Giáo trình

VI TÍCH PHÂN A2

(Calculus A2)

Biên soạn: TS. Nguyễn Hữu Khánh - TS. Lê Thanh Tùng

- 2016 -

LỜI GIỚI THIỆU

Nhằm góp phần làm phong phú nguồn tư liệu phục vụ nghiên cứu, học tập cho bạn đọc và sinh viên thuộc khối ngành Kỹ thuật - Trường Đại học Cần Thơ, Nhà Xuất bản Đại học Cần Thơ ấn hành và giới thiệu cùng bạn đọc giáo trình "Vi tích phân A2" do Tiến sĩ Nguyễn Hữu Khánh và Tiến sĩ Lê Thanh Tùng biên soạn.

Giáo trình gồm 05 chương, nội dung chủ yếu trình bày về Phép tính vi phân hàm nhiều biến; Tích phân bội; Đường cong trong không gian; Tích phân đường và tích phân mặt; Phương trình vi phân. Thêm vào đó, cuối mỗi chương còn có nhiều bài tập hữu ích cho bạn đọc. Giáo trình là tài liệu học tập có giá trị cho sinh viên các ngành có liên quan đến vi tích phân.

Nhà Xuất bản Đại học Cần Thơ chân thành cám ơn các tác giả và sự đóng góp ý kiến của quý thầy cô trong Hội đồng thẩm định trường Đại học Cần Thơ để giáo trình "Vi tích phân A2" được ra mắt bạn đọc.

Nhà Xuất bản Đại học Cần Thơ trân trọng giới thiệu đến sinh viên, giảng viên và bạn đọc giáo trình này.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC CẦN THƠ

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình Vi tích phân A2 dành cho sinh viên thuộc khối ngành kỹ thuật. Giáo trình cung cấp các kiến thức cơ bản và cần thiết về phép tính vi-tích phân của hàm nhiều biến và phương trình vi phân. Từ các kiến thức được cung cấp, sinh viên có thể nghiên cứu các môn học chuyên ngành của các năm học sau và có thể áp dụng để giải quyết một số bài toán trong thực tế. Sinh viên thuộc các khối ngành khác có thể sử dụng giáo trình như tài liệu tham khảo.

Giáo trình gồm 5 chương. Chương 1 giới thiệu các kiến thức về phép tính vi phân của hàm nhiều biến. Chương 2 trình bày về tích phân bội. Trong chương 3, đường cong trong không gian được nghiên cứu một cách trọn vẹn theo quan điểm của giải tích vectơ. Ở chương 4, trường vectơ được đưa vào nhằm giới thiệu tích phân đường loại hai như là tích phân của trường vectơ; tích phân mặt được xây dựng đối với mặt được tham số hóa tổng quát. Chương 5, nghiên cứu về phương trình vi phân.

Giáo trình giới thiệu các ứng dụng thực tế nhằm giúp cho sinh viên làm quen với việc mô hình hóa và giải quyết các bài toán thực tế. Các phần đọc thêm được viết dưới dạng chữ nhỏ. Cuối mỗi chương có phần bài tập để sinh viên tự rèn luyện, phần trả lời bài tập được cung cấp ở cuối giáo trình.

Xin chân thành cảm ơn Gs. Ts. Nguyễn Hữu Anh, Ts. Trần Ngọc Hội (ĐHQG TP HCM), Gs. Ts. Henk Pijls (Đại học Amsterdam) đã đọc và đóng góp cho tôi nhiều ý kiến quý báu. Đặc biệt cảm ơn các đồng nghiệp đã đóng góp cho tôi nhiều ý kiến có giá trị.

Trong quá trình viết chắc chắn không thể tránh khỏi các thiếu sót. Rất mong nhận được sự đóng góp của các đồng nghiệp và các em sinh viên.

Cần Thơ, ngày 2 tháng 11 năm 2015

Tác giả

TS. Nguyễn Hữu Khánh, TS. Lê Thanh Tùng

MỤC LỤC

Lời giới thiệu

Lời nói đầu

Chương 1. Phép tính vi phân hàm nhiều biến

Trang

1. Các khái niệm cơ bản về hàm nhiều biến 1
2. Giới hạn và liên tục 5
3. Đạo hàm riêng 9
4. Vi phân 11
5. Tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong 16
6. Đạo hàm của hàm hợp 18
7. Đạo hàm riêng cấp cao 21
8. Vi phân cấp cao 25
9. Gradient và đạo hàm theo hướng 27
10. Đạo hàm của hàm ẩn 31
11. Công thức Taylor và tính xấp xỉ 33
12. Cực trị 36
13. Cực trị có điều kiện 41
14. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất 46
15. Bài tập chương 1 50

Chương 2. Tích phân bội

1. Tích phân hai lớp 55
2. Tích phân ba lớp 75
3. Bài tập chương 2 89

Chương 3. Đường cong trong không gian

1. Hàm vectơ một biến 93
2. Đường cong và tham số hóa đường cong 99

3. Độ cong, độ xoắn và tam diện Frenet 104
4. Độ cong, độ xoắn và tam diện Frenet với tham số hóa TQ .. 111
5. Bài tập chương 3 119

Chương 4. Tích phân đường và tích phân mặt

1. Trường vô hướng và trường vectơ 121
2. Tích phân đường loại một 125
3. Tích phân đường loại hai 131
4. Tích phân mặt loại một 146
5. Tích phân mặt loại hai 151
6. Sơ đồ hệ thống hóa các loại tích phân 160
7. Bài tập chương 4 160

Chương 5. Phương trình vi phân

1. Khái niệm mở đầu 165
2. Phương trình vi phân cấp một 166
3. Phương trình vi phân cấp hai 183
4. Hệ phương trình vi phân 212
5. Bài tập chương 5 221

Phần trả lời bài tập 225

Tài liệu tham khảo 232

Chương 1

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

Chúng ta đã nghiên cứu về hàm một biến $y = f(x)$, với y là đại lượng phụ thuộc vào biến độc lập x. Trong thực tế ta thường gặp những đại lượng không chỉ phụ thuộc vào một mà phụ thuộc vào nhiều biến độc lập. Đây chính là dạng của hàm nhiều biến được nghiên cứu trong chương này.

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM NHIỀU BIẾN

1.1 Khái niệm về hàm nhiều biến

Gọi $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$.

Phần tử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của $\mathbb{R}^n$ được gọi là điểm hay vector, còn x_i $(i = 1, 2, ...n)$ được gọi là tọa độ thứ i của x.

Hai phần tử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ được gọi là bằng nhau nếu $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Khoảng cách giữa x và y là số $d(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

Trong giáo trình này, ta sẽ làm việc trên không gian nền gồm tập $\mathbb{R}^n$ được trang bị khoảng cách $d(x, y)$ như trên.

□ **Định nghĩa 1** Cho tập $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Một hàm f của n biến là qui luật cho ứng mỗi điểm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong $\mathcal{D}$ với một số thực duy nhất

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Kí hiệu $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hay $u = f(x)$.

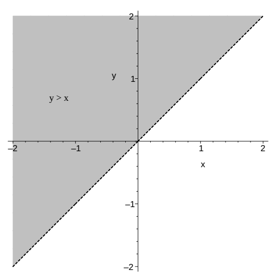
Tập $\mathcal{D}$ được gọi là miền xác định của hàm f. Đó là tập các điểm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sao cho giá trị $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định.

Khi $n = 2$ hoặc $n = 3$ ta thường dùng kí hiệu $z = f(x, y)$ hoặc $u = f(x, y, z)$.

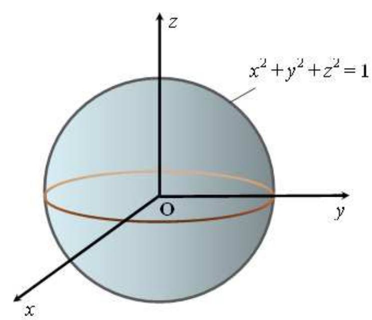
Ta sẽ xét chủ yếu ở hàm hai biến $z = f(x, y)$. Miền xác định của hàm là tập các điểm (x, y) trong mặt phẳng Oxy sao cho biểu thức $f(x, y)$ có nghĩa.

• **Ví dụ 1** Hàm $z = x^2 \ln(y - x)$ có miền xác định là tập hợp những điểm có tọa độ thoả $y - x > 0$ hay $y > x$. Đó là nửa mặt phẳng nằm phía trên đường thẳng $y = x$ (không kể những điểm trên đường thẳng).

• **Ví dụ 2** Hàm $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ có miền xác định là tập hợp những điểm có tọa độ thỏa $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ hay $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Đó là hình cầu tâm O bán kính 1 (kể cả mặt cầu).



H 1.1 Đồ thị hàm $z = x^2 \ln(y - x)$.



H 1.2 Đồ thị hàm $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

• **Ví dụ 3** Một công ty sản xuất hai loại sản phẩm X và Y. Giả sử giá thành để sản xuất ra x đơn vị của X và y đơn vị của Y là một hàm tuyến tính. Tìm hàm biểu thị giá $C(x, y)$ với các dữ liệu cho bởi:

$$C(10, 20) = 120, \quad C(30, 15) = 210, \quad C(40, 50) = 330.$$

Giải

Vì $C(x, y)$ tuyến tính đối với x và y nên $C(x, y) = ax + by + c$.

$$C(10, 20) = 120 \quad \Rightarrow \quad 10a + 20b + c = 120 \qquad (1.1)$$
$$C(30, 15) = 210 \quad \Rightarrow \quad 30a + 15b + c = 210 \qquad (1.2)$$
$$C(40, 50) = 330 \quad \Rightarrow \quad 40a + 50b + c = 330 \qquad (1.3)$$

Giải hệ (1.1), (1.2) và (1.3) ta nhận được $a = 5$, $b = 2$ và $c = 30$.

Vậy hàm giá cho bởi $C(x, y) = 5x + 2y + 30$.

• **Ví dụ 4 (Chỉ số BMI)** BMI (Body Mass Index) là chỉ số khối cơ thể được dùng để đánh giá mức độ gầy hay béo của một người.

Gọi W là trọng lượng của một người (tính bằng kg) và H là chiều cao của người đó (tính bằng m). Chỉ số BMI được tính theo công thức sau:

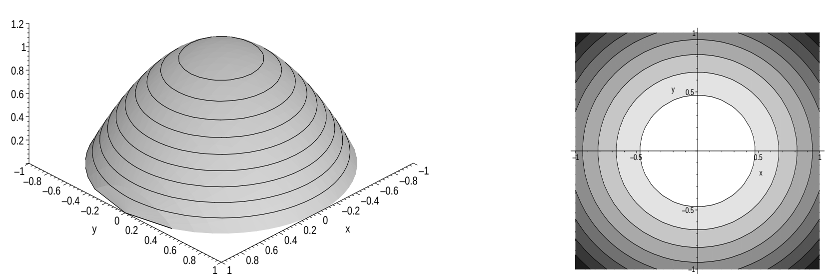
$$\boxed{BMI = \frac{W}{H^2}}$$

Ta thấy BMI là hàm hai biến theo trọng lượng W và chiều cao H. Qua nghiên cứu người ta đề xuất một bảng phân loại BMI như sau:

Chỉ số BMI	Tình trạng cơ thể
< 18.5	Gầy
18.5 - 25	Bình thường
25 - 29.9	Thừa cân
≥ 30	Béo phì

1.2 Đường mức

Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$. Tập hợp $\mathcal{L}_C = \{(x, y) : f(x, y) = C\}$ (C là hằng số) là một đường cong trong mặt phẳng Oxy. Với những giá trị C khác nhau ta được các đường cong khác nhau. Các đường cong này được gọi là các đường mức của hàm f.

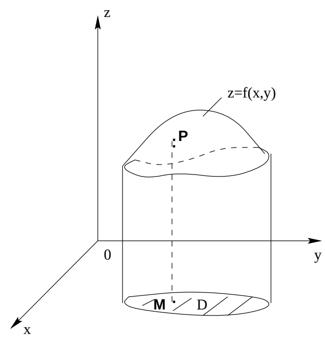


H 1.3 Đồ thị của hàm $z = 1 - (x^2 + y^2)$ (hình trái)
và các đường mức của hàm (hình phải).

1.3 Biểu diễn hình học của hàm hai biến

Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trên miền $\mathcal{D}$. Ta thấy cặp (x, y) biểu diễn một điểm $M(x, y)$ trong mặt phẳng Oxy, nên có thể xem hàm hai biến $f(x, y)$ là hàm của điểm $M(x, y)$. Ta biểu diễn hình học hàm hai biến như sau:

Vẽ hệ trục tọa độ Đêcac (Descartes) vuông góc $Oxyz$. Với mọi điểm $M(x, y)$ trong miền $\mathcal{D}$ của mặt phẳng Oxy cho ứng với một điểm P trong không gian có tọa độ là $(x, y, f(x, y))$. Quỹ tích của điểm P khi M chạy trong miền $\mathcal{D}$ được gọi là đồ thị của hàm hai biến $z = f(x, y)$.

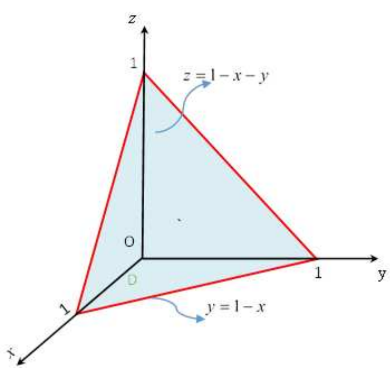


H 1.4 Đồ thị hàm hai biến.

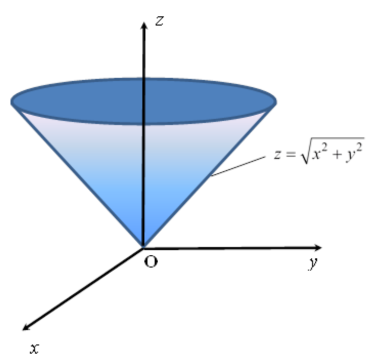
Đồ thị của hàm hai biến thường là một mặt cong trong không gian, mà hình chiếu của nó trên mặt phẳng Oxy là miền xác định của hàm.

• **Ví dụ 5** Hàm $z = 1 - x - y \quad (0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x)$ có đồ thị là một mặt tam giác với các đỉnh $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ (hình H 1.5a).

• **Ví dụ 6** Hàm $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ có đồ thị là nửa trên mặt nón (hình H 1.5b).



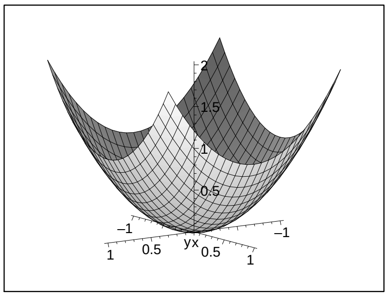
H 1.5a Đồ thị hàm $z = 1 - x - y$.



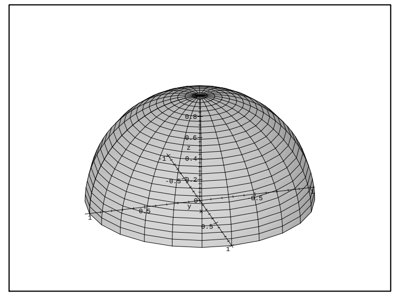
H 1.5b Đồ thị hàm $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

• **Ví dụ 7** Hàm $z = x^2 + y^2$ có đồ thị là một paraboloid tròn xoay (hình H 1.6a).

• **Ví dụ 8** Hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ có đồ thị là nửa trên của mặt cầu tâm O bán kính 1.

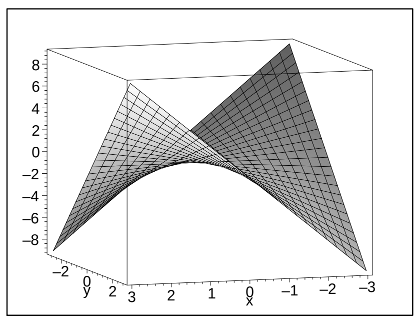


H 1.6a Đồ thị hàm $z = x^2 + y^2$.



H 1.6b Đồ thị hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

• **Ví dụ 9** Hàm $z = xy$ có đồ thị là mặt yên ngựa (hình H 1.6c).



H 1.6c Đồ thị hàm $z = xy$.

2. GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

2.1 Các tập hợp phẳng

Ta xét $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, với khoảng cách giữa hai điểm $M_1(x_1, y_1)$ và $M_2(x_2, y_2)$ là $M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

□ **Định nghĩa 2** Trong $\mathbb{R}^2$ cho điểm $M_0(x_0, y_0)$ và số thực $\epsilon > 0$. Lân cận của điểm M_0 bán kính ε là tập hợp $N_\varepsilon(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^2 : MM_0 < \varepsilon\}$

□ **Định nghĩa 3** Cho S là tập con của $\mathbb{R}^2$ và M_0 là điểm thuộc $\mathbb{R}^2$.

M_0 được gọi là điểm trong của S nếu tồn tại lân cận N_ε của M_0 sao cho $M_0 \in N_\varepsilon \subset S$. Tập các điểm trong của S gọi là phần trong của S.

M_0 được gọi là điểm biên của S nếu với mọi lân cận N_ε của M_0 ta đều có $N_\varepsilon \cap S \neq \emptyset$, $N_\varepsilon \cap (\mathbb{R}^2 \setminus S) \neq \emptyset$.

Tập các điểm biên của S gọi là biên của S.

S được gọi là tập mở nếu mọi điểm của S đều là điểm trong của S.

S được gọi là một tập đóng nếu mọi điểm biên của S đều thuộc S.

S được gọi là tập liên thông nếu với mọi cặp điểm trong S bao giờ cũng tồn tại đường cong trơn từng khúc trong S nối hai điểm này.

Miền là một tập mở và liên thông.

S được gọi là miền hữu hạn (bị chặn) nếu tồn tại một số $r > 0$ sao cho với mọi điểm M thuộc S thì $MO < r$ trong đó O là gốc tọa độ.

2.2 Giới hạn

□ **Định nghĩa 4** Điểm $M(x, y)$ được gọi là dần về điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu

$$MM_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \to 0. \text{ Ký hiệu } (x, y) \to (x_0, y_0).$$

⊕ **Nhận xét** $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$ khi và chỉ khi $x \to x_0$ và $y \to y_0$.

□ **Định nghĩa 5** Giả sử hàm $z = f(x, y)$ xác định trong một lân cận nào đó của điểm (x_0, y_0) (không cần xác định tại (x_0, y_0)). Số L (hữu hạn) được gọi là giới hạn của hàm $f(x, y)$ khi (x, y) dần về (x_0, y_0) nếu với mọi điểm (x, y) thuộc lân cận của (x_0, y_0) dần về (x_0, y_0) ((x, y) khác với (x_0, y_0)) thì $f(x, y)$ dần về L. Ký hiệu

$$L = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y).$$

Từ định nghĩa trên ta có định nghĩa tương đương sau đây:

□ **Định nghĩa 6** Số L hữu hạn được gọi là giới hạn của hàm $f(x, y)$ khi (x, y) dần về (x_0, y_0) nếu với mọi số dương ε, tồn tại số dương $\delta = \delta(\varepsilon)$ sao cho

$$| f(x, y) - L | < \varepsilon$$

với những điểm (x, y) có tọa độ thỏa $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

⊙ **Chú ý**

i) Định nghĩa tương tự như ở hàm một biến, ta có các giới hạn sau

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \pm\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y) = L.$$

ii) Giới hạn của hàm hai biến (nếu có) là duy nhất.

◇ **Tính chất** Giới hạn của hàm hai biến có các tính chất tương tự như hàm một biến. Chẳng hạn, ta có các tính chất sau:

1. Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L$ và $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = L'$ thì

   a) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L \pm L'$.

   b) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).g(x,y) = L.L'$.

   c) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{L'} \quad (L' \neq 0)$.

2. Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L$ và $\lim\limits_{t\to L} F(t) = F(L)$ thì

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} F(f(x,y)) = F(L).$$

• **Ví dụ 10**

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} (x^2 - 3y + 1) = 2^2 - 3.1 + 1 = 2$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} = 1$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to \infty}} \dfrac{1}{x^2+y^2} = 0$.

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to o}} \dfrac{1}{x^3+y^3} = \infty$.

• **Ví dụ 11** Chứng minh $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Giải

Ta thấy $f(x,y)$ xác định tại mọi điểm trong mặt phẳng trừ điểm $(0,0)$.

Vì $x^2 \leq x^2 + y^2$ nên ta có

$$0 \leq \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| \leq |y| \to 0 \quad \text{khi } x \to 0 \text{ và } y \to 0.$$

Điều này chứng tỏ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$

$\oplus$ **Nhận xét** Từ tính duy nhất của giới hạn ta có:

Nếu tồn tại các dãy điểm $\{M_n\}_n$ và $\{M'_n\}_n$ sao cho $M_n \to M_0$, $M'_n \to M_0$ nhưng $f(M_n) \to L$, $f(M')_n \to L'$, $L \neq L'$ thì giới hạn $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ không tồn tại.

Chẳng hạn, xét sự tồn tại giới hạn của hàm $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ khi $(x, y) \to (0, 0)$.

Ta có $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{n}) \to (0; 0)$, $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0; 0)$ và $f(x_n, y_n) = 0 \to 0$, $f(x'_n, y'_n) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$.

Vậy giới hạn $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ không tồn tại.

2.3 Liên tục

$\square$ **Định nghĩa 7** Giả sử hàm $z = f(x, y)$ xác định trong miền $\mathcal{D}$ và $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

Hàm $f(x, y)$ được gọi là liên tục tại điểm (x_0, y_0) nếu

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Hàm $f(x, y)$ được gọi là liên tục trên miền $\mathcal{D}$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathcal{D}$.

$\odot$ **Chú ý** Gọi $\triangle x = x - x_0$, $\triangle y = y - y_0$ là các số gia của các biến độc lập x, y và

$$\triangle f = \triangle z = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$$

là số gia toàn phần của hàm $f(x, y)$ tương ứng với các số gia $\triangle x, \triangle y$.

Ta có mệnh đề sau:

Hàm $f(x,y)$ liên tục tại (x_0,y_0) khi và chỉ khi $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \triangle f = 0$.

• **Ví dụ 12** Hàm

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & ; \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ; \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

liên tục tại $(0,0)$ vì $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

$\triangle$ **Định lý 1.1** *Nếu f là hàm n biến liên tục trên tập đóng và bị chặn $\mathcal{D}$ trong $\mathbb{R}^n$ thì f đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên $\mathcal{D}$.*

□ **Định nghĩa 8** Hàm $z = f(x,y)$ được gọi là gián đoạn tại điểm (x_0,y_0) nếu nó không liên tục tại điểm này.

Như vậy, hàm $z = f(x,y)$ gián đoạn tại điểm (x_0,y_0) nếu :

i) Hoặc hàm không xác định tại (x_0,y_0).

ii) Hoặc hàm xác định tại (x_0,y_0) nhưng không tồn tại $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.

iii) Hoặc hàm xác định tại (x_0,y_0) nhưng $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$.

3. ĐẠO HÀM RIÊNG

□ **Định nghĩa 9** Cho hàm $z = f(x,y)$ xác định trong miền $\mathcal{D}$ và $(x_0,y_0) \in \mathcal{D}$.

Cố định $y = y_0$, nếu hàm $g(x) = f(x,y_0)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì $g'(x_0)$ được gọi là đạo hàm riêng của hàm $f(x,y)$ theo biến x tại (x_0,y_0) và được kí hiệu bởi một trong những dạng sau:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ z'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ f'_x(x_0,y_0).$$

Ta có

$$\boxed{f'_x(x_0,y_0) = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(x_0+\triangle x,y_0) - f(x_0,y_0)}{\triangle x}}$$

Tương tự, nếu cố định $x = x_0$ thì đạo hàm của hàm một biến $f(x_0,y)$ tại $y = y_0$ được gọi là đạo hàm riêng của hàm $f(x,y)$ theo biến y tại (x_0,y_0) và được kí hiệu bởi một trong các dạng sau:

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ z'_y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),\ f'_y(x_0, y_0).$$

Ta có

$$\boxed{f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y}}$$

Một cách tổng quát, ta có thể mở rộng khái niệm đạo hàm riêng ra đối với hàm n biến với n ≥ 3, chẳng hạn

$$f'_z(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \triangle z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\triangle z}.$$

• **Ví dụ 13** Xét hàm $z = 3axy - x^3 - y^3$ (a là hằng số).

Ta có $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3ay - 3x^2$ nên $\dfrac{\partial z}{\partial x}(a, a) = 3aa - 3a^2 = 0.$

• **Ví dụ 14** Xét hàm $z = x^y$; $(x > 0)$. Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

• **Ví dụ 15** Xét hàm $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + y^2}}.$$

⊙ **Chú ý** Không giống như đạo hàm của hàm một biến, hàm $z = f(x, y)$ có thể có các đạo hàm riêng tại một điểm nhưng không chắc hàm liên tục tại điểm đó, chẳng hạn hàm

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & ,\ x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & ,\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

có các đạo hàm riêng

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\substack{\triangle x \to 0 \\ \triangle y \to 0}} \frac{f(\triangle x, 0) - f(0, 0)}{\triangle x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0$$

nhưng hàm không liên tục tại (0,0) vì $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ không tồn tại.

4. VI PHÂN

4.1 Khái niệm vi phân

□ **Định nghĩa 10** Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trong miền $\mathcal{D}$ và $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Cho x số gia $\triangle x$, y số gia $\triangle y$ sao cho $(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y) \in \mathcal{D}$.

Hàm $f(x, y)$ được gọi là khả vi tại (x_0, y_0) nếu số gia toàn phần

$$\triangle f = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$$

có thể viết dưới dạng

$$\triangle f = A\triangle x + B\triangle y + \alpha\triangle x + \beta\triangle y, \tag{1.4}$$

trong đó A, B là các hằng số; $\alpha, \beta \to 0$ khi $\triangle x, \triangle y \to 0$.

Khi đó đại lượng $A\triangle x + B\triangle y$ gọi là vi phân toàn phần của hàm $f(x, y)$ tại (x_0, y_0) và được kí hiệu $df(x_0, y_0)$. Ta có

$$df(x_0, y_0) = A\triangle x + B\triangle y.$$

Hàm $f(x, y)$ gọi là khả vi trong miền $\mathcal{D}$ nếu $f(x, y)$ khả vi tại mọi $(x, y) \in \mathcal{D}$.

4.2 Điều kiện cần để hàm khả vi

△ **Định lý 1.2** *Nếu hàm $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì $f(x, y)$ liên tục tại (x_0, y_0).*

Chứng minh

Thật vậy, từ (1.4) ta suy ra được $\lim\limits_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}} \triangle f = 0.$ □

△ **Định lý 1.3** *Nếu hàm $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì tại đó tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ và có*

$$\boxed{df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\triangle x + f'_y(x_0, y_0)\triangle y}$$

Chứng minh

Trong hệ thức (1.4), cho $\triangle y = 0$ thì

$$f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\triangle x + \alpha\triangle x.$$

Từ đó
$$\frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x} = A + \alpha.$$

Cho $\triangle x \to 0$ ta có $f'_x(x_0, y_0) = A$.

Tương tự, ta suy ra $f'_y(x_0, y_0) = B$.

Do đó $df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\triangle x + f'_y(x_0, y_0)\triangle y$. □

⊕ **Nhận xét**

i) Nếu $z = f(x, y) = x$ thì $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$ và $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. Ta có
$$dx = dz = \frac{\partial z}{\partial x}.\triangle x + \frac{\partial z}{\partial y}.\triangle y = \triangle x.$$

(vi phân của biến độc lập bằng số gia của nó)

Tương tự, nếu với $z = f(x, y) = y$ thì ta có $dy = \triangle y$.

Do đó vi phân của hàm $z = f(x, y)$ thường được viết dưới dạng
$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}.dx + \frac{\partial z}{\partial y}.dy}$$

ii) Biểu thức vi phân có thể mở rộng cho hàm $n \geq 3$ biến. Chẳng hạn với hàm ba biến $u = f(x, y, z)$ ta có
$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

⊙ **Chú ý** Theo định lý 1.3, nếu hàm $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì tại (x_0, y_0) tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$. Tuy nhiên sự tồn tại các đạo hàm riêng này không đủ để khẳng định rằng hàm $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) (xem ví dụ ở phần sau).

4.3 Điều kiện đủ để hàm khả vi

△ **Định lý 1.4** (`Điều kiện đủ`) *Nếu hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng ở lân cận điểm (x_0, y_0) và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại (x_0, y_0) thì $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0).*

Chứng minh

Với $\triangle x, \triangle y$ đủ bé ta có

$$\triangle f = [f(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y) - f(x_0, y_0+\triangle y)] + [f(x_0, y_0+\triangle y) - f(x_0, y_0)].$$

Áp dụng định lý L'Agrange cho hàm $f(x, y_0+\triangle y)$ và $f(x_0, y)$ ta có

$$\triangle f = f'_x(x_0+\theta_1\triangle x, y_0+\triangle y).\triangle x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\triangle y).\triangle y \quad (0<\theta_1,\theta_2<1).$$

Vì các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục tại (x_0, y_0) nên

$$\begin{array}{lcl} f'_x(x_0+\theta_1\triangle x, y_0+\triangle y) & = & f'_x(x_0, y_0)+\alpha \\ f'_y(x_0, y_0+\theta_2\triangle y) & = & f'_y(x_0, y_0)+\beta \end{array}$$

trong đó $\alpha, \beta \to 0$ khi $\triangle x, \triangle y \to 0$. Từ đó

$$\triangle f = f'_x(x_0, y_0)\triangle x + f'_y(x_0, y_0)\triangle y + \alpha\triangle x + \beta\triangle y.$$

Chứng tỏ $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0). □

⊕ **Nhận xét**

Đặt $\rho = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}$. Ta có

$$\left|\frac{\alpha\triangle x+\beta\triangle y}{\rho}\right| = \left|\alpha\frac{\triangle x}{\rho} + \beta\frac{\triangle y}{\rho}\right| \le |\alpha| + |\beta| \to 0 \text{ khi } \triangle x, \triangle y \to 0.$$

Do đó ta có thể viết $\alpha\triangle x + \beta\triangle y = O(\rho)$. Vì vậy ta có kết quả sau:

$$f(x, y) \text{ khả vi tại } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}} \frac{\triangle f - df}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}} = 0.$$

• **Ví dụ 16** Chứng minh hàm $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ có các đạo hàm riêng tại $(0, 0)$ nhưng hàm không khả vi tại điểm này.

Ta có $f'_x(0, 0) = \lim\limits_{\triangle x\to 0} \dfrac{f(0+\triangle x, 0) - f(0, 0)}{\triangle x} = 0.$

Tương tự, $f'_y(0, 0) = \lim\limits_{\triangle y\to 0} \dfrac{f(0, 0+\triangle y) - f(0, 0)}{\triangle y} = 0.$

Nhưng hàm không khả vi tại $(0, 0)$. Thật vậy, xét

$$\frac{\triangle f - [f'_x(0,0)\triangle x + f'_y(0,0)\triangle y]}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}} = \frac{\sqrt[3]{\triangle x\triangle y}}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}}.$$

Lấy $\triangle x = \triangle y$ thì

$$\frac{\triangle f - [f'_x(0,0)\triangle x + f'_y(0,0)\triangle y]}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}} = \frac{\triangle x^{2/3}}{\sqrt{2}|\triangle x|} \longrightarrow \infty.$$

• **Ví dụ 17** Tìm vi phân toàn phần của hàm ba biến $u = e^{x^2+y^2}\sin^2 z$.

Giải

Ta thấy các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2}2x\sin^2 z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2}2y\sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2}2\sin z\cos z = e^{x^2+y^2}\sin 2z.$$

liên tục tại mọi điểm (x, y, z), nên có

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 zdx + 2y\sin^2 zdy + \sin 2zdz).$$

• **Ví dụ 18** Tính phần trăm thay đổi trong một chu kỳ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ của một con lắc đơn nếu độ dài l của nó tăng 2% và gia tốc trọng lực của nó giảm 0,6%.

Giải

Ta có vi phân

$$dT = \frac{\partial T}{\partial l}.dl + \frac{\partial T}{\partial g}.dg = \frac{2\pi}{2\sqrt{lg}}.dl - \frac{2\pi\sqrt{l}}{2g^{\frac{3}{2}}}.dg.$$

Mà $\quad dl = \dfrac{2}{100}l, \;\; dg = -\dfrac{6}{1000}g \quad$ nên

$$dT = \frac{1}{100}.2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} - (-\frac{6}{1000}).\frac{2\pi}{2}.\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{13}{1000}T.$$

Vậy T tăng 1,3%.

⊙ **Chú ý** Ta có các công thức tính vi phân của hàm hai biến giống như ở hàm một biến

$$\begin{array}{lcll} d(\alpha u) & = & \alpha du & (\alpha \;\; \text{là hằng số}) \\ d(u \pm v) & = & du \pm dv & \\ d(uv) & = & vdu + udv & \\ d\left(\frac{u}{v}\right) & = & \dfrac{vdu - udv}{v^2}. & \end{array}$$

Nhờ các công thức trên ta có thể rút ngắn việc tính vi phân của hàm hai biến.

Chẳng hạn, với hàm $z = \arctan\dfrac{x}{y}$ thì

$$d\left(\arctan\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

4.4 Xấp xỉ tuyến tính

Giả sử hàm $z = f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0). Ta có

$$\begin{aligned} f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) &= f'_x(x_0, y_0)\triangle x + f'_y(x_0, y_0)\triangle y \\ &+ \alpha\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2} \end{aligned}$$

trong đó $\alpha \to 0$ khi $\triangle x \to 0$ và $\triangle y \to 0$.

Khi $|\triangle x|, |\triangle y|$ khá bé thì

$$f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\triangle x + f'_y(x_0, y_0)\triangle y.$$

Ta có công thức xấp xỉ

$$\boxed{f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\triangle x + f'_y(x_0, y_0)\triangle y}$$

hay

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

với (x, y) khá gần (x_0, y_0)

Như vậy ta có thể xấp xỉ hàm $f(x, y)$ bởi hàm tuyến tính $L(x, y)$. Khi đó ta nói hàm $f(x, y)$ được *tuyến tính hóa* hay *xấp xỉ tuyến tính* bởi hàm $L(x, y)$.

• **Ví dụ 19** Tính giá trị xấp xỉ của $\arctan\dfrac{1,02}{0,95}$.

Giải

Xét hàm $f(x, y) = \arctan\dfrac{x}{y}$. Ta có

$$f'_x(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad f'_y(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Khi đó ta được công thức xấp xỉ

$$\arctan\frac{x_0 + \triangle x}{y_0 + \triangle y} \simeq \arctan\frac{x_0}{y_0} + \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2}.\triangle x - \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}.\triangle y.$$

Nếu chọn

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \quad \triangle x = 0,02, \\ y_0 &= 1, \quad \triangle y = -0,05 \end{aligned}$$

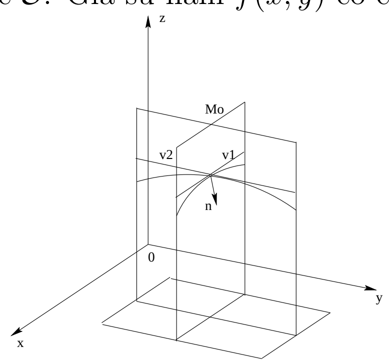
thì

$$\arctan\frac{1,02}{0,95} \simeq \arctan\frac{1}{1} + \frac{1}{2}.0,02 + \frac{1}{2}.0,05$$

$$\simeq \frac{\pi}{4} + \frac{0,7}{2} \simeq \frac{3,1416}{4} + 0,035 \simeq 0,82.$$

5. TIẾP DIỆN VÀ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT CONG

Xét một mặt $\mathcal{S}$ có phương trình $z = f(x, y)$ và điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thuộc $\mathcal{S}$. Giả sử hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại (x_0, y_0).



H 1.8

Giao của mặt $\mathcal{S}$ và mặt phẳng $y = y_0$ là một đường cong qua M_0, chứa trong $\mathcal{S}$. Tiếp tuyến của đường cong này tại M_0 có vector chỉ phương là $\vec{v_1} = \vec{i} + f'_x(x_0, y_0)\vec{k}$. Tương tự tiếp tuyến của đường cong giao của mặt $\mathcal{S}$ và mặt phẳng $x = x_0$ tại M_0 có vector chỉ phương $\vec{v_2} = \vec{j} + f'_y(x_0, y_0)\vec{k}$.

Gọi (P) là mặt phẳng qua M_0 và có hai vector chỉ phương là $\vec{v_1}$ và $\vec{v_2}$. Ta chứng minh được mọi tiếp tuyến tại M_0 của các đường cong nằm trong $\mathcal{S}$ qua M_0 đều chứa trong (P) [1]. Mặt phẳng (P) được gọi là *tiếp diện* của mặt $\mathcal{S}$ tại M_0. Đường thẳng vuông góc với tiếp diện (P) tại M_0 được gọi là *pháp tuyến* của $\mathcal{S}$ tại M_0.

Khi đó tiếp diện có pháp vector tại điểm $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ là

$$\vec{n} = \vec{v}_2 \times \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f'_x(x_0, y_0)\vec{i} + f'_y(x_0, y_0)\vec{j} - \vec{k}.$$

Tiếp diện với mặt cong $z = f(x, y)$ tại $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ có phương trình

$$f'_x(x_0, y_0).(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0).(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

hay

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0).(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0).(y - y_0)}$$

Pháp tuyến với mặt cong $z = f(x, y)$ tại $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ có vector chỉ phương là $\vec{n}$, nên có phương trình

[1] Xem định lý 1, chương 3

$$\boxed{\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-f(x_0,y_0)}{-1}}$$

Phương trình trên có sự thay đổi phù hợp nếu như $f'_x(x_0,y_0)=0$ hoặc $f'_y(x_0,y_0)=0$.

• **Ví dụ 20** Tìm vector pháp tuyến, đường pháp tuyến và tiếp diện của đồ thị hàm $z=\sin xy$ tại điểm $M(\frac{\pi}{3},-1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Giải

Ta có $z'_x = y.\cos xy$ và $z'_y = x.\cos xy$ nên

$$z'_x(\frac{\pi}{3},-1) = -\frac{1}{2}, \quad z'_y(\frac{\pi}{3},-1) = \frac{\pi}{6}.$$

Do đó tại M tiếp diện có pháp vector là $\vec{n} = -\frac{1}{2}.\vec{i} + \frac{\pi}{6}.\vec{j} - \vec{k}$, mặt phẳng tiếp xúc

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}(y+1) \quad \text{hay} \quad 3x - \pi y + 6z - (2\pi - 3\sqrt{3}) = 0$$

và đường pháp tuyến

$$\frac{x-\frac{\pi}{3}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y+1}{\frac{\pi}{6}} = \frac{z+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1}.$$

• **Ví dụ 21** Cho mặt cong $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$. Tìm phương trình tiếp diện của mặt cong, biết rằng nó nằm ngang. Tìm tiếp điểm trong trường hợp này.

Giải

Mặt phẳng nằm ngang có phương trình $z = k$. Do đó $z'_x = z'_y = 0$ tại tiếp điểm.

Hệ phương trình

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x - 4y + 12 = 0 \\ z'_y &= -4x - 4y - 12 = 0 \end{aligned}$$

có nghiệm $x=-4, y=1$, từ đó ta có $z=-31$.

Vậy tiếp diện có phương trình $z=-31$ và tiếp điểm có tọa độ $(-4,1,-31)$.

⊙ **Chú ý** Ta có thể dùng tiếp diện của mặt cong $z=f(x,y)$ tại điểm (x_0,y_0) để xấp xỉ tuyến tính $f(x,y)$ ở lân cận (x_0,y_0)

$$f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

6. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

□ **Định nghĩa 11** Cho hàm $z = f(u,v)$ trong đó $u = u(x,y), v = v(x,y)$ là hàm của hai biến độc lập $x,\ y$. Khi đó $z = f[u(x,y), v(x,y)]$ là hàm hợp của hai biến $x,\ y$ thông qua hai biến trung gian $u,\ v$.

△ **Định lý 1.5** (đạo hàm của hàm hợp)

Cho hàm $z = f(u,v)$ trong đó $u = u(x,y), v = v(x,y)$. Nếu các hàm $f(u,v)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục đối với các biến của chúng thì tồn tại các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ và có

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}} \qquad (1.5)$$

Chứng minh

Vì các đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ liên tục nên hàm $z = f(u,v)$ khả vi và ta có

$$\triangle z = \frac{\partial z}{\partial u}.\triangle u + \frac{\partial z}{\partial v}.\triangle v + \alpha.\triangle u + \beta.\triangle v$$

với $\alpha \to 0$ và $\beta \to 0$ khi $\triangle u \to 0$ và $\triangle v \to 0$.

Cho y không đổi ($\triangle y = 0$) và cho x một số gia $\triangle x$ thì ta được các số gia tương ứng của $z,\ u,\ v$ là $\triangle_x z, \triangle_x u, \triangle_x v$.

Lúc đó

$$\triangle_x z = \frac{\partial z}{\partial u}.\triangle_x u + \frac{\partial z}{\partial v}.\triangle_x v + \alpha.\triangle_x u + \beta.\triangle_x v$$

$$\frac{\triangle_x z}{\triangle x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\triangle_x u}{\triangle x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\triangle_x v}{\triangle x} + \alpha.\frac{\triangle_x u}{\triangle x} + \beta.\frac{\triangle_x v}{\triangle x} \qquad (1.6)$$

Khi cho $\triangle x \to 0$ thì $\triangle_x u \to 0$ và $\triangle_x v \to 0$ kéo theo $\alpha \to 0$ và $\beta \to 0$.

Vì các hàm $u,\ v$ có các đạo hàm riêng theo biến x nên cho qua giới hạn (1.6) khi $\triangle x \to 0$ thì

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tương tự ta có

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}.$$ □

⊙ **Chú ý**

1. Nếu $z = f(u, v)$ với $u = u(x), v = v(x)$ là các hàm của x thì $z = f[u(x), v(x)]$ là hàm một biến của x. Khi đó $\frac{dz}{dx}$ được gọi là đạo hàm toàn phần của z đối với x.

   Từ công thức (1.5) ta có

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{dv}{dx}}$$

2. Hai phương trình ở (1.5) có thể biểu diễn dạng phương trình ma trận sau

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

   Ma trận $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ gọi là ma trận Jacobian của u, v đối với x, y và định thức của ma trận này gọi là định thức Jacobian của u, v đối với x, y và được kí hiệu là $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

• **Ví dụ 22** Cho $z = e^u.\sin v$ với $u = xy, v = x + y$. Hãy tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

i) Bằng công thức.

ii) Bằng cách tính trực tiếp.

Giải

i) Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^u.\sin v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = e^u.\cos v,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

Do đó

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^u.\sin v).y + (e^u.\cos v).1 = e^{xy}.[y\sin(x+y) + \cos(x+y)],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (e^u.\sin v).x + (e^u.\cos v).1 = e^{xy}.[x\sin(x+y) + \cos(x+y)].$$

ii) Thay u và v vào z ta được $z = e^{xy}.\sin(x+y)$.

Suy ra

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y.e^{xy}.\sin(x+y) + e^{xy}.\cos(x+y) = e^{xy}.[y\sin(x+y) + \cos(x+y)].$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy}.[x\sin(x+y) + \cos(x+y)].$$

• **Ví dụ 23** Tính $\frac{\partial}{\partial x}f(x^2y, x+2y)$ và $\frac{\partial}{\partial y}f(x^2y, x+2y)$ theo các đạo hàm riêng của f, biết rằng các đạo hàm riêng trên liên tục

GIẢI

Đặt $u = x^2y$, $v = x + 2y$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(x^2y, x+2y) &= \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= 2xy.\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}f(x^2y, x+2y) &= \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}\\ &= x^2.\frac{\partial f}{\partial u} + 2.\frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

• **Ví dụ 24** Cho $z = e^{x^2+y}$ với $x = t^2, y = \ln t$. Tính $\frac{dz}{dt}$.

GIẢI

Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y}.$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}.$$

Do đó

$$\frac{dz}{dt} = (2xe^{x^2+y}).2t + e^{x^2+y}.\frac{1}{t} = e^{t^4+\ln t}.(4t^3 + \frac{1}{t}) = e^{t^4}.(4t^4+1).$$

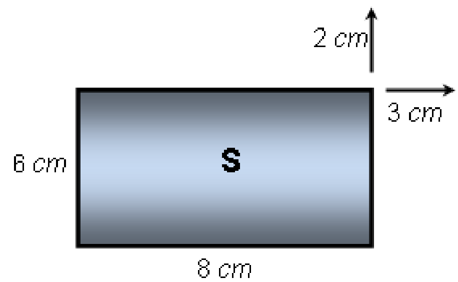
• **Ví dụ 25 (Tốc độ biến thiên theo hai biến)**

Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu chiều dài của nó là 6 cm và đang tăng với tốc độ 3 cm/s, trong khi chiều rộng của nó là 6 cm và đang tăng với tốc độ 2 cm/s?

GIẢI

Gọi $x(t)$, $y(t)$ và $S(t)$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng và diện tích của hình chữ nhật tại thời điểm t (tính theo giây s).

Ta có
$$S(t) = x(t)y(t).$$
Suy ra
$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dt} = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}.$$



H 1.9 Hình chữ nhật thay đổi.

Tại thời điểm t_0 đang xét ta có: $x(t_0) = 8$, $\frac{dx}{dt}(t_0) = 3$, $y(t_0) = 6$, $\frac{dy}{dt}(t_0) = 2$.

Do đó
$$\frac{dS}{dt}(t_0) = y(t_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + x(t_0)\frac{dy}{dt}(t_0) = 6 \times 3 + 8 \times 2 = 34.$$

Vật diện tích của hình chữ nhật đang tăng với tốc độ 34 cm^2/s.

7. ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP CAO

7.1 Khái niệm về đạo hàm riêng cấp cao

□ **Định nghĩa 12** Giả sử hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. Ta thấy các đạo hàm riêng này cũng là hàm của hai biến x, y . Nếu chúng lại có các đạo hàm riêng $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}), \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}), \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}), \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})$ thì các đạo hàm riêng này được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai của hàm $z = f(x, y)$. Ký hiệu:
$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Tổng quát, các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp $n-1$ của hàm z được gọi là các đạo hàm riêng cấp n của z.

Chẳng hạn $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^i \partial y^{n-i}}$ là một đạo hàm riêng cấp n của z, trong đó z được lấy đạo hàm riêng i lần theo x rồi lấy đạo hàm riêng $n-i$ lần theo y.

• **Ví dụ 26** Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm $z = 2x^3y^2 + y^5$.

GIẢI

Ta có
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3y + 5y^4,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12x^2y = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^3 + 20y^3.$$

• **Ví dụ 27** Cho $z = y^2e^x + x^2y^3 + 1$. Tính $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

GIẢI

Ta có
$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2e^x + 2xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2e^x + 2y^3.$$

Suy ra
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2ye^x + 6y^2.$$

• **Ví dụ 28** Tính $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^2 \partial z}$, biết $u = e^{x+y^2}.\sin^2 z$.

GIẢI

Ta có
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}.\sin^2 z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y.e^{x+y^2}.\sin^2 z,$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial^2 y} = 2(1+2y)e^{x+y^2}.\sin^2 z.$$

Suy ra

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial^2 y\partial z} = 2(1+2y)e^{x+y^2}\sin 2z.$$

⊕ **Nhận xét** Các đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ được gọi là *các đạo hàm riêng hỗn hợp* (các đạo hàm riêng chữ nhật), chúng có thể bằng nhau hoặc khác nhau.

7.2 Điều kiện để các đạo hàm riêng hỗn hợp bằng nhau

△ **Định lý 1.6** (`Schwartz`) *Nếu trong lân cận của điểm (x_0, y_0) hàm $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng hỗn hợp $f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ và nếu các đạo hàm riêng này liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ thì ta có*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Chứng minh

Cho $\triangle x, \triangle y$ có trị tuyệt đối đủ bé sao cho điểm $(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y)$ vẫn còn thuộc lân cận V của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Xét biểu thức

$$Q = f(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y) - f(x_0+\triangle x, y_0) - f(x_0, y_0+\triangle y) + f(x_0, y_0).$$

Đặt $u(x) = f(x, y_0+\triangle y) - f(x, y_0)$ thì $Q = u(x_0+\triangle x) - u(x_0)$.

Theo công thức số gia hữu hạn ở hàm một biến ta có

$$Q = \triangle x[f'_x(x_0+\theta_1\triangle x, y_0+\triangle y) - f'_x(x_0+\theta_1\triangle x, y_0)], \quad (0<\theta_1<1)$$

Lại áp dụng công thức số gia hữu hạn cho hàm một biến $f'_x(x_0+\theta_1\triangle x, y)$ ta được

$$f'_x(x_0+\theta_1\triangle x, y_0+\triangle y) - f'_x(x_0+\theta_1\triangle x, y_0) = \triangle y.f''_{xy}(x_0+\theta_1\triangle x, y_0+\theta_2\triangle y),$$

với $0<\theta_2<1$.

Do đó

$$Q = \triangle x.\triangle y.f''_{xy}(x_0+\theta_1\triangle x, y_0+\theta_2\triangle y). \tag{1.7}$$

Lại đặt $v(x) = f(x_0+\triangle x, y) - f(x_0, y)$ thì $Q = v(y_0+\triangle y) - v(y_0)$.

Tiến hành các bước như trên ta nhận được

$$Q = \triangle y.\triangle x.f''_{yx}(x_0+\theta_3\triangle x, y_0+\theta_4\triangle y) \tag{1.8}$$

với $0 < \theta_3 < 1$ và $0 < \theta_4 < 1$.

Đồng nhất hai vế phải của (1.7) , (1.8) và loại bỏ nhân tử $\triangle x.\triangle y$ ta được

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1\triangle x, y_0 + \theta_2\triangle y) = f''_{yx}(x_0 + \theta_3\triangle x, y_0 + \theta_4\triangle y).$$

Vì f''_{xy} và f''_{yx} liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ nên khi cho $\triangle x \to 0$ và $\triangle y \to 0$ thì ta được

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \qquad \square$$

7.3 Phửởng trình Laplace và phửởng trình truyền sóng

Trong thực tế có nhiều hiện tượng được mô hình hóa bởi hàm nhiều biến thỏa mãn phương trình đạo hàm riêng. Hai ví dụ dưới đây giới thiệu về *phương trình Laplace* và *phương trình truyền sóng*. Các phương trình đạo hàm riêng này thường gặp trong quá trình nghiên cứu Vật lý và Toán.

• **Ví dụ 29** Chứng minh với mọi số thực k thì các hàm $z = e^{kx}\cos(ky)$ và $z = e^{kx}\sin(ky)$ thỏa mãn phương trình đạo hàm riêng

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (\textit{Phương trình Laplace}).$$

Giải

Với hàm $z = e^{kx}\cos(ky)$, ta có

$$\frac{\partial x}{\partial x} = k.e^{kx}\cos(ky), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -k.e^{kx}\sin(ky)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2.e^{kx}\cos(ky), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - k^2.e^{kx}\cos(ky)$$

Vì vậy $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

Tương tự, hàm $z = e^{kx}\sin(ky)$ cũng thỏa phương trình.

⊙ **Chú ý** Một hàm hai biến có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một miền phẳng và thỏa phương trình Laplace được gọi là *hàm điều hòa*. Hàm này thường được dùng để mô hình hóa cho các đại lượng vật lý như sự phân bố nhiệt độ đối với trạng thái ổn định, dòng chảy của chất lỏng, trường thế của điện trường và từ trường. Hàm điều hòa có đạo hàm mọi cấp, là tổng của chuỗi Taylor và đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất chỉ trên biên của miền xác định.

• **Ví dụ 30** Giả sử f và g là hai hàm một biến bất kỳ khả vi đến cấp hai. Chứng minh rằng hàm $\omega = f(x-ct) + g(x+ct)$, ($c$ là hằng số) thỏa mãn phương trình đạo hàm riêng

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = c^2.\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} \quad (\textit{Phương trình truyền sóng})$$

Giải

Lấy đạo hàm hàm hợp của f và g ta có

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -c.f'(x-ct) + c.g'(x+ct), \quad \frac{\partial\omega}{\partial x} = f'(x-ct) + g'(x+ct)$$
$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = c^2.f"(x-ct) + c^2.g"(x+ct), \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = f"(x-ct) + g"(x+ct)$$

Ta thấy hàm ω thỏa mãn phương trình đã cho.

⊙ **Chú ý** Nếu t chỉ thời gian thì $f(x-ct)$ biểu diễn một dạng sóng truyền dọc theo trục Ox với vận tốc c. Nếu như nghiệm của phương trình Laplace khả vi vô hạn thì nghiệm của phương trình truyền sóng chỉ cần có đạo hàm đủ đến cấp thỏa mãn phương trình.

8. VI PHÂN CẤP CAO

□ **Định nghĩa 13** Giả sử hàm $z = f(x,y)$ khả vi. Khi đó vi phân toàn phần

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

cũng là hàm của hai biến x, y. Nếu dz có vi phân toàn phần thì vi phân đó được gọi là vi phân cấp hai của z, ký hiệu là d^2z. Ta có

$$d^2z = d(dz).$$

Tổng quát, vi phân của vi phân cấp $n-1$ của hàm z được gọi là vi phân cấp n của hàm z, ký hiệu là d^nz. Ta có

$$d^nz = d(d^{n-1}z).$$

Hàm có vi phân đến cấp n được gọi là khả vi đến cấp n hay n lần khả vi.

⊗ **Công thức tính vi phân cấp cao**

Giả sử hàm $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp n liên tục. Ta có

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \text{với } dx, dy \text{ không đổi.}$$

Suy ra

$$d^2z = d(dz) = d(\frac{\partial z}{\partial x}dx) + d(\frac{\partial z}{\partial y}dy)$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

$$\overset{\text{kí hiệu}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

Tương tự đối với vi phân cấp cao hơn hai, ta đi đến công thức tổng quát

$$\boxed{d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z} \tag{1.9}$$

⊙ **Chú ý**

1. Công thức (1.9) được hiểu một cách hình thức là lũy thừa bậc n của một nhị thức. Sau khi khai triển, hàm z được đặt vào sau dấu ∂ .

2. Nếu x, y lại là hàm của hai biến độc lập s, t nào đó thì công thức trên không còn đúng khi $n \geq 2$.

• **Ví dụ 31** Xét hàm $z = e^x \sin y$. Ta có

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial d}y^2$$

$$= e^x \sin y.dx^2 + 2e^x \cos y.dxdy - e^x \sin y.dy^2$$

$$= e^x(\sin y.dx^2 + 2\cos y.dxdy - \sin y.dy^2).$$

9. GRADIENT VÀ ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG

Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến cho ta tốc độ biến thiên của hàm theo hướng của một trục tọa độ. Trong phần này ta sẽ mở rộng phương pháp tìm tốc độ biến thiên của hàm hai biến theo một hướng bất kỳ trong miền xác định của hàm và nghiên cứu các hướng mà tốc độ biến thiên của hàm theo hướng đó sẽ tăng hoặc giảm nhanh nhất.

