

Listas de Teoria dos Números

Aluno: Henrique Lima Cardoso

January 30, 2026

Contents

0	Introdução	1
0.1	Notação	1
1	Lista 1 - 12/1/2026	2
2	Lista 2 - 26/01/2026	12

0 Introdução

Ao decorrer do curso, vou escrever minhas resoluções dos exercícios nesse arquivo. Tem alguns motivos para isso:

1. Posso reutilizar resultados passados.
2. Está tudo organizado se um futuro henrique quiser rever.

O código fonte pode ser encontrado em <https://github.com/hnrq104/tn>.

0.1 Notação

Até agora encontrei os seguintes usos de notação não convencional:

- $x \equiv \{a_1, a_2, \dots\} \pmod{c}$ - significa que x é congruente a um elemento do conjunto $\{a_i\}$.
- $x \equiv \frac{a}{b} \pmod{m}$ - significa que $x \equiv ab^{-1} \pmod{m}$.

1 Lista 1 - 12/1/2026

Problem 1.1. Dados inteiros positivos a, b e c , dois a dois primos entre si, demonstre que $2abc - ab - bc - ca$ é o maior número inteiro que não pode expressar-se na forma $xbc + yca + zab$ com x, y e z inteiros não negativos.

Proof. Note que como $(b, c) = 1$, temos que $(ab, ac) = a$ e, portanto por Bachét-Bezout existe solução para $z'ab + y'ca = a$ com z', y' inteiros. Por sua vez, como $(a, bc) = 1$, existe solução para $ma + nbc = 1$ com m, n inteiros. Juntando as duas equações, encontramos $mz'ab + my'ca + nbc = 1$ que é solução para a equação $xbc + yca + zab = 1$ e, portanto, temos soluções para $xbc + yca + zab = k$ para qualquer inteiro k .

Vamos mostrar que $2abc - ab - bc - ca$ não pode ser escrito como $xbc + yca + zab$ para $x, y, z \in \mathbb{N}$. Suponha, que conseguimos, temos

$$\begin{aligned} 2abc - ab - bc - ca &= xbc + yca + zab \\ 2abc &= (x+1)bc + (y+1)ca + (z+1)ab \end{aligned}$$

tomando a segunda equação módulo a , achamos

$$0 \equiv (x+1)bc \pmod{a} \Rightarrow x+1 \equiv 0 \pmod{a}$$

ou seja, $a \mid (x+1)$. Como $x \geq 0$, devemos ter $(x+1) \geq a$. Simetricamente (tomando módulo b e depois c), sabemos que $(y+1) \geq b$ e $(z+1) \geq c$. Mas já encontramos contradição, uma vez que essas desigualdades implicam

$$(x+1)bc + (y+1)ca + (z+1)ab \geq abc + bca + cab = 3abc > 2abc$$

Agora seja $n > 2abc - bc - ac - ab$, mostraremos que existe solução natural para $n = xbc + yca + zab$. Primeiro, vamos caracterizar as soluções inteiras, que existem pela observação anterior. Note que se (x, y, z) e (x', y', z') são soluções, então

$$(x - x')bc + (y - y')ca + (z - z')ab = 0 \tag{1}$$

tomando a equação módulo a , vemos que $(x - x') \equiv 0 \pmod{a}$ e portanto $x' = x + ra$ para algum $r \in \mathbb{Z}$. Simetricamente, vemos que $y' = y + sb$ e $z' = z + tc$ para $s, t \in \mathbb{Z}$. Portanto, [1] se expressa como

$$(ra)bc + (sb)ac + (tc)ab = (r + s + t)abc = 0 \iff (r + s + t) = 0$$

Ou seja, se (x_0, y_0, z_0) é uma solução inicial, todas as outras soluções são da forma $(x_0 + ra, y_0 + sb, z_0 + tc)$ onde $r + s + t = 0$, é fácil ver que qualquer tripla dessa forma também satisfaz a equação original. Nosso problema se resume então a encontrar soluções inteiras (r, s, t) para a seguinte série de relações:

$$\begin{aligned} x_0 + ra &> -1 \\ y_0 + sb &> -1 \\ z_0 + tc &> -1 \\ r + s + t &= 0 \end{aligned}$$

Isolando as variáveis e escrevendo t como $-(r + s)$, temos

$$\begin{aligned} -\frac{(x_0 + 1)}{a} &< r \\ -\frac{(y_0 + 1)}{b} &< s \\ r + s &< \frac{(z_0 + 1)}{c} \end{aligned}$$

As duas primeiras desigualdades, implicam que

$$-\left(\frac{(x_0+1)}{a} + \frac{(y_0+1)}{b}\right) < r+s < \frac{(z_0+1)}{c}$$

Notamos (seguindo a resolução do livro para um problema similar) que

$$\frac{(z_0+1)}{c} - \left(\frac{(x_0+1)}{a} + \frac{(y_0+1)}{b}\right) = \frac{(z_0+1)}{c} + \frac{(x_0+1)}{a} + \frac{(y_0+1)}{b} = \frac{n+bc+ac+ab}{abc} > 2$$

pois $n > 2abc - bc - ac - ab$. Segue que o intervalo $\left(-\frac{(x_0+1)}{a} - \frac{(y_0+1)}{b}, \frac{(z_0+1)}{c}\right)$ tem ao menos dois inteiros.

Tomando

$$r = \begin{cases} \lceil -(x_0+1)/a \rceil & \text{se } -(x_0+1)/a \notin \mathbb{Z} \\ \lceil -(x_0+1)/a \rceil + 1 & \text{se } -(x_0+1)/a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e s análoga, sendo

$$s = \begin{cases} \lceil -(y_0+1)/b \rceil & \text{se } -(y_0+1)/b \notin \mathbb{Z} \\ \lceil -(y_0+1)/b \rceil + 1 & \text{se } -(y_0+1)/b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

achamos soluções (r, s, t) compatíveis com o sistema de desigualdades. □

Problem 1.2. Seja p um número primo ímpar. Seja s o menor inteiro positivo que não é resíduo quadrático módulo p .

(a) Mostre que $p > s^2 - s$.

(b) Suponha que $p > 5$ e que -1 seja resíduo quadrático módulo p : mostre que $p > 2s^2 - s$.

