Distribuovaná kalmanovská filtrace při neznámém prostorově heterogenním šumu

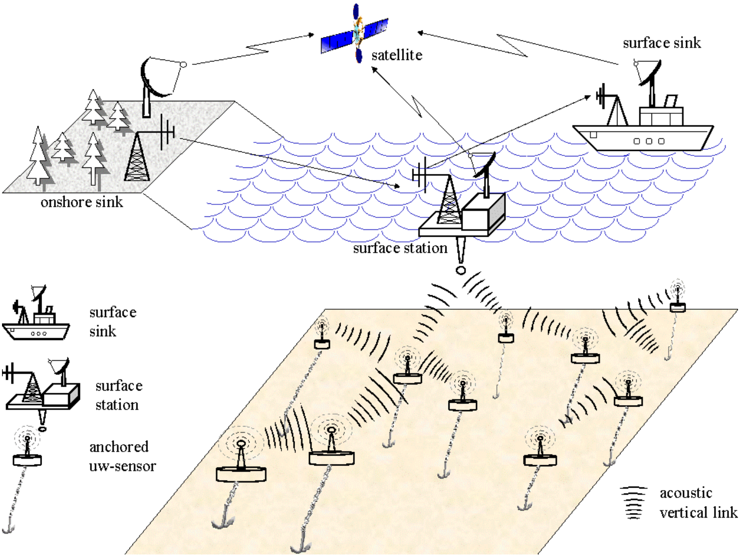
Daniel Hnyk

Matematická informatika
Katedra matematiky

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
České vysoké učení technické v Praze

Obhajoba diplomové práce (2018)

Co je to difúzní síť?



Cíl práce

Návrh algoritmu...

...k distribuované kalmanovské filtraci v difuzní síti, kde každý uzel sítě může potenciálně mít jinou kovarianci šumu na stavovém procesu i na měřeních a tato kovariance je navíc neznámá.

Řešení

Distribuovaný adaptivní kalmanův filtr za použití variačních Bayesovských metod.

Cíl práce

Návrh algoritmu...

...k distribuované kalmanovské filtraci v difuzní síti, kde každý uzel sítě může potenciálně mít jinou kovarianci šumu na stavovém procesu i na měřeních a tato kovariance je navíc neznámá.

Řešení

Distribuovaný adaptivní kalmanův filtr za použití variačních Bayesovských metod.

Kalmanův filtr

- používá se pro zpřesnění předpovědí modelu na základě měření
- distributivní - více propojených agentů provádějící filtraci
- optimální lineární filtr (v MSE) pokud:
  - model přesně reflektuje skutečnost
  - šum je Gaussovský bílý
  - kovariance šumu jsou přesně známy
- tato práce se zabývá rozšířením kdy 3. bod není splněn

Bayesovská pravděpodobnost

- interpretace pravděpodobnosti
- inference pro model $M = \{P_\theta | \theta \in \Theta\}$
- chceme získat aposteriorní pravděpodobnost dle

$$p(\mathbf{Z}|\mathbf{X}) = p(\mathbf{Z}) \cdot \frac{p(\mathbf{X}|\mathbf{Z})}{p(\mathbf{X})}$$

- přímý výpočet obvykle není možný, aproximace například faktorizovatelnými distribucemi

$$q(\mathbf{Z}) = \prod_{i=1}^{M} q_i(\mathbf{Z})$$

Optimalizační problém

- vzdálenost měříme pomocí Kullback-Leiblerovy divergence

$$\mathrm{KL}(q||p) = -\int q(\mathbf{Z}) \ln \frac{p(\mathbf{Z}|\mathbf{X})}{q(\mathbf{Z})} \, \mathrm{d}\mathbf{Z}$$

- optimalizační problém

$$q(\mathbf{Z}) = \underset{q(\mathbf{Z})\text{-fakt.}}{\mathrm{argmin}} \, \mathrm{KL}(q(\mathbf{Z})||p(\mathbf{Z}|\mathbf{X}))$$

- stále nejde přímo, ekvivalentní maximalizaci

$$\mathscr{L}(q) = \int q(\mathbf{Z}) \ln \frac{p(\mathbf{X},\mathbf{Z})}{q(\mathbf{Z})} \, \mathrm{d}\mathbf{Z}$$

Coordinate ascent mean-field variational

- optimální řešení problému

$$q_i^*(\mathbf{Z_i}) \propto \exp\{\mathbb{E}_{-i}[\ln p(\mathbf{Z_i}, \mathbf{Z_{\{-i\}}}, \mathbf{X})]\}$$

