Listas de Variedades

henrique

August 26, 2025

Contents

0 Introdução e Notação

Ao decorrer do curso, vou escrever minhas resoluções dos exercícios nesse arquivo. Tem alguns motivos para isso:

1. Posso reutilizar resultados passados.
2. Está tudo organizado se um futuro henrique quiser rever.
3. Há uma certo senso de completude no final do curso.

Por isso, peço desculpa ao monitor e ao professor se não gostarem desse formato, me avisem que eu posso separar os arquivos. O código fonte pode ser encontrado em `https://github.com/hnrq104/variedades/tree/main/listas`.

1 Lista 1 (18/08/2025)

Problemas feitos:

1. Exercício 1.1 : ✓
2. Exercício 1.2 : ✓
3. Exercício 1.3 : ✓
4. Exercício 1.4 : ☹

Problem 1.1.

Proof. Defina $(S^1, \mathcal{F})$ a parametrização do círculo pelas projeções esfereográficas. Isto é,

$$\mathcal{F} = \langle (S^1 - \{(0,1)\}, \pi_N), (S^1 - \{(0,-1)\}, \pi_S) \rangle$$

Onde $\pi_N : S^1 - \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$ e $\pi_S : S^1 - \{(0,-1)\} \to \mathbb{R}$ são as projeções do polo norte e sul respectivamente. Vimos em aula que, com essas coordenadas, $(S^1, \mathcal{F})$ é uma variedade C^∞. Defina $\mathcal{G}$ elevando $\mathcal{F}$ ao cubo,

$$\mathcal{G} = \langle (S^1 - \{(0,1)\}, (\pi_N)^3), (S^1 - \{(0,-1)\}, (\pi_S)^3) \rangle$$

Afirmo que $\mathcal{G}$ é uma estrutura diferenciável de S^1. Isso segue do fato que π_N^3 e π_S^3 continuam sendo homeomorfismos e a composição de cartas dão a mesma coisa que em $\mathcal{F}$. Para verificar isso, escreva $s(t) = t^3$, então, no intervalo de definição $\mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
[(\pi_N)^3] \circ [(\pi_S)^3]^{-1}(t) &= (s \circ \pi_N) \circ (s \circ \pi_S)^{-1}(t) \\
&= s \circ \pi_N \circ \pi_S^{-1} \circ s^{-1}(t) \\
&= s \circ \pi_N \circ \pi_S^{-1}(t^{1/3}) \\
&= s\left(\frac{1}{t^{1/3}}\right) = \frac{1}{t} \in C^\infty
\end{aligned}$$

Onde na quarta igualdade usamos que $\pi_N \circ \pi_S^{-1}(x) : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* = 1/x$. A mesma conta serve para a outra composição $[s \circ \pi_S] \circ [s \circ \pi_N]^{-1}$.

Vamos provar que $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Suponha que fossem iguais, então a composição $\pi_N \circ [s \circ \pi_N]^{-1}(t) = s^{-1}(t) = t^{1/3}$ seria C^∞ que sabemos que é falso.

Para provar que são diffeomorfas, considere:

$$\begin{aligned}
F : (S^1, \mathcal{F}) &\to (S^1, \mathcal{G}) \\
p \neq (0,1) &\mapsto (\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N(p) \\
p \neq (0,-1) &\mapsto (\pi_S^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_S(p)
\end{aligned}$$

Do jeito que está, F pode não parecer bem definida. Seja $p \neq (0,1)$, $(0,-1)$. Queremos mostrar que:

$$(\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N(p) = (\pi_S^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_S(p) \tag{1}$$

Mas temos que todas as funções são homeomorfismos e, principalmente, $\pi_N \circ \pi_S^{-1} = 1/x$. Seja $\pi_N(p) = t$, então $t = [\pi_N \circ \pi_S^{-1}] \circ \pi_S(p) = 1/(\pi_S(p))$, ou seja $\pi_S(p) = 1/t$. Substituindo em (1)

$$\begin{aligned}
(\pi_N^{-1}) \circ s^{-1}(t) &= (\pi_S^{-1}) \circ s^{-1}(1/t) \\
s^{-1}(t) &= (\pi_N \circ \pi_S^{-1}) \circ s^{-1}(1/t) \\
t^{1/3} &= \frac{1}{s^{-1}(1/t)} = t^{1/3}
\end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade aplicamos π_N dos dois lados e na terceira usamos a composição usual. Como tudo pode ser feito de trás para frente, provamos que F está bem definida.

Agora basta provar que os seguintes mapas são diffeos C^∞ em seus dominios (interseções das cartas):

1. $[s \circ \pi_N] \circ F \circ \pi_N^{-1}$
2. $[s \circ \pi_N] \circ F \circ \pi_S^{-1}$
3. $[s \circ \pi_S] \circ F \circ \pi_N^{-1}$
4. $[s \circ \pi_S] \circ F \circ \pi_S^{-1}$

E para isso é só expandi-los, farei (1) e (2) pois os outros dois são análogos.