Proof. (a) Como 1 é sempre resíduo quadrático, sabemos que $s \geq 2$. Notamos que, pela propriedade multiplicativa dos símbolos de Legendre, para todo $1 \leq k \leq (s-1)$, vale que

$$\left(\frac{ks}{p}\right) = \left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{s}{p}\right) = 1 \cdot -1 = -1.$$

Isto é, nenhum dos números $\{s, 2s, \dots, (s-1)s\}$ são resíduos quadráticos. Como p é um primo ímpar, temos que ao menos $(p-1)/2$ elementos de \mathbb{Z}_p não são resíduos quadráticos, logo $p > s$. Suponha que $p < s(s-1)$, então existe $1 \leq k < (s-1)$ tal que

$$sk < p < s(k+1).$$

Isso é, $s(k+1) = p + r$ onde $0 < r < s$ e temos $s(k+1) \equiv r \pmod{p}$. Portanto $-1 = \left(\frac{s(k+1)}{p}\right) = \left(\frac{r}{p}\right) = 1$, absurdo. □

Proof. (b) Segue muito similarmente da letra anterior. Note que como $p > 5$, se $s = 2$, $p > 2 \cdot 2^2 - 2 = 6$, já que o próximo primo ímpar é 7. Podemos supor que $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ e $s > 2$. Já que temos $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, sabemos que para todo $1 \leq k \leq (s-1)$,

$$\left(\frac{-2sk}{p}\right) = \left(\frac{2sk}{p}\right) = -1.$$

Agora suponha que $p < 2s^2 - s$ ou, posto de forma mais instrutiva, $p < 2s(s-1) + s$. Então existe $1 \leq k \leq (s-1)$ tal que

$$p \in (2sk - s, 2sk + s).$$

Note que como p é um primo maior que s , ele não pode estar nas bordas destes intervalos (que são múltiplas de s). Se vale que $2sk - s < p < 2sk$, então $2sk = p + r$ onde $0 < r < s$, logo $-1 = \left(\frac{2ks}{p}\right) = \left(\frac{r}{p}\right) = 1$, o que é absurdo. Se por outro lado, vale que $2sk < p < 2sk + s$, então podemos escrever $2sk = p - r$ onde $0 < r < s$ e $2sk \equiv -r \pmod{p}$, teríamos $-1 = \left(\frac{2ks}{p}\right) = \left(\frac{-r}{p}\right) = 1$, absurdo também. \square

A seguinte definição será útil para os próximos dois problemas.

Definition 1.1. Dado p primo e $n \neq 0$ inteiro,

$$\nu_p(n) = \max\{\alpha \in \mathbb{N} : p^\alpha \mid n\}$$

Problem 1.3. Seja p um primo ímpar, a um inteiro e n um inteiro positivo. Sejam α e β inteiros negativos, com $\alpha > 0$. Prove:

- (a) Se p^β e p^α são as maiores potências de p que dividem n e $a - 1$ respectivamente então $p^{\alpha+\beta}$ é a maior potência que divide $a^n - 1$.
- (b) Se n é ímpar e p^β e p^α são as maiores potências de p que dividem n e $a + 1$ respectivamente então $p^{\alpha+\beta}$ é a maior potência de p que divide $a^n + 1$.

Proof. **(a)** Considere o caso particular $\nu_p(a-1) = \alpha > 0$ e $\nu_p(n) = \beta = 0$, queremos mostrar que $\nu_p(a^n - 1) = \alpha$, temos

$$\begin{aligned} a^n - 1 &= (a - 1) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} a^j \right) \\ \nu_p(a^n - 1) &= \nu_p(a - 1) + \nu_p\left(\sum_{j=0}^{n-1} a^j \right) = \alpha + \nu_p\left(\sum_{j=0}^{n-1} a^j \right) \end{aligned}$$

então basta mostrar que $\nu_p\left(\sum_{j=0}^{n-1} a^j \right) = 0$. Verificamos que, como $\nu_p(a - 1) > 0$, $p \mid (a - 1)$, ou seja $a \equiv 1 \pmod{p}$. Mas então

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^j \equiv \sum_{j=0}^{n-1} 1 \equiv n \not\equiv 0 \pmod{p},$$

ou seja $p \nmid \sum_{j=0}^{n-1} a^j$ e $\nu_p\left(\sum_{j=0}^{n-1} a^j \right) = 0$.

Vamos provar indutivamente para $n = p^\beta$, $\beta \geq 1$, o caso base principal é $n = p$. Queremos mostrar que $\nu_p(a^p - 1) = \nu_p(a - 1) + 1$, ou seja, como antes, que $\nu_p\left(\sum_{j=0}^{p-1} a^j \right) = 1$. Como $\nu_p(a - 1) = \alpha$, escrevemos $a = p^\alpha s + 1$ com $(p, s) = 1$. O somatório se traduz como $\left(\sum_{j=0}^{p-1} (p^\alpha s + 1)^j \right)$. Se $\alpha \geq 2$, segue que

$$\sum_{j=0}^{p-1} (p^\alpha s + 1)^j \equiv \sum_{j=0}^{p-1} 1 \equiv p \pmod{p^2}$$

logo $p \mid \sum_{j=0}^{p-1} (p^\alpha s + 1)^j$, mas p^2 não, e portanto $\nu_p\left(\sum_{j=0}^{p-1} a^j \right) = 1$. Se $\alpha = 1$, temos

$$\sum_{j=0}^{p-1} (ps + 1)^j \equiv \sum_{j=0}^{p-1} (1 + jps) \equiv p + ps \cdot (p(p-1)/2) \equiv p \pmod{p^2}$$

e o resultado segue também.

Para o passo indutivo, suponha que o resultado vale para $\beta \geq 1$ e seja $n = p^{\beta+1}$. Então,

$$a^n - 1 = a^{p^{\beta+1}} - 1 = (a^p)^{p^\beta} - 1,$$

por indução com os parâmetros $(a = a^p)$ e $(n = p^\beta)$, temos

$$\nu_p(a^n - 1) = \nu_p(a^p - 1) + \nu_p(p^\beta) = \nu_p(a - 1) + 1 + \beta = \nu_p(a - 1) + \nu_p(p^{\beta+1}),$$

o que prova a afirmação.