- v praxi se postupuje iterativně
- vhodná volba apriorních distribucí zjednodušuje update
- elegantní reprezentace použije-li se *forma exponenciální rodiny*

Pravděpodobností model

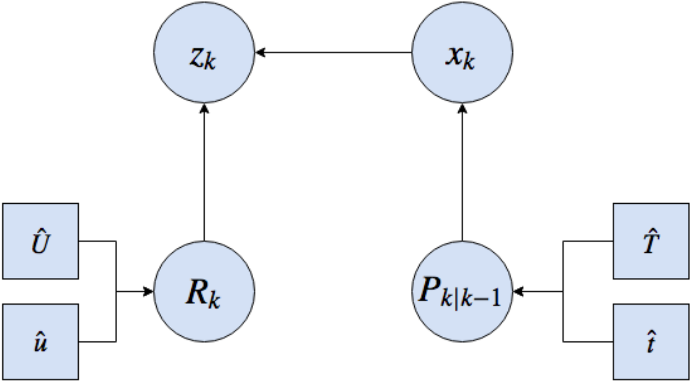
- odhady pravděpodobnostně odpovídají

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k) &= N(\mathbf{z}_k;\mathbf{H}_k\mathbf{x}_k,\mathbf{R}_k)\\
p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) &= N(\mathbf{x}_k;F_{k|k-1}\mathbf{x}_{k-1},\mathbf{Q}_k).
\end{aligned}
$$

- cílem je odhadnout kovariační matice šumů: $\mathbf{R}_k,\mathbf{Q}_k$
- konjugovaná apriorna jsou inverzní Wishartovy distribuce
- pro CAVI předpokládáme, že distribuce je faktorizovatelná

$$
\begin{aligned}
p\left(\Xi,\mathbf{z}_{1:k}\right) = {} & N\left(\mathbf{z}_k;\mathbf{H}_k\mathbf{x}_k,\mathbf{R}_k\right)N\left(\mathbf{x}_k;\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{P}_{k|k-1}\right)\\
& \times \mathrm{IW}\left(\mathbf{P}_{k|k-1};\hat{t}_{k|k-1},\hat{\mathbf{T}}_{k|k-1}\right)\mathrm{IW}\left(\mathbf{R}_k;\hat{u}_{k|k-1},\hat{\mathbf{U}}_{k|k-1}\right)\\
& \times p\left(\mathbf{z}_{1:k-1}\right)
\end{aligned}
$$

Grafický pravděpodobnostní model



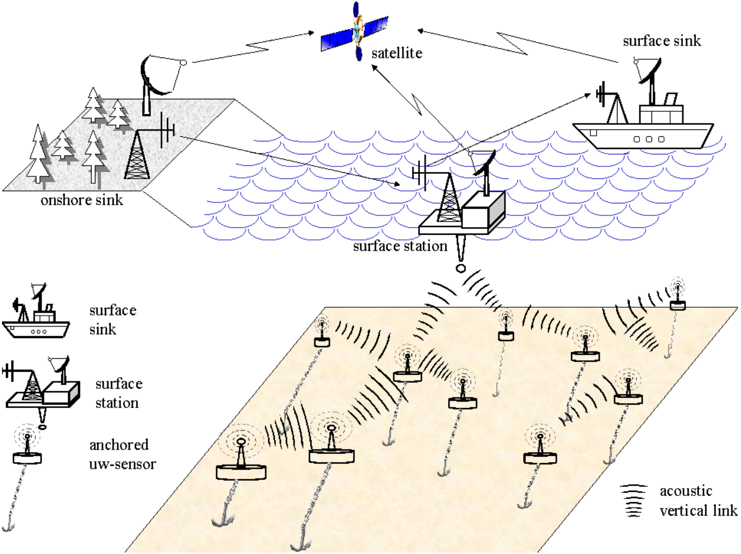
Difúze parametrů

- více agentů provádí filtraci lokálně
- vzájemně propojeni dle dané topografie
- po n krocích si nějakým způsobem vymění informace o odhadech

$$\Xi_*^{i,t} = g(\Xi^{i,t}, \Xi^{1,t}, \ldots, \Xi^{d,t})$$

- snaha o zlepšení lokálního odhadu *zprůměrováním* s ostatními
- je také Kullback-Leibler optimální

Co je to difúzní síť?