9.1 Gradient

□ **Định nghĩa 14** Gradient của hàm $z = f(x, y)$ tại điểm (x, y) là vectơ

$$\text{grad}f(x, y) = f'_x(x, y).\vec{i} + f'_y(x, y).\vec{j},$$

với $\vec{i}$, $\vec{j}$ là các vectơ đơn vị của các trục Ox, Oy.

⊙ **Chú ý** Ký hiệu ∇, đọc là *nabla*, là toán tử vi phân vectơ

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{j}.$$

Tác động toán tử này lên hàm $f(x, y)$ ta được vectơ

$$\nabla f(x, y) = (\frac{\partial}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{j})f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x, y).\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}f(x, y).\vec{j}$$

hay

$$\boxed{\nabla f(x, y) = f'_x(x, y).\vec{i} + f'_y(x, y).\vec{j}}$$

⊕ **Nhận xét** Ta thấy $\nabla f(x, y) = \text{grad}f(x, y)$.

• **Ví dụ 32** Nếu $f(x, y) = x^2 + y^2$ thì $\nabla f(x, y) = 2x.\vec{i} + 2y.\vec{j}$.

△ **Định lý 1.7** *Nếu hàm $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) và $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ thì $\nabla f(x_0, y_0)$ là pháp vectơ của đường mức của f đi qua (x_0, y_0).*

Chứng minh

Gọi θ là góc giữa vectơ $\nabla f(x_0, y_0)$ và vectơ $\vec{v} = \triangle x.\vec{i} + \triangle y.\vec{j}$ từ điểm (x_0, y_0) đến điểm $(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y)$. Ta có

$$\cos\theta = \frac{\nabla f(x_0, y_0).\vec{v}}{|\nabla f(x_0, y_0)|.|\vec{v}|} = \frac{f'_x(x_0, y_0).\triangle x + f'_y(x_0, y_0).\triangle y}{|\nabla f(x_0, y_0)|.\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}}.$$

Nếu $(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y)$ nằm trên đường mức của f đi qua (x_0, y_0) thì $f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) = f(x_0, y_0)$. Vì f khả vi tại (x_0, y_0) nên

$$\lim_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}} \frac{f'_x(x_0,y_0).\triangle x + f'_y(x_0,y_0).\triangle y}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}}$$
$$= \lim_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}} \frac{\triangle f - [f'_x(x_0,y_0).\triangle x + f'_y(x_0,y_0).\triangle y]}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}} = 0.$$

Do đó khi $\triangle x \to 0 \quad \triangle y \to 0$, thì $\cos\theta \to 0$ hay $\theta \to \frac{\pi}{2}$.

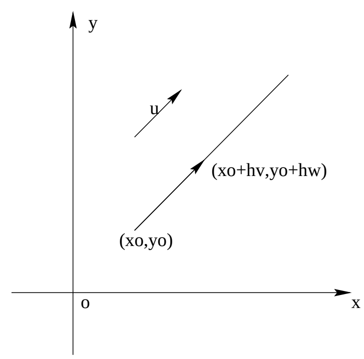
Chứng tỏ $\nabla f(x_0, y_0)$ vuông góc với tiếp tuyến của đường mức của f đi qua (x_0, y_0).

9.2 Đạo hàm theo hướng

a) Khái niệm đạo hàm theo hướng

□ **Định nghĩa 15**
Cho hàm $f(x, y)$ xác định trên miền $\mathcal{D}$, điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ và vectơ đơn vị $\vec{u} = v.\vec{i} + w.\vec{j}$. Gọi $\vec{d}$ là tia qua (x_0, y_0) và cùng hướng với vectơ $\vec{u}$.

Đạo hàm theo hướng của hàm $f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ theo hướng của vectơ $\vec{u}$ là giới hạn (nếu có)



$$\lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in\vec{d}}} \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0}.$$

kí hiệu là $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$.

Gọi $h = \overline{MM_0}$. Vì $M \in \vec{d}$ nên $M(x_0 + hv, y_0 + hw)$. Ta có

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h.v, y_0 + h.w) - f(x_0,y_0)}{h}} \tag{1.10}$$

⊕ **Nhận xét**

i) $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + t.v, y_0 + t.w)|_{t=0}$.

ii) Với $\vec{i}, \vec{j}$ tương ứng là vectơ đơn vị của các trục Ox, Oy thì ta có

$$D_{\vec{i}}f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0), \quad D_{\vec{j}}f(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0).$$

b) Dùng gradient để tìm đạo hàm theo hướng

△ **Định lý 1.8** *Nếu f khả vi tại (x_0,y_0) và $\vec{u} = v.\vec{i} + w.\vec{j}$ là vectơ đơn vị thì*

$$\boxed{D_{\vec{u}}f(x_0,y_0) = \vec{u}.\nabla f(x_0,y_0)}$$

Chứng minh.

Bằng cách lấy đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(x_0,y_0) &= \tfrac{d}{dt}f(x_0+t.v, y_0+t.w)|_{t=0} \\ &= v.f'_x(x_0,y_0) + w.f'_y(x_0,y_0) \\ &= \vec{u}.\nabla f(x_0,y_0). \end{aligned}$$

c) Đạo hàm theo hướng của vectơ bất kỳ

Với vectơ $\vec{v} \neq 0$ ta luôn nhận được một vectơ đơn vị $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ cùng hướng với $\vec{v}$. Vì vậy ta có thể mở rộng khái niệm đạo hàm theo hướng của một vectơ không là vectơ đơn vị.

□ **Định nghĩa 16** Đạo hàm theo hướng của f tại (x_0,y_0) theo hướng của vectơ $\vec{v}$ là

$$D_{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}f(x_0,y_0) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.\nabla f(x_0,y_0).$$

• **Ví dụ 33** Tìm đạo hàm của hàm $f(x,y) = x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$ tại điểm $(0,1)$ theo hướng của vectơ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

Giải

Ta có

$$\nabla f = (2xy^2 + 2y^3)\vec{i} + (2x^2y + 6xy^2 + 4y^3)\vec{j}.$$

Tại $(0,1)$ thì $\nabla f(0,1) = 2\vec{i} + 4\vec{j}$.

Do đó đạo hàm (theo hướng) của f tại $(0,1)$ theo hướng của vectơ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ là

$$\frac{\vec{i} + 2\vec{j}}{|\vec{i} + 2\vec{j}|}.(2\vec{i} + 4\vec{j}) = \frac{2+8}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

d) Biểu diễn đạo hàm theo hướng qua các đạo hàm riêng

Giả sử $\vec{v}$ tạo với hướng dương của trục Ox một góc φ. Gọi $\vec{v_\varphi}$ là vectơ đơn vị theo hướng của $\vec{v}$. Ta có

$$\vec{v_\varphi} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j}.$$

Nếu ký hiệu đạo hàm theo hướng của f tại (x_0, y_0) theo hướng của $\vec{v}$ là $D_\varphi f(x_0, y_0)$ thì theo định lý trước ta có

$$D_\varphi f(x_0, y_0) = D_{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}} f(x_0, y_0) = \vec{v}_\varphi.\nabla f(x_0, y_0).$$

Do đó

$$\boxed{D_\varphi f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).\cos\varphi + f'_y(x_0, y_0).\sin\varphi}$$

e) Tính chất của đạo hàm theo hướng

Nếu gọi θ là góc giữa vectơ đơn vị $\vec{u}$ và vectơ $\nabla f(x_0, y_0)$ thì

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \vec{u}.\nabla f(x_0, y_0) = |\nabla f|.\cos\theta.$$

Khi $|\nabla f(x_0, y_0)| \neq 0$, ta thấy

i) $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$ đạt max khi $\cos\theta = 1$ (tức là $\vec{u}$ cùng hướng với $\nabla f(x_0, y_0)$) và $\max D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = |\nabla f(x_0, y_0)|$.

ii) $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$ đạt min khi $\cos\theta = -1$ (tức là $\vec{u}$ ngược hướng với $\nabla f(x_0, y_0)$) và $\min D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = -|\nabla f(x_0, y_0)|$.

iii) Theo hướng của $\vec{u}$ trực giao với $\nabla f(x_0, y_0)$ $(\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2})$ thì $D_{\vec{u}} f = |\nabla f|.\cos\frac{\pi}{2} = 0$ nên f không đổi.

• **Ví dụ 34** Nhiệt độ tại vị trí (x, y) trong một miền của mặt phẳng xy là T^0C với $T(x, y) = x^2e^{-y}$. Theo hướng nào thì tại điểm $(2, 1)$ nhiệt độ tăng nhanh nhất, tìm tốc độ tăng của T theo hướng đó .

Giải

Ta có

$$\nabla T(x, y) = 2xe^{-y}\vec{i} - x^2e^{-y}\vec{j}.$$

$$\nabla T(2, 1) = \frac{4}{e}\vec{i} - \frac{4}{e}\vec{j} = \frac{4}{e}.$$

Tại $(2, 1)$ thì $T(x, y)$ tăng nhanh nhất theo hướng của vectơ $\vec{i} - \vec{j}$, tốc độ của sự tăng theo hướng này là $|\nabla T(2, 1)| = \frac{4\sqrt{2}}{e}{}^oC$ trên một đơn vị khoảng cách.

10. ĐẠO HÀM CỦA HÀM ẨN

10.1 Khái niệm hàm ẩn xác định bởi hệ thức

⊕ **Nhận xét** Xét hệ thức $F(x, y) = 0$. Nếu với mỗi $x = x_0$ có một giá trị xác định $y = y_0$ sao cho $F(x_0, y_0) = 0$ thì hệ thức trên xác định một hàm một biến $y = y(x)$ thỏa hệ thức, ta sẽ gọi đây là hàm ẩn xác định bởi hệ thức.

□ **Định nghĩa 17** Hàm $y = y(x)$ được gọi là hàm ẩn xác định bởi hệ thức $F(x, y) = 0$ nếu $F(x, y(x)) = 0$ với mọi x.

Tương tự, hàm $z = z(x, y)$ là hàm ẩn hai biến xác định bởi hệ thức $F(x, y, z) = 0$ nếu $F(x, y, z(x, y)) = 0$ với mọi cặp (x, y).

• **Ví dụ 35**

i) Hệ thức $x^3 + y^3 - 1 = 0$ xác định hàm ẩn $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

ii) Xét hệ thức $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Ta thấy $z_1 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ và $z_2 = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là hai hàm ẩn xác định bởi hệ thức trên.

⊙ **Chú ý**

i) Ta thường tìm hàm ẩn bằng cách giải hệ thức. Tuy nhiên điều này không phải lúc nào cũng thực hiện được. Chẳng hạn, hệ thức $x^3 y + \ln y - x = 0$ xác định hàm ẩn một biến $y = y(x)$, nhưng hàm này không thể biểu diễn như một hàm sơ cấp của x vì phương trình không thể giải được một cách đại số theo y.

ii) Không phải lúc nào hệ thức cho trước cũng xác định hàm ẩn. Chẳng hạn, hệ thức $x^2 + y^2 + 1 = 0$ không thể xác định hàm ẩn nào.

iii) Một hệ thức có thể xác định nhiều hàm ẩn (ví dụ 35).

10.2 Đạo hàm của hàm ẩn

a) Đạo hàm của hàm ẩn một biến

Giả sử hệ thức $F(x, y) = 0$ xác định một hàm ẩn duy nhất $y = y(x)$ theo định lý tồn tại hàm ẩn.

Thay y bởi $y(x)$ vào hệ thức ta được đồng nhất thức $F(x, y(x)) \equiv 0$.

Đạo hàm hàm hai vế theo x ta được

$$F'_x + F'_y.\frac{dy}{dx} = 0.$$

Với $F'_y \neq 0$ thì

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}}$$

• **Ví dụ 36** Viết phương trình tiếp tuyến của elip (E): $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ tại điểm M$(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

GIẢI

Phương trình của elip có thể viết dạng $F(x, y) \equiv \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$.

Ta có $y^{'}(x) = -\dfrac{F_x^{'}}{F_y^{'}} = -\dfrac{x/2}{2y} = -\dfrac{x}{4y}$.

Suy ra $y^{'}(\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{4.\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2}$.

Vậy tiếp tuyến có phương trình

$$y = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{hay} \quad y = \frac{1}{2}x + \sqrt{2}.$$

b) Đạo hàm của hàm ẩn hai biến

Giả sử hệ thức $F(x, y, z) = 0$ xác định hàn ẩn hai biến duy nhất $z = z(x, y)$ theo định lý tồn tại hàm ẩn.

Thay z bởi $z(x, y)$ vào hệ thức ta được đồng nhất thức $F[x, y, z(x, y)] \equiv 0$. Dẫn đến

$$F'_x + F'_z.\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$
$$F'_y + F'_z.\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Với $F'_z \neq 0$ thì ta có

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y}{F'_z} \end{array}}$$

- **Ví dụ 37** Xét $F(x,y,z) \equiv e^{-xy} - 2z + e^z = 0$.

  Ta có $F'_x = -ye^{-xy}, \quad F'_y = -xe^{-xy}, \quad F'_z = -2 + e^z.$

  Do đó hàm ẩn xác định bởi hệ thức có các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2}.$$

11. CÔNG THỨC TAYLOR VÀ TÍNH XẤP XỈ

⊕ **Nhận xét**

Ta biết nếu hàm một biến $F(t)$ có các đạo hàm đến cấp $n+1$ thì ta có công thức Taylor:

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0).(t - t_0) + \frac{1}{2!}F''(t_0)(t - t_0)^2$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0))(t - t_0)^{n+1}$$

$$(0 < \theta < 1).$$

Nếu đặt $t - t_0 = \triangle t$ và $\triangle F = F(t) - F(t_0)$ thì công thức trên có thể viết lại dưới dạng vi phân như sau:

$$\triangle F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^nF(t_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0 + \theta.\triangle t).$$

Ta sẽ mở rộng công thức Taylor ra đối với hàm hai biến. Cũng như hàm một biến, sự biểu diễn qua chuỗi lũy thừa và tổng riêng của nó (đa thức Taylor) cho ta một phương pháp hữu hiệu để khảo sát dáng điệu và giá trị của hàm ở lân cận điểm cần xét.

△ **Định lý 1.9** (`Công thức Taylor`) *Giả sử hàm $z = f(x,y)$ có các đạo hàm liên tục đến cấp $n+1$ trong lân cận của điểm (x_0, y_0). Khi đó ta có công thức*

$$\begin{aligned} \triangle f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) \\ &= df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0, y_0) + \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y), \qquad (1.11) \\ &\quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

Chứng minh. Đặt $x = x_0 + t.\triangle x, y = y_0 + t.\triangle y \quad (0 \le t \le 1)$. Thay các giá trị này vào hàm $f(x, y)$ ta được hàm một biến theo t

$$F(t) = f(x_0 + t.\triangle x, y_0 + t.\triangle y).$$

Thay cho số gia $\triangle f(x_0, y_0) = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$ ta xét số gia

$$\triangle F(0) = F(1) - F(0).$$

Áp dụng công thức Taylor của hàm một biến cho $F(t)$ tại $t_0 = 0$, ta có

$$\begin{aligned}\triangle F(0) &= dF(0) + \frac{1}{2!}d^2F(0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^nF(0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta),\\ &\quad (0 < \theta < 1) \qquad (1.12)\end{aligned}$$

trong đó vi phân dt có mặt trong các lũy thừa khác nhau ở vế phải bằng $\triangle t = 1 - 0 = 1$

Theo công thức vi phân cấp cao của hàm một biến ta có

$$\begin{aligned}dF(0) &= f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy = df(x_0, y_0)\\ d^2F(0) &= f''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0, y_0)dy^2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Cuối cùng, đối với vi phân cấp $n + 1$ ta có

$$d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y).$$

Chú ý rằng các vi phân dx, dy không có gì khác so với $\triangle x, \triangle y$ lấy ở trên. Với $dt = \triangle t = 1$ thì $dx = \triangle x.dt = \triangle x$ và $dy = \triangle y.dt = \triangle y$.

Thay tất cả vào (1.12) ta được công thức cần chứng minh. □

⊙ **Chú ý**

i) Theo công thức vi phân cấp cao của hàm nhiều biến

$$d^nf(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0)$$

thì công thức Taylor có thể viết lại

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y)\\ &= \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial}{\partial y}\triangle y\right)^k f(x_0, y_0) +\\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial}{\partial y}\triangle y\right)^{n+1} f(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y),\end{aligned}$$

với x ở gần x_0 và $0 < \theta < 1$.

ii) Đa thức

$$P_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial}{\partial y} \triangle y \right)^k f(x_0, y_0)$$

được gọi là đa thức Taylor cấp n. Ta có thể xấp xỉ $f(x,y)$ bởi $P_n(x,y)$ với (x,y) ở gần (x_0, y_0).

iii) Khi $n = 1$, ta có xấp xỉ tuyến tính của hàm $f(x,y)$:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0).\triangle x + f'_y(x_0,y_0).\triangle y.$$

• **Ví dụ 38** Tìm đa thức cấp hai xấp xỉ với hàm $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^3}$ ở gần điểm $(1,2)$ và dùng nó để tính gần đúng giá trị $\sqrt{(1,02)^2 + (1,97)^3}$

Giải

Ta có $f(1,2) = 3$

$$f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}} \quad \Rightarrow \quad f'x(1,2) = \frac{1}{3},$$

$$f'_y(x,y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}} \quad \Rightarrow \quad f'_y(1,2) = 2,$$

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{y^3}{(x^2+y^3)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad f''_{xx} = \frac{8}{27},$$

$$f''_{xy} = \frac{-3xy^2}{2(x^2+y^3)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad f''_{xy}(1,2) = -\frac{2}{9},$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{12x^2y+3y^4}{4(x^2+y^3)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad f''_{yy}(1,2) = \frac{2}{3}.$$

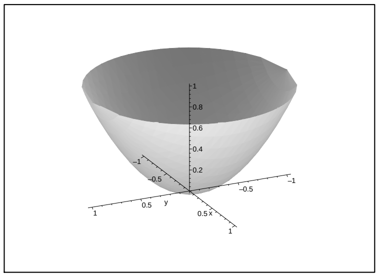
Do đó

$$f(1+\triangle x, 2+\triangle y) \approx 3 + (\frac{1}{3}\triangle x + 2\triangle y) + \frac{1}{2!}(\frac{8}{2}\triangle x^2 + 2(-\frac{2}{9})\triangle x \triangle y + \frac{2}{3}\triangle y^2).$$

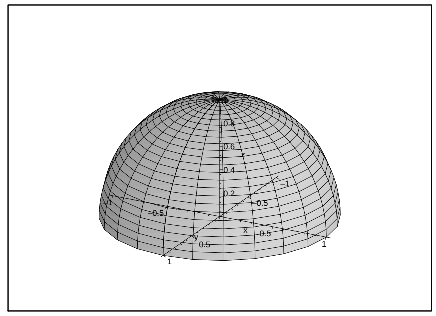
Cho $\triangle x = 0,02$ và $\triangle y = -0,03$ thì

$$\begin{aligned} \sqrt{(1,02)^2+(1,97)^3} &= f(1+0,02; 2-0,03) \\ &\approx 3 + \tfrac{1}{3}(0,02) + 2.(-0,03) + \tfrac{4}{27}(0,02)^2 \\ &\quad -\tfrac{2}{9}(0,02).(-0,03) + \tfrac{1}{3}.(-0,03)^2 \\ &\approx 2,9471593. \end{aligned}$$

12. CỰC TRỊ



H 1.10a Đồ thị hàm $z = x^2 + y^2$



H 1.10b Đồ thị hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Quan sát hai đồ thị trên ta thấy hàm $f(x, y) = x^2 + y^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng 0, giá trị này đạt tại điểm gốc $(0, 0)$. Tương tự hàm $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ có giá trị lớn nhất bằng 1, giá trị này đạt tại điểm gốc $(0, 0)$.

Bằng cách nào tìm được giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất nếu ta không dùng đồ thị? Không như cực trị của hàm một biến, vấn đề ở đây sẽ phức tạp hơn nhiều. Trong phần này ta sẽ xây dựng phương pháp tìm cực trị của hàm hai biến, một vài kỹ thuật sẽ được mở rộng cho hàm n biến $(n = 3, ...)$.

12.1 Định nghĩa

Hàm $f(x, y)$ được gọi là đạt cực tiểu (cực đại) địa phương tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ (hay $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$) với mọi điểm $M(x, y)$ thuộc lân cận nào đó của M_0. Khi đó $M_0(x_0, y_0)$ được gọi là điểm cực tiểu (cực đại) địa phương của hàm $f(x, y)$. Cực tiểu và cực đại địa phương được gọi chung là cực trị địa phương.

12.2 Điều kiện cần để có cực trị

□ Định nghĩa 18

Điểm (x_0, y_0) được gọi là điểm dừng của hàm $f(x, y)$ nếu $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Điểm (x_0, y_0) được gọi là điểm kỳ dị của hàm $f(x, y)$ nếu $f'_x(x_0, y_0)$ hoặc $f'_y(x_0, y_0)$ không tồn tại.

Điểm dừng và điểm kỳ dị được gọi chung là điểm tới hạn.

△ **Định lý 1.10** *Nếu hàm $f(x, y)$ đạt cực trị địa phương tại điểm (x_0, y_0) và tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ thì $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.*

Chứng minh

Theo giả thiết ta thấy $\nabla f(x_0, y_0)$ phải tồn tại. Ta sẽ chứng minh $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

Nếu ngược lại $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$. Dẫn đến f có đạo hàm theo hướng dương của $\nabla f(x_0, y_0)$ và có đạo hàm theo hướng âm của $-\nabla f(x_0, y_0)$. Nghĩa là f tăng khi ta di chuyển từ (x_0, y_0) theo một hướng và f giảm khi ta di chuyển theo hướng ngược lại. Điều này cho thấy f không thể đạt cực trị tại (x_0, y_0) (mâu thuẫn với giả thiết). □

⊙ **Chú ý**

i) Định lý (1.10) cho phép ta hạn chế việc xét cực trị tại điểm dừng. Ngoài ra hàm còn có thể đạt cực trị tại các điểm kỳ dị. Ta gọi các điểm này là các *điểm tới hạn*.

ii) Nếu $\mathcal{D}$ mở và $f(x, y)$ không có điểm kỳ dị thì điều kiện $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0.y_0) = 0$ là điều kiện cần để hàm đạt cực trị tại (x_0, y_0). Tuy nhiên nó không đủ để quyết định hàm đạt cực trị tại điểm này.

Chẳng hạn hàm $z = xy$ có điểm dừng $(0, 0)$ (vì $z'_x = y = 0$ và $z'_y = x = 0$ tại $x = 0, y = 0$) nhưng hàm không đạt cực trị tại điểm này vì với những điểm (x, y) gần điểm $(0, 0)$ mà $x > 0, y < 0$ thì $z(x, y) < z(0, 0) = 0$ và với những điểm điểm (x, y) gần điểm $(0, 0)$ mà $x > 0, y > 0$ thì $z(x, y) > z(0, 0) = 0$.

12.3 Điều kiện đủ để có cực trị

△ **Định lý 1.11** *Giả sử hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong lân cận của điểm (x_0, y_0), với (x_0, y_0) là điểm dừng của $f(x, y)$, và $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$,*
$\triangle = B^2 - AC$. Khi đó

i) Nếu $\triangle < 0$ và $A > 0$ thì f đạt cực tiểu địa phương tại (x_0, y_0)

ii) Nếu $\triangle < 0$ và $A < 0$ thì f đạt cực đại địa phương tại (x_0, y_0)

iii) Nếu $\triangle > 0$ thì f không đạt cực trị địa phương tại (x_0, y_0)

iv) Nếu $\triangle = 0$ thì ta không thể khẳng định gì về sự tồn tại của cực trị, trường hợp này cần phải khảo sát thêm.

BẢNG TÓM TẤT

$\triangle = B^2 - AC$	A	*Kết luận tại $M(x_0, y_0)$*
-	+	Cực tiểu
	-	Cực đại
+		Không đạt cực trị
0		M_0 là điểm nghi ngờ

Chứng minh

Đặt $h = \triangle x$, $k = \triangle y$. Ta viết công thức Taylor cho $f(x, y)$ trong trường hợp $n = 2$.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x^{'}(x_0, y_0)h + f_y^{'}(x_0, y_0)k + \frac{1}{2}[f_{xx}^{''}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}^{''}(x_0, y_0)hk + f_{yy}^{''}(x_0, y_0)k^2] + O(h^2 + k^2).$$

Vì $f_x^{'}(x_0, y_0) = f_y^{\prime}(x_0, y_0) = 0$ nên

$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2}[f_{xx}^{''}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}^{''}(x_0, y_0)hk + f_{yy}^{''}(x_0, y_0)k^2] + O(h^2 + k^2)$.

Đặt $Q(h, k) = \frac{1}{2}[f_{xx}^{''}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}^{''}(x_0, y_0)hk + f_{yy}^{''}(x_0, y_0)k^2]$ thì

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Q(h, k) + O(h^2 + k^2). \tag{1.13}$$

Vì các đạo hàm riêng cấp hai của f liên tục tại (x_0, y_0) nên khi $Q(h, k) \neq 0$ thì dấu của $Q(h, k)$ cũng là dấu của vế trái của (1.13) với h, k đủ nhỏ.

Để chứng minh f có cực tiểu (hoặc cực đại) địa phương tại (x_0, y_0) ta chứng minh $Q(h, k) \geq 0$ (hoặc $Q(h, k) \leq 0$) với mọi (h, k) thuộc lân cận của $(0, 0)$.

Đặt $A = f_{xx}^{''}(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}^{''}(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}^{''}(x_0, y_0)$ và $\triangle = B^2 - AC$ thì $Q(h, k) = A.h^2 + 2B.h.k + Ck^2$.

Khi $A \neq 0$ ta có $Q(h, k) = A.\left[\left(h + \dfrac{B}{A}.k\right)^2 + \dfrac{AC - B^2}{A^2}.k^2\right]$.

Nếu $\triangle = B^2 - AC < 0$ thì với mọi $(h,k) \neq (0,0)$ ta thấy $Q(h,k)$ sẽ cùng dấu với A. Nếu $A > 0$ thì $Q(h,k) > 0$, do đó f đạt cực tiểu tại (x_0, y_0). Nếu $A < 0$ thì $Q(h,k) < 0$ dẫn đến f đạt cực đại tại (x_0, y_0).

Nếu $\triangle > 0$ thì $Q(h,k)$ không giữ nguyên dấu trong lân cận của (x_0, y_0). Chẳng hạn, $Q(h,k) > 0$ tại $(h,0)$ và $Q(h,k) < 0$ tại $(-\frac{Bk}{A}, k)$. Do đó f không thể đạt cực trị tại (x_0, y_0).

Khi $A = 0$ nhưng $\triangle \neq 0$ thì $B \neq 0$ và $Q(h,k) = k(2Bh + Ck)$. Ta thấy $Q(h,k)$ có cả hai giá trị dương và âm trong góc cung phần tư thứ tư của mặt phẳng tọa độ nằm giữa đường thẳng $k = 0$ và $2Bh + Ck = 0$. Trường hợp này f không đạt cực trị tại (x_0, y_0).

Khi $\triangle = 0$ thì f có thể có cực tiểu, cực đại hoặc không có cực trị . Ta có thể thấy cụ thể ở các hàm

$$g_1(x,y) = x^4 + y^4, g_2(x,y) = -x^4 - y^4, g_3(x,y) = x^4 - y^4. \qquad \square$$

• **Ví dụ 39** Tìm cực trị của hàm $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Giải

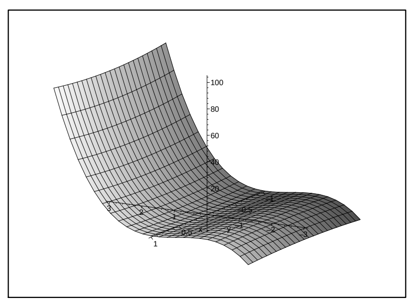
Ta có

$$\begin{aligned} z'_x &= 6x^2 + y^2 + 10x \\ z'_y &= 2xy + 2y = 2(x+1)y \end{aligned}$$

Hàm có 4 điểm dừng

$M_1(0,0)$, $M_2(-\frac{5}{3}, 0)$, $M_3(-1,2)$, $M_4(-1,-2)$.

$z''_{xx} = 12x + 10$, $z''_{xy} = 2y$, $z''_{yy} = 2(x+1)$.



H 1.11 Đồ thị $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Tại $M_1(0,0)$: $A = 10$, $B = 0$, $C = 2$, $\triangle = -20$. Ta thấy $\triangle < 0$ và $A > 0$ nên M_1 là điểm cực tiểu.

Tại $M_2(-\frac{5}{3}, 0)$: $A = -10$, $B = 0$, $C = -\frac{4}{3}$, $\triangle = -\frac{40}{3}$. Ta thấy $\triangle < 0$ và $A < 0$ nên M_2 là điểm cực đại.

Tại $M_3(-1,2)$: $A = -2$, $B = 4$, $C = 0$, $\triangle = 16$. Ta thấy $\triangle > 0$ nên M_3 không là điểm cực trị.

Tại $M_4(-1,-2)$: $A = -2$, $B = -4$, $C = 0$, $\triangle = 16$. Ta thấy $\triangle > 0$ nên M_4 không là điểm cực trị.

• **Ví dụ 40** Tìm cực trị của hàm $z = x^3 + y^2$.

GIẢI

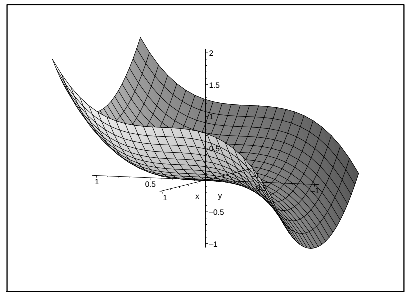
Ta có $z'_x = 3x^2, \quad z'_y = 2y$.

Hàm có điểm dừng $O(0,0)$.

$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{xy} = 0, \quad z''_{yy} = 2$.

Tại $(0,0)$ thì $A = B = C = 0$. Suy ra $\triangle = 0$.

Ta thấy $z(x,0) = x^3 > 0 = z(0,0)$ với $x > 0$ và $z(x,0) = x^3 < 0 = z(0,0)$ với $x < 0$.



H 1.12 Đồ thị hàm $z = x^3 + y^2$.

Vậy hàm không đạt cực trị tại $(0,0)$.

• **Ví dụ 41** Tìm cực trị của hàm $z = x^2y^2$.

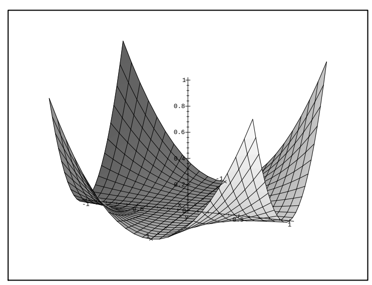
GIẢI

Ta có $z'_x = 2xy^2 \quad z'_y = 2x^2y$.

Hàm có các điểm dừng $(x,0), (0,y)$; với x, y tùy ý

$z''_{xx} = 2y^2 \quad z''_{xy} = 4xy \quad z''_{yy} = 2x^2$.

* Tại $(x,0)$ thì
$A = z'_{xx}(x,0) = 0$, $B = z'_{xy}(x,0) = 0$, $C = z'_{yy}(x,0) = 2x^2$, $\triangle = B^2 - AC = 0$



H 1.13 Đồ thị hàm $z = x^2y^2$.

nên $(x,0)$ là điểm nghi ngờ có cực trị.

* Tại $(0,y)$ thì $A = z'_{xx}(0,y) = 2y^2$, $B = z'_{xy}(0,y) = 0$, $C = z'_{yy}(0,y) = 0$, $\triangle = B^2 - AC = 0$ nên $(0,y)$ là điểm nghi ngờ có cực trị.

* Ta thấy với mọi (x,y) thì $z(x,y) = x^2y^2 \geq 0 = z(x,0) = z(0,y)$ nên các điểm $(x,0)$ và $(0,y)$ là các điểm cực tiểu.

13. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

13.1 Định nghĩa

Cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$ được gọi là cực trị có điều kiện.

13.2 Phương pháp thế

Giả sử từ điều kiện ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$ ta giải ra được $y = y(x)$. Khi đó việc tìm cực trị có điều kiện của hàm $z = f(x, y)$ được quy về việc tìm cực trị tự do (không điều kiện) của hàm $z = f(x, y(x))$.

• **Ví dụ 42** Tìm cực trị của hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ với điều kiện $x + y - 1 = 0$.

GIẢI

Từ điều kiện ta giải ra $y = 1 - x$. Thế vào biểu thức của z, ta được

$$z = \sqrt{1 - x^2 - (1 - x)^2} = \sqrt{2}.\sqrt{x - x^2}.$$

Đây là hàm một biến của x xác định với $x - x^2 \geq 0$ hay $0 \leq x \leq 1$. Ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1 - 2x}{\sqrt{x - x^2}}; \quad \frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{khi} \quad x = \frac{1}{2}.$$

x	0		1/2		1
$\frac{dz}{dx}$	$\Vert$	+	0	-	$\Vert$
z	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

Ta thấy z đạt cực đại có điều kiện tại $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

13.3 Phương pháp nhân tử Lagrange

a) Điều kiện cần của cực trị có điều kiện

Giả sử ta muốn tìm cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$ mà ta gặp phải các trường hợp sau:

i) Từ phương trình $\varphi(x, y) = 0$ ta không thể giải ra x hoặc y.

ii) Sau khi dùng phép thế thì hàm kết quả z của một biến không dễ dàng lấy đạo hàm.

Để giải quyết được bài toán trong tình huống này ta sẽ dựa vào định lý dưới đây

△ **Định lý 1.12** (Điều kiện cần của cực trị có điều kiện) *Cho* $M_0(x_0, y_0)$ *là điểm cực trị của hàm* $z = f(x, y)$ *với điều kiện ràng buộc* $\varphi(x, y) = 0$. *Giả sử*

i) Các hàm f *và* φ *có các đạo hàm riêng cấp một liên tục ở lân cận của điểm* M_0.

ii) Các đạo hàm riêng $\varphi'_x(x_0, y_0), \varphi'_y(x_0, y_0)$ *không đồng thời bằng 0.*

Khi đó tồn tại một số λ_0 *sao cho* (x_0, y_0, λ_0) *là điểm dừng của hàm*

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda.\varphi(x, y).$$

(Số λ *được gọi là nhân tử Lagrange, hàm* $F(x, y, \lambda)$ *được gọi là hàm Lagrange)*

Chứng minh

Từ giả thiết ta thấy đường cong $(\mathcal{C}) : \varphi(x, y) = 0$ có tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0)$ và $\nabla\varphi(M_0)$ là pháp vectơ của tiếp tuyến.

Nếu $\nabla f(M_0)$ không cùng phương với $\nabla\varphi(M_0)$ thì $\nabla f(M_0)$ có hình chiếu trên tiếp tuyến với $(\mathcal{C})$ là vectơ khác không $\vec{v}$. Do đó đạo hàm theo hướng của f dương theo một hướng tại M_0 và có đạo hàm theo hướng âm theo hướng ngược lại. Vì thế $f(x, y)$ tăng hoặc giãm khi ta di chuyển từ M_0 dọc trên (C) theo hướng của $\vec{v}$ hoặc $-\vec{v}$ và do đó $f(x, y)$ không thể đạt cực trị tại M_0 (điều này vô lý).

Tóm lại, $\nabla f(M_0)$ phải song song với $\nabla\varphi(M_0)$. Vì $\nabla\varphi(M_0) \neq 0$ nên phải tồn tại một số λ sao cho

$$\nabla f(M_0) = -\lambda.\nabla\varphi(M_0) \quad \text{hay} \quad \nabla(f + \lambda\varphi)(M_0) = 0.$$

Do đó

$$\begin{cases} F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases}$$

vì $F'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = \varphi(x_0, y_0) = 0$ nên (x_0, y_0, λ_0) là điểm dừng của hàm $F(x, y, \lambda)$. □

⊙ **Chú ý** Định lý (1.12) cho phép ta hạn chế việc tìm cực trị có điều kiện vào những điểm (x, y) thỏa mãn hệ phương trình

$$F'_x = f'_x(x, y) + \lambda.\varphi'_x(x, y) \;\; = \;\; 0$$

$$F_y^{'} = f_y^{'}(x,y) + \lambda.\varphi_y^{'}(x,y) = 0 \qquad (1.14)$$
$$\varphi(x,y) = 0$$

hoặc những điểm thỏa mãn hệ thức $\varphi(x,y) = 0$ mà không thỏa điều kiện 1,2 của định lý.

Ta gọi những điểm trên là những *điểm tới hạn*. Tuy nhiên định lý không đảm bảo các điểm tới hạn là điểm cực trị. Tùy theo từng trường hợp cụ thể mà ta xét xem các điểm tới hạn có phải là điểm cực trị hay không.

• **Ví dụ 43** Một nhà máy sản xuất ra 2 loại động cơ với số lượng của mỗi loại tương ứng là x và y, hàm lợi nhuận liên kết giữa chúng được cho bởi

$$P(x,y) = x^2 + 3xy - 6y.$$

Để đạt được lợi nhuận cao nhất thì bao nhiêu động cơ của mỗi loại cần được sản xuất, biết tổng số máy mà nhà máy sản xuất ra là 42 máy.

GIẢI

Ta thấy tổng số 42 động cơ được sản xuất ra là điều kiện ràng buộc của bài toán.

Bài toán được đưa về việc tìm giá trị lớn nhất của hàm $P(x,y) = x^2 + 3xy - 6y$ với điều kiện ràng buộc $x + y - 42 = 0$.

Lập hàm Lagrange $F(x,y,\lambda) = x^2 + 3xy - 6y + \lambda(x + y - 42)$.

Giải hệ

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3x - 6 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 42 = 0 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $x = 33$, $y = 9$, $\lambda = -93$.

Ta thấy lợi nhuận cao nhất đạt được với $x = 33$, $y = 9$ và $P_{max} = 1926$.

• **Ví dụ 44** Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = xy$ với điều kiện ràng buộc $\varphi(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$.

GIẢI

Lập hàm Lagrange $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda[(x-1)^2 + y^2 - 1]$ và xét hệ

$$F'_x = y + 2\lambda(x-1) = 0 \tag{1.15}$$
$$F'_y = x + 2\lambda y = 0 \tag{1.16}$$
$$F'_\lambda = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1.17}$$

* Khi $y \neq 0$: Từ (1.16) ta rút ra $\lambda = -\frac{x}{2y}$.

Thay vào (1.15) ta được $y^2 = x(x-1)$.

Thay biểu thức trên vào (1.17) và giải ra ta được $x = \frac{3}{2}$ và $x = 0$.

\+ Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ (loại).

\+ Nếu $x = \frac{3}{2}$ thì $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ta được hai điểm tới hạn là $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ và $(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Trị của λ ứng với chúng theo thứ tự là $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

* Khi $y = 0$: Phương trình (1.16) cho $x = 0$. Ta có điểm tới hạn $M_0(0, 0)$, trị của λ ứng với nó là $\lambda = 0$.

Ngoài ra không còn điểm tới hạn nào khác.

Tóm lại ta có 3 điểm tới hạn $M_0(0, 0)$, $M_1(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ và $M_2(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Ta thấy hàm $z = xy$ dương tại những điểm thuộc nửa trên của đường tròn $\mathcal{C} : \varphi(x, y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$ và âm tại những điểm thuộc nửa dưới của $\mathcal{C}$. Hàm z liên tục trên tập đóng và bị chặn $\mathcal{C}$ nên sẽ đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên $\mathcal{C}$. Trị bé nhất chỉ có thể đạt tại nửa đường tròn dưới và trị lớn nhất chỉ có thể đạt tại nửa đường tròn trên. Vậy M_1 là điểm cực tiểu có điều kiện, M_2 là điểm cực đại có điều kiện, còn M_0 không là điểm cực trị có điều kiện, vì ở lân cận của nó trên đường tròn, $z > 0$ ở nửa đường tròn trên và $z < 0$ ở nửa đường tròn dưới. Vì vậy ta có

$$z_{min} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad z_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

b) Điều kiện đủ của cực trị có điều kiện

Xét cực trị của hàm $f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$. Giả sử các hàm $f(x, y)$ và $\varphi(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai ở lân cận (x_0, y_0) và (x_0, y_0, λ) là điểm dừng của hàm Lagrange. Theo định lý (1.12), điểm (x_0, y_0) thỏa điêu kiện cần của cực trị có điều kiện. Ta sẽ tìm điều kiện đủ để (x_0, y_0) là điểm cực trị có điều kiện. Ta có

$$\triangle F(x_0, y_0, \lambda) = \triangle f(x_0, y_0) + \lambda \triangle \varphi(x_0, y_0) = \triangle f(x_0, y_0) + O.$$

Ta thấy dấu của $\triangle f(x_0, y_0)$ trùng với dấu của $\triangle F(x_0, y_0)$ hay dấu của $d^2F(x_0, y_0)$ vì

$$\triangle F(x_0, y_0) = \frac{1}{2} d^2F(x_0, y_0) + (\alpha_{xx} \triangle x^2 + 2\alpha_{xy} \triangle x \triangle y + \alpha_{yy} \triangle y^2)$$

trong đó $\alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \alpha_{yy} \to 0$ khi $\triangle x$ và $\triangle y \to 0$.

Vậy ta có định lý sau cho điều kiện đủ của cực trị có điều kiện.

Δ **Định lý 1.13** *Giả sử các hàm $f(x, y)$ và $\varphi(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai ở lân cận (x_0, y_0) và (x_0, y_0, λ) là điểm dừng của hàm Lagrange. Xét vi phân*

$$d^2F(x_0, y_0, \lambda) = F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda)dx^2 + 2F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda)dxdy + F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda)dy^2$$

với ràng buộc $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0, \;\; dx^2 + dy^2 > 0$. *Khi đó*

i) Nếu $d^2F(x_0, y_0) < 0$ thì hàm $f(x, y)$ đạt cực đại tại (x_0, y_0).

ii) Nếu $d^2F(x_0, y_0) > 0$ thì hàm $f(x, y)$ đạt cực tiểu tại (x_0, y_0).

iii) Nếu dấu của $d^2F(x_0, y_0)$ không xác định thì hàm $f(x, y)$ không đạt cực trị tại (x_0, y_0).

$\odot$ **Chú ý** Định lý trên có thể mở rộng cho hàm nhiều hơn hai biến.

• **Ví dụ 45** Tìm cực trị của hàm $z = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Giải

Lập hàm Lagrange $F(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Giải hệ $\begin{cases} F'_x & = & -4 + 2\lambda x & = 0 \\ F'_y & = & -3 + 2\lambda y & = 0 \\ F'_\lambda & = & x^2 + y^2 - 1 & = 0 \end{cases}$

Ta được các điểm dừng của hàm Lagrange

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}, x_1 = \frac{4}{5}, y_1 = \frac{3}{5}; \quad \lambda_2 = -\frac{5}{2}, x_2 = -\frac{4}{5}, y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Ta có $d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$.

Với $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ ta có $d^2(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) > 0$ nên hàm đạt cực tiểu tại $M_1(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ và $z_{min} = 1$.

Với $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$ ta có $d^2F(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) < 0$ nên hàm đạt cực đại tại $M_2(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ và $z_{max} = 11$.

• **Ví dụ 46** Tìm cực trị của hàm $u = x + y + z$ với điều kiện $xyz = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

GIẢI

Lập hàm Lagrange $F(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda xyz$ và xét hệ

$$\begin{aligned} 1 + \lambda yz &= 0 \\ 1 + \lambda zx &= 0 \\ 1 + \lambda xy &= 0 \\ xyz - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Ta tìm được điểm dừng của hàm Lagrange là $x = y = z = 1,\ \lambda = -1$ và

$$d^2F(1, 1, 1, -1) = -2(dxdy + dydz + dzdx). \tag{1.18}$$

Mặt khác ta có $0 = d\varphi(1, 1, 1) = dx + dy + dz$. Giải ra ta được $dz = -dx - dy$. Thay vào (1.18) ta được

$$d^2F(1, 1, 1, -1) = -2([dxdy - (dx + dy)^2] = (dx + dy)^2 + dx^2 + dy^2 > 0$$

(vì $d^2F(1, 1, 1, -1) = 0$ chỉ khi $dx = dy = 0 \implies dz = 0$)

Vậy hàm đạt cực tiểu có điều kiện tại $(1, 1, 1)$ và $u_{min} = 3$.

14. GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

14.1 Nhận xét

i) Hàm nhiều biến f liên tục trên miền đóng và bị chặn $\mathcal{D}$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên $\mathcal{D}$.

ii) Nếu hàm f đạt giá trị nhỏ nhất hay giá trị lớn nhất tại một điểm M_0 thuộc phần trong của $\mathcal{D}$ thì M_0 phải là điểm cực trị của f và do đó M_0 là điểm tới hạn của f.

iii) Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm f còn có thể đạt những điểm trên biên của $\mathcal{D}$.

14.2 Cách tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên miền đóng và bị chặn

Để tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm liên tục f trên miền đóng và bị chặn $\mathcal{D}$ trong mặt phẳng ta thực hiện theo các bước sau:

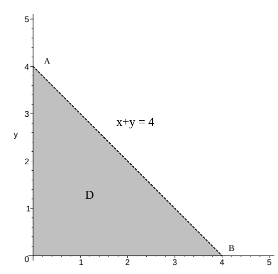
i) Tìm các điểm tới hạn của f thuộc phần trong của $\mathcal{D}$ và tính giá trị của hàm tại các điểm này.

ii) Nếu biên của $\mathcal{D}$ là một đường cong có phương trình $\varphi(x,y)=0$ thì thay vì xét các điểm biên ta xét các điểm cực trị với điều kiện $\varphi(x,y)=0$ và các mút của biên. Sau đó ta tính giá trị của hàm f tại các điểm này.

iii) So sánh các giá trị vừa tính. Số nhỏ nhất, lớn nhất tương ứng sẽ là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm f trên miền $\mathcal{D}$.

• **Ví dụ 47** Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm $f(x,y)=x^2ye^{-(x+y)}$ trên miền tam giác D được cho bởi $x\ge 0, y\ge 0$ và $x+y\le 4$.

Giải



H 1.14 Miền $D:\{x\ge 0, y\ge 0,\ x+y\le 4\}$.

Trước tiên ta tìm các điểm tới hạn ở trong tam giác.

$$\begin{cases} f'_x = xy(2-x)e^{-(x+y)}=0 \\ f'_y = x^2(1-y)e^{-(x+y)}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=0, y=0 \quad \text{hoặc} \quad x=2 \\ x=0 \quad \text{hoặc} \quad y=1 \end{cases}$$

Ta có các điểm tới hạn là $(0,y)$; $\forall y$ và $(2,1)$. Chỉ có $(2,1)$ là điểm trong của $\triangle$ và $f(2,1)=\frac{4}{e^3}\approx 0,199$.

Trên OA thì $x=0$ nên $f(x,y)=0$.

Trên OB thì $y=0$ nên $f(x,y)=0$.

Trên AB thì $y=4-x, 0\le x\le 4$. Thay vào $f(x,y)$ thì

$$g(x)=f(x,4-x)=x^2(4-x)e^{-4},\quad 0\le x\le 4.$$

Ta thấy $g(0)=g(4)=0$ và $g(x)>0$ với $0<x<4$

$$g'(x) = (8x - 3x^2)e^{-4} = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{8}{3}.$$

$$g(\tfrac{8}{3}) = f(\tfrac{8}{3}, \tfrac{4}{3}) = \tfrac{256}{27}.e^{-4} \approx 0,174 < f(2,1).$$

Vậy $f_{min} = 0$ tại những điểm trên đoạn OA, OB và $f_{max} = \frac{4}{e^3} \approx 0,199$ tại $(2,1)$.

• **Ví dụ 48** Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ trên miền $x^2 + y^2 \leq 25$.

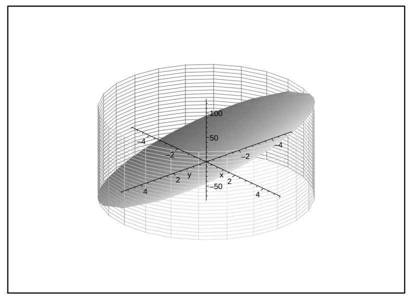
GIẢI

Trước hết ta tìm các điểm tới hạn trong miền $x^2 + y^2 < 25$.

Giải hệ

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 12 = 0 \\ f'_y = 2y + 16 = 0 \end{cases}$$

ta tìm được điểm $(6, -8)$, điểm này không thuộc miền $x^2 + y^2 < 25$.



H 1.15 Miền $D : \{x^2 + y^2 \leq 25\}$.

Ta xét tiếp cực trị của hàm $f(x,y)$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 25$.

Lập hàm Lagrange

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Giải hệ

$$\begin{cases} F'_x &= 2x - 12 - 2\lambda x &= 0 \\ F'_y &= 2y + 16 - 2\lambda y &= 0 \\ F'_\lambda &= x^2 + y^2 - 25 &= 0 \end{cases}$$

ta có hai điểm nghi ngờ là $(3, -4)$ và $(-3, 4)$ ứng với $\lambda = -1$ và $\lambda = 3$.

Ta có $f(3, -4) = -75$ và $f(-3, 4) = 125$.

Vậy $f_{min} = -75$ tại $(3, -4)$ và $f_{max} = 125$ tại $(-3, 4)$.

$\odot$ **Chú ý** Trong một vài trường hợp đặc biệt ta có thể xác định được giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của hàm trên một miền mở. Ta xét ví dụ dưới đây.

• **Ví dụ 49** Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. trên $\mathbb{R}^2$. Chúng minh rằng f đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất trên $\mathbb{R}^2$. Tìm các giá trị này.

GIẢI

Ta có

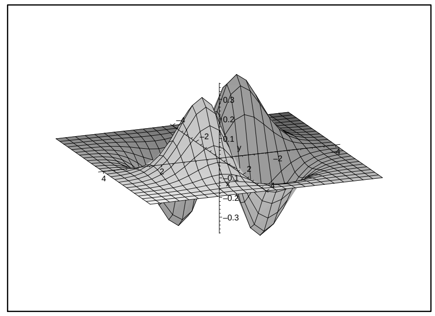
$$f'_x = y(1-x^2)e^{-(x^2+y^2)/2},$$

$$f'_y = x(1-y^2)e^{-(x^2+y^2)/2},$$

$$f''_{xx} = xy(x^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2},$$

$$f''_{xy} = (1-x^2)(1-y^2)e^{-(x^2+y^2)/2},$$

$$f''_{yy} = xy(y^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2}.$$



H 1.16 Đồ thị hàm $z == xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

Hàm có 5 điểm dừng: $(0,0),(1,1),(-1,1),(1,-1)$ và $(-1,-1)$.

* Tại $(0,0)$ ta có $A = C = 0, B = 1$ và $\triangle = 1 > 0$. Do đó f không đạt cực trị tại $(0,0)$.

* Tại $(-1,-1)$ và $(1,1)$ ta có $A = C = -\frac{2}{e} < 0$, $B = 0$ nên $\triangle = -\frac{4}{e^2} < 0$. Do đó f đạt cục đại địa phương tại $(-1,-1)$, $(1,1)$ và $f(-1,-1) = f(1,1) = \frac{1}{e}$.

* Tại $(-1,1)$ và $(1,-1)$ ta có $A = C = \frac{2}{e} > 0$, $B = 0$ nên $\triangle = -\frac{4}{e^2}$. Do đó f đạt cực tiểu tại $(-1,1),(1,-1)$ và $f(-1,1) = f(1,-1) = -\frac{1}{e}$.

Ta chứng minh f đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất tại các điểm cực trị ở trên.

Ta thấy $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y) = 0$. Lấy một giá trị giữa 0 và giá trị lớn nhất $\frac{1}{e}$, chẳng hạn $\frac{1}{2e}$. Với R đủ lớn ta có $|f(x,y)| \le \frac{1}{2e}$ với $x^2+y^2 \ge R^2$. Trên hình tròn đóng $x^2+y^2 \le R^2$ thì f phải đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất. Các giá trị này không thể đạt trên đường tròn $x^2+y^2 = R^2$ vì tại đó $|f(x,y)| \le \frac{1}{2e}$. Do đó các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất phải đạt tại các điểm tới hạn ở trên. Mở rộng ra toàn mặt phẳng ta suy ra f đạt giá trị nhỏ nhất tại $(-1,1),(1,-1)$ với $f_{min} = -\frac{1}{e}$ và giá trị lớn nhất tại $(-1,-1),(1,1)$ với $f_{max} = \frac{1}{e}$.

BÀI TẬP

1. Tìm miền xác định của các hàm

   (a) $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

   (b) $z = \ln(1+xy)$;

   (c) $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$;

   (d) $z = \arcsin \dfrac{y-1}{x}$;

   (e) $z = \sqrt{\sin(\pi(x^2+y^2))}$;

   (f) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}} \quad (0 < r < R)$.

2. Biết $f(x+y, x-y) = xy$. Hãy xác định biểu thức $f(x,y)$.

3. Tìm các giới hạn sau

   (a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$;

   (b) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;

   (c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

   (d) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

   (e) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

   (f) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

4. Xét sự liên tục của các hàm số sau tại điểm $(0,0)$.

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

5. Tính các đạo hàm riêng của các hàm sau

   (a) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$;

   (b) $z = \sin\frac{x}{y} . \cos\frac{y}{x}$;

   (c) $z = \arctan\frac{y}{x}$ tại $(-1,1)$;

   (d) $u = x^{y\ln z}$ tại $(e,2,e)$.

6. Dùng định nghĩa tìm các đạo hàm riêng của hàm

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2 + 3y^2} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

tại điểm $(0,0)$.

7. Chứng minh các hàm dưới đây thỏa mãn các phương trình đạo hàm riêng được cho

   (a) $z = xe^y$ thỏa $x\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$;

   (b) $z = \frac{x+y}{x-y}$ thỏa $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

   (c) $u = x^2 + yz$ thỏa $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 2u$;

   (d) $z = f(x^2 + y^2)$ trong đó f là hàm khả vi theo một biến thỏa $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

8. Tính vi phân của các hàm $z = \arctan\dfrac{x+y}{x-y}$.

9. Tính gần đúng các giá trị sau

   (a) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$, (c) $\sqrt{\sin^2 1,55 + 8e^{0,015}}$,

   (b) $\sin(\pi(0,01).(1,05) + \ln 1,05)$, (d) $\sqrt[3]{(2,01)^2 + (1,96)^2}$.

10. Tìm phương trình của tiếp diện và pháp tuyến của các đồ thị

    (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ tại $(-2,1)$;

    (b) $f(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ tại $(\pi, 4)$;

    (c) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ tại $(1,2)$.

