



Доля П.Г.
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
факультет математики і інформатики
кафедра теоретичної та прикладної інформатики
2020 р.

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Залікові завдання.

Факультети : всі

Семестр : 3 , 5

Форма навчання : денна

Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень): бакалавр

Навчальна дисципліна: використання системи програмування Python в наукових дослідженнях.

Використовуючи мову Python та відповідні математичні пакети, запрограмувати розв'язки наступних задач.

Завдання затверджено на засіданні кафедри теоретичної та прикладної інформатики, протокол № 4 від 17 листопада 2020 р.

Завідувач кафедри: (підпис) (доц. Зарецька І.Т.)

Викладач: (підпис) (доц. Доля П.Г.)

Варіант - 1

1. Дано список $a = 0, 1, 2, \dots, 10$ і число b , яке вводиться з клавіатури. Ввести п'ять значень b , і надрукувати список з п'ятьма елементами, які обчислюються за формулою

$$f = \begin{cases} a \cdot b, & a > 5 \\ \frac{3}{2}ab, & a \leq 5 \end{cases}$$

2. Дано тетраедр з вершинами в точках $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(1.3, 1.1, 2)$. Обчислити об'єм тетраедра, площу грані ABC та довжину висоти $h = |DE|$. Графічно зобразити контур тетраедра, висоту DE та точку E.

3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти площу області, яка обмежена графіками функцій $y = 4x - 8$, $y = (x - 2)^3$. Точки перетинання кривих знайти чисельно (див. додаток 1 наприкінці цього документу). Побудувати графіки функцій та область, площа якої обчислюється.

Варіант - 2

1. Для цілих чисел a від 1 до 10 створити список, елементи якого обчислюються за формулою

$$f = \begin{cases} a^2, & a < 3 \\ a + 5, & 3 \leq a < 7 \\ a, & a \geq 7 \end{cases}$$

2. Використовуючи логічне індексування, побудувати графік функції

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2), & 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ 3 - \sqrt{x^2 + y^2}, & 4 \leq x^2 + y^2 < 9 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 9 \end{cases}$$

3. Побудувати графік функції $y = 2x + \frac{1}{x}$ та дотичну до неї в точці $x_0 = 1.4$.

Вказівка. Рівняння дотичної до графіка функції $y = y(x)$ в точці x_0 має вид $Y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Розв'язання зводиться до побудови графіків функцій $y(x)$ та $Y(x)$. Похідну $y'_x(x)$ реалізувати у вигляді функції за формулою, обчисленою вручну.

Варіант - 3

1. Написати програму, в якій вводяться коефіцієнти a, b, c квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, а потім обчислюються його корені. Врахувати всі можливі значення дискримінанта $b^2 - 4ac$ (додатні, нульові, від'ємні).

2. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти площу під кривою $y = \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^2}$ на відрізку $[0, 1]$.

Графічно зобразити область, площа якої обчислюється.

3. Вектор напруженості електростатичного поля декількох точкових зарядів q_i обчислюється за формулою

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_i \frac{q_i}{\left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \\ z - z_i \end{pmatrix},$$

де x_i, y_i, z_i - координати точок розташування зарядів.

Нехай всі заряди розташовані в площині $z = 0$ (всі $z_i = 0$). Побудувати силові лінії поля $\mathbf{E}(x, y, z)$ в площині $z=0$, тобто побудувати лінії струменя векторного поля $\mathbf{E}(x, y, 0)$. У прикладі розглянути три заряди.

Варіант - 4

1. Дано натуральне число. Написати програму, яка переставляє місцями першу і останню цифри (працювати з цифрами числа, а не з його рядком).
2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 5, \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

двома способами: за допомогою функцій `scipy.linalg.solve` та за допомогою оберненої матриці.

Кожне рівняння системи представляє у просторі площину. Графічно відобразити ці площини напівпрозорими. Зобразити також точку перетинання цих площин.

Вказівка. Зображення площин можна будувати, використовуючи їх явні рівняння. Наприклад, першу площину можна будувати по рівнянню $z = x + y$.

3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти площу області, яка обмежена графіками функцій $y = (x - 2)^3$, $x = 4x - 8$,. Точки перетинання кривих знайти чисельно (див. додаток 1 наприкінці цього документу). Побудувати графіки функцій та область, площа якої обчислюється.

Варіант - 5

1. Написати функцію (не використовуючи вбудовану функцію `max`), яка знаходить максимальний елемент серед її аргументів.

2. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти площу під кривою $y = \frac{x^3}{x^2 + 4}$ на відрізку $[0, 2]$.