Bayesovský update

využitím formy exponenciální rodiny se celý update zjednodušuje na

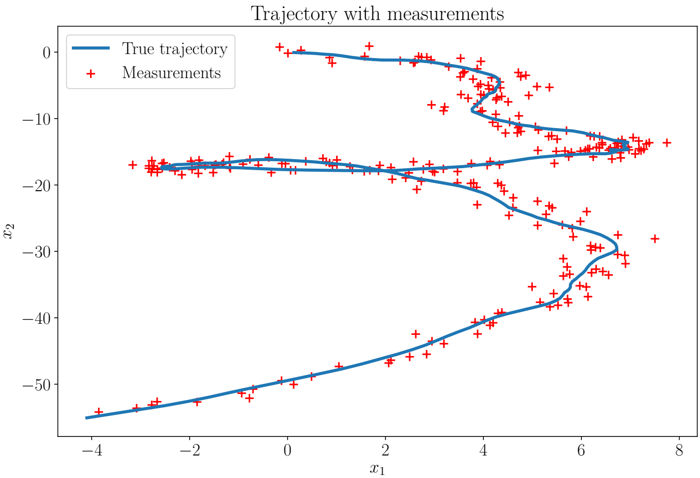
$$\Xi_{i+1}^{n} \leftarrow \Xi^{n-1} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k}^{i} + (\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^{T} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{i+1}^{n} \leftarrow \Omega^{n-1} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k}\mathbf{P}_{k|k}^{i}\mathbf{H}_{k}^{T} + (\mathbf{z}_{k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i})(\mathbf{z}_{k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i})^{T} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

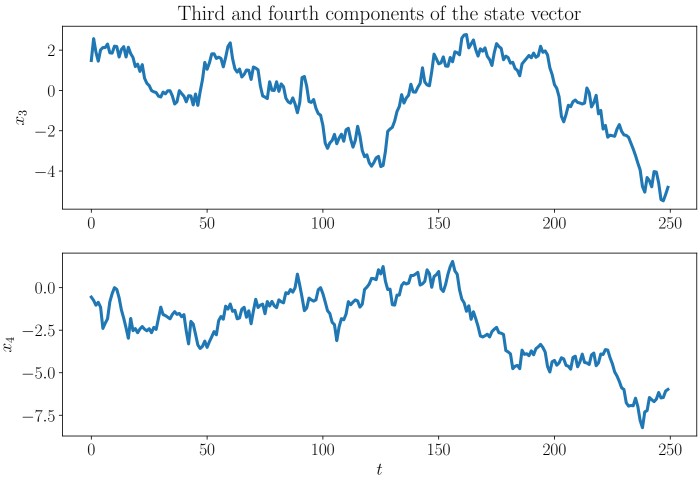
Shrnutí algoritmu

1. **in**: $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}, \hat{u}_{k-1|k-1}, \hat{\mathbf{U}}_{k-1|k-1}, \mathbf{F}, \mathbf{H}, \mathbf{z}_k, \tilde{\mathbf{Q}}_{k-1}, \tau, \rho, N$
2. predikce kalmanova filtru
3. inicializace hyperparametrů Ξ_{init}, $\Omega_{\text{init}}, \hat{\mathbf{x}}^{(0)}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}^{(0)}_{k|k} = \tilde{\mathbf{P}}_k$
4. **for** i in N **do:**
   - 4.1 updatuj Ω^i a spočti z něj $\mathbb{E}[\mathbf{R}_k]$
   - 4.2 updatuj Ξ^i a spočti z něj $\mathbb{E}[\mathbf{P}_{k|k-1}]$
   - 4.3 kalmanova korekce na základě $\hat{\mathbf{x}}^{i+1}_{k|k}, \mathbf{P}^{i+1}_{k|k-1}$
5. **end for**
6. difúze: $\Xi^{i,t}_* = g(\Xi^{i,t}, \Xi^{1,t}, \ldots, \Xi^{d,t})$, $\Omega^{i,t}_* = g(\Omega^{i,t}, \Omega^{1,t}, \ldots, \Omega^{d,t})$
7. **out:** $\hat{\mathbf{x}}^{i+1}_{k|k}, \mathbf{P}^{i+1}_{k|k-1}, \Xi^{i,t}_*, \Omega^{i,t}_*$

