

Hinweise zur Korrektur der HMI-Abgaben WS2016 / 2017

Heiner Stroick, heiner.stroick@tu-dortmund.de

Stand: 25. November 2016

Hinweis:

Dies ist kein offizielles Dokument und nicht mit der HM-Orga oder den Dozenten der Vorlesung abgesprochen. Es wird auch nicht von offizieller Seite gegengelesen.

Kein Anspruch auf Vollständigkeit und / oder Korrektheit.

Fehler gefunden? Bitte per Mail melden!

Blatt 2

- Ihr sollt beim Auswerten der Summen die Summenformeln benutzen. In der Klausur habt ihr keinen Taschenrechner und auch keine Zeit, jeden Summanden aufzuschreiben und diese dann buchstäblich von Hand zu addieren.
- Die wichtigsten Summenformeln solltet ihr auswendig kennen (oder zumindest zur eigenen Sicherheit auf dem Zettel stehen haben). Wenn die Summenformeln zwar auf dem Zettel sind, ihr aber nicht wisst, dass es sie gibt, habt ihr leider auch nichts davon.
- Bei der geometrischen Summenformel darauf achten, dass die Summation bei $k = 0$ beginnt.
- Fehler bei der Klammersetzung. Achtet darauf, das ist wichtig. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^2 \neq \sum_{k=0}^n k^2 + 2k + 1$$

- Potenzgesetze sollten euch klar sein.
- konzentrierter Arbeiten: Viele Abschreibfehler, offene Klammern wurden nicht geschlossen, Indizes hießen mal k und mal l , manchmal hatten Summen gar kein Argument.
- Äquivalenzzeichen machen, wenn ihr Gleichungen umformt.

Blatt 3

- Bei Nachweisen wie der Gleichheit in der 1) a) betrachtet man entweder zunächst nur die linke Seite und danach nur die rechte Seite (und stellt dann fest, dass sich beide Ausdrücke in denselben umformen lassen) oder leitet den einen aus dem anderen her.
- Beim bin. Lehrsatz auf den richtigen Exponenten bei $(x + y)^n$ achten.
- Die Ausdrücke $(1 + \pi)^9$ und $(2 + a)^7$ waren laut ML auszuschreiben. Achtet auf die Vorfaktoren, die sich aus dem Binomialkoeffizienten ergeben. Ich habe das nicht als Fehler gewertet, wurden die Ausdrücke nicht ausgeschrieben. Ein „Endergebnis“ (eine Zahl) ist nicht interessant, ihr habt in der Klausur auch keinen Taschenrechner.
- Bei der 2) a) haben einige von euch die Fakultäten sehr umständlich umgeformt. Die Bedeutung von $n!$ ist wichtig und muss euch bekannt sein. Ebenfalls müsst ihr Fakultäten kürzen können: Oft ist es einfacher, Faktoren aus $(n + 3)!$ rauszuziehen, um es mit $n!$ zu kürzen, als $n!$ zu erweitern, um $(n + 3)!$ komplett zu kürzen (auch weniger Fehleranfällig, da evtl. nicht mit einem Kehrwert multipliziert werden muss). Ihr solltet beide Wege beherrschen: Fakultäten »vergrößern« (wie kann ich $(n - 4)!$ in $n!$ umformen?) und »verkleinern« (wie kann ich $(n + 4)!$ in $n!$ umformen?).
- Wichtig: Klammersetzung bei Fakultäten:

$$\begin{aligned}(4n)! &\neq 4n! \\ (2n + 1)! &\neq 2n + 1!\end{aligned}$$

Macht euch das an Beispielen klar.

- Thema Induktion: Die Induktion besteht aus drei Grundbausteinen: Ind.-Anfang (IA), Ind.-Voraussetzung (IV) und Ind.-Schritt / Ind.-Schluss (IS). Die Ind.-Behauptung (IB) ist nur eine Hilfestellung und darf nicht mit dem (IS) verwechselt oder vermischt werden.
- Zur 4) a): Legt Wert auf den (IA): Wenn ihr solch eine Summe beweisen sollt, setzt $n = 1$ und schreibt die Summe zunächst noch einmal auf. Achtung: Das Argument der Summe hängt nach wie vor von k ab:

$$\sum_{k=1}^1 k^2$$

Erst dann rechnet ihr die Summe aus. Dann betrachtet ihr in einer *anderen* Rechnung die rechte Seite des zu beweisenden Ausdrucks (ihr könnt am Anfang nicht einfach ein „=“ dazwischen schreiben – ihr wisst ja nicht, ob es wirklich gleich ist. Eine Möglichkeit wäre, ein Fragezeichen über das Gleichheitszeichen zu schreiben.). Wenn bei beidem dasselbe raus kommt, ist der (IA) gezeigt (»Linke Seite = Rechte Seite«). Ein „ $1 = 1$ “ ist zu kurz.