Графічно зобразити область, площа якої обчислюється.

3. Електростатичний потенціал точкового заряду обчислюється по формулі

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}_0) = \frac{q_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}},$$

де $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – точка розташування заряду q_0 . Потенціал поля n зарядів внаслідок суперпозиції силових полів репрезентується формулою

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}_i).$$

За допомогою двовимірного контурного графіка зобразити в площині $z = 0$ потенціал поля двох одиничних зарядів протилежного знака, розташованих в точках $(-1, 0, 0)$ і $(1, 0, 0)$.

Варіант - 6

1. Дано список з дванадцяти цілих чисел. Відсортувати список наступним чином: елементи, які мають парні номери, відсортувати по зменшенню; елементи, які мають непарні номери, відсортувати по зростанню.
2. Згенерувати 3 масиви по 10 випадкових цілих чисел з діапазону $[5, 20]$. На одному рисунку побудувати стовпчасті діаграми створених векторів.
3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти довжину дуги кривої $y = x\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$. Побудувати графік кривої та криволінійного відрізка, довжина якого обчислюється.

Вказівка. Довжина дуги плоскої кривої, заданої в декартових координатах явним рівнянням $y = y(x)$, обчислюється за формулою $L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$, де x_0 та x_1 визначають початкову та кінцеву точки дуги. При обчисленні підінтегрального виразу похідну $y'_x(x)$ реалізувати у вигляді функції за формулою, обчисленою вручну.

Варіант – 7

1. Згенерувати список U з 20 випадкових цілих чисел. З нього створити два списки X та Y . Список X утворено з 10 менших елементів U , відсортованих по зростанню. Список Y утворено з 10 більших елементів U , відсортованих по зменшенню. Побудувати стовпчасті діаграми списків X і Y .
2. Побудувати графік кускової функції

$$y(x) = \begin{cases} -1 - x, & x \leq -1 \\ x(1 + x), & -1 < x \leq 0 \\ x(1 - x), & 0 < x \leq 1 \\ 1 - x, & x > 1 \end{cases}$$

3. Вручну обчислити частинні похідні першого порядку функції $z = x^2y - xy^2 + 1$ в точці $x_0 = 0.5$, $y_0 = 0.5$. Використовуючи їх, побудувати графік функції, точку $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ на поверхні і вектор нормалі до поверхні в цій точці.

Варіант – 8

1. Згенерувати масив з 15 випадкових дійсних чисел в діапазоні від 0 до 10. Обчислити номер максимального і мінімального елементу масиву. Перебудувати масив таким чином, щоб в першій його половині розміщувалися елементи, що стояли в непарних позиціях, а в другій половині – елементи, що стояли в парних позиціях. Побудувати стовпчасті діаграми початкового і результативного масивів.

2. Зобразити одиничну окружність і поле її нормалей.

3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy$, де область D

обмежена кривими: $x=1$, $y=\sqrt{x}$, $y=-x^2$. Графічно зобразити область D .

Вказівка. Знайти точку перетинання кривих, які обмежують область. Записати подвійний інтеграл як повторний, і застосувати чисельне інтегрування.

Варіант – 9

1. Дано рядок. Підрахувати кількість великих латинських літер, які він містить.

2. Згенерувати список цілих чисел $[1,2,3,\dots,10]$ і список їх назв [«один», «два», ..., «десять»]. Використовуючи зрізи, об'єднати елементи цих списків в список пар: $[(\text{«один»}, 1), \dots]$. Надрукувати отриманий список пар у вигляді стовпця. Перетворити отриманий список на словник і написати сценарій, який запитує у користувача назву числа, наприклад, «три» та друкує у відповідь число 3.

3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, знайти площу під кривою $y = \frac{1+1/(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+x)^2}$ на відрізку $[1,4]$. Графічно зобразити область, площа якої обчислюється.

Варіант - 10

1. Дано 4 змінні $X=5$, $Y=8$, $Z=12$, $W=3$. Обміняти значення змінних наступним чином: $X \leftarrow W$, $Y \leftarrow Z$, $W \leftarrow Y$, $Z \leftarrow X$, де запис $X \leftarrow W$ означає перенесення значення змінної W в змінну X .

2. Побудувати графік кускової функції

$$y(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^2, & x \leq 0 \\ (x-1)^2 - 1, & x > 0 \end{cases}$$

3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти подвійний інтеграл $\iint_D 12ye^{6xy} dx dy$ по області D як повторний, де область D обмежена кривими: $y=x$, $y=0.5$, $x=1/6$, $x=1/3$. Побудувати графіки цих кривих та зобразити область D .

