Listas de Variedades

henrique

October 25, 2025

Contents

0 Introdução e Notação

Ao decorrer do curso, vou escrever minhas resoluções dos exercícios nesse arquivo. Tem alguns motivos para isso:

1. Posso reutilizar resultados passados.
2. Está tudo organizado se um futuro henrique quiser rever.
3. Há uma certo senso de completude no final do curso.

Por isso, peço desculpa ao monitor e ao professor se não gostarem desse formato, me avisem que eu posso separar os arquivos. O código fonte pode ser encontrado em `https://github.com/hnrq104/variedades/tree/main/listas`.

Por enquanto encontrei os seguintes usos de notação pessoal no texto:

1. Denoto $[n] = \{1, \dots, n\}$ o conjunto dos primeiros n naturais.

1 Lista 1 (18/08/2025)

Problemas feitos:

1. Exercício 1.1 : ✓
2. Exercício 1.2 : ✓
3. Exercício 1.3 : ✓
4. Exercício 1.4 : ☹

Problem 1.1.

Proof. Defina $(S^1, \mathcal{F})$ a parametrização do círculo pelas projeções esfereográficas. Isto é,

$$\mathcal{F} = \langle (S^1 - \{(0,1)\}, \pi_N), (S^1 - \{(0,-1)\}, \pi_S) \rangle$$

Onde $\pi_N : S^1 - \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$ e $\pi_S : S^1 - \{(0,-1)\} \to \mathbb{R}$ são as projeções do polo norte e sul respectivamente. Vimos em aula que, com essas coordenadas, $(S^1, \mathcal{F})$ é uma variedade C^∞. Defina $\mathcal{G}$ elevando $\mathcal{F}$ ao cubo,

$$\mathcal{G} = \langle (S^1 - \{(0,1)\}, (\pi_N)^3), (S^1 - \{(0,-1)\}, (\pi_S)^3) \rangle$$

Afirmo que $\mathcal{G}$ é uma estrutura diferenciável de S^1. Isso segue do fato que π_N^3 e π_S^3 continuam sendo homeomorfismos e a composição de cartas dão a mesma coisa que em $\mathcal{F}$. Para verificar isso, escreva $s(t) = t^3$, então, no intervalo de definição $\mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
[(\pi_N)^3] \circ [(\pi_S)^3]^{-1}(t) &= (s \circ \pi_N) \circ (s \circ \pi_S)^{-1}(t) \\
&= s \circ \pi_N \circ \pi_S^{-1} \circ s^{-1}(t) \\
&= s \circ \pi_N \circ \pi_S^{-1}(t^{1/3}) \\
&= s\left(\frac{1}{t^{1/3}}\right) = \frac{1}{t} \in C^\infty
\end{aligned}$$

Onde na quarta igualdade usamos que $\pi_N \circ \pi_S^{-1}(x) : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* = 1/x$. A mesma conta serve para a outra composição $[s \circ \pi_S] \circ [s \circ \pi_N]^{-1}$.

Vamos provar que $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Suponha que fossem iguais, então a composição $\pi_N \circ [s \circ \pi_N]^{-1}(t) = s^{-1}(t) = t^{1/3}$ seria C^∞ que sabemos que é falso.

Para provar que são diffeomorfas, considere:

$$\begin{aligned}
F : (S^1, \mathcal{F}) &\to (S^1, \mathcal{G}) \\
p \neq (0,1) &\mapsto (\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N(p) \\
p \neq (0,-1) &\mapsto (\pi_S^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_S(p)
\end{aligned}$$

Do jeito que está, F pode não parecer bem definida. Seja $p \neq (0,1)$, $(0,-1)$. Queremos mostrar que:

$$(\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N(p) = (\pi_S^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_S(p) \tag{1}$$

Mas temos que todas as funções são homeomorfismos e, principalmente, $\pi_N \circ \pi_S^{-1} = 1/x$. Seja $\pi_N(p) = t$, então $t = [\pi_N \circ \pi_S^{-1}] \circ \pi_S(p) = 1/(\pi_S(p))$, ou seja $\pi_S(p) = 1/t$. Substituindo em (1)

$$\begin{aligned}
(\pi_N^{-1}) \circ s^{-1}(t) &= (\pi_S^{-1}) \circ s^{-1}(1/t) \\
s^{-1}(t) &= (\pi_N \circ \pi_S^{-1}) \circ s^{-1}(1/t) \\
t^{1/3} &= \frac{1}{s^{-1}(1/t)} = t^{1/3}
\end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade aplicamos π_N dos dois lados e na terceira usamos a composição usual. Como tudo pode ser feito de trás para frente, provamos que F está bem definida.