Já temos o suficiente para o caso geral, suponha que $\nu_p(a - 1) = \alpha \geq 1$ e $\nu_p(n) = \beta$, de onde $n = p^\beta \cdot k$ com $(p, k) = 1$. Então

$$a^n - 1 = (a^{p^\beta})^k - 1 = (a^{p^\beta} - 1) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} (a^{p^\beta})^j \right),$$

já sabemos que $\nu_p((a^{p^\beta} - 1)) = \alpha + \beta$, então basta mostrar que o somatório não é divisível por p . Notamos, pelo teorema de Fermat, que para qualquer $\beta \geq 1$,

$$a^{p^\beta} = (a^p)^{p^{\beta-1}} \equiv a^{p^{\beta-1}} \pmod{p},$$

ou seja $a^{p^\beta} \equiv a \pmod{p}$, mas $a \equiv 1 \pmod{p}$ pois $\nu_p(a - 1) \geq 1$. No somatório, isso se traduz como

$$\sum_{j=0}^{k-1} (a^{p^\beta})^j \equiv \sum_{j=0}^{k-1} 1 \equiv k \not\equiv 0 \pmod{p},$$

pois $(k, p) = 1$. Isto finaliza a demonstração. \square

A prova do segundo item é quase que idêntica a do primeiro, só fazemos uso da outra fatoração usual. Serei um pouco mais sucinto.

Proof. **(b)** Caso $\nu_p(n) = \beta = 0$ e $\nu_p(a + 1) = \alpha \geq 1$. Escrevemos

$$a^n + 1 = (a + 1) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^j \right) \Rightarrow \nu_p(a^n + 1) = \alpha + \nu_p\left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^j \right)$$

como $\alpha \geq 1$, $a \equiv -1 \pmod{p}$, ou seja

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^j \equiv \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{2j} \equiv n \not\equiv 0 \pmod{p}$$

e portanto $\nu_p\left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^j \right) = 0$.

Caso $n = p$, $\nu_p(a + 1) = \alpha \geq 1$. Como no caso anterior, basta mostrar que $\nu_p\left(\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j a^j \right) = 1$. Escrevemos $a = p^\alpha s - 1$ com $(p, s) = 1$. Substituindo no somatório,

$$\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j a^j = \sum_{j=0}^{p-1} (-p^\alpha s + 1)^j \equiv p + p^\alpha s \cdot (p(p-1)/2) \equiv p + p^{\alpha+1}(p-1)/2 \pmod{p^{2\alpha}}$$

como $\alpha \geq 1$ e p é ímpar, tomando a última equivalência módulo p^2 vemos que $\left(\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j a^j \right) \equiv p \pmod{p^2}$, e isso nos dá o resultado que queríamos.

Caso $n = p^{\beta+1}$ com $\beta \geq 1$, $\nu_p(a + 1) = \alpha \geq 1$. Exatamente como antes, suponha, por indução, que o resultado é válido para $n = p^\beta$, segue que

$$\nu_p(a^n + 1) = \nu_p\left((a^p)^{p^\beta} + 1 \right) = \nu_p(a^p + 1) + \nu_p(p^\beta) = \alpha + 1 + \beta.$$

onde usamos o caso anterior da prova na última igualdade.

Caso $n = p^\beta k$ com $(k, p) = 1$ e $\beta \geq 1$, $\nu_p(a+1) = \alpha \geq 1$. Escrevemos (como no item anterior),

$$a^n + 1 = (a^{p^\beta} + 1) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-a^{p^\beta})^j \right).$$

Pelo caso indutivo, já sabemos que $\nu_p(a^{p^\beta} + 1) = \alpha + \beta$, basta mostrar que $\sum_{j=0}^{k-1} (-a^{p^\beta})^j \not\equiv 0 \pmod{p}$. Mas, pela mesma observação de antes, se $\beta \geq 1$, $a^{p^\beta} \equiv a \pmod{p}$ e, como $a \equiv -1 \pmod{p}$, temos

$$\sum_{j=0}^{k-1} (-a^{p^\beta})^j \equiv \sum_{j=0}^{k-1} (-1 \cdot -1)^j \equiv k \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

O que completa a demonstração. \square

Problem 1.4. (a) Prove que $\text{ord}_{2^k} 5 = 2^{k-2}$, para todo $k \geq 2$.

(b) Prove que se a é um inteiro ímpar e $k \geq 2$ então existem $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ e $j \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq j < 2^{k-2}$, unicamente determinados, tais que $a \equiv \varepsilon_j \cdot 5^j \pmod{2^k}$.

Proof. (a) Vamos provar por indução em k . O resultado é claro para $k = 2$ pois $5 \equiv 1 \pmod{4}$. Suponha que vale para $k \geq 2$, vamos provar para $k + 1$. Isto é, queremos mostrar que $t = \text{ord}_{2^{k+1}} 5 = 2^{k-1}$, sabemos que

$$\text{ord}_{2^k} 5 \mid t = \text{ord}_{2^{k+1}} 5 \mid \varphi(2^{k+1}) = 2^k \Rightarrow t \in \{2^{k-2}, 2^{k-1}, 2^k\}.$$

Como 5 não é raiz primitiva módulo 4, não pode ser raiz primitiva módulo 2^k para $k \geq 2$. Logo $t \in \{2^{k-2}, 2^{k-1}\}$ e basta mostrar que $5^{2^{k-2}} \not\equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$. Para isso, vamos calcular $\nu_2(5^{2^{k-2}} - 1)$. Vamos usar uma fatoração esperta, repetindo o fato que $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, temos

$$(5^{2^{k-2}} - 1) = (5^{2^{k-3}} + 1)(5^{2^{k-4}} + 1) \dots (5^2 + 1)(5 + 1)(5 - 1) = 4 \cdot \prod_{j=0}^{k-3} (5^{2^j} + 1). \quad (2)$$

Como $5 \equiv 1 \pmod{4}$, para qualquer número par s , $5^s \equiv 1 \pmod{4}$ e portanto $5^s + 1 \equiv 2 \pmod{4}$. Em particular, $\nu_2(5^s + 1) = 1$. Usando esse fato na expressão acima, temos

$$\nu_2(5^{2^{k-2}} - 1) = \nu_2(4) + \sum_{j=0}^{k-3} \nu_2(5^{2^j} + 1) = 2 + k - 2 = k.$$

Portanto $2^{k+1} \nmid 5^{2^{k-2}} - 1$, ou seja $5^{2^{k-2}} \not\equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$. \square

Proof. (b) Essa prova é um belo problema de contagem. Note que como $5 \equiv 1 \pmod{4}$, para todo k , $5^k \equiv 1 \pmod{4}$. No entanto, para $k \geq 2$, há exatamente $2^k/4$ classes de equivalência módulo 2^k que são congruentes a 1 módulo 4. Como $\text{ord}_{2^k} 5 = 2^{k-2} = 2^k/4$, segue que

$$\{5^k \pmod{2^k} : 0 \leq k \leq \text{ord}_{2^k} 5 = 2^{k-2}\} = \{\bar{a} \pmod{2^k} : a \equiv 1 \pmod{4}\}.$$