Варіант - 11

1. Використовуючи словники, створіть структуру даних для зображення інформації про групу студентів, які відвідують спецкурс: ім'я, прізвище, факультет, курс. Протестуйте використання такого словника.

2. Побудувати графіки невизначеного інтегралу $\int \cos^2 x dx$ і підінтегрального виразу.

Вказівка. Невизначений інтеграл знаходити чисельно.

3. Електростатичний потенціал однорідної прямої, перпендикулярної площині $z = 0$, що проходить через точку (x_0, y_0) , зображується формулою.

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}_0) = 2q_0 \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}},$$

де q_0 - лінійна густина заряду уздовж лінії. Потенціал поля n прямих внаслідок суперпозиції силових полів буде виражатися формулою $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}_i)$.

Побудувати поле трьох точкових «зарядів» у вигляді ліній рівня потенціалу.

Варіант - 12

1. Написати програму, яка запитує введення цілого числа від 0 до 10 і друкує його текстову назву. Наприклад, при введенні числа 5 програма надрукує «введено число п'ять».

2. Побудувати графік, який складається з 18 точок, рівномірно розосереджених по одиничному колу, та з 12 точок, рівномірно розкладених по колу радіуса 0.5.

3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти подвійний інтеграл $\iint_D y \cdot \sin(xy) dx dy$ по області D

як повторний, де область D обмежена кривими: $x=1, x=2, y=\pi/2, y=\pi$.

Побудувати графіки цих кривих та зобразити область D .

Варіант – 13

1. Написати програму, яка запитує введення назви числа від 0 до 10 і друкує його числове зображення. Наприклад, при введенні слова «п'ять» програма надрукує «введено число 5».

2. Побудувати графік функції $y = \sin \pi x$ та дотичну до неї в точці $x_0 = 0.4$.

Вказівка. Рівняння дотичної до графіка функції $y = y(x)$ в точці x_0 має вид $Y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Рішення зводиться до побудови графіків функцій $y(x)$ та $Y(x)$. Похідну $y'_x(x)$ реалізувати у вигляді функції за формулою, обчисленою вручну.

3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти подвійний інтеграл $\iint_D y^2 e^{-xy/4} dx dy$ по області D як повторний, де область D обмежена кривими: $x = 0$, $y = 2$, $y = x$. Побудувати графіки цих кривих та зобразити область D .

Варіант – 14

1. Знайти значення матричного многочлена $2A^2 + 3A \cdot B + 5E - 1$, якщо E одинична матриця, і

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти обернену матрицю A^{-1} . Перевірити, що $A \cdot A^{-1} = E$. Обчислити визначник матриці A .

2. Побудувати графік параметрично заданої кривої $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (циклоїда). Побудувати графіки дотичної та нормалі до кривої в точці $t = 4\pi/3$.

Вказівка. Для кривої на площині, яка задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, рівняння дотичної в точці $t = t_0$ може мати вигляд: $x_t = x(t_0) + t \cdot x'(t_0)$, $y_t = y(t_0) + t \cdot y'(t_0)$. Рівняння нормалі в цій точці можна записати у вигляді $x_n = x(t_0) + t \cdot y'(t_0)$, $y_n = y(t_0) - t \cdot x'(t_0)$. Рішення зводиться до побудови графіків параметрично заданих кривих: $(x(t), y(t))$, $(x_t(t), y_t(t))$, $(x_n(t), y_n(t))$. Похідні $x'(t)$, $y'(t)$ реалізувати в програмі у вигляді функцій за формулами, обчисленими вручну.

3. Обчислити об'єм тіла D , обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 9$, $z = y$, $z = 0$ ($y \geq 0$).

Вказівка. Чисельно знайти потрійний інтеграл $V = \iiint_D 1 \cdot dx dy dz$.

Варіант – 15

1. Згенерувати масив з 30 випадкових цілих чисел в діапазоні від 1 до 10. Підрахувати кількість відмінних чисел в цьому масиві. Побудувати стовпчасту діаграму масиву.

2. У спільних осях побудуйте графіки неявно заданих кривих: квадрата, з рівнянням $2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2} = 0$ і трикутника, з рівнянням $2 - x + y - |x| - |x - 2y - |x|| = 0$.

3. Платівка D задана нерівностями $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, з поверхневою густиною $\mu(x, y) = x \cdot y$. Намалювати область платівки та знайти її масу.

