

Hinweise zur Korrektur der HMI-Abgaben WS2016 / 2017

Heiner Stroick, heiner.stroick@tu-dortmund.de

Stand: 16. Dezember 2016

Hinweis:

Dies ist kein offizielles Dokument und nicht mit der HM-Orga oder den Dozenten der Vorlesung abgesprochen. Es wird auch nicht von offizieller Seite gegengelesen.
Die neuste Version wird unter diesem Link zum Download angeboten:

<https://github.com/hnrstrck/Anmerkungen-Korrekturen-HM1/>

Kein Anspruch auf Vollständigkeit und / oder Korrektheit.

Fehler gefunden? Ergänzung? Bitte per Mail melden!

Blatt 2

- Ihr sollt beim Auswerten der Summen die Summenformeln benutzen. In der Klausur habt ihr keinen Taschenrechner und auch keine Zeit, jeden Summanden aufzuschreiben und diese dann buchstäblich von Hand zu addieren.
- Die wichtigsten Summenformeln solltet ihr auswendig kennen (oder zumindest zur eigenen Sicherheit auf dem Zettel stehen haben). Wenn die Summenformeln zwar auf dem Zettel sind, ihr aber nicht wisst, dass es sie gibt, habt ihr leider auch nichts davon.
- Bei der geometrischen Summenformel darauf achten, dass die Summation bei $k = 0$ beginnt.
- Fehler bei der Kammersetzung. Achtet darauf, das ist wichtig. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^2 \neq \sum_{k=0}^n k^2 + 2k + 1$$

- Potenzgesetze sollten euch klar sein.
- konzentrierter Arbeiten: Viele Abschreibfehler, offene Klammern wurden nicht geschlossen, Indizes hießen mal k und mal l , manchmal hatten Summen gar kein Argument.
- Äquivalenzzeichen machen, wenn ihr Gleichungen umformt.

Blatt 3

- Bei Nachweisen wie der Gleichheit in der 1) a) betrachtet man entweder zunächst nur die linke Seite und danach nur die rechte Seite (und stellt dann fest, dass sich beide Ausdrücke in denselben umformen lassen) oder leitet den einen aus dem anderen her.
- Beim bin. Lehrsatz auf den richtigen Exponenten bei $(x + y)^n$ achten.
- Die Ausdrücke $(1 + \pi)^9$ und $(2 + a)^7$ waren laut ML auszuschreiben. Achtet auf die Vorfaktoren, die sich aus dem Binomialkoeffizienten ergeben. Ich habe das nicht als Fehler gewertet, wurden die Ausdrücke nicht ausgeschrieben. Ein „Endergebnis“ (eine Zahl) ist nicht interessant, ihr habt in der Klausur auch keinen Taschenrechner.
- Bei der 2) a) haben einige von euch die Fakultäten sehr umständlich umgeformt. Die Bedeutung von $n!$ ist wichtig und muss euch bekannt sein. Ebenfalls müsst ihr Fakultäten kürzen können: Oft ist es einfacher, Faktoren aus $(n + 3)!$ rauszuziehen, um es mit $n!$ zu kürzen, als $n!$ zu erweitern, um $(n + 3)!$ komplett zu kürzen (auch weniger Fehleranfällig, da evtl. nicht mit einem Kehrwert multipliziert werden muss). Ihr solltet beide Wege beherrschen: Fakultäten »vergrößern« (wie kann ich $(n - 4)!$ in $n!$ umformen?) und »verkleinern« (wie kann ich $(n + 4)!$ in $n!$ umformen?).
- Wichtig: Klammersetzung bei Fakultäten:

$$\begin{aligned}(4n)! &\neq 4n! \\ (2n + 1)! &\neq 2n + 1!\end{aligned}$$

Macht euch das an Beispielen klar.

- Thema Induktion: Die Induktion besteht aus drei Grundbausteinen: Ind.-Anfang (IA), Ind.-Voraussetzung (IV) und Ind.-Schritt / Ind.-Schluss (IS). Die Ind.-Behauptung (IB) ist nur eine Hilfestellung und darf nicht mit dem (IS) verwechselt oder vermischt werden.
- Zur 4) a): Legt Wert auf den (IA): Wenn ihr solch eine Summe beweisen sollt, setzt $n = 1$ und schreibt die Summe zunächst noch einmal auf. Achtung: Das Argument der Summe hängt nach wie vor von k ab:

$$\sum_{k=1}^1 k^2$$

Erst dann rechnet ihr die Summe aus. Dann betrachtet ihr in einer *anderen* Rechnung die rechte Seite des zu beweisenden Ausdrucks (ihr könnt am Anfang nicht einfach ein „=“ dazwischen schreiben – ihr wisst ja nicht, ob es wirklich gleich ist. Eine Möglichkeit wäre, ein Fragezeichen über das Gleichheitszeichen zu schreiben.). Wenn bei beidem dasselbe raus kommt, ist der (IA) gezeigt (»Linke Seite = Rechte Seite«). Ein „ $1 = 1$ “ ist zu kurz.

