

个数  $m = 1$  情况下得到的大部分结论都可平行地推广到  $m > 1$  的情况.

例如, 考虑以下一阶常微分方程组

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x^2 & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x+1 \end{pmatrix}, \quad x \in [0, 10], \quad (9.76)$$

初值条件为

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (9.77)$$

将欧拉公式 (9.9) 应用于该问题, 则有

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + h \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x_n^2 & -x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_n + 1 \end{pmatrix} \right] \quad (9.78)$$

且

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (9.79)$$

下面讨论应用欧拉公式求解方程组 (9.76)~(9.77) 的绝对稳定性. 设  $(\delta_u^{(n+1)}, \delta_v^{(n+1)})^T$  和  $(\delta_u^{(n)}, \delta_v^{(n)})^T$  分别表示第  $n$  步和第  $n+1$  步数值解的扰动. 简单计算可知

$$\begin{pmatrix} \delta_u^{n+1} \\ \delta_v^{n+1} \end{pmatrix} = \left[ \mathbf{I} + h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x_n^2 & -x_n \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \delta_u^n \\ \delta_v^n \end{pmatrix}, \quad (9.80)$$

其中  $\mathbf{I}$  表示二阶单位阵. 由于矩阵  $\mathbf{I} + h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x_n^2 & -x_n \end{pmatrix}$  的特征值为  $\lambda_{1,2} = 1 - \frac{1}{2}hx_n \pm \frac{\sqrt{3}}{2}hx_n i$ , 故可以证明当  $|hx_n| < 1$  (或  $h < 0.1$ ) 时, 矩阵  $\mathbf{I} + hA$  的谱半径  $\rho = (1 - hx_n + (hx_n)^2)^{\frac{1}{2}} < 1$ . 此时

$$\left\| \begin{pmatrix} \delta_u^{n+1} \\ \delta_v^{n+1} \end{pmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{pmatrix} \delta_u^n \\ \delta_v^n \end{pmatrix} \right\|, \quad (9.81)$$

即该方法是绝对稳定的.

类似地, 前文介绍的多步法、预估校正格式和龙格-库塔公式均可应用于一阶常微分方程组的求解. 只是在进行理论分析时, 需要将绝对值替换为向量范数.

对于高阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), & x \in [a, b], \\ y(a) = \tilde{y}_0, y'(a) = \tilde{y}'_0, \dots, y^{(n-1)}(a) = \tilde{y}_0^{(n-1)}, \end{cases} \quad (9.82)$$

若记  $\mathbf{y} = (y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))^T$ ,  $\mathbf{y}_0 = (y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a))^T$ , 则可将高阶微分方程化为一阶微分方程组 (9.1), 从而利用前面介绍的方法近似求解.

例如, 考虑初值问题

$$\begin{cases} y'' = -xy' - x^2y + x + 1, & x \in [0, 10], \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b. \end{cases} \quad (9.83)$$

令  $u = y$  和  $v = y'$ , 则该初值问题转化成一阶常微分方程组 (9.76)~(9.77).

设  $a = 0, b = 1$ , 取  $N = 1000$ . 利用公式 (9.78)~(9.79) 的计算结果见表 9-8, 近似解的图形在图 9-4 中给出.