- Auf Klammersetzung bei der (IB) achten: n durch $(n + 1)$ (Klammern!) ersetzen.
- Es muss beim (IS) $n \rightsquigarrow n + 1$ heißen und nicht $n \longrightarrow n + 1, n \longmapsto n + 1, n = n + 1$ oder $n \implies n + 1$.
- Ihr solltet auch Terme wie $(2n + 1)$ ausklammern können (oder eine Idee haben wie das geht: Polynomdivision).
- Eine (IV) wie „Die Aussage gelte.“ ist zu ungenau (und falsch). Die Variante „Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$ “ ist falsch (dann setzt ihr voraus, dass die Aussage für alle n gilt – dann wäre der ganze Beweis nicht mehr nötig.)
- Bei der 4) b) muss im (IA) auch zunächst ein k im Argument stehen:

$$\prod_{k=2}^2 \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

Der Ausdruck

$$\prod_{k=2}^2 \frac{2^2}{2^2 - 1}$$

ist falsch (siehe Erläuterungen zur Summe oben).

- Terme wie $(n + 1)^2$ würde ich so spät wie möglich ausschreiben. Guckt erstmal, ob man kürzen kann.
- Bei der 4) c) solltet ihr die »Teilbarkeit« noch einmal mathematisch aufschreiben. Die (IV) lautet dabei: „Der Ausdruck $2^{2n+1} + 1$ sei **für ein** $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar, d.h. es gibt zu diesem n eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $2^{2n+1} + 1 = 3m$.“ Macht euch klar, dass das m von n abhängt.
- Die (IB) als Hilfestellung für den Beweis sieht so aus: „Zu zeigen ist, dass der Ausdruck $2^{2(n+1)+1} + 1$ für $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist, d.h. es gibt zu diesem n eine Zahl $\overline{m} \in \mathbb{N}$ mit $2^{2(n+1)+1} + 1 = 3\overline{m}$.“ Macht euch klar, dass das \overline{m} von n abhängt.
- Gebt beim (IA) und am Ende des (IS) m und \overline{m} an.
- Auf Klammersetzung beim Einsetzen der (IV) achten. Wenn ihr in einer Induktion die (IV) nicht gebraucht, habt ihr etwas falsch gemacht.
- Weiterhin gilt: Auf Äquivalenzzeichen achten, diese bedeuten nicht dasselbe wie Gleichheitszeichen. Macht euch den Unterschied klar und wann man was verwendet.
- Schreibt zu Beginn einer Rechnung die Aufgabe (nicht die Aufgabenstellung ☺) ab. Eine Rechnung mit „ $= \dots$ “ zu beginnen und dann schon den ersten Umformungsschritt durchgeführt zu haben, ist nicht so schön.
- Es heißt $n \in \mathbb{N}$, nicht $n \varepsilon \mathbb{N}$ und auch nicht $n \in \mathbb{N}$.

Blatt 4

- Zur Erklärung: „Not.“ = Notation (etwas ist falsch und / oder unsauber aufgeschrieben – meist bei der Angabe der Lösungsmenge).
- Zur Erklärung: $\mathbb{L} = ?$, $\mathbb{D} = ?$ meint, dass die Angabe der Lösungsmenge / Definitionsbereich fehlt.
- Zur Erklärung: „FU“ meint *Fallunterscheidung* (meist falsch gemacht, nicht konsistent mit den anderen oder kritische Stellen vergessen).
- Bei Fallunterscheidungen zu Ungleichungen ist der Ausdruck, den ihr untersucht, im Fall < 0 nicht durch ein $-(\text{AUSDRUCK})$ zu ersetzen, d.h. für den Fall $x - 1 < 0$ ist der Ausdruck $\frac{1}{x-1}$ in

$$\frac{1}{x-1} < 4x$$

nicht durch $\frac{1}{-(x-1)}$ zu ersetzen.

- Es muss $\mathbb{L} = \text{MENGE}$ heißen, z.B. $\mathbb{L} = [0, 6)$. Intervalle sind auch Mengen. Viele vergessen das „=“ oder schreiben nur $\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ (was prinzipiell richtig wäre, aber dann meist die Fallvoraussetzung vergessen wurde – z.B. $x < 4$. $\mathbb{L} = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$ wäre dann richtig).
- Die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2} < x < 4\right\}$$

ist etwas ungenau, weil da nicht zu erkennen ist, aus welchem Zahlenbereich ($\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$) das x ist. Besser ist:

$$\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 4\right\}$$

Oder kürzer (geht nur im Reellen!):

$$\mathbb{L} = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$$

- Die Zeichen \cap und \cup sind Zeichen, die zwischen *Mengen* stehen (Schnitt, Vereinigung).