11. Tính đạo hàm của các hàm hợp sau

    (a) $z = xy^2,\ x = t + \ln(y + t^2),\ y = e^t$, tính $\frac{dz}{dt}$;

    (b) $z = x^2 \ln y,\ x = \frac{u}{v},\ y = 3u - 2v$, tính $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$;

    (c) $z = \ln(u^2 + v^2),\ u = xy,\ v = \frac{x}{y}$, tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

12. Tính các đạo hàm riêng cấp cao của các hàm sau

(a) $z = xe^y - ye^x$, tính $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(b) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$, tính $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

(c) $z = y^2 e^x + y$, tính $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial^2 y}$.

13. Tìm hàm $f(x, y)$ thỏa phương trình $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^4$ và thỏa điều kiện $f(0, 0) = 1$, $f(1, 1) = 2$.

14. Cho hàm số
$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x - y}{x + y} & \text{nếu} \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$
Chứng minh rằng $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$

15. Chứng minh rằng hàm $z = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ thỏa mãn phương trình đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (z là hàm điều hòa hai biến).

16. Chứng minh rằng hàm $u(x, y, t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}}$ thỏa mãn phương trình đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (phương trình truyền nhiệt)

17. Tìm gradient của hàm tại điểm được cho và đường thẳng tiếp xúc với đường mức của hàm tại điểm đó

    (a) $f(x, y) = \cos \frac{x}{y}$ tại $(\pi, 4)$

    (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ tại $(1, -2)$

18. Tìm tốc độ biến thiên của các hàm sau tại điểm và hướng được cho

    (a) $f(x, y) = x^2 y$ tại $(-1, -1)$ theo hướng của vectơ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$

    (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ tại $(1, -2)$ theo hướng của vectơ làm với trục Ox một góc 60^0

19. Nhiệt độ $T(x, y)$ tại các điểm trên mặt phẳng được cho bởi $T(x, y) = x^2 - 2y^2$. Từ điểm $(2, -1)$ trên mặt phẳng một con kiến sẽ di chuyển theo hướng nào để đi đến nơi có nhiệt độ mát nhất.

20. Tìm đạo hàm của các hàm ẩn xác định bởi các phương trình sau
    (a) $xe^y - ye^x - e^{xy} = 0$, tính y';
    (b) $\arctan \frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$, tính y';
    (c) $z^2 + xy^3 = \frac{xz}{y}$, tính $\frac{\partial z}{\partial y}$
21. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong $e^{\frac{y}{x}} + \sin y + y^2 = 1$ tại điểm $(2, 0)$.
22. Tìm phương trình của tiếp diện của mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ tại điểm $(1, -2, 3)$;
23. Tìm cực trị của các hàm sau
    (a) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$;
    (b) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;
    (c) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;
    (d) $z = x^4 + y^4$;
    (e) $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ $(x, y > 0)$;
    (f) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.
24. Tìm các cực trị có điều kiện
    (a) $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$;
    (b) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ với điều kiện $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$;
25. Tìm khoảng cách ngắn nhất từ gốc tọa độ đến đường $x^2y = 16$.
26. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của các hàm
    (a) $z = x - x^2 + y^2$ trên hình chữ nhật $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$;
    (b) $z = x^2 - y^2$ trên hình tròn $x^2 + y^2 \leq 4$;
    (c) $z = x^2y(4 - x - y)$ trên hình giới hạn bởi các đường $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$;
    (d) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong miền $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;
    (e) $z = x^2ye^{-(x+y)}$ trên miền tam giác giới hạn bởi $x \geq 0$, $y \geq 0$ và $x + y \leq 4$;
    (f) $z = x^2 + 2y^2 - x$ trên hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$;

(g) $z = x - xy$ trên miền giới hạn bởi $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}$.

27. Nhiệt độ của các điểm trên đĩa $x^2 + y^2 \le 1$ cho bởi $T(x, y) = (x + y)e^{-(x^2+y^2)}$. Tìm nhiệt độ thấp nhất và nhiệt độ cao nhất trên đĩa.

28. Một hộp hình hộp chữ nhật hở ở phía trên có thể tích $32cm^3$. Hỏi các cạnh phải có độ dài là bao nhiêu để hộp có diện tích xung quanh nhỏ nhất.

Chương 2

TÍCH PHÂN BỘI

1. TÍCH PHÂN HAI LỚP

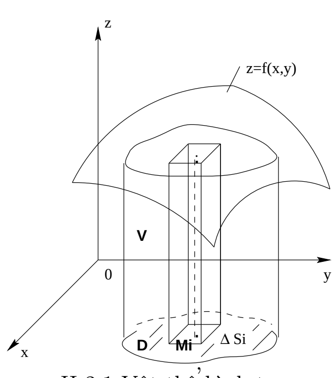
1.1 Khái niệm về tích phân hai lớp

a) Bài toán dẫn đến tích phân hai lớp

Ta gọi *vật thể hình trụ* là vật thể giới hạn bởi một miền hữu hạn (đóng) $\mathcal{D}$ của mặt phẳng Oxy, một mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz và một mặt cong $z = f(x, y)$, trong đó $f(x, y)$ là hàm đơn trị, không âm, liên tục trên miền $\mathcal{D}$. Miền $\mathcal{D}$ được gọi là đáy của vật thể hình trụ.

Hãy tính thể tích V của vật thể hình trụ trên.

GIẢI



H 2.1 Vật thể hình trụ.

Chia miền $\mathcal{D}$ thành n miền nhỏ đóng, không dẫm lên nhau $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ có diện tích lần lượt là $\triangle S_1, \triangle S_2, \ldots, \triangle S_n$. Lấy mỗi miền nhỏ $\sigma_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$ làm đáy, dựng vật thể hình trụ mà mặt chung quanh có đường sinh song song với trục Oz và phía trên giới hạn bởi mặt cong $z = f(x, y)$. Khi đó vật thể hình trụ đã cho được chia thành n vật thể hình trụ nhỏ có thể tích giả sử là $\triangle v_1, \triangle v_2, \ldots, \triangle v_n$.

Trong mỗi miền nhỏ $\sigma_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ lấy điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i)$.

Khi σ_i khá bé, hàm $f(x, y)$ liên tục nên trị của nó trên σ_i sai khác với $f(x_i, y_i)$ rất ít. Do đó $\triangle v_i$ xấp xỉ với thể tích của hình trụ đứng có đáy $\triangle S_i$ và chiều cao $f(x_i, y_i)$, tức là

$$\triangle v_i \approx f(x_i, y_i)\triangle S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nếu mọi miền con $\sigma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ đều khá bé thì

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\triangle S_i.$$

Sai số càng bé nếu n càng lớn và σ_i càng bé. Gọi d_i là đường kính của miền con σ_i (khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kỳ của σ_i).

Cho $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ thì thể tích của vật thể hình trụ là

$$\boxed{V = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\triangle S_i}$$

b) Định nghĩa tích phân hai lớp

□ **Định nghĩa 1** Giả sử hàm $f(x, y)$ bị chặn trên miền hữu hạn $\mathcal{D}$ của mặt phẳng Oxy.

Chia miền $\mathcal{D}$ thành n miền nhỏ đóng, không dẫm lên nhau $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ có diện tích lần lượt là $\triangle S_1$, $\triangle S_2, \ldots, \triangle S_n$.

Trong mỗi miền nhỏ $\sigma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ lấy điểm tùy ý (x_i, y_i) và lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\triangle S_i.$$

Gọi d_i là đường kính của miền con σ_i.

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ mà tồn tại giới hạn $I = \lim\limits_{\max d_i \to 0} I_n$ không phụ thuộc vào cách chia miền $\mathcal{D}$ và cách chọn điểm (x_i, y_i) thì giới hạn được gọi là tích phân hai lớp của hàm $f(x, y)$ lấy trên miền $\mathcal{D}$ và được ký hiệu là

$$I = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)dS$$

trong đó

$f(x, y)$ là hàm dưới dấu tích phân

$\mathcal{D}$ là miền lấy tích phân

dS là phần tử diện tích.

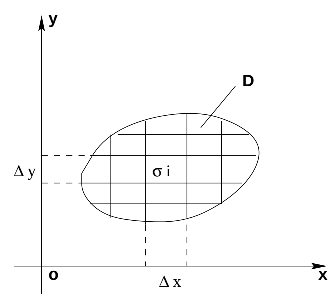
Ta có

$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\triangle S_i}$$

Nếu hàm $f(x,y)$ có tích phân hai lớp trong miền $\mathcal{D}$ thì ta nói $f(x,y)$ *khả tích* trong miền $\mathcal{D}$.

c) Chú ý

i) Vì giá trị của tích phân hai lớp nếu tồn tại sẽ không phụ thuộc vào cách chia miền $\mathcal{D}$ nên ta có thể chọn cách chia miền $\mathcal{D}$ bởi lưới các đường thẳng song song với các trục tọa độ. Khi đó các σ_i (trừ ra một số không đáng kể các σ_i giao với biên) là hình chữ nhật có các cạnh $\triangle x, \triangle y$ nên ta có $dS = dx.dy$.



H 2.2 Các σ_i là hình chữ nhật.

Vì vậy tích phân hai lớp thường được ký hiệu dưới dạng $\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$.

ii) Dựa vào định nghĩa của tích phân hai lớp thì thể tích của vật thể hình trụ đã nói ở trên là

$$\boxed{V = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy}$$

d) Sự tồn tại tích phân hai lớp

$\triangle$ **Định lý 2.1** *Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng và bị chặn $\mathcal{D}$ thì nó khả tích trên miền $\mathcal{D}$.*

1.2 Các tính chất của tích phân hai lớp

Dựa vào định nghĩa ta thấy tích phân hai lớp có các tính chất tương tự như tích phân xác định.

i) $\iint\limits_{\mathcal{D}} [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{\mathcal{D}} g(x,y)dxdy$.

ii) $\iint\limits_{\mathcal{D}} cf(x,y)dxdy = c\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$; (c là hằng số).

iii) Nếu $\mathcal{D}$ được chia thành $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ không dẫm lên nhau thì

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\mathcal{D}_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\mathcal{D}_2} f(x,y)dxdy.$$

iv) Diện tích của miền $\mathcal{D}$ cho bởi:

$$\boxed{S(\mathcal{D}) = \iint\limits_{\mathcal{D}} dxdy}$$

v) Nếu $g(x,y) \leq f(x,y)$; $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$ thì

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} g(x,y)dxdy \leq \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy.$$

Đặc biệt: Nếu $f(x,y) \geq 0$; $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$ thì $\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy \geq 0$.

vi) Nếu m và M là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm $f(x,y)$ trên miền $\mathcal{D}$ thì ta có $m.S(\mathcal{D}) \leq \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy \leq M.S(\mathcal{D})$.

vii) **Định lý giá trị trung bình:** Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trên miền $\mathcal{D}$ thì tồn tại điểm $(\xi,\eta) \in \mathcal{D}$ sao cho

$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)S(\mathcal{D})}$$

Khi đó $f(\xi,\eta) = \frac{1}{S(\mathcal{D})}\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$ được gọi là *giá trị trung bình* của hàm $f(x,y)$ trên miền $\mathcal{D}$.

1.3 Cách tính tích phân hai lớp

Ta sẽ xây dựng cách tính tích phân hai lớp dựa vào bài toán tính thể tích của vật thể hình trụ.

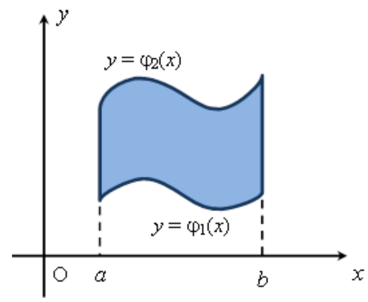
Giả sử cần tính tích phân $I = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$ với $\mathcal{D}$ là miền hữu hạn và $f(x,y)$ liên tục trên $\mathcal{D}$.

a) Trường hợp $\mathcal{D}$ là hình thang cong loại 1

$\mathcal{D}$ được gọi là *hình thang cong loại* 1 nếu $\mathcal{D}$ là miền phẳng giới hạn bởi các đường

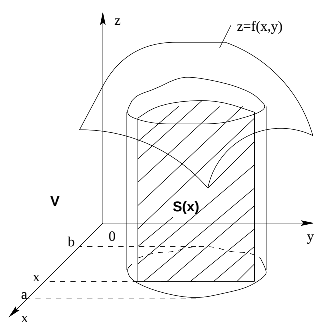
$$x = a,\ x = b,\ y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x)$$
$$(a < b,\ \varphi_1(x) \le \varphi_2(x))$$

với $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ là các hàm liên tục và đơn trị trong $[a, b]$.



H 2.3 Hình thang cong loại 1.

i) Xét $f(x, y) \ge 0; \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}$



H 2.4 Vật thể hình trụ.

Ta thấy tích phân hai lớp $\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy$ biểu diễn thể tích của vật thể hình trụ giới hạn bởi mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, đáy là miền $\mathcal{D}$ và giới hạn phía trên bởi mặt cong $z = f(x, y)$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x \in [a, b]$, thiết diện thu được có diện tích là

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

Khi đó thể tích của vật thể là

$$V = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Nếu ký hiệu

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$$

thì

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

ii) Nếu $f(x, y) \le 0$, $\forall (x, y) \in \mathcal{D}$ thì công thức trên được kiểm tra vẫn còn đúng.

Vì vậy ta có

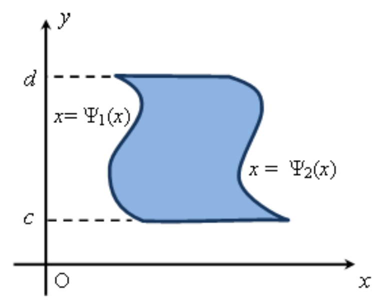
$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy} \qquad (2.1)$$

b) Trường hợp $\mathcal{D}$ là hình thang cong loại 2

$\mathcal{D}$ được gọi là *hình thang cong loại* 2 nếu $\mathcal{D}$ là miền phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = c,\ y = d,\ x = \psi_1(y),\ x = \psi_2(y)$$
$$(c < d,\ \psi_1(y) \le \psi_2(y)).$$

với $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ là các hàm liên tục và đơn trị trong $[c, d]$.



H 2.5 Hình thang cong loại 2.

Tương tự như trường hợp trên, ta có

$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx} \qquad (2.2)$$

⊙ **Chú ý**

i) Nếu $\mathcal{D}$ là hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng

$$x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d \quad (a < b, c < d)$$

thì $\mathcal{D}$ vừa có dạng hình thang cong loại 1 lại vừa có dạng hình thang cong loại 2. Khi đó

$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx}$$

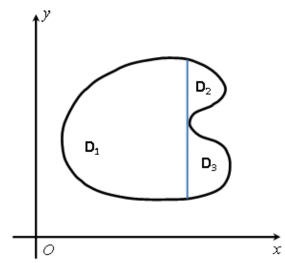
Đặc biệt, nếu $f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$ thì

$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx. \int_c^d f_2(y)dy}.$$

ii) Từ công thức (2.1) và (2.2) ta thấy việc tính tích phân hai lớp được quy về việc tính từng từ các tích phân xác định. Tích phân ở vế phải của (2.1) và (2.2) được gọi là các tích phân lặp.

c) Trường hợp $\mathcal{D}$ là miền bất kỳ

Nếu $\mathcal{D}$ là miền bất kỳ thì ta chia $\mathcal{D}$ thành một số hữu hạn miền phẳng không dẫm lên nhau có dạng hình thang cong loại 1 và loại 2. Khi đó tích phân lấy trên $\mathcal{D}$ bằng tổng các tích phân lấy trên các miền đã chia.



H 2.6 D là miền bất kỳ.

• **Ví dụ 1** Tính $I = \iint\limits_{\mathcal{D}} e^{x+y}dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ là hình vuông giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

Giải

$$I = \int_0^1 dy \int_0^1 e^{x+y}dx = \int_0^1 e^x dx \int_0^1 e^y dy = \left(\int_0^1 e^x dx \right)^2 = (e-1)^2.$$

• **Ví dụ 2** Tính thể tích của vật thể hình trụ có đáy là hình vuông trong mặt phẳng Oxy xác định bởi $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ và giới hạn phía trên bởi mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$.

Giải

$$V = \iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2+y^2)dy = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{3})dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \ \textit{đvtt}.$$

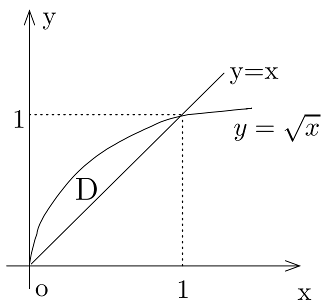
• **Ví dụ 3** Thay đổi thứ tự lấy tích phân của tích phân sau

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$$

Giải

Miền lấy tích phân có dạng hình thang cong loại 1, giới hạn bởi đường thẳng $y = x$ và parabol $y = \sqrt{x}$. Nhưng miền lấy tích phân trong trường hợp này cũng có dạng hình thang cong loại 2 giới hạn bởi các đường

$$y = 0, \ \ y = 1, \ \ x = y^2 \ \text{ và } \ x = y.$$



H 2.7 Miền $D : \{y = 0, y = 1, x = y^2, x = y\}$.

Do đó tích phân có thể viết lại

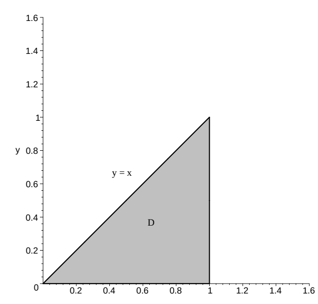
$$I = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} f(x, y)dx.$$

• **Ví dụ 4** Tính $I = \iint\limits_{\mathcal{D}} e^{\frac{y}{x}} dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ là miền tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $y = x, y = 0, x = 1$.

Giải

Miền lấy tích phân $\mathcal{D}$ được giới hạn bởi $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$, nên

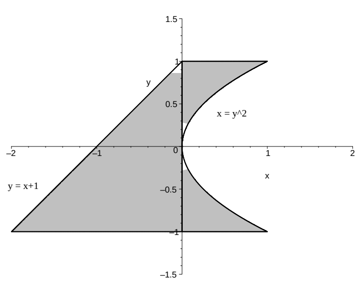
$$I = \int_0^1 dx \int_0^x e^{\frac{y}{x}} dy = \int_0^1 \left(x.e^{\frac{y}{x}}\right)\Big|_0^x dx$$
$$= \int_0^1 (xe - x)dx = \int_0^1 (e-1)xdx$$
$$= (e-1)\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$



H 2.8 Miền $D : \{y = x, y = 0, x = 1\}$.

• **Ví dụ 5** Tính $I = \iint\limits_{\mathcal{D}} (x - y)dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường $y = -1, y = 1, x = y^2$ và $y = x + 1$.

Giải



H 2.9 Miền $D : \{y = -1, y = 1, x = y^2, y = x + 1\}$.

Nếu xem $\mathcal{D}$ là hình thang cong loại 2 thì việc tính tích phân đơn giản hơn khi xem nó là hình thang cong loại 1. Ta thấy $\mathcal{D}$ được giới hạn bởi các điều kiện

$$-1 \le y \le 1, \quad y - 1 \le x \le y^2.$$

Do đó

$$I = \int_{-1}^{1} dy \int_{y-1}^{y^2} (x-y)dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^2}{2} - xy \right) \Bigg|_{y-1}^{y^2} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{y^4}{2} - y^3 + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \right) dy = 2 \left(\frac{y^5}{10} + \frac{y^3}{6} - \frac{y}{2} \right) \Bigg|_{0}^{1} = -\frac{7}{15}.$$

1.4 Đổi biến trong tích phân hai lớp

Trong phần này ta xây dựng phép đổi biến để tính tích phân $\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$.

a) Trường hợp tổng quát

□ **Định nghĩa 2** Giả sử x, y được biểu diễn như hàm của hai biến u, v bởi phương trình

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v). \end{cases} \tag{2.3}$$

Xem các phương trình trên như là định nghĩa của một phép biến đổi (ánh xạ) từ điểm (u,v) trong mặt phẳng uv đến điểm (x,y) trong mặt phẳng xy. Ta nói phép biến đổi trên là phép biến đổi $1-1$ từ tập $\mathcal{S}$ trong mặt phẳng uv đến tập $\mathcal{D}$ trong mặt phẳng xy nếu

i) Mỗi điểm trong $\mathcal{S}$ có ảnh là một điểm trong $\mathcal{D}$.

ii) Mỗi điểm trong $\mathcal{D}$ là ảnh của một điểm trong $\mathcal{S}$.

iii) Các điểm khác nhau trong $\mathcal{S}$ có ảnh khác nhau trong $\mathcal{D}$.

⊙ **Chú ý** Nếu (2.3) là phép biến đổi $1-1$ thì từ (2.3) ta có thể giải ra được u, v là hàm của x, y và phép biến đổi ngược

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

cũng là phép biến đổi $1-1$ từ $\mathcal{D}$ đến $\mathcal{S}$.

△ **Định lý 2.2** *Giả sử ta có phép biến đổi*

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \tag{2.4}$$

trong đó

i) (2.4) là phép biến đổi $1-1$ *từ miền* $\mathcal{S}$ *trong mặt phẳng* uv *vào miền* $\mathcal{D}$ *trong mặt phẳng* xy.

ii) Các hàm $x(u,v), y(u,v)$ *liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trên* $\mathcal{S}$.

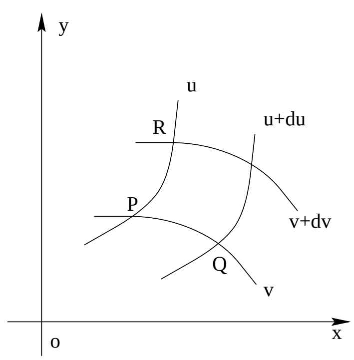
iii) Định thức hàm Jacobi

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall (u,v) \in \mathcal{S}.$$

Khi đó ta có

$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}} f[x(u,v), y(u,v)].|J|.dudv}$$

Chứng minh



H 2.10

Ta tìm cách biểu diễn phần tử diện tích $dS = dxdy$ trong mặt phẳng xy qua phần tử diện tích trong mặt phẳng uv.

Với mỗi u cố định ($u = c$) thì các phương trình $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ xác định một đường cong theo v, ta gọi là $u-$đường cong tương ứng với giá trị $u = c$. Tương tự , với mỗi v cố định thì các phương trình trên xác định một đường cong theo u gọi là $v-$đường cong.

Xét phần tử diện tích dS trong mặt phẳng xy giới hạn bởi các $u-$đường cong gần nhau có các giá trị là $u, u+du$ và các đường cong $v, v+dv$.

Với du, dv khá bé , vì các đường cong trơn nên phần tử diện tích xấp xỉ với hình bình hành. Do đó $dS \approx |\vec{PQ} \times \vec{PR}|$, với P, Q, R là các điểm được chỉ ở hình vẽ.

Ta có $\vec{PQ} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$, trong đó

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \quad \text{và} \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Mà $dv = 0$ dọc theo $v-$đường cong PQ nên

$$\vec{PQ} = \frac{\partial x}{\partial u} du\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u} du\vec{j}.$$

Tương tự, ta có

$$\vec{PR} = \frac{\partial x}{\partial v} dv\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v} dv\vec{j}.$$

Do đó

$$dS = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial u}du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}dv & \frac{\partial y}{\partial v}dv & 0 \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = |J|dudv \ \left(\text{với } J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right).$$

Vậy ta có

$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}} f[x(u,v), y(u,v)].|J|dudv}$$

• **Ví dụ 6** Tính $I = \iint\limits_{\mathcal{D}} (x-y)dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường $y = x - 3$, $y = x + 1$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

Giải

Ta sẽ gặp khó khăn khi tính trực tiếp tích phân này. Tuy nhiên dùng phép đổi biến thì việc tính toán trở nên dễ dàng hơn.

Nếu đặt $u = y - x$, $v = y + \frac{1}{3}x$ thì các đường thẳng $y = x - 3$, $y = x + 1$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + 5$ sẽ được biến thành các đường thẳng tương ứng $u = -3$, $u = 1$, $v = \frac{7}{3}$, $v = 5$ trong mặt phẳng uv.

Ta có $x = -\dfrac{3}{4}u + \dfrac{3}{4}v$, $y = \dfrac{1}{4}u + \dfrac{3}{4}v$.

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4}.$$

Do đó

$$I = \iint\limits_{D} -\frac{3}{4}ududv = \int_{\frac{7}{3}}^{5} dv \int_{-3}^{1} (-\frac{3}{4}u)du = 8.$$

b) Đổi biến trong tọa độ cực

Ta có công thức liên hệ giữa tọa độ Descartes (x, y) và tọa độ cực (r, φ) của cùng một điểm

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Nếu $r > 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ (hoặc $-\pi \le \varphi < \pi$) thì công thức trên xác định một phép biến đổi $1-1$ giữa tọa độ Descartes (x, y) và tọa độ cực (r, φ). Riêng đối với gốc thì xem $r = 0$, còn φ tùy ý. Với phép biến đổi này thì đường thẳng $r = a$ (a là hằng số) trong mặt phẳng cực tương ứng với đường tròn tâm O bán kính a trong mặt phẳng Oxy, còn đường thẳng $\varphi = \alpha$ (α là hằng số) trong mặt phẳng cực ứng với tia xuất phát từ gốc O và tạo với trục Ox một góc α trong mặt phẳng Oxy.

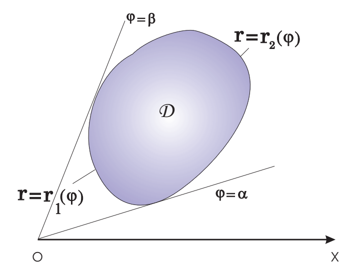
Ta có định thức Jacobi
$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Gọi $\mathcal{S}$ là miền của (r,φ) có ảnh là $\mathcal{D}$ qua phép biến đổi thì
$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi}$$

⊙ **Chú ý** Trong tọa độ cực ta luôn có $x^2 + y^2 = r^2$.

⊕ **Nhận xét**

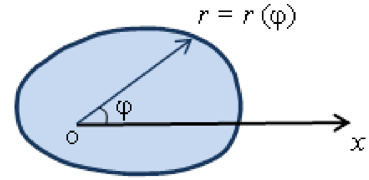
(a) Nếu $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường
$$r = r_1(\varphi),\ r = r_2(\varphi),\ \varphi = \alpha, \varphi = \beta$$
$$(\alpha < \beta,\ r_1(\varphi) \le r_2(\varphi))$$
thì



H 2.11 Miền D trong tọa độ cực.

$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr}$$

(b) Nếu cực nằm trong miền $\mathcal{D}$ và mọi bán kính cực chỉ cắt biên của $\mathcal{D}$ tại một điểm có bán kính vectơ $r(\varphi)$ thì ta có



H 2.12 D chứa cực.

$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi).rdr}$$

(c) Nếu $\mathcal{D}$ là hình tròn có tâm trùng với cực còn bán kính là a thì

$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr}$$

• **Ví dụ 7** Tính $I = \iint\limits_{\mathcal{D}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ là hình tròn $x^2+y^2 \leq a^2$ $(a > 0)$.

Giải

Chuyển sang tọa độ cực, ta có

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a e^{-r^2} rdr = 2\pi \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^a = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

• **Ví dụ 8** Tính thể tích của vật thể nằm ở góc phần tám thứ nhất, ở phía trong mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ và phía dưới mặt phẳng $z = y$.

Giải

Ta có $V = \iint\limits_{\mathcal{D}} ydxdy$ với $\mathcal{D}$ là phần tư thứ nhất của hình tròn $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Chuyển sang tọa độ cực thì $\mathcal{D}$ là hình chữ nhật giới hạn bởi

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq a.$$

Khi đó

$$V = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a (r\sin\varphi)rdr = \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi. \int_0^a r^2 dr = \frac{1}{3}a^3 \text{ đvtt.}$$

• **Ví dụ 9** Tính $I = \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ là nửa trên của hình tròn $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

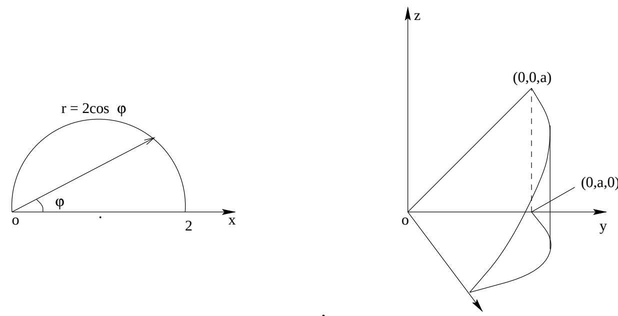
Giải

Dùng công thức đổi biến số: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.

Ta thấy $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường $r = 0,\ r = 2\cos\varphi,\ \varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$. Do đó

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\sqrt{4 - r^2}dr = -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (4 - r^2)^{3/2}\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\varphi)d\varphi = \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$



H 2.13 Miền $D : \{(x-1)^2+y^2 \leq 1\}$ và vật thể $V : \{x^2+y^2 \leq a^2, z \leq y, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

1.5 Ứng dụng của tích phân hai lớp

a) Ứng dụng hình học

i) Thể tích của vật thể

Từ bài toán mở đầu ta thấy vật thể hình trụ mà mặt chung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, đáy là miền $\mathcal{D}$ nằm trong mặt phẳng Oxy và phía trên giới hạn bởi mặt cong $z = f(x,y)$ với $f(x,y) \geq 0$ và liên tục trong miền $\mathcal{D}$ có thể tích được cho bởi công thức

$$\boxed{V = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy}$$

⊙ **Chú ý** Nếu $f(x,y) \leq 0$ thì $V = -\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$.

• **Ví dụ 10** Tính thể tích của vật thể được giới hạn bởi các mặt

$$y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 4.$$

Giải

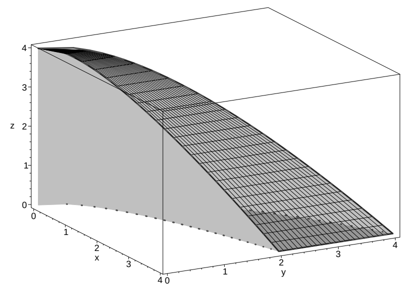
Vật thể có hình chiếu $\mathcal{D}$ xuống mặt phẳng Oxy xác định bởi

$$0 \leq x \leq 4,\ \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}$$

có thể tích là

$$V = \iint\limits_{\mathcal{D}} (4-x)dxdy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)dy.$$

$$= \int_0^4 (4-x)\sqrt{x}dx$$
$$= \left(\frac{8}{3}x^{3/2} - \frac{2^{5/2}}{5}\right)\Bigg|_0^4$$
$$= \frac{128}{15} \text{ đvtt.}$$



H 2.14 Vật thể $V : \{y = \sqrt{x},\, y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 4\}$.

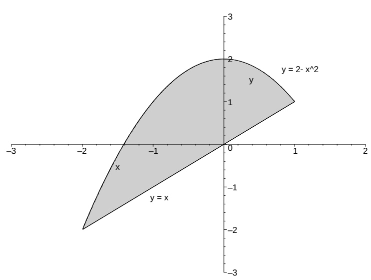
ii) Diện tích của hình phẳng

Theo tính chất 4 của tích phân hai lớp, diện tích của hình phẳng $\mathcal{D}$ được cho bởi công thức

$$\boxed{S(\mathcal{D}) = \iint\limits_{\mathcal{D}} dxdy}$$

• **Ví dụ 11** Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x$, $y = 2 - x^2$.

Giải



H 2.15 Miền $D : \{y = x, y = 2 - x^2\}$.

Hoành độ giao điểm của hai đường thỏa phương trình $2-x^2 = x$. Giải ra ta được $x = -2, x = 1$. Do đó hình phẳng đã cho xác định bởi

$$-2 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x^2$$

có diện tích là

$$S = \int_{-2}^{1} dx \int_x^{2-x^2} dy = \int_{-2}^{1}(2-x^2-x)dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}\text{đv dt.}$$

iii) Diện tích của mặt cong

Cho mặt cong $\mathcal{S} : z = f(x,y)$ giới hạn bởi một đường cong kín, trong đó $f(x,y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trên miền $\mathcal{D}$ là hình chiếu của $\mathcal{S}$ xuống mặt phẳng Oxy. Ta sẽ đi tìm diện tích của mặt cong này.

Chia tùy ý miền $\mathcal{D}$ thành n miền nhỏ không dẫm lên nhau $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ có diện tích tương ứng là $\triangle\sigma_1, \triangle\sigma_2, \ldots, \triangle\sigma_n$. Trong mỗi miền nhỏ $\sigma_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ lấy tùy ý điểm $P_i(x_i, y_i)$ mà ứng với nó ta có điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ trên mặt cong. Qua M_i dựng mặt phẳng tiếp xúc với $(\mathcal{S})$, pháp vectơ của nó là $\vec{n} = f'_x(x_i, y_i)\vec{i} + f'_y(x_i, y_i)\vec{j} - \vec{k}$ (xem (1.5)). Trong mặt phẳng này lấy miền con diện tích $\triangle\alpha_i$ sao cho hình chiếu của nó xuống mặt phẳng Oxy là σ_i. Xét tổng $\sum_{i=1}^n \triangle\alpha_i$ của các miền con $\triangle\alpha_i$.

Ta gọi giới hạn S của tổng này khi đường kính lớn nhất của các miền con $\triangle\alpha_i$ dần về 0 là diện tích của mặt $\mathcal{S}$, tức là

$$\lim_{\max d(\triangle\alpha_i)\to 0} \sum_{i=1}^n \triangle\alpha_i.$$

Bây giờ ta sẽ tìm diện tích của mặt $\mathcal{S}$. Gọi φ_i là góc giữa mặt phẳng tiếp xúc chứa miền con diện tích $\triangle\alpha_i$ và mặt phẳng Oxy. Ta có

$$\triangle\sigma_i = \triangle\alpha_i.\cos\varphi_i \quad \text{hay} \quad \triangle\alpha_i = \frac{\triangle\sigma_i}{\cos\varphi_i}.$$

Vì φ_i cũng chính là góc giữa vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ và vectơ $\vec{k}$ nên

$$\cos\varphi_i = \frac{\vec{n}.\vec{k}}{|\vec{n}|.|\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}}.$$

Do đó

$$\triangle\alpha_i = \triangle\sigma_i\sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}.$$

Suy ra

$$S = \lim_{\max d(\triangle\alpha_i)\to 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}.\triangle\sigma_i.$$

Vậy theo định nghĩa của tích phân hai lớp ta có diện tích của mặt $\mathcal{S}$ là

$$\boxed{S = \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}dxdy}$$

• **Ví dụ 12** Tính diện tích của phần mặt hyperpolic paraboloid $z = x^2 - y^2$ nằm phía trong mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0)$.

Giải

Ta có $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y$

nên $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$.

Do đó $S = \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$.

Chuyển sang tọa độ cực thì

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\sqrt{1+4r^2}dr = (2\pi)\frac{1}{8}\int_0^a \sqrt{1+4r^2}d(1+4r^2)$$
$$= \frac{\pi}{6}\,(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{\pi}{6}\left[(1+4a^2)^{3/2}-1\right] \text{ đvdt.}$$

b) Ứng dụng cơ học

i) Khối lượng của bản phẳng không đồng chất

Cho một bản phẳng không đồng chất chiếm một miền $\mathcal{D}$ trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng tại điểm (x,y) trong miền $\mathcal{D}$ là $\delta = \delta(x,y)$, trong đó $\delta(x,y)$ là hàm liên tục trên $\mathcal{D}$. Ta sẽ đi tìm khối lượng M của bản phẳng này.

Chia miền $\mathcal{D}$ thành n miền nhỏ không dẫm lên nhau có tên và diện tích gọi chung là $\triangle s_1, \triangle s_2, \ldots, \triangle s_n$. Trong mỗi miền nhỏ $\triangle s_i\,(i = 1,2,\ldots,n)$ lấy tùy ý điểm $M_i(x_i,y_i)$. Vì hàm $\delta(x,y)$ liên tục trên mỗi miền nhỏ , nên với $\triangle s_i$ khá bé ta có thể xem khối lượng riêng tại mỗi điểm trên $\triangle s_i$ là không đổi và bằng $\delta(x_i,y_i)$.

Khi đó khối lượng của bản phẳng xấp xỉ với tổng $M_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta(x_i,y_i)\triangle s_i$.

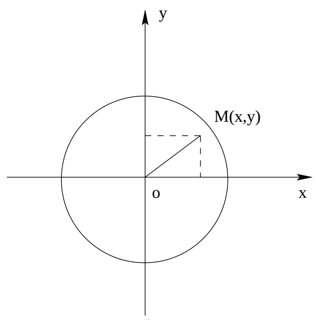
Cho $n \to \infty$ sao cho đường kính lớn nhất của các miền nhỏ $\triangle s_i$ dần về 0 thì khối lượng của bản phẳng là

$$M = \lim_{\max d(\triangle s_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i,y_i)\triangle s_i.$$

Theo định nghĩa của tích phân hai lớp thì ta có khối lượng của bản phẳng là

$$\boxed{M = \iint\limits_{\mathcal{D}} \delta(x,y)dxdy}$$

• **Ví dụ 13** Tìm khối lượng của bản phẳng hình tròn bán kính R, biết khối lượng riêng δ của bản tại mỗi điểm M của nó tỷ lệ với khoảng cách tù M đến tâm của bản.



H 2.16 Bản phẳng $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho gốc O trùng với tâm của bản.

Gọi λ là hệ số tỷ lệ thì
$$\delta(x,y) = \lambda\sqrt{x^2+y^2}.$$
Ta có khối lượng của bản là
$$M = \iint\limits_{\mathcal{D}} \lambda\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$
Chuyển sang tọa độ cực thì
$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \lambda\sqrt{r^2}rdr = 2\lambda\pi.\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R = \left(\frac{2}{3}\lambda\pi R^3\right) \text{đvkl}.$$

ii) Moment quán tính của bản phẳng

Ta đã biết moment quán tính của một chất điểm khối lượng m đặt tại điểm $P(x,y)$ đối với trục Ox, Oy và gốc O tương ứng là
$$I_x = my^2 \tag{2.5}$$
$$I_y = mx^2 \tag{2.6}$$
$$I_0 = m(x^2+y^2). \tag{2.7}$$
Bây giờ xét một bản phẳng không đồng chất chiếm một miền $\mathcal{D}$ trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng tại điểm (x,y) là $\delta(x,y)$ là hàm liên tục trên $\mathcal{D}$.

Dựa vào cách xây dựng tích phân hai lớp và các công thức (2.5) ta có moment quán tính của bản phẳng đối với trục Ox, Oy và gốc O tương ứng là
$$\boxed{\begin{array}{c} I_x = \iint\limits_{\mathcal{D}} y^2\delta(x,y)dxdy \\ I_y = \iint\limits_{\mathcal{D}} x^2\delta(x,y)dxdy \\ I_0 = \iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)\delta(x,y)dxdy \end{array}}$$

⊙ **Chú ý** Trong các công thức trên nếu cho $\delta(x,y) = 1$ thì ta được các công thức moment quán tính hình học của các hình phẳng.

• **Ví dụ 14** Tính các moment quán tính của bản phẳng $\mathcal{D}$ giới hạn bởi các đường $y^2 = 1 - x$, $(y \geq 0), x = 0$ và $y = 0$ đối với trục Ox, Oy; biết khối lượng riêng của bản tại (x, y) là $\delta(x, y) = y$.

Giải

Ta có

$$I_x = \iint\limits_{\mathcal{D}} y^2.ydxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} y^3 dy = \int_0^1 \frac{1}{4}\, y^4\Big|_0^{\sqrt{1-x}} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{1}{12}\,(1-x)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

$$I_y = \iint\limits_{\mathcal{D}} x^2 ydxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} x^2 ydy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

• **Ví dụ 15** Tính moment quán tính của bản phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0, y = 0, x + y = a$ đối với gốc tọa độ O.

Giải

Bản phẳng $\mathcal{D}$ xác định bởi $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x$. Do đó

$$I_0 = \iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2)dy$$

$$= \int_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{a-x} dx = \int_0^a \left(x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3}\right) dx$$

$$= \left(a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(a-x)^4}{12}\right)\Big|_0^a = \left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right) + \frac{a^4}{12} = \frac{a^4}{6}.$$

iii) Moment tĩnh và tọa độ trọng tâm của bản phẳng

Xét một hệ gồm n chất điểm có khối lượng riêng $m_1, m_2, \ldots, m_n$ đặt tại các điểm $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$. Ta biết moment tĩnh của hệ đối với các trục Ox, Oy và các tọa độ trọng tâm của nó được cho bởi các công thức sau

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i; \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \tag{2.8}$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Bây giờ ta xét trường hợp tổng quát. Giả sử ta có một bản phẳng không đồng chất chiếm một miền $\mathcal{D}$ trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng tại điểm (x, y) là $\delta = \delta(x, y)$, trong đó $\delta(x, y)$ là hàm liên tục trong miền $\mathcal{D}$. Dựa vào cách xây dựng tích phân hai lớp và các công thức (2.8) ở trên ta có các công thức tính moment tĩnh đối với các trục Ox, Oy và các tọa độ trọng tâm của bản phẳng là

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= \iint\limits_{\mathcal{D}} y\delta(x,y)dxdy \\ M_y &= \iint\limits_{\mathcal{D}} x\delta(x,y)dxdy \\ x_c &= \frac{\iint\limits_{\mathcal{D}} x\delta(x,y)dxdy}{\iint\limits_{\mathcal{D}} \delta(x,y)dxdy} = \frac{M_y}{M} \\ y_c &= \frac{\iint\limits_{\mathcal{D}} y\delta(x,y)dxdy}{\iint\limits_{\mathcal{D}} \delta(x,y)dxdy} = \frac{M_x}{M}. \end{aligned}}$$

⊙ **Chú ý** Nếu bản phẳng đồng chất ($\delta(x, y)$ không đổi) thì các tọa độ trọng tâm của bản là

$$x_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{\mathcal{D}} xdxdy, \quad y_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{\mathcal{D}} ydxdy.$$

trong đó S là diện tích của miền $\mathcal{D}$.

• **Ví dụ 16** Cho bản phẳng là một tam giác vuông có các cạnh góc vuông là $OA = a, OB = b$ và có khối lượng riêng tại mỗi điểm bằng khoảng cách từ điểm đó đến cạnh OA. Hãy tính moment tĩnh của bản phẳng đối với cạnh OA.

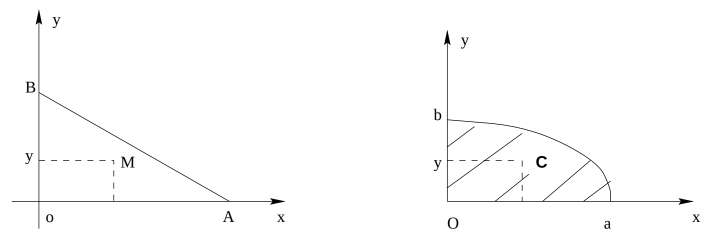
Giải

Nếu chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho OA nằm trên Ox, OB nằm trên Oy thì khối lượng riêng của bản tại điểm $M(x, y)$ là $\delta(x, y) = y$.

Khi đó moment tĩnh của bản đối với cạnh OA là

$$M_x = \iint\limits_{\mathcal{D}} y\delta(x,y)dxdy = \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} y^2 dy$$

$$= \int_0^a \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx = \frac{1}{3}\int_0^a b^3\left(1-\frac{x}{a}\right)^3 dx = \frac{1}{12}ab^3.$$



H 2.17

• **Ví dụ 17** Tìm tọa độ trọng tâm của phần tư hình phẳng giới hạn bởi elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ , biết rằng khối lượng riêng tại mỗi điểm của hình không đổi.

Giải

Ta có

$$x_c = \frac{\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xdy}{\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy} = \frac{\frac{b}{a}\int\limits_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx}{\frac{1}{4}ab\pi} = \frac{-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{3}\,(a^2-x^2)^{3/2}\Big|_0^a}{\frac{1}{4}ab\pi} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Tương tự $y_c = \dfrac{\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydy}{\frac{1}{4}ab\pi} = \dfrac{4b}{3\pi}.$

2. TÍCH PHÂN BA LỚP

Trong phần này ta mở rộng khái niệm tích phân hai lớp lấy trong một miền phẳng $\mathcal{D}$ ra đối với tích phân ba lớp lấy trong một miền $\mathcal{V}$ của không gian.

2.1 Khái niệm tích phân ba lớp

□ **Định nghĩa 3** Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trong miền bị chặn $\mathcal{V}$ của không gian $Oxyz$.

Chia tùy ý miền $\mathcal{V}$ thành n miền nhỏ không dẫm lên nhau có tên và thể tích gọi chung là $\triangle v_1, \triangle v_2, \ldots, \triangle v_n$. Trong mỗi miền nhỏ $\triangle v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ lấy điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i, z_i)$ và lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\triangle v_i.$$

Gọi d_i là đường kính của miền $\triangle v_i$.

Cho $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$. Nếu tồn tại $\lim_{maxd_i \to 0} I_n$ không phụ thuộc vào cách chia miền $\mathcal{V}$ và cách chọn điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ của miền nhỏ $\triangle v_i$ thì giới hạn được gọi là tích phân ba lớp của hàm $f(x, y, z)$ lấy trong miền $\mathcal{V}$ và được ký hiệu là

$$I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)dV,$$

trong đó

$f(x, y, z)$ là hàm dưới dấu tích phân,

$\mathcal{V}$ là miền lấy tích phân,

dV là phần tử thể tích.

Ta có

$$\boxed{\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)dV = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\triangle v_i}$$

Nếu hàm $f(x, y, z)$ có tích phân ba lớp trong miền $\mathcal{V}$ thì ta nói $f(x, y, z)$ khả tích trong miền $\mathcal{V}$.

⊙ **Chú ý**

i) Vì giá trị của tích phân ba lớp không phụ thuộc vào cách chia miền $\mathcal{V}$ nên ta có thể chia miền $\mathcal{V}$ bởi các mặt phẳng song song với các mặt phẳng Oxy, Oyz, Ozx. Khi đó mỗi miền nhỏ $\triangle v_i$ là hình hộp chữ nhật (trừ ra một số không đáng kể các miền giao với biên). Ta có $dV = dxdydz$. Vì vậy tích phân ba lớp thường được ký hiệu dưới dạng

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)dxdydz.$$

ii) Dựa vào định nghĩa của tích phân ba lớp, khi $f(x, y, z) = 1$ thì tích phân ba lớp của f trong miền Ω biểu diễn thể tích V của miền Ω, tức là

$$\boxed{V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz}$$

∆ **Định lý 2.3** *Nếu hàm $f(x, y, z)$ liên tục trong miền hữu hạn $\mathcal{V}$ thì*

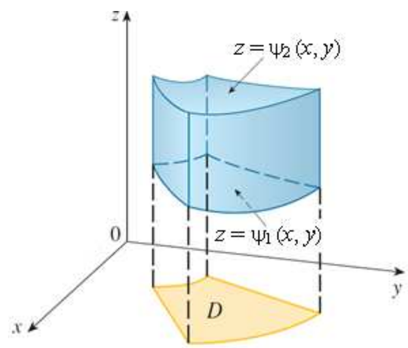
$f(x, y, z)$ khả tích trong miền $\mathcal{V}$.

2.2 Cách tính tích phân ba lớp

Tính tích phân $I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)dxdydz$.

i) $\mathcal{V}$ là thể trụ mở rộng

$\mathcal{V}$ được gọi là thể trụ mở rộng nếu nó là vật thể giới hạn phía dưới bởi mặt cong $z = \psi_1(x, y)$, phía trên bởi mặt cong $z = \psi_2(x, y)$, hai mặt cong liên tục và mỗi đường thẳng song song với trục Oz cắt mỗi mặt không quá một điểm, và giới hạn chung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz.



H 2.18 Thể trụ mở rộng

Giả sử $\mathcal{D}$ là hình chiếu của $\mathcal{V}$ xuống mặt phẳng Oxy.

Trước hết bằng cách lấy tích phân theo hướng của trục Oz ta tính tích phân của hàm $f(x, y, z)$ dọc theo đoạn thẳng ở trong và song song với trục Oz, đoạn thẳng này cắt $\mathcal{D}$ tại điểm $M(x, y)$. Cho trước các giá trị của x, y thì z sẽ biến thiên từ $z = \psi_1(x, y)$ đến $\psi_2(x, y)$.

Kết quả của việc lấy tích phân này ta được một biểu thức phụ thuộc vào $M(x, y)$ là

$$F(x, y) = \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

trong tích phân này thì x, y xem như không đổi trong quá trình lấy tích phân.

Bây giờ ta lấy tích phân của hàm $F(x, y)$ với điều kiện $M(x, y)$ chạy khắp trong $\mathcal{D}$ thì giá trị của tích phân cần tính là $\iint\limits_{\mathcal{D}} F(x, y)dxdy$.

Vì vậy ta có

$$\boxed{I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy}$$

Vế phải của công thức trên thường được ký hiệu là

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} dxdy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Nếu $\mathcal{D}$ là miền xác định bởi các đường

$$x = a, x = b,\ (a < b)\ y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x),\ (\varphi_1(x) \le \varphi_2(x))$$

thì bằng cách đưa tích phân hai lớp về tích phân lặp ta được

$$\boxed{\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.} \tag{2.9}$$

ii) $\mathcal{V}$ là hình hộp chữ nhật

Khi $\mathcal{V}$ là hình hộp chữ nhật giới hạn bởi các mặt

$x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d,\ z = e,\ z = f\ (a < b,\ c < d,\ e < f)$

thì đây là trường hợp đặc biệt của trường hợp trên. Từ (2.9) ta có

$$\boxed{\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z)dz}$$

Hơn nữa, nếu $f(x,y,z) = f_1(x).f_2(y).f_3(z)$ thì

$$\boxed{\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b f_1(x)dx. \int_c^d f_2(y)dy. \int_e^f f_3(z)dz}$$

• **Ví dụ 18** Tính $I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} (xy^2 + z^3)dxdydz$, trong đó $\mathcal{V}$ là hình hộp chữ nhật xác định bởi $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 2$.

Giải

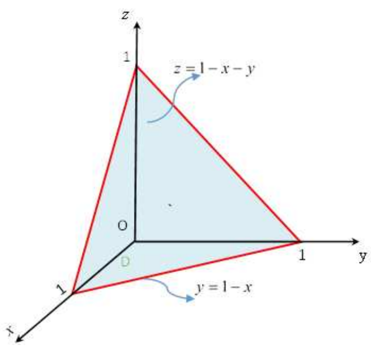
Ta có

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (xy^2 + z^3)dz = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(xy^2 z + \frac{z^4}{4} \right)\Bigg|_0^2 dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (2xy^2+4)dy = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}xy^3+4y\right)\Bigg|_0^1 dx$$
$$= \int_0^1 (\frac{2}{3}x+4)dx = \left(\frac{x^2}{3}+4x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}+4 = \frac{13}{3}.$$

• **Ví dụ 19** Tính $I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} xyzdxdydz$, trong đó $\mathcal{V}$ là miền giới hạn bởi các mặt phẳng $x=0, y=0, z=0$ và $x+y+z=1$.

Giải



H 2.19 Miền $V : \{x=0, y=0, z=0$ và $x+y+z=1\}$.

Ta có
$$\mathcal{V} : \left\{ \begin{array}{c} 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x, \\ 0 \le z \le 1-x-y \end{array} \right\}.$$
nên
$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyzdz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(xy\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2}xy(1-x-y)^2 dy$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{24}(1-x)^4 dx = \frac{1}{720}.$$

⊙ **Chú ý** Ngoài công thức (2.9) ra, ta có thể tính tích phân ba lớp bằng công thức sau:

$$\boxed{\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)dydz}$$

trong đó $S(x)$ là diện tích thiết diện của miền $\mathcal{V}$ nằm vuông góc với trục Ox tại x.

• **Ví dụ 20** Tính $I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} x^2 dxdydz$ trong đó $\mathcal{V}$ là hình elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1.$

Giải

Ta có

$$I = \int_{-a}^{a} dx \iint_{S(x)} x^2 dydz = \int_{-a}^{a} x^2 S(x) dx.$$

$S(x)$ là miền elip $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 - \frac{x^2}{a^2}$ hay $\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} \le 1.$

Với x cố định, diện tích của nó là $S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Do đó

$$I = \int_{-a}^{a} x^2 \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2bc\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2}\right)\Bigg|_0^a$$
$$= 2bc\pi \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^5}{5}\right) = \frac{4}{15} a^3 bc\pi.$$

2.3 Đổi biến trong tích phân ba lớp

a) Trường hợp tổng quát

Từ công thức đổi biến của tích phân hai lớp ta có thể mở rộng ra cho tích phân ba lớp.

Giả sử ta có phép biến đổi

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w) \\ y &= y(u, v, w) \\ z &= z(u, v, w) \end{aligned} \tag{2.10}$$

trong đó

i) Các hàm $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong miền bị chặn $\mathcal{V}'$ của không gian $Ouvw$.

ii) (2.10) là phép biến đổi $1 - 1$ từ miền $\mathcal{V}'$ trong không gian $Ouvw$ đến miền $\mathcal{V}$ của không gian $Oxyz$.

iii) Định thức hàm Jacobian

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \ne 0 \quad \text{trong miền } \mathcal{V}'.$$

Khi đó ta có công thức

$$\boxed{\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\mathcal{V}'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)].|J|dudvdw} \quad (2.11)$$

• **Ví dụ 21** Tính thể tích của elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$.

Giải

Dùng phép đổi biến $x = au, y = bv, z = cw$ thì elipsoid trở thành hình cầu $\mathcal{V}' : \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Ta có định thức hàm Jacobian

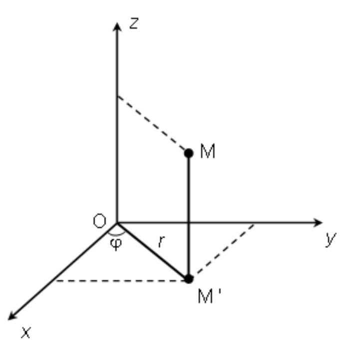
$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

Do đó thể tích của elipsoid là

$$V = \iiint\limits_{\mathcal{V}} dxdydz = \iiint\limits_{\mathcal{V}'} abcdudvdw = abc \times \text{thể tích } \mathcal{V}' = \frac{4}{3}abc\pi.$$

b) Đổi biến trong tọa độ trụ

i) Hệ tọa độ trụ



H 2.20 Hệ tọa độ trụ.

Tọa độ trụ của điểm $M(x,y,z)$ trong không gian là bộ ba (r,φ,z) trong đó

$$\begin{aligned} \varphi &= (\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM'}) \\ r &= \overline{OM'} \\ z &= \overline{MM'} \end{aligned}$$

với M' là hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy.