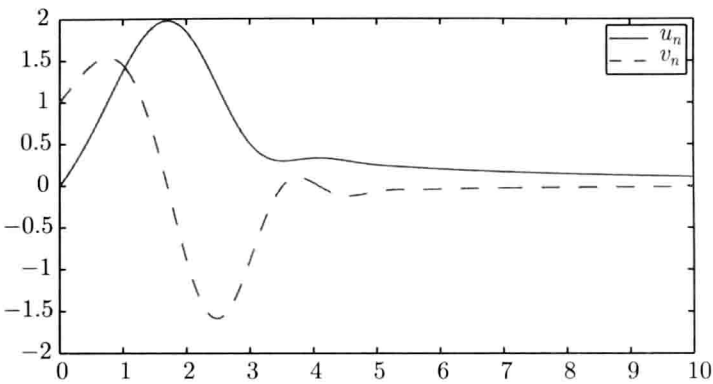


图 9-4 高阶常微分方程的数值解

表 9-8 高阶常微分方程的数值解

$x_k$	$u_k$	$v_k$
0.0	0	1.0000e+000
1.0	1.3694e+000	1.4483e+000
2.0	1.8448e+000	-8.8047e-001
3.0	5.0488e-001	-8.9974e-001
4.0	3.3003e-001	3.5938e-002
5.0	2.4902e-001	-7.0977e-002
6.0	2.0091e-001	-4.1835e-002
7.0	1.6708e-001	-2.8003e-002
8.0	1.4310e-001	-2.0498e-002
9.0	1.2515e-001	-1.5671e-002
10.0	1.1121e-001	-1.2371e-002

在本节的最后, 我们简单介绍一类在化学反应、电子网络和自动控制等领域经常会遇到病态方程组 —— 刚性方程组.

**定义 9.4.1** 常微分方程初值问题 (9.1) 称为刚性方程组, 若对任意  $x \in [a, b]$ , 成立

$$(1) \operatorname{Re}(\mu_j(t)) < 0, j = 1, \cdots, m;$$

$$(2) s = \frac{\max_{1 \leq j \leq m} |\operatorname{Re}(\mu_j)|}{\min_{1 \leq j \leq m} |\operatorname{Re}(\mu_j)|} \gg 1,$$

其中  $\mu_j(t)$  是雅可比矩阵  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{m \times m}$  的特征值,  $s$  称为刚性比.

例如, 考虑常微分方程组

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 24 \\ -24 & -51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \cos x - \frac{1}{3} \sin x \\ -9 \cos x + \frac{1}{3} \sin x \end{pmatrix}, \quad x \in [0, 1], \quad (9.84)$$

初值条件为

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(9.85)

这就是一个刚性方程组, 其雅可比矩阵为  $\begin{pmatrix} 9 & 24 \\ -24 & -51 \end{pmatrix}$ , 刚性比  $s = \frac{|-39|}{|-3|} = 13$ . 该问题存在唯一解

$$u = 2e^{-3x} - e^{-39x} + \frac{1}{3} \cos x, \quad v = -e^{-3x} + 2e^{-39x} - \frac{1}{3} \cos x.$$

求解刚性问题的困难之处在于: 为保证算法的稳定性, 必须将步长限制在较小的范围内. 因此, 若需要在某个较长的区间内计算, 则需要非常多的时间迭代步. 这将导致巨大的计算量, 并且由于舍入误差的累计, 其结果极有可能很不准确.

应用标准四阶龙格-库塔公式求解方程组 (9.84)~(9.85). 由于绝对稳定性的限制, 步长  $h$  须满足  $|\mu_i h| \leq 2.78$ , 其中  $\mu_i$  为雅可比矩阵的特征值. 这要求  $h < \frac{2.78}{39} \approx 0.0713$ , 下面的数值结果验证了这一分析. 取  $h = 0.05$  和  $h = 0.1$ , 用标准四阶龙格-库塔公式求解该初值问题的计算结果见表 9-9. 由表 9-9 可以看出: 当步长稍大且不满足稳定性条件时, 就会得到错误的数值结果.

表 9-9 刚性问题的计算结果

$x$	$u(x)$	$v(x)$	$h = 0.05$		$h = 0.1$	
			$u_n$	$v_n$	$u_n$	$v_n$
0.1	1.793 061	-1.032 001	1.712 219	-0.870 315 2	-2.645 169	7.844 527
0.2	1.423 901	-0.874 680 9	1.414 070	-0.855 014 8	-18.451 58	38.876 31
0.3	1.131 575	-0.724 998 4	1.130 523	0.722 891 0	-87.472 21	176.482 8
0.4	0.909 408 6	-0.608 214 1	0.909 276 3	-0.607 947 5	-934.072 2	789.354 0
0.5	0.738 787 7	-0.515 657 5	9.738 750 6	-0.515 581 0	-1760.016	3 520.00
0.6	0.605 709 4	-0.440 410 8	0.605 683 3	-0.440 355 8	-7848.550	15 697.84
0.7	0.499 860 3	-0.377 403 8	0.499 836 1	-0.377 354 0	-34989.63	69 979.87
0.8	0.413 671 4	-0.322 953 5	0.413 649 0	-0.322 907 8	-155 979.4	311 959.5
0.9	0.341 614 3	-0.274 408 8	0.341 593 9	-0.274 367 3	-695 332.0	139 066 4
1.0	0.279 674 8	-0.229 887 7	0.279 656 8	-0.229 851 1	-309 967 1	619 935 2