- Auf Klammersetzung bei der (IB) achten: n durch $(n + 1)$ (Klammern!) ersetzen.
- Es muss beim (IS) $n \rightsquigarrow n + 1$ heißen und nicht $n \longrightarrow n + 1, n \longmapsto n + 1, n = n + 1$ oder $n \implies n + 1$.
- Ihr solltet auch Terme wie $(2n + 1)$ ausklammern können (oder eine Idee haben wie das geht: Polynomdivision).
- Eine (IV) wie „Die Aussage gelte.“ ist zu ungenau (und falsch). Die Variante „Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$ “ ist falsch (dann setzt ihr voraus, dass die Aussage für alle n gilt – dann wäre der ganze Beweis nicht mehr nötig.)
- Bei der 4) b) muss im (IA) auch zunächst ein k im Argument stehen:

$$\prod_{k=2}^2 \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

Der Ausdruck

$$\prod_{k=2}^2 \frac{2^2}{2^2 - 1}$$

ist falsch (siehe Erläuterungen zur Summe oben).

- Terme wie $(n + 1)^2$ würde ich so spät wie möglich ausschreiben. Guckt erstmal, ob man kürzen kann.
- Bei der 4) c) solltet ihr die »Teilbarkeit« noch einmal mathematisch aufschreiben. Die (IV) lautet dabei: „Der Ausdruck $2^{2n+1} + 1$ sei **für ein** $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar, d.h. es gibt zu diesem n eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $2^{2n+1} + 1 = 3m$.“ Macht euch klar, dass das m von n abhängt.
- Die (IB) als Hilfestellung für den Beweis sieht so aus: „Zu zeigen ist, dass der Ausdruck $2^{2(n+1)+1} + 1$ für $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist, d.h. es gibt zu diesem n eine Zahl $\overline{m} \in \mathbb{N}$ mit $2^{2(n+1)+1} + 1 = 3\overline{m}$.“ Macht euch klar, dass das \overline{m} von n abhängt.
- Gebt beim (IA) und am Ende des (IS) m und \overline{m} an.
- Auf Klammersetzung beim Einsetzen der (IV) achten. Wenn ihr in einer Induktion die (IV) nicht gebraucht, habt ihr etwas falsch gemacht.
- Weiterhin gilt: Auf Äquivalenzzeichen achten, diese bedeuten nicht dasselbe wie Gleichheitszeichen. Macht euch den Unterschied klar und wann man was verwendet.
- Schreibt zu Beginn einer Rechnung die Aufgabe (nicht die Aufgabenstellung ☺) ab. Eine Rechnung mit „ $= \dots$ “ zu beginnen und dann schon den ersten Umformungsschritt durchgeführt zu haben, ist nicht so schön.
- Es heißt $n \in \mathbb{N}$, nicht $n \varepsilon \mathbb{N}$ und auch nicht $n \in \mathbb{N}$.

Blatt 4

- Zur Erklärung: „Not.“ = Notation (etwas ist falsch und / oder unsauber aufgeschrieben – meist bei der Angabe der Lösungsmenge).
- Zur Erklärung: $\mathbb{L} = ?$, $\mathbb{D} = ?$ meint, dass die Angabe der Lösungsmenge / Definitionsbereich fehlt.
- Zur Erklärung: „FU“ meint *Fallunterscheidung* (meist falsch gemacht, nicht konsistent mit den anderen oder kritische Stellen vergessen).
- Bei Fallunterscheidungen zu Ungleichungen ist der Ausdruck, den ihr untersucht, im Fall < 0 nicht durch ein $-(\text{AUSDRUCK})$ zu ersetzen, d.h. für den Fall $x - 1 < 0$ ist der Ausdruck $\frac{1}{x-1}$ in

$$\frac{1}{x-1} < 4x$$

nicht durch $\frac{1}{-(x-1)}$ zu ersetzen.

- Es muss $\mathbb{L} = \text{MENGE}$ heißen, z.B. $\mathbb{L} = [0, 6)$. Intervalle sind auch Mengen. Viele vergessen das „=“ oder schreiben nur $\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ (was prinzipiell richtig wäre, aber dann meist die Fallvoraussetzung vergessen wurde – z.B. $x < 4$. $\mathbb{L} = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$ wäre dann richtig).
- Die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2} < x < 4\right\}$$

ist etwas ungenau, weil da nicht zu erkennen ist, aus welchem Zahlenbereich ($\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$) das x ist. Besser ist:

$$\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 4\right\}$$

Oder kürzer (geht nur im Reellen!):

$$\mathbb{L} = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$$

- Die Zeichen \cap und \cup sind Zeichen, die zwischen *Mengen* stehen (Schnitt, Vereinigung).

Nicht verwechseln: Die Zeichen \wedge und \vee (UND, ODER) stehen zwischen *Aussagen*. Gleichungen oder Ungleichungen sind *Aussagen*. Lösungsmengen sind *Mengen* und keine Aussagen.

Tipp zum Merken: \vee kommt von lat. „**ve**l“ („oder“), \wedge meint dann eben „und“.