1. $s \circ \pi_N \circ F \circ \pi_N^{-1} = s \circ \pi_N \circ (\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N \circ \pi_N^{-1} = id$
2. $s \circ \pi_N \circ F \circ \pi_S^{-1} = s \circ \pi_N \circ (\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N \circ \pi_S^{-1} = 1/x$

$\square$

Para não perder nenhum detalhe, vou enunciar aqui a principal ferramenta desta lista.

Theorem 1.1. Seja M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ uma cobertura aberta de M. Então existe uma partição contável da unidade $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}$ com $\operatorname{supp}\varphi_i$ compacto para cada i. Se não for preciso suportes compactos, então existe uma partição da unidade $\{\varphi_\alpha\}$ subordinada à $\{U_\alpha\}$ ($\operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$) com no máximo contáveis φ_α não identicamente nulos.

Problem 1.2.

Proof. Pelo Teorema da Partição da Unidade 1.1, dada uma cobertura $\{U_\alpha\}$, existe uma partição φ_α subordinada. Tome $V_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}[(0,2)]$ abertos. Temos $\overline{V_\alpha} = \operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$ e, para todo $p \in M$, como $\sum_\alpha \varphi_\alpha(p) = 1$, existe α tal que $\varphi_\alpha(p) > 0$, logo $p \in V_\alpha$. Portanto $M \subset \{V_\alpha\}$ e temos um refinamento de $\{U_\alpha\}$. $\square$

Problem 1.3.

Proof. Sejam A e B fechados disjuntos de M, então $\{A^c, B^c\}$ formam uma cobertura de M. Pelo Teorema da Partição da Unidade 1.1, existem $\varphi_{A^c} \geqslant 0$ e $\varphi_{B^c} \geqslant 0$ em $C^\infty(M)$, com $\operatorname{supp}\varphi_{A^c} \subseteq A^c$ e $\operatorname{supp}\varphi_{B^c} \subseteq B^c$. Como para todo $p \in M$, $\varphi_{A^c}(p) + \varphi_{B^c}(p) = 1$ e $\varphi_{B^c} = 0$ em B, então temos

$$\begin{aligned} \varphi_{A^c}(A) &= \{0\} \\ \varphi_{A^c}(B) &= \{1\} \end{aligned}$$

E achamos a segunda parte da questão, uma função contínua que vale 0 em A e 1 em B. Tome então os abertos disjuntos $W_A = \varphi_{A^c}^{-1}[(-\infty, 1/2)]$ e $W_B = \varphi_{A^c}^{-1}[(1/2, \infty)]$. Claramente $A \subset W_A$ e $B \subset W_B$. $\square$

Problem 1.4.

Conversando na aula de segunda (25/08), perguntamos para o Prof. Heluani se deveríamos provar esse resultado (estender o acima para funções não limitadas). Ele nos disse que o interesse maior nesse problema era mostrar que esse resultado (Teorema da Extensão de Tietze) é válido para Variédades vistas como espaços topológicos. Isso é consequência de elas serem espaços normais (visto no problema anterior). Segue o enunciado do Teorema

Theorem 1.2. (Extensão de Tietze) Seja X um espaço topológico normal, $A \subseteq X$ um subconjunto fechado e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe uma função contínua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que a $\tilde{f}|_A = f$.

Sobre a extensão ser C^∞, devemos dar uma definição para o que isso significaria - uma função ser suave em um fechado. Aqui segui a ideia do Davi na monitoria, de que existe um abertinho maior em que ela está definida. Depois devemos verificar se é possível estender funções assim para toda a variedade. A resposta dessa afirmação é positiva, mas requer também um pouco mais de teoria do que vimos. A seguir temos uma tentativa.

Lemma 1.3. Seja M uma variedade, $A \subseteq M$ um conjunto fechado e $U \supseteq A$ um aberto onde está definida uma função suave $f : U \to \mathbb{R}$. Existe uma função $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ suave tal que as restrições $\tilde{f}_A = f_A$ são idênticas.

Proof. Para cada ponto $p \in A$, escolha uma vizinhança e uma função suave $(V_p, \tilde{f}_p)$ tal que $\tilde{f}_p : V_p \to \mathbb{R}$ é idêntica a f em $V_p \cap A$. Isso é possível usando funções bump e aproveitando o fato que M é localmente compacta - o que não foi provado. Tomamos uma partição da unidade $\{\varphi_p : p \in A\} \cup \{\varphi_{A^c}\}$ subordinada a cobertura $\{V_p : p \in A\} \cup \{A^c\}$. Para cada $p \in A$, o produto $\varphi_p \tilde{f}_p$ é C^∞ em V_p e tem uma extensão natural 0 fora do suporte de φ_p. Definimos então $\tilde{f} = \sum_{p \in A} \varphi_p \tilde{f}_p$. $\square$