对于刚性问题, 一个最自然的想法就是扩大数值方法的绝对稳定区域.

**定义 9.4.2** 如果某数值方法的绝对稳定域包含复平面的整个左半平面, 即  $\text{Re}(z) < 0$ , 则称该数值方法是 A-稳定的.

显然, 若某数值方法是 A-稳定的, 则应用该方法求解刚性问题时步长可随意选取, 不再受稳定性限制. 遗憾的是, 早已证明: 显式多步法和显式龙格-库塔法不可能是 A-稳定的; A-稳定的隐式多步法的阶不超过 2; 梯形公式是二阶隐式线性多步法中精度最高的一个. 因此, 为构造更实用的求解刚性问题的数值方法, 需要放松稳定性的限制.

实际计算时, 常采用隐式或半隐式的龙格-库塔公式求解刚性方程组. 下面列出几个常用的计算公式, 可以证明这些格式都是 A-稳定的.

(1) 一段二阶隐式龙格-库塔方法

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hk_1, \\ k_1=f\left(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}k_1\right). \end{cases} \quad (9.86)$$

(2) 二段二阶隐式龙格-库塔方法

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(k_1+k_2), \\ k_1=f(x_n, y_n), \\ k_2=f\left(x_n+h, y_n+\frac{h}{2}(k_1+k_2)\right). \end{cases} \quad (9.87)$$

(3) 二段四阶隐式龙格-库塔方法

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(k_1+k_2), \\ k_1=f\left(x_n+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n+\frac{h}{4}\left(k_1+\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}k_2\right)\right)\right), \\ k_2=f\left(x_n+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n+\frac{h}{4}\left(\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)k_1+k_2\right)\right). \end{cases} \quad (9.88)$$

(4) 半隐式龙格-库塔方法

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+k_2, \\ k_1=f(x_n, y_n)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)h^2\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)h\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)k_1, \\ k_2=hf\left(x_n+\frac{\sqrt{2}-1}{2}h, y_n+\frac{\sqrt{2}-1}{2}k_1\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)h^2\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) \\ +\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)h\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)k_2. \end{cases} \quad (9.89)$$

## §9.5 有限差分法

本节主要讨论求解微分方程边值问题的有限差分法. 下面以两点边值问题 (9.4) 为例, 简单介绍该方法的基本思想.

通常, 利用有限差分法离散微分方程包含两步: 第一步是将求解区域进行网格剖分; 第二步是将微分方程在节点处进行离散化. 建立差分格式的离散化方法有多种, 这里仅介绍以差商代替微商的方法.

将区间  $[a, b]$  进行  $N$  等分, 对于内部节点  $x_n (n=1, 2, \dots, N-1)$ , 由泰勒展开公式得

$$\frac{y(x_{n+1})-2y(x_n)+y(x_{n-1}))}{h^2}=y''(x_n)+\frac{h^2}{12}y^{(4)}(x_n)+O(h^3). \quad (9.90)$$

于是在节点  $x_n$  处可将方程 (9.4) 写成

$$-\frac{y(x_{n+1}) - 2y(x_n) + y(x_{n-1}))}{h^2} + q(x_n)y(x_n) = f(x_n) + R_n(y), \quad (9.91)$$

其中

$$R_n(y) = -\frac{h^2}{12}y^{(4)}(x_n) + O(h^3). \quad (9.92)$$

显然, 当  $h$  充分小时,  $R_n(y)$  是二阶无穷小量. 若舍去  $R_n(y)$ , 则得到内部节点处的差分方程

$$-\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + q_n y_n = f_n, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (9.93)$$

其中  $q_n = q(x_n)$ ,  $f_n = f(x_n)$ . 称  $R_n(y)$  为差分方程 (9.93) 的截断误差.

