Distribuovaná kalmanovská filtrace při neznámém prostorově heterogenním šumu

Daniel Hnyk

Matematická informatika
Katedra matematiky

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
České vysoké učení technické v Praze

Obhajoba diplomové práce (2018)

Cíl práce

Návrh algoritmu...

...k distribuované kalmanovské filtraci v difuzní síti, kde každý uzel sítě může potenciálně mít jinou kovarianci šumu na stavovém procesu i na měřeních a tato kovariance je navíc neznámá.

Řešení

Distribuovaný adaptivní kalmanův filtr za použití variačních Bayesovských metod.

Cíl práce

Návrh algoritmu...

...k distribuované kalmanovské filtraci v difuzní síti, kde každý uzel sítě může potenciálně mít jinou kovarianci šumu na stavovém procesu i na měřeních a tato kovariance je navíc neznámá.

Řešení

Distribuovaný adaptivní kalmanův filtr za použití variačních Bayesovských metod.

Bayesovská pravděpodobnost

- interpretace pravděpodobnosti
- Inference pro model $M = \{P_\theta | \theta \in \Theta\}$
- chceme posteriorní pravděpodobnost dle

$$p(\mathbf{Z}|\mathbf{X}) = p(\mathbf{Z}) \cdot \frac{p(\mathbf{X}|\mathbf{Z})}{p(\mathbf{X})}$$

Aproximace

- přímý výpočet $p(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ obvykle není možný
  - vzorkování (MCMC, Gibbs)
  - variační počet (Variační Bayes)
- aproximujeme pomocí jednodušší rodiny distribucí a hledáme tu nejbližší
- např. faktorizovatelné distribuce $q(\mathbf{Z}) = \prod_{i=1}^{M} q_i(\mathbf{Z})$
- vzdálenost měříme pomocí Kullback-Leiblerovy divergence

$$\mathrm{KL}(q||p) = -\int q(\mathbf{Z}) \ln \frac{p(\mathbf{Z}|\mathbf{X})}{q(\mathbf{Z})} \, \mathrm{d}\mathbf{Z}$$

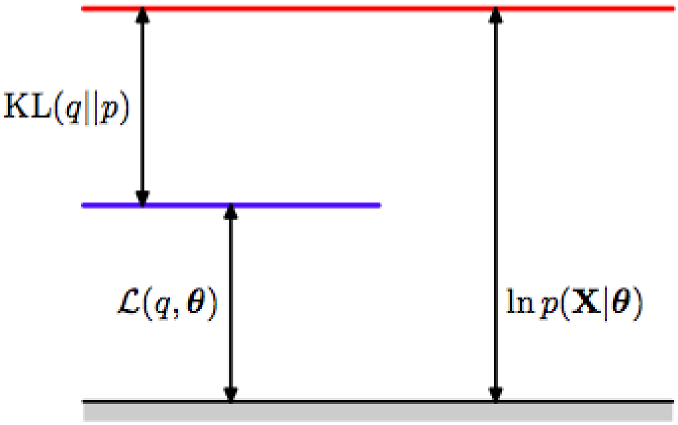
- optimalizační problém

$$q(\mathbf{Z}) = \operatorname*{argmin}_{q(\mathbf{Z})\text{-fakt.}} \mathrm{KL}(q(\mathbf{Z})||p(\mathbf{Z}|\mathbf{X}))$$

- stále nejde přímo, ekvivalentní maximalizaci

$$\mathcal{L}(q) = \int q(\mathbf{Z}) \ln \frac{p(\mathbf{X},\mathbf{Z})}{q(\mathbf{Z})} \, \mathrm{d}\mathbf{Z}$$

Lower variational boundary



lepší kvalita!

