha_{n+2} + \beta_{n+2})q_{n+1}^2} + \frac{1}{qq_{n+1}} = \frac{q + q_{n+1}(\alpha_{n+2} + \beta_{n+2})}{q(\alpha_{n+2} + \beta_{n+2})q_{n+1}^2} \\ &= \frac{q + q_{n+1}\alpha_{n+2} + q_n}{q(\alpha_{n+2} + \beta_{n+2})q_{n+1}^2} = \frac{\alpha_{n+2} + 1}{q(\alpha_{n+2} + \beta_{n+2})q_{n+1}} \end{aligned}$$

agora, essa última expressão é menor que  $1/q^2$  se e só se

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{n+2} + 1}{(\alpha_{n+2} + \beta_{n+2})q_{n+1}} &< \frac{1}{q} \\ q\alpha_{n+2} + q &< q_{n+1}\alpha_{n+2} + q_n \\ q_{n+1} &< q_n(\alpha_{n+2} + 2) \\ a_{n+1} + \beta_{n+1} &\leq \alpha_{n+2} + 2 \end{aligned}$$

o que finaliza a primeira parte.

Agora vamos supor que vale (ii). Notamos que  $q_n \leq q_n + q_{n-1} = q < a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$ , pois  $\alpha_{n+1} \geq 2$ . Além disso, temos

$$\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_nq_n + q_np_{n-1} - p_nq_n - q_{n-1}p_n}{qq_n} = \frac{(-1)^n}{qq_n},$$

portanto,  $(p, q) = 1$  (por causa do numerador) e  $p/q \neq p_n/q_n$ . É sabido que, sob essas condições,  $p/q \notin [p_n/q_n, p_{n+1}/q_{n+1}]$  e que para  $n$  par,  $p_n/q_n < \alpha \leq p_{n+1}/q_{n+1}$  e para  $n$  ímpar vale a desigualdade oposta,  $p_{n+1}/q_{n+1} \leq \alpha < p_n/q_n$ , a partir disso e da equação anterior, temos que

$$p_n/q_n < \alpha < p/q \text{ se } n \text{ par} \quad \text{e} \quad p/q < \alpha < p_n/q_n \text{ se } n \text{ ímpar.}$$

De qualquer maneira, vale que

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| &= \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| - \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2} \\ &= \frac{q_n(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) - q}{q(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2} = \frac{q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1} - q_n - q_{n-1}}{q(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2} \\ &= \frac{(\alpha_{n+1} - 1)}{q(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n} \end{aligned}$$

então, para a afirmação, basta mostrar que sob nossas condições,

$$\frac{\alpha_{n+1} - 1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n} < \frac{1}{q}$$

□

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} q\alpha_{n+1} - q &< (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n \\ q_{n-1}\alpha_{n+1} - q_n - q_{n-1} &< q_{n-1} \\ (\alpha_{n+1} - 2) &< \frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{1}{\beta_{n+1}} \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

**Problem 2.5.** Prove que se  $a$  e  $b$  são inteiros positivos tais que  $4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$ , então  $a = b$ .

*Proof.* Primeiramente, notamos que, sendo  $(4ab - 1, b) = 1$ , então

$$\begin{aligned} 4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2 &\iff 4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2 \cdot b^2 \\ &\iff 4ab - 1 \mid (4a^2b - b)^2 \\ &\iff 4ab - 1 \mid (a - b)^2 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N}, (a - b)^2 = (4ab - 1)k \end{aligned}$$

e portanto o problema é simétrico em relação as variáveis  $a, b$ . Suponha, sem perda de generalidade, que existe solução  $(a, b)$  com  $a > b$  e  $a$  mínimo. Segue que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$(a - b)^2 = (4ab - 1)k \quad \text{ou seja} \quad a^2 - (2b + 4bk)a + b^2 + k = 0,$$

note que  $a$  é solução de  $p(x) = x^2 - (2b + 4bk)x + b^2 + k = 0$ . Sabemos que existe outra solução  $a'$ , tal que  $p(a') = 0$  e

