



Вправи до лабораторних робіт по курсу «Використання мови програмування Python в наукових дослідженнях»

Зміст

Тема 1. Арифметичні операції.	1
Тема 2. Оператори керування.	3
Тема 3. Списки, кортежі, словники, рядки.	4
Тема 4. Робота з файлами. Функції, модулі і пакети програм.	6
Тема 5. Масиви.	8
Тема 6. Лінійна алгебра та її використання.	11
Тема 7. Графіки функцій та кривих.	13
Тема 8. Робота з тривимірною графікою.	15
Тема 9. Геометричні побудови, ділова та наукова графіка.	16
Тема 10. Основи символьних обчислень.	18
Тема 11. Застосування символьної математики.	21
Тема 12. Чисельне інтегрування.	24
Тема 13. Чисельне розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.	27
Додатки	29

Тема 1. Арифметичні операції.

Вправа 1.1. Використовуючи команди інтерпретатора, обчислити арифметичний вираз

$$6 : \frac{1}{3} - 0,8 : \frac{\frac{1,5}{\frac{3}{2} \cdot 0,4 \cdot \frac{50}{1 : \frac{1}{2}}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 - \frac{46}{1 + 2,2 \cdot 10}}$$

Відповідь: 11.

Вправа 1.2. Дано $a = 2, b = 3$. Обчислити значення $z_1 = e^b \sin a$, $z_2 = a^{1/3} b^{2/7}$, $z_3 = \arcsin(a/b)$.

Вправа 1.3. Використовуючи команди інтерпретатора, надрукувати значення функції $\ln x$ для $x = 2, 3, 4, 5$ в один рядок.

Вправа 1.4. Використовуючи відомі формули, обчислити корені квадратного рівняння $x^2 - 11x + 28 = 0$.

Вправа 1.5. Дано два комплексних числа $z_1 = \frac{1}{3}(3 - 5j)$, $z_2 = 1 + 2j$. Обчислити $z_1 + z_2, z_1 z_2, z_1^2 + z_2^3, z_1 / z_2$.

Вправа 1.6. Обчислити $\left[(2 + j) \left(\frac{1}{2} + 3j \right) \right]^2, \frac{1 - 2j}{2 + 3j} - \frac{3 + j}{2j}$.

Зауваження. Для позначення комплексного числа з одиничною уявною частиною слід використовувати одиницю перед j , наприклад, $3 + 1j$ (запис $3 + j$ не працює).

Вправа 1.7. Обчислити наступні комплексні числа.

$$\frac{(1 + j)^{15}}{(1 - j)^9}, (2 - 3j)\sqrt{-1 + j}, (1 + j + j^2 + j^3)^{10}.$$

Обчислити модуль та аргумент цих чисел.

Вказівка. Для визначення модуля і аргументу комплексного числа використовуйте функцію `polar(z)` модуля `cmath`.

Вправа 1.8. Обчислити вираз $\sin(1) \cdot \sin(1 + j) \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - j}$.

Вказівка. Для обчислення синуса і квадратного кореня дійсних виразів використовувати функції модуля `math`, а комплексних – функції модуля `cmath`.

Вправа 1.9. Використовуючи функції модуля «turtle», намалювати хатинку.

Вправа 1.10. Оформити інструкції, які розв'язують вправу 1.2 у вигляді сценарію і виконати його.

Вправа 1.11. Написати програму (сценарій), яка запитує у користувача його прізвище, вік і середній бал останньої сесії, а потім друкує цю інформацію в один рядок.

Вказівка. Для введення рядка використовуйте функцію `input('Запрошення')`, наприклад,

```
surname=input('Введіть прізвище ')
```

Після натискання клавіші `Enter` інтерпретатор чекатиме введення рядка, яке повинно закінчитися натисненням `Enter`. Змінній `surname` буде надано значення введеного рядка. В режимі виконання сценарію також буде зупинка і очікування введення рядка.

Для введення числових значень використовуйте приведення типів, наприклад

```
age=int(input('Введіть вік '))
```

```
mark=float(input(' Введіть середній бал '))
```

Тема 2. Оператори керування.

Вправа 2.1. Надрукувати куби чисел 1, 2, ..., 6, використовуючи:

- цикл while
- цикл for ... in range(...)
- цикл for ... in список

Вправа 2.2. Обчислити суму скінченного ряду $\sum_{k=1}^N k^2$. Число N вводити з клавіатури.

Вправа 2.3. Написати програму (сценарій), яка запитує у користувача ціле число і потім друкує чи є воно парним або непарним.

Вправа 2.4. Надрукувати таблицю значень функцій $x, \sin x, \operatorname{tg} x, e^x$ для $x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$.

Вправа 2.5. Дано список 8 цілих чисел. Використовуючи цикл, змінити елементи списку на їх квадрати (не створити новий, а змінити вихідний список).

Вправа 2.6. Дано список цілих чисел. Створити новий список, який складається з квадратів елементів вихідного списку. Обчислити суму елементів нового списку. Оформити інструкції у вигляді сценарію.

Вправа 2.7. Для цілих чисел a від 1 до 10 надрукувати значення, які обчислюються по формулі

$$f = \begin{cases} a^2, & a < 3 \\ a + 5, & 3 \leq a < 7 \\ a, & a \geq 7 \end{cases}$$

Вказівка. Для обчислення f створити функцію $f(a)$.

Вправа 2.8. Дано список $a = 0, 1, 2, \dots, 10$ і число b , яке вводиться з клавіатури. Створити список з елементами, які обчислюються за формулою

$$f = \begin{cases} a \cdot b, & a > 5 \\ \frac{3}{2}ab, & a \leq 5 \end{cases}$$

Вказівка. Для обчислення f створити функцію $f(a, b)$.