对于边界节点, 由边界条件知  $y_0 = \alpha$ ,  $y_N = \beta$ .

于是可得到关于数值解  $y_n$  的线性方程组

$$\begin{cases} -\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + q_n y_n = f_n, & n = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = \alpha, & y_N = \beta. \end{cases} \quad (9.94)$$

若记方程组的未知向量

$$\mathbf{y}_h = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})^T, \quad (9.95)$$

右端向量

$$\mathbf{g} = \left( f_1 + \frac{\alpha}{h^2}, f_2, \dots, f_{N-1} + \frac{\beta}{h^2} \right)^T, \quad (9.96)$$

系数矩阵

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + q_1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_2 & -\frac{1}{h^2} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{h^2} + q_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (9.97)$$

则有

$$\mathbf{H}\mathbf{y}_h = \mathbf{g}. \quad (9.98)$$

易知,  $\mathbf{H}$  为对称正定矩阵, 故该方程组有唯一解. 此外, 由于矩阵  $\mathbf{H}$  为三对角阵, 可以稀疏数组方式存储并用追赶法求解.

下面是求解两点边值问题 (9.4) 的有限差分法的算法描述.

#### 算法 9.5.1 (有限差分法)

(1) 给定整数  $N$ ;

(2)  $h = \frac{b-a}{N}$ ;

(3) 根据式 (9.96) 和式 (9.97) 生成三对角阵  $\mathbf{H}$  和向量  $\mathbf{g}$ ;

(4) 求解方程组  $Hy_h = g$ ;

(5) 返回向量  $y_h$ .

例 9.5.1 用有限差分法求解常微分方程边值问题

$$\begin{cases} -y'' + y = (\pi^2 + 1) \sin(\pi x), & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases} \quad (9.99)$$

解: 该问题的真解为  $y(x) = \sin \pi x$ . 分别取  $N = 2, 4, 8, 16, \dots, 256$ , 有限差分法的计算结果见表 9-10, 其中  $\|y_h - y\|_\infty = \max_{1 \leq n \leq N} |y_h(x_n) - y(x_n)|$ .

表 9-10 不同  $N$  情形下有限差分法近似解的误差

$N$	2	4	8	16	32	64	128	256
$\ y_h - y\ _\infty$	0.207 7	0.047 9	0.011 7	0.002 9	7.295 9e-4	1.823 4e-4	4.558 2e-5	1.139 5e-5

从表 9-10 可以看出: 随着等分节点个数的增加, 有限差分方法得到的数值解与真解之间的误差不断减小. 事实上, 为控制计算误差在可接受的范围内, 可采用更多的网格节点. 在一定条件下, 可以证明当步长  $h$  趋向于零时, 由有限差分法得到的数值解收敛于真解.

有限差分方法还可以使用数值积分的方法进行推异. 更多内容参见微分方程数值解法的有关教材.

## 评 注

本章主要介绍了几种求解常微分方程初边值问题的数值方法. 对于初边值问题, 离散常微分方程的常用方法主要有两种: 一种是基于泰勒展开, 另一种是基于数值积分. 这两种方法中, 利用泰勒展开来构造数值计算格式比较简单灵活, 但通常需要在真解比较光滑的前提下才能进行, 而数值积分方法对真解的光滑性要求较低. 此外, 这两种方法也可用于偏微分方程离散格式的构造, 如利用泰勒展开可构造有限差分法, 利用数值积分可构造有限体积法等.

单个一阶常微分方程初值问题的数值解法, 稍加改动都可平行地用于一阶微分方程组的情形. 构造常微分方程组的离散格式时, 需要将相应的单个方程计算公式中的实 (复) 函数替换成实 (复) 向量函数; 理论分析时, 需要将函数的绝对值换成向量范数. 高阶微分方程可转化为一阶微分方程组, 故也可应用本章所介绍的数值方法求解.