Agora basta provar que os seguintes mapas são diffeos C^∞ em seus dominios (interseções das cartas):

1. $[s \circ \pi_N] \circ F \circ \pi_N^{-1}$
2. $[s \circ \pi_N] \circ F \circ \pi_S^{-1}$
3. $[s \circ \pi_S] \circ F \circ \pi_N^{-1}$
4. $[s \circ \pi_S] \circ F \circ \pi_S^{-1}$

E para isso é só expandi-los, farei (1) e (2) pois os outros dois são análogos.

1. $s \circ \pi_N \circ F \circ \pi_N^{-1} = s \circ \pi_N \circ (\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N \circ \pi_N^{-1} = id$
2. $s \circ \pi_N \circ F \circ \pi_S^{-1} = s \circ \pi_N \circ (\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N \circ \pi_S^{-1} = 1/x$

$\square$

Para não perder nenhum detalhe, vou enunciar aqui a principal ferramenta desta lista.

Theorem 1.1. Seja M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ uma cobertura aberta de M. Então existe uma partição contável da unidade $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}$ com $\operatorname{supp} \varphi_i$ compacto para cada i. Se não for preciso suportes compactos, então existe uma partição da unidade $\{\varphi_\alpha\}$ subordinada à $\{U_\alpha\}$ ($\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$) com no máximo contáveis φ_α não identicamente nulos.

Problem 1.2.

Proof. Pelo Teorema da Partição da Unidade 1.1, dada uma cobertura $\{U_\alpha\}$, existe uma partição φ_α subordinada. Tome $V_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}[(0,2)]$ abertos. Temos $\overline{V_\alpha} = \operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$ e, para todo $p \in M$, como $\sum_\alpha \varphi_\alpha(p) = 1$, existe α tal que $\varphi_\alpha(p) > 0$, logo $p \in V_\alpha$. Portanto $M \subset \{V_\alpha\}$ e temos um refinamento de $\{U_\alpha\}$. $\square$

Problem 1.3.

Proof. Sejam A e B fechados disjuntos de M, então $\{A^c, B^c\}$ formam uma cobertura de M. Pelo Teorema da Partição da Unidade 1.1, existem $\varphi_{A^c} \geqslant 0$ e $\varphi_{B^c} \geqslant 0$ em $C^\infty(M)$, com $\operatorname{supp} \varphi_{A^c} \subseteq A^c$ e $\operatorname{supp} \varphi_{B^c} \subseteq B^c$. Como para todo $p \in M$, $\varphi_{A^c}(p) + \varphi_{B^c}(p) = 1$ e $\varphi_{B^c} = 0$ em B, então temos

$$\begin{aligned}
\varphi_{A^c}(A) &= \{0\} \\
\varphi_{A^c}(B) &= \{1\}
\end{aligned}$$

E achamos a segunda parte da questão, uma função contínua que vale 0 em A e 1 em B. Tome então os abertos disjuntos $W_A = \varphi_{A^c}^{-1}[(-\infty, 1/2)]$ e $W_B = \varphi_{A^c}^{-1}[(1/2, \infty)]$. Claramente $A \subset W_A$ e $B \subset W_B$. $\square$

Problem 1.4.

Conversando na aula de segunda (25/08), perguntamos para o Prof. Heluani se deveríamos provar esse resultado (estender o acima para funções não limitadas). Ele nos disse que o interesse maior nesse problema era mostrar que esse resultado (Teorema da Extensão de Tietze) é válido para Variédades vistas como espaços topológicos. Isso é consequência de elas serem espaços normais (visto no problema anterior). Segue o enunciado do Teorema

Theorem 1.2. (Extensão de Tietze) Seja X um espaço topológico normal, $A \subseteq X$ um subconjunto fechado e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe uma função contínua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que a $\tilde{f}|_A = f$.

Sobre a extensão ser C^∞, devemos dar uma definição para o que isso significaria - uma função ser suave em um fechado. Aqui segui a ideia do Davi na monitoria, de que existe um abertinho maior em que ela está definida. Depois devemos verificar se é possível estender funções assim para toda a variedade. A resposta dessa afirmação é positiva, mas requer também um pouco mais de teoria do que vimos. A seguir temos uma tentativa.