- Achtet bei Fallunterscheidungen darauf, wirklich den kompletten Definitionsbereich abzudecken. Wenn ihr mit den Zeichen $<$ und $>$ unsauber umgeht, vergesst ihr Werte

(eben die „Sprungstellen“). Oder ihr nehmt Werte dazu, wo eigentlich Definitionslücken sind.

- Verwechslungsgefahr: Ihr dürft im Betrag etwas negatives oder 0 haben. Das heißt, eine vorherige Untersuchung für den Definitionsbereich, wo z.B. für $|5x - 6| > 0$ das Argument des Betrages (eben $5x - 6$) Null wird, ist nicht nötig.

Also: Der Definitionsbereich ist hier \mathbb{R} , insbesondere $x = \frac{6}{5}$. (Der Wertebereich bzw. die Lösungsmenge sieht natürlich anders aus und ist nicht notwendigerweise immer \mathbb{R} ; hier auch nicht. Eine Untersuchung von $5x - 6 = 0$ kann darüber hinaus sinnvoll für die Fallunterscheidung sein.)

- Wenn ihr aus einem Intervall einzelne Werte ausschließen wollt, sieht die korrekte Notation dafür so aus:

$$\mathbb{L} = (-3, 7) \setminus \{2\}$$

Auch okay ist:

$$\mathbb{L} = (-3, 2) \cup (2, 7)$$

Etwas wie

$$\mathbb{L} = (-3, 7) \setminus 2$$

ist mathematisch falsch notiert. Der Operator „ \setminus “ (SETMINUS) steht *stets zwischen Mengen*, und 2 ist keine Menge, $\{2\}$ aber schon.

- Aussagen wie

$$2 < 2$$

sind falsche Aussagen. Es gilt nämlich nur $2 \leq 2$.

Dies kommt bei 1) e) zum Tragen:

$$0 > -x^2$$

ist äquivalent zu $x \neq 0$, da $0 < 0$ falsch ist und sonst das Quadrat einer reellen Zahl immer positiv ist.

- Es ist $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, in der Regel meint ihr ersteres (z.B. bei der Angabe der Lösungsmenge).
- In der Klausur habt ihr **keinen Taschenrechner**. Rechnet mit Brüchen und Wurzeln. Zahlen wie $\frac{1}{9} - \sqrt{\frac{4}{7}} - 6$ sind völlig okay und müssen auch nicht weiter zusammengefasst werden (Zweierpotenzen bis $2^{10} = 1024$ sollte man auswendig wissen...).

- Auch wenn die Angabe *einer* Lösungsmenge am Ende ausreichend ist (\mathbb{L}_{Ges}), solltet ihr überlegen, nach jedem Fall eine Lösungsmenge anzugeben ($\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \dots$). So macht ihr weniger Fehler beim Vereinigen der Lösungsmengen (s. Hinweis zur Notation oben).
- Es gilt (Intervallgrenzen beachten!)

$$(-\infty, 1) \cup (3, \infty) = \mathbb{R} \setminus [1, 3]$$

- Bei der o) (i) kann kein Intervall angegeben werden, da Punkte in der Ebene (später nennen wir das Vektoren) keine Ordnung besitzen (ähnlich wie komplexe Zahlen kann nicht gesagt werden, welcher Punkt größer ist oder kleiner ist, was aber eine zwingende Voraussetzung für Intervalle ist). Die Lösungsmenge muss anders formuliert werden:

$$\mathbb{L} = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid \dots\}$$

- Bei Intervallen steht die kleinere Zahl links des Kommas, sonst ist die durch das Intervall beschriebene Menge leer (Definition der Intervalle im Skript evtl. nochmal ansehen).
- Ein Komma in den Eigenschaften bei einer Mengenangabe bedeutet „und“. Das heißt, die folgende Menge ist leer und ist **nicht** eine andere Schreibweise für das Intervall $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$:

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1, x > 3\}$$

Blatt 5

- Beim Zeichnen komplexer Zahlen wird die imaginäre Achse ohne i skaliert. Bei solchen Skizzen solltet ihr (ungefähr) dieselbe Skalierung auf beiden Achsen verwenden (macht das Winkel-Ablesen einfacher!) – sonst bin ich da nicht so pingelig.
- Der Imaginärteil einer komplexen Zahl wird **ohne** i angegeben. Der Imaginärteil ist reell! Das ist ein grober Fehler. Punktabzug.
- Bei der 2) a) sind \bar{z} oder $z = 0$ nur eine Lösung. Die richtige Idee ist hier, das z durch $x + iy$ zu ersetzen, alles auszumultiplizieren und dann den Imaginärteil zu betrachten. Dieser muss gleich Null gesetzt werden, damit das Produkt reell ist. Dabei reicht es, entweder nach x oder nach y umzuformen. Der Realteil ist bereits reell (ein Auflösen nach x bzw. y ist hier nicht nötig).

Grob falsch ist folgender Rechenweg hinter der Idee „Ein Produkt ist genau dann gleich 0, wenn beide Faktoren Null sind.“ Also wäre $z = 0$ oder $3 + 5i = 0$ (bis hierhin noch okay – die zweite Gleichung ist nicht erfüllt¹). Die zweite Gleichung dann aber nach i aufzulösen ist grob falsch, in der Gleichung kommt gar keine Variable vor. Punktabzug.