Coordinate ascent mean-field variational

- optimální řešení problému

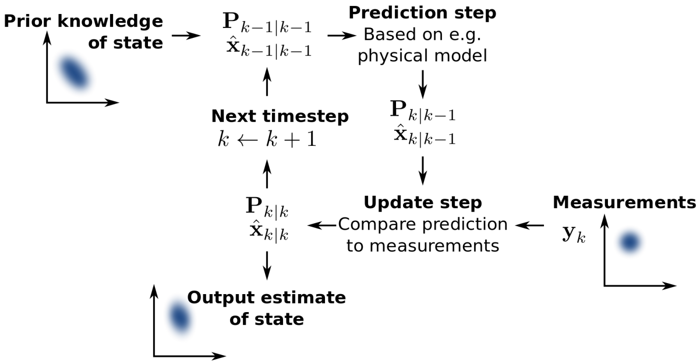
$$q_i^*(\mathbf{Z_i}) \propto \exp\{\mathbb{E}_{-i}[\ln p(\mathbf{Z_i}, \mathbf{Z_{\{-i\}}}, \mathbf{X})]\}$$

- v praxi se postupuje iterativně
- vhodná volba prior distribucí zjednodušuje update
- elegantní reprezentace použije-li se forma exponenciální rodiny

Kalmanův filtr

- používá se pro zpřesnění předpovědí modelu na základě měření
- optimální lineární filtr (v MSE) pokud:
  - model přesně reflektuje skutečnost
  - šum je Gaussovský bílý
  - kovariance šumu jsou přesně známy
- tato práce se zabývá rozšířením kdy 3. bod není splněn
- distributivní - více propojených agentů provádějící filtraci

Vizuálně


Prior knowledge of state
$\mathbf{P}_{k-1|k-1}$
$\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$
Prediction step
Based on e.g. physical model
$\mathbf{P}_{k|k-1}$
$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$
Next timestep
$k \leftarrow k+1$
Update step
Compare prediction to measurements
Measurements
$\mathbf{y}_k$
$\mathbf{P}_{k|k}$
$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$
Output estimate of state

Pravděpodobností model

sjednotit značení vektorů! Rozumět kde se vzalo p(z)

- odhady odpovídají

$$p(\vec{z}_k|\vec{x}_k) = N(\vec{z}_k; \mathbf{H}_k\vec{x}_k, \mathbf{R}_k)$$
$$p(\vec{x}_k|\vec{x}_{k-1}) = N(\vec{x}_k; F_{k|k-1}\vec{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k).$$

- cílem je odhadnout kovariační matice šumů: $\mathbf{R}_k, \mathbf{Q}_k$
- konjugovaná apriorna je Inverzní Wishartova distribuce
- předpokládáme, že distribuce je faktorizovatelná

$$\begin{aligned} p(\Xi, \mathbf{z}_{1:k}) &= \mathrm{N}(\mathbf{z}_k; \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)\mathrm{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \\ &\times \mathrm{IW}(\mathbf{P}_{k|k-1}; \hat{t}_{k|k-1}, \hat{\mathbf{T}}_{k|k-1})\mathrm{IW}(\mathbf{R}_k; \hat{u}_{k|k-1}, \hat{\mathbf{U}}_{k|k-1}) \\ &\times p(\mathbf{z}_{1:k-1}) \end{aligned}$$

Difúze

- více agentů – uzlů – provádí filtraci lokálně

  Jak to reprezentuji funkcí, topologie, více nodes

- vzájemně propojeni dle dané topografie
- po n krocích si vymění informace o odhadech