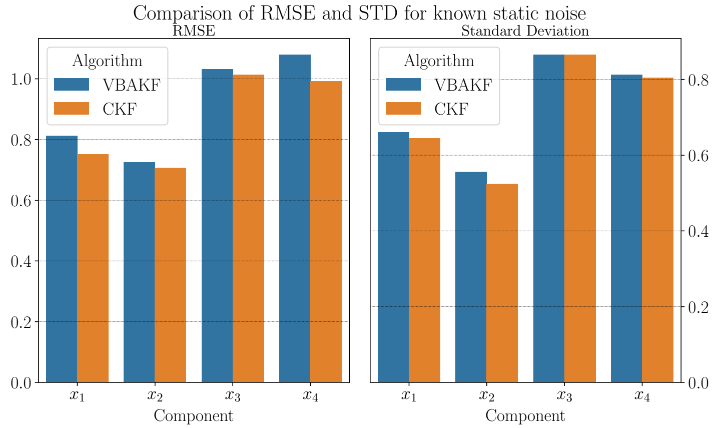
Testovací úloha



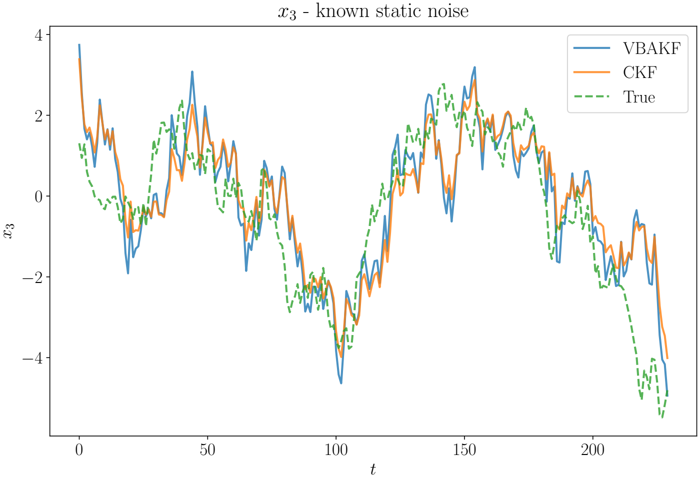
Testovací úloha



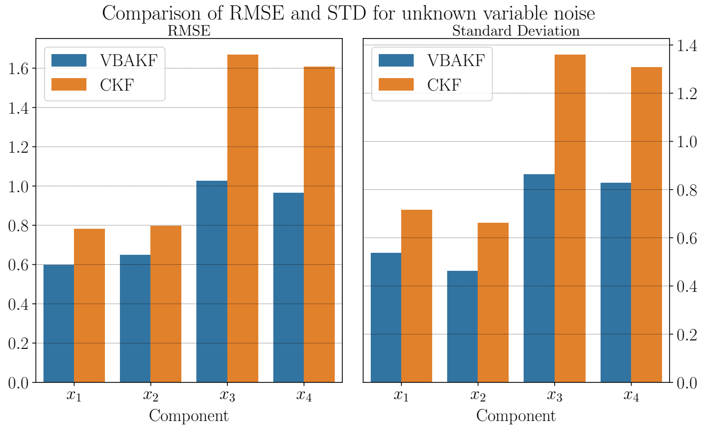
Statický známý šum - srovnání



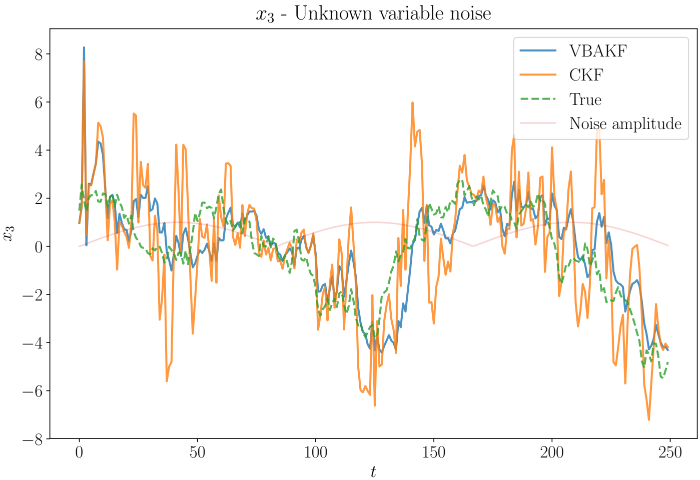
Statický známý šum - 3 komponenta



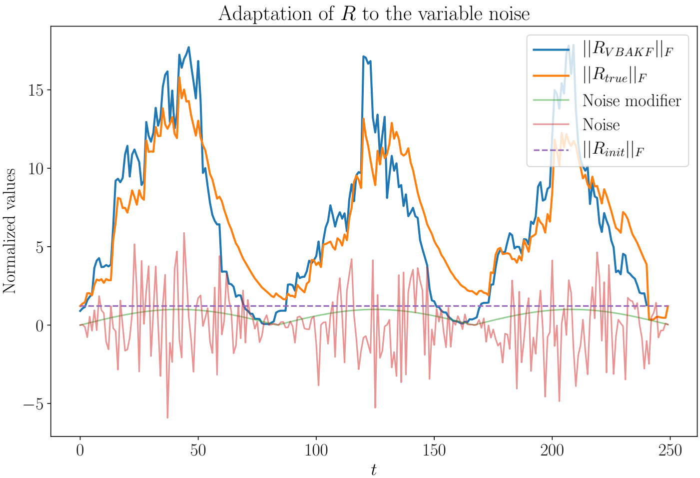
Proměnlivý šum - srovnání



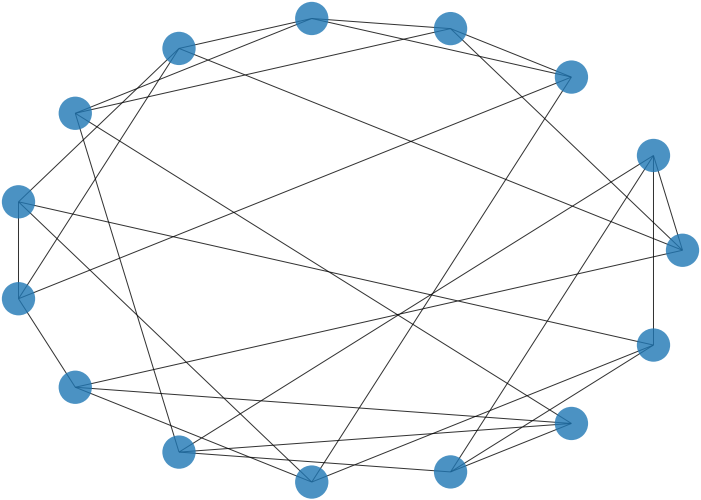
Proměnlivý šum - 3 komponenta



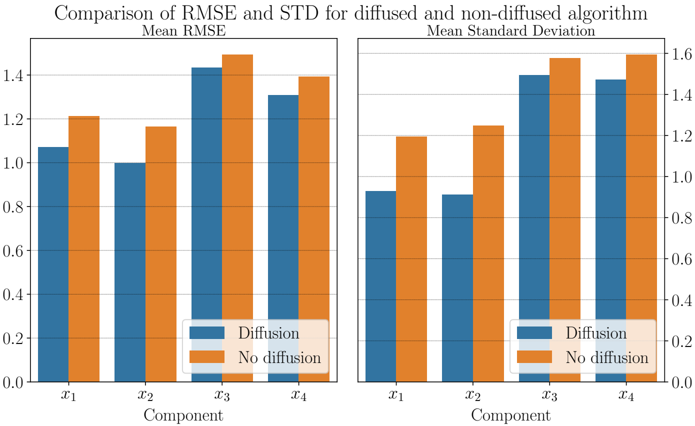