Từ hình vẽ ta có công thức liên hệ giữa tọa độ Descartes và tọa độ trụ của điểm M là

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \tag{2.12}$$

Nếu $r > 0, 0 \le \varphi < 2\pi$ (đôi khi $-\pi \le \varphi < \pi$), $-\infty < z < \infty$ thì (2.12) xác định một phép biến đổi $1-1$.

ii) Nhận xét

$\star$ Trong tọa độ trụ ta luôn có $x^2 + y^2 = r^2$.

$\star$ Mặt phẳng $r = a$ (a là hằng số) trong không gian $Or\varphi z$ ứng với mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz.

$\star$ Mặt phẳng $\varphi = \alpha$ (α là hằng số) trong không gian $Or\varphi z$ ứng với nửa mặt phẳng qua Oz và làm với mặt phẳng xz một góc bằng α trong không gian $Oxyz$.

$\star$ Mặt phẳng $z = k$ (k là hằng số) trong không gian $Or\varphi z$ ứng với mặt phẳng $z = k$ trong không gian $Oxyz$.

iii) Công thức đổi biến trong tọa độ trụ

Ta tính tích phân $I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz$ bằng phép đổi biến (2.12)

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

với $r > 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi\,(-\pi \le \varphi \le \pi)$, $-\infty < z < \infty$.

(2.12) là phép biến đổi $1-1$ từ miền $\mathcal{V}'$ trong không gian $Or\varphi z$ đến miền $\mathcal{V}$ trong không gian $Oxyz$.

Ta có định thức hàm Jacobi

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Theo (2.11) ta có công thức đổi biến trong tọa độ trụ là

$$\boxed{\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\mathcal{V}'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rd\varphi drdz} \tag{2.13}$$

⊙ **Chú ý** Nếu $\mathcal{V}$ là thể trụ mở rộng đã xét ở phần trước có hình chiếu $\mathcal{D}$ xuống mặt phẳng xy là hình tròn tâm O bán kính R thì miền $\mathcal{V}'$ xác định bởi

$$\mathcal{V}' : \left\{ \begin{array}{c} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le R \\ \psi_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \le z \le \psi_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{array} \right\}$$

thì

$$\boxed{\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R dr \int\limits_{\psi_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{\psi_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} r.f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz}$$

Đặc biệt, khi $\mathcal{V}$ là hình trụ $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le h$ thì

$$\boxed{\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R dr \int\limits_0^h r.f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz}$$

• **Ví dụ 22** Tính $I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2)dxdydz$ trong đó $\mathcal{V}$ là miền giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$, $y = x$ $(0 \le y \le x)$, $z = 0$, $z = 2$.

Giải

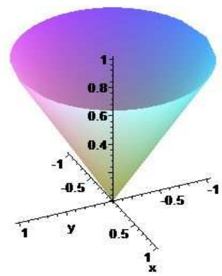
Chuyển sang tọa độ trụ thì $I = \iiint\limits_{\mathcal{V}'} r^2.rd\varphi drdz$, với $\mathcal{V}'$ xác định bởi $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, $1 \le r \le 2$, $0 \le z \le 2$.

Do đó

$$I = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^2 r^3 dr \int_0^2 dz = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right).\left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_1^2.(2-0) = \frac{15}{8}\pi.$$

• **Ví dụ 23** Tính $I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$, trong đó $\mathcal{V}$ là miền giới hạn bởi các mặt $z = 1$, $z^2 = x^2 + y^2$.

Giải



H 2.21 Miền $V : \{z = 1,\ z^2 = x^2 + y^2\}$.

Chuyển sang tọa độ trụ thì $\mathcal{V}'$ là miền giới hạn bởi

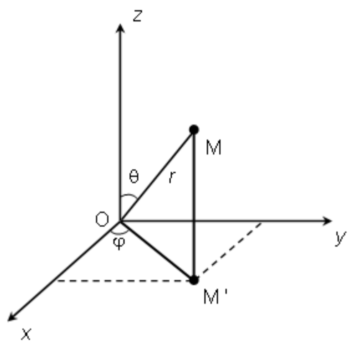
$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ r \le z \le 1$$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 r.rdz \\ &= 2\pi \int_0^1 r^2(1-r)dr \\ &= 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

c) Đổi biến trong tọa độ cầu

i) Hệ tọa độ cầu



H 2.23 Hệ tọa độ cầu

Tọa độ cầu của một điểm M trong không gian là bộ ba (r, θ, φ), trong đó

$$\begin{aligned} r &= OM \\ \theta &= (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}) \\ \varphi &= (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM'}) \end{aligned}$$

với M' là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng Oxy.

Từ hình vẽ ta có công thức liên hệ giữa tọa độ Descartes và tọa độ cầu (r, θ, φ)

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ta thấy với $r \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$ thì (2.14) là phép biến đổi $1 - 1$.

ii) Nhận xét

* Trong tọa độ cầu ta luôn có $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

* Mặt phẳng $r = R$ (R là hằng số) trong không gian $Or\theta\varphi$ ứng với mặt cầu tâm O bán kính R trong khônh gian $Oxyz$.

* Mặt $\theta = \theta_0$ (θ_0 là hằng số) trong không gian $Or\theta\varphi$ ứng với mặt nón tròn xoay có trục là Oz, đường sinh làm với trục một góc θ_0 trong không gian $Oxyz$.

* Mặt $\varphi = \varphi_0$ (φ_0 là hằng số) trong không gian $Or\theta\varphi$ ứng với nửa mặt phẳng làm với mặt phẳng Oxz một góc φ_0 trong không gian $Oxyz$.

iii) Công thức đổi biến

Ta tính tích phân $I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz$ với phép đổi biến (2.14)

$$\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi\sin\theta \\ y &=& r\sin\varphi\sin\theta \quad (0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\ r \ge 0). \\ z &=& r\cos\theta \end{array}$$

(2.14) là phép biến đổi $1-1$ từ miền $\mathcal{V}'$ trong không gian $Or\theta\varphi$ đến miền $\mathcal{V}$ trong không gian $Oxyz$.

Ta có định thức hàm Jacobi

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Theo (2.11) ta có công thức đổi biến trong tọa độ cầu là

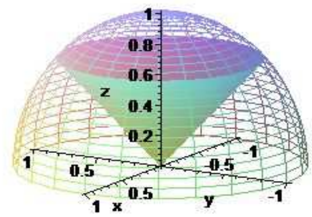
$$\boxed{\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\mathcal{V}'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta.d\varphi d\theta dr}$$

Đặc biệt, nếu $\mathcal{V}$ là hình cầu tâm O bán kính R thì $\mathcal{V}'$ xác định bởi $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le r \le R$ thì

$$\boxed{\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{R} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta.dr}$$

• **Ví dụ 24** Tính $I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} (x^2+y^2)dxdydz$ trong đó $\mathcal{V}$ là miền giới hạn bởi mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ và mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Giải



H 2.24 Miền $V : \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Chuyển sang tọa độ cầu bằng cách đặt

$$x = r\cos\varphi\sin\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\theta$$

thì miền $\mathcal{V}'$ của (r, θ, φ) được xác định bởi $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le r \le 1$.

Trong tọa độ cầu thì $x^2 + y^2 = r^2\sin^2\theta$. Do đó

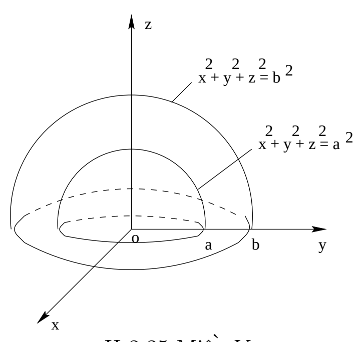
$$I = \iiint\limits_{V'} (r^2\sin^2\theta) r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin^3\theta \int_0^1 r^4 dr$$

$$= 2\pi.\frac{1}{5}\int_0^{\pi/4}(1-\cos^2\theta)d(-\cos\theta) = \frac{2\pi}{5}\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{(8-5\sqrt{2})\pi}{30}.$$

• **Ví dụ 25** Tính $I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, trong đó $\mathcal{V}$ là miền giới hạn bởi hai nửa trên của các mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x^2+y^2+z^2 = b^2$ $(a < b)$ và phẳng $z = 0$.

Giải



H 2.25 Miền V.

Chuyển sang tọa độ cầu bằng cách đặt $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ thì miền $\mathcal{V}'$ của (r, θ, φ) được xác định bởi

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ a \le r \le b.$$

Do đó

$$I = \iiint\limits_{\mathcal{V}'} r^2.(r^2\sin\theta)d\varphi d\theta dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_a^b r^4 dr$$

$$= 2\pi\,(-\cos\theta)\big|_0^{\pi/2}.\left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_a^b = \frac{2(b^5-a^5)\pi}{5}.$$

2.4 Ứng dụng của tích phân ba lớp

a) Ứng dụng hình học

Thể tích của miền Ω cho bởi công thức

$$\boxed{V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz}$$

• **Ví dụ 26** Tìm thể tích của vật thể nằm phía trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ và nằm phía trên paraboloid $z = x^2 + y^2$.

Giải

Ta tìm phần giao của hai mặt bằng cách xét hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Từ hệ ta suy ra $z^2 + z - 6 = 0$ hay $(z+3)(z-2) = 0$. Vì $z \geq 0$ nên chọn $z = 2$. Ta có

$$V = \iiint\limits_{\mathcal{V}} dxdydz.$$

$\mathcal{V}$ có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2+y^2 \leq (\sqrt{2})^2$.

Chuyển sang tọa độ trụ bằng cách đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ thì miền $\mathcal{V}'$ của (φ, r, z) được xác định bởi

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{2}, r^2 \leq z \leq 6 - r^2.$$

Do đó

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{r^2}^{6-r^2} r dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (r\sqrt{6-r^2} - r^3)dr$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{3}(6-r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}(6\sqrt{6} - 11)\text{đvtt.}$$

b) Ứng dụng cơ học

Cho một vật thể không đồng chất chiếm một miền Ω trong không gian $Oxyz$ và có khối lượng riêng tại điểm $M(x, y, z)$ là $\delta = \delta(x, y, z)$). Khi đó ta có các công thức sau:

i) Khối lượng của vật thể

$$\boxed{m = \iiint\limits_{\Omega} \delta(x,y,z)dxdydz}$$

ii) Moment quán tính của vật thể đối với các trục Ox, Oy, Oz

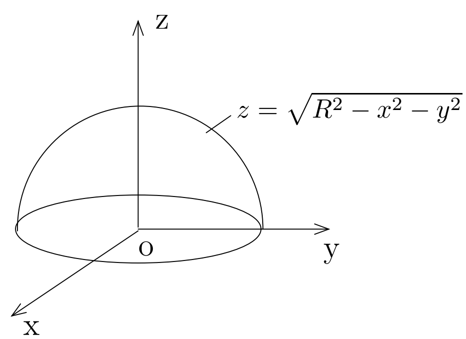
$$\boxed{\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint\limits_{\Omega} (y^2+z^2)\delta(x,y,z)dxdydz \\ I_{yy} &= \iiint\limits_{\Omega} (x^2+z^2)\delta(x,y,z)dxdydz \\ I_{zz} &= \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\delta(x,y,z)dxdydz \end{aligned}}$$

iii) Trọng tâm C của vật thể có tọa độ

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} x\delta(x,y,z)dxdydz \\ y_c &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} y\delta(x,y,z)dxdydz \\ z_c &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} z\delta(x,y,z)dxdydz \end{aligned}}$$

• **Ví dụ 27** Tìm tọa độ trọng tâm của nửa trên hình cầu tâm O bán kính R, biết rằng khối lượng riêng tại mỗi điểm (x,y,z) là $\delta(x,y,z) = c$ (c là hằng số).

Giải



H 2.27 Nửa trên hình cầu

Ta có $\Omega : \{x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$. Vì hình cầu đồng chất và nhận trục Oy làm trục nên $x_c = y_c = 0$. Do đó ta chỉ còn tìm z_c.

$$m = \iiint\limits_{\Omega} c.dxdydz$$

$$= c \times \frac{1}{2}\text{thể tích của nửa hình cầu}$$

$$= \frac{c}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{2}{3}c\pi R^3.$$

$$z_c = \frac{1}{\frac{2}{3}c\pi R^3}\iiint\limits_{\Omega} zcdxdydz = \frac{3}{2\pi R^3}\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz.$$

Chuyển sang tọa độ cầu bằng cách đặt $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ thì miền Ω' của (r,θ,φ) xác định bởi $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq R$.

$$z_c = \frac{3}{2\pi R^3}\iiint\limits_{\Omega'} (r\cos\theta).(r^2\sin\theta)d\varphi d\theta dr$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi} d\varphi.\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta.\int_0^R r^3 dr = \frac{3}{2\pi R^3}.2\pi\left(\frac{\sin^2\theta}{2}\right)\Big|_0^R = \frac{3}{8}R.$$

3. BÀI TẬP

1. Hãy viết các cận tích phân theo thứ tự khác nhau đối với miền $\mathcal{D}$ trong tích phân hai lớp $\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$
   (a) $\mathcal{D}$ là tam giác $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$;
   (b) $\mathcal{D}$ là tam giác $O(0,0), A(2,1), B(-2,1)$.
2. Thay đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân sau
   (a) $\int\limits_{-2}^{2} dx\int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy$;
   (b) $\int\limits_{1}^{3} dy\int\limits_{0}^{2y} f(x,y)dx$;
   (c) $\int\limits_{0}^{1} dy\int\limits_{0}^{y^2} f(x,y)dx+\int\limits_{1}^{3} dy\int\limits_{0}^{\frac{3-y}{2}} f(x,y)dx$;
   (d) $\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.
3. Tính các tích phân:
   (a) $\iint\limits_{\mathcal{D}} x\ln y dxdy$ với $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 4$, $y = 1, y = e$;
   (b) $\iint\limits_{\mathcal{D}} (x-y)dxdy$ với $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$;
   (c) $\iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)dxdy$ với $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $x = 2$, $y = 1$;
   (d) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sin(x+y)dxdy$ với $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = x$, $x + y = \frac{\pi}{2}$;
   (e) $\iint\limits_{\mathcal{D}} x^2(y-x)dxdy$ với $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường $x = y^2$, $y = x^2$;
   (f) $\iint\limits_{\mathcal{D}} x^2 y dxdy$ với $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{2ax - x^2}$.

4. Tính các tích phân sau

   (a) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{xy}dxdy$ với $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường $y^2 = x$, $y^2 = 3x$, $xy = 1$, $xy = 2$;

   (b) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$ với miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5. Tìm cận lấy tích phân trong tọa độ cực của $\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy$, trong đó $\mathcal{D}$ được xác định như sau:

   (a) $\mathcal{D} : \{x^2 + y^2 \leq ax\} \quad (a > 0)$;

   (b) $\mathcal{D} : \{x^2 + y^2 \leq by\} \quad (b > 0)$;

   (c) $\mathcal{D} : \{4x \leq x^2 + y^2 \leq 8x,\ y \geq 0,\ y \leq x\}$.

6. Bằng cách chuyển sang tọa độ cực, tính các tích phân sau

   (a) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}$ với $\mathcal{D}$ là nửa trên của hình tròn $x^2 + y^2 \leq \pi^2$;

   (b) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$ với $\mathcal{D}$ là phần tư thứ nhất của hình tròn $x^2 + y^2 \leq a^2$;

   (c) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2)dxdy$ với $\mathcal{D}$ là hình vành khăn nằm giữa các đường tròn
   $x^2 + y^2 = e^2$ và $x^2 + y^2 = e^4$;

   (d) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sin\sqrt{x^2 + y^2}dxdy$ với $\mathcal{D}$ là hình vành khăn $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$;

   (e) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \arctan\frac{y}{x}dxdy$ với $\mathcal{D}$ là miền được giới hạn bởi
   $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x$;

   (f) $\iint\limits_{\mathcal{D}} xdxdy$ với $\mathcal{D}$ là hình tròn $\mathcal{D} : \{x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

   (g) $\iint\limits_{\mathcal{D}} xy^2dxdy$ với $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường tròn
   $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$;

   (h) $\iint\limits_{\mathcal{D}} (\frac{y}{x} + 1)dxdy$ với $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$.

7. Tính diện tích của miền giới hạn bởi các đường
   (a) $y = x, x = 2y, x + y = 2, x + 3y = 2$;
   (b) $x = 4y - y^2, x + y = 6$;
   (c) $y = x^2, y = 4 - x^2$;
   (d) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

8. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt
   (a) $x = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$;
   (b) $z = 6 - x^2 - y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
   (c) $z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0$;
   (d) $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$;
   (e) $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 4$;
   (f) $z = \cos x \cos y$, $z = 0$, $|x + y| \leq \frac{\pi}{2}$, $|x - y| \leq \frac{\pi}{2}$.

9. (a) Tính diện tích của phần mặt phẳng $z = 2x$ nằm phía trong paraboloid $z = x^2 + y^2$;
   (b) Tính diện tích của phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

10. Tính moment quán tính của hình giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4x}$, $x + y = 3$, $y = 0$ đối với trục Ox.

11. Tìm tọa độ trọng tâm của hình phẳng đồng chất giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$.

12. Tính $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xyzdz$

13. Tính $\iiint\limits_{\mathcal{V}} \frac{1}{1-x-y} dxdydz$ trong các trường hợp sau
    (a) $\mathcal{V} : \{ \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 2 \leq y \leq 5, \quad 2 \leq z \leq 4\}$;
    (b) $\mathcal{V} : \{x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0\}$.

14. Tính $\iiint\limits_{\mathcal{V}} y \cos(x + z) dxdydz$ với $\mathcal{V}$ là miền giới hạn bởi các mặt $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $x + z = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$.

15. Tính

    (a) $\iiint\limits_{\mathcal{V}} z dxdydz$ với $\mathcal{V}$ là miền giới hạn bởi các mặt $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = h; \quad (h > 0)$;

    (b) $\iiint\limits_{\mathcal{V}} \sqrt{x^2+y^2} dxdydz$ với $\mathcal{V}$ là miền giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2 = z^2$, $z = 1$;

    (c) $\iiint\limits_{\mathcal{V}} (x^2+y^2) dxdydz$ với $\mathcal{V}$ là miền giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2 = 2z$, $z = 2$.

16. Bằng cách chuyển sang tọa độ trụ hoặc cầu, tính

    (a) $\int\limits_0^{2R} dx \int\limits_{-\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} dz$;

    (b) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2) dz$.

17. Tính các tích phân sau trong hệ tọa độ cầu

    (a) $\iiint\limits_{\mathcal{V}} 6xyz dxdydz$ với $\mathcal{V} : \{x^2+y^2+z^2 \le R^2;\ x,\ y,\ z \ge 0\}$;

    (b) $\iiint\limits_{\mathcal{V}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dxdydz$ với $\mathcal{V} : \{x^2+y^2+z^2 \le z\}$;

    (c) $\iiint\limits_{\mathcal{V}} (x^2+y^2) dxdydz$ với $\mathcal{V} : \{a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2,\ z \ge 0 \quad (0 < a < b)\}$.

18. Tính khối lượng M của hình cầu đơn vị, biết khối lượng riêng $\delta(x, y, z)$ tại điểm $P(x, y, z)$ tỉ lệ với bình phương khoảng cách từ P đến tâm O.

19. Tìm moment quán tính đối với trục Oz của vật thể $\mathcal{V}$ có khối lượng riêng $\delta = 1$ tại mọi điểm trên $\mathcal{V}$ nếu $\mathcal{V}$ được giới hạn bởi $0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 < 2ay \ (a > 0)$.

20. Tìm tọa độ trọng tâm của vật thể $\mathcal{V}$ giới hạn bởi mặt trụ paraboloid $z = 4 - x^2$ và các mặt phẳng $x = 0, y = 0, z = 0, y = 6$; biết khối lượng riêng tại mỗi điểm của vật thể là $\delta(x, y, z) = c$ (c là hằng số).

Chương 3

ĐƯỜNG CONG TRONG KHÔNG GIAN

1. HÀM VECTƠ MỘT BIẾN

1.1 Khái niệm về hàm vectơ một biến

□ **Định nghĩa 1** Ta gọi hàm vectơ là phép tương ứng mỗi số t trong miền giá trị T nào đó với một vectơ $\vec{r}$ xác định duy nhất. Ký hiệu $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

a) Hàm vectơ của điểm trong không gian

Trong không gian $Oxyz$ với hệ trục tọa độ trực chuẩn, ứng với mỗi điểm $M(x, y, z)$ ta gọi vectơ

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

(với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz) là *bán kính vectơ* của điểm M đối với gốc O.

Khi M di chuyển thì $\vec{r}$ thay đổi và phụ thuộc vào tham số t nào đó nên các thành phần x, y, z của $\vec{r}$ là các hàm số của t: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Khi đó

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}$$

là hàm vectơ được gọi là *hàm vectơ vị trí của điểm M.*

Khi vectơ $\vec{r}(t)$ biến thiên, M di chuyển trong không gian vẽ nên một đường cong $\mathcal{C}$ ta gọi là *tốc đồ* của hàm vectơ $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

⊙ **Chú ý** Trong chương này, thay vì nói điểm có vectơ vị trí $\vec{r}(t)$ ta có thể nói điểm $\vec{r}(t)$ và kí hiệu $r = |\vec{r}|$, với $|\vec{r}|$ là modun của vectơ $\vec{r}$.

b) Hàm vectơ của chất điểm chuyển động

Xét một chất điểm chuyển động trong không gian. Lấy một điểm cố định O trong không gian làm mốc so sánh. Chuyển động của chất điểm có thể mô tả bằng tọa độ vị trí của nó như là hàm theo thời gian t:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Biểu diễn qua các vectơ đơn vị cơ sở $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ thì vị trí của chất điểm tại thời điểm t

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

là hàm vectơ của t và gọi là *hàm vectơ vị trí của chất điểm M.*

1.2 Giới hạn và tính liên tục của hàm vectơ

1. Vectơ $\vec{a}$ cố định được gọi là giới hạn của hàm vectơ $\vec{r}(t)$ khi t dần đến t_0 nếu $\lim\limits_{t\to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$. Kí hiệu $\vec{a} = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)$.

2. Hàm vectơ $\vec{r} = \vec{r}(t)$ được gọi là liên tục tại trị t_0 nếu nó xác định trong lân cận của t_0 và $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

   Đặt $\triangle\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \triangle t) - \vec{r}(t_0)$ là vectơ gia tương ứng với số gia $\triangle t$. Ta có

   $$\vec{r}(t) \textit{ liên tục tại } t_0 \Leftrightarrow \lim_{\triangle t\to 0} \triangle\vec{r} = \vec{0}.$$

1.3 Đạo hàm vectơ

a) Định nghĩa đạo hàm vectơ

□ **Định nghĩa 2** Cho hàm vectơ $\vec{r}(t)$ xác định trong lân cận của t_0. Ứng với số gia $\triangle t = t - t_0$ ta có vectơ gia $\triangle\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \triangle t) - \vec{r}(t_0)$.

Lập vectơ $\dfrac{\triangle\vec{r}}{\triangle t}$.

Nếu khi $\triangle t \to 0$ mà vectơ $\frac{\triangle \vec{r}}{\triangle t}$ dần đến một giới hạn xác định thì ta nói hàm vectơ $\vec{r}(t)$ khả vi tại t_0 và giới hạn được gọi là đạo hàm của hàm vectơ $\vec{r}(t)$ đối với t tại t_0. Kí hiệu $\vec{r'}(t_0)$ hay $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$. Ta có

$$\boxed{\vec{r'}(t_0) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle \vec{r}}{\triangle t}}$$

b) Chú ý

i) Một hàm vectơ có đạo hàm tại t_0 thì nó liên tục tại t_0, nhưng điều ngược lại không đúng.

ii) Quy luật cộng và nhân vô hướng của vectơ cho ta kết quả

$$\begin{aligned} \vec{r'}(t_0) &= \lim_{\triangle t \to 0} \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{\triangle t} \vec{i} + \frac{y(t) - y(t_0)}{\triangle t} \vec{j} + \frac{z(t) - z(t_0)}{\triangle t} \vec{k} \right) \\ &= x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}. \end{aligned}$$

Vì vậy hàm $\vec{r}(t)$ khả vi tại t_0 khi và chỉ khi cả ba thành phần $x(t), y(t), z(t)$ khả vi tại t_0.

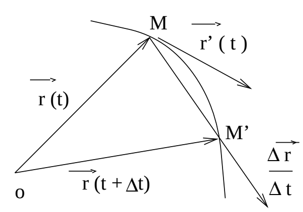
c) Ý nghĩa của đạo hàm vectơ

i) Ý nghĩa hình học

Trên tốc đồ $\mathcal{C}$ của hàm vectơ $\vec{r}(t)$ ta có

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}, \quad \vec{r}(t + \triangle t) = \overrightarrow{OM'}$$
$$\triangle \vec{r} = \vec{r}(t + \triangle t) - \vec{r}(t) = \overrightarrow{MM'}$$

Vectơ $\frac{\triangle \vec{r}}{\triangle t}$ nằm theo phương của dây cung MM'. Khi $\triangle t \to 0$ thì M' dần đến M trên $\mathcal{C}$, phương của dây cung MM' dần đến trùng với phương của tiếp tuyến MT tại M.



H 3.1

Vậy $\vec{r'}(t)$ có phương trùng với tiếp tuyến của $\mathcal{C}$ tại M. Ta gọi $\vec{v} = \vec{r'}(t)$ là *vectơ tiếp tuyến* của $\mathcal{C}$ tại M.

ii) Ý nghĩa vật lý

Xét chất điểm chuyển động trong không gian có hàm vectơ vị trí là

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Trong khoảng thời gian từ t đến $t + \triangle t$ chất điểm di chuyển từ vị trí $\vec{r}(t)$ đến vị trí $\vec{r}(t + \triangle t)$. Vectơ vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian $\triangle t$ là $\frac{\vec{r}(t+\triangle t)-\vec{r}(t)}{\triangle t}$. Nếu vectơ vận tốc trung bình có giới hạn khi $\triangle t \to 0$ thì ta gọi giới hạn là *vectơ vận tốc tức thời* của chuyển động tại thời điểm t. Kí hiệu là $\vec{v}(t)$. Ta có

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \triangle t) - \vec{r}(t)}{\triangle t}}$$

Ta gọi độ dài $|\vec{v}(t)|$ của vectơ vận tốc là *vận tốc* của chất điểm.

d) Các tính chất của đạo hàm vectơ

Cho $\vec{u} = \vec{u}(t), \vec{v} = \vec{v}(t), \vec{w} = \vec{w}(t)$ là các hàm vectơ khả vi và $\lambda(t), f(x, y, z)$ là các hàm khả vi. Khi đó các hàm $\vec{u}(t)+\vec{v}(t)$, $\vec{u}(t).\vec{v}(t)$, $\vec{u}(t)\times \vec{v}(t)$, $(\vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{w}(t))$, $\vec{u}(\lambda(t))$ và $f(\vec{u}(t))$ cũng khả vi và có

1. $\frac{d}{dt}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}$.
2. $\frac{d}{dt}(\lambda(t)\vec{u}(t)) = \frac{d\lambda(t)}{dt}\vec{u}(t) + \lambda(t)\frac{d\vec{u}}{dt}(t)$.
3. $\frac{d}{dt}(\vec{u}.\vec{v}) = \vec{v}\frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u}\frac{d\vec{v}}{dt}$.
4. $\frac{d}{dt}(\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} \times \vec{v} + \vec{u} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$.
5. $\frac{d}{dt}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \frac{d\vec{w}}{dt})$.
6. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(\lambda(t))) = \frac{d\lambda}{dt}.\frac{d}{d\lambda}(\vec{u}(\lambda(t)))$.
7. $\frac{d}{dt}(f(\vec{u}(t))) = \nabla f(\vec{u}(t)).\frac{d\vec{u}}{dt}(t)$.

$\odot$ **Chú ý**

i) Giả sử $|\vec{r}(t)|$ không đổi nhưng hướng của $\vec{r}(t)$ thay đổi.

Ta có $\vec{r}.\vec{r} = \vec{r}^2 = r^2$.

Đạo hàm hai vế ta được $2\vec{r}.\dfrac{d\vec{r}}{dt} = 0$ hay $\vec{r}.\dfrac{d\vec{r}}{dt} = 0$.

Điều này chứng tỏ *hai vectơ* $\vec{r}$ *và* $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ *trực giao với nhau.*

ii) Giả sử hướng của $\vec{r}(t)$ không đổi nhưng $|\vec{r}(t)|$ thay đổi.

Ta có $\vec{r}(t) = r(t)\vec{u_0}$, với $\vec{u_0}$ là vectơ đơn vị của $\vec{r}(t)$ ($\vec{u_0}$ có hướng không đổi). Khi đó

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\vec{u_0} + r\frac{d\vec{u}_0}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\vec{u}_0.$$

Do đó vectơ $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ cùng phương với vectơ $\vec{r}$.

△ **Định lý 3.1** (`Tiếp diện`) [1]

Cho mặt cong $\mathcal{S}$ có phương trình $z = f(x, y)$, trong đó $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc $\mathcal{S}$. Khi đó quỹ tích của mọi tiếp tuyến với mặt cong $\mathcal{S}$ tại M_0 là một mặt phẳng đi qua M_0.

Chứng minh

Giả sử $\mathcal{L}$ là đường cong trên $\mathcal{S}$ qua $M_0(x_0, y_0)$ có phương trình $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ và M_0 có vectơ vị trí $\vec{r}(t_0) = x(t_0)\vec{i} + y(t_0)\vec{j} + z(t_0)\vec{k}$.

Tiếp tuyến với $\mathcal{L}$ tại $M_0(t_0)$ cũng là tiếp tuyến với $\mathcal{S}$ tại $M_0(t_0)$, tiếp tuyến này có vectơ chỉ phương

$$\vec{v}(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}.$$

Vì $\mathcal{L}$ thuộc $\mathcal{S}$ nên mọi điểm trên $\mathcal{L}$ đều thỏa $z = f(x, y) = f[x(t), y(t)]$.

Ta có $z'(t) = f'_x[x(t), y(t)]x'(t) + f'_y[x(t), y(t)]y'(t)$.

Tại $M_0(t_0)$ ta có

$$z'(t_0) = f'_x[x(t_0), y(t_0)]x'(t_0) + f'_y[x(t_0), y(t_0)]y'(t_0).$$

hay

$$f'_x[x(t_0), y(t_0)]x'(t_0) + f'_y[x(t_0), y(t_0)]y'(t_0) - z'(t_0) = 0.$$

Đẳng thức trên chứng tỏ vectơ $\vec{v}(t_0)$ vuông góc với vectơ

$$\vec{n} = f'_x[x(t_0), y(t_0)]\vec{i} + f'_y[x(t_0), y(t_0)]\vec{j} - \vec{k}.$$

Ta thấy mọi tiếp tuyến của $\mathcal{S}$ qua M_0 đều vuông góc với $\vec{n}$ tại M_0, do đó chúng nằm trong một mặt phẳng vuông góc với $\vec{n}$ tại M_0. □

1.4 Đạo hàm cấp hai

□ **Định nghĩa 3** Đạo hàm cấp hai của hàm vectơ $\vec{r}(t)$ theo t là đạo hàm (nếu có) của vectơ $\vec{r'}(t)$. Kí hiệu $\vec{r''}(t)$ hay $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Đạo hàm cấp cao hơn hai được định nghĩa tương tự .

[1] Phần đọc thêm

⊕ **Nhận xét**

i) Nếu $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ thì $\vec{r'}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$. Do đó

$$\vec{r''}(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k}.$$

Gọi $\vec{u}$ là vectơ đơn vị của vectơ $\vec{r'}(t)$ thì $\vec{u}$ nằm trên tiếp tuyến tại điểm $\vec{r}(t)$ và

$$\vec{r'}(t) = |\vec{r'}(t)|\vec{u} \tag{3.1}$$

với $|\vec{r'}(t)|$ là modun của vectơ $\vec{r'}(t)$.

Đạo hàm hai vế (3.1) theo t ta có $\vec{r''}(t) = \dfrac{d\vec{r'}}{dt} = \dfrac{d|\vec{r'}|}{dt}.\vec{u} + |\vec{r'}|.\dfrac{d\vec{u}}{dt}$.

Theo trên ta có thể phân tích $\vec{r''}(t)$ thành hai thành phần, một thành phần nằm theo phương của $\vec{u}$ được gọi là thành phần tiếp tuyến và một thành phần nằm theo phương của $\frac{d\vec{u}}{dt}$ vuông góc với $\vec{u}$ được gọi là thành phần pháp tuyến.

⊙ **Vectơ gia tốc**

Nếu M là chất điểm chuyển động với hàm vectơ vị trí $\vec{r} = \vec{r}(t)$ thì vectơ $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt}$ được gọi là vectơ gia tốc của chất điểm M. Theo nhận xét ở trên ta gọi thành phần $\vec{a}_T = \frac{d|\vec{r'}|}{dt}.\vec{u}$ là thành phần gia tốc tiếp tuyến và thành phần $\vec{a}_N = |\vec{r'}|.\frac{d\vec{u}}{dt}$ là thành phần gia tốc pháp tuyến.

1.5 Các ví dụ

• **Ví dụ 1** Cho đường cong $\vec{r}(t) = t.\vec{i} + t^2.\vec{j} + t^3.\vec{k}$. Tìm vectơ vận tốc, vận tốc và vectơ gia tốc của chất điểm tại thời điểm t=1.

Giải

Tại thời điểm t bất kỳ vectơ vận tốc và vectơ gia tốc là

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 2t.\vec{j} + 3t^2.\vec{k}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2.\vec{j} + 6t.\vec{k}.$$

Tại thời điểm $t = 1$ thì

$$\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{1+4+9} = 14, \quad \vec{a} = 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

• **Ví dụ 2** Chứng minh vận tốc của chất điểm chuyển động không đổi trong khoảng thời gian T khi và chỉ khi vectơ gia tốc vuông góc với vectơ vận tốc trong khoảng thời gian đó.

Giải

Vì $(\vec{v}(t))^2 = \vec{v}(t).\vec{v}(t)$ nên

$$2\vec{v}(t).\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}(t))^2 = \frac{d}{dt}(\vec{v}(t).\vec{v}(t)) = \vec{a}(t).\vec{v}(t) + \vec{v}(t).\vec{a}(t) = 2\vec{v}(t).\vec{a}(t)$$

Nếu $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$ thì $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $\vec{v}.\vec{a} = 0$. Do đó vận tốc không đổi nếu vectơ gia tốc vuông góc với vectơ vận tốc.

• **Ví dụ 3** Giả sử $\vec{u}$ có đạo hàm đến cấp ba. Tính $\frac{d}{dt}(\vec{u}.(\frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}))$.

Giải

Ta có $\displaystyle \frac{d}{dt}\left(\vec{u}.\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right)\right) = \frac{d\vec{u}}{dt}.\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right) + \vec{u}.d\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right)$

$$= \frac{d\vec{u}}{dt}.\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right) + \vec{u}.\left(\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \times \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right) + \vec{u}.\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d^3\vec{u}}{dt^3}\right)$$

$$= 0 + 0 + \vec{u}.\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d^3\vec{u}}{dt^3}\right) = \vec{u}.\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d^3\vec{u}}{dt^3}\right).$$

2. ĐƯỜNG CONG VÀ THAM SỐ HÓA ĐƯỜNG CONG

Trong phần này ta xem đường cong như là một vật thể hình học hơn là đường của chất điểm chuyển động.

2.1 Tham số hóa đường cong theo hàm vectơ vị trí

Ta xem đường cong $\mathcal{C}$ trong không gian như là tập hợp của những điểm M mà vị trí của nó được cho bởi hàm vectơ vị trí

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{3.2}$$

với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz.

Khi đó (3.2) được gọi là phương trình vectơ của $\mathcal{C}$ và

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

được gọi là phương trình tham số của $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ được gọi là *đường cong trơn* nếu nó được tham số hóa dạng (3.2) với vectơ vận tốc $\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ liên tục và khác 0.

• **Ví dụ 4** Phương trình $x = 4t - 1$, $y = 3t$, $z = t + 2$ là phương trình tham số của đường thẳng $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{1}$.

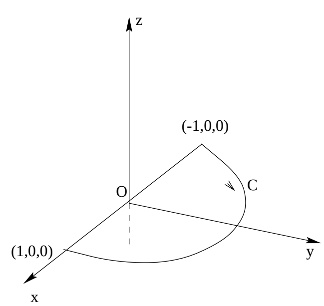
⊙ **Chú ý** Sự biểu diễn tham số của đường cong trong không gian là không duy nhất. Chẳng hạn xét ví dụ sau.

• **Ví dụ 5** Chứng tỏ các hàm vectơ

$$\vec{r_1}(t) = \sin t\vec{i} + \cos t\vec{j}, \quad (-\pi/2 \le t \le \pi/2)$$
$$\vec{r_2}(t) = (t-1)\vec{i} + \sqrt{2t - t^2}\vec{j}, \quad (0 \le t \le 2)$$
$$\vec{r_3}(t) = t\sqrt{2 - t^2}\vec{i} + (1 - t^2)\vec{j}, \quad (-1 \le t \le 1)$$

cùng biểu diễn một đường cong. Hãy mô tả đường cong đó.

Giải



H 3.2

Hàm $\vec{r_1}(t)$ bắt đầu tại điểm $(-1, 0, 0)$ ứng với vectơ vị trí $\vec{r_1}(-\frac{\pi}{2}) = -\vec{i}$ và kết thúc tại điểm $(1, 0, 0)$ ứng với vectơ vị trí $\vec{r_1}(\frac{\pi}{2}) = \vec{i}$. Nó nằm trong nửa trên mặt phẳng Oxy với $y \ge 0$ (vì $\cos t \ge 0$ với $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$). Bởi vì $|\vec{r_1}(t)| = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$ nên tất cả các điểm trên đường cong cách gốc 1 đơn vị.

Do đó hàm $\vec{r_1}(t)$ biểu diễn nửa đường tròn $y = \sqrt{1 - x^2}$ trong mặt phẳng Oxy.

Tương tự ,hai hàm vectơ còn lại có cùng tính chất

$$\vec{r_2}(0) = -\vec{i}, \quad \vec{r_2}(2) = \vec{i}, \quad |\vec{r_2}(t)| = (t-1)^2 + 2t - t^2 = 1$$
$$\vec{r_3}(-1) = -\vec{i}, \quad \vec{r_3}(1) = \vec{i}, \quad |\vec{r_3}(t)| = t^2(2 - t^2) + (1 - t^2)^2 = 1.$$

Vì vậy ba hàm vectơ cùng biểu diễn nửa đường tròn. Tuy nhiên ba sự tham số hóa khác nhau này vạch ra các đường cong với vectơ vận tốc khác nhau.

2.2 Tham số hóa đường cong như là giao của hai mặt

Một đường cong trong không gian có thể xem như là giao của hai mặt. Do đó nó có thể được cho bởi phương trình của hai mặt

$$\begin{cases} \phi_1(x,y,z) = 0 \\ \phi_2(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

• **Ví dụ 6** Phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

là phương trình của đường tròn nhận được bởi giao của mặt cầu tâm O bán kính 1 và mặt phẳng $z = 0$.

• **Ví dụ 7** Tìm sự biểu diễn tham số của đường cong là giao của hai mặt $x^2 + y + z = 2$ và $xy + z = 1$.

Giải

Lấy phương trình đầu trừ cho phương trình thứ hai ta được

$$x^2 + y - xy = 1.$$

Nếu cho $x = t$ thì $t^2 + y(1-t) = 1$ dẫn đến $y = \dfrac{1-t^2}{1-t} = 1 + t$.

Thay x và y vào phương trình hai thì ta được

$$z = 1 - xy = 1 - t(1+t) = 1 - t - t^2.$$

Vì vậy ta có một cách biểu diễn tham số của đường cong đã cho là

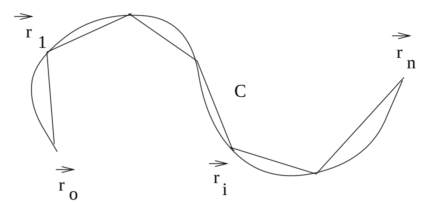
$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 1 + t \\ z &= 1 - t - t^2. \end{cases}$$

Chú ý rằng sự biểu diễn tham số của đường cong này là không duy nhất.

2.3 Độ dài cung và tham số hóa độ dài cung

a) Độ dài cung

Cho $\mathcal{C}$ là đường cong liên tục, bị chặn có phương trình $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $(a \le t \le b)$.



H

H 3.3

Chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm $a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b$. Các điểm $\vec{r_i} = \vec{r}(t_i) \quad (0 \leq i \leq n)$ chia $\mathcal{C}$ thành n cung nhỏ có độ dài s_i $(1 \leq i \leq n)$.

Khi cung nhỏ thứ i nối $\vec{r}_{i-1}$ và $\vec{r_i}$ khá bé thì s_i xấp xỉ với độ dài $|\vec{r_i} - \vec{r}_{i-1}|$ của cát tuyến của nó và do đó khi tất cả các cung có độ dài khá bé thì độ dài s của $\mathcal{C}$ sẽ xấp xỉ với độ dài của đường gấp khúc nối các điểm $\vec{r_i} \quad (0 \leq i \leq n)$

Đặt $\triangle t_i = t_i - t_{i-1}$ và $\triangle \vec{r_i} = \vec{r_i} - \vec{r_{i-1}}$ thì

$$s \approx s_n = \sum_{i=0}^{n} |\vec{r_i} - \vec{r_{i-1}}| = \sum_{i=0}^{n} \left|\frac{\triangle \vec{r_i}}{\triangle t_i}\right| . \triangle t_i .$$

Cho $n \to \infty$ sao cho $\max \triangle t_i \to 0$, nếu $\vec{r}(t)$ có đạo hàm $\vec{v}(t)$ liên tục và không triệt tiêu trên $[a,b]$ thì độ dài cung s của $\mathcal{C}$ là

$$s = \lim_{\max \triangle t_i \to 0} s_n = \int_a^b |\frac{d\vec{r}}{dt}| dt = \int_a^b |\vec{v}(t)| dt.$$

$\odot$ **Chú ý** Vì sự biểu diễn tham số của $\mathcal{C}$ là không duy nhất nên độ dài cung phụ thuộc vào sự tham số hoá để biểu diễn $\mathcal{C}$.

$\oplus$ **Nhận xét** Gọi $s(t)$ là độ dài một phần của $\mathcal{C}$ tương ứng với giá trị của tham số trong đoạn $[a,t]$ thì $s(t) = \int_a^t |\vec{v}(\tau)| d\tau$. Do đó

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^t |\vec{v}(\tau)| d\tau = |\vec{v}(t)|.$$

Vì vậy phần tử độ dài cung của $\mathcal{C}$ được cho bởi

$$\boxed{ds = |\vec{v}(t)| dt = \left|\tfrac{d}{dt}\vec{r}(t)\right| dt}$$

Nếu $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ thì $\vec{r'}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$. Khi đó

$$\boxed{ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt}$$

Đặc biệt đối với đường cong phẳng ta có

$$\boxed{ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt}$$

i) Đường cong trong tọa độ Descartes $y = f(x)$, $(a \leq x \leq b)$ có thể xem tham số hóa với x là tham số có dạng $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Ta có $\vec{v} = \vec{i} + f'(x)\vec{j}$ nên

$$\boxed{ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}$$

ii) Đường cong trong tọa độ cực $r = \rho(\varphi)$ có phương trình tham số

$\vec{r}(\varphi) = \rho(\varphi)\cos\varphi\vec{i} + \rho(\varphi)\sin\varphi\vec{j}$ (với$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$).

Ta có

$$x' = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi$$
$$y' = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi$$

nên $x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \rho'^2$. Do đó

$$\boxed{ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi}$$

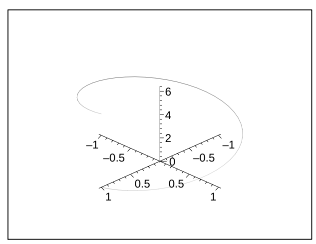
• **Ví dụ 8** Tìm độ dài s của đường đinh ốc $\vec{r} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$ giữa điểm $(a, 0, 0)$ và điểm $(a, 0, 2b\pi)$.

Giải

Đường cong này xoắn quanh trục Oz, tăng khi nó quay và nằm trên mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$. Ta có

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + bt\vec{k}.$$

Ta thấy $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nên dưới dạng biểu diễn tham số đường đinh ốc được chỉ ra với vận tốc không đổi.



H 3.4 Đường đinh ốc với $a = 1, b = 1$

Độ dài cung s cần tính tương ứng với khoảng biến thiên $[0.2\pi]$ của t. Do đó

$$s = \int_0^{2\pi} |\vec{v}(t)|dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

b) Tham số hóa độ dài cung

Thông thường người ta tham số hóa đường cong từ sự phát sinh ra của đường cong đó, chính vì thế sẽ có nhiều cách tham số hóa đường cong. Trong phần này ta sẽ đưa ra một phương pháp tham số hóa "tự nhiên nhất" cho mọi đường cong là tham số hóa dựa vào độ dài cung đo từ một điểm đặc biệt của cung (thường là điểm mút).

Nếu hàm vectơ vị trí của điểm bất kỳ M trên đường cong $\mathcal{C}$ được cho bởi hàm vectơ của độ dài cung s dọc theo $\mathcal{C}$ từ điểm đầu M_0 đến điểm M, $\vec{r} = \vec{r}(s)$, thì $\mathcal{C}$ được tham số hóa theo độ dài cung.

⊕ **Nhận xét** Ta có $ds = |\vec{v}(t)|dt$ cho mọi tham số hóa $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Tham số hóa theo độ dài cung cho $ds = |\vec{v}(s)|ds$ nên $|\vec{v}(s)| = 1$.

Vậy tham số hóa đường cong dưới dạng độ dài cung cho vectơ vận tốc đơn vị.

⊙ **Chú ý** Giả sử đường cong $\mathcal{C}$ có phương trình $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Nếu độ dài cung trong khoảng $[t_0, t]$

$$s = s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \left| \frac{d}{dt}\vec{r}(\tau) \right| d\tau$$

được tính một cách tường minh và nếu từ phương trình $s = s(t)$ ta giải ra được $t = t(s)$ thì $\mathcal{C}$ được tham số hóa theo độ dài cung $\vec{r} = \vec{r}(t(s))$.

• ***Ví dụ 9*** Hãy tham số hóa đường đinh ốc $\vec{r} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$ dưới dạng độ dài cung từ điểm $M_0(a, 0, 0)$ theo hướng tăng của t.

Giải

Điểm gốc M_0 ứng với $t = 0$. Ta có $\left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nên

$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}dt = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Do đó $t = s/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Vậy tham số hóa của đường đinh ốc theo độ dài cung là

$$\vec{r}(s) = a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\vec{i} + a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\vec{j} + \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\vec{k}.$$

3. ĐỘ CONG, ĐỘ XOẮN, TAM DIỆN FRENET

3.1 Vectơ tiếp tuyến đơn vị

Vectơ $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ là vectơ tiếp tuyến của đường cong được tham số hóa $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tại điểm $\vec{r}(t)$, nó cho ta biết hướng biến thiên của đường cong. Giả sử $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$. Khi đó ta có vectơ tiếp tuyến đơn vị tại điểm $\vec{r}(t)$ là

$$\boxed{\hat{T}(t) = \tfrac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}}.$$

Đường cong được tham số hóa dưới dạng độ dài cung $\vec{r} = \vec{r}(s)$ cho ta vectơ vận tốc đơn vị $\vec{v}(s)$. Khi đó $\hat{T}(s) = \vec{v}(s)$.

• **Ví dụ 10** Tìm vectơ tiếp tuyến đơn vị của đường đinh ốc $\vec{r} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$ dưới dạng tham số của t và dưới dạng độ dài cung.

Giải

Ta có $\vec{v}(t) = -a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k}$ và

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Do đó

$$\vec{T}(t) = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\vec{j} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{k}.$$

Tham số hóa dưới dạng độ dài cung (xem ví dụ 9) đường đinh ốc có phương trình

$$\vec{r}(s) = a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\vec{i} + a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\vec{j} + \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{k}.$$

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\vec{j} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{k}.$$

3.2 Độ cong

Tại mỗi điểm trên đường cong $\mathcal{C}$ ta có một vectơ tiếp tuyến đơn vị hướng theo chiều tăng của độ dài cung, ta gọi vectơ này là *vectơ tiếp tuyến đơn vị dương*. Nếu tiếp điểm di chuyển một đoạn $\triangle s$ trên $\mathcal{C}$ thì tiếp tuyến đơn vị dương sẽ quay đi một góc $\triangle\theta$ nào đó. $\mathcal{C}$ càng "cong" theo cách nhìn thông thường của ta nếu như góc $\triangle\theta$ càng lớn . Để khái niệm "cong" này trở nên chính xác hơn ta đi đến định nghĩa sau:

□ **Định nghĩa 4** Giả sử $\triangle\theta$ là góc giữa hai vectơ tiếp tuyến đơn vị dương tại hai mút của cung $\overset{\frown}{M_0M}$ và $\triangle s$ là độ dài của cung $\overset{\frown}{M_0M}$. Khi đó ta gọi số $\left|\frac{\triangle\theta}{\triangle s}\right|$ là độ cong trung bình của đường cong trên cung $\overset{\frown}{M_0M}$. Kí hiệu $\kappa_{tb} = \left|\frac{\triangle\theta}{\triangle s}\right|$.

Ở đây $\triangle\theta, \triangle s$ là những đại lượng chỉ phụ thuộc vào các hệ tọa độ dùng để quan sát.

⊕ **Nhận xét**

1. Đối với đường thẳng, mọi tiếp tuyến có phương không đổi và trùng với phương của đường thẳng nên $\triangle\theta = 0$, do đó tại mọi đoạn ta đều có $\kappa_{tb} = 0$. Vậy độ cong trung bình trên mọi đoạn thẳng của đường thẳng đều bằng 0 (đường thẳng là đường không cong).

2. Đối với đường tròn bán kính R ta luôn có $\triangle s = R.\triangle\theta$ nên $\frac{\triangle\theta}{\triangle s} = \frac{1}{R}$ không đổi. Vậy đường tròn là đường có độ cong đều đối với mọi cung.

□ **Định nghĩa 5** Độ cong tại một điểm M_0 trên đường cong $\mathcal{C}$ là giới hạn (nếu có) của độ cong trung bình trên cung $\overset{\frown}{M_0M}$ khá bé khi M dần đến M_0 trên $\mathcal{C}$. Ta có

$$\kappa = \lim_{M\to M_0} \kappa_{tb} = \lim_{\triangle s\to 0}\left|\frac{\triangle\theta}{\triangle s}\right|.$$

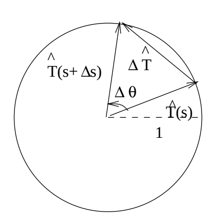
Theo định nghĩa của đạo hàm thì $\kappa = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|$.

△ **Định lý 3.2** *Giả sử $\hat{T}(s)$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị tại điểm $\vec{r}(s)$. Thế thì độ cong của đường cong tại $\vec{r}(s)$ là*

$$\boxed{\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{T}(s)}{ds}\right|} \tag{3.3}$$

Chứng minh

Gọi $\triangle\hat{T} = \hat{T}(s+\triangle s) - \hat{T}(s)$. Vì cả hai vectơ $\hat{T}(s+\triangle s), \hat{T}(s)$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị và $|\frac{\triangle\hat{T}}{\triangle\theta}|$ là tỉ số của dây cung đối với độ dài của cung tương ứng của vòng tròn bán kính 1 (xem hình) nên $\lim\limits_{\triangle s\to 0}\left|\frac{\triangle\hat{T}}{\triangle\theta}\right| = 1$.



H 3.5

Do đó $\kappa = \lim_{\triangle s \to 0} \left|\frac{\triangle\theta}{\triangle s}\right| = \lim_{\triangle s \to 0} \left|\frac{\triangle\hat{T}}{\triangle\theta}\right| . \left|\frac{\triangle\theta}{\triangle s}\right| = \lim_{\triangle s \to 0} \left|\frac{\triangle\hat{T}}{\triangle s}\right| = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|$. □

⊕ **Nhận xét** Theo định lý 3.2 độ cong của đường cong $\mathcal{C}$ tại $\vec{r}(s)$ đo tốc độ quay của tiếp tuyến đối với đường cong.

3.3 Pháp vectơ đơn vị

Ta thấy $\kappa(s) = |\frac{d\hat{T}}{ds}| \geq 0$ tại mỗi điểm trên $\mathcal{C}$. Nếu $\kappa(s) \neq 0$ thì ta có thể chia $\frac{d\hat{T}}{ds}$ cho độ cong $\kappa(s)$ và nhận được một vectơ $\hat{N}$ có cùng hướng. Vectơ này được gọi là pháp vectơ đơn vị của $\mathcal{C}$ tại $\vec{r}(s)$. Ta có

$$\boxed{\hat{N} = \frac{1}{\kappa(s)}.\frac{d\hat{T}}{ds}}$$

Chú ý rằng $\hat{N}(s)$ vuông góc với $\hat{T}$ tại $\vec{r}(s)$ và chỉ ra hướng mà $\hat{T}$ quay khi s tăng , pháp vectơ đơn vị không xác định tại những điểm mà độ cong $\kappa(s) = 0$.

3.4 Mặt phẳng mật tiếp

Mặt phẳng qua $\vec{r}(s)$ và chứa hai vectơ $\hat{T}, \hat{N}$ được gọi là *mặt phẳng mật tiếp* của $\mathcal{C}$ tại $\vec{r}(s)$.

Đối với đường cong phẳng mặt phẳng mật tiếp là mặt phẳng chứa đường cong đó. Trong không gian, mặt phẳng mật tiếp sẽ thay đổi ở từng điểm, tại điểm bất kỳ nó là mặt phẳng gần nhất chứa phần của đường cong gần điểm đó.

3.5 Vectơ trợ pháp tuyến

Tại điểm bất kỳ $\vec{r}(s)$ trên đường cong $\mathcal{C}$ mà $\hat{T}$ và $\hat{N}$ xác định ta có vectơ đơn vị thứ ba $\hat{B}$, gọi là vectơ trợ pháp tuyến, được xác định bởi công thức

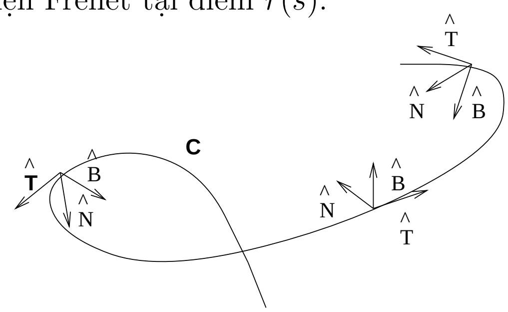
$$\boxed{\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}}$$

$\hat{B}$ vuông góc với mặt phẳng mật tiếp của $\mathcal{C}$ tại $\vec{r}(s)$. Nếu C là đường cong phẳng thì $\hat{B}$ là một vectơ hằng phụ thuộc vào s.