Lemma 1.3. Seja M uma variedade, $A \subseteq M$ um conjunto fechado e $U \supseteq A$ um aberto onde está definida uma função suave $f : U \to \mathbb{R}$. Existe uma função $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ suave tal que as restrições $\tilde{f}_A = f_A$ são idênticas.

Proof. Para cada ponto $p \in A$, escolha uma vizinhança e uma função suave $(V_p, \tilde{f}_p)$ tal que $\tilde{f}_p : V_p \to \mathbb{R}$ é idêntica a f em $V_p \cap A$. Isso é possível usando funções bump e aproveitando o fato que M é localmente compacta - o que não foi provado. Tomamos uma partição da unidade $\{\varphi_p : p \in A\} \cup \{\varphi_{A^c}\}$ subordinada a cobertura $\{V_p : p \in A\} \cup \{A^c\}$. Para cada $p \in A$, o produto $\varphi_p \tilde{f}_p$ é C^∞ em V_p e tem uma extensão natural 0 fora do suporte de φ_p. Definimos então $\tilde{f} = \sum_{p \in A} \varphi_p \tilde{f}_p$. $\square$

2 Lista 2 (02/09/2025)

Problemas feitos:

1. Exercício 2.1 : ✓
2. Exercício 2.2 : ✓
3. Exercício 2.3 : ✓
4. Exercício 2.4 : ✓
5. Exercício 2.5 : ✓

Problem 2.1.

Proof. Considere o atlas de $S^1 \subset \mathbb{C}$ gerado por (U, θ_1) e (V, θ_2) onde $U = S^1 - \{1\}$ e θ_1 é definida tomando o ramo apropriado do logaritmo de forma que

$$\begin{aligned} \theta_1 : U &\to (0, 2\pi) \\ z &\mapsto \frac{\log(z)}{i} \end{aligned}$$

Semelhantemente, $V = S^1 - \{-1\}$ e escolhemos um outro ramo de log a fim que

$$\begin{aligned} \theta_2 : V &\to (-\pi, \pi) \\ z &\mapsto \frac{\log(z)}{i} \end{aligned}$$

Sabemos que esses ramos log são diffeos em seus domínios e a composição $\theta_1 \circ \theta_2^{-1} : (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ dada por

$$\theta_1 \circ \theta_2^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < \pi \\ x + \pi & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Essa função é C^∞, pois os abertos da definição são disjuntos. Da mesma forma $\theta_2 \circ \theta_1^{-1} \in C^\infty$.

Para mostrar que $e^{ix} : \mathbb{R} \to S^1$ é C^∞, basta ver que a composições com os mapas é C^∞. Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x \in (2\pi n, 2\pi(n+1)) \quad \vee \quad x \in (2\pi n - \pi, 2\pi(n+1) - \pi)$$

No primeiro caso, claramente $\theta_1(e^{ix}) = x - 2\pi n$ que é C^∞. No segundo caso, $\theta_2(e^{ix}) = x - 2\pi n - \pi \in \mathbb{C}^\infty$. Assim mostramos que para qualquer ponto de $\mathbb{R}$, existe um aberto U tal que a composição $\theta_i \circ e^{ix}|_U$ é C^∞, como consequência, e^{ix} é C^∞. □

Problem 2.2.

Proof. Tome o mesmo atlas que na questão anterior, note que se (U, θ) é uma carta e $V \subset U$, então $(V, \theta|_V)$ é óbviamente uma carta do atlas também. Para mostrar que $z^2 \in C^\infty$ vamos verificar então que para todo $z \in S^1$, existe um uma carta (A, θ) ao redor de z e uma carta (B, ϕ) ao redor de z^2 tal que a composição $\phi \circ z^2 \circ \theta^{-1}$ é C^∞.