Eine Lösungsmenge muss angegeben werden (hier nach x aufgelöst):

$$\mathbb{L} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x - i\frac{5}{3}x \text{ mit } x \in \mathbb{R}\}$$

- Zwischen einfache Termumformungen kommen Gleichheitszeichen, wenn ihr Gleichungen umformt, kommen Äquivalenzzeichen dazwischen. Punktabzug (ich habe es oft genug geprüdelt...)
- Es ist ganz nützlich,

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

auswendig zu wissen. Erspart einem auf jeden Fall ein bisschen Arbeit.

- Bei der 2) c) (i) reicht es nicht, zu erkennen, dass es da ein „Muster“ gibt. Ich hätte gerne so etwas wie

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4m \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \\ i, & n = 4m + 1 \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \\ -1, & n = 4m + 2 \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \\ -i, & n = 4m + 3 \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

gelesen.

¹ Hier steht so etwas wie $3 = 0$ im Reellen.

- Wenn nach dem Ausrechnen des Betrages einer komplexen Zahl ein i auftaucht, ist das ein grober Fehler. Der Betrag einer komplexen Zahl ist reell! Punktabzug.

Guckt euch nochmal an, wie man in \mathbb{C} den Betrag berechnet. **Insbesondere ist keine Fallunterscheidung wie im Reellen nötig.**² Den Betrag kann man einfach ausrechnen.

- Ob man Gleichungen korrekt gelöst hat, kann man überprüfen, indem man die vermeintliche Lösung (bei ∞ -vielen Lösungen: eine bzw. mehrere) für z (die Variable) einsetzt. Geht die Gleichung auf, hat man richtig gerechnet.
- Es ist oft sinnvoll, bei Gleichungen das z so spät wie möglich durch $x + iy$ oder $a + ib$ zu ersetzen.

Zum Beispiel würde ich

$$(z - 2i)^2 = (z + 2i)^2$$

zunächst mit z ausrechnen, weil so nur zwei Summanden in der Klammer stehen (einfache bin. Formel). Ersetzt man das z durch $x + iy$ am Anfang, hat man drei Summanden (das Potenzieren mit 2 ist umfangreicher und fehleranfälliger). Auch wenn man alle Summanden mit i zusammenfasst, entstehen neue bin. Formeln, die ausmultipliziert werden müssen.

$$(x + iy - 2i)^2 = (x + iy + 2i)^2$$

- Eine Möglichkeit, Lösungsmengen in \mathbb{C} zu notieren (hier für die Aufgabe j). Beachtet, dass es hier ∞ -viele Lösungen gibt):

$$\mathbb{L} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = -\frac{3}{5}x + \frac{8}{5}\}$$

- Wenn ihr für die Lösung einer Gleichung „nur“ zwei komplexe Zahlen raus bekommt, könnt ihr diese einfach aufzählen:

$$\mathbb{L}_{(k)} \text{ (ii)} = \{-2 + 2i, -3 + 3i\}$$

- Bei der k) (i) und (ii) empfiehlt sich eine Skizze. Dabei kommt man bei der (i) nach ein paar Rechenschritten auf eine Kreisgleichung – (ii) ist dann die Schnittmenge des Kreisbogens um $-3 + 2i$ mit Radius 1 und der Geraden, die durch $a - ai$ beschrieben wird (Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten).
- Wenn ihr Gleichungen löst, **gebt auch eine Lösungsmenge an!** Einfach nur $a = \dots$

² Das ist auch allein schon deshalb nicht sinnvoll, da die komplexen Zahlen keine Ordnung besitzen. Das heißt, eine Fallunterscheidung wo $3 - 4i < 0$ ist, ist sinnlos (und nicht lösbar und falsch ☹).

und $b = \dots$ irgendwo auf der Seite stehen zu haben ist nicht so schön und unvollständig.

- Ich habe öfters gelesen, komplexe Zahlen wie -1 oder 1 hätten keinen Imaginärteil. Das ist falsch. Diese Zahlen haben einen Imaginärteil, dieser ist 0 .

Also: $\operatorname{Im}(-1) = 0$.

- Nicht vergessen: $x^2 = 1$ hat auch die Lösung $x = -1$.

Testat 2

- Da kaum jemand z^8 richtig bestimmt hat (vielleicht 5 von 60 Leuten), hier ein Lösungsvorschlag. Seht mir bitte nach, dass ich ihn nicht getext habe... ☺

Bestimme z^8 für $z = -\sqrt{3} - 3i$

z in PKD

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{3+9}$$

$$= \sqrt{12}$$

Argument

$$\sqrt{12} \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} - \frac{3}{\sqrt{12}} i \right)$$

$$= \sqrt{12} \left(-\sqrt{\frac{3}{12}} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4 \cdot 3}} i \right)$$

$$= \sqrt{12} \left(-\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} i \right)$$

$$= \sqrt{12} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

$$= \sqrt{12} \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right)$$

$$\Rightarrow z^8 = (\sqrt{12})^8 \left(\cos\left(8 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(8 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) \right)$$

$$= 12^{\frac{1}{2} \cdot 8} \left(\cos\left(\frac{32\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{32\pi}{3}\right) \right)$$

$$= 12^4 \left(\cos\left(\frac{32\pi}{3} - 5 \cdot \frac{6\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{32\pi}{3} - 5 \cdot \frac{6\pi}{3}\right) \right)$$

$$= 12^4 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$\cos(x) = \cos(x - 2\pi)$
 $\sin(x) = \sin(x - 2\pi)$