Вказівка. Нехай $\mu = \mu(x, y)$ представляє густину матеріалу двовимірного тіла (маса одиниці площі в точці x, y). Маса платівки, яка займає область D на площині, обчислюється за формулою $M = \iint_D \mu(x, y) dx dy$. Для знаходження маси потрібно записати цей інтеграл як повторний і виконати чисельне інтегрування.

Варіант - 16

1. Вибрати зі списку 30 випадкових чисел тільки числа більші за 0.5, створивши з них окремий список. Побудувати стовпчасті діаграми початкового і результативного списків.

2. Побудувати графік неявно заданої кривої $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ (еліпс). В точці $(-2, \sqrt{20}/3)$ побудувати дотичну та нормаль.

Вказівка. Якщо крива задана неявним рівнянням $F(x, y) = 0$, і точка (x_0, y_0) належить кривій, то рівняння дотичної до кривої в цій точці має вигляд

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

а рівняння нормалі

$$F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) - F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) = 0.$$

Похідні обчислити вручну. Рішення зводиться до побудови графіків неявно заданих кривих (еліпса та двох прямих).

3. Чисельно знайти невизначений інтеграл $\int x^2 e^{-x^2} dx$. Побудувати графіки підінтегрального виразу та первісної.

Варіант - 17

1. Вибрати зі списку 40 випадкових чисел з діапазону $[1, 10]$ тільки числа більші за 5, створивши з них окремий список. Знайти номери всіх максимальних елементів нового масиву (навіть, якщо максимальний елемент не один). Побудувати стовпчасту діаграму початкового і результативного списків.

2. Побудувати графіки функцій $y = x$ та $y = x^2$. Зафарбувати сірим кольором зону, яка обмежена зверху і знизу кривими, а зліва і справа – точками перетинання (точки перетину кривих обчислити вручну). Обчислити площу між цими кривими (і точками їх перетинання)

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь двома способами: за допомогою функцій `scipy.linalg.solve` та оберненої матриці.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x - 5y + 2z = -7 \\ 4x - 7y + z = -12 \end{cases}$$

Кожне рівняння системи представляє у просторі площину. Графічно відобразити ці площини напівпрозорими. Зобразити також точку перетинання цих площин.

Вказівка. Зображення площин можна будувати по їх явним рівнянням. Наприклад, першу площину можна будувати по рівнянню $z = (4 - 2x + y)/3$.

Варіант - 18

1. Написати сценарій, який зберігає текст з чотирьох рядків в текстовий файл. Перевірити в «блокноті», що файл збережено вірно. Напишіть інший сценарій, який читає рядки зі створеного файлу і друкує текст рядків в зворотному порядку.

2. Створити і відобразити масив розміром 12×12 , зображення якого має вигляд літери X.

3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти площу області, яка обмежена графіками функцій $y = 8 - x^2$, $y = -2x$. Точки перетинання кривих знайти чисельно (див. додаток 1 наприкінці цього документу). Побудувати графіки функцій та область, площа якої обчислюється.

Варіант - 19

1. Згенерувати масив 20 випадкових дійсних чисел на відрізку $[-10, 10]$. Обчислити суму від'ємних елементів і їх кількість. Обчислити кількість елементів масиву, які дорівнюють 0. Побудувати стовпчасту діаграму початкового масиву.

2. Дано тетраедр з вершинами в точках $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(1.3, 1.1, 2)$. Обчислити об'єм тетраедра, площу грані ABC та довжину висоти $h = |DE|$. Графічно зобразити контур тетраедра, висоту DE та точку E.

3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти площу під кривою $y = \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3}$ на відрізку $[0, \pi/4]$. Графічно зобразити область, площа якої обчислюється.

Варіант – 20

1. Написати функцію, яка обчислює скалярний добуток двох числових списків по формулі $\sum_{k=0}^{n-1} A_k B_k$, де n – кількість елементів в списках A і B . В тілі функції виконати перевірку, що кількість елементів списків A і B однакова.
2. Використовуючи графічні примітиви, створити двовимірний малюнок «хатинки».
3. Чисельно знайти визначений інтеграл $\int_0^{\pi} (x^2 + 4x + 1) \sin x \, dx$. Графічно зобразити зону, площу якої він представляє.

Варіант – 21

1. Написати рекурсивну функцію, яка обчислює кількість сполучень m елементів з n елементів C_n^m , використовуючи формулу Паскаля $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.
2. Побудувати тривимірну криву по параметричному рівнянню $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t/8$, $0 \leq t \leq 8\pi$.
3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти подвійний інтеграл $\iint_D 4y^2 \cdot \sin(2xy) \, dx \, dy$, де область D обмежена кривими: $x = 0$, $y = \sqrt{2\pi}$, $y = 2x$. Побудувати графіки цих кривих та зобразити область D .