Nicht verwechseln: Die Zeichen \wedge und \vee (UND, ODER) stehen zwischen *Aussagen*. Gleichungen oder Ungleichungen sind *Aussagen*. Lösungsmengen sind *Mengen* und keine Aussagen.

Tipp zum Merken: \vee kommt von lat. „vel“ („oder“), \wedge meint dann eben „und“.

- Achtet bei Fallunterscheidungen darauf, wirklich den kompletten Definitionsbereich abzudecken. Wenn ihr mit den Zeichen $<$ und $>$ unsauber umgeht, vergesst ihr Werte

(eben die „Sprungstellen“). Oder ihr nehmt Werte dazu, wo eigentlich Definitionslücken sind.

- Verwechslungsgefahr: Ihr dürft im Betrag etwas negatives oder 0 haben. Das heißt, eine vorherige Untersuchung für den Definitionsbereich, wo z.B. für $|5x - 6| > 0$ das Argument des Betrages (eben $5x - 6$) Null wird, ist nicht nötig.

Also: Der Definitionsbereich ist hier \mathbb{R} , insbesondere $x = \frac{6}{5}$. (Der Wertebereich bzw. die Lösungsmenge sieht natürlich anders aus und ist nicht notwendigerweise immer \mathbb{R} ; hier auch nicht. Eine Untersuchung von $5x - 6 = 0$ kann darüber hinaus sinnvoll für die Fallunterscheidung sein.)

- Wenn ihr aus einem Intervall einzelne Werte ausschließen wollt, sieht die korrekte Notation dafür so aus:

$$\mathbb{L} = (-3, 7) \setminus \{2\}$$

Auch okay ist:

$$\mathbb{L} = (-3, 2) \cup (2, 7)$$

Etwas wie

$$\mathbb{L} = (-3, 7) \setminus 2$$

ist mathematisch falsch notiert. Der Operator „ \setminus “ (SETMINUS) steht *stets zwischen Mengen*, und 2 ist keine Menge, $\{2\}$ aber schon.

- Aussagen wie

$$2 < 2$$

sind falsche Aussagen. Es gilt nämlich nur $2 \leq 2$.

Dies kommt bei 1) e) zum Tragen:

$$0 > -x^2$$

ist äquivalent zu $x \neq 0$, da $0 < 0$ falsch ist und sonst das Quadrat einer reellen Zahl immer positiv ist.

- Es ist $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, in der Regel meint ihr ersteres (z.B. bei der Angabe der Lösungsmenge).
- In der Klausur habt ihr **keinen Taschenrechner**. Rechnet mit Brüchen und Wurzeln. Zahlen wie $\frac{1}{9} - \sqrt{\frac{4}{7}} - 6$ sind völlig okay und müssen auch nicht weiter zusammengefasst werden (Zweierpotenzen bis $2^{10} = 1024$ sollte man auswendig wissen...).

- Auch wenn die Angabe *einer* Lösungsmenge am Ende ausreichend ist (\mathbb{L}_{Ges}), solltet ihr überlegen, nach jedem Fall eine Lösungsmenge anzugeben ($\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \dots$). So macht ihr weniger Fehler beim Vereinigen der Lösungsmengen (s. Hinweis zur Notation oben).
- Es gilt (Intervallgrenzen beachten!)

$$(-\infty, 1) \cup (3, \infty) = \mathbb{R} \setminus [1, 3]$$

- Bei der o) (i) kann kein Intervall angegeben werden, da Punkte in der Ebene (später nennen wir das Vektoren) keine Ordnung besitzen (ähnlich wie komplexe Zahlen kann nicht gesagt werden, welcher Punkt größer ist oder kleiner ist, was aber eine zwingende Voraussetzung für Intervalle ist). Die Lösungsmenge muss anders formuliert werden:

$$\mathbb{L} = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid \dots \}$$

- Bei Intervallen steht die kleinere Zahl links des Kommas, sonst ist die durch das Intervall beschriebene Menge leer (Definition der Intervalle im Skript evtl. nochmal ansehen).
- Ein Komma in den Eigenschaften bei einer Mengenangabe bedeutet „und“. Das heißt, die folgende Menge ist leer und ist **nicht** eine andere Schreibweise für das Intervall $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$.

