Listas de Variedades

henrique

September 3, 2025

Contents

0 Introdução e Notação

Ao decorrer do curso, vou escrever minhas resoluções dos exercícios nesse arquivo. Tem alguns motivos para isso:

1. Posso reutilizar resultados passados.
2. Está tudo organizado se um futuro henrique quiser rever.
3. Há uma certo senso de completude no final do curso.

Por isso, peço desculpa ao monitor e ao professor se não gostarem desse formato, me avisem que eu posso separar os arquivos. O código fonte pode ser encontrado em `https://github.com/hnrq104/variedades/tree/main/listas`.

Por enquanto encontrei os seguintes usos de notação pessoal no texto:

1. Denoto $[n] = \{1, \ldots, n\}$ o conjunto dos primeiros n naturais.

1 Lista 1 (18/08/2025)

Problemas feitos:

1. Exercício 1.1 : ✓
2. Exercício 1.2 : ✓
3. Exercício 1.3 : ✓
4. Exercício 1.4 : ☹

Problem 1.1.

Proof. Defina $(S^1, \mathcal{F})$ a parametrização do círculo pelas projeções esfereográficas. Isto é,

$$\mathcal{F} = \langle (S^1 - \{(0,1)\}, \pi_N), (S^1 - \{(0,-1)\}, \pi_S) \rangle$$

Onde $\pi_N : S^1 - \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$ e $\pi_S : S^1 - \{(0,-1)\} \to \mathbb{R}$ são as projeções do polo norte e sul respectivamente. Vimos em aula que, com essas coordenadas, $(S^1, \mathcal{F})$ é uma variedade C^∞. Defina $\mathcal{G}$ elevando $\mathcal{F}$ ao cubo,

$$\mathcal{G} = \langle (S^1 - \{(0,1)\}, (\pi_N)^3), (S^1 - \{(0,-1)\}, (\pi_S)^3) \rangle$$

Afirmo que $\mathcal{G}$ é uma estrutura diferenciável de S^1. Isso segue do fato que π_N^3 e π_S^3 continuam sendo homeomorfismos e a composição de cartas dão a mesma coisa que em $\mathcal{F}$. Para verificar isso, escreva $s(t) = t^3$, então, no intervalo de definição $\mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
[(\pi_N)^3] \circ [(\pi_S)^3]^{-1}(t) &= (s \circ \pi_N) \circ (s \circ \pi_S)^{-1}(t) \\
&= s \circ \pi_N \circ \pi_S^{-1} \circ s^{-1}(t) \\
&= s \circ \pi_N \circ \pi_S^{-1}(t^{1/3}) \\
&= s\left(\frac{1}{t^{1/3}}\right) = \frac{1}{t} \in C^\infty
\end{aligned}$$

Onde na quarta igualdade usamos que $\pi_N \circ \pi_S^{-1}(x) : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* = 1/x$. A mesma conta serve para a outra composição $[s \circ \pi_S] \circ [s \circ \pi_N]^{-1}$.

Vamos provar que $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Suponha que fossem iguais, então a composição $\pi_N \circ [s \circ \pi_N]^{-1}(t) = s^{-1}(t) = t^{1/3}$ seria C^∞ que sabemos que é falso.

Para provar que são diffeomorfas, considere:

$$\begin{aligned}
F : (S^1, \mathcal{F}) &\to (S^1, \mathcal{G}) \\
p \neq (0,1) &\mapsto (\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N(p) \\
p \neq (0,-1) &\mapsto (\pi_S^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_S(p)
\end{aligned}$$

Do jeito que está, F pode não parecer bem definida. Seja $p \neq (0,1)$, $(0,-1)$. Queremos mostrar que:

$$(\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N(p) = (\pi_S^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_S(p) \tag{1}$$

Mas temos que todas as funções são homeomorfismos e, principalmente, $\pi_N \circ \pi_S^{-1} = 1/x$. Seja $\pi_N(p) = t$, então $t = [\pi_N \circ \pi_S^{-1}] \circ \pi_S(p) = 1/(\pi_S(p))$, ou seja $\pi_S(p) = 1/t$. Substituindo em (1)

$$\begin{aligned}
(\pi_N^{-1}) \circ s^{-1}(t) &= (\pi_S^{-1}) \circ s^{-1}(1/t) \\
s^{-1}(t) &= (\pi_N \circ \pi_S^{-1}) \circ s^{-1}(1/t) \\
t^{1/3} &= \frac{1}{s^{-1}(1/t)} = t^{1/3}
\end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade aplicamos π_N dos dois lados e na terceira usamos a composição usual. Como tudo pode ser feito de trás para frente, provamos que F está bem definida.