Варіант - 22

1. Написати функцію `sum3(...)`, яка має три обов'язкових аргументи (які потрібно підсумовувати) і обчислює суму їх n -х степенів. Показник степеня n задається як необов'язковий аргумент з одиничним значенням за замовчуванням.
2. Побудувати каркасне зображення поверхні функції $z = \sin x \cdot \sin y \cdot (x^2 + y^2)$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$.
3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти подвійний інтеграл $\iint_D y^2 e^{-xy/8} \, dx \, dy$ по області D як повторний, де область D обмежена кривими: $x = 0$, $y = 4$, $y = 2x$. Побудувати графіки цих кривих та зобразити область D .

Варіант - 23

1. Згенерувати список цілих чисел $[1, 2, 3, \dots, 10]$ і список їх назв [«один», «два», ..., «десять»]. Використовуючи зрізи, об'єднати елементи цих списків в список пар: $[[1, \text{«один»}], \dots]$.

2. Побудувати графік функції

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x^2 + y^2 \geq 4 \\ \sqrt{4 - x^2 - y^2} & , \quad 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ \sqrt{3}(x^2 + y^2) & , \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}.$$

Додати малюнок кривої, яка зображує переріз поверхні функції вертикальною площиною $y - x = 0$.

3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти довжину дуги кривої $y = (1 - e^x - e^{-x})/2$, $0 \leq x \leq 3$. Побудувати графік кривої та криволінійного відрізка, довжина якого обчислюється.

Вказівка. Довжина дуги плоскої кривої, заданої в декартових координатах явним рівнянням $y = y(x)$, обчислюється за формулою $L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$, де

x_0 та x_1 визначають початкову та кінцеву точки дуги. При обчисленні підінтегрального виразу похідну $y'_x(x)$ реалізувати у вигляді функції за формулою, обчисленою вручну.

Варіант - 24

1. Згенеруйте одновимірний масив з 16 випадкових чисел. Відсортуйте його за спаданням і потім перетворіть на матрицю розміром 4×4 . Побудуйте стовпчасту діаграму початкового масиву.

2. Побудувати поверхню тора по параметричному рівнянню

$$x = (R + r \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \tau$$

$$y = (R + r \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \tau, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \tau \leq 2\pi.$$

$$z = r \cdot \sin \varphi$$

Покласти $R = 3, r = 1$.

3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти площу області, яка обмежена кривими $y = (x - 1)^2$ та $y = \sqrt{x - 1}$. Точки перетинання кривих знайти чисельно (див. додаток 1 наприкінці цього документу). Побудувати графіки функцій та область, площа якої обчислюється.

Варіант - 25

1. Створіть матрицю B розміром 4×4 складену з одних п'ятірок. Згенеруйте матрицю C розміром 4×4 , елементи якої C_{ij} обчислюються за формулою $C_{ij} = i^2 - j^2$. Згенеруйте діагональний масив D з елементами на діагоналі $[1, -1, 2, -2]$. Обчисліть масив $B - C - D + E - 3$, де E одинична матриця розміром 4×4 . Побудуйте стовпчасті діаграми для кожного рядка результативного масиву.

2. Побудувати поверхню стрічки Мебіуса. Вона утворюється рухом і обертанням відрізка прямої вздовж замкненої просторової кривої. Якщо ця крива є окружністю радіуса R (в площині XY), а n позначає кількість напівобертів відрізка при обході кривої, то її параметричне рівняння буде мати вигляд

$$\begin{aligned}x(u, v) &= \left(R + v \cos\left(\frac{nu}{2}\right) \right) \cos u, \\y(u, v) &= \left(R + v \cos\left(\frac{nu}{2}\right) \right) \sin u, \\z(u, v) &= v \sin\left(\frac{nu}{2}\right),\end{aligned}$$

де $0 \leq u < 2\pi$, $-h/2 \leq v \leq h/2$, h – ширина стрічки. При побудові поверхні покласти $R = 3$, $h = 2$, $n = 1$.

3. Знайти точку перетинання прямої $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$ і площини $x + 2y + 3z - 14 = 0$ (реалізувати формули в програмі). Використовуючи графічні функції пакету `matplotlib`, намалювати пряму, площину і точку перетину.