Separamos 4 cartas de S^1 e qual coordenadas usaremos na imagem de cada vizinhança,

1. $(A_1 = \{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}, \theta_2|_{A_1})$ e $(B_1 = V, \theta_2)$

2. $(A_2 = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}, \theta_1|_{A_2})$ e $(B_2 = U, \theta_1)$
3. $(A_3 = \{z : \mathrm{Re}(z) < 0\}, \theta_1|_{A_3})$ e $(B_3 = U, \theta_1)$
4. $(A_4 = \{z : \mathrm{Im}(z) < 0\}, \theta_2|_{A_4})$ e $(B_4 = V, \theta_2)$

Claramente os A_i cobrem S^1 e como para cada i, $z^2(A_i) = B_i$, estamos cobrindo a imagem de z^2. Substituindo os índices, falta verificar que em cada item que a composição $\theta_k \circ z^2 \circ (\theta_k|_{A_i})^{-1}$ é C^∞. Calculando-as, temos

1. $\theta_2 \circ z^2 \circ (\theta_2|_{A_1})^{-1} : (-\pi/2, \pi/2) \to (-\pi, \pi)$ é tal que $z \mapsto 2z$
2. $\theta_1 \circ z^2 \circ (\theta_1|_{A_2})^{-1} : (0, \pi) \to (0, 2\pi)$ é tal que $z \mapsto 2z$
3. $\theta_1 \circ z^2 \circ (\theta_1|_{A_3})^{-1} : (\pi/2, 3\pi/2) \to (-\pi, \pi)$ é tal que $z \mapsto 2z - 2\pi$
4. $\theta_2 \circ z^2 \circ (\theta_2|_{A_4})^{-1} : (-\pi, 0) \to (0, 2\pi)$ é tal que $z \mapsto 2z + 2\pi$

Como todas são C^∞, z^2 é C^∞.

□

Para os próximos dois problemas, vamos enunciar a ferramenta principal e sua versão em variedades - presumo que ainda será bastante utilizada no curso.

Theorem 2.1. (Teorema da Função Implícita) Seja $U \subset \mathbb{R}^{c-d} \times \mathbb{R}^d$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^d \in C^\infty$. Denote o sistema canônico de coordenadas em $\mathbb{R}^{c-d} \times \mathbb{R}^d$ por $(r_1, \ldots, r_{c-d}, s_1, \ldots, s_d)$. Suponha que no ponto $(r_0, s_0) \in U$

$$f(r_0, s_0) = 0$$

e que a matriz

$$\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \right\}_{i,j=1,\ldots,d}$$

é não singular. Então existe uma vizinhança aberta V de r_0 em R^{c-d} e uma vizinhança aberta W de s_0 em $\mathbb{R}^d$ tal que $V \times W \subset U$, e existe um mapa C^∞ $g : V \to W$ tal que para cada par $(p, q) \in V \times W$

$$f(p, q) = 0 \iff q = g(p)$$

Theorem 2.2. Assuma que $\psi : M^c \to N^d$ é C^∞, que n é um ponto de N, tal que $P = \psi^{-1}(n)$ é não vazio, e que $d\psi : M_m \to N_{\psi(m)}$ é sobrejetiva para todo $m \in P$. Então P tem uma estrutura diferenciável única tal que (P, i) é subvariedade de M, onde i é o mapa da inclusão. Além do mais, $i : P \to M$ é uma imersão, e a dimensão de P é $c - d$.

Problem 2.3.

Proof. Vamos provar que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n\times n}$ invocando o teorema anterior com a função $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Para isso, basta mostrar que 1 é valor regular de det, ou seja, se $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, então $d(\det)|_A$ é sobrejetiva em $\mathbb{R}$. Como o contradomínio é $\mathbb{R}$, basta mostrar que em uma coordenada x_{ij} vale que

$$\left.\frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}\right|_A \neq 0$$

Mas isso segue da decomposição de Cramer do determinante. Seja $X^c_{i,j}$ a matriz dos cofatores de uma matriz X em i, j. Por Cramer, para qualquer $k \in [n]$,

$$\det(X) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} x_{k,i} \det(X^c_{k,i}) \tag{2}$$

Naturalmente,

$$\left.\frac{\partial \det}{\partial x_{k,j}}\right|_X = (-1)^{k+j}\det(X^c_{k,i})$$

Como $\det(A) = 1$, aplicando a regra em $k = 1$, segue que existe alguma matriz de cofatores $A^c_{1,i}$ com determinante não nulo. Portanto,

$$\left.\frac{\partial \det}{\partial x_{1,i}}\right|_A = (-1)^{1+i}\det(A^c_{1,i}) \neq 0$$

e o diferencial é sobrejetivo. Por 2.2, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ é uma imersão em $\mathbb{R}^{n\times n}$ de dimensão n^2-1. □

Problem 2.4.

Primeira prova usual rápida.