Ta cũng có $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}, \quad \hat{T} = \hat{N} \times \hat{B}$.

3.6 Tam diện Frenet

Tại mỗi điểm trên $\mathcal{C}$ bộ ba vectơ $(\hat{T}, \hat{N}, \hat{B})$ tạo nên một hệ gồm các vectơ đơn vị vuông góc với nhau từng đôi một có hướng giống như hệ trục chuẩn $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ trong không gian (tạo nên tam diện thuận). Ta gọi hệ này là tam diện Frenet tại điểm $\vec{r}(s)$.



H 3.6 Đường cong với tam diện Frenet.

3.7 Độ xoắn

⊕ **Nhận xét** Ta có $\frac{d\hat{B}}{ds}$ vuông góc với $\hat{B}(s)$. Lấy vi phân vectơ $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$ thì ta được

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = \frac{d\hat{T}}{ds} \times \hat{N} + \hat{T} \times \frac{d\hat{N}}{ds} = \kappa\hat{N} \times \hat{N} + \hat{T} \times \frac{d\hat{N}}{ds} = \hat{T} \times \frac{d\hat{N}}{ds}.$$

Do đó $\frac{d\hat{B}}{ds}$ vuông góc với $\hat{T}$

Vì cả hai $\hat{T}$ và $\hat{B}$ đều vuông góc với $\frac{d\hat{B}}{ds}$ nên $\frac{d\hat{B}}{ds}$ và $\hat{N}$ cùng phương. Dẫn đến tồn tại số $\tau(s)$ sao cho

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau(s).\hat{N}(s) \tag{3.4}$$

□ **Định nghĩa 6** Số $\tau(s)$ thỏa (3.4) được gọi là độ xoắn (torsion) của đường cong $\mathcal{C}$ tại điểm $\vec{r}(s)$.

• **Ví dụ 11** Xét đường đinh ốc có phương trình tham số độ dài cung

$$\vec{r}(s) = a\cos(cs)\vec{i} + a\sin(cs)\vec{j} + bcs\vec{k}.$$

trong đó $c = 1/\sqrt{a^2+b^2}$ (giả sử $a > 0, b > 0$).

Tìm hàm độ cong $\kappa(s)$, độ xoắn $\tau(s)$ và vectơ đơn vị cấu thành tam diện Frenet tại điểm bất kỳ $\vec{r}(s)$ trên đường đinh ốc.

GIẢI

Theo ví dụ 10 ta có vectơ tiếp tuyến đơn vị của đường đinh ốc tại điểm $\vec{r}(s)$ là

$$\hat{T}(s) = -ac\sin(cs)\vec{i} + ac\cos(cs)\vec{j} + bc\vec{k}.$$

Lấy vi phân $\hat{T}$ ta được $\frac{d\hat{T}}{ds} = -ac^2\cos(cs)\vec{i} - ac^2\sin(cs)\vec{j}.$

Do đó độ cong của đường đinh ốc là $\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = ac^2 = \frac{a}{a^2+b^2}$ và vectơ tiếp tuyến đơn vị là. Lúc này ta có

$$\hat{B}(s) = \hat{T}(s) \times \hat{N}(s) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -ac\sin(cs) & ac\cos(cs) & bc \\ -\cos(cs) & -\sin(cs) & 0 \end{vmatrix}$$
$$= bc\sin(cs)\vec{i} - bc\cos(cs)\vec{j} + ac\vec{k}.$$

Lấy vi phân $\hat{B}$ ta được $\dfrac{d\hat{B}}{ds} = bc^2\cos(cs)\vec{i} + bc^2\sin(cs)\vec{j} = -bc^2\hat{N}(s).$

Do đó độ xoắn của đường đinh ốc là $\tau(s) = -(-bc^2) = \frac{b}{a^2+b^2}.$

3.8 Công thức Frenet-Serret

Ta có

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa\hat{N} \quad \text{và} \quad \frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\hat{N}.$$

Suy ra

$$\frac{d\hat{N}}{ds} = \frac{d}{ds}(\hat{B} \times \hat{T}) = \frac{d\hat{B}}{ds} \times \hat{T} + \hat{B} \times \frac{d\hat{T}}{ds}$$
$$= -\tau(\hat{N} \times \hat{T}) + \kappa(\hat{B} \times \hat{N}) = \tau\hat{B} - \kappa\hat{T}.$$

Khi đó bộ ba công thức

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\hat{T}}{ds} &= \kappa\hat{N} \\ \frac{d\hat{N}}{ds} &= -\kappa\hat{T} + \tau\hat{B} \\ \frac{d\hat{B}}{ds} &= -\tau\hat{N} \end{aligned}}$$

được gọi là công thức Frenet-Serret. Các công thức này có vai trò rất quan trọng trong lý thuyết về đường cong trong không gian, nó cho biết một cách chính xác về dạng của đường cong.

Các công thức Frenet-Serret có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\hat{T}\\ \hat{N}\\ \hat{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{T}\\ \hat{N}\\ \hat{B}\end{pmatrix}.$$

Δ **Định lý 3.3** (`Định lý cơ sở của đường cong trong không gian`) *Giả sử $\mathcal{C}_1$ và $\mathcal{C}_2$ là hai đường cong có cùng độ cong và độ xoắn không triệt tiêu. Thế thì $\mathcal{C}_1$ và $\mathcal{C}_2$ là hai đường cong đồng dư (tương đẳng) theo nghĩa một đường có thể được tịnh tiến và quay để trùng khít với đường kia.*

Chứng minh

Di chuyển $\mathcal{C}_2$ sao cho điểm đầu của nó trùng với điểm đầu của $\mathcal{C}_1$ và cả hai tam diện Frenet của hai đường cong trùng nhau tại điểm đó.

Gọi $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{N}_1, \hat{N}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ tương là các vectơ tiếp tuyến, pháp tuyến và trợ pháp tuyến của $\mathcal{C}_1$,$\mathcal{C}_2$.

Xét $f(s) = \hat{T}_1(s).\hat{T}_2(s) + \hat{N}_1(s).\hat{N}_2(s) + \hat{B}_1(s).\hat{B}_2(s)$.

Tính đạo hàm của $f(s)$ và dùng các công thức Frenet ta có

$$\frac{df}{ds}(s) = \frac{d\hat{T}_1}{ds}.\hat{T}_2 + \hat{T}_1.\frac{d\hat{T}_2}{ds} + \frac{d\hat{N}_1}{ds}.\hat{N}_2 + \hat{N}_1.\frac{d\hat{N}_2}{ds} + \frac{d\hat{B}_1}{ds}.\hat{B}_2 + \hat{B}_1.\frac{d\hat{B}_1}{ds}$$

$$= \kappa.\hat{N}_1.\hat{T}_2 + \kappa.\hat{T}_1.\hat{N}_2 - \kappa.\hat{T}_1.\hat{N}_2 + \tau.\hat{B}_1.\hat{N}_2$$

$$-\kappa.\hat{N}_1.\hat{T}_2 + \tau.\hat{N}_1.\hat{B}_2 - \tau.\hat{N}_1.\hat{B}_2 - \tau.\hat{B}_1.\hat{N}_2 = 0.$$

Do đó $f(s)$ là hằng. Vì hai tam diện đồng nhất tại $s = 0$ nên $f(0) = 3$. Suy ra

$$\hat{T}_1(s).\hat{T}_2(s) + \hat{N}_1(s).\hat{N}_2(s) + \hat{B}_1(s).\hat{B}_2(s) = 3. \tag{3.5}$$

Vì mỗi số hạng trong tổng ở vế trái không thể vượt quá 1 nên (3.5) xảy ra khi và chỉ khi các số hạng ở vế trái đều bằng 1.

Với $\hat{T}_1(s).\hat{T}_2(s) = 1$, $\forall s$. Vì $\hat{T}_1, \hat{T}_2$ là các vectơ đơn vị nên

$$\frac{d\vec{r_1}}{ds} = \hat{T}_1(s) = \hat{T}_2(s) = \frac{d\vec{r_2}}{ds}.$$

Từ đó

$$\left|\frac{d\vec{r_1}(s)}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{r_2}(s)}{ds}\right| \tag{3.6}$$

Tích phân hai vế (3.6) và nhớ rằng cả hai đường cong đều bắt đầu tại cùng một điểm $s = 0$ ta được $|\vec{r_1}(s)| = |\vec{r_2}(s)|$.

Vì $\mathcal{C}_1$ và $\mathcal{C}_2$ có cùng độ cong và độ xoắn nên $\vec{r_1}(s) = \vec{r_2}(s)$. □

4. ĐỘ CONG VÀ ĐỘ XOẮN VỚI THAM SỐ HÓA TỔNG QUÁT

4.1 Công thức tính độ cong và độ xoắn

Các công thức của độ cong, độ xoắn cũng như tam diện Frenet rất tiện lợi trong việc sử dụng nếu đường cong ta xét được tham số hóa theo độ dài cung.

Ta sẽ xây dựng các công thức trên trong trường hợp đường cong được tham số hóa dạng tổng quát $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Từ đây về sau ta sẽ kí hiệu $v = |\vec{v}|$. Ta có

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{ds}{dt} = v\hat{T}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v\frac{d\hat{T}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

hay

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v^2\kappa\hat{N} \tag{3.7}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = v\tfrac{dv}{dt}(\hat{T} \times \hat{T}) + v^3\kappa(\hat{T} \times \hat{N}) = v^3\kappa\hat{B}$$

(chú ý rằng $\hat{B}$ cùng hướng với $\vec{v} \times \vec{a}$).

Từ các công thức trên ta nhận được vectơ trợ pháp tuyến

$$\boxed{\hat{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|}}$$

và độ cong

$$\boxed{\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3}}$$

Còn $\hat{T}$ và $\hat{N}$ xác định từ công thức: $\boxed{\hat{T} = \dfrac{\vec{v}}{v}, \quad \hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}}$

Bây giờ ta đi tìm độ xoắn. Để ý rằng

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}.\hat{T} + v^2\kappa\hat{N}\right).$$

Đạo hàm trên sẽ có nhiều số hạng. Số hạng duy nhất liên quan đến $\hat{B}$ có được từ việc tính

$$\frac{d}{dt}(v^2\kappa\hat{N}) = v^3\kappa\frac{d\hat{N}}{ds} = v^3\kappa(\tau\hat{B} - \kappa\hat{T}).$$

Do đó

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \alpha\hat{T} + \beta\hat{N} + v^3\kappa\tau\hat{B}$$

với α, β là các hằng số xác định nào đó.

Vì $\vec{v} \times \vec{a} = v^3\kappa\hat{B}$ nên

$$(\vec{v} \times \vec{a}).\frac{d\vec{a}}{dt} = (v^3\kappa)^2\tau = |\vec{v} \times \vec{a}|^2.\tau.$$

Vậy ta nhận độ công thức của độ xoắn là

$$\boxed{\tau = \frac{(\vec{v} \times \vec{a}).\frac{d\vec{a}}{dt}}{(v^3\kappa)^2} = \frac{(\vec{v} \times \vec{a}).\frac{d\vec{a}}{dt}}{|\vec{v} \times \vec{a}|^2}}$$

⊕ **Nhận xét** Ta đặc biệt hóa độ cong đối với đường cong phẳng

1. Nếu đường cong có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

thì phương trình vectơ là $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.
Khi đó

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = (x'y'' - x''y')\vec{k}$$

Với $\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$ ta suy ra

$$\boxed{\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}} \tag{3.8}$$

2. Nếu đường cong có phương trình dạng $y = y(x)$ thì phương trình vectơ là $\vec{r}(x) = x\vec{i} + y(x)\vec{j}$. Do đó

$$\boxed{\kappa = \frac{|y''(x)|}{(1+y'^2)^{3/2}}}$$

3. Nếu đường cong có phương trình trong tọa độ cực $r = r(\varphi)$ thì liên hệ với tọa độ Descartes ta có phương trình tham số của đường cong là

$$x = r(\varphi)\cos\varphi$$
$$y = r(\varphi)\sin\varphi$$

Ta có

$$\begin{array}{c} x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi \\ x'' = r''\cos\varphi - 2r'\sin\varphi - r\cos\varphi \\ y'' = r''\sin\varphi - 2r'\cos\varphi - r\sin\varphi \end{array}.$$

Thay vào (3.8) và thu gọn ta được

$$\boxed{\kappa = \frac{|r^2 + 2r'^2 - r.r''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}}$$

• **Ví dụ 12** Tìm độ cong, độ xoắn và tam diện Frenet của đường cong $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + sint\vec{k}$ tại $t = 0$.

Giải

Ta có $\vec{v} = \vec{i} + 2t\vec{j} + \cos t\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(0) = \vec{i} + \vec{k} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}(0)| = \sqrt{2}.$

$$\vec{a}(t) = 2\vec{j} - \sin t\vec{k} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}(0) = 2\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = -\cos t\vec{k} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{a}(0)}{dt} = -\vec{k}$$

$$\vec{v}(0) \times \vec{a}(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{k} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{v}(0) \times \vec{a}(0)| = 2\sqrt{2}.$$

Ta có tam diện Frenet tại $t = 0$

$$\hat{T}(0) = \frac{\vec{v}(0)}{|\vec{v}(0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k};\ \hat{B}(0) = \frac{\vec{v}(0) \times \vec{a}(0)}{|\vec{v}(0) \times \vec{a}(0)|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}.$$

$$\hat{N}(0) = \hat{B}(0) \times \hat{T}(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \vec{j}.$$

Độ cong $\qquad \kappa(0) = \dfrac{|\vec{v}(0) \times \vec{a}(0)|}{|\vec{v}(0)|^3} = 1.$

Độ xoắn $\qquad \tau(0) = \dfrac{(\vec{v}(0) \times \vec{a}(0))\frac{d\vec{a}(0)}{dt}}{|\vec{v}(0) \times \vec{a}(0)|^2} = \dfrac{-2}{(2\sqrt{2})^2} = -\dfrac{1}{4}.$

4.2 Bán kính cong, đường tròn chính khúc và khúc tâm

a) Bán kính cong

Bán kính cong R của đường cong tại một điểm là nghịch đảo của độ cong tại điểm đó. Ta có

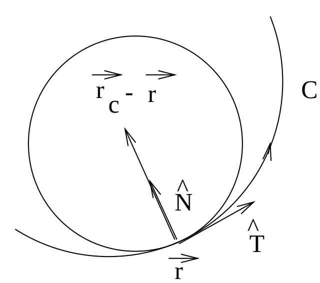
$$\boxed{R = \frac{1}{\kappa}}$$

Như vậy tại mỗi điểm của đường tròn thì bán kính cong đều bằng nhau và bằng bán kính của nó. Độ cong tại mỗi điểm trên đường thẳng đều bằng 0 nên ta nói bán kính cong của đường thẳng là ∞.

b) Tâm cong

Giả sử $\kappa(t) \neq 0$. Điểm thuộc mặt phẳng mật tiếp của $\mathcal{C}$ tại $\vec{r}(t)$ về phía lõm của $\mathcal{C}$, nằm trên giá của vectơ $\hat{N}$ và cách $\vec{r}(t)$ một khoảng $R(t)$ được gọi là *tâm cong* (*khúc tâm*) của $\mathcal{C}$ tại điểm $\vec{r}(t)$.

Gọi $\vec{r_c}(t)$ là vectơ vị trí của tâm cong thì $\vec{r_c}(t) = \vec{r}(t) + R(t).\hat{N}(t)$.



H 3.7

Đường cong $\mathcal{C}$ trong mặt phẳng được tham số hóa dạng

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$

Ta có

$$R\hat{N} = \frac{1}{\kappa}.\hat{B} \times \hat{T} = \frac{1}{\frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{v^3}}.\frac{(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}}{|\vec{v} \times \vec{a}|.|\vec{v}|} = \frac{v^2}{|\vec{v} \times \vec{a}|^2}.(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}.$$

Mà $(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & x'y'' - x''y' \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix} = -y'(x'y'' - x''y')\vec{i} + x'(x'y'' - x''y')\vec{j}$

nên $R\hat{N} = -y'\dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\vec{i} + x'\dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\vec{j}$.

Do đó $\vec{r}_c(t) = \left(x - y'\dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\right)\vec{i} + \left(y + x'\dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\right)\vec{j}$.

Vậy tâm cong tại điểm $\vec{r}(t)$ có tọa độ

$$\boxed{X = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}, \quad Y = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}}$$

c) Đường tròn chính khúc

Đường tròn nằm trong mặt phẳng mật tiếp có tâm là tâm cong và bán kính là bán kính cong được gọi là đường tròn chính khúc (hay đường tròn mật tiếp) của $\mathcal{C}$ tại $\vec{r}(s)$. Ở lân cận của điểm $\vec{r}(s)$ có thể xem $\mathcal{C}$ gần trùng với đường tròn đó. Vì vậy trong tất cả các đường tròn đi qua $\vec{r}(s)$ thì đường tròn chính khúc là đường tròn diễn tả tốt nhất dáng điệu của $\mathcal{C}$ gần điểm $\vec{r}(s)$.

• **Ví dụ 13** Xác định tâm cong của hyperbol $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $M(1,1)$ và viết phương trình của đường tròn chính khúc tại điểm này.

Giải

Ta có $y' = -\dfrac{1}{x^2}$, $y'' = \dfrac{2}{x^3}$. Tại $x = 1$ thì $y = 1$, $y' = -1$, $y'' = 2$.

Bán kính cong là $R = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \dfrac{(1+1)^{3/2}}{2} = \sqrt{2}$.

Tâm cong có tọa độ là $\begin{cases} X &= 1 + 1\frac{1+1}{2} = 2 \\ Y &= 1 + 1\frac{1+1}{2} = 2 \end{cases}$

Phương trình của đường tròn chính khúc là $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$.

d) Túc bế và thân khai

□ **Định nghĩa 7** Cho đường cong $\mathcal{C}$.

Túc bế của $\mathcal{C}$ là quỹ tích (nếu có) của các tâm cong của $\mathcal{C}$.

Nếu đường cong $\mathcal{C}$ nhận đường cong $\mathcal{L}$ làm túc bế thì ngược lại $\mathcal{C}$ được gọi là thân khai của $\mathcal{L}$.

• **Ví dụ 14** Tìm túc bế của parabol $y^2 = 2px$.

GIẢI

Lấy đạo hàm hai vế ta được $2yy' = 2p$ hay $y' = \frac{p}{y}$. Do đó $y'' = -\frac{py'}{y^2} = -\frac{p^2}{y^3}$.

Tâm cong có tọa độ

$$X = x + \frac{\frac{p}{y}(1 + \frac{p^2}{y^2})}{\frac{p^2}{y^3}} = \frac{p^2 + y^2 + px}{p} = p + 3x,$$

$$Y = y - \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2} = -\frac{(2px)^{3/2}}{p^2}.$$

Khử x từ hệ trên ta được phương trình của túc bế là $Y^2 = \frac{8}{27p}(X - p)^3$.

e) Hình bao của một họ đường cong phẳng

□ **Định nghĩa 8** Nếu mọi đường cong của họ $\mathcal{L}$ đều tiếp xúc với đường cong $\mathcal{C}$ và ngược lại tại mỗi điểm của $\mathcal{C}$ đều có một đường cong thuộc họ $\mathcal{L}$ tiếp xúc với $\mathcal{C}$ thì $\mathcal{C}$ được gọi là *hình bao* của họ $\mathcal{L}$.

⊙ **Cách tìm hình bao**

Giả sử một họ đường cong $\mathcal{L}$ có phương trình $F(x, y, C) = 0$.

Nếu trong họ đường cong không có điểm kỳ dị (những điểm tại đó $F'_x(x, y, C) = F'_y(x, y, C) = 0$) thì ta chỉ việc khử tham số C trong hệ

$$\begin{cases} F(x, y, C) & = & 0 \\ F'_C(x, y, C) & = & 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Nếu họ đường cong có những điểm kỳ dị thì hệ (3.9) bao gồm cả phương trình của hình bao (nếu có) và cả quỹ tích của những điểm kỳ dị trong họ $\mathcal{L}$.

• **Ví dụ 15** Tìm hình bao của họ đường tròn $(x-C)^2+y^2=1$.

GIẢI

Đạo hàm hai vế phương trình theo C, ta được $2(x-C)=0$. Khử C trong các phương trình $(x-C)^2+y^2=1$ và $2(x-C)=0$ ta được $y^2=1$.

Vì họ đường tròn không có điểm kỳ dị nên $y^2=1$ là phương trình của hình bao, đó chính là cặp đường thẳng $y=\pm 1$.

4.3 Gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến

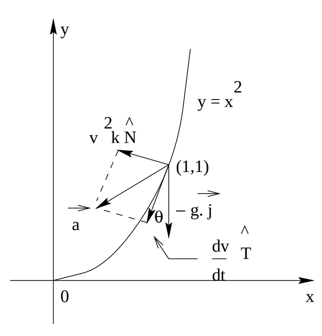
Theo (3.7) ta có $\vec{a}=\frac{dv}{dt}\hat{T}+v^2\kappa\hat{N}$.

Số hạng $\vec{a_T}=\frac{dv}{dt}\hat{T}$ được gọi là gia tốc tiếp tuyến và số hạng $\vec{a_N}=v^2\kappa\hat{N}$ được gọi là gia tốc pháp tuyến (hay gia tốc hướng tâm). Gia tốc pháp tuyến hướng về tâm và có độ lớn là $v^2\kappa=v^2/R$ (R là bán kính cong).

Các nhà thiết kế xa lộ và đường ray xe lửa tạo ra những khúc cong trên đường sao cho tổng của lực ly tâm $-m(v^2/R)\hat{N}$ và trọng lực $-mg\vec{k}$ của xe vuông góc với mặt đường ứng với vận tốc mong muốn.

• **Ví dụ 16** Một giọt chất lỏng khối lượng m trượt không ma sát xuống một sợi dây được uốn cong dạng đường cong $y=x^2$ dưới tác dụng của lực $-mg\vec{j}$. Vận tốc của giọt chất lỏng là **v** khi nó đi qua điểm $(1,1)$. Tìm độ lớn tức thời của gia tốc tiếp tuyến của giọt chất lỏng và tốc độ thay đổi của vận tốc đó.

GIẢI



H 3.8

Độ cong của đường cong $y=x^2$ tại $(1,1)$ là

$$\kappa=\left.\frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}\right|_{x=1}=\frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

Do đó độ lớn của gia tốc pháp tuyến của giọt chất lỏng tại $(1,1)$ là $v^2\kappa=\frac{2v^2}{5\sqrt{5}}$. Tốc độ thay đổi của vận tốc, $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$, là thành phần tiếp tuyến của gia tốc và nó tương thích với thành phần tiếp tuyến của trọng lực vì không có ma sát.

$$\frac{dv}{dt}=g\cos\theta=g(-\vec{j}).\hat{T}$$

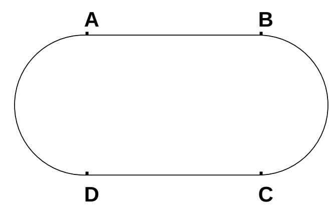
với θ là góc giữa $\hat{T}$ và $-\vec{j}$.

Vì hệ số góc của đường cong $y = x^2$ tại $(1,1)$ là 2 nên ta có $\hat{T} = -(\vec{i} + 2\vec{j})\sqrt{5}$.

Do đó $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2g/\sqrt{5}$.

4.4 Ứng dụng trong thiết kế đường ray xe lửa

Đường ray xe lửa thông thường gồm có hai phần: phần cong và phần thẳng. Phần cong là cung của đường tròn bán kính R. Xem hình ta thấy AB và CD là phần thẳng, còn BC và DA là phần cong. Đường ray được thiết kế sao cho có sự ma sát đều, nhưng sự ma sát thay đổi khi xe lửa đi vào phần cong đặc biệt tại A, B, C, D.

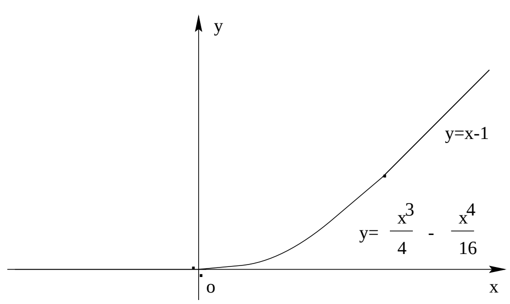


H 3.9

Giả sử xe lửa di chuyển với vận tốc không đổi v, thế thì gia tốc tiếp tuyến $\vec{a_T} = \frac{dv}{dt}.\hat{T} = 0$ và gia tốc toàn phần chỉ còn là gia tốc pháp tuyến $\vec{a} = \vec{a_N} = \frac{2}{R}.\hat{N}$. Do đó $|\vec{a}| = 0$ dọc theo phần thẳng và $|\vec{a}| = \mathbf{v}^2\kappa = \frac{\mathbf{v}}{R}$ trên nửa đường tròn. Gia tốc không liên tục tại các điểm A, B, C, D. Dẫn đến sẽ có "cú sốc" khi xe lửa đi vào hoặc rời phần đường cong của đường ray. Để tránh những điểm "sốc" này, đường ray phải được thiết kế sao cho độ cong thay đổi một cách liên tục qua từng điểm.

• **Ví dụ 17** Giả sử đường ray nằm dọc theo phần âm của trục Ox và nằm dọc theo đường thẳng $y = x - 1$, $x \geq 2$ được nối một cách trơn bởi đường ray dọc theo đường cong chuyển tiếp $y = f(x)$, $0 \leq x \leq 2$, trong đó $f(x)$ là đa thức cấp đủ nhỏ . Tìm $f(x)$ sao cho xe lửa di chuyển dọc theo đường ray sẽ không có tình trạng gia tốc không liên tục tại các chỗ nối.

Giải



h 3.10

Đa thức $f(x)$ phải được chọn sao cho đường ray liên tục có hệ số góc liên tục và độ cong tại $x = 0, x = 1$ liên tục.

Vì độ cong của $y = f(x)$ là $\kappa = \frac{f^{''}(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}}$ ta chỉ cần sắp xếp sao cho $f, f', f^{''}$ có giá trị tại $x = 0$ và $x = 2$ như phần thẳng đã có

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f^{''}(0) = 0$$

$$f(2) = 1, \quad f'(2) = 1, \quad f^{''}(2) = 0$$

Sáu điều kiện độc lập nầy gợi ý cho ta xét $f(x)$ là đa thức cấp 5 chứa 6 hệ số tự do

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5$$

$$f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4$$

$$f^{''}(x) = 2C + 6Dx + 12Ex^2 + 20Fx^3$$

Ba điều kiện đầu tại $x = 0$ cho ta $A = B = C = 0$. Tại $x = 2$ thì

$$D + 16E + 32F = f(2) = 1$$

$$123D + 32E + 80F = f'(2) = 1$$

$$12D + 48E + 160F = f^{''}(2) = 0$$

Hệ trên có nghiệm $D = 1/4$, $E = -1/16, F = 0$.

Vậy $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x^4}{16}$.

5. BÀI TẬP

1. Một chất điểm chuyển động trên đường tròn $x^2 + y^2 = 25$ với vận tốc không đổi, di chuyển hết một vòng trong 2 giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại $(3, 4)$.

2. Một điểm P di chuyển dọc theo đường cong là giao của mặt trụ $z = x^2$ và mặt phẳng $x + y = 2$ theo hướng tăng của y với vận tốc không đổi $v = 3$. Tìm vectơ vận tốc của P tại $(1, 1, 1)$.

3. Chứng minh rằng $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right) = \frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d^3\vec{u}}{dt^3}$.

4. Chứng minh rằng $\vec{r} = \vec{r_0}\cos(wt) + (\vec{v_0}/w)\sin(wt)$ thỏa mãn bài toán giá trị ban đầu $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2\vec{r}, \quad \vec{r}'(0) = \vec{v_0}, \quad \vec{r}(0) = \vec{r_0}$.

5. Mặt phẳng $z = x + 1$ giao với mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ theo một parabol. Hãy tham số hóa parabol bởi việc dùng tham số: a) $x = t$, b) $y = t$, c) $z = t$. Cách nào sẽ cho tham số hóa đơn giản nhất.

6. Cho $\mathcal{C}$ là đường cong $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = t$ giữa $t = 0$ và $t = 2\pi$. Tìm độ dài của $\mathcal{C}$.

7. Tìm bán kính cong và độ cong của các đường cong sau

   (a) $y = x^2$ tại $x = 0$ và $x = \sqrt{2}$;

   (b) $\vec{r} = 2t\vec{i} + (1/t)\vec{j} - 2t\vec{k}$ tại $(2, 1, -2)$.

8. Tìm tam diện Frenet $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ của đường cong tại điểm được cho

   (a) $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + 2\vec{k}$ tại $(1, 1, 2)$;

   (b) $\vec{r} = t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + t\vec{k}$ tại $(0, 0, 0)$

9. Tìm vectơ tiếp tuyến đơn vị, pháp vectơ đơn vị, vectơ trợ pháp tuyến, độ cong và độ xoắn của đường cong:

   (a) $\vec{r} = sintcost\vec{i} + sin^2t\vec{j} + cost\vec{k}$ tại $t = 0$,

   (b) $\vec{r} = t\vec{i} + \dfrac{t^2}{2}\vec{j} + \dfrac{t^3}{3}\vec{k}$ tại điểm bất kỳ.

10. Tìm bán kính cong của đường:

    (a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ tại điểm (0,3), (b) $y^2 = x^3$ tại điểm (4,8);

    (c) $y = \ln x$ tại điểm (1,0).

11. Xác định tâm cong của đường:

    (a) $x^3 + y^4 = 2$ tại điểm (1,1), (b) $xy = 1$ tại điểm (1,1).

12. Viết phương trình đường túc bế của đường:

    (a) $y^2 = x + \dfrac{1}{2}$, (c) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$,

    (b) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, (d) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Chương 4

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

1. TRƯỜNG VÔ HƯỚNG VÀ TRƯỜNG VECTƠ

1.1 Trường vô hướng

Ta nói trong miền Ω trong không gian có một trường vô hướng u nếu tại mỗi điểm trong Ω có một giá trị xác định của đại lượng vô hướng u. Như vậy cho một trường vô hướng trong miền Ω là cho một hàm vô hướng u xác định trong miền đó.

Những trường vô hướng mà trị của hàm u không phụ thuộc vào thời gian t được gọi là *trường dừng*.

• **Ví dụ 1**

i) Sự phân bố nhiệt độ trong một vật thể tạo nên một trường vô hướng trong vật thể đó vì tại mỗi điểm của vật thể đều có một nhiệt độ được biểu thị bằng một số.

ii) Áp suất của khí quyển trong không gian tạo nên một trường vô hướng vì tại mỗi điểm của không gian ta có một giá trị xác định của áp suất khí quyển.

□ **Định nghĩa 1** Cho trường vô hướng $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$. Khi đó phương trình $u(x, y, z) = C$, (C là hằng số) xác định một mặt được gọi là *mặt mức* ứng với giá trị C. Trên mỗi mặt mức thì $u(x, y, z)$ có giá trị không đổi nên mặt mức còn được gọi là *mặt đẳng trị*. Với mỗi giá trị C khác nhau ta được những mặt mức khác nhau. Toàn bộ không gian Ω bị phủ kín bởi những mặt mức.

• **Ví dụ 2** Một điện tích q đặt ở gốc tọa độ tạo nên một trường điện thế

$$u(x,y,z) = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Phương trình của mặt mức (còn gọi là mặt đẳng thế) trong trường điện thế là

$$\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = C \quad \text{hay} \quad x^2+y^2+z^2 = (\frac{q}{C})^2.$$

Vì vậy các mặt đẳng thế là mặt cầu tâm O bán kính $R = \frac{q}{C}$.

1.2 Trường vectơ

□ **Định nghĩa 2** Trường vectơ trong một miền $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ là một hàm véctơ $\vec{F}$ đặt tương ứng mỗi điểm $(x,y,z) \in \Omega$ với một véctơ $\vec{F}(x,y,z)$. Trường vectơ $\vec{F}$ có thể viết dưới dạng

$$\vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\vec{i} + F_y(x,y,z)\vec{j} + F_z(x,y,z)\vec{k}, \quad (x,y,z) \in \Omega.$$

Nếu Ω là miền phẳng thì ta có trường vectơ phẳng. Trường vectơ mà hàm vectơ $\vec{F}$ không phụ thuộc vào thời gian t được gọi là *trường vectơ dừng*.

Ta thường dùng vectơ vị trí $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thay cho điểm (x,y,z) trong trường vectơ.

Trường vectơ thường được đòi hỏi phải trơn theo nghĩa tất cả các thành phần vô hướng của nó có các đạo hàm riêng liên tục đến đủ các cấp.

Trường vectơ phát sinh trong nhiều tình huống trong Toán ứng dụng. Chẳng hạn

i) Trường hấp dẫn $\vec{F}(x,y,z)$ bởi một vật là lực hấp dẫn mà vật tác dụng trên một đơn vị khối lượng tại vị trí (x,y,z).

ii) Trường tĩnh điện $\vec{E}(x,y,z)$ bởi một vật thay đổi điện tích là lực mà một vật tác dụng trên một đơn vị thay đổi tại vị trí (x,y,z).

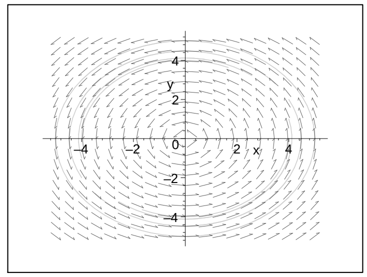
iii) Trường vận tốc $\vec{v}(x,y,z)$ trong dòng chảy của chất lỏng là vận tốc chuyển động của chất điểm tại (x,y,z).

iv) Gradient $\nabla f(x, y, z)$ của một trường vô hướng bất kỳ f tại (x, y, z) cho ta một trường vectơ , trường vectơ này cho ta hướng và độ lớn của tốc độ tăng nhanh nhất của f tại (x, y, z).

⊙ **Đường cong tích phân (đường dòng)**

□ **Định nghĩa**

Đường cong tích phân (đường dòng) của trường là một đường cong $\mathcal{C}$ mà tại mỗi điểm của nó vectơ vận tốc (hay vectơ tiếp tuyến) cùng phương với vectơ của trường đi qua điểm đó.



H 4.1

Nếu trường vectơ là trường vận tốc trong dòng chảy của chất lỏng thì đường cong tích phân của trường được gọi là dòng chảy, nếu trường vectơ là trường lực thì đường cong tích phân của trường được gọi là đường sức.

1.3 Trường bảo toàn

□ **Định nghĩa 3** Cho trường vectơ

$$\vec{F} = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}$$

trong miền Ω. Nếu tồn tại hàm vô hướng $\phi(x, y, z)$ sao cho tại mọi điểm của miền Ω ta đều có

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

thì $\vec{F}$ được gọi là trường bảo toàn trong miền Ω và ϕ được gọi là hàm thế vị của trường $\vec{F}$ trên Ω.

⊙ **Chú ý**

i) Giống như tích phân bất định, hàm thế vị của trường vectơ không duy nhất.

ii) Ta dễ dàng thao tác các phép toán đại số trên hàm thế vị của một trường vectơ bảo toàn hơn là thao tác trên trường vectơ đó. Ngoài ra một trường vectơ bảo toàn có thể được xác định bằng cách lấy gradient của hàm thế vị. Chính vì thế trường bảo toàn thường được quan tâm trong giải tích vectơ.

△ **Định lý 4.1** (Điều kiện cần cho trường bảo toàn) *Nếu*

$$\vec{F}(x,y) = F_x(x,y)\vec{i} + F_y(x,y)\vec{j}$$

là trường vectơ bảo toàn trong miền phẳng $\mathcal{D}$ thì $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ với mọi (x,y) thuộc $\mathcal{D}$.

Chứng minh. Ta có $F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = \vec{F} = \nabla\phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j}$.

Suy ra $F_x = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}$, $\quad F_y = \dfrac{\partial \phi}{\partial y}$.

Vì đạo hàm hỗn hợp của ϕ bằng nhau nên

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial x}. \qquad \square$$

⊙ **Chú ý**

i) Tương tự như trên ta có điều kiện cần cho trường vectơ bảo toàn trong không gian:

Nếu $\vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\vec{i} + F_y(x,y,z)\vec{j} + F_z(x,y,z)\vec{k}$ là trường bảo toàn trong không gian thì

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}.$$

ii) Định lý 4 ở phần sau sẽ cho ta điều kiện đủ để trường vector là trường bảo toàn.

□ **Định nghĩa 4 (Các đường và mặt thế)** Nếu $\phi(x,y,z)$ là hàm thế vị của trường bảo toàn $\vec{F}$ thì các mặt mức $\phi(x,y,z) = C$ của ϕ được gọi là các mặt đẳng thế của trường $\vec{F}$.

Tương tự cho trường vectơ phẳng, các đường mức của hàm thế vị được gọi là các đường đẳng thế của trường vectơ.

⊕ **Nhận xét** Vì $\vec{F} = \nabla\phi$ vuông góc với mặt đẳng thế nên đường cong tích phân của trường $\vec{F}$ luôn trực giao với mặt đẳng thế. Ví dụ mặt đẳng thế của trường lực hấp dẫn của một điểm có khối lượng là các mặt cầu tâm đặt tại điểm đó, những mặt cầu này trực giao với các đường cong tích phân.

• **Ví dụ 3** Chứng minh trường vectơ $\vec{F} = x\vec{i} - y\vec{j}$ là trường bảo toàn. Tìm hàm thế vị của nó.

Giải

Vì $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ nên $\vec{F}$ là trường bảo toàn. Hàm thế vị ϕ của $\vec{F}$ phải thỏa mãn

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_x = x \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_y = -y. \tag{4.2}$$

Ta có

$$\phi(x,y) = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1(y). \tag{4.3}$$

Từ (4.2) và (4.3) ta có

$$-y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = C_1'(y) \Longrightarrow C_1(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C_2.$$

Do đó $\phi(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{2} + C_2$ là hàm thế vị của $\vec{F}$ với mọi hằng số C_2.

2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 1

2.1 Khái niệm về tích phân đường loại 1

□ **Định nghĩa 5** Cho hàm $f(x,y,z)$ liên tục và xác định trên cung đường cong $\mathcal{L}$ từ A đén B. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ không dẫm lên nhau bởi các điểm chia $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$. Gọi độ dài của cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ là $\triangle s_i$. Lấy trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ tùy ý và lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \triangle s_i.$$

I_n được gọi là tổng tích phân của hàm $f(x,y,z)$ trên cung $\overset{\frown}{AB}$.

Cho $n \to \infty$ sao cho $\max \triangle s_i \to 0$. Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\max \triangle S_i \to 0} I_n$ không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn điểm M_i trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ thì giới hạn được gọi là tích phân đường loại một của hàm $f(x,y,z)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ (hay đường cong $\mathcal{L}$) và được kí hiệu là

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)ds \quad \text{hay} \quad \int\limits_{\mathcal{L}} f(x,y,z)ds.$$

Vậy

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)ds = \lim_{\max \triangle s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \triangle s_i.$$

$\triangle$ **Định lý 4.2** *Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn (liên tục và có tiếp tuyến biến thiên liên tục) và nếu hàm $f(x,y,z)$ liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$ thì tích phân $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)ds$ tồn tại.*

$\odot$ **Chú ý**

i) Trong định nghĩa tích phân đường loại một ta không quan tâm đến hướng đi trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Ta có

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y,z)ds.$$

ii) Độ dài của cung đường cong $\mathcal{L}$ cho bởi $l = \int\limits_{\mathcal{L}} ds$.

$\diamond$ **Tính chất** Tích phân đường loại một có các tính chất giống như tích phân hai lớp. Ở đây ta không nhắc lại.

2.2 Cách tính

Để tính tích phân $I = \int\limits_{\mathcal{L}} f(x,y,z)ds$ ta đưa nó về tích phân xác định.

Giả sử đường lấy tích phân $\mathcal{L}$ là đường cong trơn, hàm $f(x,y,z)$ liên tục trên $\mathcal{L}$ và $\mathcal{L}$ được tham số hóa dưới dạng độ dài cung

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}, \quad (0 \le s \le S).$$

Khi đó $f(x,y,z) = f[x(s), y(s), z(s)]$ là hàm hợp của s và có $s_i - s_{i-1} = \triangle s_i$.

Dễ thấy tổng tích phân

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \triangle s_i = \sum_{i=1}^{n} f[x(s_i), y(s_i), z(s_i)] \triangle s_i$$

của tích phân đường cũng đồng thời là tổng tích phân của tích phân xác định. Do đó ta có

$$\int_{\mathcal{L}} f(x,y,z)ds = \int_0^S f[x(s),y(s),z(s)]ds. \tag{4.4}$$

Sự tồn tại của một tích phân sẽ kéo theo sự tồn tại của tích phân kia.

Giả sử $\mathcal{L}$ được tham số hóa dạng tổng quát

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad \alpha \le t \le \beta$$

trong đó các hàm $x(t), y(t), z(t)$ liên tục cùng với các đạo hàm của chúng.

Nếu sự tăng của cung $s = s(t) = \overset{\frown}{AM}$ ứng với sự tăng của t thì ta có

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + z'(t))^2}dt.$$

Bằng cách đổi biến trong (4.4) ta nhận được

$$\boxed{\int_{\mathcal{L}} f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt}$$

⊕ **Nhận xét**

1. Nếu $\mathcal{L}$ có phương trình $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$ thì

$$\boxed{\int_{\mathcal{L}} f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt}$$

2. Nếu $\mathcal{L}$ có phương trình trong tọa độ Descartes vuông góc $y = y(x)$, $(a \le x \le b)$ thì

$$\boxed{\int_{\mathcal{L}} f(x,y)ds = \int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1 + y'^2(x)}dx}$$

• **Ví dụ 4** Tính $I = \int_{\mathcal{L}} (x^2 + y^2 + z^2)ds$ trong đó $\mathcal{L}$: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$, $0 \le t \le 2\pi$.

GIẢI

Ta có $x^{'}(t) = -\sin t, y^{'}(t) = \cos t, z^{'}(t) = 2$ nên

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + 4t^2)\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 4}dt \\ &= \sqrt{5}\int_0^{2\pi}(1+4t^2)dt = \sqrt{5}\left(t + \frac{4}{3}t^3\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\sqrt{5}\left(1 + \frac{16}{3}\pi^2\right)\pi. \end{aligned}$$

• **Ví dụ 5** Tính $I = \int\limits_{\widehat{AB}} (x^2 - y^2)ds$, trong đó $\widehat{AB}$ là cung phần tư của đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$, $(a > 0)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất

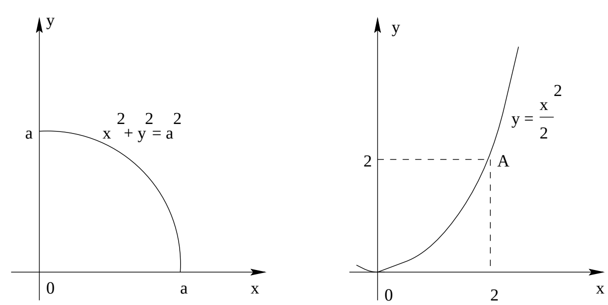
GIẢI

Phương trình tham số của cung $\widehat{AB}$ là

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \end{cases} \quad (0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2}).$$

Ta có $x'_\varphi = -a\sin\varphi$, $y'_\varphi = a\cos\varphi$. Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} (a^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi)\sqrt{(-a\sin\varphi)^2 + (a\cos\varphi)^2}d\varphi \\ &= a^3\int_0^{\pi/2}\cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^3}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} = 0. \end{aligned}$$



H 4.2

• **Ví dụ 6** Tính $I = \int\limits_{\widehat{OA}} x(1+2y)ds$, trong đó $\widehat{OA}$ là cung parabol $y = \frac{x^2}{2}$ từ $O(0,0)$ đến $A(2,2)$.

GIẢI

Ta có $y = \frac{x^2}{2}$ nên $y' = x$. Do đó

$$I = \int_0^2 x(1+x^2)\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (1+x^2)^{3/2}d(1+x^2)$$
$$= \frac{1}{5}(1+x^2)^{5/2}\Big|_0^2 = 5\sqrt{5} - \frac{1}{5}.$$

2.3 Ứng dụng vật lý

Xét dây cung $\mathcal{C}$ không đồng chất có khối lượng riêng tại điểm (x, y, z) là $\delta(x, y, z)$.

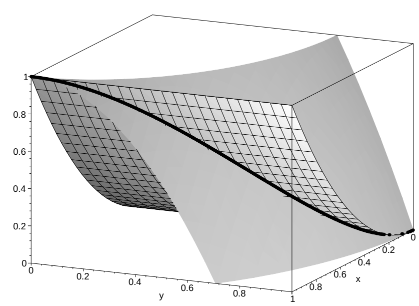
a) Khối lượng của dây cung

Khối lượng của dây cho bởi công thức

$$\boxed{m = \int\limits_{\mathcal{C}} \delta(x, y, z)ds}$$

• **Ví dụ 7** Tìm khối lượng của dây $\mathcal{C}$ ở góc phần tám thứ nhất của đường cong là giao của elliptic paraboloid $z = 2 - x^2 - 2y^2$ và mặt trụ $z = x^2$ giữa điểm $(0, 1, 0)$ và $(1, 0, 1)$ nếu khối lượng riêng của dây tại vị trí (x, y, z) là $\delta(x, y, z) = xy$.

Giải



H 4.3 Đồ thị của dây $\mathcal{C}$

Ta cần tham số hóa $\mathcal{C}$. Vì $\mathcal{C}$ nằm trên mặt trụ $z = x^2$ với x đi từ 0 đến 1 nên ta có thể đặt $x = t$. Lúc đó $z = t^2$ và $2y^2 = 2 - x^2 - z = 2 - 2t^2$ hay $y = \sqrt{1-t^2}$. Vì $\mathcal{C}$ nằm trong góc phần tám thứ nhất nên $0 \le t \le 1$. Do đó $\mathcal{C}$ có phương trình tham số:

$$x = t, \quad y = \sqrt{1-t^2}, \quad z = t^2, \quad (0 \le t \le 1).$$

Ta có $\dfrac{dx}{dt} = 1, \quad \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \dfrac{dz}{dt} = 2t$. Dẫn đến

$$ds = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2} + 4t^2}dt = \frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Vì vậy khối lượng của dây là

$$m = \int_{\mathcal{C}} xyds = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \sqrt{2-(2t^2-1)^2}d(2t^2-1) = \frac{1}{4}\int_{-1}^1 \sqrt{2-u^2}du \quad (u = 2t^2-1)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2-u^2}du = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{\pi+2}{8} \text{ (đvkl)}.$$

b) Moment tĩnh và tọa độ trọng tâm của một đường cong

i) Moment tĩnh của $\mathcal{C}$ đối với mặt phẳng Oyz, Ozx, Oxy tương ứng là:

$$\boxed{\begin{aligned} M_{yz} &= \int_{\mathcal{C}} x\delta(x,y,z)ds \\ M_{zx} &= \int_{\mathcal{C}} y\delta(x,y,z)ds \\ M_{xy} &= \int_{\mathcal{C}} z\delta(x,y,z)ds \end{aligned}}$$

ii) Tọa độ trọng tâm của $\mathcal{C}$ cho bởi:

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \tfrac{1}{l}\int_{\mathcal{C}} xds \\ y_c &= \tfrac{1}{l}\int_{\mathcal{C}} yds \\ z_c &= \tfrac{1}{l}\int_{\mathcal{C}} zds \end{aligned}} \quad \text{(l là độ dài của C)}$$

• **Ví dụ 8** Tìm trọng tâm của đường đinh ốc $\mathcal{C}$ cho bởi

$$\vec{r} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Giải

Ta có $ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}dt$. Do đó moment đối với mặt phẳng Oxy, Oyz, Ozx là

$$M_{xy} = \int_{\mathcal{C}} zds = \int_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2+b^2}dt = 2\pi b\sqrt{a^2+b^2}$$

$$M_{yz} = \int_{\mathcal{C}} xds = \int_0^{2\pi} xds = a\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\cos tdt = 0$$
$$M_{xz} = \int_{\mathcal{C}} yds = a\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\sin tdt = 0.$$

Đường đinh ốc có độ dài

$$L = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

Do đó trọng tâm có tọa độ là $x_c = 0,\ y_c = 0,\ z_c = \pi b$.

c) Moment quán tính của đường cong

Moment quán tính của đường cong $\mathcal{C}$ đối với các trục Ox, Oy, Oz cho bởi

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \int_{\mathcal{C}}(y^2+z^2)\delta(x,y,z)ds \\ I_y &= \int_{\mathcal{C}}(z^2+x^2)\delta(x,y,z)ds \\ I_z &= \int_{\mathcal{C}}(x^2+y^2)\delta(x,y,z)ds \end{aligned}}$$

3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2

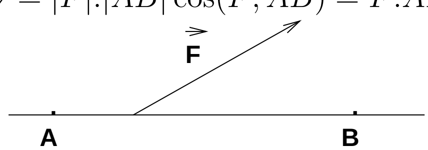
3.1 Bài toán tính công của lực biến thiên

Cho một chất điểm M di chuyển dọc theo một đường cong phẳng $\mathcal{L}$ từ điểm A đến điểm B dưới tác dụng của lực $\vec{F} = \vec{F}(M)$. Hãy tính công $\mathcal{W}$ mà lực sản sinh ra khi M di chuyển từ A đến B.

Giả sử $\vec{F}(M) = \vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, với $\vec{i}$, $\vec{j}$ là các vectơ đơn vị của các trục Ox, Oy và các hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ liên tục dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.

Nếu lực $\vec{F}$ không đổi và cung $\overset{\frown}{AB}$ là một đoạn thẳng thì công $\mathcal{W}$ của lực $\vec{F}$ là

$$\mathcal{W} = |\vec{F}|.|\overrightarrow{AB}|\cos(\vec{F},\overrightarrow{AB}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}.$$



H 4.4

Trong trường hợp của bài toán ta giải như sau.

Chia $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ không dẫm lên nhau bởi các điểm

$$A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B.$$

Gọi $\triangle s_i$ là độ dài của cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ và $\triangle x_i, \triangle y_i$ là hình chiếu của vectơ $\triangle\vec{r_i} = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ trên các trục $Ox,\ Oy$. Ta có $\triangle\vec{r_i} = \triangle x_i\vec{i} + \triangle y_i\vec{j}$.

Khi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ khá bé, có thể xem nó xấp xỉ với dây cung $A_{i-1}A_i$ và lực $\vec{F}$ không đổi trên cung đó và bằng $\vec{F}(M_i)$ với $M_i(x_i, y_i)$ là điểm tùy ý trên $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$. Do đó công $\mathcal{W}_i$ của lực $\vec{F}$ làm cho chất điểm di chuyển từ A_{i-1} đến A_i xấp xỉ với $\vec{F}(M_i).\triangle\vec{r_i}$, nghĩa là

$$\mathcal{W}_i \approx \vec{F}(M_i).\triangle\vec{r_i} = P(x_i, y_i)\triangle x_i + Q(x_i, y_i)\triangle y_i.$$

Nếu mọi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ đều khá nhỏ ta có

$$\mathcal{W} = \sum_{i=1}^{n}\mathcal{W}_i \approx \sum_{i=1}^{n}[P(x_i, y_i)\triangle x_i + Q(x_i, y_i)\triangle y_i] = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}(x_i, y_i)\triangle\vec{r_i}. \tag{4.5}$$

Giá trị gần đúng của công $\mathcal{W}$ càng chính xác nếu n càng lớn và các $\triangle s_i$ càng nhỏ. Vì vậy cho qua giới hạn biểu thức ở vế phải (4.5) khi $\max\triangle s_i \to 0$, nếu giới hạn tồn tại thì đó là công của lực $\vec{F}$ làm cho chất điểm M di chuyển từ A đến B trên $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{W} = \lim_{\max\triangle s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(x_i, y_i)\triangle x_i + Q(x_i, y_i)\triangle y_i] = \lim_{\max\triangle s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(x_i, y_i)\triangle\vec{r_i}. \tag{4.6}$$

Nếu $\mathcal{L}$ là đường cong trong không gian thì bằng cách lập luận tương tự ta cũng có biểu thức tính công của lực

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

làm chất điểm M di chuyển từ A đến B trên $\mathcal{L}$ là

$$\mathcal{W} = \lim_{\max\triangle s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(x_i, y_i, z_i)\triangle x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\triangle y_i + R(x_i, y_i, z_i)\triangle z_i].$$

3.2 Định nghĩa tích phân đường loại 2

Cho hai hàm $P(x, y), Q(x, y)$ xác định trên đường cong $\mathcal{L}$ từ A đến B. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ không dẫm lên nhau bởi các điểm

$$A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B.$$

Gọi $\triangle\vec{r_i} = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, $\triangle s_i$ là độ dài của cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ và $\triangle x_i, \triangle y_i$ tương ứng là hình chiếu của $\triangle\vec{r_i}$ trên các trục Ox, Oy. Lấy tùy ý điểm $M(x_i, y_i)$ trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ và lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n}[P(x_i, y_i)\triangle x_i + Q(x_i, y_i)\triangle y_i].$$

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max \triangle s_i \to 0$ mà I_n dần đến một giới hạn xác định không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách lấy điểm M_i trên cung nhỏ $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại hai của hai hàm $P(x, y), Q(x, y)$ dọc theo đường $\mathcal{L}$ từ A đến B và được kí hiệu là

$$\int\limits_{\mathcal{L}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{hay} \quad \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

⊙ **Chú ý** Lập luận tương tự như trên ta có thể định nghĩa tích phân đường loại hai của các hàm $P,\ Q,\ R$ từ A đến B trên đường cong ghềnh

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \lim_{\max \triangle s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n}[P(x_i, y_i, z_i)\triangle x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\triangle y_i + R(x_i, y_i, z_i)\triangle z_i].$$

⊕ **Nhận xét**

i) Từ (4.6) và định nghĩa tích phân đường loại hai ta thấy công $\mathcal{W}$ của lực $\vec{F}$ làm cho điểm M di chuyển từ A đến B trên đường cong ghềnh $\mathcal{L}$ có thể biểu diễn bằng tích phân đường loại hai như sau

$$\mathcal{W} = \lim_{\max \triangle s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x_i, y_i, z_i)\triangle\vec{r_i} = \int\limits_{\mathcal{L}} \vec{F}.d\vec{r}$$

trong đó $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k},\ \triangle\vec{r_i} = \triangle x_i\vec{i} + \triangle y_i\vec{j} + \triangle z_i\vec{k}$

ii) Giả sử $\vec{F} = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z) + F_z(x, y, z)$ là trường vectơ liên tục. Theo định nghĩa tích phân đường loại hai ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\max \triangle_{si} \to 0} \sum_{i=1}^{n}[F_x(x_i, y_i, z_i)\triangle x_i + F_y(x_i, y_i, z_i)\triangle y_i + F_z(x_i, y_i, z_i)\triangle z_i] \\ &= \lim_{\max \triangle_{si} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x_i, y_i, z_i)\triangle\vec{r_i}. \end{aligned}$$

□ **Định nghĩa 6 (Tích phân của trường vectơ)** Nếu
$$\vec{F} = F_x(x,y,z)\vec{i} + F_y(x,y,z)\vec{j} + F_z(x,y,z)\vec{k}$$
là trường vectơ liên tục và $\mathcal{L}$ là đường cong trơn thì tích phân đường của trường $\vec{F}$ dọc theo đường cong $\mathcal{L}$ là giới hạn
$$\lim_{\max \triangle s_i \to 0} \vec{F}(x_i, y_i, z_i)\triangle \vec{r}_i$$
$$= \lim_{\max \triangle_{si} \to 0} \sum_{i=1}^{n} [F_x(x_i,y_i,z_i)\triangle x_i + F_y(x_i,y_i,z_i)\triangle y_i + F_z(x_i,y_i,z_i)\triangle z_i].$$

Kí hiệu $\int\limits_{\mathcal{L}} \vec{F}.d\vec{r} \qquad (d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}).$

Ta có $\int\limits_{\mathcal{L}} \vec{F}.d\vec{r} = \int\limits_{\mathcal{L}} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$

⊙ **Chú ý** Với $\hat{T}$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị của $\mathcal{L}$ tại $\vec{r}(t)$ thì $d\vec{r} = \hat{T}ds$ nên tích phân đường của trường vectơ $\vec{F}$ cũng được dùng dưới dạng
$$\int_{\mathcal{L}} \vec{F}.\hat{T}ds = \int_{\mathcal{L}} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Vì vậy tích phân của trường vectơ định nghĩa trên còn được gọi là tích phân đường của thành phần tiếp tuyến của $\vec{F}$ dọc theo đường cong định hướng $\mathcal{L}$.