- (i)  $a' + a = 2b + 4bk$
- (ii)  $a' \cdot a = b^2 + k$

Agora, segue de (i) que  $a' \in \mathbb{Z}$  e segue de (ii) que  $a' = \frac{b^2+k}{a} > 0$ , logo  $a' \in \mathbb{N}$ . Como  $p(a') = 0$ , segue que  $(a', b)$  é solução também. Sendo  $k = (a - b)^2/(4ab - 1)$ , segue que

$$a' = \frac{b^2 + \frac{(a-b)^2}{(4ab-1)}}{a} < b + \frac{a^2}{3a^2} = b + \frac{1}{3}$$

portanto,  $a' \leq b$ . Agora, se  $a' = b$ , então, por (i)  $b \mid a$  e por (ii)  $b \mid k$ , logo  $(a/b, 1)$  é uma solução menor o que é absurdo. Se  $a' < b$ , temos que  $(b, a')$  é uma solução menor e também temos absurdo.  $\square$

**Problem 2.6.** Demonstre que  $2x^2 - 219y^2 = -1$  não tem soluções inteiras, mas  $2x^2 - 219y^2 \equiv -1 \pmod{m}$  tem soluções para todo inteiro positivo  $m$ .

*Proof.* Para a primeira parte, suponha que existe solução  $(x_0, y_0) \in \mathbb{N}^2$  com  $x_0$  mínimo. Segundo a dica, notamos que  $(x_1, y_1) = (|293x_0 - 3066y_0|, |-28x_0 + 293y_0|)$ , pois

$$\begin{aligned} 2(293x_0 - 3066y_0)^2 - 219(-28x_0 + 293y_0)^2 &= \\ [2(293)^2 - 219(28)^2]x_0^2 - [219(293)^2 - 2(3066)^2]y_0^2 + [219(2(28)(293)) - 2(2(293)(3066))]x_0y_0 &= \\ 2x_0^2 - 219y_0^2 &= -1 \end{aligned}$$

(óbviamente). Agora, segue de  $x_0$  ser minimal que  $x_0 \leq x_1$  e portanto,

$$x_0 \leq 293x_0 - 3066y_0 \quad \vee \quad x_0 \leq 3066y_0 - 293x_0$$

que é equivalente a

$$x_0 \geq \frac{3066}{292} y_0 \quad \vee \quad x_0 \leq \frac{3066}{294} y_0$$

mas verificamos que para  $2x_0^2 - 219y_0^2 = -1$ , devemos ter

$$x_0^2 - \frac{219}{2} y_0^2 + \frac{1}{2} = 0$$

ou seja, como estamos tomando  $x_0$  positivo,

$$\sqrt{\frac{218}{2}} y_0 < x_0 = \sqrt{\frac{219y_0^2 - 1}{2}} < \sqrt{\frac{219}{2}} y_0$$

mas, usando uma calculadora,

$$(10.42\dots) y_0 = \frac{3066}{294} y_0 < 10.4402 y_0 < \sqrt{\frac{218}{2}} y_0 < x_0 < \sqrt{\frac{219}{2}} y_0 < 10.4643 y_0 < \frac{3066}{292} y_0 = 10.5 y_0$$

absurdo.

Para a segunda parte (mostrar que admite solução módulo  $m$ ), vamos separar em casos.

Caso  $m$  primo: se  $m = 2$ , então  $(0, 1)$  é solução; se  $m = 3$ , então  $(1, 0)$  é solução; se  $m = 73$ ,  $(6, 1)$  é solução. Se  $m$  é qualquer outro primo, então  $(m, 2) = 1$  e  $(m, 219) = 1$  e portanto queremos achar soluções módulo  $m$  para

$$2x^2 \equiv 219y^2 - 1 \pmod{m}.$$

Agora note que se definimos a função  $f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$  dada por  $f(x) = 2x^2 \pmod{m}$ , segue, como há exatamente  $(m-1)/2$  resíduos quadráticos, que  $|f(\mathbb{Z}_m)| = (p+1)/2$ . Da mesma forma, definindo  $g : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$  dada por  $g(y) = 219y^2 - 1$ , temos  $|g(\mathbb{Z}_m)| = (p+1)/2$ . Pelo princípio da casa dos pombos, existe  $(x, y) \in (\mathbb{Z}_m)^2$  tal que  $f(x) = g(y)$  e portanto solução  $\pmod{m}$ .

