Listas de Variedades

henrique

August 21, 2025

Contents

0 Introdução e Notação

Ao decorrer do curso, vou escrever minhas resoluções dos exercícios nesse arquivo. Tem alguns motivos para isso:

1. Posso reutilizar resultados passados.
2. Está tudo organizado se um futuro henrique quiser rever.
3. Há uma certo senso de completude no final do curso.

Por isso, peço desculpa ao monitor e ao professor se não gostarem desse formato, me avisem que eu posso separar os arquivos. O código fonte pode ser encontrado em `https://github.com/hnrq104/variedades/tree/main/listas`.

1 Lista 1 (18/08/2025)

Problemas feitos:

1. Exercício 1.1 : ✓
2. Exercício 1.2 : ✓
3. Exercício 1.3 : ✓
4. Exercício 1.4 : ☹

Problem 1.1.

Proof. Defina $(S^1, \mathcal{F})$ a parametrização do círculo pelas projeções esfereográficas. Isto é,

$$\mathcal{F} = \langle (S^1 - \{(0,1)\}, \pi_N), (S^1 - \{(0,-1)\}, \pi_S) \rangle$$

Onde $\pi_N : S^1 - \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$ e $\pi_S : S^1 - \{(0,-1)\} \to \mathbb{R}$ são as projeções do polo norte e sul respectivamente. Vimos em aula que, com essas coordenadas, $(S^1, \mathcal{F})$ é uma variedade C^∞. Defina $\mathcal{G}$ elevando $\mathcal{F}$ ao cubo,

$$\mathcal{G} = \langle (S^1 - \{(0,1)\}, (\pi_N)^3), (S^1 - \{(0,-1)\}, (\pi_S)^3) \rangle$$

Afirmo que $\mathcal{G}$ é uma estrutura diferenciável de S^1. Isso segue do fato que π_N^3 e π_S^3 continuam sendo homeomorfismos e a composição de cartas dão a mesma coisa que em $\mathcal{F}$. Para verificar isso, escreva $s(t) = t^3$, então, no intervalo de definição $\mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
[(\pi_N)^3] \circ [(\pi_S)^3]^{-1}(t) &= (s \circ \pi_N) \circ (s \circ \pi_S)^{-1}(t) \\
&= s \circ \pi_N \circ \pi_S^{-1} \circ s^{-1}(t) \\
&= s \circ \pi_N \circ \pi_S^{-1}(t^{1/3}) \\
&= s\left(\frac{1}{t^{1/3}}\right) = \frac{1}{t} \in C^\infty
\end{aligned}$$

Onde na quarta igualdade usamos que $\pi_N \circ \pi_S^{-1}(x) : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* = 1/x$. A mesma conta serve para a outra composição $[s \circ \pi_S] \circ [s \circ \pi_N]^{-1}$.

Vamos provar que $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Suponha que fossem iguais, então a composição $\pi_N \circ [s \circ \pi_N]^{-1}(t) = s^{-1}(t) = t^{1/3}$ seria C^∞ que sabemos que é falso.

Para provar que são diffeomorfas, considere:

$$\begin{aligned}
F : (S^1, \mathcal{F}) &\to (S^1, \mathcal{G}) \\
p \neq (0,1) &\mapsto (\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N(p) \\
p \neq (0,-1) &\mapsto (\pi_S^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_S(p)
\end{aligned}$$

Do jeito que está, F pode não parecer bem definida. Seja $p \neq (0,1)$, $(0,-1)$. Queremos mostrar que:

$$(\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N(p) = (\pi_S^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_S(p) \tag{1}$$

Mas temos que todas as funções são homeomorfismos e, principalmente, $\pi_N \circ \pi_S^{-1} = 1/x$. Seja $\pi_N(p) = t$, então $t = [\pi_N \circ \pi_S^{-1}] \circ \pi_S(p) = 1/(\pi_S(p))$, ou seja $\pi_S(p) = 1/t$. Substituindo em (1)

$$\begin{aligned}
(\pi_N^{-1}) \circ s^{-1}(t) &= (\pi_S^{-1}) \circ s^{-1}(1/t) \\
s^{-1}(t) &= (\pi_N \circ \pi_S^{-1}) \circ s^{-1}(1/t) \\
t^{1/3} &= \frac{1}{s^{-1}(1/t)} = t^{1/3}
\end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade aplicamos π_N dos dois lados e na terceira usamos a composição usual. Como tudo pode ser feito de trás para frente, provamos que F está bem definida.

Agora basta provar que os seguintes mapas são diffeos C^∞ em seus dominios (interseções das cartas):

1. $[s \circ \pi_N] \circ F \circ \pi_N^{-1}$
2. $[s \circ \pi_N] \circ F \circ \pi_S^{-1}$
3. $[s \circ \pi_S] \circ F \circ \pi_N^{-1}$
4. $[s \circ \pi_S] \circ F \circ \pi_S^{-1}$

E para isso é só expandi-los, farei (1) e (2) pois os outros dois são análogos.

1. $s \circ \pi_N \circ F \circ \pi_N^{-1} = s \circ \pi_N \circ (\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N \circ \pi_N^{-1} = id$
2. $s \circ \pi_N \circ F \circ \pi_S^{-1} = s \circ \pi_N \circ (\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N \circ \pi_S^{-1} = 1/x$

$\square$

Para não perder nenhum detalhe, vou enunciar aqui a principal ferramenta desta lista.

Theorem 1.1. Seja M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ uma cobertura aberta de M. Então existe uma partição contável da unidade $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}$ com $\operatorname{supp}\varphi_i$ compacto para cada i. Se não for preciso suportes compactos, então existe uma partição da unidade $\{\varphi_\alpha\}$ subordinada à $\{U_\alpha\}$ ($\operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$) com no máximo contáveis φ_α não identicamente nulos.

Problem 1.2.

Proof. Pelo Teorema da Partição da Unidade 1.1, dada uma cobertura $\{U_\alpha\}$, existe uma partição φ_α subordinada. Tome $V_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}[(0,2)]$ abertos. Temos $\overline{V_\alpha} = \operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$ e, para todo $p \in M$, como $\sum_\alpha \varphi_\alpha(p) = 1$, existe α tal que $\varphi_\alpha(p) > 0$, logo $p \in V_\alpha$. Portanto $M \subset \{V_\alpha\}$ e temos um refinamento de $\{U_\alpha\}$. $\square$

Problem 1.3.

Proof. Sejam A e B fechados disjuntos de M, então $\{A^c, B^c\}$ formam uma cobertura de M. Pelo Teorema da Partição da Unidade 1.1, existem $\varphi_{A^c} \geqslant 0$ e $\varphi_{B^c} \geqslant 0$ em $C^\infty(M)$, com $\operatorname{supp}\varphi_{A^c} \subseteq A^c$ e $\operatorname{supp}\varphi_{B^c} \subseteq B^c$. Como para todo $p \in M$, $\varphi_{A^c}(p) + \varphi_{B^c}(p) = 1$ e $\varphi_{B^c} = 0$ em B, então $\varphi_{A^c}(B) = \{1\}$. E achamos a segunda parte da questão, uma função contínua que vale 0 em A e 1 em B. Tome então os abertos disjuntos $W_A = \varphi_{A^c}^{-1}[(-\infty, 1/2)]$ e $W_B = \varphi_{A^c}^{-1}[(1/2, \infty)]$. Claramente $A \subset W_A$ e $B \subset W_B$. $\square$

Problem 1.4.