Proof. Considere $F : \mathrm{GL}(d,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{d(d+1)/2}$ tal que

$$F(A) = A \cdot A^T$$

Note que como $(A \cdot A^T)^T = A \cdot A^T$, $F(A)$ é simétrica e o contradomínio faz sentido. Vamos provar que I (como matriz simétrica) é valor regular da função F para que possamos aplicar 2.2. A diferencial de F em A em relação a um vetor H pode ser obtida facilmente considerando a diferença (que é linear) de $F(A+H) - F(A)$.

$$DF_A(H) = F(A+H) - F(A) = H \cdot A^T + A \cdot H^T$$

Para mostrar que essa diferencial é sobrejetiva, tome B tal que $B = B^T$, então escolhendo $H = BA/2$, temos que

$$DF_A(BA/2) = \frac{(BA)A^T}{2} + \frac{A(BA)^T}{2} = \frac{B}{2} + \frac{B^T}{2} = B$$

Onde usamos que $AA^T = I$ na segunda igualdade. Portanto, DF_A é sobrejetiva para cada $A \in F^{-1}(I)$, logo, pelo Teorema da Função Implícita, $F^{-1}(I)$ é uma subvariedade de $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ de dimensão $d(d-1)/2$. □

Segunda prova, delineada pelo Warner em 1.40(b).

Proof. Novamente, seja F como na prova anterior. Usaremos a mesma estratégia, queremos mostrar que dF_A é sobrejetiva para cada $A \in O(d)$. Dado $A \in O(d)$, defina o diffeo $r_A : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ que para $M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$,

$$r_A(M) = M \cdot A$$

Quando se espressa $d(r_A)$ em coordenadas é claro que - como função linear, $d(r_A) = A$, logo é C^∞. Da mesma forma, a inversa $r_{A^{-1}}$ é C^∞. Aqui está a ideia principal do Warner, note que

$$F = F \circ r_A$$

pois, para todo X,

$$F(X) = XX^T = (XA)(XA)^T = F \circ r_A(X)$$

Portanto podemos diferenciar a função da direita ao invés de somente F, usando a regra da cadeia, encontramos que

$$dF_A = d(F \circ r_{A^{-1}})_A = dF_I \circ d(r_{A^{-1}})_A = dF_I \circ A^{-1}$$

Como A^{-1} é invertível, para saber se dF_A é sobrejetiva, basta verificar se dF_I é sobrejetiva. Mas isso seguirá imediatamente do fato que para $i \leqslant j$ e $l \leqslant k$,

$$\left.\frac{\partial F_{i,j}}{\partial x_{l,k}}\right|_I = \delta_{l,k}^{i,j}$$

Isso é, a derivada de F em I em relação a coordenada (l, k) é justamente a matriz simétrica com 1 somente na coordenada (l, k) e 0 nas outras entradas. Para a prova, note que

$$F(X)_{i,j} = \sum_{m=1}^{d} x_{i,m} x_{j,m} \tag{3}$$

Logo, se $l, k = i, j$,

$$\left.\frac{\partial F_{i,j}}{\partial x_{i,j}}\right|_{X=I} = x_{j,j}|_I = 1$$

Se $l \neq i$,

$$\frac{\partial F_{i,j}}{\partial x_{l,k}} = 0$$

Pois $x_{l,k}$ sequer aparece na soma (3). Se $l = i$, mas $k \neq j$, então

$$\left.\frac{\partial F_{i,j}}{\partial x_{i,k}}\right|_{X=I} = x_{j,k}|_I = 0$$

E provamos a a identidade que queriámos. Portanto, dF_I é sobrejetiva, por consequência, dF_A é sobrejetiva para todo $A \in O(d)$, logo $O(d)$ é naturalmente subvariedade de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

□

Problem 2.5.

Esse problema é capcioso, eu infelizmente já havia visto a solução antes da lista estar disponível.

Proof. Como M é compacto, a imagem $f(M)$ é compacta, logo existe $m \in M$ tal que a primeira coordenada $f_1(m)$ atinge o valor máximo. Dado $(x_i)_{i=1}^d$ um sistema de coordenadas na vizinhança de m, como $f_1(m)$ é máximo, para cada i

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = 0$$

Portanto a matriz jacobiana

$$\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}_{i,j \in [d]}$$

é composta de 0's na primeira linha. *df* não pode ser sobrejetiva. □

3 Lista 3 (15/10/25)

Como não consegui responder quase nenhum problema completamente, não vou colocar a lista de problemas resolvidos.