Варіант - 26

1. Створіть матрицю Z , елементи якої обчислюються за формулою $Z_{ij} = X_i^2 - Y_j^2$, де $X = [-3, 0, 1, 2, 5]$, $Y = [-5, 0, -4, 1, 3]$ одновимірні масиви. Використовуючи метод `append`, додайте до Z стовпець, складений з натуральних чисел $1, 2, 3, 4, 5$. Потім між 1-м і другим рядками вставте рядок, складений з одиниць. Побудуйте стовпчасті діаграми для кожного рядка результативного масиву.

2. Використовуючи тривимірні графічні примітиви побудувати спрощене зображення будинку.

3. В просторі дано плоский паралелограм, три вершини якого мають координати $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$. Знайти координати четвертої вершини D , яка протилежна вершині A . Обчислити площу паралелограма. Графічно зобразити контур цього паралелограма, та точки його вершин.

Варіант - 27

1. Скласти вручну наступні масиви по правилах додавання масивів модуля numpy.

$$[3,2,1] + \begin{bmatrix} 4,-2,3 \\ 1,-1,1 \end{bmatrix}.$$

Отриману відповідь перевірити, виконавши додавання інструкціями Python.

2. Створити графічне вікно з трьома зображеннями, розташованими «хаотично». Ліве верхнє зображення містить графік розсіювання (scatter) точок, розташованих на поверхні циліндра. Праве зображення - графік поверхні $z = (x^2 + y^2) \sin x \sin y$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$, з контурними проекціями на координатні площини. В нижній зоні намальовано поверхню гіперболічного параболоїда $z = x^2 - y^2$

3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти площу області, яка обмежена графіками функцій $y = x^2 - 4x + 3$, $y = 2x - x^2 + 3$. Точки перетинання кривих знайти чисельно (див. додаток 1 наприкінці цього документа). Побудувати графіки функцій та область, площа якої обчислюється.

Варіант - 28

1. Використовуючи функції модуля numpy, створити масив A розміром 5 x 5, у якого на головній діагоналі розташовані числа 1, 2, 3, 4, 5, на верхній побічній діагоналі – одиниці, на нижній побічній – мінус одиниці, а інші елементи дорівнюють нулю.

2. Дано тетраедр з вершинами в точках $A(0,0,0)$, $B(2,1,0)$, $C(1,2,0)$, $D(1.3,1.1,2)$. Обчислити об'єм тетраедра, площу грані ABC та довжину висоти $h = |DE|$. Графічно зобразити контур тетраедра, висоту DE та точку E.

3. Платівка D задана нерівностями $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, з поверхневою густиною $\mu(x, y) = 4y^4$. Намалювати платівку та знайти її масу.

Вказівка. Якщо $\mu = \mu(x, y)$ представляє густину матеріалу двовимірного тіла (маса одиниці площі в точці x, y), то маса платівки, яка займає область D на площині, обчислюється за формулою $M = \iint_D \mu(x, y) dx dy$. Записати цей інтеграл як повторний і виконати чисельне інтегрування.

Варіант – 29

1. Створити масив В розміром 5×5 , всі рядки якого співпадають з вектором 1,2,3,4,5. Створити масив С розміром 5×5 , всі стовпці якого співпадають з вектором 2,4,6,8,10. Скласти масиви $D = B + C$. В масиві D замінити другий рядок одиницями, видалити останній стовпець та дописати праворуч до отриманого масиву масив з нулів розміром 5×2 . В отриманому масиві замінити елементи, індекси яких одночасно задовольняють нерівностям $1 \leq i \leq 3$, $3 \leq j \leq 5$, на трійки. Побудувати стовпчасті діаграми для кожного рядка результативного масиву.
2. Знайти довжини сторін, величини кутів та площу трикутника з вершинами в точках $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Намалювати трикутник, точку E – середину сторони BC, та медіану AE.
3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти подвійний інтеграл $\iint_D y^2 e^{-xy/2} dx dy$ у по області D як повторний, де область D обмежена кривими: $x = 0$, $y = \sqrt{2}$, $y = x$. Побудувати графіки цих кривих та зобразити область D.

Варіант - 30

1. Згенерувати випадковий одновимірний масив з 25 точками на відрізку $[-1,1]$. Реорганізувати його в масив 5×5 . Замінити в отриманому масиві останній рядок на одиниці. Побудувати стовпчасті діаграми для кожного рядка результативного масиву.
2. В просторі дано плоский паралелограм, три вершини якого мають координати $A(-3,5,6)$, $B(1,-5,7)$, $C(8,-3,-1)$. Знайти координати четвертої вершини D, яка протилежна вершині A. Обчислити площу паралелограма. Графічно зобразити контур цього паралелограма, та точки його вершин.
3. Побудувати графіки невизначеного інтегралу $\int (4-3x)e^{-x} dx$ і підінтегрального виразу.
Вказівка. Невизначений інтеграл знаходити чисельно.