Agora basta provar que os seguintes mapas são diffeos C^∞ em seus dominios (interseções das cartas):

1. $[s \circ \pi_N] \circ F \circ \pi_N^{-1}$
2. $[s \circ \pi_N] \circ F \circ \pi_S^{-1}$

3. $[s \circ \pi_S] \circ F \circ \pi_N^{-1}$
4. $[s \circ \pi_S] \circ F \circ \pi_S^{-1}$

E para isso é só expandi-los, farei (1) e (2) pois os outros dois são análogos.

1. $s \circ \pi_N \circ F \circ \pi_N^{-1} = s \circ \pi_N \circ (\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N \circ \pi_N^{-1} = id$
2. $s \circ \pi_N \circ F \circ \pi_S^{-1} = s \circ \pi_N \circ (\pi_N^{-1}) \circ s^{-1} \circ \pi_N \circ \pi_S^{-1} = 1/x$

$\square$

Para não perder nenhum detalhe, vou enunciar aqui a principal ferramenta desta lista.

Theorem 1.1. Seja M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ uma cobertura aberta de M. Então existe uma partição contável da unidade $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}$ com $\operatorname{supp}\varphi_i$ compacto para cada i. Se não for preciso suportes compactos, então existe uma partição da unidade $\{\varphi_\alpha\}$ subordinada à $\{U_\alpha\}$ ($\operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$) com no máximo contáveis φ_α não identicamente nulos.

Problem 1.2.

Proof. Pelo Teorema da Partição da Unidade 1.1, dada uma cobertura $\{U_\alpha\}$, existe uma partição φ_α subordinada. Tome $V_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}[(0, 2)]$ abertos. Temos $\overline{V_\alpha} = \operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$ e, para todo $p \in M$, como $\sum_\alpha \varphi_\alpha(p) = 1$, existe α tal que $\varphi_\alpha(p) > 0$, logo $p \in V_\alpha$. Portanto $M \subset \{V_\alpha\}$ e temos um refinamento de $\{U_\alpha\}$. $\square$

Problem 1.3.

Proof. Sejam A e B fechados disjuntos de M, então $\{A^c, B^c\}$ formam uma cobertura de M. Pelo Teorema da Partição da Unidade 1.1, existem $\varphi_{A^c} \geqslant 0$ e $\varphi_{B^c} \geqslant 0$ em $C^\infty(M)$, com $\operatorname{supp}\varphi_{A^c} \subseteq A^c$ e $\operatorname{supp}\varphi_{B^c} \subseteq B^c$. Como para todo $p \in M$, $\varphi_{A^c}(p) + \varphi_{B^c}(p) = 1$ e $\varphi_{B^c} = 0$ em B, então temos

$$\varphi_{A^c}(A) = \{0\}$$
$$\varphi_{A^c}(B) = \{1\}$$

E achamos a segunda parte da questão, uma função contínua que vale 0 em A e 1 em B. Tome então os abertos disjuntos $W_A = \varphi_{A^c}^{-1}[(-\infty, 1/2)]$ e $W_B = \varphi_{A^c}^{-1}[(1/2, \infty)]$. Claramente $A \subset W_A$ e $B \subset W_B$. $\square$

Problem 1.4.

Conversando na aula de segunda (25/08), perguntamos para o Prof. Heluani se deveríamos provar esse resultado (estender o acima para funções não limitadas). Ele nos disse que o interesse maior nesse problema era mostrar que esse resultado (Teorema da Extensão de Tietze) é válido para Variédades vistas como espaços topológicos. Isso é consequência de elas serem espaços normais (visto no problema anterior). Segue o enunciado do Teorema

Theorem 1.2. (Extensão de Tietze) Seja X um espaço topológico normal, $A \subseteq X$ um subconjunto fechado e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe uma função contínua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que a $\tilde{f}|_A = f$.

Sobre a extensão ser C^∞, devemos dar uma definição para o que isso significaria - uma função ser suave em um fechado. Aqui segui a ideia do Davi na monitoria, de que existe um abertinho maior em que ela está definida. Depois devemos verificar se é possível estender funções assim para toda a variedade. A resposta dessa afirmação é positiva, mas requer também um pouco mais de teoria do que vimos. A seguir temos uma tentativa.