Theorem 3.1. (3.58 Warner) Seja H um subgrupo fechado do grupo de Lie G. Seja $\pi : G \to G/H$ a projeção $\pi(g) = gH$. Então G/H tem uma única estrutura diferenciável tal que π é C^∞.

Theorem 3.2. (3.62 Warner) Seja $G \times M \to M$ uma ação transitiva do grupo de Lie G na variedade M. Seja $m \in M$ e H o grupo de isotropia de m. O mapa

$$\beta : G/H \to M \quad \beta(gH) = gm_0$$

é um difeomorfismo.

Exercise 3.1.

Proof. Vou mostrar algo um pouco mais geral, seja V um R espaço vetorial n dimensional, $G_k(V)$ o conjunto de subespaços k dimensionais de V, então

$$G_k(V) \cong \frac{O(n)}{O(k) \times O(n-k)}.$$

Em particular, $G_2(R^4) = O(4)/(O(2) \times O(2))$ de onde seguirá que ela é compacta de dimensão 4.

Em V, fixe uma base $E_1, \dots E_n$. As matrizes $O(n)$ agem em V por multiplicação e mandam k-subespaços vetoriais em k-subespaços vetoriais (não vou provar isso). Dessa forma, $O(n)$ age naturalmente em $G_k(V)$. É outro fato da vida (fácil de ver em R^n com Gram-Schmidt) que para V_0 e V_1 dois k-subespaços de V existem transformações ortogonais que mandam V_0 em V_1, portanto a ação $O(n)$ é transitiva.

Seja $P = \langle E_1, \dots E_k \rangle$ e $H < O(n)$ o grupo de isotropia de P. Se $A \in H$, então como A fixa P, A deve mandar os vetores $E_1, \dots, E_k$ em $\langle E_1, \dots E_k \rangle$ e, sendo invertível, os vetores $E_{k+1} \dots E_n$ em $\langle E_{k+1}, \dots E_n \rangle$. Portanto já determinamos que A deve ser da forma

$$A = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

onde F é uma matrix $k \times k$ e H é $(n-k) \times (n-k)$. Como $A^t A = I$, segue que

$$I = A^t A = \begin{pmatrix} F^t & 0 \\ 0 & H^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^t F & 0 \\ 0 & H^t H \end{pmatrix}$$

e portanto $F^t F = I$ e $H^t H = I$, ou seja $F \in O(k)$ e $H \in O(n-k)$. Interessantemente, qualquer escolha de F e G em $O(k) \times O(n-k)$ fixa P (satisfaz as condições), então podemos identificar H justamente como $O(k) \times O(n-k)$. Note que H é um grupo fechado, é a interseção de pré-imagens de fechados por funções contínuas; dado $B \in O(n)$, escrevemos

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

e H se torna

$$H = \{B \in O(n) : B_{11}^t B_{11} = I\} \cap \{B \in O(n) : B_{12} = \vec{0}\}$$
$$\cap \; \{B \in O(n) : B_{22}^t B_{22} = I\} \cap \{B \in O(n) : B_{21} = \vec{0}\}$$

Portanto, podemos dar uma estrutura diferenciável para $G_k(V)$ correspondente a $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$. Segue por [3.1] que $O(n)/H$ é a imagem por uma função suave $\pi : O(n) \to O(n)/H$ de $O(n)$, portanto $O(n)/H = G_k(V)$ é imagem de compacto logo compacto.

Para calcular a dimensão de $G_2(R^4)$, lembramos que $\dim(O(4)) = 4 \cdot 3/2 = 6$ e $\dim(O(2)) = 1$, portanto $\dim(O(4)/(O(2) \times O(2))) = 6 - (1+1) = 4$.

Sobre ser diffeomorfa com $S^2 \times S^2$, eu não sei provar. Pelo jeito a respota é negativa. □

Exercise 3.2.

Proof. Seguirei a solução do David bonitinha de fazer na mão as cartas da variedade.

Antes de mais nada, vamos mostrar que Q é compacto. Como f, é contínua, $f^{-1}(0)$ é um fechado de $\mathbb{C}^4 - \vec{0}$, como o mapa do quociente $\pi : \mathbb{C}^4 - \{\vec{0}\} \to \mathbb{C}P^3$ é fechado, segue que $\pi(f^{-1}(\{0\}))$ é um fechado de $\mathbb{C}P^3$, como $\mathbb{C}P^3$ é compacto, segue que Q é compacto.