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1, x > 3\}$$

Blatt 5

- Beim Zeichnen komplexer Zahlen wird die imaginäre Achse ohne i skaliert. Bei solchen Skizzen solltet ihr (ungefähr) dieselbe Skalierung auf beiden Achsen verwenden (macht das Winkel-Ablesen einfacher!) – sonst bin ich da nicht so pingelig.
- Der Imaginärteil einer komplexen Zahl wird **ohne** i angegeben. Der Imaginärteil ist reell! Das ist ein grober Fehler. Punktabzug.
- Bei der 2) a) sind \bar{z} oder $z = 0$ nur eine Lösung. Die richtige Idee ist hier, das z durch $x + iy$ zu ersetzen, alles auszumultiplizieren und dann den Imaginärteil zu betrachten. Dieser muss gleich Null gesetzt werden, damit das Produkt reell ist. Dabei reicht es, entweder nach x oder nach y umzuformen. Der Realteil ist bereits reell (ein Auflösen nach x bzw. y ist hier nicht nötig).

Grob falsch ist folgender Rechenweg hinter der Idee „Ein Produkt ist genau dann gleich 0, wenn beide Faktoren Null sind.“ Also wäre $z = 0$ oder $3 + 5i = 0$ (bis hierhin noch okay – die zweite Gleichung ist nicht erfüllt¹). Die zweite Gleichung dann aber nach i aufzulösen ist grob falsch, in der Gleichung kommt gar keine Variable vor. Punktabzug.

Eine Lösungsmenge muss angegeben werden (hier nach x aufgelöst):

$$\mathbb{L} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x - i\frac{5}{3}x \text{ mit } x \in \mathbb{R}\}$$

- Zwischen einfache Termumformungen kommen Gleichheitszeichen, wenn ihr Gleichungen umformt, kommen Äquivalenzzeichen dazwischen. Punktabzug (ich habe es oft genug geprüdelt...)
- Bei der 2) c) (i) reicht es nicht, zu erkennen, dass es da ein „Muster“ gibt. Ich hätte gerne so etwas wie

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4m \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \\ i, & n = 4m + 1 \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \\ -1, & n = 4m + 2 \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \\ -i, & n = 4m + 3 \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

gelesen.

- Wenn nach dem Ausrechnen des Betrages einer komplexen Zahl ein i auftaucht, ist das ein grober Fehler. Der Betrag einer komplexen Zahl ist reell! Punktabzug.

Guckt euch nochmal an, wie man in \mathbb{C} den Betrag berechnet. **Insbesondere ist**

¹Hier steht so etwas wie $3 = 0$ im Reellen.

keine Fallunterscheidung wie im Reellen nötig.² Den Betrag kann man einfach ausrechnen.

- Ob man Gleichungen korrekt gelöst hat, kann man überprüfen, indem man die vermeintliche Lösung (bei ∞ -vielen Lösungen: eine bzw. mehrere) für z (die Variable) einsetzt. Geht die Gleichung auf, hat man richtig gerechnet.
- Es ist oft sinnvoll, bei Gleichungen das z so spät wie möglich durch $x + iy$ oder $a + ib$ zu ersetzen.

Zum Beispiel würde ich

$$(z - 2i)^2 = (z + 2i)^2$$

zunächst mit z ausrechnen, weil so nur zwei Summanden in der Klammer stehen (einfache bin. Formel). Ersetzt man das z durch $x + iy$ am Anfang, hat man drei Summanden (das Potenzieren mit 2 ist umfangreicher und fehleranfälliger). Auch wenn man alle Summanden mit i zusammenfasst, entstehen neue bin. Formeln, die ausmultipliziert werden müssen.

$$(x + iy - 2i)^2 = (x + iy + 2i)^2$$

- Eine Möglichkeit, Lösungsmengen in \mathbb{C} zu notieren (hier für die Aufgabe j). Beachtet, dass es hier ∞ -viele Lösungen gibt):

$$\mathbb{L} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = -\frac{3}{5}x + \frac{8}{5}\}$$

- Wenn ihr für die Lösung einer Gleichung „nur“ zwei komplexe Zahlen raus bekommt, könnt ihr diese einfach aufzählen:

$$\mathbb{L}_{(k)} \text{ (ii)} = \{-2 + 2i, -3 + 3i\}$$

- Bei der k) (i) und (ii) empfiehlt sich eine Skizze. Dabei kommt man bei der (i) nach ein paar Rechenschritten auf eine Kreisgleichung – (ii) ist dann die Schnittmenge des Kreisbogens um $-3 + 2i$ mit Radius 1 und der Geraden, die durch $a - ai$ beschrieben wird (Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten).

²Das ist auch allein schon deshalb nicht sinnvoll, da die komplexen Zahlen keine Ordnung besitzen. Das heißt, eine Fallunterscheidung wo $3 - 4i < 0$ ist, ist sinnlos (und nicht lösbar und falsch ☺).

Lizenz

Dieses Dokument steht unter einer »Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International«-Lizenz.

Die Bedingungen der Lizenz können unter folgendem Link eingesehen werden:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.de>