Lemma 1.3. Seja M uma variedade, $A \subseteq M$ um conjunto fechado e $U \supseteq A$ um aberto onde está definida uma função suave $f : U \to \mathbb{R}$. Existe uma função $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ suave tal que as restrições $\tilde{f}_A = f_A$ são idênticas.

Proof. Para cada ponto $p \in A$, escolha uma vizinhança e uma função suave $(V_p, \tilde{f}_p)$ tal que $\tilde{f}_p : V_p \to \mathbb{R}$ é idêntica a f em $V_p \cap A$. Isso é possível usando funções bump e aproveitando o fato que M é localmente compacta - o que não foi provado. Tomamos uma partição da unidade $\{\varphi_p : p \in A\} \cup \{\varphi_{A^c}\}$ subordinada a cobertura $\{V_p : p \in A\} \cup \{A^c\}$. Para cada $p \in A$, o produto $\varphi_p \tilde{f}_p$ é C^∞ em V_p e tem uma extensão natural 0 fora do suporte de φ_p. Definimos então $\tilde{f} = \sum_{p \in A} \varphi_p \tilde{f}_p$. □

2 Lista 2 (02/09/2025)

Problemas feitos:

1. Exercício 2.1 : ✓
2. Exercício 2.2 : ✓
3. Exercício 2.3 : ✓
4. Exercício 2.4 : ✓
5. Exercício 2.5 : ✓

Problem 2.1.

Proof. Considere o atlas de $S^1 \subset \mathbb{C}$ gerado por (U, θ_1) e (V, θ_2) onde $U = S^1 - \{1\}$ e θ_1 é definida tomando o ramo apropriado do logaritmo de forma que

$$\begin{aligned} \theta_1 : U &\to (0, 2\pi) \\ z &\mapsto \frac{\log(z)}{i} \end{aligned}$$

Semelhantemente, $V = S^1 - \{-1\}$ e escolhemos um outro ramo de log a fim que

$$\begin{aligned} \theta_2 : V &\to (-\pi, \pi) \\ z &\mapsto \frac{\log(z)}{i} \end{aligned}$$

Sabemos que esses ramos log são diffeos em seus domínios e a composição $\theta_1 \circ \theta_2^{-1} : (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ dada por

$$\theta_1 \circ \theta_2^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < \pi \\ x + \pi & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Essa função é C^∞, pois os abertos da definição são disjuntos. Da mesma forma $\theta_2 \circ \theta_1^{-1} \in C^\infty$.

Para mostrar que $e^{ix} : \mathbb{R} \to S^1$ é C^∞, basta ver que a composições com os mapas é C^∞. Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x \in (2\pi n, 2\pi(n+1)) \quad \vee \quad x \in (2\pi n - \pi, 2\pi(n+1) - \pi)$$

No primeiro caso, claramente $\theta_1(e^{ix}) = x - 2\pi n$ que é C^∞. No segundo caso, $\theta_2(e^{ix}) = x - 2\pi n - \pi \in \mathbb{C}^\infty$. Assim mostramos que para qualquer ponto de $\mathbb{R}$, existe um aberto U tal que a composição $\theta_i \circ e^{ix}|_U$ é C^∞, como consequência, e^{ix} é C^∞. □

Problem 2.2.

Proof. Tome o mesmo atlas que na questão anterior, note que se (U, θ) é uma carta e $V \subset U$, então $(V, \theta|_V)$ é óbviamente uma carta do atlas também. Para mostrar que $z^2 \in C^\infty$ vamos verificar então que para todo $z \in S^1$, existe um uma carta (A, θ) ao redor de z e uma carta (B, ϕ) ao redor de z^2 tal que a composição $\phi \circ z^2 \circ \theta^{-1}$ é C^∞.