Abbildung 1: Bestimmen von z^8

Blatt 6

- Wenn eine Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ in Polarkoordinatendarstellung (PKD) gebracht werden soll, reicht es nicht, nur den Betrag und den Winkel zu bestimmen. Es muss abschließend noch einmal z in PKD angegeben werden. (Genauso wie am Ende immer noch einmal die Angabe der Gesamtlösungsmenge erwartet wird...)
- Winkel werden in Bogenmaß gemessen (**RAD**). Winkel wie 360° , 180° , 90° , 60° und 45° sollte man in Bogenmaß kennen (oder sich eben schnell herleiten können).

Das Gradmaß (**DEG**) hat in der Mathematik nichts verloren (die Festlegung vom rechten Winkel auf 90° ist recht willkürlich. Daneben (und auch deswegen) gibt es noch andere Gradmaße, mit denen man einfacher rechnen kann, z.B. **GON** mit mit einem rechten Winkel von 100 gon)

- Beim Umformen einer Zahl in PKD solltet ihr getrennt voneinander Winkel und Argument bestimmen (und dann noch einmal z in PKD angeben, vgl. Abbildung 1)
- Bei der 1) b) ist z_3 **nicht** in PKD (man beachte das Minus vor dem Sinus).

Soll hier mit z_3 gerechnet werden, muss das Minus zu einem Plus gemacht werden.

Dieser Weg klappt immer: z_3 in die Form $x + iy$ bringen und dann in PKD umformen. Dann kann man die Rechengesetze für zwei komplexe Zahlen in PKD anwenden (z.B. das Rechengesetz für die Multiplikation).

Geht evtl. schneller: Rechengesetze für sin und cos anwenden, um z_3 in PKD umzuformen. Achtung: „Beide“ Winkel bei der PKD müssen gleich sein.

Solch eine Aufgabe ist auch auf einem der Trainingsblätter zu den komplexen Zahlen drauf.

- Wenn ihr im Argument von sin und cos rechnet, **setzt Klammern!** Sonst kann man nicht nachvollziehen, was ihr meint!

$$\begin{aligned}\cos \frac{3}{2}\pi - \pi &\stackrel{?}{=} \cos \left(\frac{3}{2}\pi - \pi \right) \\ \cos \frac{3}{2}\pi - \pi &\stackrel{?}{=} \cos \left(\frac{3}{2}\pi \right) - \pi\end{aligned}$$

- Für die PKD muss der Winkel aus $[0, 2\pi)$ sein. Das bedeutet insbesondere, dass der Winkel positiv angegeben wird! Sonst handelt es sich nicht um eine Zahl in PKD.

Ferner muss sowohl beim sin als auch beim cos **der gleiche Winkel** im Argument stehen.

- Die Lösungen beim Wurzelziehen werden z_0, z_1, \dots, z_{n-1} durchnummeriert. Dies sind die Lösungen der Gleichung

$$z^n = w$$

mit $z, w \in \mathbb{C}$ und w konkret.

Eine Angabe von $z_n = z_0$ ist nicht erforderlich – ich hatte das im Tutorium nur angeschrieben, damit ihr den zyklischen Aufbau versteht.

Tipp: Zunächst Winkel getrennt von der Aufstellung der Lösungen berechnen. So macht ihr weniger Fehler.

Und gebt w bitte einmal in PKD an, bevor ihr die Lösungen z_0, z_1, \dots, z_{n-1} aufstellt.

- Standardwerte von \sin und \cos **muss** man auswendig wissen. Dazu zählen die Winkel $0, \frac{\pi}{2}$ und π . Es wird erwartet, dass diese Ausdrücke ausgewertet werden!
- Macht ein ordentliches π ! Bei einigen sieht das aus wie n , \cap oder \sqcap .
- Wenn ihr beim Sinus Klammern setzt, müsst ihr zwei Klammern schließen (die vom Sinus und die vom ausgeklammerten Betrag). Klingt bescheuert, vergessen aber 70% von euch.
- Rechnet **ohne** Taschenrechner. Rechnet mit Brüchen und Wurzeln usw. Tut euch den Gefallen!
- Die Umkehrfunktion vom \sin wird als Arcus-Sinus (\arcsin) bezeichnet. Sie liefert zu einer Zahl den Winkel (auf dem Taschenrechner ist das die Taste \sin^{-1} – auf das richtige Gradmaß im Taschenrechner achten! ... aber den dürft ihr ja eh nicht benutzen ☺)

In der Mathematik wird die Schreibweise $\sin^{-1}(x)$ für den Arcus-Sinus nicht verwendet, weil man es nicht von $\frac{1}{\sin(x)}$ unterscheiden kann. Schreibt $\arcsin(x)$ für die Umkehrfunktion.