对于刚性微分方程组, 一般的显格式计算效果很差, 故需要考虑 A- 稳定、 $A(\alpha)$ - 稳定和刚性稳定的数值方法. 本章给出了几种常用的隐式或半隐式龙格-库塔公式, 用于求解此类问题.

对于一阶常微分方程 (组) 初值问题, MATLAB 软件提供了一系列的函数, 如 ode45 和 ode23 等, 其使用格式如下:

```
>> [t,y] = odesolver(odefun,tspan,y0)
```

其中 odefun 为函数名字字符串, 表示初值问题 (9.1) 中的  $f(x, y)$ ; 向量 tspan =  $[a, b]$  表示初始和结束时刻; y0 表示初始条件. 返回值 t 和 y 分别表示区间  $[a, b]$  上的节点坐标以及各节点处的近似解. 可以直接调用命令 plot(t,y) 画出近似解的折线图.

下面以中例 9.1.2 中的初值问题为例介绍该函数的使用方法.

(1) 编写函数文件 f.m.

```
function r = f(x,y)
```

```
    r = y-2*x./y;
```

(2) 在命令窗口 (或脚本文件) 中, 执行如下代码.

```
>> [t,y] = ode45('f',[0,1],1)
```

注意: odesolver 表示函数名, 实际使用时需要用 ode45 等替换. 这些函数也适用于求解一阶常微分方程组.

## 习 题 九

1. 取  $h = 0.1$ , 分别用欧拉公式、梯形公式和改进的欧拉公式在  $0 \leq x \leq 1$  上求解初值问题

$$y' = -y + x + 1, \quad y(0) = 1.$$

2. 取  $h = 0.2$ , 用四阶龙格-库塔方法在  $0 \leq x \leq 1$  上求解初值问题

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1.$$

3. 证明对于任意参数  $\alpha$ , 下列格式是二阶的:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_2 + k_3) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \alpha h, y_n + \alpha k_1) \\ k_3 = hf(x_n + (1 - \alpha)h, y_n + (1 - \alpha)k_1). \end{cases}$$

4. 分析用中点公式求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -5y, & x \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

时绝对稳定性对步长的限制.

5. 导出用梯形公式求解

$$\begin{cases} y' = y, & x \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

的计算公式

$$y_n = \left( \frac{2+h}{2-h} \right)^n.$$

取  $h = \frac{1}{4}$ , 计算  $y(1)$  的近似值.

6. 将下列方程化为一阶方程组

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

取步长  $h = 0.1$ , 利用改进的欧拉公式求解该一阶方程组.

7. 取  $h = 0.5$ , 用有限差分方法求解边值问题

$$\begin{cases} y'' = 6x, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, y(1) = 1. \end{cases}$$

## 数值实验九

1. 分别用欧拉方法、梯形公式、改进的欧拉方法以及标准四阶龙格-库塔方法求解以下常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2, & x \in [1, 2], \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

比较四种方法的计算精度, 并体会显式格式与隐式格式的区别.

2. 用标准四阶龙格-库塔方法, 对  $x \geq 0$  时的标准正态分布函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x < \infty$$

产生一张在  $[0, 5]$  之间 80 个等距节点处的函数表.

3. 考虑刚性问题

$$\begin{cases} y' = 5e^{5x}(y-x)^2 + 1, & x \in [0, 1], \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

该问题的真解为  $y(x) = x - e^{-5x}$ . 分别取步长  $h = 0.2$  和  $0.25$ , 用标准四阶龙格-库塔公式和梯形公式求解该初值问题, 并对计算结果进行分析.

4. 尝试用不同方法求解下面的初值问题

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 66 \\ -66 & -133 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad x \in [0, 0.5],$$

初值条件为

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

比较各种方法的计算结果和计算时间. (该问题的精确解为  $u = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{-100x}$ ,  $v = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{-100x}$ .)