⊙ **Chú ý**

1. Khi đổi hướng đi trên $\overset{\frown}{AB}$ thì hình chiếu $\triangle x_i, \triangle y_i$ của vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ trên hai trục sẽ đổi dấu. Do đó
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} Pdx + Qdy.$$

2. Nếu $\mathcal{L}$ là cung đường cong phẳng kín (A $\equiv$ B) thì ta qui ước chiều dương trên $\mathcal{L}$ là chiều mà một người đi dọc trên $\mathcal{L}$ theo chiều đó sẽ thấy miền giới hạn bởi $\mathcal{L}$ gần nhất nằm ở bên tay trái. Chiều ngược lại gọi là chiều âm. Tích phân đường dọc theo đường cong kín được kí hiệu
$$\oint\limits_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy.$$

3. Trong chương này ta giả thiết rằng đường lấy tích phân $\mathcal{L}$ là đường cong trơn từng khúc (gồm một số hữu hạn cung trơn).

◇ **Tính chất** Tích phân đường loại hai có các tính chất như tích phân xác định.

3.3 Cách tính tích phân đường loại 2

Tính $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$

với $\overset{\frown}{AB}$ là cung trơn và các hàm $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ liên tục dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.

Giả sử cung $\overset{\frown}{AB}$ được tham số hóa dạng:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad (a \le t \le b).$$

Gọi $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Ta đưa tích phân đường loại 2 về tích phân xác định trên $[a,b]$. Vì $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}.d\vec{r}$ nên ta có

$$\boxed{I = \int\limits_a^b \left[P(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} + R(x(t),y(t),(t))\frac{dz}{dt}\right] dt}$$

⊕ **Nhận xét** Ta xét với cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$

i) Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

với các mút A, B theo thứ tự tương ứng với các trị t_A, t_B và $\varphi(t), \psi(t)$ liên tục cùng với các đạo hàm của chúng trên đoạn $[t_A, t_B]$ thì ta có công thức

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} [P(\varphi(t),\psi(t)).\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t)).\psi'(t)]dt}$$

ii) Nếu $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình $y = y(x)$ và a là hoành độ của A, b là hoành độ của B thì ta có công thức

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x)).y'(x)]dx}$$

• **Ví dụ 9** Tính $I = \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{x}{y}dx + \frac{dy}{y-a}$, với $\mathcal{L}$ là cung của đường xycloid

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

từ $t = \frac{\pi}{6}$ đến $t = \frac{\pi}{3}$.

Giải

Ta có

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left[\frac{a(t-\sin t)a(1-\cos t)}{a(1-\cos t)} + \frac{a\sin t}{-a\cos t}\right] dt$$

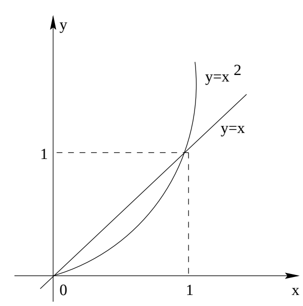
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} [a(t-\sin t) - \frac{\sin t}{\cos t}]dt = \left(\frac{at^2}{2} + a\cos t + \ln(\cos t)\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$= a\left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\sqrt{3}.$$

• **Ví dụ 10** Tính $I = \int\limits_{\mathcal{L}} 2xydx - x^2dy$ với $\mathcal{L}$ là đường nối điểm $O(0,0)$ đến điểm $A(1,1)$ trong các trường hợp:

i) $\mathcal{L}:\ y = x$;
ii) $\mathcal{L}:\ y = x^2$.

Giải



H 4.5

i) Với $\mathcal{L}$: $y = x$ thì $dy = dx$

$$I = \int_0^1 (2x^2 - x^2)dx = \int_0^1 x^2dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

ii) Với $\mathcal{L}$: $y = x^2$ thì $y' = 2x$.

$$I = \int_0^1 (2x.x^2 - x^2.2x)dx = 0.$$

• **Ví dụ 11** Tính tích phân của trường vectơ $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ dọc theo đường thẳng $\mathcal{L}$ từ điểm $(1,0)$ đến điểm $(0,-1)$.

Giải

$\mathcal{L}$ có thể được tham số hóa dạng $\vec{r} = (1-t)\vec{i} - t\vec{j}$, $(0 \le t \le 1)$.

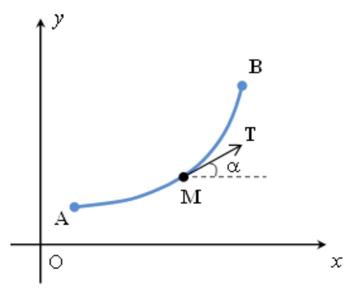
Ta có $d\vec{r} = -dt\vec{i} - dt\vec{j}$. Do đó

$$\int_{\mathcal{L}} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 [(-t)(-dt) - (1-t)(-dt)] = \int_0^1 dt = 1.$$

3.4 Liên hệ giữa tích phân đường loại 1 và loại 2

Giả sử $M \in \overset{\frown}{AB}$. Gọi α là góc giữa trục Ox và vectơ tiếp tuyến $\overrightarrow{MT}$ (hướng về phía tăng của s), ta có

$$dx = \cos\alpha ds, \quad dy = \sin\alpha ds.$$



H 4.6

Do đó ta có công thức liên hệ giữa tích phân đường loại một và loại hai là

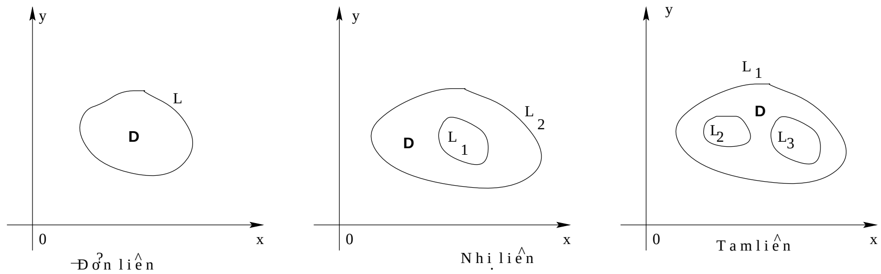
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)ds.$$

3.5 Công thức Green

Trong phần này ta sẽ xét mối liên hệgiữa tích phân đường loại hai dọc theo đường cong kín $\mathcal{L}$ và tích phân hai lớp trong miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi $\mathcal{L}$.

□ **Định nghĩa 7** Miền liên thông $\mathcal{D}$ được gọi là miền đơn liên nếu nó bị giới hạn bởi một đường (mặt) cong kín, là đa liên nếu nó bị giới hạn bởi nhiều đường (mặt) cong kín rời nhau từng đôi một.

Một ví dụ cho miền đa liên là các hình khuyên, nếu biên của nó gồm hai đường cong kín thì ta gọi nó là *miền nhị liên*, nếu biên của nó gồm ba đường cong kín thì ta gọi nó là *miền tam liên* ...



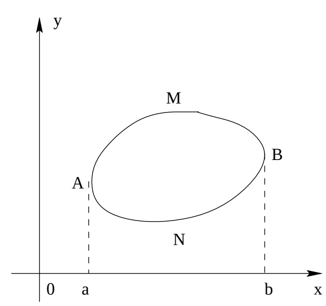
H 4.7

Δ **Định lý 4.3** *Nếu các hàm $P(x,y), Q(x,y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trong miền $\mathcal{D}$ thì ta có công thức*

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy$$

trong đó $\mathcal{L}$ là biên của miền $\mathcal{D}$, tích phân dọc theo $\mathcal{L}$ lấy theo chiều dương.

Chứng minh



H 4.8

i) Trước hết giả sử $\mathcal{D}$ là miền đơn liên và mọi đường thẳng song song với các trục tọa độ cắt $\mathcal{L}$ nhiều nhất tại hai điểm.

Xét $I = \iint\limits_{\mathcal{D}} \dfrac{\partial P}{\partial y} dxdy,$

trong đó

$ANB: \ y = \varphi_1(x),\ AMB: \ y = \varphi_2(x)\ (a \le x \le b).$

Theo cách tính tích phân hai lớp ta có

$$I = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x,y)\Big|_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dx$$
$$= \int_a^b [P(x,\varphi_2(x))dx - P(x,\varphi_1(x))]dx$$
$$= \int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx - \int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx.$$

Nhưng theo cách tính tích phân đường loại hai thì

$$\int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx = \int\limits_{ANB} P(x,y)dx = -\int\limits_{BNA} P(x,y)dx$$

$$\int_a^b P(x,\varphi_2(x)dx = \int\limits_{AMB} P(x,y)dx.$$

Nên

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int\limits_{AMB} P(x,y)dx + \int\limits_{BNA} P(x,y)dx = \int\limits_{AMBNA} P(x,y)dx$$

$$= -\int\limits_{\mathcal{L}} P(x,y)dx. \tag{4.7}$$

Tương tự ta có

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int\limits_{\mathcal{L}} Q(x,y)dy. \tag{4.8}$$

Từ (4.7) và (4.8) ta được

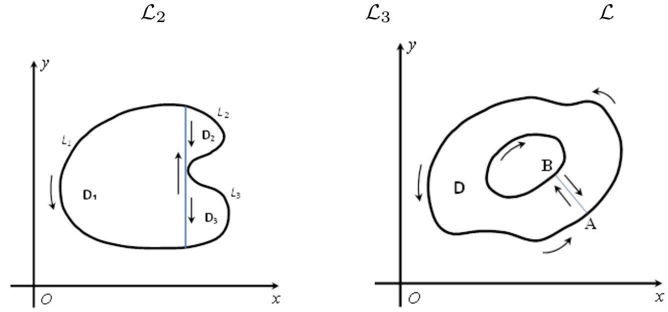
$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy.$$

ii) Nếu $\mathcal{D}$ là miền đơn liên bất kỳ, ta chia $\mathcal{D}$ thành một số hữu hạn miền miền nhỏ không dẫm lên nhau thì công thức Green vẫn còn đúng. Chẳng hạn nếu $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$ có biên $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3$, trong đó

$\mathcal{D}_1$ có biên $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L'}_1$
$\mathcal{D}_2$ có biên $\mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L'}_2$
$\mathcal{D}_3$ có biên $\mathcal{L}_3 \cup \mathcal{L'}_3$

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_{\mathcal{D}_1} + \iint\limits_{\mathcal{D}_2} + \iint\limits_{\mathcal{D}_3} = \int\limits_{\mathcal{L}_1} + \int\limits_{\mathcal{L'}_1} + \int\limits_{\mathcal{L}_2} + \int\limits_{\mathcal{L'}_2} + \int\limits_{\mathcal{L}_3} + \int\limits_{\mathcal{L'}_3}.$$

$$= \int\limits_{\mathcal{L}_1} Pdx + Qdy + \int\limits_{\mathcal{L}_2} Pdx + Qdy + \int\limits_{\mathcal{L}_3} Pdx + Qdy = \int\limits_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy.$$



H 4.9

iii) Nếu $\mathcal{D}$ là miền đa liên thì công thức Green vẫn còn đúng. Chẳng hạn $\mathcal{D}$ là miền nhị liên có biên $\mathcal{L}$ gồm $\mathcal{L}_1$ và $\mathcal{L}_2$. Nối $\mathcal{L}_1$ và $\mathcal{L}_2$ bởi đoạn AB thì ta được miền đơn liên $\mathcal{D}'$ giới hạn bởi $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$,AB,BA. Khi đó

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_{\mathcal{D}'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

$$= \int\limits_{\mathcal{L}_1} Pdx + Qdy + \int\limits_{\mathcal{L}_2} Pdx + Qdy = \int\limits_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy. \qquad \square$$

• **Ứng dụng của tích phân đường loại 2**

Nếu trong công thức Green ta cho $P = 0$ và $Q = x$ thì

$$\int\limits_{\mathcal{L}} xdy = \iint\limits_{\mathcal{D}} dxdy = S(\mathcal{D}).$$

Do đó ta có công thức tính diện tích của miền phẳng $\mathcal{D}$ bằng tích phân đường loại hai là

$$\boxed{S(\mathcal{D}) = \oint\limits_{\mathcal{L}} xdy} \tag{4.9}$$

Tương tự, nếu cho $P = y$ và $Q = 0$ thì ta được

$$\boxed{S(\mathcal{D}) = -\oint\limits_{\mathcal{D}} ydx} \tag{4.10}$$

Từ (4.9) và (4.10) ta có

$$\boxed{S(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\mathcal{L}} xdy - ydx}$$

• **Ví dụ 12** Tính $I = \int\limits_{\mathcal{L}} (x - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$, trong đó $\mathcal{L}$ là biên của miền $\mathcal{D}$ giới hạn bởi $0 \le x^2 + y^2 \le a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ và tích phân đường lấy theo chiều dương.

Giải

Theo công thức Green ta có

$$I = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(x - y^3)\right) dxdy$$

$$= 3\iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)dxdy = 3\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^3 dr = \frac{3}{8}\pi a^4.$$

• **Ví dụ 13** Giả sử $\mathcal{L}$ là đường cong kín định theo hướng dương giới hạn một miền $\mathcal{D}$ và không đi qua gốc. Chứng minh rằng

$$I = \oint\limits_{\mathcal{L}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0 & , \text{ nếu gốc không nằm trong } \mathcal{D} \\ 2\pi & , \text{ nếu gốc nằm trong } \mathcal{D} \end{cases}$$

Giải

i) Nếu $(x, y) \neq (0, 0)$ thì ta có

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = 0.$$

Do đó nếu gốc O không nằm trong $\mathcal{D}$ thì từ công thức Green ta suy ra

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)\right] dxdy = 0.$$

ii) Nếu gốc O nằm trong $\mathcal{D}$ thì O phải là điểm trong của $\mathcal{D}$ (vì $\mathcal{L}$ không qua gốc). Do đó tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho đường tròn $\mathcal{L}_\varepsilon$ tâm O bán kính ε thuộc phần trong của $\mathcal{D}$. Ta định $\mathcal{L}_\varepsilon$ theo hướng dương. Bằng cách tính trực tiếp ta dễ dàng thấy rằng

$$\int\limits_{\mathcal{L}_\varepsilon} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

Vì $\mathcal{L}$ và $\mathcal{L}_\varepsilon$ giới hạn một miền liên thông $\mathcal{D}'$ nên theo công thức Green ta có

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} - \int\limits_{\mathcal{L}_\varepsilon} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 0.$$

Vậy

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int\limits_{\mathcal{L}_\varepsilon} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

• **Ví dụ 14** Tính diện tích của hình elip $\mathcal{E}$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Giải

$\mathcal{E}$ có biên là đường Elip E có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$S(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}\int_E xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t.b\cos t + b\sin t.a\sin t)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abdt = ab\pi \text{ đvdt.}$$

3.6 Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

Tích phân đường $\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ dọc theo cung đường cong $\widehat{AB}$ không những phụ thuộc vào vị trí của hai điểm A, B mà còn phụ thuộc vào đường nối A và B (xem ví dụ 10). Định lý dưới đây sẽ cho thấy tích phân đường chỉ phụ thuộc vào hai mút A, B mà không phụ thuộc vào đường nối A và B.

Δ **Định lý 4.4** (Định lý 4 mệnh đề tương đương) *Giả sử các hàm $P(x,y), Q(x,y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng trên miền đơn liên $\mathcal{D}$. Khi đó 4 mệnh đề sau là tương đương*

1. *Biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm ϕ nào đó trong miền $\mathcal{D}$ ($\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ là trường bảo toàn).*

2. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *tại mọi điểm $(x,y) \in \mathcal{D}$*

3. $\oint\limits_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy = 0$, *trong đó $\mathcal{L}$ là đường cong kín bất kỳ nằm hoàn toàn trong $\mathcal{D}$.*

4. $\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ *không phụ thuộc vào dạng của đường lấy tích phân mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B của đường lấy tích phân ($\widehat{AB}$ là đường bất kỳ nằm trong $\mathcal{D}$).*

Chứng minh

($1 \Rightarrow 2$) Giả sử $Pdx + Qdy = d\phi$. Khi đó $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ là trường bảo toàn, theo định lý 4.1 (điều kiện cần cho trường bảo toàn) ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

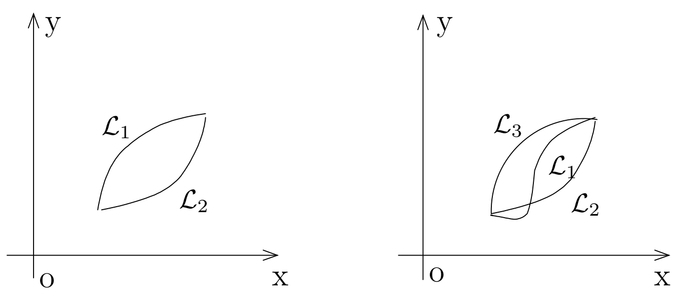
$(2 \Rightarrow 3)$ Giả sử $\mathcal{L}$ là đường cong kín bất kỳ nằm trong $\mathcal{D}$. Gọi $\mathcal{D}'$ là miền giới hạn bởi $\mathcal{L}$. Theo giả thiết ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}.$$

Áp dụng công thức Green cho miền $\mathcal{D}'$, ta có

$$\int\limits_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy = \iint\limits_{\mathcal{D}'} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy = 0.$$

$(3 \Rightarrow 4)$



H 4.10

Nối hai điểm A,B trong $\mathcal{D}$ bởi $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ không cắt nhau và nằm hoàn toàn trong $\mathcal{D}$. Theo mệnh đề 3 ta có

$$\int\limits_{A\mathcal{L}_1B} Pdx + Qdy + \int\limits_{B\mathcal{L}_2A} Pdx + Qdy = 0.$$

Suy ra

$$\int\limits_{A\mathcal{L}_1B} Pdx + Qdy = -\int\limits_{B\mathcal{L}_2A} Pdx + Qdy = \int\limits_{A\mathcal{L}_2B} Pdx + Qdy.$$

Nếu $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ cắt nhau ta nối A, B bởi $\mathcal{L}_3$ không cắt $\mathcal{L}_1$ và $\mathcal{L}_2$. Theo trên ta có

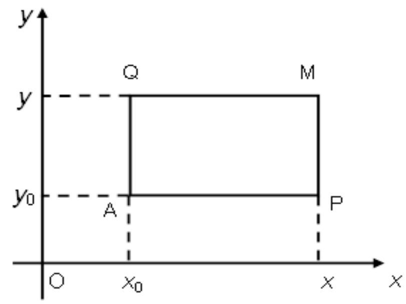
$$\int\limits_{A\mathcal{L}_1B} Pdx + Qdy = \int\limits_{A\mathcal{L}_3B} Pdx + Qdy = \int\limits_{A\mathcal{L}_2B} Pdx + Qdy.$$

(4 ⇒ 1)

Giả sử $A(x_0, y_0)$ là điểm cố định trong $\mathcal{D}$ còn $M(x, y)$ là điểm chạy trong $\mathcal{D}$. Xét hàm

$$\phi(x,y) = \int\limits_{\overset{\frown}{AM}} Pdx + Qdy + C$$

trong đó C là hằng số.



H 4.11

Vì $\int\limits_{\overset{\frown}{AM}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân nên ta có thể lấy tích phân trên đường gấp khúc APM hay AQM.

i) Nếu lấy tích phân trên APM

$$\phi(x,y) = \int\limits_{AP} Pdx + Qdy + \int\limits_{PM} Pdx + Qdy + C.$$

* Trên AP thì $y = y_0$ nên $dy = 0$

$$\int\limits_{AP} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx.$$

* Trên PM thì x không đổi nên $dx = 0$

$$\int\limits_{PM} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy.$$

Do đó

$$\boxed{\phi(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C} \tag{4.11}$$

ii) Tương tự nếu lấy tích phân trên AQM thì ta được

$$\boxed{\phi(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C} \tag{4.12}$$

Từ (4.11) suy ra $\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q(x,y)$.

Từ (4.12) suy ra $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x,y)$.

Vì P và Q liên tục nên ϕ khả vi và có

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} = Pdx + Qdy. \qquad \square$$

⊙ **Chú ý**

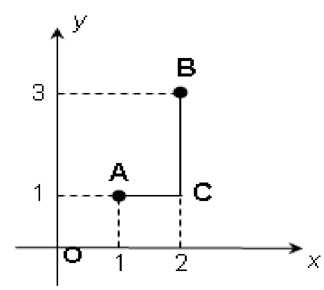
1. Nếu $d\phi = Pdx + Qdy$ thì theo định lý 4 mệnh đề tương đương tích phân đường $\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc vào A, B nên ta có thể kí hiệu
$$\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} Pdx + Qdy$$
và có
$$\begin{aligned}\int\limits_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= \int\limits_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} d\phi(x,y)\\ &= \phi(x_B,y_B) - \phi(x_A,y_A).\end{aligned}$$
Hàm $\phi(x,y)$ xác định bởi (4.11) hoặc (4.12).

2. Nếu $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$ là trường vectơ thỏa $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ thì theo định lý 4.4 tồn tại hàm ϕ sao cho $d\phi = F_xdx + F_ydy$ hay $\vec{F} = \nabla\phi$. Vậy
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} \text{ \textit{là trường bảo toàn} } \Longleftrightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

• **Ví dụ 15** Tính $I = \int\limits_{(1,1)}^{(2,3)} (x+3y)dx + (3x+y)dy$.

Giải

Đặt $P(x,y) = x + 3y$, $Q(x,y) = 3x + y$. Ta có
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 3.$$
Do đó tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân. Ta lấy tích phân trên đoạn gấp khúc ACB.



H 4.12

Trên AC thì $y = 1$, $dy = 0$, $1 \le x \le 2$; trên CB thì $x = 2$, $dx = 0$, $1 \le y \le 3$. Do đó
$$I = \int_1^2 (x+3)dx + \int_1^3 (y+6)dy$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{y^2}{2} + 6y\right)\Big|_1^3 = \frac{41}{2}.$$

• **Ví dụ 16** Tìm $\phi(x,y)$, nếu $D\phi = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x^2}{y}\right)dy$.

Giải

Ddặt $P(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ và $Q(x,y) = \frac{2}{y} - \frac{x^2}{y}$. Ta có $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$.

Ta không thể chọn $(x_0, y_0) = (0,0)$ vì các hàm P và Q không xác định tại đây. Vì vậy ta chọn $(x_0, y_0) = (1,1)$. Theo chứng minh trọng định lí 4 mệnh đề tương, sử dụng công thức

$$\phi(x,y) = \int_1^x P(x,1)dx + \int_1^y Q(x,y)dy$$

ta có

$$\phi(x,y) = \int_1^x \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \int_1^y \left(\frac{2}{y} - \frac{x^2}{y}\right)dy.$$

$$= \ln x + 2\ln y + \frac{x}{y} - 1 + C = \ln xy^2 + \frac{x}{y} + C.$$

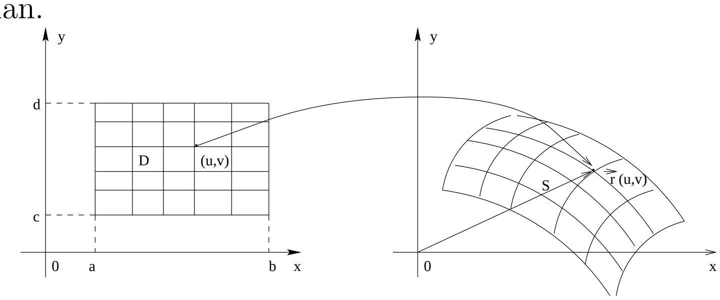
4. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 1

4.1 Mặt được tham số hóa

□ **Định nghĩa 8** Mặt được tham số hóa là mặt mà mỗi điểm của nó xác định bởi vectơ vị trí

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}, \quad (u,v) \in \mathcal{D}$$

trong đó $\vec{r}(u,v)$ là hàm vectơ $1-1$, liên tục xác định trên hình chữ nhật $\mathcal{D}$ cho bởi $a \le u \le b$, $c \le v \le d$ trong mặt phẳng uv và có giá trị trong không gian.



H 4.13

□ **Định nghĩa 9** Một mặt cong $\mathcal{S}$ được gọi là mặt trơn nếu nó liên tục và có vectơ pháp tuyến biến thiên liên tục.

⊙ **Chú ý** Miền biến thiên của hàm $\vec{r}(u,v)$ là tập hợp $\mathcal{S}$ của những điểm (x,y,z) trong không gian mà vectơ vị trí của nó là $\vec{r}(u,v)$ với $(u,v) \in \mathcal{D}$.

Đòi hỏi $\vec{r}$ phải là ánh xạ $1-1$ để đảm bảo mặt không tự cắt và $\vec{r}$ ánh xạ biên của hình chữ nhật $\mathcal{D}$ thành đường cong trong không gian là biên của mặt được tham số hóa.

Đòi hỏi $\mathcal{D}$ là hình chữ nhật chỉ làm đơn giản hóa việc định nghĩa. Trường hợp tổng quát $\mathcal{D}$ có thể là một tập bị chặn, đóng, liên thông, có diện tích xác định. Từ đây về sau ta có thể xét mặt được tham số hóa trên hình tròn đóng, trên hình chữ nhật hoặc các miền khác bao gồm những dạng như vậy.

Mặt được tham số hóa là miền biến thiên của hàm xác định trên một tập đóng và bị chặn nên nó luôn bị chặn trong không gian.

• **Ví dụ 17** `(Biểu diễn tham số của mặt trụ)`

Mặt trụ $x^2+y^2=a^2$, $(-1 \le z \le 1)$ có bán kính a, độ cao $h=2$ và trục là trục Oz. Một biểu diễn tham số của nó là

$$\vec{r}(u,v) = a\cos u\vec{i} + a\sin u\vec{j} + v\vec{k},$$

với u, v biến thiên trong hình chữ nhật $\mathcal{D} : \{0 \le u \le 2\pi, -1 \le v \le 1\}$.

• **Ví dụ 18** `(Biểu diễn tham số của mặt cầu)`

Mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$ có thể biểu diễn tham số dạng

$$\vec{r}(u,v) = a\cos v\cos u\vec{i} + a\cos v\sin u\vec{j} + a\sin v\vec{k},$$

với u, v biến thiên trong hình chữ nhật $\mathcal{D} : \{0 \le u \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}\}$.

• **Ví dụ 19** `(Biểu diễn tham số của mặt nón)`

Mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(0 \le z \le h)$ được biểu diễn tham số dạng

$$\vec{r}(u,v) = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + u\vec{k},$$

với u, v biến thiên trong hình chữ nhật $\mathcal{D} : \{0 \le u \le h, 0 \le v \le 2\pi\}$.

4.2 Định nghĩa tích phân mặt loại 1

Cho mặt $\mathcal{S}$ có diện tích và hàm $f(x,y,z)$ xác định trên $\mathcal{S}$. Chia $\mathcal{S}$ thành n mảnh nhỏ không dẫm lên nhau có tên và diện tích gọi chung là $\triangle s_1, \triangle s_2, \ldots, \triangle s_n$. Trong mỗi mảnh $\triangle s_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$ lấy tùy ý điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ và lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\triangle s_i.$$

Gọi d_i là đường kính của mảnh $\triangle s_i$

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ mà tồn tại $I = \lim\limits_{\max d_i \to 0} I_n$ không phụ thuộc vào cách chia mặt $\mathcal{S}$ và cách chọn điểm M_i trên mảnh nhỏ $\triangle s_i$ thì giới hạn được gọi là tích phân mặt loại một của hàm $f(x, y, z)$ trên mặt $\mathcal{S}$ và được kí hiệu là

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS$$

dS là phần tử diện tích mặt .

⊕ **Nhận xét**

1. Tích phân mặt loại một có các tính chất tương tự như tích phân hai lớp.

2. Dựa vào định nghĩa, ta có diện tích của mặt $\mathcal{S}$ là

$$\boxed{S = \iint\limits_{\mathcal{S}} dS}$$

Δ **Định lý 4.5** *Nếu mặt $\mathcal{S}$ trơn (liên tục và có pháp tuyến biến thiên liên tục) và nếu hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên mặt $\mathcal{S}$ thì tồn tại $\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x, y, z)dS$.*

4.3 Vectơ pháp tuyến và phần tử diện tích

Giả sử mặt $\mathcal{S}$ được tham số hóa $\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in \mathcal{D}$.

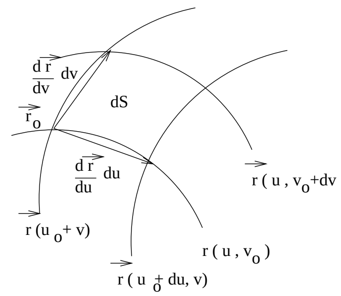
Nếu (u_0, v_0) là điểm trong $\mathcal{D}$ thì $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ và $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ là hai đường cong trên $\mathcal{S}$ chúng cắt nhau tại $\vec{r_0} = \vec{r}(u_0, v_0)$, tại điểm này chúng có các vectơ tiếp tuyến

$$\left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|_{(u_o, v_o)} \quad \text{và} \quad \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|_{(u_0, v_0)}.$$

Giả sử hai vectơ tiếp tuyến này không song song. Khi đó tích có hướng của chúng $\vec{n}$ là pháp vectơ của $\mathcal{S}$ tại $\vec{r}$.

Ngoài ra phần tử diện tích S bị chặn bởi bốn đường cong

$$\vec{r} = \vec{r}(u_0, v),\ \vec{r} = \vec{r}(u_0 + du, v),$$
$$\vec{r} = \vec{r}(u, v_0),\ \vec{r} = \vec{r}(u, v_0 + dv)$$



H3 4.14

xấp xỉ với hình bình hành tạo nên bởi các vectơ $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$ và $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$ tại (u_0, v_0). Do đó

$$dS = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| dudv.$$

Vì

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$$

nên pháp vectơ của $\mathcal{S}$ tại $\vec{r}(u, v)$ là

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k} \quad (4.13)$$

$$\left(\text{với} \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Vì vậy phần tử diện tích tại điểm $\vec{r}(u, v)$ của mặt $\mathcal{S}$ được cho bởi

$$\boxed{dS = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| dudv = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, dudv} \quad (4.14)$$

4.4 Cách tính tích phân mặt loại 1

Xét tích phân $I = \iint\limits_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS$.

Giả sử $\mathcal{S}$ là mặt trơn được tham số hóa dạng

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}, \quad (u,v) \in \mathcal{D}$$

và hàm $f(x,y,z)$ liên tục trên mặt $\mathcal{S}$.

Tích phân mặt của $f(x,y,z)$ trên mặt $\mathcal{S}$ có thể biểu diễn qua tích phân hai lớp trên miền tham số $\mathcal{D}$ như sau

$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(\vec{r}(u,v)) \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| dudv}$$

Đặc biệt, nếu $\mathcal{S}$ có phương trình $z = g(x,y)$ với $g(x,y)$ đơn trị, liên tục cùng với các đạo hàm riêng trên miền $\mathcal{D}$ thì $\mathcal{S}$ có thể tham số hóa dưới dạng

$$x = u,\ y = v,\ z = g(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}.$$

Trường hợp này

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = -g'_u(u,v),\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = -g'_v(u,v),\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

và miền tham số hóa đồng nhất với miền $\mathcal{D}$. Do đó ta có

$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y,g(x,y))\sqrt{1 + (g'_x(x,y))^2 + (g'_y(x,y))^2}dxdy}$$

trong đó $\mathcal{D}$ là hình chiếu của $\mathcal{S}$ xuống mặt phẳng Oxy.

• **Ví dụ 20** Tính $\iint\limits_{\mathcal{S}} zdS$, trong đó $\mathcal{S}$ là phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ dưới mặt phẳng $z = 1$.

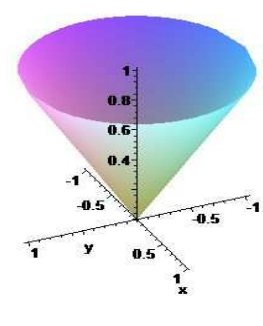
Giải

Ta có

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

nên

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy$$
$$= \sqrt{2}dxdy.$$



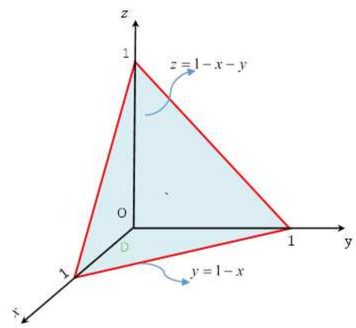
H 4.15

Do đó

$$I = \sqrt{2}\int\int_{\{x^2+y^2\le 1\}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2dr = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

• **Ví dụ 21** Tính $I = \iint\limits_{\mathcal{S}} (2x+y+z)dS$, trong đó $\mathcal{S}$ là phần của mặt phẳng $x+y+z=1$ nằm trong gốc phần tám thứ nhất.

Giải



H 4.16

Ta có

$$\mathcal{D}: \left\{ \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{array} \right\}$$

Vì $z'_x = z'_y = -1$ nên

$$dS = \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy = \sqrt{3}dxdy.$$

Do đó

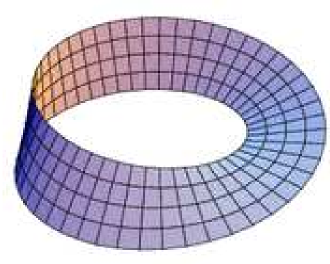
$$I = \iint\limits_{\mathcal{D}} (x+1)\sqrt{3}dxdy = \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+1)dy$$
$$= \sqrt{3}\int_0^1 (1-x^2)dx = \sqrt{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 2

5.1 Mặt định hướng

Một mặt trơn $\mathcal{S}$ trong không gian được gọi là mặt định hướng (mặt hai phía) nếu tồn tại một trường vectơ đơn vị $\hat{N}(P)$ xác định trên $\mathcal{S}$, vuông góc với $\mathcal{S}$ tại P và biến thiên liên tục khi P chạy khắp trong $\mathcal{S}$. Trường vectơ $\hat{N}(P)$ như vậy xác định một hướng của $\mathcal{S}$.

Mặt định hướng phải có hai phía bởi vì $\hat{N}(P)$ chỉ có duy nhất một hướng tại mỗi điểm P. *Phía ứng với hướng của $\hat{N}(P)$ được gọi là phía của mặt $\mathcal{S}$.*


H 4.17 Lá Möbius.

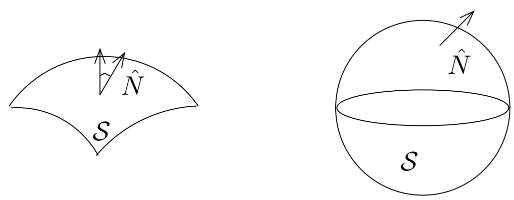
Có những mặt không thể định hướng. Ví dụ lá Möbius

⊙ **Chú ý**

i) Nếu $\mathcal{S}$ là mặt định hướng không kín và mọi đường thẳng song song với trục Oz cắt nó không quá một điểm ($\mathcal{S}$ là mặt đơn giản) thì nó có phía trên và phía dưới.

ii) Phía trên của $\mathcal{S}$ là phía mà $\hat{N}$ hướng lên trên ($\cos\alpha = \cos(\vec{Oz}, \hat{N}) > 0$ hay α là góc nhọn). Phía dưới của $\mathcal{S}$ là phía mà $\hat{N}$ hướng xuống dưới.

iii) Nếu $\mathcal{S}$ là mặt định hướng kín thì nó có phía trong và phía ngoài. Phía trong (ngoài) của $\mathcal{S}$ là phía mà $\hat{N}$ hướng vô trong (ra ngoài) $\mathcal{S}$.



H 4.18 Mặt hai phía

5.2 Bài toán tìm thông lượng của trường vectơ qua một mặt

Cho $\mathcal{S}$ là mặt định hướng xác định bởi trường vectơ đơn vị $\hat{N}$. Giả sử

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

là một trường vectơ xác định trên $\mathcal{S}$ với $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ là các hàm liên tục.

Hãy xác định thông lượng ϕ của trường $\vec{F}$ qua mặt $\mathcal{S}$.

Giải

Ta chia mặt $\mathcal{S}$ thành n mảnh nhỏ không dẫm lên nhau có tên và diện tích gọi chung là $\triangle S_1, \triangle S_2, \ldots, \triangle S_n$. Nếu mảnh $\triangle S_i$ khá bé ta có thể coi nó xấp xỉ với một mảnh phẳng và $\vec{F}$ không đổi trên mảnh này và bằng $\vec{F}(M_i)$ với $M_i(x_i, y_i, z_i)$ là điểm tùy ý trên mảnh nhỏ $\triangle S_i$. Do đó thông lượng $\triangle\phi$ qua mặt $\triangle S_i$ xấp xỉ bằng

$$\triangle\phi \approx \triangle S_i.|\vec{F}(M_i)|\cos(\hat{N}(M_i), \vec{F}(M_i)) = \vec{F}(M_i).\hat{N}(M_i).\triangle S_i.$$

Nếu các mảnh $\triangle S_i$ đều khá nhỏ thì

$$\phi \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x_i, y_i, z_i).\hat{N}(x_i, y_i, z_i).\triangle S_i \tag{4.15}$$

Phép tính càng chính xác nếu n càng lớn và các mảnh $\triangle S_i$ càng nhỏ.

Gọi $d(\triangle S_i)$ là đường kính của mảnh $\triangle S_i$. Cho $n \to \infty$ sao cho $\max d(\triangle S_i) \to 0$ thì ta được thông lượng của trường $\vec{F}$ qua mặt $\mathcal{S}$ là

$$\phi = \lim_{\max d(\triangle S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x_i, y_i, z_i).\hat{N}(x_i, y_i, z_i)\triangle S_i.$$

Kí hiệu

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}.\hat{N} dS \tag{4.16}$$

$\oplus$ **Nhận xét** Giả sử $\hat{N}(M_i) = \cos\alpha_i\vec{i} + \cos\beta_i\vec{j} + \cos\gamma_i\vec{k}$. Từ (4.15) ta có

$$\phi \approx \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\cos\alpha_i\triangle S_i + Q(x_i, y_i, z_i)\cos\beta_i\triangle S_i + R(x_i, y_i, z_i)\cos\gamma_i\triangle S_i \tag{4.17}$$

Ta thấy $\triangle S_i(\cos\gamma_i) = (\triangle\sigma_i)_{xy}$, $\triangle S_i(\cos\alpha_i) = (\triangle\sigma_i)_{yz}$, $\triangle S_i(\cos\beta_i) = (\triangle\sigma_i)_{zx}$, tương ứng là hình chiếu của $\triangle S_i$ trên mặt phẳng Oxy, Oyz, Ozx. Do đó

$$\phi \approx \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i, z_i)(\triangle\sigma_i)_{yz} + Q(x_i, y_i, z_i)(\triangle\sigma_i)_{zx} + R(x_i, y_i, z_i)(\triangle\sigma_i)_{xy}]. \tag{4.18}$$

5.3 Định nghĩa tích phân mặt loại 2

$\square$ **Định nghĩa 10** Giới hạn ở vế phải của (4.18) (hay (4.15)) khi $\max d(\triangle s_i) \to 0$ được gọi là tích phân mặt loại hai của ba hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ trên mặt định hướng $\mathcal{S}$ và được kí hiệu là

$$\iint_{\mathcal{S}} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy.$$

$\triangle$ **Định lý 4.6** *Nếu $\mathcal{S}$ là mặt định hướng liên tục và nếu các hàm P, Q, R liên tục trên mặt $\mathcal{S}$ thì tồn tại tích phân*

$$\iint_{\mathcal{S}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

⊕ **Nhận xét** Dựa vào định nghĩa của tích phân mặt loại hai, ta có thông lượng của trường vectơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ qua mặt định hướng $\mathcal{S}$ là

$$\phi = \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{F}.\hat{N}dS = \iint\limits_{\mathcal{S}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \tag{4.19}$$

5.4 Liên hệ giữa tích phân mặt loại 1 và loại 2

Nếu gọi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của pháp vectơ đơn vị $\hat{N}$ xác định mặt $\mathcal{S}$ thì theo (4.17) và (4.18) ta có

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

5.5 Cách tính tích phân mặt loại 2

Tính tích phân $I = \iint\limits_{\mathcal{S}} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$

Xét trường vectơ

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Giả sử mặt $\mathcal{S}$ được tham số hóa dạng

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}, \quad (u,v) \in \mathcal{D}.$$

Theo (4.13), (4.14) và (4.19) ta có thể tính tích phân I bằng cách đưa nó về tích phân hai lớp trên miền tham số hóa $\mathcal{D}$.

Ta có $\quad \hat{N} = \pm\dfrac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}}{|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}|} \qquad$ và $\qquad dS = \left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right| dudv$

nên

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{F}.\hat{N}dS = \pm\iint\limits_{\mathcal{D}} \vec{F}.\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right) dudv$$

hay

$$\boxed{I = \pm\iint\limits_{\mathcal{D}} \left(P(\vec{r}(u,v)).\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q(\vec{r}(u,v)).\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R(\vec{r}(u,v)).\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) dudv}$$

⊕ **Nhận xét**

i) Nếu mặt $\mathcal{S}$ có phương trình $z = z(x,y)$, $(x,y) \in \mathcal{D}$ thì $\mathcal{S}$ có thể tham số hóa dạng

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x,y)\vec{k}, \quad (x,y) \in \mathcal{D}.$$

Ta có

$$\hat{N} = \pm \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}}, \; dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Do đó $\hat{N}dS = \pm\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}\right).$

Dấu + ứng với pháp vectơ hướng lên trên.

Miền tham số hóa $\mathcal{D}$ là hình chiếu của mặt $\mathcal{S}$ xuống mặt phẳng Oxy. Trường hợp này ta có

$$\boxed{I = \pm\iint\limits_{\mathcal{D}} \Big(P(x,y,z(x,y))(-\tfrac{\partial z}{\partial x}) + Q(x,y,z(x,y))(-\tfrac{\partial z}{\partial y}) + R(x,y,z(x,y))\Big)\, dxdy} \tag{4.20}$$

ii) Ta có thể tính tích mặt loại 2 bằng cách tính tích phân của những biểu thức đơn giản trên các mặt đơn giản, sau đó tổng hợp các kết quả lại. Chẳng hạn xét tích phân

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} R(x,y,z)dxdy.$$

Giả sử mỗi đường thẳng song song với trục Oz cắt mặt $\mathcal{S}$ không quá một điểm. Khi đó phương trình của $\mathcal{S}$ có thể viết dưới dạng $z = z(x,y)$ với $z(x,y)$ là hàm đơn trị.

Gọi $\mathcal{D}_{xy}$ là hình chiếu của $\mathcal{S}$ xuống mặt phẳng Oxy.

Xét $\vec{F} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + R\vec{k}$. Theo (4.20) ta có

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{\mathcal{D}_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

Dấu + ứng với pháp vectơ đơn vị $\hat{N}$ hướng theo phía trên $\mathcal{S}$ ($\hat{N}$ làm với trục Oz một góc nhọn).

Trường hợp các đường thẳng song song với trục Oz cắt $\mathcal{S}$ nhiều hơn một điểm thì ta chia $\mathcal{S}$ thành nhiều mảnh nhỏ sao cho mỗi mảnh có tính chất nêu trên. Khi đó tích phân lấy trên $\mathcal{S}$ bằng tổng tích phân lấy trên các mảnh nhỏ.

Tương tự

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint\limits_{\mathcal{D}_{zx}} Q(x,y(z,x),z)dzdx.$$

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} P(x,y,z)dydz = \pm \iint\limits_{\mathcal{D}_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz.$$

Tổng hợp lại ta có

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}} Pdydz + \iint\limits_{\mathcal{S}} Qdzdx + \iint\limits_{\mathcal{S}} Rdxdy.$$

• **Ví dụ 22** Tính thông lượng của trường $\vec{F} = z\vec{i} + x^2\vec{k}$ qua phần mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ trên hình vuông $\mathcal{D}$: $\{-1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$ hướng theo phía trên.

Giải

Ta có $f(x,y) = x^2 + y^2$. Suy ra $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ và $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$.

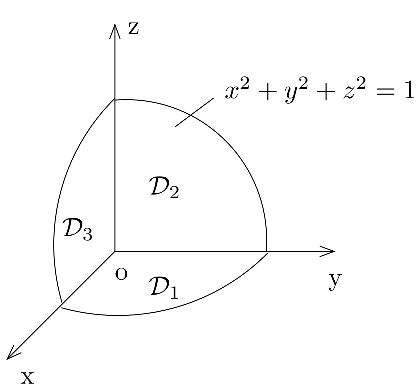
Do đó thông lượng của trường $\vec{F}$ qua mặt $\mathcal{S}$ hướng theo phía trên (mang dấu + trước $\hat{N}$) là

$$\phi = \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{F}.\hat{N}dS = \iint\limits_{\mathcal{S}} zdydz + x^2dxdy = \iint\limits_{\mathcal{D}} (-2x(x^2+y^2) + x^2)dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 - 2xy^2)dy = \int_{-1}^{1} 2x^2dx = \frac{4}{3}.$$

• **Ví dụ 23** Tính $I = \iint\limits_{S} xdydz + dzdx + xz^2dxdy$, trong đó $\mathcal{S}$ là mặt ngoài của phần tám mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ với $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Giải



H 4.19

* Xét $I_1 = \iint\limits_{\mathcal{S}} xz^2dxdy$.

Xem $\mathcal{S}$ có phương trình $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ta thấy phía ngoài của hình cầu ứng với phía trên của $\mathcal{S}$.

Gọi $\mathcal{D}_1$ là hình chiếu của $\mathcal{S}$ xuống mặt phẳng Oxy thì

$$\mathcal{D}_1 : \{\, x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \,\}$$

$$I_1 = \iint\limits_{\mathcal{D}_1} x(1 - x^2 - y^2)dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực bằng cách đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ thì

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)r^2 \cos\varphi dr = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi. \int_0^1 (r^2 - r^4)dr$$
$$= \sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} . \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

* Xét $I_2 = \iint\limits_{\mathcal{S}} xdydz.$

Trường hợp này xem $\mathcal{S}$ có phương trình $x = \sqrt{1-y^2-z^2}$. Ta thấy phía ngoài của hình cầu làphía trên của $\mathcal{S}$. Gọi $\mathcal{D}_2$ là hình chiếu của $\mathcal{S}$ xuống mặt phẳng Oyz thì $\mathcal{D}_2 : \{\, y^2+z^2 \le 1,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \,\}$. Khi đó

$$I_2 = \iint\limits_{\mathcal{D}_2} \sqrt{1-y^2-z^2}dydz.$$

Chuyển sang tọa độ cực thì

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-r^2)^{1/2} d(1-r^2) = \frac{\pi}{6}\,(1-r^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

* Xét $I_3 = \iint\limits_{\mathcal{S}} dxdz.$

Trong trường hợp này mặt ngoài của mặt cầu là mặt trên của $\mathcal{S}$. Gọi $\mathcal{D}_3$ là hình chiếu của $\mathcal{S}$ xuống mặt phẳng Ozx thì

$$\mathcal{D}_3 : \{\, x^2+z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ z \ge 0 \,\}.$$
$$I_3 = \iint\limits_{\mathcal{D}_3} dxdz = S(\mathcal{D}_3) = \frac{1}{4}.\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Vậy $I = I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{2}{15} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2}{15} + \dfrac{5\pi}{12}.$

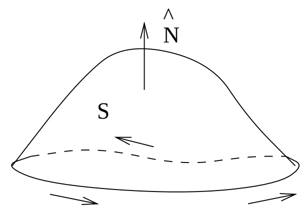
5.6 Công thức Stokes

Ở (3.6) ta đã nghiên cứu công thức Green, nó cho ta thấy mối liên hệ giữa tích phân đường loại hai và tích phân hai lớp. Công thức Stokes dưới đây là sự mở rộng của công thức Green, nó cho ta mối quan hệ giữa tích phân đường loại 2 và tích phân mặt loại 2. Ta sẽ chứng minh công thức Stokes ở chương sau.

Δ **Định lý 4.7** *Nếu các hàm $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng trên mặt $\mathcal{S}$ thì*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$
$$= \int\limits_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy + Rdz$$

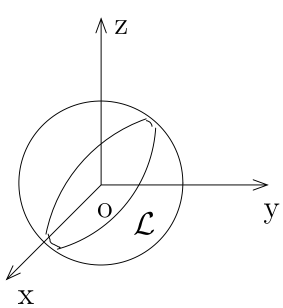
trong đó $\mathcal{L}$ là biên của mặt $\mathcal{S}$, tích phân mặt lấy theo phía trên của $\mathcal{S}$ còn tích phân đường lấy theo chiều dương tương ứng (theo qui tắc vặn nút chai).



H 4.20

• **Ví dụ 24** Tính $I = \oint\limits_{\mathcal{L}} ydx + zdy + xdz$, với $\mathcal{L}$ là giao tuyến của hai mặt $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, chiều trên $\mathcal{L}$ là ngược chiều kim đồng hồ nhìn về phía $z > 0$.

Giải



H 4.21

Mặt phẳng $x + y + z = 0$ qua gốc O nên $\mathcal{L}$ là đường tròn lớn của mặt cầu.

Áp dụng công thức Stokes với $\mathcal{S}$ là mặt phẳng $x + y + z = 0$ giới hạn bởi $\mathcal{L}$, hướng về phía $z > 0$. Ta có

$$P = y \implies P'_z = 0,\ P'_y = 1;$$
$$Q = z \implies Q'_x = 0,\ Q'_z = 1;$$
$$R = x \implies R'_y = 0,\ R'_x = 1.$$

Theo công thức Stokes ta được

$$I = -\iint\limits_{\mathcal{S}} dydz + dzdx + dxdy.$$

Chuyển sang tích phân mặt loại một, ta có $z = -x - y$ nên vectơ pháp tuyến $\hat{N}$ có các cosin chỉ phương là $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\hat{N}$ hướng lên phía trên của $\mathcal{S}$ (làm với Oz một góc nhọn), do đó

$$I = -\sqrt{3}\iint_{\mathcal{S}} dS = -\pi a^2\sqrt{3} \quad (\mathcal{S} \text{ là mặt tròn bán kính } a).$$

5.7 Công thức Gauss−Ostrogradski

Công thức Gauss−Ostrogradski dưới đây cho ta mối quan hệ giữa tích phân ba lớp và tích phân mặt loại hai. Ta sẽ chứng minh công thức này ở chương sau.

△ **Định lý 4.8** *Nếu các hàm $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong miền $\mathcal{V}$ thì*

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_{\mathcal{S}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \quad (4.21)$$

trong đó $\mathcal{S}$ là biên miền $\mathcal{V}$ và tích phân mặt lấy theo mặt ngoài của $\mathcal{S}$.

• **Ví dụ 25** Dùng công thức Gauss−Ostrogradski tính

$$\iint_{\mathcal{S}} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$$

trong đó $\mathcal{S}$ là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Giải

Gọi $\mathcal{V}$ là hình cầu giới hạn bởi $\mathcal{S}$ và $P = x^3$, $Q = y^3$, $R = z^3$.

Ta có $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$.

Áp dụng công thức Gauss−Ostrogradski ta có

$$I = 3\iiint_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz \ \text{ với } \mathcal{V} : \{x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}.$$

Chuyển sang tọa độ cầu ta được

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{a} r^4 dr = 3.2\pi \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} . \left.\frac{12}{5}\right|_0^{a} = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

⊕ **Nhận xét** Nếu chọn $P = x$, $Q = y$, $R = z$ thì $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = 1$.

Khi đó (4.21) có dạng

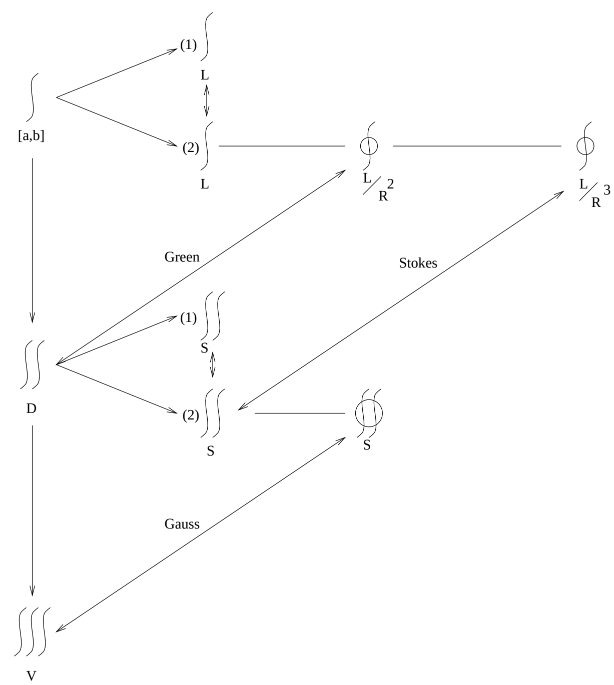
$$3\iiint_{\mathcal{V}} dxdydz = \iint_{\mathcal{S}} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

Ta thấy vế trái bằng 3 lần thể tích của miền $\mathcal{V}$. Vậy ta có công thức tính thể tích của miền $\mathcal{V}$ như sau

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\iint\limits_{\mathcal{S}} xdydz + ydzdx + zdxdy}$$

6. SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA CÁC LOẠI TÍCH PHÂN

Trong phần này ta hệ thống lại tất cả các loại tích phân đã nghiên cứu và đưa ra các quan hệ giữa chúng trong sơ đồ dưới đây:



(1), (2) tương ứng là các tích phân loại 1, loại 2

7. BÀI TẬP

1. Tìm đường cong tích phân của các trường vectơ sau

   (a) $\vec{F} = y.\vec{i} + x.\vec{j}$

   (b) $\vec{F} = xz.\vec{i} + yz.\vec{j} + x.\vec{k}$

2. Chứng minh các trường vectơ sau là trường bảo toàn và tìm hàm thế vị của nó

   (a) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$

   (b) $\vec{f}(x, y, z) = (2xy - z^2)\vec{i} + (2yz + x^2)\vec{j} - (2xz - y^2)\vec{k}$

3. Chứng minh trường vectơ $\vec{F}(x, y, z) = \dfrac{2x}{z}\vec{i} + \dfrac{2y}{z}\vec{j} - \dfrac{x^2 + y^2}{z^2}\vec{k}$ là trường bảo toàn. Tìm hàm thế vị, đường cong tích phân và các mặt thế của nó.