Proměnlivý šum - kovariance



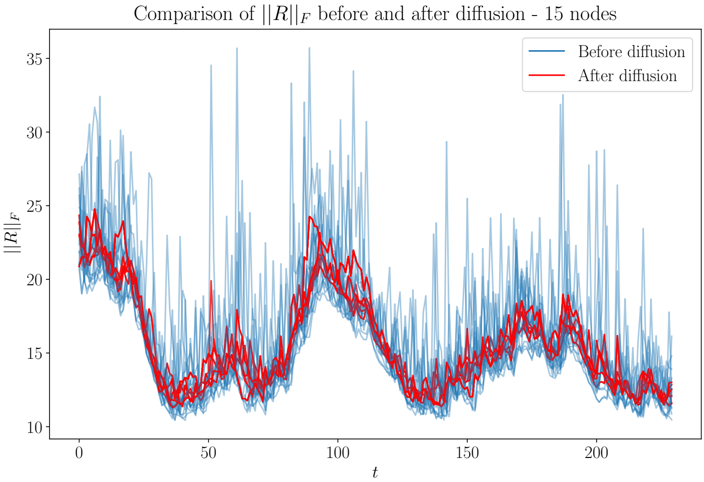
Distribuovaná verze - topologie



Proměnlivý šum - srovnání



Proměnlivý šum - srovnání kovariancí



Shrnutí

- navržený algoritmus má v případech neznámého šumu lepší výkon než základní verze filtru
- vede si zanedbatelně hůře v případě kdy je kovariance známá
- difúze přináší vyšší přesnost, nižší varianci a obranu proti divergenci
- vyžaduje však nastavení dalších 2 („tunning“) parametrů