Particularmente, se $a \equiv 1 \pmod{4}$, então existe um único $0 \leq j \leq 2^{k-2}$ tal que $5^j \equiv a \pmod{2^k}$. Caso $a \equiv -1 \pmod{4}$, então existe um único $0 \leq j \leq 2^{k-2}$ tal que $5^j \equiv -a \pmod{2^k}$, logo $a \equiv -5^j \pmod{2^k}$. Note que os pares (ε_j, j) estão unicamente determinados pois, se $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ então $\varepsilon_i 5^i \not\equiv \varepsilon_j 5^j \pmod{4}$ e se $\varepsilon_i = \varepsilon_j$, então $5^i \equiv 5^j$, mas $0 \leq i \neq j < \text{ord}_{2^k} 5$ o que é absurdo. \square

Problem 1.5. Qual é o menor natural n para o qual existe k natural de modo que os 2026 últimos dígitos na representação decimal de n^k são iguais a 1?

Proof. Esse problema é cabuloso e não fui capaz de resolvê-lo sozinho, nem mesmo com dicas - a solução escrita aqui segue a da [revista Eureka](#).

Note que a questão se resume a achar o menor $n > 0$ tal que existe k satisfazendo

$$n^k \equiv \sum_{j=0}^{2025} 10^j \equiv \frac{10^{2026} - 1}{9} \equiv -1 \cdot 9^{-1} \pmod{10^{2026}},$$

equivalentemente, usando o Teorema Chinês dos Restos,

$$\begin{aligned} n^k &\equiv -9^{-1} \pmod{2^{2026}} \\ n^k &\equiv -9^{-1} \pmod{5^{2026}}. \end{aligned}$$

A ideia da prova é inicialmente restringir n , fazemos isso olhando para congruências simples. Vamos olhar módulo potências de 2. Como n^k deve terminar com 1, temos que n tem que ser ímpar. Olhando a primeira congruência módulo 8, temos

$$n^k \equiv -1 \pmod{8},$$

mas como todo número ímpar ao quadrado é 1 módulo 8, devemos ter que $n \equiv -1 \pmod{8}$ e $k \equiv 1 \pmod{2}$ ou seja $k = 2l + 1$. Olhando módulo 16, segue que n é congruente a 7 ou 15. Mas, se n fosse 15, teríamos $15^{2l+1} \equiv -1 \equiv -9^{-1} \pmod{16}$, o que é absurdo pois $-1 \cdot -9 \equiv 9 \not\equiv 1 \pmod{16}$. Portanto $n \equiv 7 \pmod{16}$ e essa é nossa primeira congruência de importância.

Olhando módulo 5, vemos que $n^{2l+1} \equiv -(-1)^{-1} \equiv 1 \pmod{5}$, logo $n \equiv 1 \pmod{5}$. Isso segue, pois $-1^{2l+1} \equiv -1$ e $-3^{2l+1} \equiv 2^{2l+1} \in \{-2, 2\}$ portanto nem 2 e nem 3 podem ser tais que elevados a um ímpar dão $-1 \pmod{5}$.

Sabemos então que $n \equiv 1 \pmod{5}$ e que $n \equiv 7 \pmod{16}$, resolvendo o sistema, temos que $n \equiv 71 \pmod{80}$ e aqui devemos fazer um salto de fé e sonhar que 71 seja solução.

Vamos tentar calcular $t_5 := \text{ord}_{5^{2026}} 71$ usando o problema anterior. Notamos que $t_5 \mid \varphi(5^{2026}) = 4 \cdot 5^{2025}$. Uma boa estratégia é entender o valor de $\nu_5(71^s - 1)$, se este for maior ou igual a 2026 temos que $71^s \equiv 1 \pmod{5^{2026}}$. Pelo primeiro item do exercício anterior [1.3], temos

$$\nu_5(71^s - 1) = \nu_5(s) + \nu_5(71 - 1) = \nu_5(s) + 1,$$

portanto, se $s = 5^{2025}$, vemos que

$$\nu_5(71^{5^{2025}} - 1) = 2026 \Rightarrow 71^{5^{2025}} \equiv 1 \pmod{5^{2026}},$$

mas, crucialmente, se $s = 5^x$ com $x < 2025$, então $\nu_5(71^{5^x} - 1) = x + 1 < 2026$, e portanto $t_5 \neq 5^x$. Isso significa que temos $t_5 = 5^{2025}$.

Para calcular $t_2 := \text{ord}_{2^{2026}} 71$ usaremos a mesma fatoração que no exercício anterior [2]. Como $t_2 \mid \varphi(2^{2026}) = 2^{2025}$, t_2 é da forma 2^x para algum $x \geq 1$. Vamos calcular $\nu_2(71^{2^x} - 1)$ usando a fatoração. Note que

$$\begin{aligned} (71^{2^x} - 1) &= (71 - 1) \cdot \prod_{j=0}^{x-1} (71^{2^j} + 1) = (71 - 1) \cdot (71 + 1) \cdot \prod_{j=1}^{x-1} (71^{2^j} + 1) \\ \nu_2(71^{2^x} - 1) &= \nu_2(70) + \nu_2(72) + \sum_{j=1}^{x-1} \nu_2(71^{2^j} + 1) \end{aligned}$$

Como $71 \equiv -1 \pmod{8}$, para qualquer $x \geq 1$ vale que $71^{2^x} = (-1)^{2^{x-1}} \equiv 1 \pmod{8}$, ou seja $71^{2^x} + 1 \equiv 2 \pmod{8}$. Portanto $\nu_2(71^{2^j} + 1) = 1$. Substituindo na equação acima temos:

$$\nu_2(71^{2^x} - 1) = 1 + 3 + x - 1 = x + 3.$$

Assim como antes, segue que $71^{2^{2023}} \equiv 1 \pmod{2^{2026}}$, mas $71^{2^x} \not\equiv 1 \pmod{2^{2026}}$ para qualquer $x \leq 2022$. Logo sabemos que $t_2 = 2^{2023}$.