4. Tính $\int\limits_{\mathcal{L}} xyds$, trong đó $\mathcal{L}$ là biên của hình chữ nhật với các đỉnh $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(4, 2)$, $C(0, 2)$.

5. Tính

   (a) $\int\limits_{\mathcal{L}} (x^{4/3} + y^{4/3})ds$, trong đó $\mathcal{L}$ là cung đường Astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

   (b) Tính $\int\limits_{\mathcal{L}} xyds$, trong đó $\mathcal{L}$ là elip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

   (c) Tính $\int\limits_{\mathcal{L}} (x-y)ds$, trong đó $\mathcal{L}$ là nửa đường tròn $y = \sqrt{ax - x^2}$.

   (d) Tính $\int\limits_{\mathcal{L}} x^2 ds$ dọc theo đường cong là giao của hai mặt phẳng $x - y + z = 0$ và $x + y + 2z = 0$ từ gốc đến điểm $(3, 1, -2)$.

6. (a) Tìm khối lượng và tâm của dây có dạng đường đinh ốc

   $$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

   nếu khối lượng riêng tại điểm bất kỳ là $\delta(x, y, z) = z$.

   (b) Tính khối lượng của dây $y = \dfrac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$; $\quad (0 \leq x \leq a)$, biết khối lượng riêng tại điểm (x, y) là $\delta(x, y) = \dfrac{1}{y}$.

7. Tính

   (a) $\int\limits_{\mathcal{P}} xydx - x^2dy$ dọc theo parabol $\mathcal{P}: y = x^2$ từ $(0,0)$ đến $(1,1)$;

   (b) $\oint\limits_{ABCDA} \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$, với ABCDA là chu vi của hình vuông với các đỉnh
   $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$;

   (c) $\int\limits_{\mathcal{L}} 2(x^2+y^2)dx + x(4y+3)dy$ trong đó $\mathcal{L}$ là đường gấp khúc OAB với O(0,0), A(1,1), B(2,0).

8. Tính $\int\limits_{\mathcal{L}} (2a-y)dx - (a-y)dy$
   $\mathcal{L}$ là nhịp đầu của xycloid
   $$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$
   từ điểm $O(0,0)$ đến điểm $A(2\pi a, 0)$.

9. Tìm công sản sinh bởi lực
   $$\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (z-y)\vec{k}$$
   di chuyển một vật từ điểm $A(1,0,-1)$ đến điểm $B(0,-2,3)$ dọc theo đường thẳng AB.

10. Cho $I = \oint\limits_{L} (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy$,
    với $\mathcal{L}$ là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$

    (a) Tính trực tiếp I.

    (b) Tính I theo công thức Green.

11. $I = \int\limits_{AmO} (e^x \sin y - ky)dx + (e^x \cos y - k)dy$, trong đó AmO là nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = ax$ chạy từ $A(a,0)$ đến $O(0,0)$.

12. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi

    (a) Đường hình sao: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

    (b) $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $x = 2$.

13. Tính

    (a) $I = \int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx$

    (b) $I = \int\limits_{(1,1)}^{(3,1)} \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$ (lấy theo đường không cắt đường $y = -x$).

14. Tính

    (a) $\iint\limits_{\mathcal{S}} xdS$ trên phần của mặt trụ parabolic $z = \frac{x^2}{2}$ nằm trong góc phần tám thứ nhất của mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

    (b) $\iint\limits_{\mathcal{S}} xzdS$, với $\mathcal{S}$ là phần của mặt $z = x^2$ nằm trong góc phần tám thứ nhất và phía trong paraboloid $z = 1 - 3x^2 - y^2$.

    (c) $\iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2+y^2)dS$, với $\mathcal{S}$ là nửa trên của mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = R^2$.

    (d) $\iint\limits_{\mathcal{S}} (z + 2x + \frac{4}{3}y)dS$, với $\mathcal{S}$ là phần mặt phẳng $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

15. Tính

    (a) $\iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2+y^2)dxdy$, với $\mathcal{S}$ là mặt dưới của mặt tròn $\{x^2+y^2 \leq R^2,\ z = 0\}$

    (b) $\iint\limits_{\mathcal{S}} xdydz + ydzdx + zdxdy$ với $\mathcal{S}$ là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(c) $\iint\limits_{\mathcal{S}} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$, với $\mathcal{S}$ là phía ngoài của mặt nón $z^2 = x^2 + y^2 \;\; (0 \le z \le h)$.

16. Tìm thông lượng của trường $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua phần mặt $z = a - x^2 - y^2$ nằm trên mặt phẳng $z = b\,(b < a)$ hướng theo phía trên.

17. Tính

(a) $\iint\limits_{\mathcal{S}} (y+y^2)dzdx + zdxdy$, với $\mathcal{S}$ là phía ngoài của vật thể giới hạn bởi $z = x^2 + y^2, z = 1$.

(b) $\iint\limits_{\mathcal{S}} xydydz + zydzdx + xzdxdy$, với $\mathcal{S}$ là mặt ngoài của hình chóp $\mathcal{V} : \{\, x = 0,\, y = 0,\, z = 0,\, x + y + z = 1 \,\}$.

18. Tính $\oint\limits_{\mathcal{L}} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, trong đó $\mathcal{L}$ là đường tròn giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ với mặt phẳng $x + y + z = 0$ lấy ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ hướng dương của trục Oz.

19. Tính $\oint\limits_{\mathcal{L}} x^2y^3dx + dy + zdz$,
trong đó $\mathcal{L}$ là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2,\; z = 0$.

20. Tính $\oint\limits_{\mathcal{L}} y^2dx + z^2dy + x^2dz$, trong đó $\mathcal{L}$ là chu tuyến $\triangle ABC$ với $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$ lấy ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ hướng dương của trục Oz.

Chương 5

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

Phương trình vi phân phát sinh từ nhiều bài toán trong các nghành khoa học khác nhau có mô hình toán học chung là tìm một hàm từ một quan hệ chứa các đạo hàm của nó.

Nếu dân số (người, súc vật, vi khuẩn) phát triển với tốc độ $y' = \frac{dy}{dt}$ (t là thời gian) tỷ lệ với dân số $y(t)$ hiện tại thì ta có mô hình dân số cho bởi phương trình vi phân $y'(t) = k.y(t)$.

Một ví dụ khác, xét định luật hai Newton của chuyển động. Vị trí $x(t)$ tại thời điểm t của một vật có khối lượng không đổi m chịu ảnh hưởng bởi lực $\vec{F}(t)$ thỏa mãn $m\frac{d^2x}{dt} = F(t)$ là một phương trình vi phân.

□ **Định nghĩa 1** Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập, hàm phải tìm và các đạo hàm của nó.

Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong phương trình đó.

Nghiệm của phương trình vi phân là hàm thay vào thỏa phương trình.

Nếu hàm phải tìm là một biến thì ta có phương trình vi phân thường. Nếu hàm phải tìm là nhiều biến thì ta có phương trình đạo hàm riêng.

Trong giáo trình này ta chủ yếu xét phương trình vi phân thường và gọi tắt là phương trình vi phân.

• **Ví dụ 1**

1. $y \sin x + y' \cos x = 0$ là phương trình vi phân thường cấp một.
2. $y'' - 2y = e^x - x$ là phương trình vi phân thường cấp hai.
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ là phương trình đạo hàm riêng cấp hai.

2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

2.1 Các khái niệm cơ bản

□ **Định nghĩa 2** Phương trình vi phân cấp một là phương trình có dạng

$$F(x, y, y') = 0 \tag{5.1}$$

hay $\quad y' = f(x, y) \qquad$ (phương trình được giải ra đối với y') $\qquad$ (5.2)

trong đó x là biến độc lập, y là hàm phải tìm.

△ **Định lý 5.1 (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm)** *Cho phương trình (5.2):*

$$y' = f(x, y).$$

Giả sử các hàm $f(x, y), f'_y(x, y)$ liên tục trên hình chữ nhật $\mathcal{D}$ $(a \le x \le b,\ c \le y \le d)$ và (x_0, y_0) là điểm trong của $\mathcal{D}$.

Khi đó tồn tại nghiệm duy nhất $y(x)$ của (5.2) xác định và liên tục trong khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$ nào đó) sao cho $y_0 = y(x_0)$.

□ **Định nghĩa 3 (Nghiệm của phương trình vi phân (5.2))**

Nghiệm của phương trình vi phân (5.2) là hàm $y = y(x)$ thay vào thỏa (5.2).

Nghiệm tổng quát của (5.2) là hàm $y = \varphi(x, C)$ thỏa (5.2) với mọi hằng số C.

Nghiệm riêng của (5.2) là nghiệm duy nhất $y = \varphi(x, C_0)$ thỏa mản điều kiện ban đầu $y_0 = y(x_0)$. Nghiệm riêng có thể thu được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho $C = C_0$. Bài toán tìm nghiệm riêng được gọi là bài toán Cauchy.

Nếu nghiệm tổng quát được tìm dưới dạng ẩn $\phi(x, y, C) = 0\,(*)$ thì $(*)$ được gọi là tích phân tổng quát.

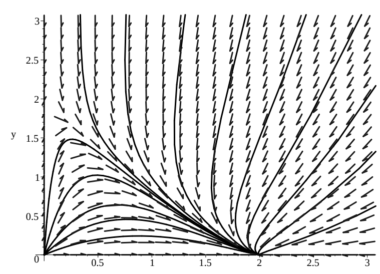
Từ $(*)$ cho $C = C_0$ thì ta được tích phân riêng $\phi(x, y, C_0) = 0$.

⊙ **Chú ý** Đôi khi phương trình vi phân có một nghiệm thêm vào nhưng nó không được nhận từ nghiệm tổng quát, nghiệm này được gọi là *nghiệm kỳ dị* của phương trình vi phân.

Ví dụ phương trình $y'^2 - xy' - y = 0$ có nghiệm tổng quát $y = Cx - C^2$. Bằng cách thử trực tiếp ta thấy $y = \frac{x^2}{4}$ cũng là nghiệm của phương trình, nghiệm này là nghiệm kỳ dị vì ta không thể nhận được nó từ $y = Cx - C^2$ bằng cách chọn C thích hợp.

⊙ **Ý nghĩa hình học của phương trình vi phân**

Tích phân tổng quát của một phương trình vi phân cấp một xác định một họ đường cong trong mặt phẳng tọa độ phụ thuộc vào hằng số tùy ý C, ta gọi các đường cong này là *các đường cong tích phân* của phương trình vi phân.



H 5.1 Các đường cong tích phân.

2.2 Tích phân các phương trình vi phân

2.2.1 Phương trình có biến phân ly (tách biến)

□ **Định nghĩa 4** Phương trình có biến phân ly là phương trình có dạng

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \tag{5.3}$$

⊙ Cách giải

Từ (5.3) ta có $M(x)dx = -N(y)dy$.

Tích phân hai vế ta được $\int M(x)dx = -\int N(y)dy + C$.

Vậy tích phân tổng quát của (5.3) là

$$\boxed{\int M(x)dx + \int N(y)dy = C}$$

⊕ **Nhận xét** Xét phương trình

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \tag{5.4}$$

Nếu $M_2(x).N_2(y) \neq 0$ thì từ (5.4) ta có

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Khi đó tích phân tổng quát của (5.4) là

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Nếu $M_2(x) = 0$ tại $x = a$ thì ta thấy $x = a$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $N_2(y) = 0$ tại $y = b$ thì ta thấy $y = b$ là nghiệm của phương trình.

• **Ví dụ 2** Giải phương trình vi phân sau

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0.$$

GIẢI

* Nếu $x \neq \pm 1$ và $y \neq \pm 1$ thì phương trình có thể viết lại dưới dạng (5.3)

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0.$$

Tích phân hai vế

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = C$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx + -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}}dy = C$$

$$-\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = C.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C.$$

* Ta thấy $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ là nghiệm của phương trình.

■ Định luật Newton của quá trình làm nguội

Đặt một vật được đun nóng vào một môi trường có nhệt độ T_m. Gọi $T(t)$ là nhiệt độ của vật ở thời điểm t. Khi đó tốc độ nguội của vật tỷ lệ với hiệu các nhiệt độ $T - T_m$. Quá trình làm nguội vật được mô hình hóa bởi phương trình vi phân sau

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m).$$

trong đó k là hằng số.

Phương trình trên được đưa về dạng phân ly

$$\frac{dT}{T - T_m} = k.dt.$$

Tích phân hai vế ta được

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = \int k.dt + C.$$

Từ đó $\ln(T - T_m) = kt + C$. Vậy phương trình có nghiệm tổng quát

$$\boxed{T(t) = T_m + Ce^{kt}}$$

• **Ví dụ 3** Một tách cafe đang ở nhiệt độ 100^0C được đặt vào trong một căn phòng có nhiệt độ 20^0C. Sau 20 phút nhiệt độ của tách cafe là 60^0C.

a) Xác định công thức cho quá trình làm nguội tách cafe.

b) Hỏi sau bao lâu thì nhiệt độ tách cafe giảm xuộng 30^0C.

Giải

a) Công thức cho quá trình làm nguội tách cafe có dạng

$$T(t) = T_m + Ce^{kt}.$$

Ta có $T_m = 20$ nên

$$T(t) = 20 + Ce^{kt}.$$

Lúc ban đầu cafe ở 100^0C nên $T(0) = 100$. Ta có $20 + C = 100$. Suy ra $C = 80$.

Sau 20 phút nhiệt độ của tách cafe là 60^0C nên $P(20) = 60$. Ta có $20 + 80.e^{20.k} = 60$. Suy ra $k = \frac{-\ln 2}{20}$.

Vậy $T(t) = 20 + 80.e^{-\frac{\ln 2}{20}t}$.

b) Để nhiệt độ tách cafe giảm xuống 30^0C thì $T(t) = 30$. Ta có

$$20 + 80.e^{-\frac{\ln 2}{20}t} = 30 \Rightarrow \ e^{-\frac{\ln 2}{20}t} = \ln\tfrac{1}{8} \ \Rightarrow \ t = \tfrac{\ln 8}{\ln 20}.20 = 60 \text{ (phút)}.$$

■ **Mô hình tăng trưởng Logistic**

Gọi $P(t)$ là dân số tại thời điểm t. Giả sử M là dân số cao nhất có thể tồn tại do điều kiện thuận lợi của môi trường. Người ta thấy tốc độ tăng dân số tại thời điêm t tỷ lệ với dân số $P(t)$ và tỷ lệ với lượng dân số mất đi $M - P(t)$. Ta có

$$\frac{dP}{dt} = kP(t)[M - P(t)] \tag{5.5}$$

trong đó k là hằng số.

Phương trình (5.5) được gọi là *Phương trình Logistic*.

Từ (5.5) ta có

$$\frac{dP}{P(M-P)} = k.dt \qquad \text{(dạng phân ly)}$$

Tích phân hai vế ta được

$$\int \frac{dP}{P(M-P)} = \int kdt + C$$

hay

$$\frac{1}{M}\int\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}\right) = \int kdt + C$$

$$\frac{1}{M}\ln\frac{P}{M-P} = kt + C \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{M-P} = Ce^{Mkt}$$

Suy ra

$$P = \frac{MCe^{Mkt}}{1 + Ce^{Mkt}}.$$

Vậy phương trình Logistic có nghiệm

$$\boxed{P(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-Mkt}}}$$

• **Ví dụ 4** Một cái ao có sức chứa không quá 150 con cá. Ban đầu có 6 con cá được thả vào ao. Tốc độ tăng trưởng của đàn cá được mô hình hóa bởi phương trình Logistic

$$\frac{dP}{dt} = 0.0015P(150 - P).$$

trong đó t là thời gian tính theo tuần.

a) Tìm công thức cho số lượng cá trong ao ở tuần thứ t.

b) Bao lâu thì số lượng cá trong ao là 100 con?

Giải

a) Ta có $k = 0.0015$. Ta có công thức

$$P(t) = \frac{150}{1 + Ce^{-0.225t}}.$$

Ban đầu có 6 con cá nên $P(0) = 6$. Suy ra $C = 24$.

Vậy số lượng cá trong ao ở tuần thứ t là

$$P(t) = \frac{150}{1 + 24e^{-0.225t}}.$$

b) Để số lượng cá là 100 con thì $P(t) = 100$ hay $\dfrac{150}{1 + 24e^{-0.225t}} = 100$. Suy ra

$$t = \frac{\ln 148}{-0.225} \simeq 17.21$$

Vậy khoảng 17 tuần thì số cá trong ao khoảng 100 con.

• **Ví dụ 5** Giải phương trình vi phân $y' = (3x + 2y - 1)^2$.

Giải

Đặt $z = 3x + 2y - 1$ thì phương trình trở thành

$$z' = 2z^2 + 3 \qquad \text{hay} \qquad dx = \frac{dz}{2z^2 + 3} \quad \text{(dạng phân ly)}.$$

Từ đó ta suy ra $x = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \arctan \dfrac{\sqrt{6}z}{3} + C$ hay

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \frac{\sqrt{6}(3x + 2y - 1)}{3} + C.$$

2.2.2 Phương trình thuần nhất (phương trình đẳng cấp)

□ **Định nghĩa 5** Hàm $f(x, y)$ được gọi là hàm thuần nhất cấp n ($n = 0, 1, \ldots$) theo các biến x và y nếu với mọi $\lambda \neq 0$ ta có

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

• **Ví dụ 6**

i) Hàm $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ là hàm thuần nhất cấp 0 vì

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy} = \lambda^0 f(x, y).$$

ii) Hàm $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ là hàm thuần nhất cấp một vì

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda\sqrt{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y).$$

⊕ **Nhận xét** Nếu $f(x, y)$ là hàm thuần nhất cấp 0 thì

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

Đặt $\lambda = \frac{1}{x}$ thì $f(x, y) = f(1, \dfrac{y}{x}) = g(\dfrac{y}{x})$.

□ **Định nghĩa 6** Phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{5.6}$$

được gọi là phương trình thuần nhất theo các biến x và y nếu $f(x, y)$ là hàm thuần nhất cấp 0 theo x và y.

⊙ Cách giải

Vì $f(x, y)$ là hàm thuần nhất nên $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y) = g(\dfrac{y}{x})$.

Đặt $\boxed{u = \dfrac{y}{x}}$ hay $y = ux$ thì ta có

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = g(u) \quad \text{hay} \quad x\frac{du}{dx} = g(u) - u.$$

* Nếu $g(u) - u \neq 0$ thì phương trình có dạng (5.3)

$$\frac{du}{g(u) - u} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Tích phân hai vế ta được $\displaystyle\int \frac{du}{g(u) - u} - \int \frac{dx}{x} = \ln C$

$$\text{hay} \qquad \int \frac{du}{g(u) - u} = \ln|x| + \ln\frac{1}{C} = \ln\frac{|x|}{C}.$$

Đặt $\phi(u) = \int \dfrac{du}{g(u)-u}$ thì $\dfrac{|x|}{C} = e^{\phi(u)}$.

Suy ra $x = \pm Ce^{\phi(u)} = Ce^{\phi(\frac{y}{x})}$.

Vậy tích phân tổng quát của (5.6) là $x = Ce^{\phi(\frac{y}{x})}$.

* Nếu $g(u) - u \equiv 0$ thì $g(u) = u$ với mọi u. Suy ra $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

Giải ra được nghiệm là $y = Cx$.

* Nếu $g(u) - u = 0$ tại $u = u_0$ thì bằng cách thử trực tiếp ta thấy $y = u_0 x$ là nghiệm của phương trình.

• **Ví dụ 7** Giải phương trình $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Giải

Phương trình có thể viết lại $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y/x}{1 - y^2/x^2}$

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$ thì $y = ux$ và $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$.

Suy ra $u + x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2u}{1-u^2}$. Từ đó

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1-u^2} - u = \frac{u+u^3}{1-u^2} = \frac{u(1+u^2)}{1-u^2}.$$

* Với $u \neq 0$ phương trình có thể đưa về dạng phân ly (5.3)

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du - \frac{dx}{x} = 0.$$

Tích phân hai vế

$$\int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du - \int \frac{dx}{x} = \ln|C|$$

$$\int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}\right) du - \int \frac{dx}{x} = \ln|\frac{1}{C}|$$

$$\ln\left|\frac{u}{1+u^2}\right| - \ln|x| = \ln|\frac{1}{C}|$$

$$\frac{x(1+u^2)}{u} = C \quad \Longrightarrow \frac{x(1+\frac{y^2}{x^2})}{\frac{y}{x}} = C.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là $x^2 + y^2 = Cy$.

* Khi $u = 0$ thì $y = 0$. Kiểm tra ta thấy $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình.

⊙ **Chú ý** Phương trình dạng

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

là phương trình thuần nhất nếu $M(x,y)$ và $N(x,y)$ là các hàm thuần nhất cùng cấp, bởi vì tỷ số của hai hàm thuần nhất cùng cấp là một hàm thuần nhất cấp 0.

• **Ví dụ 8** Phương trình $(2x+3y)dx+(x-2y)dy = 0$ hay $(x^2+y^2)dx - 2xydy = 0$ là phương trình thuần nhất.

■ **Phương trình dạng** $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$ **(*)**

trong đó f là hàm liên tục và a, b, c, A, B, C là các hằng số.

* Nếu $c = C = 0$ thì (*) là phương trình thuần nhất.

* Nếu $c \neq 0$ hoặc $C \neq 0$ thì ta có hai trường hợp:

i) Trường hợp $\dfrac{a}{A} = \dfrac{b}{B} = k$.

(trường hợp riêng là $A = B = 0, C \neq 0$, tức là f là hàm của $ax + by + c$)

Ta có $a = kA$, $b = kB$. Khi đó (*) trở thành

$$y' = f\left(\frac{ax+by+C}{k(ax+by)+C}\right).$$

Đặt $z = ax + by$ thì phương trình trên được đưa về dạng tách biến theo z và x.

ii) Nếu $\dfrac{a}{A} \neq \dfrac{b}{B}$ thì đặt $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$ với (α, β) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} ax+by+c &= 0 \\ Ax+By+C &= 0. \end{cases}$$

Khi đó phương trình vi phân được đưa về dạng đẳng cấp sau:

$$\frac{dY}{dX} = \left(\frac{aX+bY}{AX+BY}\right).$$

• **Ví dụ 9** Giải phương trình $y' = \dfrac{x+y+2}{1-2x-2y}$.

Giải

Phương trình có thể viết lại
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{1-2(x+y)}.$$
Đặt $z = x+y$. Ta được
$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{z+2}{1-2z} \quad \text{hay} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{3-z}{1-2z}.$$
Từ đó
$$\frac{2z-1}{z-3}dz = dx \quad \text{(dạng phân ly)}.$$
Tích phân hai vế ta được
$$\int \frac{2z-1}{z-3}dz = \int dx + C \quad \text{hay} \quad 2z + 5\ln|z-3| = x + C.$$
Thay $z = x+y$ ta được tổng phân tổng quát
$$x + 2y + 5\ln|x+y-3| = c.$$

• **Ví dụ 10** Giải phương trình vi phân $y' = \dfrac{x-y+1}{x+y-3}$.

Giải

Hệ $\begin{cases} x-y+1 &= 0 \\ x+y-3 &= 0 \end{cases}$ có nghiệm là $(1,2)$. Đặt $x = X+1$ và $y = Y+2$ thì phương trình trở thành phương trình đẳng cấp
$$Y' = \frac{X-Y}{X+Y}.$$
Đặt $u = \frac{Y}{X}$, ta được
$$u'X + u = \frac{1-u}{1+u} \qquad \text{hay} \qquad X\frac{du}{dX} = \frac{1-2u-u^2}{1+u}.$$
Khi vế phải bằng 0 và giải ra ta được $u = -1 \pm \sqrt{2}$. Do đó phương trình có hai nghiệm riêng là $y = 2 + (-1 \pm \sqrt{2})(x-1)$. Trường hợp vế phải khác 0, phân li biến số và tích phân ta được
$$\ln|Cx| = -\frac{1}{2}\ln|1-2u-u^2|.$$
Do đó, phương trình có tích phân tổng quát

$$x^2 - y^2 - 2xy + 2x + 6y = C$$

(tích phân tổng quát chứa chứa hai nghiệm riêng ứng với $C = 7$).

2.2.3 Phương trình tuyến tính cấp một

□ **Định nghĩa 7** Phương trình tuyến tính cấp một là phương trình có dạng

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{5.7}$$

trong đó $P(x)$, $Q(x)$ là các hàm liên tục.

* Nếu $Q(x) \equiv 0$ thì từ (5.7) ta được

$$y' + P(x)y = 0 \tag{5.8}$$

(5.8) được gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất.

* Nếu $Q(x) \not\equiv 0$ thì (5.7) được gọi là phương trình tuyến tính không thuần nhất.

⊙ Cách giải

◇ Xét phương trình tuyến tính thuần nhất $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = 0.$ (5.8)

* Nếu $y \neq 0$ thì từ (5.8) ta có $\dfrac{dy}{y} + P(x)dx = 0.$

Phương trình có dạng (5.3), tích phân hai vế ta được

$$\ln|y| + \int P(x)dx = \ln|C_0| \quad C_0 \neq 0$$

$$\text{hay} \quad \ln|y| = \ln|C_0| - \int P(x)dx.$$

$$y = \pm C_0 e^{-\int P(x)dx}.$$

Do đó phương trình có nghiệm $y = Ce^{-\int P(x)dx}$.

* Ta thấy $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình và là nghiệm ứng với $C = 0$.

Vậy phương trình tuyến tính thuần nhất cấp một (5.8) có nghiệm tổng quát là

$$\boxed{y = Ce^{-\int P(x)dx}} \tag{5.9}$$

◇ Để giải (5.7) xem C là hàm của x, ta xác định $C = C_1(x)$ sao cho

$$y = C_1(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{5.10}$$

thỏa (5.7) (*phương pháp biến thiên hằng số Lagrange*).

Từ (5.10) ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC_1}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Thay vào (5.7) ta được

$$\frac{dC_1}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + C_1P(x)(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Suy ra

$$\frac{dC_1}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Tích phân ta được

$$C_1(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Thay $C_1(x)$ vào (5.10) ta được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp một (5.7)

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C\right)}$$

• **Ví dụ 11** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y' + \frac{1}{x}y = 3x$ và tìm nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(1) = 1$.

Giải

Ta có

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \tfrac{1}{x}$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int 3x^2dx = x^3.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \dfrac{1}{x}(x^3 + C)$.

Với điều kiện ban đầu $y(1) = 1$ ta có $1 = C + 1$. Suy ra $C = 0$. Vậy nghiệm riêng ứng với điều kiện ban đầu là $y = x^2$.

• **Ví dụ 12** Một thùng chứa 200 lít nước trong đó hòa tan 40 gram muối. Trong mỗi phút có 5 lít nước biển mà mỗi lít chứa 2 gram muối hòa tan chảy vào thùng. Hỗn hợp (muối và nước được khuấy đều) chảy ra ngoài với cùng tốc độ. Tính lượng muối $y(t)$ trong thùng tại thời điểm t bất kỳ.

Giải

* Bước 1: Mô hình hóa bài toán

Tốc độ thay đổi $y'(t)$ của lượng muối = (lượng muối chảy vào) - (lượng muối chảy ra).

Lượng muối chảy vào: $5 \times 2 = 10\, gram/$phút.

Lượng muối chảy ra: $(gram/$phút) là $5/200 \times y(t) = 0,025y(t)$, vì $y(t)$ là lượng muối tổng cộng, $y(t)/200$ là lượng muối trên mỗi lít và 5lít/phút chảy ra.

Do đó mô hình của bài toán là

$$y' = 10 - 0,025y.$$

* Bước 2: Giải phương trình vi phân

$$y' + 0,025y = 10, \quad y(0) = 40.$$

Phương trình có dạng tuyến tính. Nghiệm của phương trình cho bởi

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\int 0,025dt}\left(\int e^{\int 0,025dt}10dt + C\right) \\ &= e^{-0,025t}\left(\frac{10}{0,025}e^{0,025t} + C\right) = Ce^{-0,025t} + 400. \end{aligned}$$

Từ điều kiện ban đầu $y(0) = 40$ ta có $C + 400 = 40$. Dẫn đến $C = -360$.

Vậy $y(t) = 400 - 360e^{-0,025t}\,(gram)$.

2.2.4 Phương trình Bernoulli

□ **Định nghĩa 8** Phương trình Bernoulli là phương trình có dạng

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \tag{5.11}$$

trong đó $\alpha \in \mathbb{R}$, $P(x)$, $Q(x)$ là các hàm liên tục.

⊙ Cách giải

* Khi $\alpha = 0$ hay $\alpha = 1$ thì (5.11) có dạng tuyến tính (5.7).

* Khi $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$:

Ta thấy $y = 0$ $(\alpha > 0)$ là nghiệm của (5.11).

Với $y \neq 0$. Chia hai vế (5.11) cho y^α ta được

$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x). \tag{5.12}$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$ thì $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Thay vào (5.12) ta được

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + P(x)z = Q(x)$$

$$\text{hay} \quad z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x).$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp một với x là biến độc lập, z là hàm phải tìm. Giải ra ta được z; trả về theo y ta được nghiệm của phương trình Bernoulli.

• **Ví dụ 13** Giải phương trình $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Giải

Chia hai vế phương trình cho x ta được

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}.$$

Ta thấy $y = 0$ là nghiệm của phương trình.

Với $y \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\sqrt{y}$ thì

$$y^{-1/2}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Đặt $z = \sqrt{y}$ thì $z' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y'$. Khi đó

$$2z' - \frac{4}{x}z = x \quad \text{hay} \quad z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}.$$

Phương trình trên có dạng tuyến tính, xét

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{2\int \frac{dx}{x}} = e^{2\ln x} = x^2$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int \frac{x}{2}\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x|.$$

Suy ra $z = x^2(\frac{1}{2}\ln|x| + C)$.

Mà $z = \sqrt{y}$ nên $\sqrt{y} = x^2(\frac{1}{2}\ln|x| + C)$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = x^4(\frac{1}{2}\ln|x| + C)^2$.

2.2.5 Phương trình vi phân toàn phần và thừa số tích phân

a. Phương trình vi phân toàn phần

□ **Định nghĩa 9** Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{5.13}$$

trong đó

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = d\phi(x,y) \tag{5.14}$$

với ϕ là hàm nào đó, được gọi là hàm tích phân của phương trình vi phân.

⊕ **Nhận xét** Theo định lý 4 mệnh đề tương đương (xem 3.6 chương 4) thì điều kiện cần và đủ để (5.13) là phương trình vi phân toàn phần là

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \forall (x,y).$$

⊙ Cách giải

i) Nếu biết biểu thức $\phi(x,y)$ thì từ (5.13) và (5.14) ta được $d\phi(x,y) = 0$. Do đó tích phân tổng quát của phương trình vi phân toàn phần là

$$\boxed{\phi(x,y) = C} \tag{5.15}$$

ii) Nếu chưa biết biểu thức của $\phi(x,y)$ thì theo định lý 4 mệnh đề tương đương ta có

$$\phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy + C_1$$

hay $$\phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C_1$$

trong đó (x_0, y_0) là điểm sao cho các hàm $M(x,y)$, $N(x,y)$ liên tục tại điểm này.

Theo (5.15) ta được tích phân tổng quát của phương trình vi phân toàn phần là

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C} \tag{5.16}$$

hay

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C} \tag{5.17}$$

• **Ví dụ 14** Giải phương trình $(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0$.

Giải

Phương trình có thể viết lại

$$x^3dx + (ydx + xdy) - ydy = 0$$

$$\frac{1}{4}d(x^4) + d(xy) - \frac{1}{2}d(y^2) = 0$$

$$d(\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}) = 0.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = C.$$

• **Ví dụ 15** Kiểm tra phương trình vi phân

$$e^x(2 + 2x - y^2)dx - e^x 2ydy = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần và giải nó.

Giải

Đặt $M(x,y) = e^x(2 + 2x - y^2)$, $N(x,y) = -e^x 2y$. Ta có

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2ye^x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Do đó phương trình trên là phương trình vi phân toàn phần. Chọn $x_0 = y_0 = 0$, ta được tích phân tổng quát của phương trình là

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C$$
$$\int_0^x e^x(2+2x)dx - \int_0^y e^x 2y dy = C$$
$$2\int_0^x e^x d(x+1) - e^x \int_0^y 2y dy = C$$
$$2[(x+1)e^x - e^x] - y^2 e^x = C$$
$$2xe^x - y^2 e^x = C.$$

b. Thừa số tích phân

Một phương trình vi phân cấp một có thể biểu diễn dạng vi phân

$$Mdx + Ndy = 0. \tag{5.18}$$

Phương trình này thông thường không là phương trình vi phân toàn phần. Tuy nhiên có thể nhân một hàm $\mu(x,y)$ vào phương trình để phương trình vi phân sau

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{5.19}$$

là phương trình vi phân toàn phần.

Khi đó hàm $\mu(x,y)$ được gọi là *thừa số tích phân* của phương trình vi phân (5.18).

⊙ Cách tìm thừa số tích phân

Giả sử (5.19) là phương trình vi phân toàn phần. Khi đó ta có

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)N(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)M(x,y)\right)$$

$$\text{hay}\quad M(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} - N(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu(x,y)\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{5.20}$$

Mọi hàm $\mu(x,y)$ thỏa (5.20) đều là thừa số tích phân của phương trình (5.18). Nhưng phương trình (5.20) lại là phương trình đạo hàm riêng của hàm hai biến $\mu(x,y)$. Việc tìm μ rất khó khăn. Ta chỉ xét trong trường hợp đơn giản là μ chỉ phụ thuộc vào một biến, may mắn là trong thực tế nhiều trường hợp có những nhân tử như vậy.

Khi $\mu = \mu(x)$, từ (5.20) ta có

$$N(x,y)\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

hay

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}.$$

Nếu vế phải của phương trình trên không phụ thuộc vào y mà chỉ phụ thuộc vào x thì từ phương trình trên ta xác định được

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}dx}}$$

Khi $\mu = \mu(y)$, tương tự ta có

$$\boxed{\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy}}$$

• **Ví dụ 16** Chứng minh rằng phương trình $(x + y^2)dx + xydy = 0$ có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc vào x. Tìm thừa số tích phân đó và giải phương trình vi phân.

Giải

Xét $M = x + y^2$ và $N = xy$. Ta thấy

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}$$

không phụ thuộc vào y, nên phương trình có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc vào x. Thừa số tích phân này được cho bởi

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{hay} \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dx}{x}.$$

Rõ ràng $\mu = x$ là thừa số thích hợp. Nhân phương trình cho $\mu = x$ thì

$$0 = (x^2 + xy^2)dx + x^2ydy = d(\tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^2y^2}{2}).$$

Do đó nghiệm của phương trình là $2x^3 + 3x^2y^2 = C$.

3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

Trong phần này ta sẽ nghiên cứu phương trình vi phân cấp hai và đưa ra cách giải trong một số trường hợp đặc biệt. Một vài kỹ thuật được mở rộng cho phương trình vi phân cấp cao hơn hai.

3.1 Các khái niệm cơ bản

□ **Định nghĩa 10** Phương trình vi phân cấp hai là phương trình vi phân có dạng

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

hay $\quad y'' = f(x, y, y') \quad$ (phương trình đã giải ra đối với y') $\qquad$ (5.21)

△ Định lý 5.2 (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm)

Cho phương trình

$$y'' = f(x, y, y') \tag{5.21}$$

Nếu hàm $f(x, y, y')$ và các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục trong lân cận của điểm (x_0, y_0, y_0') thì (5.21) có nghiệm duy nhất $y = y(x)$ xác định và liên tục trên khoảng đủ nhỏ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$.

□ **Định nghĩa 11 (Nghiệm của phương trình vi phân cấp hai)**

Nghiệm tổng quát của (5.21) là hàm $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ thỏa (5.21) với mọi hằng số C_1, C_2.

Hàm $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ thu được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$ được gọi là nghiệm riêng.

Nếu nghiệm tổng quát tìm được dưới dạng ẩn $\phi(x, y, C_1, C_2) = 0\,(**)$ thì $(**)$ được gọi là tích phân tổng quát.

Từ tích phân tổng quát $(**)$ cho $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$ thì ta được tích phân riêng $\phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$.

3.2 Các phương trình vi phân có thể giảm cấp

Cho phương trình $y'' = f(x, y, y')$. $\qquad$ (5.21)

Ta xét các trường hợp đặc biệt có thể đưa (5.21) về dạng phương trình vi phân cấp một bằng cách đặt ẩn phụ.

1. Dạng vắng mặt y và y':

$$y'' = f(x) \tag{5.22}$$

Vì $(y')' = y'' = f(x)$ nên

$$y' = \int f(x)dx + C_1.$$

Tích phân lần nữa ta được

$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2$$

với C_1, C_2 là hằng số.

• **Ví dụ 17** Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' = \sin x$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

GIẢI

Ta có

$$y' = \int \sin x dx + C_1 = -\cos x + C_1.$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Với điều kiện ban đầu

$$y(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = C_2$$

$$y'(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = -1 + C_1 \quad \Longrightarrow C_1 = 2$$

Vậy nghiệm riêng ứng với điều kiện ban đầu của phương trình đã cho là

$$y = 2x - \sin x.$$

2. Dạng vắng mặt y:

$$y'' = f(x, y') \tag{5.23}$$

Đặt $\boxed{y' = p}$

Khi đó $y'' = p'$ và (5.23) có dạng

$$p' = f(x, p).$$

Đây là phương trình vi phân cấp một với p là nghiệm. Giải ra ta được nghiệm tổng quát của nó là

$$p = \varphi(x, C_1).$$

Vì $y' = p$ nên $y' = \varphi(x, C_1)$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

• **Ví dụ 18** Giải phương trình $y^{''} = x - \dfrac{y'}{x}$.

GIẢI

Đặt $p = y'$. Khi đó phương trình có dạng

$$p' = x - \frac{p}{x} \quad \text{hay} \quad p' + \frac{1}{x}p = x.$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một với x là biến độc lập và p là hàm phải tìm. Ta có

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}$$

nên nghiệm tổng quát của nó là

$$p = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

Vì $y' = p$ nên $y' = \frac{x^3}{3} + \frac{C_1}{x}$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \int \frac{x^2}{3}dx + C_1\int \frac{dx}{x} + C_2 = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

3. Dạng vắng mặt x:

$$y^{''} = f(y, y') \tag{5.24}$$

Đặt $\boxed{y' = p}$ và xem p là hàm của y.

Ta có

$$y^{''} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Khi đó (5.24) có dạng

$$p\frac{dp}{dy} = f(y,p) \quad \text{hay} \quad \frac{dp}{dy} = \frac{1}{p}f(y,p)$$

Xem phương trình trên là phương trình vi phân cấp một với y là biến độc lập và p là hàm phải tìm. Giải ra ta được nghiệm tổng quát của nó là

$$p = \varphi(y, C_1)$$

Vì $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$ nên $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$ hay

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} - dx = 0$$

Đây là phương trình có biến phân ly (5.3). Tích phân hai vế ta được tích phân tổng quát của (5.24) là

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} - x = C_2.$$

• **Ví dụ 19** Giải phương trình $2yy'' + y'^2 = 0$.

Giải

Đặt $p = y'$ thì $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Khi đó

$$2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p\left(2y\frac{dp}{dy} + p\right) = 0$$

$* \ p = 0 \Longrightarrow \quad y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = C.$

$* \ 2y\dfrac{dp}{dy} + p = 0$

$$\frac{dp}{p} + \frac{1}{2}\frac{dy}{y} = 0.$$

Phương trình có dạng phân li, tích phân hai vế ta được

$$\ln|p| + \frac{1}{2}\ln|y| = \ln|C_0| \quad \text{hay} \quad \ln|p\sqrt{|y|}| = \ln|C_0|$$

$$p\sqrt{|y|} = C_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = p = \frac{C_0}{\sqrt{|y|}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{|y|}dy = C_0 dx.$$

Phương trình lại có dạng phân li (5.3), tích phân hai vế lần nửa ta được

$$\frac{2}{3}y^{3/2} = C_0x + C_0' \quad \text{hay} \quad y^{3/2} = C_1x + C_2$$

Ta thấy $y = C$ ứng với $C_2 = C, C_1 = 0$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$y^{3/2} = C_1x + C_2.$$

• **Ví dụ 20** `(Bài toán vận tốc thoát)`

Xác định vận tốc nhỏ nhất để đẩy một vật lên thẳng sao cho nó không quay trở về trái đất. Biết rằng lực cản của không khí được bỏ qua.

Giải

Gọi M, m tương ứng là khối lượng của trái đất và của vật.

Theo định luật hấp dẫn của Newton, lực hấp dẫn f tác dụng lên vật là

$$f = k\frac{M.m}{r^2}$$

trong đó r là khoảng cách giữa tâm trái đất và trọng tâm của vật, k là hằng số hấp dẫn ($k = 6,66.10^{-8}cm^3/g.s$).

Phương trình vi phân của chuyển động là $m\dfrac{d^2r}{dt^2} = -k\dfrac{Mm}{r^2}$ hay

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{M}{r^2} \tag{5.25}$$

Dấu $-$ cho thấy gia tốc âm. Phương trình (5.25) có dạng (5.24). Ta sẽ giải nó với điều kiện ban đầu

$$t = 0, \quad r = R, \quad \frac{dr}{dt} = v_0$$

với R là bán kính của trái đất và v_0 là vận tốc phóng.

Với $\dfrac{dr}{dt} = v$ là vận tốc của chuyển động, ta có

$$\frac{d^2r}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}.\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}.$$

Thay vào (5.25) ta được $v\dfrac{dv}{dr} = -k\dfrac{M}{r^2}$ hay $vdv = -kM\dfrac{dr}{r^2}$

Tích phân phương trình này

$$\frac{v^2}{2} = kM\frac{1}{r} + C_1 \tag{5.26}$$

Từ điều kiện ban đầu $v = v_0$ tại bề mặt trái đất (cho $r = R$) thì $\frac{v_0^2}{2} = kM\frac{1}{R} + C_1$.

Suy ra $C_1 = -\frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}$. Thay vào (5.26) thì

$$\frac{v^2}{2} = \frac{kM}{r} + (\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}).$$

Với r đủ lớn thì $\frac{kM}{R}$ dương khá bé. Vì vật chuyển động với vận tốc dương nên $\frac{v^2}{2}$. Điều này xảy ra với mọi r khi và chỉ khi

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geq 0 \quad \text{hay} \quad v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

Do đó vận tốc bé nhất xác định bởi phương trình

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}} \tag{5.27}$$

trong đó $R = 63.10^7 cm$.

Tại bề mặt trái đất cho $r = R$, gia tốc trọng trường $g = 981cm/s^2$. Với điều kiện này từ (5.25) ta được

$$g = k\frac{M}{R^2} \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{gR^2}{k}.$$

Thay vào (5.27) thì

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2gR} = \sqrt{2.981.63.10^7} \\ &\approx 11,2 \times 10^5 cm/s^2 = 11,2km/s^2. \end{aligned}$$

3.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

□ **Định nghĩa 12** Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai là phương trình có dạng

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{5.28}$$

trong đó $a_1(x), a_2(x), f(x)$ là các hàm của biến độc lập x.

Nếu $f(x) \equiv 0$ thì (5.28) trở thành

$$y^{''} + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (5.29)$$

(5.29) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng của (5.28).

Nếu $f(x) \not\equiv 0$ thì (5.28) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất.

3.3.1 Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$y^{''} + a_1y' + a_2y = 0 \quad (5.29)$$

trong đó a_1, a_2 là các hàm của x.

△ **Định lý 5.3** *Nếu y_1, y_2 là hai nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất (5.29) thì $y = C_1y_1+C_2y_2$, trong đó C_1, C_2 là hằng số tùy ý, cũng là nghiệm của (5.29).*

Chứng minh. Vì y_1, y_2 là nghiệm của phương trình (5.29) nên

$$y_1^{''} + a_1y_1' + a_2y_1 = 0$$
$$y_2^{''} + a_1y_2' + a_2y_2 = 0$$

Khi đó

$$(C_1y_1 + C_2y_2)^{''} + a_1(C_1y_1 + C_2y_2)' + a_2(C_1y_1 + C_2y_2) =$$

$$= C_1(y_1^{''} + a_1y_1' + a_1y_1) + C_2(y_2^{''} + a_1y_2' + a_2y_2) = 0 + 0 = 0$$

Vậy $C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm của (5.29). □

□ **Định nghĩa 13** Hai hàm y_1 và y_2 được gọi là độc lập tuyến tính trên $[a, b]$ nếu tỉ số của chúng trên đoạn đó không phải là một hằng số, nghĩa là $\dfrac{y_1}{y_2} \neq const$.

Trường hợp ngược lại hai hàm được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

• **Ví dụ 21** Hai hàm e^{2x} và e^{-x} là độc lập tuyến tính vì tỉ số $\frac{e^{2x}}{e^{-x}} = e^{3x} \neq const$, còn hai hàm $2e^x$ và e^x là phụ thuộc tuyến tính vì tỉ số $\frac{2e^x}{e^x} = 2$.

□ **Định nghĩa 14** Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là các hàm khả vi trong khoảng (a, b) thì định thức

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

được gọi là *định thức Wronski* của hai hàm.

△ **Định lý 5.4** *Nếu y_1 và y_2 là hai nghiệm của phương trình thuần nhất (5.29) thì tồn tại một hằng số C sao cho*

$$W(x) = W(y_1, y_2) = Ce^{-\int a_1(x)dx}.$$

Chứng minh Vì y_1 và y_2 là các nghiệm của phương trình (5.29) nên

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0$$
$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0.$$

Nhân đẳng thức trên với $-y_2$, đẳng thức dưới với y_1 rồi cộng vế với vế ta được

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0. \tag{5.30}$$

Ta thấy

$$W'(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Nên đẳng thức (5.30) có thể viết lại

$$W'(x) + a_1 W(x) = 0.$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một với $W(x)$ là hàm phải tìm, nó có nghiệm

$$W(x) = Ce^{-\int a_1(x)dx}. \quad \square \tag{5.31}$$

△ **Định lý 5.5** *Các nghiệm $y_1(x), y_2(x)$ của phương trình thuần nhất (5.29) với $y_1(x)$ hoặc $y_2(x)$ không triệt tiêu trên (a, b) là độc lập tuyến tính trong khoảng (a, b) khi và chỉ khi định thức Wronski của chúng không triệt tiêu tại bất kỳ điểm nào trong khoảng (a, b).*

Chứng minh

Cần: Giả sử $W(y_1, y_2) = W(x) = 0$ tại điểm x_0 nào đó trong khoảng (a, b).

Theo (5.31) $W(x) = Ce^{-\int a_1(x)dx}$ nên

$0 = W(x_0) = Ce^{g(x_0)}$ với $g(x) = -\int a_1(x)dx$.

Do đó $C = 0$. Điều này dẫn đến $W \equiv 0$ trên (a, b).

Với trường hợp $y_1 \neq 0$ ta có

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = W(y_1, y_2) = 0.$$

Do đó $\dfrac{y_2}{y_1} = const$. Điều này mâu thuẩn với giả thiết y_1 và y_2 độc lập tuyến tính.

Đủ: Giả sử y_1 và y_2 phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại số λ sao cho $y_2 = \lambda y_1$. Lúc này ta cũng có $y_2' = \lambda y_1'$. Do đó

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(Vô lý)} \quad \square$$

Δ **Định lý 5.6** *Nếu y_1 và y_2 là hai nghiệm riêng độc lập độc lập tuyến tính của phương trình (5.29) thì*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{5.32}$$

trong đó C_1 và C_2 là các hằng số bất kỳ, là nghiệm tổng quát của (5.29).

Chứng minh. Từ định lý (5.3) ta suy ra $C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm của (5.29) với các giá trị tùy ý của C_1 và C_2.

Bây giờ ta sẽ chứng minh với mọi điều kiện ban đầu cho trước $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ ta có thể xác định các giá trị cụ thể của C_1 và C_2 để nghiệm riêng tương ứng thỏa mãn điều kiện ban đầu. Từ điều kiện ban đầu ta có

$$(*)\begin{cases} C_1y_{10} + C_2y_{20} = y_0 \\ C_1y_{10}' + C_2y_{20}' = y_0' \end{cases} \quad \text{với} \quad y_{i0} = y_i(x_0),\ y_{i0}' = y_i'(x_0);\ (1 = 1, 2)$$

Vì y_1, y_2 độc lập tuyến tính nên

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} \neq 0$$

dẫn đến hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất C_1^0 và C_2^0.

Do đó nghiệm riêng $y = C_1^0y_1 + C_2^0y_2$ được suy ra từ (5.32) thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Vậy $y = C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (5.29). □

Từ định lý (5.6) ta thấy muốn tìm nghiệm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (5.29) ta cần phải biết hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó. Không có phương pháp tổng quát nào để tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (5.29). Sau đây ta đi đến một định lý cho phép ta tìm một nghiệm riêng thứ hai độc lập tuyến tính với một nghiệm riêng đã biết trước.

△ **Định lý 5.7 (Phương pháp cầu phương)** *Nếu biết một nghiệm riêng $y_1(x)$ của phương trình tuyến tính thuần nhất (5.29) thì ta có thể tìm một nghiệm riêng $y_2(x)$ của (5.29) độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ bởi*

$$\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}dx}$$

Chứng minh Giả sử y_1 là một nghiệm riêng của (5.29). Ta có

$$y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0$$

Ta tìm nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1. Từ định lý (5.4) ta có

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = Ce^{-\int a_1(x)dx}$$

Vì y_1 đã biết nên đây là phương trình vi phân cấp một đối với y_2. Chia hai vế cho y_1^2 ta được

$$\frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{C}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx}$$

hay

$$d\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx}.$$

Dẫn đến

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{Ce^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}dx + C'$$

$$y_2 = y_1\left(\int \frac{Ce^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}dx + C'\right).$$

Vì y_2 là nghiệm riêng nên có thể chọn $C = 1$ và $C' = 0$. Khi đó ta được

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2} dx. \qquad \square$$

• **Ví dụ 22** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Giải

Bằng phép thử trực tiếp ta thấy phương trình có nghiệm riêng $y_1 = x$. Ta tìm nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1.

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2} dx = x \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx$$

$$= x \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right).$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 x + C_2 \left(\frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 1 \right).$$

3.3.2 Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính cấp hai không thuần nhất

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (5.28)$$

trong đó a_1, a_2 là các hàm của x và $f(x) \not\equiv 0$ và phương trình thuần nhất tương ứng của nó

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (5.29)$$

Δ **Định lý 5.8** *Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (5.28) bằng tổng của nghiệm tổng quát $\overline{y}$ của phương trình thuần nhất tương ứng (5.29) và một nghiệm riêng Y nào đó của nó.*

Chứng minh. Xét $y = \overline{y} + Y$. Ta có

$$y' = \overline{y}' + Y', \quad y'' = \overline{y}'' + Y''.$$

Thay y, y', y'' vào vế trái (5.28) ta được

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = (\overline{y}'' + Y'') + a_1(\overline{y}' + Y') + a_2(\overline{y} + Y)$$
$$= (\overline{y}'' + a_1\overline{y}' + a_2\overline{y}) + (Y'' + a_1 Y' + a_2 Y).$$

Vì $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của (5.29) và Y là nghiệm riêng của (5.28) nên

$$\overline{y}'' + a_1\overline{y}' + a_2\overline{y} = 0$$
$$Y'' + a_1 Y' + a_2 Y = f(x).$$

Do đó $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 + f(x) = f(x)$.

Chứng tỏ y là nghiệm của (5.28). Mặt khác vì $\overline{y}$ phụ thuộc vào hai hằng số tùy ý nên y cũng phụ thuộc vào hai hằng số tùy ý.

Vậy $y = \overline{y} + Y$ là nghiệm tổng quát của (5.28). □

⊙ Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Xét phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (5.28)$$

Giả sử

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{5.33}$$

là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ (5.29).

Ta tìm nghiệm riêng của (5.28) có dạng (5.33) với C_1 và C_2 là các hàm của x.

Đạo hàm hai vế (5.33) ta được

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2.$$

Ta chọn C_1, C_2 sao cho

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0.$$

Khi đó có thể viết lại

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2'.$$

Đạo hàm hai vế lần nữa

$$y'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''.$$

Thay y, y', y'' vào (5.28) ta được

$$C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' + a_1(C_1y_1' + C_2y_2') + a_2(C_1y_1 + C_2y_2) = f(x)$$

hay

$$C_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(y_2'' + a_1y_2' + C_2y_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Vì $y_1$và y_2 là các nghiệm riêng của phương trình thuần nhất (5.29) nên các biểu thức trong dấu ngoặc đều bằng 0. Do đó đẳng thức trên có dạng

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Như vậy hàm y sẽ là nghiệm của phương trình (5.28) nếu như C_1 và C_2 thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

Vì y_1, y_2 độc lập tuyến tính nên

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0.$$

Do đó hệ trên có nghiệm duy nhất

$$C_1' = \varphi_1(x), \quad C_2' = \varphi_2(x).$$

Lấy tích phân hai vế của các đẳng thức trên ta nhận được

$$C_1 = \int \varphi_1(x)dx + \mathcal{C}_1; \quad C_2 = \int \varphi_2(x)dx + \mathcal{C}_2.$$

Do nghiệm cần tìm là nghiệm riêng nên ta có thể chọn $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = 0$. Thay vào (5.33) ta được nghiệm riêng của (5.28) là

$$Y = y_1(x)\int \varphi_1(x)dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)dx.$$

• **Ví dụ 23** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y^{''} - \dfrac{y'}{x} = x$.

GIẢI

* Trước hết ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$y^{''} - \frac{y'}{x} = 0.$$

Ta có

$$\frac{y^{''}}{y'} = \frac{1}{x} \quad \text{hay} \quad d(\ln|y'|) = \frac{dx}{x}.,$$

Suy ra $\ln|y'| = \ln|x| + \ln|C|$ hay $y' = Cx$.

Do đó $y = C_1x^2 + C_2$, $(C_1 = \frac{C}{2})$.