5. 取步长  $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{256}$ , 用有限差分方法求解边值问题

$$\begin{cases} (1+x^2)y'' - xy' - 3y = 6x - 3, & x \in (0, 1), \\ y(0) - y'(0) = 1, y(1) = 2. \end{cases}$$



## 参 考 文 献

- [1] Atkinson K E. An Introduction to Numerical Analysis[M]. New York: John Wiley, 1989.
- [2] Richard L, Burden J, Douglas Faires. Numerical Analysis[M]. 7th ed. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [3] David, P J, Rabinowitz P. Methods of Numerical Integration[M]. New York: New York Academic Press, 1975.
- [4] Michael T. Heath, Scientific Computing: An Introductory Survey[M]. 7th ed. 北京: 清华大学出版社, 2001.
- [5] 胡健伟, 汤怀民. 微分方程数值方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [6] 贾现正, 王彦博, 程晋, 散乱数据的数值微分及其误差估计, 高等学校计算数学学报, vol 25, No.1, 2003.
- [7] Kalos M. H, Whitlock P A. Monte Carlo methods[M]. New York: John Wiley and Sons, 1986.
- [8] 李立康, 於崇华, 朱政华. 微分方程数值解 [M]. 复旦大学出版社, 1999.
- [9] Quarteroni A, Sacco R, Saleri F. Numerical Mathematics[M]. Beilin: Springer, Science and Businese Media, 2000.
- [10] 同济大学计算数学教研室. 数值分析基础 [M]. 同济大学出版社, 1998.
- [11] 王仁宏. 数值逼近 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [12] 肖云茹. 概率统计计算方法 [M]. 南开大学出版社, 1994.
- [13] 张平文, 李铁军. 数值分析 [M]. 北京大学出版社, 2007.
- [14] 赵访熊, 李庆扬. 富利叶变换滤波在地震勘探处理中应用 [J]. 清华大学学报, 1978, 18(4).

# 索引

## A

埃尔米特插值, 69  
埃尔米特多项式, 69  
艾特肯加速方法, 203

## B

贝塞尔不等式, 112  
边界条件, 77  
变步长方法, 129  
病态, 168  
不动点, 199  
不可约, 174  
步长, 236

## C

残差, 111  
插值多项式, 60  
插值基函数, 60  
插值余项, 63  
差分, 69  
差商, 65  
乘幂法, 225  
传值, 22

## D

代数精度, 122  
单步法, 240  
递归函数, 24  
杜利脱尔分解, 44  
对角占优, 174  
对阶, 7  
多步法, 240  
多项式拟合, 104

## E

二次插值, 62  
二分法, 198

## F

法方程, 99, 104  
反幂法, 229  
反射矩阵, 53  
范德蒙德行列式, 60  
范数, 3, 89, 165  
非线性最小二乘问题, 108, 216  
分块三角分解, 49  
分解, 42  
分裂, 169  
浮点数, 4  
复合求积公式, 124  
傅里叶级数, 112

## G

刚性比, 256  
刚性方程组, 255  
高斯-埃尔米特公式, 142  
高斯-赛德尔迭代法, 170  
高斯-拉盖尔公式, 141  
高斯-勒让德公式, 138  
高斯-切比雪夫公式, 140  
高斯公式, 136  
高斯消去法, 38  
割线法, 210  
共轭, 183  
广义傅里叶展开, 101