Agora estamos quase prontos. Como $71 \equiv 1 \pmod{5}$, $t_5 = 5^{2025}$ e há exatamente 5^{2025} números $0 \leq m < 5^{2026}$ com $m \equiv 1 \pmod{5}$, segue que para cada um deles, existe $0 \leq s < t_5$ com $71^s \equiv m \pmod{5^{2025}}$. Em particular, como $\frac{-1}{9} \equiv 1 \pmod{5}$, segue que existe $0 \leq k_5 < t_5$ com

$$71^{k_5} \equiv -(9)^{-1} \pmod{5^{2026}}.$$

Da mesma forma, $71 \equiv 7 \pmod{16}$, portanto $71^x \equiv \{1, 7\} \pmod{16}$. Mas existem exatamente 2^{2023} números $0 \leq m < 2^{2026}$ com $m \equiv \{1, 7\} \pmod{16}$, portanto para cada um deles existe um único $0 \leq s < t_2$ com $71^s \equiv m \pmod{2^{2026}}$. Em particular, como $-1 \equiv 7 \cdot 9 \pmod{16}$, segue que $\frac{-1}{9} \equiv 7 \pmod{16}$ e existe $0 \leq k_2 < t_2$ com

$$71^{k_2} \equiv -(9)^{-1} \pmod{2^{2026}}.$$

Como $(t_2, t_5) = (2^{2023}, 5^{2025}) = 1$, pelo teorema chinês dos restos, existe $k > 0$ natural grande satisfazendo

$$71^k > 10^{2027}$$

$$k \equiv k_2 \pmod{t_2}$$

$$k \equiv k_5 \pmod{t_5}$$

E por fim (graças a deus),

$$71^k = 71^{k_2 + q \cdot t_2} \equiv -9^{-1} \pmod{2^{2026}}$$

$$71^k = 71^{k_5 + r \cdot t_5} \equiv -9^{-1} \pmod{5^{2026}}$$

$$71^k \equiv \frac{10^{2026} - 1}{9} \equiv \underbrace{111 \dots 1}_{2026} \pmod{10^{2026}}$$

Portanto, $n = 71$.

□

Problem 1.6. O símbolo de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ pode ser estendido para o símbolo de Jacobi $\left(\frac{a}{n}\right)$, que está definido para a inteiro arbitrário e n inteiro positivo ímpar por $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{a}{p_k}\right)^{\alpha_k}$ se $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ é a fatoração prima de n (onde os $\left(\frac{a}{p_j}\right)$ são dados pelo símbolo de Legendre usual); temos $\left(\frac{a}{1}\right) = 1$ para todo inteiro a .

Prove as seguintes propriedades do símbolo de Jacobi, que podem ser usadas para calcular rapidamente símbolos de Legendre (e de Jacobi):

1. Se $a \equiv b \pmod{n}$ então $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)$.
2. $\left(\frac{a}{n}\right) = 0$ se $\gcd(a, n) \neq 1$ e $\left(\frac{a}{p}\right) \in \{-1, 1\}$ se $\gcd(a, n) = 1$.
3. $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right)$; em particular, $\left(\frac{a^2}{n}\right) \in \{0, 1\}$.
4. $\left(\frac{a}{mn}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{a}{m}\right)$; em particular, $\left(\frac{a}{n^2}\right) \in \{0, 1\}$.
5. Se m e n são positivos e ímpares, então $\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{(m-1)/2 \cdot (n-1)/2} \left(\frac{n}{m}\right)$.

6. $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{(n-1)/2}$.

7. $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{(n^2-1)/8}$ se n é ímpar.

Proof. (1) Note que se $a \equiv b \pmod{n}$, então $a \equiv b \pmod{p_j}$ para todo $1 \leq j \leq k$. Pela propriedade usual do símbolo de Legendre, $\left(\frac{a}{p_j}\right) = \left(\frac{b}{p_j}\right)$ para todo j e, portanto,

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{p_j}\right)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^r \left(\frac{b}{p_j}\right)^{\alpha_j} = \left(\frac{b}{n}\right).$$

(2) Se $(a, n) \neq 1$, então existe algum primo p_i tal que $p_i \mid a$, portanto $\left(\frac{a}{p_i}\right) = 0$ e

$$\prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{p_j}\right)^{\alpha_j} = 0.$$

Por outro lado, se $(a, n) = 1$, então para todos os primos p_i , temos que $p_i \nmid a$ e temos $\left(\frac{a}{p_i}\right) \in \{-1, 1\}$. Portanto

$$\prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{p_j}\right)^{\alpha_j} \in \{-1, 1\}.$$

(3) Basta abrir a conta e usar a propriedade dos símbolos usuais de Legendre,

$$\left(\frac{ab}{n}\right) = \prod_{j=1}^r \left(\frac{ab}{p_j}\right)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{p_j}\right)^{\alpha_j} \left(\frac{b}{p_j}\right)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{p_j}\right)^{\alpha_j} \prod_{j=1}^r \left(\frac{b}{p_j}\right)^{\alpha_j} = \left(\frac{a}{n}\right) \left(\frac{b}{n}\right).$$

(4) Sejam $q_1 \dots q_r$ os primos que dividem n ou m . Escrevemos $n = q_1^{\alpha_1} \dots q_r^{\alpha_r}$ e $m = q_1^{\beta_1} \dots q_r^{\beta_r}$ onde os α_i e β_j podem potencialmente ser 0. Temos

$$nm = q_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots q_r^{\alpha_r + \beta_r}$$

e logo

$$\left(\frac{a}{nm}\right) = \prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{q_j}\right)^{\alpha_j + \beta_j} = \prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{q_j}\right)^{\alpha_j} \prod_{j=1}^r \left(\frac{a}{q_j}\right)^{\beta_j}.$$

Agora notamos que se $q_j \nmid n$, então $\alpha_j = 0$ e se $q_i \nmid m$, então $\beta_i = 0$, então os produtórios acima se expressam como

$$\left(\frac{a}{nm}\right) = \prod_{q_j \mid n} \left(\frac{a}{q_j}\right)^{\alpha_j} \prod_{q_i \mid m} \left(\frac{a}{q_i}\right)^{\beta_i} = \left(\frac{a}{n}\right) \left(\frac{a}{m}\right).$$

(5) Esse é mais interessante, vamos usar reciprocidade quadrática e as propriedades anteriores. Primeiramente, note que por (2), a fórmula é válida se $(m, n) \neq 1$, já que tanto $\left(\frac{m}{n}\right) = 0$ quanto $\left(\frac{n}{m}\right) = 0$. Podemos supor então que $(m, n) = 1$. Outro caso de interesse é que se $a^2 \mid m$, então $m = a^2 m'$ e por (3), $\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m'}{n}\right)$. Já que o mesmo vale para o "denominador" do símbolo de Legendre, podemos supor ainda mais que m e n são livres de quadrados. Ou seja, podemos considerar (ad hoc) que suas fatorações são $n = p_1 \dots p_l \cdot r_1 \dots r_k$ e $m = q_1 \dots q_t \cdot s_1 \dots s_h$ onde os $p_i \equiv q_j \equiv 1 \pmod{4}$, os $r_i \equiv s_j \equiv 3 \pmod{4}$ e os primos das fatorações são todos distintos.