Bayesovský update

využitím „exponential family form“ se celý update zjednodušuje na

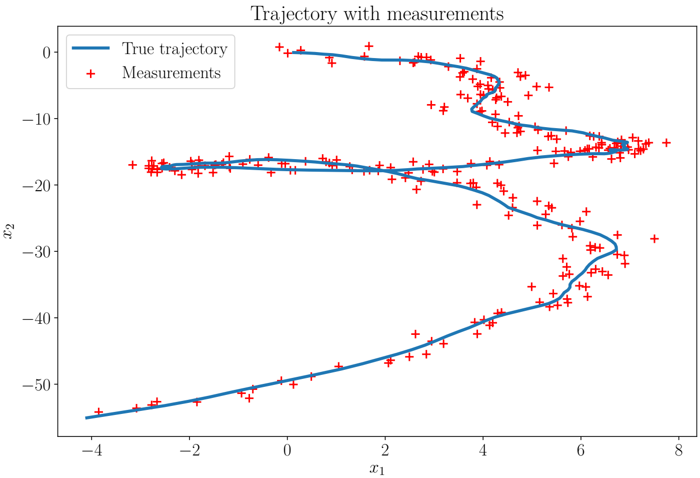
$$\Xi_{i+1}^{n} \leftarrow \Xi^{n-1} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(\mathbf{P}_{k|k}^{i} + (\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^{T}\right. \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{i+1}^{n} \leftarrow \Omega^{n-1} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k}\mathbf{P}_{k|k}^{i}\mathbf{H}_{k}^{T} + (\mathbf{z}_{k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i})(\mathbf{z}_{k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i})^{T} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

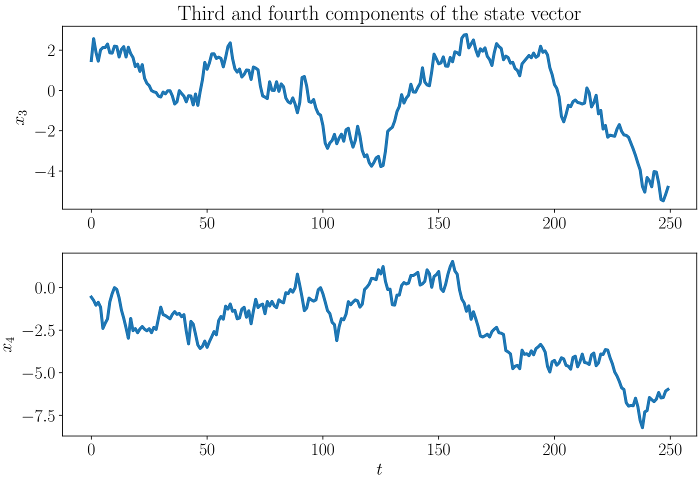
Shrnutí algoritmu

1. **In**: $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}, \hat{u}_{k-1|k-1}, \hat{\mathbf{U}}_{k-1|k-1}, \mathbf{F}, \mathbf{H}, \mathbf{z}_k, \tilde{\mathbf{Q}}_{k-1}, \tau, \rho, N$
2. Predikce KF
3. Inicializace hyperparamtrů Ξ_{init}, $\Omega_{\text{init}}, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k}^{(0)} = \tilde{\mathbf{P}}_k$
4. **for** i in N **do:**
   4.1 Updatuj Ω^i a na základě něho $\mathbb{E}[\mathbf{R}_k]$
   4.2 Updatuj Ξ^i a na základě něho $\mathbb{E}[\mathbf{P}_{k|k-1}]$
   4.3 Kalmanova korekce na základě $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i+1}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{i+1}$
5. **end for**
6. Difúze: $\Xi_*^{i,t} = g(\Xi^{i,t}, \Xi^{1,t}, \ldots, \Xi^{d,t})$, $\Omega_*^{i,t} = g(\Omega^{i,t}, \Omega^{1,t}, \ldots, \Omega^{d,t})$
7. **Out:** $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i+1}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{i+1}, \Xi_*^{i,t}, \Omega_*^{i,t}$