- Wenn nicht weiter angegeben ist, wie die Lösung einer Rechnung angegeben werden soll, ist ein Ergebnis in PKD natürlich völlig in Ordnung.
- Die „gemischte Bruchschreibweise“ wird in der Mathematik nicht verwendet, da man nicht unterscheiden kann, ob $5\frac{1}{3}$ nun $5 \cdot \frac{1}{3}$ oder $5 + \frac{1}{3}$ bedeutet.
- Nach wie vor gilt: Gebt euch Mühe beim Setzen von Äquivalenz- und Gleichheitszeichen. Und setzt das richtige Zeichen an die richtige Stelle. Arbeitet mathematisch sauber! Sonst: Punktabzug!

Dazu: Wenn ihr das Zeichen $\hat{=}$ in der Mathematik verwendet, könnt ihr euch zu 90% sicher sein, dass ihr es falsch oder unsauber notiert habt.

- Es gilt:

$$-64 \in \mathbb{C}.$$

Überlegt euch, wie die PKD aussehen muss. Wo liegt die Zahl in der komplexen Ebene?

- Beim Bestimmen der PKD ist die Zahl, die ausgeklammert wird (also $|z|$), immer positiv. Dies muss insbesondere beim Bestimmen der PKD von -64 beachtet werden.

Wenn ihr hier 64 ausklammert, kommt ihr auf den richtigen Winkel von $\alpha = \pi$.

Klammert ihr -64 aus, kommt ihr auf einen Winkel von $\alpha = 0$. Ein Winkel von 0 hat aber keinen Sinn (überlegt euch, wo -64 in der komplexen Ebene liegt).

- Erinnerung: Die Vorschrift zum Bestimmen der Winkel für die Lösungen z_1, z_2, \dots, z_{n-1} lautet (es sei $\varphi = \arg(z_k) = \frac{\arg(w)}{n}$ für $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$):

$$\arg(z_k) = \varphi + k \cdot \frac{2\pi}{n} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

- Soll beim Wurzelziehen am Ende eine Lösungsmenge angegeben werden, reicht das aus:

$$\mathbb{L} = \{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$$

- $2^5 = 32$, $2^6 = 64$. Zweierpotenzen bis 2^{10} sollte man auswendig wissen.

- Maximal könnt ihr derzeit $20 + 19 + 4 \cdot 5 = 59$ Punkte erreicht haben (Testate 1, 2) und (ÜB 2–6). Von insgesamt $20 \cdot 5 + 4 \cdot 13 = 152$ Punkten sind das 38% und schon fast die Studienleistung, die es bei 60 Punkten gibt. Das heißt: Wer derzeit ca. 15 Punkte (25% der Studienleistung) hat, **sollte Gas geben!** Es werden nur noch ca. 100 Punkte ausgeschüttet, von denen ihr dann 45 braucht!

Blatt 7

- Kurzes Update: Es gilt lt. Skript $0 \in \mathbb{R}^+$ (Notation im Skript: \mathbb{R}_+).
- Bei Polynomdivisionen **müssen** Klammern um den Dividenten gesetzt werden.³ Sonst wird nur das letzte (meist absolute) Glied durch den Divisor geteilt.
- Kommt eine Nullstelle bei der pq -Formel oder sonstwo häufiger vor, taucht sie natürlich in der Linearfaktorzerlegung (LFZ) in entsprechender Potenz vor.
- Wenn ihr die LFZ angeben sollt, gehört ein $f(x)$ vor die LFZ. Sonst steht der Rest einfach nur im leeren Raum.

Also z. B.:

$$f(x) = -3(x-4)(x+5)(x-1)^7(x-1)^2$$

- Wenn ihr auf dem „Weg“ zur LFZ z. B. bei einer Berechnung von der pq -Formel durch 2 teilt (Aufgabe 1 a) iii)), dann dürft ihr die 2 nicht in der LFZ vergessen. Ihr hättet diese ja auch ganz (!) zu Beginn ausklammern können. Macht euch das klar.
- **Beispiele sind keine Beweise!** Wenn in Aufgaben etwas wie „Zeigen Sie, dass ...“ steht, werden Beweise verlangt.⁴ Für die Beweise lohnt sich ein Blick ins Skript.
- Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{y}{2} &= (x+1)^4 \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{y}{2}} &= |x+1| \end{aligned}$$

Das ist etwas anderes als

$$\sqrt[4]{\frac{y}{2}} = x+1.$$

Siehe dazu auch die Musterlösung für weitere / die restlichen Umformungsschritte.

- Die Monotonie sollt ihr nicht über die 1. Ableitung zeigen. Das ist Stoff, der (noch nicht) behandelt wurde. Dies ist Stoff aus der HMII. Arbeitet deshalb mit der Definition im Skript.

Dazu: $|x|$ ist in 0 nicht differenzierbar (diff'bar). $|x+3|$ ist in $x = -3$ nicht diff'bar. Das heißt, man kann keine Ableitung in $x = 0$ bzw. $x = -3$ berechnen (u. a. deswegen kann man die Monotonie nicht auf ganz \mathbb{R} mit dem Ableitungskriterium zeigen). Das solltet ihr schon mal gehört haben; kommt ausführlich nächstes Semester.