Após todas nossas suposições, temos (usando a propriedade (3) e (4) várias vezes)

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{q_1 \dots q_t \cdot s_1 \dots s_h}{p_1 \dots p_l \cdot r_1 \dots r_k}\right) = \left(\frac{q_1 \dots q_t}{p_1 \dots p_l}\right) \left(\frac{s_1 \dots s_h}{p_1 \dots p_l}\right) \left(\frac{q_1 \dots q_t}{r_1 \dots r_k}\right) \left(\frac{s_1 \dots s_h}{r_1 \dots r_k}\right),$$

ou seja,

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{(q_i, p_j)} \left(\frac{q_i}{p_j}\right) \cdot \prod_{(s_i, p_j)} \left(\frac{s_i}{p_j}\right) \cdot \prod_{(q_i, r_j)} \left(\frac{q_i}{r_j}\right) \cdot \prod_{(s_i, r_j)} \left(\frac{s_i}{r_j}\right).$$

Pela lei da reciprocidade quadrática, se h é um primo com $h \equiv 1 \pmod{4}$ e g é outro primo qualquer, então $\left(\frac{h}{g}\right) = \left(\frac{g}{h}\right)$ e se ambos g e h forem congruentes a 3 módulo 4, então $\left(\frac{h}{g}\right) = -\left(\frac{g}{h}\right)$. Podemos usar isso na expressão acima para obter

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{(q_i, p_j)} \left(\frac{p_j}{q_i}\right) \cdot \prod_{(s_i, p_j)} \left(\frac{p_j}{s_i}\right) \cdot \prod_{(q_i, r_j)} \left(\frac{r_j}{q_i}\right) \prod_{(s_i, r_j)} -\left(\frac{r_j}{s_i}\right),$$

de forma que (juntando os produtórios)

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{kh} \left(\frac{n}{m}\right).$$

Para o resultado, basta mostrar que $kh \equiv (n-1)/2 \cdot (m-1)/2 \pmod{2}$ (note que são inteiros uma vez que n e m são ímpares). Vamos olhar para n e m módulo 4, observamos que

$$n \equiv p_1 \dots p_l \cdot r_1 \dots r_k \equiv r_1 \dots r_k \equiv 3^k \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } k \equiv 0 \pmod{2} \\ 3 & \text{se } k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \pmod{4}$$

o resultado análogo segue para m e h . Disso já obtemos que se h ou k forem pares, então n ou m são 1 módulo 4, portanto $(n-1)/2$ ou $(m-1)/2$ é par e $hk \equiv 0 \equiv (n-1)/2 \cdot (m-1)/2 \pmod{2}$. Se ambos h e k forem ímpares, então $n \equiv m \equiv 3 \pmod{4}$, logo $(n-1)/2$ e $(m-1)/2$ são ímpares e $hk \equiv 1 \equiv (n-1)/2 \cdot (m-1)/2 \pmod{2}$ concluindo a demonstração.

(6) Vamos fazer uma análise semelhante a (5). Pelo observado anteriormente, podemos supor que n é livre de quadrados e se escreve $n = p_1 \dots p_l \cdot r_1 \dots r_k$ com os $p_i \equiv 1 \pmod{4}$ e $r_i \equiv 3 \pmod{4}$. Abrindo o símbolo de Jacobi, temos então

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = \prod_{p_i} \left(\frac{-1}{p_i}\right) \prod_{r_j} \left(\frac{-1}{r_j}\right).$$

Como $\left(\frac{-1}{x}\right) = 1$ se x é primo e $x \equiv 1 \pmod{4}$ e $\left(\frac{-1}{x}\right) = -1$ se x for um primo com $x \equiv 3 \pmod{4}$, segue que

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^k$$

ou seja, para mostrar a igualdade, basta verificar que $k \equiv (n-1)/2 \pmod{2}$ e já fizemos isso na prova da propriedade anterior.

(7) Seguindo a mesma ideia, vamos fatorar n de maneira esperta. Vimos que, sem perda de generalidade, podemos supor n livre de quadrados, então escrevemos a fatoração prima de n como

$$n = (p_1^+ p_2^+ \dots p_l^+) \cdot (p_1^- p_2^- \dots p_k^-) \cdot (q_1^+ q_2^+ \dots q_r^+) \cdot (q_1^- q_2^- \dots q_s^-)$$

onde cada $p_i^+ \equiv 1 \pmod{8}$, $p_i^- \equiv -1 \pmod{8}$, $q_i^+ \equiv 3 \pmod{8}$ e $q_i^- \equiv -3 \pmod{8}$. Usando a propriedade (4), temos

$$\left(\frac{2}{n}\right) = \prod_{p_i^+} \left(\frac{2}{p_i^+}\right) \cdot \prod_{p_i^-} \left(\frac{2}{p_i^-}\right) \cdot \prod_{q_i^+} \left(\frac{2}{q_i^+}\right) \cdot \prod_{q_i^-} \left(\frac{2}{q_i^-}\right).$$

Por reciprocidade quadrática, sabemos que para todo i vale $\left(\frac{2}{p_i^+}\right) = \left(\frac{2}{p_i^-}\right) = 1$ e $\left(\frac{2}{q_i^+}\right) = \left(\frac{2}{q_i^-}\right) = -1$, portanto, a equação acima reduz-se para

$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{r+s}.$$

Para finalizar a demonstração, basta mostrar que $r+s \equiv (n^2-1)/8 \pmod{2}$ ou, equivalentemente, desejamos mostrar

$$r+s \equiv 0 \pmod{2} \iff n \equiv \{-1, 1\} \pmod{8} \quad \text{e} \quad r+s \equiv 1 \pmod{2} \iff n \equiv \{-3, 3\} \pmod{8}.$$