* Ta tìm nghiệm riêng của phương trình dạng

$$Y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1x^2 + C_2.1$$

với C_1, C_2 thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} C_1'x^2 + C_2'.1 = 0 \\ C_1'.2x + C_2'.0 = x \end{cases}$$

Giải hệ ta được $C_1' = \frac{1}{2}$, $\quad C'2 = -\frac{x^2}{2}$.

Suy ra $C_1 = \frac{x}{2} + \mathcal{C}_1$, $C_2 = -\frac{x^3}{6} + \mathcal{C}_2$.

Chọn $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = 0$ thì

$$Y = \frac{x}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \overline{y} + Y = C_1x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}.$$

△ **Định lý 5.9 (Nguyên lý chồng chất nghiệm)** *Cho phương trình tuyến tính cấp hai không thuần nhất*

$$y^{''} + a_1y + a_2y = f_1(x) + f_2(x) \tag{5.34}$$

Nếu y_1 là nghiệm của phương trình

$$y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x) \tag{5.35}$$

và y_2 là nghiệm của phương trình

$$y'' + a_1y' + a_2y = f_2(x) \tag{5.36}$$

thì $y = y_1 + y_2$ là nghiệm của (5.34).

Chứng minh. Thay $y = y_1 + y_2$ vào vế trái của (5.34) ta có

$$y'' + a_1y' + a_2y = (y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2)$$
$$= (y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + (y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2).$$

Vì y_1 là nghiệm riêng của (5.35), y_2 là nghiệm riêng của (5.34) nên

$$\begin{aligned} y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 &= f_1(x) \\ y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 &= f_2(x) \end{aligned}$$

Do đó

$$y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x) + f_2(x).$$

□

3.4 Phửơng trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi

□ **Định nghĩa 15** (Số phức)

Ta gọi *đơn vị ảo i* là số xác định bởi $i^2 = -1$.

Một số phức là một biểu thức dạng $a + bi$ (hay $a + ib$), trong đó a, b là các số thực và i là đơn vị ảo.

a được gọi là phần thực, kí hiệu $a = Re(a + bi)$.

b được gọi là phần ảo, kí hiệu $b = Im(a + bi)$.

Nếu $a = 0$ thì số phức $z = a + bi = bi$ được gọi là số thuần ảo.

Các số phức $a + bi$ và $a - bi$ được gọi là *các số phức liên hợp*.

Hai số phức $z = a + bi$ và $w = x + yi$ bằng nhau khi và chỉ khi $a = x$ và $b = y$.

Tập các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$. Ta có $\mathbb{C} = \{a + bi \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}$.

• **Giải phương trình bậc hai trên trường số phức**

Trong phần này ta nghiên cứu cách giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ trên trường số phức $\mathbb{C}$. Xét biệt thức $\triangle = b^2 - 4ac$.

* Khi $\triangle > 0$: phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$.

* Khi $\triangle = 0$: phương trình có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$.

* Khi $\triangle < 0$: giả sử $\triangle = -d^2 = (di)^2$ với $d \neq 0$ và i là đơn vị ảo; khi đó phương trình có hai nghiệm phức liên hợp $x = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{d}{2a}i$.

□ **Định nghĩa 16** Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi có dạng

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

trong đó q, q là các số thực và $f(x)$ là hàm liên tục.

Khi $f(x) = 0$ ta có có phương trình thuần nhất

$$y'' + py' + qy = 0.$$

3.4.1 Phương trình thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{5.37}$$

trong đó p, q là hằng số.

Theo định lý 5.6 muốn tìm nghiệm tổng quát của (5.37) ta chỉ cần tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó.

Ta sẽ tìm nghiệm riêng của (5.37) dưới dạng

$$y = e^{kx} \tag{5.38}$$

trong đó k là hằng số cần xác định.

Ta có $y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2e^{kx}$.

Thay y, y', y'' vào (5.37) thì được

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Vì $e^{kx} \neq 0$ nên

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{5.39}$$

Nếu k thỏa mãn phương trình (5.39) thì $y = e^{kx}$ là nghiệm của phương trình (5.37). Phương trình (5.39) được gọi là *phương trình đặc trưng* của phương trình vi phân (5.37), nó có hai nghiệm k_1, k_2. Ta thấy có ba khả năng xảy ra đối với k_1 và k_2.

1. **k_1 và k_2 là hai số thực khác nhau ($k_1 \neq k_2$)**

   Ta có hai nghiệm riêng của (5.37) là

   $$y = e^{k_1x}, \quad y = e^{k_2x}.$$

   Hai nghiệm này độc lập tuyến tính vì $\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1-k_2)x} \not\equiv const$.

   Do đó nghiệm tổng quát của (5.37) là

   $$\boxed{y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}}.$$

   với C_1 và C_2 là các hằng số tùy ý.

2. **k_1 và k_2 là hai số thực trùng nhau ($k_1 = k_2$)**

   Trường hợp này ta có một nghiệm riêng của (5.37) là $y = e^{k_1x}$. Ta tìm một nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1 dạng

   $$y_2 = y_1.u(x) = u(x)e^{k_1x}.$$

   Ta có

   $$y_2' = u'e^{k_1x} + k_1ue^{k_1x}$$
   $$y_2'' = u''e^{k_1x} + 2k_1u'e^{k_1x} + k_1^2ue^{k_1x}.$$

   Thay y_2, y_2', y_2'' vào (5.37) ta được

   $$e^{k_1x}[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0$$

Vì k_1 là nghiệm kép của (5.39) nên $k_1^2 + pk_1 + q = 0$ và

$$k_1 = -\frac{p}{2} \quad \text{hay} \quad 2k_1 + p = 0$$

Do đó $e^{k_1 x}.u'' = 0$ hay $u'' = 0$

Dẫn đến $u = Ax + B$.

Vì y_2 là nghiệm riêng nên ta có thể chọn $A = 1$, $B = 0$ và được $u = x$.

Vậy nghiệm tổng quát của (5.37) là

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} \quad \text{hay}$$

$$\boxed{y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x}.}$$

3. k_1 **và** k_2 **là hai nghiệm phức liên hợp**

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta.$$

Ta có hai nghiệm riêng của phương trình là

$$\overline{y_1} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}.e^{i\beta x}$$
$$\overline{y_2} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}.e^{-i\beta x}.$$

Theo công thức Euler đối với số phức ta có

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x, \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$$

Do đó

$$\overline{y_1} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$
$$\overline{y_2} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Vì $\overline{y_1}$ và $\overline{y_2}$ là nghiệm của (5.37) nên các hàm

$$y_1 = \frac{\overline{y_1} + \overline{y_2}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{và} \quad y_2 = \frac{\overline{y_1} - \overline{y_2}}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

cũng là nghiệm của (5.37). Hai nghiệm này độc lập tuyến tính vì

$$\frac{y_1}{y_2} = cotg\beta x \not\equiv const$$

Do đó nghiệm tổng quát của (5.37) là

$$y = C_1 e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

hay

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)}.$$

• **Ví dụ 24** Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

$$1.\ y'' + y' - 2y = 0$$
$$2.\ y'' - 4y' + 4y = 0$$
$$3.\ y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Giải

1. Giải $y'' + y' - 2y = 0$.

   Phương trình đặc trưng $k^2 + k - 2 = 0$ có hai nghiệm thực $k_1 = 1$ và $k_2 = -2$ nên nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

   $$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$$

2. Giải $y'' - 4y' + 4y = 0$.

   Phương trình đặc trưng $k^2 - 4k + 4 = 0$ có nghiệm kép $k = 2$ nên nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

   $$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}.$$

3. Giải $y'' + 2y' + 5y = 0$.

   Phương trình đặc trưng $k^2 + 2k + 5 = 0$ có hai nghiệm kép liên hợp $k_1 = -1 + 2i$, $k_2 = -1 - 2i$ nên nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

   $$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

• **Ví dụ 25** Lý thuyết về dao động thường liên quan đến phương trình (5.37) với $p = 0, q > 0$. Ta xét phương trình dạng

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

trong đó ω là hằng số dương.

Từ phương trình đặc trưng $k^2 + \omega^2 = 0$ ta tìm được $k_1 = \omega i$, $k_2 = -\omega i$.

Do đó $\quad y = C_1 cos\omega x + C_2 sin\omega x$

Nghiệm tổng quát có thể viết dưới dạng khác nếu ta đưa vào hai hằng số mới A và φ liên quan với C_1, C_2 bởi quan hệ

$$C_1 = Asin\varphi, \quad C_2 = Acos\varphi$$

Khi đó ta có

$$y = A(sin\varphi cos\omega x + cos\varphi sin\omega x) = Asin(\omega x + \varphi)$$

Với điều kiện ban đầu cho trước ta có thể xác định được C_1, C_2 (hoặc A và φ).

⊙ **Chú ý** Đối với phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số không đổi cấp cao hơn hai, phương pháp giải cũng tương tự như phương trình cấp hai mà ta đã trình bày ở trên.

• **Ví dụ 26** Giải phương trình $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.

Giải

Phương trình đặc trưng $k^3 - 4k^2 + 5k - 2 = 0$ có ba nghiệm

$$k_1 = k_2 = 1,\ k_3 = 2$$

nên nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{2x}.$$

• **Ví dụ 27** Giải phương trình $y^{(4)} - 16y = 0$.

Giải

Phương trình đặc trưng $k^4 - 16 = 0$ có bốn nghiệm

$$k_1 = 2,\ k_2 = -2,\ k_3 = 2i,\ k_4 = -2i$$

nên nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

3.4.2 Phương trình không thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{5.40}$$

trong đó p, q là các hằng số.

Theo định lý (5.8), sau khi biết được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (5.37), ta có thể tìm nghiệm tổng quát của (5.40) thông qua việc tìm một nghiệm riêng của nó bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Tuy nhiên đối với một số dạng đặc biệt của vế phải $f(x)$, có thể tìm một nghiệm riêng của (5.40) mà không cần phải dùng cách trên.

Ta tìm nghiệm riêng của (5.40) trong hai trương hợp dưới dây

a. Trường hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x}.P_n(x)$

trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n và α là hằng số.

Ta so sánh α với các nghiệm k_1, k_2 của phương trình đặc trưng (5.39). Ta có các trường hợp

1. **α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (5.39).**

   Ta tìm một nghiệm riêng của (5.40) dưới dạng

   $$\boxed{Y = e^{\alpha x}.Q_n(x)} \tag{5.41}$$

   trong đó $Q_n(x)$ là một đa thức cùng bậc với $P_n(x)$ có $n+1$ hệ số mà ta cần phải xác định bằng *phương pháp hệ số bất định* sau

   Lấy đạo hàm hai vế của (5.41) ta có

   $$Y' = \alpha Q_n(x)e^{\alpha x} + Q_n'(x)e^{\alpha x}$$
   $$Y'' = \alpha^2 Q_n(x)e^{\alpha x} + 2\alpha Q_n'(x)e^{\alpha x} + Q_n''(x)e^{\alpha x}.$$

   Thế Y, Y', Y'' vào (5.40) rồi thu gọn lại ta được

   $$e^{\alpha x}[Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x)] = e^{\alpha x}P_n(x).$$

hay

$$Q^{''}(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x) \quad (5.42)$$

Vì α không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$. Do đó vế trái của (5.42) là một đa thức bậc n, cùng bậc với vế phải. Đồng nhất các hệ số của các lũy thừa cùng bậc ở hai vế của (5.42) ta được $n+1$ phương trình bậc nhất với $n+1$ ẩn là các hệ số của đa thức $Q_n(x)$.

2. α **là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (5.39)** .

   Ta có $\alpha^2+p\alpha+q = 0$. Khi đó vế trái của (5.42) là đa thức bậc $n-1$. Muốn hàm dạng (5.41) nghiệm đúng phương trình (5.40) ta phải nâng bậc của đa thức $Q_n(x)$ lên một đơn vị. Ta tìm nghiệm riêng của (5.40) dưới dạng

$$\boxed{Y = xe^{\alpha x}Q_n(x)}$$

   và trở lại bước một.

3. α **là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (5.39)**

   Ta có $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ và $2\alpha + p = 0$. Khi đó vế trái của (5.42) là đa thức bậc $n-2$. Trường hợp này ta tìm nghiệm riêng của (5.40) dưới dạng

$$\boxed{Y = x^2e^{\alpha x}Q_n(x)}.$$

• **Ví dụ 28** Giải phương trình $y^{''} - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$.

GIẢI

* Ta tìm nghiệm tổng quát $\overline{y}$ của phương trình thuần nhất tương ứng.

Phương trình đặc trưng $k^2-4k+3 = 0$ có hai nghiệm $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng có dạng

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

* Tìm một nghiệm riêng Y của phương trình

Ta thấy $\alpha = -2$ khác k_1, k_2 và $P_n(x) = 10$ là đa thức bậc 0 nên ta tìm nghiệm riêng Y của phương trình dạng

$$Y = Ce^{-2x}.$$

Ta có $Y' = -2Ce^{-2x}$ và $Y'' = 4Ce^{-2x}$.

Thay Y, Y', Y'' vào phương trình ta được

$$4Ce^{-2x} - 4(-2Ce^{-2x}) + 3Ce^{-2x} = 10e^{-2x}$$

hay $4C + 8C + 3C = 10$. Suy ra $C = \frac{2}{3}$.

Do đó $Y = \frac{2}{3}e^{-2x}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \overline{y} + Y = C_1e^x + C_2e^{3x} + \frac{2}{3}e^{-2x}.$$

• **Ví dụ 29** Giải phương trình $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$.

Giải

* Tìm nghiệm tổng quát $\overline{y}$ của phương trình thu ần nhất tương ứng.

Phương trình đặc trưng $k^2 - 7k + 6 = 0$ có hai nghiệm $k_1 = 1, k_2 = 6$ nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{6x}.$$

* Tìm một nghiệm riêng Y của phương trình đã cho

Ta thấy $\alpha = 1 = k_1$ và $P_n(x) = x - 2$ nên ta tìm nghiệm riêng Y của phương trình dạng

$$Y = x(Ax + B)e^x$$

Ta có

$$Y' = [Ax^2 + (2A + B)x + B]e^x$$
$$Y'' = [Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B]e^x$$

Thay Y, Y', Y'' vào phương trình và thu gọn ta được

$$(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x - 2)e^x$$

hay $-10Ax - 5B + 2A = x - 2$.

Đồng nhất các hệ số của các lũy thừa cùng bậc ta được

$$-10A = 1, \quad -5B + 2A = -2.$$

Suy ra $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{9}{25}$.

Do đó $Y = x(-\frac{x}{10} + \frac{9}{25})e^x$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \overline{y} + Y = C_1e^x + C_2e^{6x} + x(-\frac{x}{10} + \frac{9}{25})e^x.$$

b. Trường hợp $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x] \quad (\beta \neq 0)$

trong đó $P_n(x)$ và $Q_m(x)$là các đa thức bậc n và m; α và β là các hằng số.

Tương tự như trường hợp trên, ta chứng minh được rằng

1. Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (5.39) thì một nghiệm riêng của phương trình (5.40) có dạng

$$\boxed{Y = e^{\alpha x}[U_r(x)\cos\beta x + V_r(x)\sin\beta x]}$$

2. Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì một nghiệm riêng của (5.40) có dạng

$$\boxed{Y = xe^{\alpha x}[U_r(x)\cos\beta x + V_r(x)\sin\beta x]}$$

trong đó $U_r(x), V_r(x)$ là các đa thức bậc $r = \max(m, n)$ có các hệ số mà ta cần xác định bằng phương pháp hệ số bất định.

• **Ví dụ 30** Giải phương trình $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$.

Giải

* Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

Phương trình đặc trưng $k^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm $k_1 = 1, k_2 = -1$ nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

* Tìm một nghiệm riêng Y của phương trình Ta thấy $\alpha \pm i\beta = 2 \pm i$ khác k_1 và k_2 và $f(x) = e^{2x}[3\cos x + 0\sin x]$ nên ta tìm nghiệm Y của phương trình dạng

$$Y = e^{2x}(A\cos x + B\sin x).$$

Ta có

$$Y' = e^{2x}[(2A + B)\cos x + (2B - A)\sin x]$$

$$Y'' = e^{2x}[(3A + 4B)\cos x + (-4A + 3B)\sin x]$$

Thay Y, Y', Y'' và phương trình và thu gọn ta được

$$e^{2x}[(2A + 4B)\cos x + (-4A + 2B)\sin x] = 3e^{2x}\cos x.$$

Đồng nhất các hệ số của $\cos x$ và $\sin x$ thì được

$$2A + 4B = 3, \quad -4A + 2B = 0.$$

Suy ra $A = \frac{3}{10}$, $\quad B = \frac{3}{5}$ Do đó $Y = e^{2x}(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x)$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \overline{y} + Y = C_2e^{x} + C_2e^{-x} + e^{2x}(\tfrac{3}{10}\cos x + \tfrac{3}{5}\sin x).$$

• **Ví dụ 31** Giải phương trình $y'' + 4y = \cos 2x$.

Giải

* Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

Phương trình đặc trưng $k^2 + 4 = 0$ có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = 2i$ và $k_2 = -2i$ nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\overline{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

* Tìm một nghiệm riêng Y của phương trình

Ta thấy $\alpha \pm i\beta = \pm 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng và

$$f(x) = e^{0x}[1.\cos x + 0\sin x]$$

nên ta tìm nghiệm riêng Y của phương trình dạng

$$Y = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

Thay Y, Y', Y'' vào phương trình thu gọn hai vế ta được

$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = \cos 2x$$

Đồng nhất các hệ số của $\cos 2x$ và $\sin 2x$ ta được

$$4B = 1, \quad -4A = 0 \quad \text{hay} \quad A = 0, \quad B = \tfrac{1}{4}.$$

Suy ra $Y = \frac{1}{4}x\sin 2x$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \overline{y} + Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \tfrac{1}{4}x\sin 2x.$$

• **Ví dụ 32** Giải phương trình $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

Giải

* Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm phức liên hợp $k = \pm i$ nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1\sin x + C_2\cos x.$$

* Ta dùng nguyên lý chồng chất nghiệm để tìm nghiệm riêng Y của phương trình không thuần nhất. Phương trình không thuần nhất có vế phải:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

trong đó $f_1(x) = xe^x$; $f_2(x) = 2e^{-x}$.

Ta thấy
$f_1(x) = xe^x$ với $\alpha = 1$ và $P_n(x) = x$
$f_2(x) = 2e^{-x}$ với $\alpha = -1$ và $P_n(x) = 2$.

Vậy một nghiệm riêng Y của phương trình không thuần nhất có dạng

$$Y = Y_1 + Y_2 = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}$$

trong đó Y_1 là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất với vế phải $f_1(x) = xe^x$ và Y_2 là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất với vế phải $f_2(x) = 2e^{-x}$. Tính đạo hàm ta có

$$Y' = (Ax + A + B)e^x - Ce^{-x}$$

$$Y'' = (Ax + 2A + B)e^x + Ce^{-x}$$

Thay vào phgương trình ta được:

$$A = \tfrac{1}{2};\ B = -\tfrac{1}{2};\ C = 1$$

và nghiệm riêng

$$Y = \tfrac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \tfrac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}.$$

⊙ **Chú ý** Đối với phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp cao hơn hai có hệ số không đổi, phương pháp tìm nghiệm riêng cũng thương tự như trên.

• **Ví dụ 33** Giải phương trình $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$.

Giải

Phương trình đặc trưng $k^3 - 3k + 2 = 0$ có các nghiệm

$$k_1 = k_2 = 1, \quad k_3 = -2$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\overline{y} = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{-2x}.$$

Ta thấy $\alpha = -1$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$Y = e^{-x}(Ax^2 + Bx + C)$$

Lấy đạo hàm của Y, ta được

$$Y' = e^{-x}[-Ax^2 + (2A - B)x + B - C]$$

$$Y'' = e^{-x}[Ax^2 + (B - 2A)x + 2A - 2B + C]$$

$$Y''' = e^{-x}[-Ax^2 + (6A - B)x + 3B - 6A - C]$$

Thay Y, Y'', Y''' vào phương trình đã cho và rút gọn, ta được

$$4Ax^2 + 4Bx - 6A + 4C = 4x^2 + 4x - 10$$

Suy ra

$$A = 1,\ B = 1,\ C = -1.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{-2x} + e^{-x}(x^2 + x - 1).$$

• **Ví dụ 34** Giải phương trình $y^{(4)} - y = 5\cos x$.

Giải

Phương trình đặc trưng $k^4 - 1 = 0$ hay có bốn nghiệm

$$k_1 = 1,\ k_2 = -1,\ k_3 = i,\ k_4 = -i$$

nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

Ta thấy vế phải có dạng $f(x) = e^{0x}[5\cos x + 0\sin x]$ với $\alpha \pm i\beta = \pm i$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng, do đó một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$Y = x(A\cos x + B\sin x).$$

Tính các đạo hàm của Y rồi thay vào phương trình đã cho, ta tìm được

$$-4B\cos x + 4A\sin x = 5\cos x.$$

Đồng nhất các hệ số của $\cos x$ và $\sin x$ ta được

$$4A = 0,\ -4B = 5 \quad \text{hay} A = 0,\ B = -\frac{5}{4}.$$

Suy ra một nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$Y = -\frac{5}{4}x\sin x.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x - \frac{5}{4}\sin x.$$

4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.1 Các khái niệm cơ bản

□ **Định nghĩa 17** Hệ phương trình vi phân là hệ các phương trình chứa biến độc lập, các hàm phải tìm và các đạo hàm của chúng.

Hệ phương trình vi phân cấp một chính tắc là hệ phương trình vi phân có dạng

$$\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array} \tag{5.43}$$

trong đó x là biến độc lập, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là các hàm phải tìm.

□ **Định nghĩa 18 (Nghiệm của hệ phương trình vi phân)** Nghiêm của hệ
phương trình vi phân (5.43) là tập hợp n hàm

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), \ldots,\ y_n = \varphi_n(x)$$

thỏa mãn tất cả các phương trình của hệ.

Nghiệm tổng quát của hệ (5.43) là tập hợp n hàm

$$\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{array}$$

thỏa mãn tất cả các phương trình của hệ, trong đó $C_1, C_2, \ldots, C_n$ là các hằng số tùy ý.

Nghiệm riêng của hệ (5.43) là nghiệm của hệ có được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho các hằng số $C_1, C_2, \ldots, C_n$ các giá trị cụ thể $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$.

⊙ **Ý nghĩa hình học**

Mọi nghiệm riêng của hệ (5.43) được biểu diễn bởi một đường cong trong không gian $\mathbf{R}^{n+1}$ trong không gian mà ta gọi là *đường cong tích phân*.

Δ **Định lý 5.10 (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm)** *Nếu các hàm* $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \ldots, f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ *liên tục trong miền chứa điểm* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *thì tồn tại một nghiệm* $y = y_1(x), y = y_2(x), ..., y = y_n(x)$ *của hệ (5.43) thỏa mãn các điều kiện*

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0$$

trong đó $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ *là các số cho trước .*

Hơn nữa, nếu các đạo hàm riêng $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *đều liên tục thì nghiệm đó là duy nhất.*

Về phương diện hình học, định lý (5.10) cho ta thấy nếu các điều kiện của định lý được thỏa thì tồn tại một đường cong tích phân duy nhất đi qua điểm $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ của không gian $\mathbf{R}^{n+1}$.

4.2 Giải hệ phương trình vi phân bằng phương pháp khử

Trong một số trường hợp ta có thể đưa việc giải hệ phương trình vi phân về việc giải một phương trình vi phân cấp cao chứa một hàm chưa biết bằng cách lấy đạo hàm một phương trình vi phân của hệ, ta chỉ giữ lại một hàm chưa biết cùng với các đạo hàm của nó và dựa vào các phương trình khác của hệ ta khử các hàm chưa biết khác cùng với các đạo hàm của chúng.

• **Ví dụ 35** Tìm nghiệm riêng của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z + x \\ \frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \end{cases}$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Giải

Lấy vi phân phương trình đầu đối với biến x, ta được

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1. \tag{5.44}$$

Thay $\frac{dy}{dx}$ và $\frac{dz}{dx}$ từ phương trình của hệ vào (5.44) ta được

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y + z + x) + (-4y - 3z + 2x) + 1 \quad (i)$$

hay $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1.$

Mặt khác từ phương trình đầu của hệ ta có

$$z = \frac{dy}{dx} - y - x \quad (ii)$$

thay vào (i) ta được

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2\left(\frac{dy}{dx} - y - x\right) + 3x + 1$$

hay $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = 5x + 1.$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - 9$$

Từ (ii) ta có

$$z = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14.$$

Với điều kiện ban đầu $y(0) = 1,\ z(0) = 0$ thì

$$C_1 - 9 = 1,\ C_2 - 2C_1 + 14 = 0.$$

Giải ra ta được $C_1 = 10,\ C_2 = 6.$

Vậy nghiệm riêng của hệ ứng với điều kiện ban đầu là

$$y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9,\ z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14.$$

• **Ví dụ 36** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$$

Giải

Lấy vi phân phương trình đầu đối với biến t ta được

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = (x + z) + (x + y) = 2x + y + z.$$

Khử các biến y và z từ các phương trình

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z$$

ta nhận được

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} = 2x.$$

Phương trình trên có nghiệm tổng quát

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

Từ đây ta có

$$\frac{dx}{dt} = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}$$

và

$$y = \frac{dx}{dt} - z = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} - z \quad (*)$$

Thay x và y vào phương trình thứ ba của hệ thì được

$$\frac{dz}{dt} + z = 3C_2e^{2t}.$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát

$$z = C_3e^{-t} + C_2e^{2t}$$

Từ phương trình $(*)$ ta nhận được

$$y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

Vậy nghiệm của hệ là

$$\begin{array}{rcc} x & = & C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \\ y & = & -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t} \\ z & = & C_3e^{-t} + C_2e^{2t} \end{array}$$

• **Ví dụ 37** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = z \\ \frac{d^2z}{dx^2} = y \end{cases}$$

Giải

Lấy vi phân hai lần phương trình đầu theo biến x, ta được $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2z}{dx^2}$.

Mà $\frac{d^2z}{dx^2} = y$ nên ta được phương trình vi phân cấp bốn $\frac{d^4y}{dx^4} = y$.

Phương trình này có nghiệm tổng quát

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$$

Tính $\frac{d^2y}{dx^2}$ rồi thay vào phương trình đầu của hệ thì

$$z = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3\cos x - C_4\sin x$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{aligned} y &= C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x \\ z &= C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3\cos x - C_4\sin x. \end{aligned}$$

4.3 Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với hệ số không đổi

□ **Định nghĩa 19** Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với hệ số không đổi là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \tag{5.45}$$

trong đó x là biến độc lập; $y_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ là các hàm phải tìm và a_{ij} $(i = 1, \ldots, n\,;\, j = 1, \ldots, n)$ là các hằng số.

⊕ **Nhận xét** Nếu gọi

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad , \quad Y' = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

thì (5.45) có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$Y' = AY \tag{5.46}$$

△ **Định lý 5.11** *Nếu $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ là nghiệm của (5.46) thì $Y = C_1Y^{(1)} + C_2Y^{(2)}$, trong đó C_1 và C_2 là các hằng số tùy ý, cũng là nghiệm của (5.46).*

□ **Định nghĩa 20**

i) Định thức

$$W(Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n)}) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \ldots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)} \\ \ldots & & & \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$\text{trong đó} \quad Y^{(i)} = \begin{bmatrix} y_1^{(i)} \\ y_2^{(i)} \\ \vdots \\ y_n^{(i)} \end{bmatrix} \;; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

được gọi là định thức Wroski của hệ $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n)}$.

ii) Hệ n nghiệm độc lập tuyến tính $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n)}$ của (5.46) được gọi là hệ nghiệm cơ sở của (5.46).

△ **Định lý 5.12** *Hệ n nghiệm $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n)}$ là hệ nghiệm cơ sở của (5.46) khi và chỉ khi $W(Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n)}) \neq 0$.*

△ **Định lý 5.13** *Nếu $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n)}$ là hệ nghiệm cơ sở của (5.46) thì*

$$Y = C_1Y^{(1)} + C_2Y^{(2)} + \ldots + C_nY^{(n)}$$

là nghiệm tổng quát của (5.46).

⊙ Cách giải (5.46)

Xét $Y' = AY$ (5.46) với $A = [a_{ij}]$ là ma trận vuông cấp n.

Ta thấy phương trình đơn $y' = ky$ có nghiệm $y = Ce^{kx}$. Tương tự như vậy, ta thử tìm nghiệm của (5.46) dưới dạng

$$Y = Pe^{\lambda x} \tag{5.47}$$

bằng cách thay Y vào (5.46), trong đó $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$.

Ta có

$$Y' = \lambda P e^{\lambda x} = AY = APe^{\lambda x}$$

Suy ra $AP = \lambda P$ hay

$$(A - \lambda I)P = 0 \tag{5.48}$$

(5.48) luôn có nghiệm tầm thường $P = 0$. Giá trị λ ứng với trường hợp (5.48) có nghiệm khác không P được gọi là giá trị riêng của ma trận A và P là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

Để (5.48) có nghiệm không tầm thường thì

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.49}$$

(5.49) được gọi là *phương trình đặc trưng* của hệ.

Giả sử (5.48) có n nghiệm độc lập lập tuyến tính $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(n)}$ tương ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là nghiệm của (5.49).

Khi đó (5.47) có n nghiệm

$$Y^{(1)} = P^{(1)}e^{\lambda_1 x},\ Y^{(2)} = P^{(2)}e^{\lambda_2 x}, \dots, Y^{(n)} = P^{(n)}e\lambda_n x.$$

Ta thấy

$$W(Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(n)}) = \begin{vmatrix} p_1^{(1)}e^{\lambda_1 x} & p_1^{(2)}e^{\lambda_2 x} & \dots & p^{(n)}e^{\lambda_n x} \\ p_2^{(1)}e^{\lambda_1 x} & p_2^{(2)}e^{\lambda_2 x} & \dots & p^{(n)}e^{\lambda_n x} \\ \dots\dots\dots & & & \\ p_n^{(1)}e^{\lambda_1 x} & p_n^{(2)}e^{\lambda_2 x} & \dots & p^{(n)}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{\lambda_1 x + \dots + \lambda_n x} \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_1^{(2)} & \dots & p_1^{(n)} \\ p_2^{(1)} & p_2^{(2)} & \dots & p_2^{(n)} \\ \dots & & & \\ p_n^{(1)} & p_n^{(2)} & \dots & p_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$$

vì $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(n)}$ độc lập tuyến tính.

Do đó $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n)}$ là hệ nghiệm cơ sở của (5.47).

Vậy nghiệm tổng quát của (5.47) là

$$Y = C_1 Y^{(1)} + Y^{(2)} + \ldots + C_n Y^{(n)}.$$

• **Ví dụ 38** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 - 3y_2. \end{cases}$$

Giải

Lập phương trình đặc trưng của hệ

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0.$$

Ta được hai giá trị riêng $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$.

• Với $\lambda_1 = -2$ ta có hệ phương trình xác định vectơ riêng

$$\begin{cases} -p_1 + p_2 = 0 \\ p_1 - p_2 = 0 \end{cases}$$

thực ra chỉ cần dùng một phương trình vì một phương trình của hệ là hệ quả của phương trình còn lại. Ta có $p_1 = p_2$.

Nếu chọn $p_1 = 1$ thì $p_2 = 1$.

Do đó ta có vectơ riêng ứng với $\lambda_1 = -2$ là $P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

• Với $\lambda = -4$, tương tự ta được $p_1 + p_2 = 0$. Suy ra $p_1 = -p_2$.

Nếu chọn $p_1 = 1$ thì $p_2 = -1$. Ta có vectơ riêng ứng với $\lambda_2 = -4$ là $P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Khi đó ta được hệ nghiệm cơ bản là

$$Y^{(1)} = P^{(1)} e^{\lambda_1 x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2x}, \quad Y^{(2)} = P^{(2)} e^{\lambda_2 x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4x}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là $Y = C_1Y^{(1)} + C_2Y^{(2)}$ hay

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4x}.$$

• **Ví dụ 39** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 - 12y_2 - y_3 \\ y_2' = y_1 - 3y_2 - y_3 \\ y_3' = -4y_1 + 12y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

Giải

Lập phương trình đặc trưng của hệ

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -12 & -1 \\ 1 & -3-\lambda & -1 \\ -4 & 12 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

Giải phương trình trên ta được $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

• Với $\lambda_1 = 1$ ta có hệ phương trình xác định vectơ riêng

$$\begin{cases} 5p_1 - 12p_2 - p_3 = 0 \\ p_1 - 4p_2 - p_3 = 0 \\ -4p_1 + 12p_2 + 2p_3 = 0 \end{cases}$$

Vì một trong ba phương trình là hệ quả của hai phương trình còn lại nên ta chỉ cần giải hệ với hai phương trình đầu

$$\begin{cases} 5p_1 - 12p_2 - p_3 = 0 \\ p_1 - 4p_2 - p_3 = 0 \end{cases}$$

Cho $p_1 = 1$ và giải hệ này ta được $p_2 = 2$, $p_3 = -3$. Do đó vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ là $P^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Tương tự

• Với $\lambda_2 = 2$ ta có vectơ riêng $P^{(2)} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$,

• Với $\lambda_3 = 3$ ta có vectơ riêng $P^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$,

Ta được hệ nghiệm cơ bản

$$Y^{(1)} = P^{(1)} e^{\lambda_1 x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^x,$$

$$Y^{(2)} = P^{(2)} e^{\lambda_2 x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} e^{2x},$$

$$Y^{(3)} = P^{(3)} e^{\lambda_3 x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{3x}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là $Y = C_1 Y^{(1)} + C_2 Y^{(2)} + C_3 Y^{(3)}$ hay

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^x + C_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} e^{2x} + C_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{3x}.$$

5. BÀI TẬP

1. Giải các phương trình
   (a) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$;
   (b) $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$;
   (c) $xy' - y^2 + 1 = 0$;
   (d) $y' \cot x + y = 2$;
   (e) $e^x \tan y dx + (1+e^x)\dfrac{dy}{\cos^2 y} = 0$;
   (f) $(1+y)(e^x dx - e^{2y} dy) - (1+y^2)dy = 0$;
   (g) $y' = \cos(x-y)$.
2. Tìm phương trình của đường cong trong mặt phẳng đi qua điểm $(2,3)$ và có hệ số góc của tiếp tuyến tại mỗi điểm trên đường cong là $\dfrac{2x}{1+y^2}$.

3. Giải các phương trình sau

   (a) $y^2 + x^2y' = xyy'$;

   (b) $x\dfrac{dy}{dx} = y + x\cos^2(\dfrac{y}{x})$;

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + xy}{xy + y^2}$;

   (d) $xy' = xe^{y/x} + y + x$;

   (e) $x^2y' - y^2 - xy = x^2$.

4. Giải các phương trình vi phân sau

   (a) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{x}y = x^2$;

   (b) $y' + y\cos x = 2xe^{-\sin x}$; $\quad y(\pi) = 0$;

   (c) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$;

   (d) $(1+x^2)y^{'} - 2xy = (1+x^2)^2$;

   (e) $y^{'} - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$; $\quad y(e) = \dfrac{1}{2}e^2$;

   (f) $y^{'} = \sin 2x + y\tan x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$.

5. Giải các phương trình sau

   (a) $y^{'} + \dfrac{2}{x}y = 3x^2y^{4/3}$;

   (b) $y' + y = e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{y}$; $\quad y(0) = \frac{9}{4}$;

   (c) $ydx + (x + x^2y)dy = 0$;

   (d) $y^{'} + \dfrac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$.

6. Kiểm tra các phương trình vi phân sau là phương trình vi phân toàn phần và giải chúng

   (a) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$;

   (b) $(2x + \sin y - ye^{-x})dx + (x\cos y + \cos y + e^{-x})dy = 0$;

   (c) $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$;

(d) $\left(\dfrac{x}{\sin x}+2\right)dx-\dfrac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2 y}dy=0.$

7. (a) Giải phương trình $(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+(x^2+y^2)dy=0$ bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\mu(x)$.

   (b) Giải phương trình $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$ bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\mu(x)$.

   (c) Giải phương trình $(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0$ bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\mu(y)$.

8. Giải các phương trình vi phân cấp hai sau

   (a) $y^{''}=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$;

   (b) $y^{''}=xe^{-x};\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$;

   (c) $y^{''}=x-\dfrac{y'}{x}$;

   (d) $(1+x^2)y^{''}=2xy'$;

   (e) $yy^{''}-y'^2=0$;

   (f) $(y^{''})^2=y'$;

   (g) $xy^{''}-y'=x^2\ln x$.

9. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $(x^2+1)y^{''}-2xy'+2y=0$ nếu biết một nghiệm riêng $y_1=x$.

10. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $(x-1)y^{''}-xy'+y=0$ nếu biết một nghiệm riêng $y_1=e^x$.

11. Giải phương trình $x^2y^{''}-xy'+y=4x^3$.

12. Giải các phương trình sau

    (a) $y^{''}-4y'+3y=0$;

    (b) $2y^{''}-5y^{'}+2y=0$;

    (c) $y^{''}-2y'+y=0$;

    (d) $y^{''}+4y=0$.

13. Giải các phương trình sau

    (a) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$;

    (b) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$;

    (c) $y'' - 9y' + 20y = x^2e^{4x}$;

    (d) $y'' - 2y' + y = x + 1$;

    (e) $y'' + y = 4\sin x$;

    (f) $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;

    (g) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$;

    (h) $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2$.

14. Giải các hệ phương trình sau:

$$(a)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + xy \\ \dfrac{dy}{dt} = xy + y^2 \end{cases}$$

15. Giải các hệ phương trình sau:

$$(a) \begin{cases} y_1' = 7y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 6y_1 + 4y_2 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

PHẦN TRẢ LỜI BÀI TẬP

⊙ Chương 1

1. (a) $(x,y) \neq (0,0)$; (b) (x,y) với $xy > -1$; (c) Hình elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$;

(d) Tập các điểm (x,y) thỏa $1 - x \leq y \leq 1 + x$, $(x > 0)$, $1 + x \leq y \leq 1 - x$, $(x < 0)$. Tại $x = 0$ hàm không xác định.

(e) Tập các điểm thỏa $2k \leq x^2 + y^2 \leq 2k + 1$; $k \geq 0$; $k \in \mathbf{Z}$;

(f) Phần không gian giữa hai mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ và $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ kể cả mặt ngoài nhưng không kể mặt trong.

2. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{4}$.

3. (a) a; (b) 0; (c) $\ln 2$; (d) e; (e) 0; (f) 0.

4. (a) liên tục; (b) không liên tục.

5. (a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} - \dfrac{y}{3\sqrt[3]{y^4}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

(b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$,
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$;

(c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. Tại $(-1,1)$ thì $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}$.

(d) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\ln z x^{(y\ln z - 1)}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \ln x \ln z x^{u\ln z}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{y\ln x}{z} x^{y\ln z}$.
Tại $(e,2,e)$ thì $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2e$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^2$

6. $f'_x(0,0) = 2$; $f'_y(0,0) = -1/3$. **8.** $dz = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

9. (a) 0,005; (b) 0,0814; (c) 3,019; (d) 1,99.

10. (a) $z = -4x - 2y - 3$, $\dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

(b) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{x-\pi}{4} + \frac{\pi}{16}(y-4),$

$\frac{x-\pi}{-1/4\sqrt{2}} = \frac{y-4}{\pi/16\sqrt{2}} = \frac{z-1/\sqrt{2}}{-1}.$

(c) $z = \frac{2}{5} + \frac{3}{25}x - \frac{4}{25}y,\ \ \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1/5}{-25}.$

11. (a) $\frac{dz}{dt} = e^{2t}\left[1 + \frac{e^t+2t}{e^t+t^2} + 2(t + ln(e^t+t^2))\right]$

(b) $\frac{\partial z}{\partial u} = 2\frac{u}{v^2}\ln(3u-2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u-2v)},$

$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$

(c) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{x};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(y^4-1)}{y(y^4+1)}.$

12. (a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -ye^x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = e^y - e^x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xe^y$

(b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}};$ (c) $dps\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial^2 y} = 2e^x.$

13. $f(x,y) = x^4y + 1.$ **14.** $f^{"}_{xy}(0,0) = -1;\quad f^{"}_{yx}(0,0) = 1.$

17. (a) $\frac{-\vec{i} + \frac{\pi}{4}\vec{j}}{4\sqrt{2}},\ \ y = 4x + 4(1-\pi);$ (b) $\frac{2}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j},\ \ y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

18. (a) $4/\sqrt{5}$, (b) $1 - 2\sqrt{3}$. **19.** $-\vec{i} - \vec{j}$

20. (a) $y' = \frac{e^y + ye^x - ye^{xy}}{xe^{xy} - e^x - xe^y},$ (b) $y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}$

(c) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z-y^4}{2yz-x},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3xy^4+xz}{xy-2y^2z}$

21. y = 0. **22.** $x - 2y + 3z = 14.$

23. (a) $z_{max} = 8$ tại $(2,-2)$;

(b) $z_{min} = 0$ tại $(0,0)$, $z_{max} = e^{-1}$ tại các điểm của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$;

(c) $z_{min} = -1$ tại (1,1); z không đạt cực trị tại $(0,0)$;

(d) $z_{min} = 0$ tại $(0,0)$; (e) $z_{min} = 30$ tại $(5,2)$;

(f) $z_{max} = 1$ tại $(0,0)$.

24. (a) $z_{min} = \frac{36}{13}$ tại $(\frac{18}{13}, \frac{12}{13})$;

(b) $z_{min} = -\frac{2}{a}$ tại $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$, $z_{max} = \frac{\sqrt{2}}{a}$ tại $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$.

25. $z_{min} = -8$, $z_{max} = 8$.

26. (a) $z_{min} = -2$, $f_{max} = 5/4$;

(b) $z_{max} = 4$ tại $(-2,0)$ và $(2,0)$, $z_{min} = -4$ tại $(0,-2)$ và $(0,2)$;

(c) $z_{max} = 4$ tại $(2,1)$, $z_{min} = -64$ tại $(4,2)$;

(d) $z_{min} = 0$ tại $(0,0)$, $z_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ tại $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$;

(e) $z_{max} = z(2,1) = \frac{4}{e^3}$, $z_{min} = 0$ trên $y = 0$ $(0 < x < 4)$ và $x = 0$ $(0 < y < 4)$;

(f) $z_{min} = z(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$, $z_{max} = z(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{9}{4}$;

(g) $z_{min} = 0$ tại $x = 0$ $(0 \le y \le 1)$ và $z_{\max} = 1$ tại (1,0).

27. $T_{min} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$, $T_{max} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ **28.** Các cạnh có độ dài 4, 4, 2

⊙ Chương 2

1. (a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx$

(b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-2y}^{2y} f(x,y)dx = \int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_{-x/2}^1 f(x,y)dy + \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x/2}^1 f(x,y)dy$

2. (a) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dy$, (b) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_1^3 f(x,y)dy + \int\limits_2^6 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^3 f(x,y)dy$.

(c) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{3-2x} f(x,y)dy$. (d) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

3. (a) 8, (b) $4\dfrac{4}{15}$, (c) $\dfrac{1006}{105}$, (d) $\dfrac{1}{2}$, (e) $-\dfrac{1}{504}$, (f) $\dfrac{4}{5}a^5$.

4. (a) $\dfrac{2(2\sqrt{2}-1)}{9}ln3$, (b) $\dfrac{2ab\pi}{3}$.

5. (a) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{acos\varphi} f(rcos\varphi, rsin\varphi)dr$, (b) $\int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{bsin\varphi} f(rcos\varphi, rsin\varphi)dr$

(c) $\int\limits_{0}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{4cos\varphi}^{8cos\varphi} f(rcos\varphi, rsin\varphi)dr$

6. (a) , (b) $\dfrac{a^3\pi}{6}$, (c) $(\dfrac{3}{2}e^2-1)\dfrac{e^2\pi}{2}$, (d) $-6\pi^2$, (e) $\dfrac{\pi^2}{6}$,
(f) π, (g) 0 (h) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}$.

7. (a) $\dfrac{7}{30}$, (b)$\dfrac{1}{6}$, (c) $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$, (d) 1.

8. (a) $\dfrac{88}{105}$đvtt, (b) $\dfrac{32}{3}$đvtt, (c) $\dfrac{\pi}{2}$đvtt, (d) $\dfrac{3}{35}$đvtt, (e) $\dfrac{32}{9}$đvtt,
(f) π đvtt.

9. (a) $\pi\sqrt{5}$, (b) $\pi\sqrt{2}$.

10. $I_x=\dfrac{12}{5}$. **11.** $(\dfrac{45}{28}, \dfrac{279}{70})$ **12.** $\dfrac{3}{8}$

13. (a) $10\ln\dfrac{4}{5}$, (b) $\dfrac{1}{2}$. **14.** $\dfrac{1}{2}(\dfrac{\pi^2}{8}-1)$

15. (a) $\dfrac{\pi h^4}{4}$, (b) $\dfrac{\pi}{6}$, (c) $\dfrac{16\pi}{3}$. **16.** (a) $\dfrac{8}{3}(\pi-\dfrac{4}{3})R^3$, (b) $\dfrac{4}{15}\pi R^5$

17. (a) $\dfrac{R^6}{8}$, (b) $\dfrac{\pi}{10}$, (c) $\dfrac{4(b^5-a^5)\pi}{15}$

18. $\dfrac{4}{5}\pi\lambda$ (λ là hằng số tỷ lệ) **19.** $\dfrac{512}{75}a^5$ **20.** $V=32$; $(\dfrac{3}{4}, 3, \dfrac{8}{5})$.

⊙ Chương 3

1. $\vec{a}=-3\pi^2\vec{i}-4\pi^2\vec{j}$. **2.** $\vec{v}=\frac{\sqrt{6}}{2}(-\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})$.

5. Chọn (b) thì $\vec{r}=\frac{t^2-1}{2}\vec{i}+t\vec{j}+\frac{t^2+1}{2}\vec{k}$; Chọn (a) thì $\vec{r}=t\vec{i}\pm\sqrt{1+2t}\vec{j}+(1+t)\vec{k}$, $(t\geq -1/2)$.

6. $\sqrt{2e^{4\pi}+1}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln\frac{e^{4\pi}+1-\sqrt{2e^{4\pi}+1}}{e^{4\pi}}-\frac{1}{2}\ln(2-\sqrt{3})$ đvđd.

7. (a) $1/2$, $27/2$; (b) $3/(4\sqrt{2})$.

8. (a) $\hat{T} = (\vec{i} + 2\vec{j})/\sqrt{5}$, $\hat{N} = (-2\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{5}$, $\hat{B} = \vec{k}$

(b) $\hat{T} = \vec{k}$, $\hat{N} = \vec{j}$, $\hat{B} = \vec{i}$

9. a) $\hat{T} = \vec{i}$, $\hat{N} = \dfrac{2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{5}}$, $\hat{B} = \dfrac{2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{5}}$, $\kappa = \sqrt{5}$, $\tau = 0$;

b) $\hat{T} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}(\vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k})$, $\hat{B} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + t^4}}(t^2\vec{i} - 2t\vec{j} + \vec{k})$,

$\hat{N} = \dfrac{-(t + 2t^3)\vec{i} + (1 - t^4)\vec{j} + (t^3 + 2t)\vec{k}}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}\sqrt{1 + 4t^2 + t^4}}$,

$\kappa = \dfrac{\sqrt{1 + 4t^2 + t^4}}{(1 + t^2 + t^4)^{3/2}}$, $\tau = \dfrac{2}{1 + 4t^2 + t^4}$.

10. (a) $\dfrac{25}{3}$, (b) $\dfrac{80\sqrt{10}}{3}$, (c) $2\sqrt{2}$. **11.** (a) $\left(\dfrac{43}{68}, \dfrac{26}{51}\right)$, (b) (2,2).

12. (a) $Y^2 = \dfrac{16}{27}X^3$; (b) $X = \dfrac{a^2 + b^2}{a^4}x^3$, $Y = \dfrac{a^2 + b^2}{b^4}y^3$;

(c) $X^2 + Y^2 = a^2$;

(d) $X = \pi a + a(r - sinr), Y = -2a + a(1 - cosr)$, $r = t - \pi$.

⊙ Chương 4

1. (a) $y = x^2 + C$; (b) $y = C_1 x$, $2x = z^2 + C_2$.

2. (a) $\phi = \frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{3z^2}{2}$; (b) $\phi = x^2 y + y^2 z - z^2 x$

3. $\phi = \frac{x^2+y^2}{z}$, mặt đẳng thế là các paraboloid $z = C(x^2 + y^2)$, đường cong tích phân là các elip $\{x^2 + y^2 + 2z^2 = A, y = Bx\}$ trong các mặt phẳng qua gốc.

5. (a) $a^{7/3}$; (b) $\frac{14}{9}$; (c) $\frac{a^2(\pi-2)}{4}$; (d) $3\sqrt{14}$.

6 (a) $m = 2\sqrt{2}\pi^2$, $(0, -1/\pi, 4\pi/3)$; (b) 1.

7. (a) $-\dfrac{1}{4}$; (b) 0; (c) $\dfrac{7}{3}$. **8.** $a^2\pi$. **9.** 19/2. **10.** $\frac{\pi R^4}{2}$.

11. $\frac{m\pi a^2}{8}$. **12.** (a) $S = \frac{3\pi a^2}{8}$; (b) $S = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}$.

13. (a) 8; (b) $\ln 2 + \frac{1}{4}$.

14 (a) $\frac{\pi}{8}$; (b) 1/96; (c) $\frac{4}{3}\pi R^4$; (d) $4\sqrt{61}$

15. (a) $-\frac{\pi R^4}{2}$; (b) $4\pi a^3$. **16.** $\pi(3a^2 - 4ab + b^2)/2$.

17. (a) π; (b) $\frac{1}{8}$. **18.** 0

19. $-\frac{\pi R^6}{8}$ (có thể tính trực tiếp hoặc chuyển sang tích phân theo mặt $\mathcal{S}$ là nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. **20.** $-a^3$.

⊙ Chương 5

1. (a) $\ln|x| + C = \sqrt{y^2+1}$; (b) $(1+x^2)(1+y^2) = C$,

(c) $y = \dfrac{1 - Cx^2}{1 + Cx^2}$; $y = \pm 1$, (d) $y = 2 + C\cos x$, (e) $(e^x + 1)\tan y + C$,

(f) $e^x - \dfrac{1}{2}e^{2y} - \dfrac{y^2}{2} + 2y - 2\ln|y+1| = C$, $y = -1$,

(g) $x + cotg\dfrac{x-y}{2} = C$.

2. $y^3 + 3y - 3x^2 = 24$.

3. (a) $y = Ce^{\frac{y}{x}}$; (b) $y = x\tan^1(\ln|Cx|)$; (c) $x^2 - y^2 = C$

(d) $e^{y/x} = \frac{Cx}{1-Cx}$; (e) $arctg\frac{y}{x} = \ln|x| + C$.

4. (a) $y = x^3 + Cx^2$; (b) $y = (x^2 - \pi^2)e^{-\sin x}$; (c) $y = \frac{1}{x}e^{-x}(x^3 + C)$;

(d) $y = (1+x^2)(C+x)$; (e) $y = \frac{1}{2}x^2\ln x$; (f) $y = \frac{C}{\cos x} - \frac{2}{3}\cos^2 x$.

5. (a) $y^{-1/3} = Cx^{2/3} - \frac{3}{7}x^3$; (b) $y = e^{-x}(\frac{1}{2}e^x + 1)^2$;

(c) Hướng dẫn: xem x là hàm của y. Đáp số $x = \frac{1}{y(y+C)}$.

(d) Tích phân tổng quát $\sqrt{y} = C\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)$; $y = 0$ là nghiệm kỳ dị.

6. (a) $x^2y - \frac{1}{3}y^3 = C$; (b) $x^2 + x\sin y + ye^{-x} + \sin y = C$;

(c) $\ln x(2y-1) + \frac{y^4}{4} - \frac{1}{4} = C$; (d) $\frac{x^2+1}{2\sin y} + 2x = C$.

7. (a) $e^x(x^2y + \frac{y^3}{3}) = C$; (b) $-\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} = C$; (c) $x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = C$.

8. (a) $y = \frac{1}{3}\sin^3 x + C_1x + C_2$; (b) $y = (x+2)e^{-x} + x - 1$;

(c) $y = \frac{x^3}{9} + C_1\ln|x| + C_2$; (d) $y = x^3 + 3x + 1$;

(e) $y = C_2 e^{C_1 x}$; (f) $y = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2$;

(g) $y = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{4}{9}x^3 + C_1 x^2 + C_2$.

9. $y = C_1 x + C_2(x^2 - 1)$. **10.** $y = C_1 e^x + C_2 x$.

11. $y = x^3 + C_1 x + C_2 x \ln |x|$.

12. (a) $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$; (b) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x/2}$; (c) $y = (C_1 + C_2 x)e^x$

(d) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

13. (a) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}$; (b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right) e^x$;

(c) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{4x} - (\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x)e^{4x}$;

(d) $y = e^x(C_1 x + C_2) + x + 3$;

(e) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x$; (f) $y = e^x + \sin x$;

(g) $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + +\frac{1}{4}e^{2x} + 0,1 \cos 2x + 0,05 \sin 2x$;

(h) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xe^{2x}(Ax + B) + e^{2x}[(Cx + D) \cos x + (Ex + F) \sin x)]$

14

$$\text{(a)}\begin{cases} x = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y = C_1(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}t} + C_2(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t} \end{cases}$$

$$\text{(b)}\begin{cases} x = -\dfrac{1}{(1 + C_1)t + C_2} \\ y = \dfrac{C_1}{(1 + C_1)t + C_2} \end{cases}$$

15

$$(a) \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^x + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{10x}$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^x + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x} +$$

$$+C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-x}$$

.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Robert A. Adams. Calculus. Addision-Wesley Publishers Limited, 3rd Edition, 1990.

2. H. Anton, Calculus, 6th Edition, John Wiley & Son, Inc,1999.

3. A. F. Bermant & I. G. Aramanovich, Mathematical Analysis. 2nd Edition, Mir Publishers, Moscow, 1993.

4. Đậu Thế Cấp, Giải tích toán học, NXB Giáo dục - Hà Nội, 2007.

5. Nguyễn Viết Đông, Toán cao cấp, NXB Giáo dục - Hà Nội, 1999.

6. Steven A. Douglass, Intrpoduction to Mathematical Analysis, Addison-Wesley, 1996.

7. A. Himonas & A. Howard, Calculus: Ideas & Applications, John Wiley & Son, NewYork, 2003.

8. Phan Quốc Khánh, Phép tính vi tích phân - Tập 2 . NXB Giaó dục 2000.

9. Nguyễn Đình Trí, Toán học cao cấp. NXB Giáo dục, 1995.

10. Vũ Tuấn, Giảí tích toán học - Tập 3. NXB Giáo dục - Hà Nội, 1981.