## H

海森伯格型矩阵, 52  
函数文件, 21

## J

基函数, 61  
极小残量法, 186  
交错点组, 95

脚本文件, 20

镜面反射, 53

局部截断误差, 241

局部收敛, 201

绝对稳定, 252

## K

科茨系数, 133

可约, 174

克洛脱分解, 44

快速傅里叶变换, 114

## L

拉盖尔多项式, 93

拉格朗日插值基函数, 61

勒让德多项式, 90

离散傅里叶变换, 114

利普希茨条件, 236

两点公式, 154

列主元素高斯消去法, 41

龙贝格求积方法, 131

龙格-库塔方法, 244

龙格现象, 74

## M

矛盾方程组, 111

蒙特卡罗方法, 147

## N

内积, 88

牛顿-科茨公式, 132

牛顿插值, 65

牛顿法, 204

## O

欧拉-麦克劳林公式, 131

欧拉公式, 236

## P

抛物型公式, 121

偏差点, 95

平方根法, 46

谱半径, 165

## Q

奇异值分值, 55

乔列斯基分解, 46

切比雪夫定理, 95

切比雪夫多项式, 92

求积公式, 121

全局收敛, 206

缺省参数, 23

## R

瑞利商, 224

## S

三点求导公式, 154

三角分解, 42

三弯矩方法, 78

三转角方法, 157

上溢, 4

收敛阶, 197

数据类型, 9

数值算法, 1

数值稳定, 5

四阶四段龙格-库塔方法, 246

## T

梯形公式, 120

条件数, 168

同伦算法, 218

## W

伪随机数, 151

魏尔斯特拉斯定理, 94

稳定性, 134

五点求导公式, 155

误差, 2

误差限, 2

## X

下山法, 208

下溢, 4

显式格式, 240

线性插值, 62



北航

C1748135

其他

相容, 166  
相似, 224  
向量功能, 14  
辛普森公式, 121  
旋转矩阵, 52

Y

压缩映像定理, 213  
雅可比迭代法, 170  
亚当斯-巴什福思公式, 240  
亚当斯-莫尔顿公式, 240  
样条, 73, 157  
一致逼近, 94  
隐式格式, 241  
有限差分法, 258  
有效数字, 3  
预处理, 190  
预估校正格式, 241  
原点平移, 230

Z

增量函数, 249  
占优, 174  
整体截断误差, 241  
正交多项式, 90  
正交矩阵, 50  
秩一修正, 215  
置换矩阵, 51  
中点公式, 120, 246  
主元, 40  
追赶法, 47  
最佳逼近多项式, 88  
最速下降法, 180  
左除, 13

A- 稳定, 257  
BFGS 修正, 216  
fminsearch, 109  
for, 18  
Gerschgorin 圆盘定理, 224  
Gill 公式, 247  
Givens 矩阵, 51  
GMRES, 186  
help, 25  
Heun 公式, 246  
Hilbert 矩阵, 100, 168  
Horner 算法, 8  
Householder 矩阵, 53  
if, 17  
Levenberg-Marquardt 算法, 217  
LU 分解, 42  
nlinfit, 110  
ode23, 260  
ode45, 260  
plot, 28  
plot3, 29  
polyfit, 75, 105  
QR 方法, 231  
QR 分解, 50, 187  
Richardson 外推加速, 131  
Schur 补, 49  
Sherman-Morrison 公式, 215  
SOR 迭代法, 171  
surf, 30  
unmkpp, 81  
while, 18

Advanced Numerical Computing (2nd Edition)

# 现代数值计算 (第2版)

本书以MATLAB软件为平台,对数值计算的基本概念和方法进行讲述和介绍,全书强调算法形成的思路以及计算的实践,同时加强了数值实验。

- 作者希望把本书编写成一本浅显易懂的、适合大学本科学生和工科研究生使用的数值计算基础教材。全书吸收了国内外优秀教材的优点,结合当前数值计算一些新的方法,由浅入深地介绍了各种概念和算法,并附有许多实践性的题目。
- 本书在每章后面配合教学内容给出大量习题,可供读者自学使用。

## 本书配套教材

《现代数值计算习题指导(第2版)》

ISBN: 978-7-115-36003-8



免费提供

PPT等教学相关资料



人民邮电出版社  
教学服务与资源网  
[www.ptpedu.com.cn](http://www.ptpedu.com.cn)

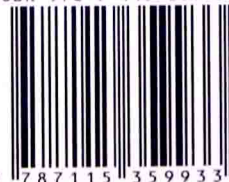
教材服务热线: 010-81055256

反馈/投稿/推荐信箱: 315@ptpress.com.cn

人民邮电出版社教学服务与资源网: [www.ptpedu.com.cn](http://www.ptpedu.com.cn)



ISBN 978-7-115-35993-3



9 787115 359933 >

ISBN 978-7-115-35993-3

定价: 39.80 元

封面设计: 董志桢

[General Information]

书名=现代数值计算 第2版

页数=252

SS号=13612715