Separamos 4 cartas de S^1 e qual coordenadas usaremos na imagem de cada vizinhança,

1. $(A_1 = \{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}, \theta_2|_{A_1})$ e $(B_1 = V, \theta_2)$
2. $(A_2 = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}, \theta_1|_{A_2})$ e $(B_2 = U, \theta_1)$
3. $(A_3 = \{z : \mathrm{Re}(z) < 0\}, \theta_1|_{A_3})$ e $(B_3 = U, \theta_1)$
4. $(A_4 = \{z : \mathrm{Im}(z) < 0\}, \theta_2|_{A_4})$ e $(B_4 = V, \theta_2)$

Claramente os A_i cobrem S^1 e como para cada i, $z^2(A_i) = B_i$, estamos cobrindo a imagem de z^2. Substituindo os índices, falta verificar que em cada item que a composição $\theta_k \circ z^2 \circ (\theta_k|_{A_i})^{-1}$ é C^∞. Calculando-as, temos

1. $\theta_2 \circ z^2 \circ (\theta_2|_{A_1})^{-1} : (-\pi/2, \pi/2) \to (-\pi, \pi)$ é tal que $z \mapsto 2z$
2. $\theta_1 \circ z^2 \circ (\theta_1|_{A_2})^{-1} : (0, \pi) \to (0, 2\pi)$ é tal que $z \mapsto 2z$
3. $\theta_1 \circ z^2 \circ (\theta_1|_{A_3})^{-1} : (\pi/2, 3\pi/2) \to (-\pi, \pi)$ é tal que $z \mapsto 2z - 2\pi$
4. $\theta_2 \circ z^2 \circ (\theta_2|_{A_4})^{-1} : (-\pi, 0) \to (0, 2\pi)$ é tal que $z \mapsto 2z + 2\pi$

Como todas são C^∞, z^2 é C^∞.

□

Para os próximos dois problemas, vamos enunciar a ferramenta principal e sua versão em variedades - presumo que ainda será bastante utilizada no curso.

Theorem 2.1. (Teorema da Função Implícita) Seja $U \subset \mathbb{R}^{c-d} \times \mathbb{R}^d$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^d \in C^\infty$. Denote o sistema canônico de coordenadas em $\mathbb{R}^{c-d} \times \mathbb{R}^d$ por $(r_1, \ldots, r_{c-d}, s_1, \ldots, s_d)$. Suponha que no ponto $(r_0, s_0) \in U$

$$f(r_0, s_0) = 0$$

e que a matriz

$$\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \right\}_{i,j=1,\ldots,d}$$

é não singular. Então existe uma vizinhança aberta V de r_0 em R^{c-d} e uma vizinhança aberta W de s_0 em $\mathbb{R}^d$ tal que $V \times W \subset U$, e existe um mapa C^∞ $g : V \to W$ tal que para cada par $(p, q) \in V \times W$

$$f(p, q) = 0 \iff q = g(p)$$

Theorem 2.2. Assuma que $\psi : M^c \to N^d$ é C^∞, que n é um ponto de N, tal que $P = \psi^{-1}(n)$ é não vazio, e que $d\psi : M_m \to N_{\psi(m)}$ é sobrejetiva para todo $m \in P$. Então P tem uma estrutura diferenciável única tal que (P, i) é subvariedade de M, onde i é o mapa da inclusão. Além do mais, $i : P \to M$ é uma imersão, e a dimensão de P é $c - d$.

Problem 2.3.

Proof. Vamos provar que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n\times n}$ invocando o teorema anterior com a função $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Para isso, basta mostrar que 1 é valor regular de det, ou seja, se $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, então $d(\det)|_A$ é sobrejetiva em $\mathbb{R}$. Como o contradomínio é $\mathbb{R}$, basta mostrar que em uma coordenada x_{ij} vale que

$$\left.\frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}\right|_A \neq 0$$

Mas isso segue da decomposição de Cramer do determinante. Seja $X^c_{i,j}$ a matriz dos cofatores de uma matriz X em i, j. Por Cramer, para qualquer $k \in [n]$,

$$\det(X) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} x_{k,i} \det(X^c_{k,i}) \tag{2}$$

Naturalmente,

$$\left.\frac{\partial \det}{\partial x_{k,j}}\right|_X = (-1)^{k+j} \det(X^c_{k,i})$$

Como $\det(A) = 1$, aplicando a regra em $k = 1$, segue que existe alguma matriz de cofatores $A^c_{1,i}$ com determinante não nulo. Portanto,

$$\left.\frac{\partial \det}{\partial x_{1,i}}\right|_A = (-1)^{1+i} \det(A^c_{1,i}) \neq 0$$

e o diferencial é sobrejetivo. Por 2.2, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ é uma imersão em $\mathbb{R}^{n\times n}$ de dimensão $n^2 - 1$. □

Problem 2.4.