Notamos primeiramente que

$$n = (p_1^+ p_2^+ \dots p_l^+) \cdot (p_1^- p_2^- \dots p_k^-) \cdot (q_1^+ q_2^+ \dots q_r^+) \cdot (q_1^- q_2^- \dots q_s^-) \equiv (1)^l \cdot (-1)^k \cdot (3)^r \cdot (-3)^s \pmod{8},$$

ou seja, $n \equiv \varepsilon \cdot (3)^r \cdot (-3)^s \pmod{8}$ onde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Agora para a análise de casos. Se $r+s$ for par, então ou r e s são pares onde $n \equiv \varepsilon \cdot 1 \cdot 1 \in \{-1, 1\} \pmod{8}$ ou r e s são ímpares e temos $n \equiv \varepsilon \cdot 3 \cdot -3 \equiv -\varepsilon \in \{-1, 1\} \pmod{8}$. Se, por outro lado, $r+s$ for ímpar, então ou r é ímpar e s é par onde $n \equiv \varepsilon \cdot 3 \cdot 1 \in \{3, -3\} \pmod{8}$ ou r é par e s é ímpar, onde também temos $n \equiv \varepsilon \cdot 1 \cdot -3 \in \{3, -3\} \pmod{8}$. O que conclui a demonstração. \square

2 Lista 2 - 26/01/2026

Problem 2.1. Sejam $a, n \in \mathbb{N}^*$ e considere a sequência (x_k) definida por $x_1 = a, x_{k+1} = a^{x_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Demonstre que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k+1} \equiv x_k \pmod{n}$ para todo $k \geq N$.

Observation 2.1. Note que, se $a > 1$, a sequência (x_k) é estritamente crescente já que $x_{k+1} = a^{x_k} \geq 2^{x_k} > x_k$ e tende para infinito.

Proof. Caso $a = 1$, então o resultado segue pois $x_k = 1$ para todo k . Vamos provar os outros casos por indução em n .

Caso $a \neq 1$. Para $n = 1$ é óbvio, uma vez que $x_k \equiv 0 \pmod{1}$ para todo k independente de a . Seja $n > 1$ e suponha que vale para todo $m < n$ i.e. existe N_m tal que se $k \geq N_m$, então $x_{k+1} \equiv x_k \pmod{m}$. Fatorando n , podemos supor que

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

com os p_i sendo primos distintos. Pelo Teorema Chinês dos Restos, o problema se resume a mostrar que existe N tal que para todo $k \geq N$, vale para todo i ,

$$x_{k+1} \equiv x_k \pmod{p_i^{\alpha_i}}.$$

Vamos encontrar um N_i para cada p_i e tomar $N = \max\{N_i : 1 \leq i \leq r\}$. Se $(a, p_i) = p_i$, temos $a = p_i q$ e basta que $x_k \geq \alpha_i$ para $x_{k+1} = a^{x_k} = (p_i \cdot q)^{x_k} \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Como $x_k \rightarrow \infty$, existe N_i satisfazendo $x_k \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ para todo $k \geq N_i$. Por outro lado, se $(a, p_j) = 1$, podemos usar indutivamente o resultado para $m = \varphi(p_j^{\alpha_j}) < n$ de onde segue que existe M_j tal que

$$x_{k+1} \equiv x_k \pmod{m = \varphi(p_j^{\alpha_j})} \quad \forall k \geq M_j,$$

portanto

$$x_{k+2} = a^{x_{k+1}} = a^{m \cdot t + x_k} \equiv a^{x_k} = x_{k+1} \pmod{p_j^{\alpha_j}} \quad \forall k \geq M_j$$

e portanto, podemos tomar $N_j = M_j + 1$. Tomando N o máximo dos N_i , segue que

$$\forall k \geq N, \forall 1 \leq i \leq r \quad x_{k+1} \equiv x_k \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

e, por fim,

$$x_{k+1} \equiv x_k \pmod{n} \quad \forall k \geq N$$

□

Problem 2.2. (a) Seja $F_n = 2^{2^n} + 1$ o n -ésimo número de Fermat. Prove que todo fator primo de F_n é da forma $k \cdot 2^{n+1}$.

(b) Prove que, se $n \geq 2$, então todo fator primo de F_n é da forma $k \cdot 2^{n+2} + 1$.

(c) Mostre que $2^{2^5} + 1$ é composto.

Proof. Vamos fazer o item (a) e (b) simultaneamente. Note que, se $p \mid F_n$, então p é ímpar e

$$2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p} \quad \wedge \quad 2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p},$$

logo $t := \text{ord}_p 2 \mid 2^{n+1}$, i.e $t := 2^q$ com $1 \leq q \leq 2^{n+1}$. Agora usamos um truque já visto [2], escrevemos

$$2^{2^n} + 1 = 2^{2^n} - 1 + 2 = \prod_{m=0}^{n-1} (2^{2^m} + 1) + 2. \quad (3)$$

Vamos provar que $q = n + 1$. Se $q \leq n$, sabemos do fato que $(2^{2^{q-1}})^2 \equiv 1 \pmod{p}$ e $2^{2^{q-1}} \not\equiv 1 \pmod{p}$ que $2^{2^{q-1}} \equiv -1 \pmod{p}$ e, portanto, tomando [3] módulo p , achamos

$$\prod_{m=0}^{n-1} (2^{2^m} + 1) + 2 \equiv 0 + 2 \not\equiv 0 \pmod{p}$$

absurdo, pois, por hipótese, $p \mid F_n$. Portanto $q = n + 1$ e temos $t = 2^{n+1}$, logo $t = 2^{n+1} \mid \varphi(p) = p - 1$ e segue a letra (a), $p = k \cdot 2^{n+1} + 1$. Para a letra (b), basta perceber que, caso $n \geq 2$, então, pela letra (a), $p \equiv 1 \pmod{8}$, ou seja $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, logo $2^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ e segue (da mesma forma que antes) que $t = 2^{n+1} \mid (p-1)/2$, ou seja $p = k \cdot 2^{n+2} + 1$.

Para a parte (c), usamos (b) e torcemos que achamos um fator rapidamente. \square

Problem 2.3. Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ um número real.

- (a) Prove que, se $\text{ord}\alpha > 2$ então existe $\lambda > 1$ tal que para infinitos inteiros positivos n , temos $a_n \geq \lambda^n$.
- (b) Prove que $\text{ord}\alpha \geq 1 + \exp(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n + 1)}{n})$.
- (c) Prove que para todo $c \geq 2$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\text{ord}\alpha = 1 + \exp(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n + 1)}{n}) = c$.
- (d) Determine $\text{ord}\alpha$ se $a_n = 2^n, \forall n \geq 0$.