Agora vamos dar uma estrutura diferenciável para Q - ele já é N2 pela topologia induzida. Dada uma carta de $\mathbb{C}P^3$, digamos $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ com coordenadas $\varphi_1([1 : x_2 : x_3 : x_4]) = (x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^3$, é evidente que $U_1 \cap Q$ são os pontos satisfazendo $g_1([1 : x_2 : x_3 : x_4)] = x_4 - x_2 x_3 = 0$. Olhando $h(x_2, x_3, x_4) = g_1 \circ \varphi^{-1}$ como uma função em $\mathbb{C}^3$, ela tem rank constante (basta olhar para x_4) e portanto, $M_1 = h^{-1}(\{0\})$ é um embedding em $\mathbb{C}^3$.

Seja ψ uma carta qualquer de M_1, daremos a $Q \cap U_1$ as cartas definidas pela composição de cartas $\psi \circ \varphi_1$,

$$Q \cap U_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_1 \subset \mathbb{C}^3 \xrightarrow{\psi} W \subset \mathbb{C}^2$$

Como M_1 é um embedding, $\psi^{-1}(W) = B \cap M_1$, onde B é um aberto de $\mathbb{C}^3$, definimos a carta em Q por $(Q \cap \varphi_1^{-1}(B), \psi \circ \varphi_1)$.

A construção anterior de cartas para Q pode ser repetida para $U_2 = \{x_2 \neq 0\}, U_3 = \{x_3 \neq 0\}$ e $U_4 = \{x_4 \neq 0\}$. A menos de troca de variáveis (e sinal) as funções h são identicas para cada um desses abertos de $\mathbb{C}P^3$. Completamos nossas coordenadas de Q com as $\psi \circ \varphi_i$ definidas em cada $Q \cap U_i$.

Falta mostrar que troca de coordenadas é C^∞, seja $F_{ij} = \psi_j \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ \psi_i^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \mathbb{C}^3 \supset M_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, dashed, "\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}"] & W_i \arrow[d, dashed, "F_{ij}"] \\
& \mathbb{C}^3 \supset M_j \arrow[r, "\psi_j"'] & W_j
\end{tikzcd}$$

Como composição de funções C^∞, (e o fato de ψ_j serem embeddings para a continuidade), segue que F_{ij} é C^∞. E portanto Q é uma variedade diferenciável compacta de dimensão complexa 2 (e dimensão real 4).

Sobre ser diffeomorfa com $S^2 \times S^2$, acho que o David falou que era, não tenho ideia de como provar.

□

Exercise 3.3. Essa questão é copiar palavra por palavra a solução do Warner. Não acho que vale a pena escrever. Se fizer, farei por último.

Exercise 3.4.

Proof. A primeira coisa a notar é que, como subconjuntos de $GL(2, \mathbb{R})$ e $GL(3, \mathbb{R})$, $SL(2, \mathbb{R})$ não é compacto, pois

$$\begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

para todo n, portanto, não é limitado. Já $SO(3,\mathbb{R})$ é um fechado do compacto $O(3,\mathbb{R})$ então é compacto. E já temos que $SL(2,\mathbb{R})$ não pode ser diffeomorfa a $SO(3,\mathbb{R})$.

Seja $F : M \to N$ de rank constante e $S \subset M$ embedding dado por $S = F^{-1}(0)$ - pelo Teorema do Rank Constante. Sabemos que para $p \in S$, $T_pS = \ker(dF_p)$, usaremos isso para calcular $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ e $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

Já que $SO(3,\mathbb{R})$ é um subgrupo aberto de $O(3,\mathbb{R})$, $T_ISO(3,\mathbb{R}) = T_IO(3,\mathbb{R})$. Então, para calcular $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, $\mathfrak{o}(3,\mathbb{R})$ que sabemos ser o kernel da transformação

$$A \in GL(3,\mathbb{R}) \xrightarrow{\Phi} A^tA \in M(3,\mathbb{R})$$

Já calculamos $d\Phi_I$ e vimos que

$$d\Phi_I(B) = B + B^t$$

portanto, $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) = \ker(d\Phi_I) = \{B \in M(3,\mathbb{R}) : B = -B^t\}$, ou seja $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ é a algebra de Lie das matrizes 3×3 antissimétricas com o colchete sendo o comutador (por que é subálgebra de $Lie(GL(3,\mathbb{R}))$).