Варіант - 31

1. Згенерувати масив з координат 12 випадкових точок на відрізку $[-2,3]$ і реорганізувати його в масив 2×6 . Отриманий масив транспонувати, додати стовпець із одиниць. Потім від'ємні елементи замінити на 0.5 і масив ще раз транспонувати. Побудуйте стовпчасті діаграми для кожного рядка результативного масиву.

2. Побудувати контурний графік функції $z = \sin(xy) e^{\frac{-x^2-y^2}{3}}$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$.
3. Дано два вектора $\mathbf{a} = (1, -1, 6)$, $\mathbf{b} = (-3, 2, 1)$. Обчислити довжину векторів. Обчислити скалярний добуток векторів. Обчислити кут між векторами. Обчислити векторний добуток векторів. Обчислити зовнішній добуток векторів. Побудувати зображення векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} (як тривимірних графічних примітивів).

Варіант - 32

1. Напишіть сценарій, в якому буде створено англо-український словник з кількох слів, наприклад з 6. В якості ключів використовуйте англійські слова, а в якості значень – їх переклади на українську мову. Побудуйте із словника список кортежів, складений із пар (ключ, значення). Відсортуйте список по ключу і збережіть в текстовий файл.
2. У графічному вікні намалювати 2 зображення: графік кривої e^x і в меншому прямокутному вікні графік функції $\sin \pi x$.
3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти площу області, яка обмежена графіками функцій $y = x^2 - 2x$, $y = 4 - x^2$. Точки перетинання кривих знайти чисельно (див. додаток 1 наприкінці цього документу). Побудувати графіки функцій та область, площа якої обчислюється.

Варіант – 33

1. Згенерувати одновимірний масив 16 випадкових дійсних чисел на відрізок $[-8, 8]$. Замінити всі від'ємні елементи масиву їх квадратами і впорядкувати елементи нового масиву по зростанню. Побудувати стовпчасту діаграму результативного масиву.
2. На площині XY побудувати векторне поле $\mathbf{U} = (\sin y, -\sin x)$ на фоні модуля його дивергенції.
Вказівка. Дивергенція плоского векторного поля $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ обчислюється за формулою $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$. Похідні обчислювати вручну.
3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4) dx dy$, де область D обмежена кривими: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt{x}$. Графічно зобразити область D .
Вказівка. Знайти точку перетинання кривих, які обмежують область. Записати подвійний інтеграл як повторний, і застосувати чисельне інтегрування.

Варіант - 34

1. Згенерувати масив з 16 випадкових дійсних чисел в діапазоні від -5 до 5. Округлити всі елементи до двох десяткових знаків. Обчислити суму цілих частин елементів масиву, розташованих після останнього від'ємного елемента. Побудувати стовпчасту діаграму квадрату початкового масиву.
2. На площині XY побудувати лінії течії векторного поля $U = (y^2, -x^2)$ на фоні залитого контурного графіка модуля цього поля U .
3. Написати програму, в якій обчислити (за відомими формулами) довжини сторін, величини кутів та площу трикутника з вершинами в точках $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Намалювати трикутник, точку E – середину сторони BC, та медіану AE.

Варіант – 35

1. Дано рядок. Підрахувати кількість цифр, які він містить.
2. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти площу під кривою $y = \frac{8x - \arctg 2x}{1 + 4x^2}$ на відрізку $[0, 1/2]$. Графічно зобразити область, площа якої обчислюється.
3. Знайти точку перетинання прямої $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$ і площини $-x + 3y - 5z + 9 = 0$ (реалізувати формули в програмі). Використовуючи графічні функції пакету matplotlib, намалювати пряму, площину і точку перетину.