Proof. (a) Note que, como $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq 2q_{n-2}$, segue (por indução) que $q_n \geq C2^{n/2}$ para alguma constante positiva C . Portanto, para $1 < \gamma < \sqrt{2}$ e n suficientemente grande, vale que $q_n \geq \gamma^n$ (na verdade, no pior caso, q_n cresce como a sequência de Fibonacci). Portanto, se $\text{ord}\alpha > 2$, segue que

$$\text{ord}\alpha - 2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} > \varepsilon > 0$$

para algum $\varepsilon > 0$ e

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log(\gamma^n)} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} > \varepsilon \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{n \log \gamma} &> \varepsilon \end{aligned}$$

i.e, existe sequência infinita (n_j) tal que

$$\frac{\log a_{n_j+1}}{n_j \log \gamma} > \varepsilon \quad \text{e} \quad a_{n_j+1} > (\gamma^\varepsilon)^{n_j}.$$

Como $\gamma^\varepsilon > 1$, tomando $1 < \beta < \gamma^\varepsilon$, segue que para n_j suficientemente grande,

$$a_{n_j+1} > (\gamma^\varepsilon)^{n_j} > \beta^{n_j+1},$$

finalizando a questão.

(b) Suponha, por absurdo, que $\text{ord}\alpha < 1 + \exp(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n + 1)}{n})$, então existem $\gamma, \gamma' \in \mathbb{R}$ tal que

$$2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} < \gamma' < \gamma < 1 + \exp(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n + 1)}{n}). \quad (4)$$

Da primeira desigualdade e da propriedade do \limsup segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$

$$\frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} < \gamma' - 2 \quad \text{e} \quad \log a_{n+1} < (\gamma' - 2) \log q_n,$$

como $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} < 2a_{n+1}q_n$, segue que, para todo $n \geq N$

$$\log q_{n+1} < \log 2 + \log a_{n+1} + \log q_n \leq \log(2) + (\gamma' - 1) \log q_n$$

Resolvendo a recorrência até N , temos para $n > N$,

$$\log q_n < \log 2 \cdot \left(\sum_{m=0}^{n-N-1} (\gamma' - 1)^m \right) + (\gamma' - 1)^{n-N} \log q_N$$

ou seja, existe alguma constante positiva $K \in \mathbb{R}$, tal que, para todo n maior que N ,

$$\log q_n < K(\gamma' - 1)^n.$$

Pela segunda desigualdade de [4], segue que existe sequência (n_j) infinita, tal que para todo j vale

$$\exp\left(\frac{\log \log(a_{n_j} + 1)}{n_j}\right) > \gamma - 1$$

portanto

$$\log(a_{n_j} + 1) > (\gamma - 1)^{n_j},$$

pela concavidade do log,

$$\log a_{n_j} + 1 > \log a_{n_j} + \frac{1}{a_{n_j}} > \log(a_{n_j} + 1) > (\gamma - 1)^{n_j}$$

e sendo bem gastosos e supondo n_j suficientemente grande,

$$\log a_{n_j} > \frac{(\gamma - 1)^{n_j}}{2}.$$

Agora vamos calcular um lowerbound para $\text{ord}\alpha$ usando essa sequência, segue que

$$\text{ord}\alpha > 2 + \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n_j}}{\log q_{n_j-1}} > 2 + \lim_{n_j \rightarrow \infty} \frac{(\gamma - 1)^{n_j}}{2K(\gamma' - 1)^{n_j-1}} = \infty.$$

o que é absurdo (na verdade provamos que deve ser que $\text{ord}\alpha = \infty$, de onde a desigualdade segue trivialmente).

Para **(c)**, se $c = 2$ basta tomar $a_n = 1$ e o resultado segue. Caso $c > 2$, queremos $a_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$1 + \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n + 1)}{n}\right) = c$$

desenvolvendo, uma alternativa seria

$$a_n + 1 = \exp \exp(n \log(c - 1)).$$

Para facilitar as contas, vamos tomar $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots]$ para a_n sendo

$$a_n = \lceil \exp \exp(n \log(c - 1)) \rceil \in \mathbb{N}^*$$

e veremos que $\text{ord}\alpha = c$. Já sabemos que

$$\begin{aligned} \text{ord}\alpha &\geq 1 + \exp\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n + 1)}{n}\right) \\ &\geq 1 + \exp\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(\exp \exp(n \log(c - 1)))}{n}\right) \\ &\geq 1 + \exp\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \log(c - 1)\right) = c \end{aligned}$$

Para a outra desigualdade, lembramos que

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq a_n q_{n-1}$$

e portanto, por indução

$$\log q_n \geq \sum_{j=1}^n \log a_j$$

substituindo nossos valores e usando a soma da progressão aritmética, temos

$$\log q_n \geq \sum_{j=1}^n \exp(j \log(c-1)) = \frac{\exp((n+1) \log(c-1)) - \exp(\log(c-1))}{\exp(\log(c-1)) - 1} = \frac{(c-1)^{n+1} - (c-1)}{c-2}.$$

Temos também que (para n suficientemente grande)

$$\log a_{n+1} \leq \log(2 \exp \exp((n+1) \log(c-1))) = \log(2) + \exp(n \log(c-1)) = \log(2) + (c-1)^{n+1}$$

Logo,

$$\text{ord} \alpha = 2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{q_n} \leq 2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(c-2)((c-1)^{n+1} + \log(2))}{(c-1)^{n+1} - (c-1)} = 2 + c - 2 = c.$$

(d) Basta usar o que já conhecemos. De $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, temos

$$\sum_{i=1}^n \log a_i \leq q_n \leq \sum_{i=1}^n \log(a_i + 1) \leq \sum_{i=1}^n \log(a_i + 1) \leq \sum_{i=1}^n \log(a_i) + \frac{1}{a_n}$$

portanto, se $a_n = 2^n$, segue

$$\frac{n(n-1) \log 2}{2} = \log 2 \left(\sum_{i=1}^n i \right) \leq \log q_n \leq \log 2 \left(\sum_{i=1}^n i \right) + 1 = \frac{n(n-1) \log 2}{2} + 1$$

ou seja $\log q_n = \Theta(n^2)$, substituindo na fórmula de $\text{ord} \alpha$, vemos

$$\text{ord} \alpha = 2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} = 2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \log 2}{\Theta(n^2)} = 2.$$

□