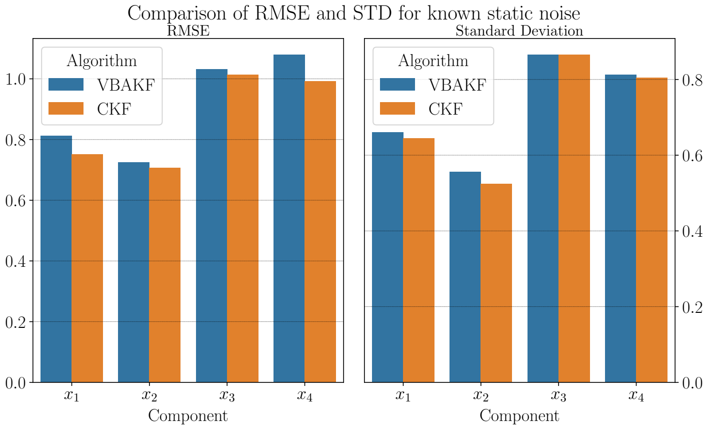
Testovací úloha



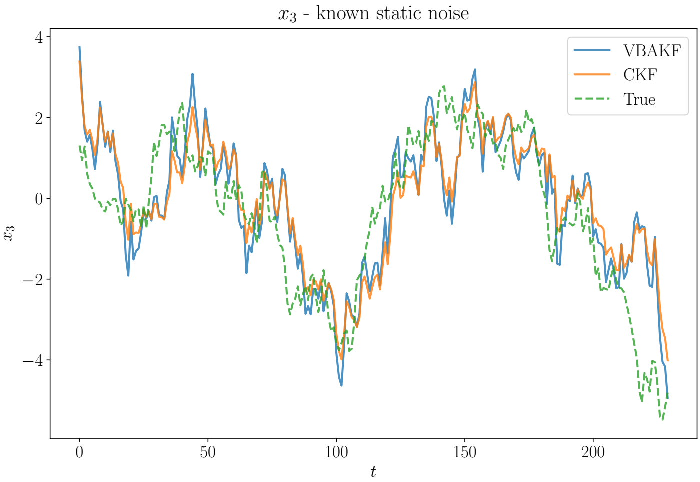
Testovací úloha



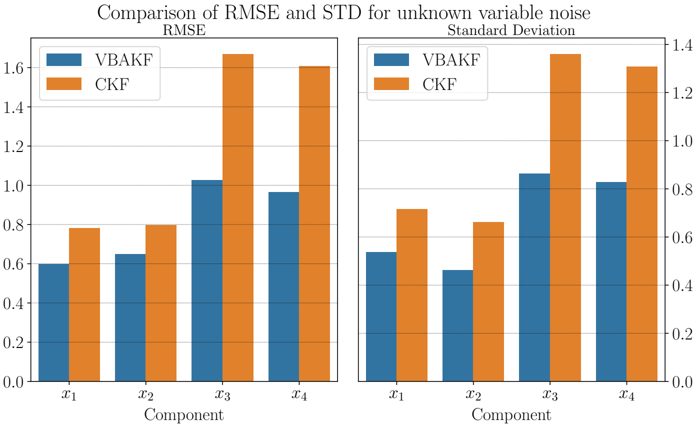
Statický známý šum - srovnání



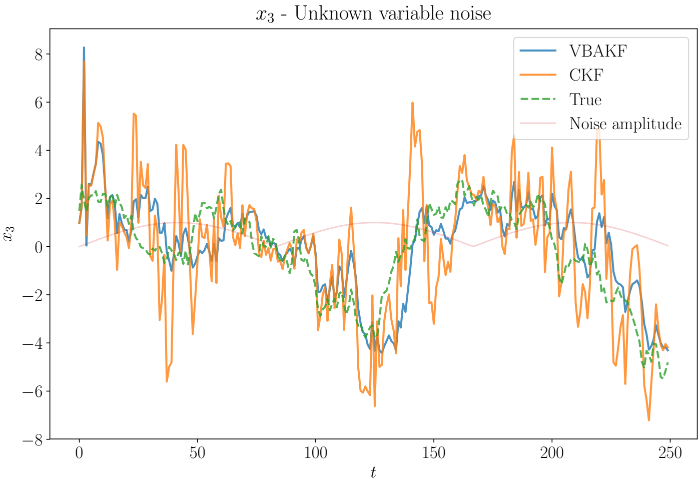
Statický známý šum - 3 komponenta



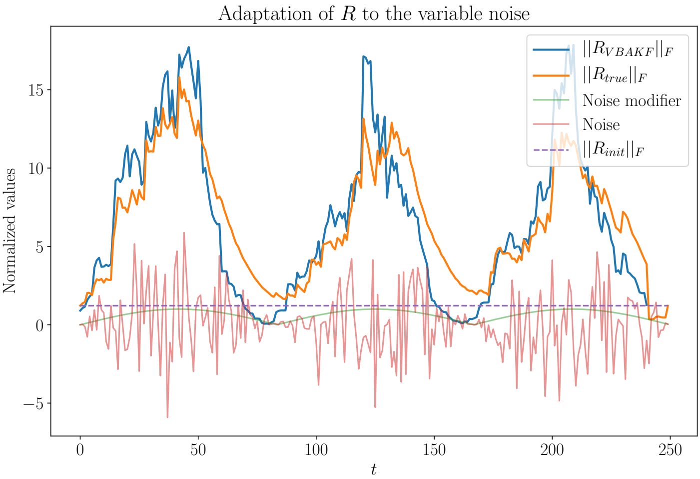
Proměnlivý šum - srovnání



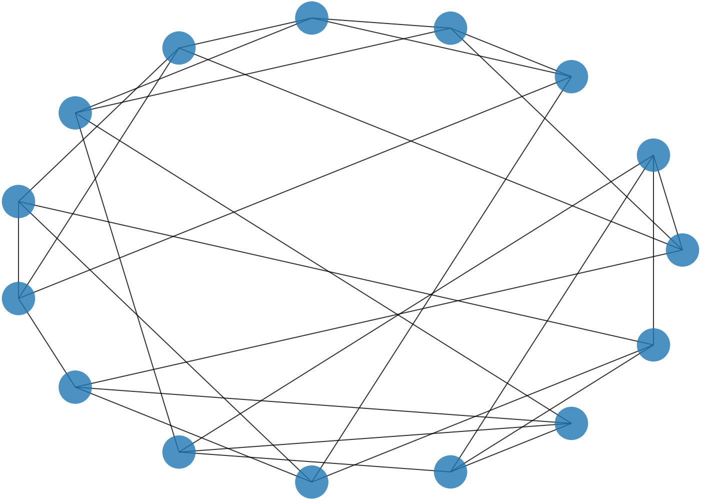
Proměnlivý šum - 3 komponenta