Lembrando que $SL(2,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\}) \subset GL(2,\mathbb{R})$ e que $d(\det)_I(B) = \mathrm{tr}(B)$, calculamos, pela mesma observação anterior que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{B \in M(2,\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(B) = 0\}$ com o colchete do comutador novamente.

Vamos dar bases para as duas álgebras de Lie e mostrar que elas não são isomorfas pela observação do Roger.

Uma base para $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ pode ser

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

E depois de um cálculo meio chato dos colchetes (lembrando que $C^t = -C$ e $(FG) = (F^tG^t)^t$ nessas matrizes) temos

$$[A,B] = C \quad [B,C] = A \quad [A,C] = -B$$

Note que o colchete de dois vetores L.I leva em um terceiro L.I aos dois.

Uma base para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ é dada por

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando os colchetes, achamos

$$[E,F] = 2F \quad [F,G] = E \quad [E,G] = -2G$$

Mas então, o colchete em $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ leva dois vetores em L.I (digamos E, F) em um vetor L.D com os dois $2F$. Portanto $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) \ncong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. $\square$

Exercise 3.5.

Proof. Para calcular $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ e $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$, exatamente as mesmas contas anteriores servem, mas, curiosamente, sobre os complexos, as algebras de Lie são isomorfas. Usando os mesmos vetores que na questão anterior e definindo $T : \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ por

$$\begin{aligned} A &\mapsto \frac{i}{2}(F+G) \\ B &\mapsto \frac{1}{2}(G-F) \\ C &\mapsto \frac{i}{2}(E) \end{aligned}$$

Vemos que T manda linearmente uma base em outra, logo é invertível. Falta verificar que é homomorfismo de álgebras de Lie, para isso temos que verificar que preserva o colchete, segue as computações necessárias.

$$[TA, TB] = [(F+G)i/2, (G-F)/2] = ([F,G] + [G, -F])i/4 = [F,G]i/2 = Ei/2 = TC$$

$$[TB, TC] = [(G-F)/2, Ei/2] = ([G,E] - [F,E])i/4 = (2G+2F)i/4 = (G+F)i/2 = TA$$

$$[TC, TA] = [Ei/2, (F+G)i/2] = -([E,F] + [E,G])/4 = -(2F-2G)/4 = (G-F)/2 = TB$$

segue que T é homomorfismo. Sobre se $SO(3,\mathbb{C})$ e $SL(2,\mathbb{C})$ serem diffeomorfas ou não, não sei fazer. □

Exercise 3.6.

Proof. **(1.a)** É fácil ver que D é suave de dimensão 2, pois podemos escolher os campos suaves em $SO(3)$ associados a e_1 e e_2 em $\mathfrak{so}(3)$. Mais precisamente, os campos suaves $d(L_g)e_1$ e $d(L_g)e_2$ definidos em toda variedade por definição geram D pontualmente, logo D é suave.

(1.b) Como os campos são associados a translação, vale que

$$d(L_g)([X,Y]) = [d(L_g)X, d(L_g)Y]$$

portanto basta checar na identidade. Mas vimos que $[e_1, e_2] = e_3 \notin \langle e_1, e_2 \rangle$, portanto a distribuição não é involutiva.

(1.c) Pelo teorema de Frobënius, D é integrável se e somente se for involutiva, como não é involutiva, não é integrável.

(2) Como $SO(3,\mathbb{R}) \subset GL(3,\mathbb{R})$ é subgrupo de Lie, para encontrar uma curva integral de $SO(3,\mathbb{R})$, basta aplicar a exponenciação em $GL(3,\mathbb{R})$. A curva integral dada por $X = e_1$ começando no ponto g será $g \cdot \exp(te_1)$

Identificando $\mathbb{C}$ com o grupo de matrizes

$$a + ib = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

é fácil verificar que e_1 é mandado em i e $\exp(e_1 t)$ terá exatamente o mesmo papel que $\exp(it)$. Isso é só uma forma fácil de ver que, expandindo a definição de $\exp(e_1 t)$ teremos algo do tipo

$$\exp(e_1 t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(t) & -\cos(t) \\ 0 & \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix}$$

(que pode ser explicitamente verificado expandindo a conta em cada coordenada e usando as expansões de Taylor). Segue que as curvas integrais são fechadas com período 2π. Já sabemos que ela deveriam ser completas pois $SO(3)$ é compacto e portanto fechadas (por serem imagens de $\mathbb{R}$). Mas verifica-se justamente que as curvas são rotações sobre o primeiro eixo em $SO(3)$. □