Budoucí práce

- jaký vliv má topologie sítě a komunikace
- srovnání různých strategií difúzní funkce
- citlivost na jiné typy šumů než Gaussovský
- konvergenční vlastnosti

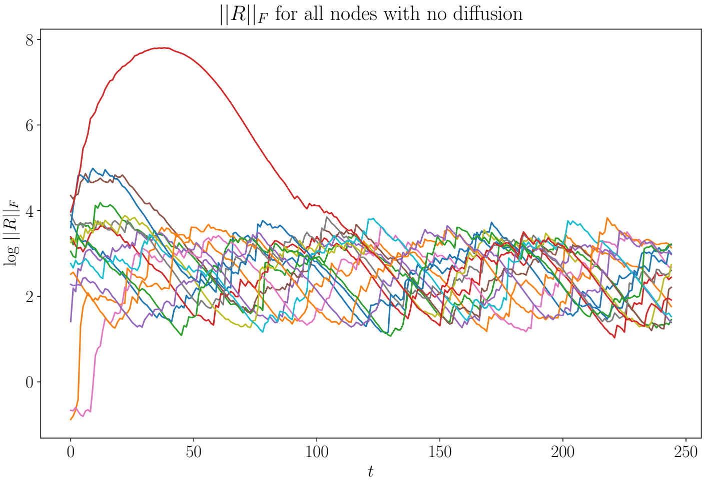
Faktické poznámky

- úvodní kapitola je o interpretacích, ne jen o srovnání
- *2D tracking problem* – ustálený pojem
- difúzní síť a difúze parametrů – uvedené minimum využité v práci
- konvergence
  - důkaz v [11] citovaný v úvodu kapitoly
  - lokální versus globální: CAVI podobné vlastnosti jako gradient descent

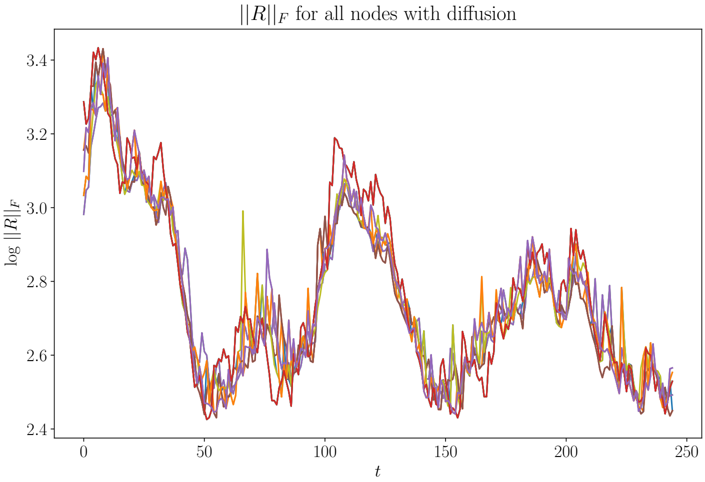
Sazba

- T pro transpozici
- značení pro distribuci: $D(\alpha)$ versus $D(x;\alpha)$
- značení vektorů a skalárů

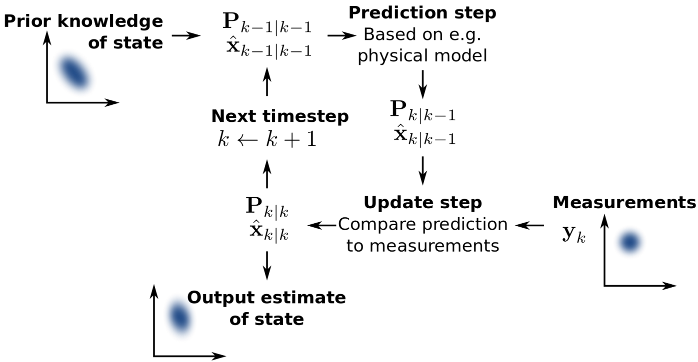
Proměnlivý šum - kovariance bez difúze



Proměnlivý šum - kovariance s difúzí



Kalmanův filtr vizuálně



Lower variational boundary