Варіант – 36

1. Згенерувати два масиви випадкових дійсних чисел A і B розміром 5×5 з діапазону від 0 до 10. В масиві A замінити елементи, які менші за відповідні елементи B, на ці елементи B. Решту елементів масиву A залишити незмінними. Побудуйте монохромне «зображення» обох масивів.
2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до параметрично заданої кривої $x = \sin^3 t$, $y = \cos^3 t$ в точці $t_0 = \pi/3$.
Вказівка. Для кривої на площині, яка задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, рівняння дотичної в точці $t = t_0$ може мати вигляд: $x_t = x(t_0) + t \cdot x'(t_0)$, $y_t = y(t_0) + t \cdot y'(t_0)$. Рівняння нормалі в цій точці можна записати у вигляді $x_n = x(t_0) + t \cdot y'(t_0)$, $y_n = y(t_0) - t \cdot x'(t_0)$. Рішення зводиться до побудови графіків параметрично заданих кривих: $(x(t), y(t))$, $(x_t(t), y_t(t))$, $(x_n(t), y_n(t))$. Похідні $x'(t)$, $y'(t)$ реалізувати в програмі у вигляді функцій за формулами, обчисленими вручну.

3. Побудувати графіки невизначеного інтегралу $\int \cos^4 x dx$ і підінтегрального виразу.

Вказівка. Невизначений інтеграл знаходити чисельно.

Варіант – 37

1. Написати програму, яка генерує два масиви по 12 випадкових цілих чисел від 0 до 10. Надрукувати числа, які належать обом масивам. Побудувати стовпчасті діаграми обох масивів.

2. Побудувати графік функції $y = \sin \pi x$ та дотичну до неї в точці $x_0 = 0.6$.

Вказівка. Рівняння дотичної до графіка функції $y = y(x)$ в точці x_0 має вид $Y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Розв'язання зводиться до побудови графіків функцій $y(x)$ та $Y(x)$. Похідну $y'_x(x)$ реалізувати у вигляді функцій за формулами, обчисленими вручну.

3. Чисельно знайти визначений інтеграл $\int_1^2 (2x^3 - 4x^2 + 5) dx$. Графічно зобразити зону, площу якої він представляє.

Варіант – 38

1. Згенерувати випадковий масив 5×5 . Для кожного рядка матриці знайти суму її елементів. Побудувати нову матрицю, у якій елементи, що розташовані одночасно вище головної діагоналі і вище побічної, дорівнюють нулю. Побудувати монохромне «зображення» початкового масиву.

2. Дано два вектора $\mathbf{a} = (1, -1, 6)$, $\mathbf{b} = (-3, 2, 1)$. Обчислити довжину векторів. Обчислити скалярний добуток векторів. Обчислити кут між векторами. Обчислити векторний добуток векторів. Обчислити зовнішній добуток векторів. Побудувати зображення векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} як тривимірних графічних примітивів.

3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти площу області, яка обмежена графіками функцій $y = (x+1)^2$, $y = x+1$. Точки перетинання кривих знайти чисельно (див. додаток 1 наприкінці цього документу). Побудувати графіки функцій та область, площа якої обчислюється.

Варіант – 39

1. Написати функцію, яка обчислює суму n -х степенів її аргументів. Кількість аргументів довільна. Показник степеня n задається як необов'язковий аргумент з одиничним значенням за замовчуванням.
2. Згенерувати масив випадкових цілих чисел розміром 5×5 . Замінити елементи побічної діагоналі на числа, які дорівнюють середньому мінімального і максимального елементів рядка. Знайти номер рядка з найбільшою сумою елементів і вивести цей номер. Побудувати зображення початкового і результативного масивів.
3. Використовуючи систему програмування Python та відповідні математичні пакети, чисельно знайти визначений інтеграл $\int_{-1}^1 (x+2)^2 \cos(x/2) dx$. Графічно зобразити зону, площу якої він представляє.

Додаток 1. Чисельне розв'язання алгебраїчних рівнянь.

Для чисельного розв'язання алгебраїчних рівнянь можна застосувати функцію `fsolve(f, [x0])` модуля `scipy.optimize`. Тут f – посилання на функцію, яка використовується в рівнянні $f(x)=0$, а $x0$ – початкове значення. Наприклад,

```
from scipy.optimize import fsolve
rt=fsolve(lambda x: x**2-1,[2])
print(rt)
[ 1.]
```

Якщо другим аргументом передається одне значення, то функція зазвичай повертає найближчий до цього значення корінь. Можна передавати кілька різних початкових значень, і функція повертатиме таку ж кількість величин (вони можуть співпадати). Наприклад, для чисельного розв'язання квадратного рівняння $x^2 - x - 2 = 0$ функції `fsolve` потрібно передати посилання на функцію $f(x) = x^2 - x - 2$ і список (або масив) з двох різних чисел $[-2, 3]$ (або інших).

```
from scipy.optimize import fsolve
rt=fsolve(lambda x: x**2-x-2,[-2,3])
print(rt)
[-1.  2.]
```

Отже знайдено два різних кореня $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$.