³ Divident / Divisor = Quotient

⁴ Die zu zeigende Behauptung stimmt – im Gegensatz zu Formulierungen wie „Gilt ... für ...“ oder „Überprüfen Sie, ob ... gilt“, wo der Wahrheitsgehalt der Aussage gezeigt / widerlegt werden muss.



- Es gilt: $f(x) = |x|$ ist auf \mathbb{R} weder (streng) monoton fallend noch (streng) monoton fallend. Ihr müsst die Funktion **als ganzes** und nicht nur ihre Äste sehen. Und den Definitionsbereich \mathbb{R} beachten.

Dann tut eine Skizze ihr übriges:

- Wenn man zu Beginn ein x bei einem Polynom ausklammern kann, solltet ihr das tun. Dadurch werden Polynomdivision bzw. Horner-Schema kleiner. Macht euch das ggfs. klar.
- Redet ihr von Funktionen, sprecht ihr diese natürlich beim Namen an. Auch wenn man überall immer $f(x)$ liest, heißt die Funktion f . $f(x)$ bezieht sich auf die y -Werte (meist für ein oder mehrere **konkrete** x -Werte ($x = 7$, $x = -\pi$, \dots)).

Es muss also korrekterweise heißen:

- f ist streng monoton fallend (nicht $f(x)$)
- f ist stetig (nicht $f(x)$)
- Der Graph von f sieht aus wie \dots (nicht der Graph von $f(x)$)
- f ist differenzierbar (nicht $f(x)$)
- f ist bijektiv (nicht $f(x)$)
- Es werden die Hoch- und Tiefpunkte von f bestimmt (nicht von $f(x)$)
- p hat den Grad 4 (nicht $p(x)$)⁵
- usw. Es gibt vielfach mehr solche Beispiele.
- Beim Zeigen von Gleichungen sucht ihr euch eine Seite aus und folgt dann durch einfache Termumformungen die andere Seite zu erhalten. Wenn $A = B$ zu zeigen ist, sehen die beiden Möglichen Lösungen so aus:

$$A = \dots = \dots = \dots = \dots = \dots = \dots = B$$

⁵ Ja, das habe ich letztes Tutorium beim Anschreiben selber nicht so angeschrieben – mit Absicht. Ich glaube, es ist am Anfang einfacher, sich vorzustellen, dass $p(x)$ den Grad 4 hat, als dass p den Grad 4 hat. $p(x)$ oder $q(x)$ erinnert mehr an ein Polynom als es vielleicht p oder q tut.

oder

$$B = \dots = \dots = \dots = \dots = A$$

Es kann sein, dass mal die Richtung von links nach rechts oder die von rechts nach links einfach ist als die jeweils andere. Da aber eben ein „=" dazwischen steht, sind beide Rechnungen gleichermaßen richtig.

- Tipp für die Klausur: Aufgabenstellung lesen. Wer keine LFZ angibt, obwohl das in der Aufgabenstellung steht, kriegte Punktabzug. Auch wenn alle Nullstellen richtig sind und von mir aus auch ordentlich alle an einer Stelle angegeben werden. Gleiches gilt für die Angabe einer Lösungsmenge.

Zweiter Tipp: Lest jede Aufgabenstellung zwei mal. Und lest sie noch einmal, wenn ihr glaubt fertig zu sein, um zu checken, ob ihr nichts vergessen habt.

Dazu: Wenn nach Injektivität und Surjektivität gefragt ist, müsst ihr auch beides untersuchen.

☺

- Die Aussagen

$$f \text{ surjektiv} \Rightarrow f \text{ nicht injektiv}$$

oder

$$f \text{ injektiv} \Rightarrow f \text{ nicht surjektiv}$$

sind falsch. Injektivität und Surjektivität sind keine gegensätzlichen Begriffe und implizieren in keiner Weise einander.

Es gilt aber

$$(f \text{ nicht surjektiv} \vee f \text{ nicht injektiv}) \Rightarrow f \text{ nicht bijektiv.}$$

- Es gilt im allgemeinen nur die Implikation

$$f \text{ streng monoton} \Rightarrow f \text{ injektiv.}$$

Die andere Richtung (Rückrichtung)

$$f \text{ streng monoton} \Rightarrow f \text{ injektiv.}$$

ist falsch! Einige wollten damit die 3) a) ii) lösen.

Ein Gegenbeispiel ist die Funktion $h: [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ mit

$$h(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{für } x \in [0, 1) \\ x & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Zeichnet euch die Funktion auf. h ist injektiv (sogar bijektiv!), aber nicht streng monoton steigend oder fallend (auf $[0, 2]$ – vgl. Überlegungen zur Betragsfunktion weiter oben). Das liegt daran, dass h nicht stetig ist.

Ich habe das nicht so streng korrigiert, weil ihr die Stetigkeit der Funktion in der Aufgabe implizit vorausgesetzt habt (wenn anscheinend auch unbewusst...). Für stetige Funktionen gilt in obigen Implikationen nämlich \Leftrightarrow .