Primeira prova usual rápida.

Proof. Considere $F : \mathrm{GL}(d,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{d(d+1)/2}$ tal que

$$F(A) = A \cdot A^T$$

Note que como $(A \cdot A^T)^T = A \cdot A^T$, $F(A)$ é simétrica e o contradomínio faz sentido. Vamos provar que I (como matriz simétrica) é valor regular da função F para que possamos aplicar 2.2. A diferencial de F em A em relação a um vetor H pode ser obtida facilmente considerando a diferença (que é linear) de $F(A+H) - F(A)$.

$$DF_A(H) = F(A+H) - F(A) = H \cdot A^T + A \cdot H^T$$

Para mostrar que essa diferencial é sobrejetiva, tome B tal que $B = B^T$, então escolhendo $H = BA/2$, temos que

$$DF_A(BA/2) = \frac{(BA)A^T}{2} + \frac{A(BA)^T}{2} = \frac{B}{2} + \frac{B^T}{2} = B$$

Onde usamos que $AA^T = I$ na segunda igualdade. Portanto, DF_A é sobrejetiva para cada $A \in F^{-1}(I)$, logo, pelo Teorema da Função Implícita, $F^{-1}(I)$ é uma subvariedade de $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ de dimensão $d(d-1)/2$. □

Segunda prova, delineada pelo Warner em 1.40(b).

Proof. Novamente, seja F como na prova anterior. Usaremos a mesma estratégia, queremos mostrar que dF_A é sobrejetiva para cada $A \in O(d)$. Dado $A \in O(d)$, defina o diffeo $r_A : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ que para $M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$,

$$r_A(M) = M \cdot A$$

Quando se espressa $d(r_A)$ em coordenadas é claro que - como função linear, $d(r_A) = A$, logo é C^∞. Da mesma forma, a inversa $r_{A^{-1}}$ é C^∞. Aqui está a ideia principal do Warner, note que

$$F = F \circ r_A$$

pois, para todo X,

$$F(X) = XX^T = (XA)(XA)^T = F \circ r_A(X)$$

Portanto podemos diferenciar a função da direita ao invés de somente F, usando a regra da cadeia, encontramos que

$$dF_A = d(F \circ r_{A^{-1}})_A = dF_I \circ d(r_{A^{-1}})_A = dF_I \circ A^{-1}$$

Como A^{-1} é invertível, para saber se dF_A é sobrejetiva, basta verificar se dF_I é sobrejetiva. Mas isso seguirá imediatamente do fato que para $i \leqslant j$ e $l \leqslant k$,

$$\left.\frac{\partial F_{i,j}}{\partial x_{l,k}}\right|_I = \delta^{i,j}_{l,k}$$

Isso é a derivada de F em I em relação a coordenada (l, k) é justamente a matriz simétrica com 1 somente na coordenada (l, k) e 0 nas outras entradas. Para a prova, note que

$$F(X)_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} x_{i,d}x_{j,d} \tag{3}$$

Logo, se $l, k = i, j$,

$$\left.\frac{\partial F_{i,j}}{\partial x_{i,j}}\right|_{X=I} = x_{j,j}|_I = 1$$

Se $l \neq i$,

$$\frac{\partial F_{i,j}}{\partial x_{l,k}} = 0$$

Pois $x_{l,k}$ sequer aparece na soma (3). Se $l = i$, mas $k \neq j$, então

$$\left.\frac{\partial F_{i,j}}{\partial x_{i,k}}\right|_{X=I} = x_{j,k}|_I = 0$$

E provamos a a identidade que queriámos. Portanto, dF_I é sobrejetiva, por consequência, dF_A é sobrejetiva para todo $A \in O(d)$, logo $O(d)$ é naturalmente subvariedade de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

□

Problem 2.5.

Esse problema é capcioso, eu infelizmente já havia visto a solução antes da lista estar disponível.

Proof. Como M é compacto, a imagem $f(M)$ é compacta, logo existe $m \in M$ tal que a primeira coordenada $f_1(m)$ atinge o valor máximo. Dado $(x_i)_{i=1}^d$ um sistema de coordenadas na vizinhança de m, como $f_1(m)$ é máximo, para cada i

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = 0$$

Portanto a matriz jacobiana

$$\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}_{i,j \in [d]}$$

é composta de 0's na primeira coluna. df não pode ser sobrejetiva. □