Lista 2 de Introdução à Teoria dos Números

VERÃO - IMPA - ENTREGAR ATÉ 10/2/2026

1) Sejam $a, n \in \mathbb{N}^*$ e considere a sequência (x_k) definida por $x_1 = a$, $x_{k+1} = a^{x_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Demonstre que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k+1} \equiv x_k \pmod{n}$ para todo $k \geq N$.

2) (a) (Euler) Seja $F_n = 2^{2^n} + 1$ o n-ésimo número de Fermat. Prove que todo fator primo de F_n é da forma $k \cdot 2^{n+1} + 1$.

(b) (Lucas) Prove que, se $n \geq 2$, então todo fator primo de F_n é da forma $k \cdot 2^{n+2} + 1$.

(c) Mostre que $2^{2^5} + 1$ é composto.

3) Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ um número real.

(a) Prove que, se $\operatorname{ord} \alpha > 2$ então existe $\lambda > 1$ tal que, para infinitos inteiros positivos n, temos $a_n \geq \lambda^n$.

(b) Prove que $\operatorname{ord} \alpha \geq 1 + \exp(\limsup_{n \to \infty} \frac{\log \log(a_n + 1)}{n})$.

(c) Mostre que, para todo $c \geq 2$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{ord} \alpha = 1 + \exp(\limsup_{n \to \infty} \frac{\log \log(a_n + 1)}{n}) = c$.

(d) Determine $\operatorname{ord} \alpha$ se $a_n = 2^n, \forall n \geq 0$.

4) Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] \in \mathbb{R}$. Prove que, se $q_n \leq q < q_{n+1}$, $\operatorname{mdc}(p, q) = 1$ e $p/q \neq p_n/q_n$ então $|\alpha - p/q| < 1/q^2$ se, e somente se vale pelo menos uma das seguintes condições:

(i) $a_{n+1} \geq 2$, $\frac{p}{q} = \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$ e $a_{n+1} - 2 + \beta_{n+1} < \alpha_{n+2}$;

(ii) $a_{n+1} \geq 2$, $\frac{p}{q} = \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$ e $(\alpha_{n+1} - 2)\beta_{n+1} < 1$.

5) Prove que se a e b são inteiros positivos tais que $4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$ então $a = b$.

6) Demonstre que $2x^2 - 219y^2 = -1$ não tem soluções inteiras, mas $2x^2 - 219y^2 \equiv -1 \pmod{m}$ tem soluções para todo inteiro positivo m.

Sugestão: Considere a "nova solução" $x_1 = |293x - 3066y|$, $y_1 = -28x + 293y$.