Blatt 8

- Wie bereits öfters erwähnt, wird die Angabe einer Lösungsmenge beim Lösen von Gleichungen verlangt. Und $Ax = b$ ist eine Gleichung.
- Ihr dürft bei der 1) auch die Schritte a)–d) für jedes LGS zusammen machen. Dann bleibt man in der Aufgabe.
- **Schreibt beim Umformen eines LGS daneben, was ihr rechnet bzw. welche Zeile ihr wie manipuliert.** Die Notation sollte wie im Tutorium besprochen erfolgen.
- Ihr solltet für Parameter s und t schreiben und nicht die Variable nutzen. Das heißt, ihr gewinnt aus einer Zeile die Information, dass x_3 beliebig ist, und solltet dann $x_3 =: t$ notieren (und mit t für x_3 weiter rechnen).
- Die Lösungsmenge wird bei ∞ -vielen Lösungen wie im Tutorium wie folgt angegeben. Ihr geht vom groben (erst alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$) ins Feine (x soll solche Gestalt haben: ... – das bedeutet der Strich „|“). Eine andere Richtung ist nicht sinnvoll.

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1)$$

Ihr solltet die Vektoren, falls es ∞ -viele Lösungen gibt, trennen (so wie in der Lösungsmenge (1) oben). Dann erkennt man besser, welche die Lösung (Singular!) des inhomogenen $Ax = b$ und welches die Lösungen (Plural!) des homogenen Systems $Ax = 0$ sind (den genauen Zusammenhang beider Systeme werden wir wahrscheinlich noch mal im Tutorium besprechen).

Ist nur *ein* Vektor in der Lösungsmenge, kann dieser einfach angegeben werden, z. B.:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nicht die Klammern um den Vektor vergessen!

Angaben wie

$$\mathbb{L} = \left\{ x = \frac{1}{7}, y = 1, z = -2 \right\}$$

sind nicht wirklich sinnvoll, weil nur ein **Vektor** das LGS $Ax = b$ löst.

Und es heißt $\mathbb{L} = \{ \dots \}$, nicht $\mathbb{L} : \{ \dots \}$

- Wenn etwas wie „Ist $v \in \mathbb{L}$?“ gefragt ist, wird auch ein Antwortsatz erwartet. Ich habe dann „Aussage?“ daneben geschrieben.

- Der Vektor in 2) b) ii) heißt v . v^\top ist nur eine verkürzte Schreibweise eines Spaltenvektors als Zeile (damit das im Text nicht so viel Platz weg nimmt).

Also: Es wird überprüft, ob v in \mathbb{L} ist, nicht ob $v^\top \in \mathbb{L}$ gilt.

- Fallen bei der Vorwärtselimination Zeilen raus (weil sie identisch sind), schreibt für diese Zeile $0 = 0$ und lässt diese nicht einfach weg.⁶

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ & 2 & 3 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Eher nicht (s. Fußnote):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

- Zwischen die Umformungsschritte bei der Vorwärtselimination gehört ein „ \Leftrightarrow “ oder „ \rightsquigarrow “. Ganz bestimmt aber nicht „ $=$ “, weil die Schreibweise $(A|b)$ ja schon eine verkürzende Schreibweise für Gleichungen ist.
- Es gibt mehrere Wege, die nach Rom führen (bzw zur ZSF) ☺

Wenn die ZSF angegeben werden soll (Aufgabe 1), solltet ihr das auch tun. Auch im Hinblick auf die (Probe-)klausur.

Die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

ist nicht in ZSF (auch wenn man die Lösungsmenge sehr leicht bestimmen kann: $\text{II} \rightarrow \text{III} \rightarrow \text{I}$).

- Nur, dass ich es mal erwähnt habe:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

⁶ Das Weglassen wäre mathematisch nicht falsch, es ist aber leichter für die Korrektur, wenn die Zeilen stehen bleiben. Und es sieht nicht wie ein „neues“ System aus. ☺

- $\text{rang}(A) > \text{rang}(A|b)$ ist nicht möglich (klar machen!). Notation ist wie folgt: $\text{rang}(A) = 3$, nicht $\text{rang}(A) : 3$.
- Macht Klammern um Matrizen (und Vektoren sowieso)! Eckige Klammern um Matrizen werden hauptsächlich im englischsprachigen Raum (und der Numerik) verwendet; wir verwenden runde klammern.
- Ihr dürft Vektoren nur mit Zahlen $\gamma \in \mathbb{R}$ multiplizieren. Die Division ist in den Vektorraum-Axiomen für Skalare nicht definiert und ihr müsst sie über eine Multiplikation mit $\frac{1}{\gamma}$ ausdrücken. Das heißt:

$$\text{erlaubt: } \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 \\ 38 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{38}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{pmatrix}; \quad \text{nicht erlaubt: } \begin{pmatrix} -5 \\ 38 \\ -5 \end{pmatrix} : 7$$

Fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch!

Lizenz

Dieses Dokument steht unter einer »Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International«-Lizenz.

Die Bedingungen der Lizenz können unter folgendem Link eingesehen werden:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.de>