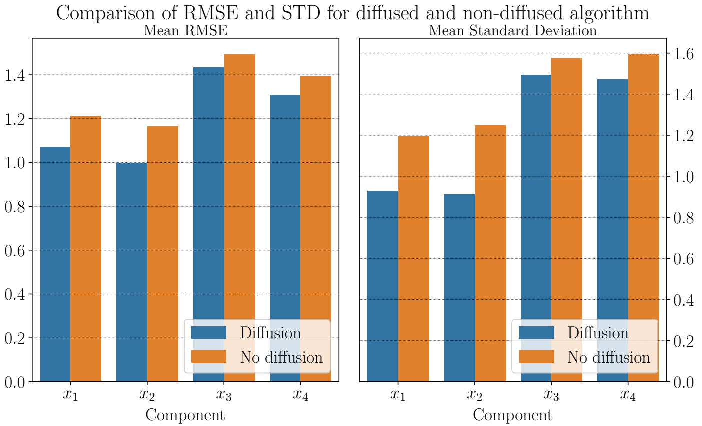
Proměnlivý šum - kovariance



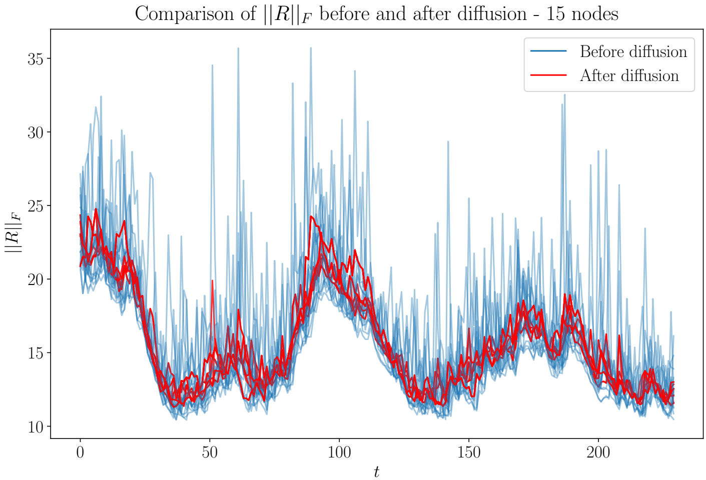
Distribuovaná verze - topologie



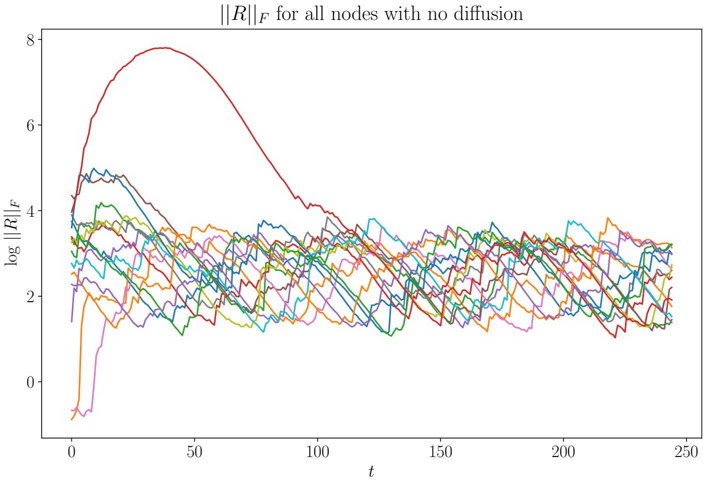
Proměnlivý šum - srovnání



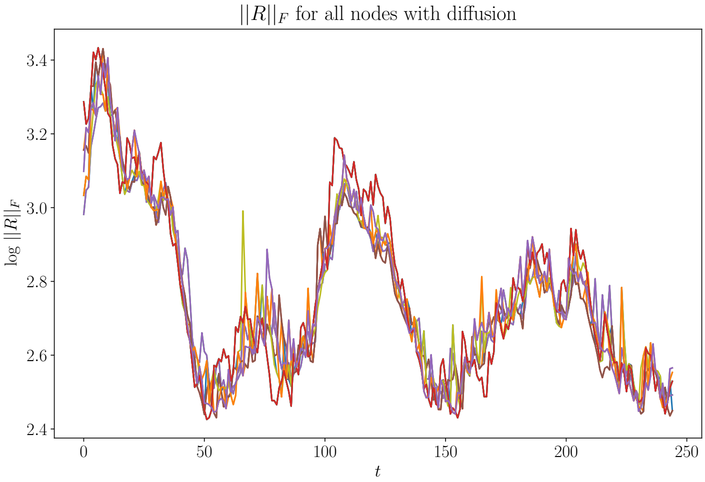
Proměnlivý šum - srovnání kovariancí



Proměnlivý šum - kovariance bez difúze



Proměnlivý šum - kovariance s difúzí



Shrnutí

- navržený algoritmus má v případech neznámého šumu lepší výkon než základní verze filtru
- vede si zanedbatelně hůře v případě kdy je kovariance známá
- difúze přináší vyšší přesnost, nižší varianci a obranu proti divergenci
- vyžaduje však nastavení dalších 2 tunning parametrů

Budoucí práce

- jaký vliv má topologie sítě a komunikace
- srovnání různých strategií difúzní funkce
- citlivost na jiné typy šumů než Gaussovský

Ten problém 1

- no jo, to jsem přehlídl