Caso  $m = p^\alpha$  para  $p$  primo e  $\alpha > 1$ : seguindo a ideia do Joseph, vamos tentar provar por indução em  $\alpha$ . Seja  $(x, y)$  solução para

$$2x^2 - 219y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^\alpha} \quad \text{ou seja} \quad 2x^2 - 219y^2 + 1 = kp^\alpha$$

Se  $k \equiv 0 \pmod{p}$ , já temos o resultado. Podemos supor que  $k \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Vamos olhar para as soluções  $\pmod{p^\alpha}$  dadas por  $(x + ap^\alpha, y + bp^\alpha)$  para  $a, b \in \mathbb{Z}$ , note que

$$\begin{aligned} 2(x + ap^\alpha)^2 - 219(y + bp^\alpha)^2 + 1 &\equiv (2x^2 - 219y^2 + 1) + (4xap^\alpha - 437ybp^\alpha) \pmod{p^{\alpha+1}} \\ &\equiv kp^\alpha + p^\alpha(4xa - 438yb) \pmod{p^{\alpha+1}} \\ &\equiv p^\alpha(k + 4xa - 438yb) \pmod{p^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

então basta que  $k + 4xa - 438yb \equiv 0 \pmod{p}$ . Se  $(4x, p) = 1$ , então independente do valor de  $b$  e  $k$ , sempre conseguimos achar  $a$  que satisfaz a equação. Se  $(4x, p) = p$ , ou  $p = 2$  ou  $p \mid x$ . Se  $p \mid x$ ,

$$219y^2 \equiv 2x^2 - 219y^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

e portanto  $(p, y) = 1$ , donde segue que sempre podemos escolher  $b$  a fim de satisfazer a equação. Caso  $p = 2$  e  $\alpha = 2$ , então  $(1, 1)$  é solução, se  $\alpha \geq 3$ , buscamos soluções levemente diferentes. Olhemos para  $(x + a2^{\alpha-1}, y + b2^{\alpha-1})$  com  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Repetindo a conta anterior, temos

$$\begin{aligned} 2(x + a2^{\alpha-1})^2 - 219(y + b2^{\alpha-1})^2 + 1 &\equiv (2x^2 - 219y^2 + 1) + ax2^{\alpha+1} + a^22^{2\alpha-1} - 219yb2^\alpha - 219b^22^{2\alpha-2} \\ &\equiv 2^\alpha(k - 219yb) \pmod{2^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

mas já estamos supondo  $k$  ímpar e  $y \equiv 1 \pmod{2}$  pois  $2x^2 - 219y^2 \equiv 1 \pmod{2}$ . Portanto  $k - 219y \equiv 0 \pmod{2}$  e tomado  $b = 1$  temos solução.

Agora moralmente terminamos, pois para  $m = p^\alpha$  com  $p$  primo sempre conseguimos solução e basta usar o Teorema Chinês dos Restos. Se  $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$  com os  $p_j$  primos distintos, então, para cada  $i$ , encontramos solução

$$2x_i^2 - 219y_i^2 \equiv -1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

aplicando o TCM nos sistemas

$$x \equiv x_i \pmod{p_i^{\alpha_i}} \quad \wedge \quad y \equiv y_i \pmod{p_i^{\alpha_i}} \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

encontramos  $x \in \mathbb{Z}_m$  e  $y \in \mathbb{Z}_m$  tal que

$$2x^2 - 219y^2 \equiv -1 \pmod{m}$$

□