Вправа 2.9. Ввести з клавіатури числа x, y, n , а потім обчислити:

1. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$;
2. $\sin x + \sin(x + y) + \sin(x + 2y) + \dots + \sin(x + ny)$.

Вправа 2.10. Імпортувавши функції модуля «turtle», намалювати зображення правильного багатокутника, наприклад, шестикутника.

Вправа 2.11. Використовуючи функції модуля «turtle», намалювати сонечко (для малювання променів використати цикл). Оформити інструкції у вигляді сценарію.

Вправа 2.12. Використовуючи функції модуля «turtle», намалюйте графік функції $\sin(x)$. Оформити інструкції у вигляді сценарію.

Вказівка. Сформуйте списки абсцис та ординат точок кривої (перед малюванням кривої промасштабуйте дані). При формуванні списку ординат застосуйте функцію `map(...)`.

Вправа 2.13. Написати програму (сценарій), в якій вводяться коефіцієнти a, b, c квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, а потім обчислюються його корені. Врахувати всі можливі значення дискримінанта $b^2 - 4ac$ (додатні, нульові, від'ємні). Оформити інструкції у вигляді сценарію.

Вправа 2.14. Дано натуральне число. Написати програму, яка переставляє місцями першу і останню цифри (працювати з цифрами числа, а не з його рядком).

Вправа 2.15. Не використовуючи вбудовану функцію `max`, написати програму, яка знаходить максимальний елемент числового списку

Тема 3. Списки, кортежі, словники, рядки.

Вправа 3.1. Дано натуральне число. Написати програму, яка переставляє місцями першу і останню цифри. Використати рядкове зображення числа.

Вправа 3.2. Дано список з дванадцяти цілих чисел. Відсортувати список наступним чином: елементи, які мають парні номери, відсортувати по зменшенню; елементи, які мають непарні номери, відсортувати по зростанню.

Вказівка. Для сортування списків використовуйте функцію `sorted(список)`.

Вправа 3.3. Згенерувати список U з 20 випадкових цілих чисел. З нього створити два списки X та Y . Список X утворено з 10 менших елементів U , відсортованих по зростанню. Список Y утворено з 10 більших елементів U , відсортованих по зменшенню. Використовуючи функції модуля «turtle», побудувати графік ламаної, вершини якої мають координати X, Y .

Вказівка. Випадкові числа генерує функція `randrange` з модуля `random`.

Вправа 3.4. Імпортувавши функції модуля «turtle», намалювати зображення п'ятикутної зірки.

Вказівка. Створити списки абсцис і ординат внутрішніх і зовнішніх вершин зірки. Потім об'єднати їх по черзі в один список. Використовуючи оператор циклу, створені списки і функції модуля «turtle», намалювати ламану у вигляді зірки.

Вправа 3.5. Дано рядок. Підрахувати кількість цифр, які він містить.

Вказівка. Перевіряти коди символів рядка. Коди цифр 0, 1, 2, ..., 9 розташовані послідовно в діапазоні від 48 до 57.

Вправа 3.6. Дано рядок. Підрахувати кількість великих латинських літер, які він містить.

Вказівка. Перевіряти коди символів рядка. Коди літер A, B, C, ..., Y, Z розташовані послідовно в діапазоні від 65 до 90.

Вправа 3.7. Дано рядок, що складається з англійських слів, розділених проміжками (одним або декількома). Знайти кількість слів у рядку.

Вправа 3.8. Дано 4 змінні $X=5$, $Y=8$, $Z=12$, $W=3$. Обміняти значення змінних наступним чином: $X \leftarrow W$, $Y \leftarrow Z$, $W \leftarrow Y$, $Z \leftarrow X$, де запис $X \leftarrow W$ означає перенесення значення змінної W в змінну X .

Вправа 3.9. Напишіть вираз, який змінить перший елемент в кортежі. Наприклад, кортеж із значенням (8, 15, 26) повинен стати кортежем зі значенням (11, 15, 26)

Вказівка. Оскільки кортежі є незмінними, в дійсності їх не можна змінити безпосередньо, але можна створити новий кортеж з бажаним значенням. Створіть новий кортеж за допомогою операцій вилучення зрізу і конкатенації.

Вправа 3.10. Використовуючи вкладені словники, створіть структуру даних для зображення інформації про групу студентів, які відвідують спецкурс: ім'я, прізвище, факультет, курс. Протестуйте використання такого словника.

Вказівка. Для ключів зовнішнього словника використовуйте прізвища студентів, а в якості їх значень – словники, які містять інформацію про окремого студента.

Вправа 3.11. Написати програму, яка запитує введення цілого числа від 0 до 10 і друкує його текстову назву. Наприклад, при введенні числа 5 програма надрукує «введено число п'ять».

Вказівка. Створіть список, що містить текстові назви чисел. Інший спосіб полягає в створенні словника з ключами '1', '2', ... і значеннями – текстовими назвами чисел 'один', 'два',

Вправа 3.12. Написати програму, яка запитує введення назви числа від 0 до 10 і друкує його числове зображення. Наприклад, при введенні слова «п'ять» програма надрукує «введено число 5».

Вказівка. Створіть словник з назвами – ключами і числами – значеннями.

Вправа 3.13. Написати програму, яка запитує введення цілого числа від 20 до 99 і друкує його текстову назву. Наприклад, введення числа 31 створює текстовий рядок з двох слів «тридцять» + «один» і друкує «тридцять один».

Вправа 3.14. Згенерувати список цілих чисел [1,2,3,...,10] і список їх назв [«один», «два», ..., «десять»]. Об'єднати елементи цих списків в список пар: [[1, «один»], ...]

- використовуючи зрізи;
- використовуючи функцію `zip(...)`.

Вправа 3.15. Вибрати зі списку випадкових чисел тільки числа більші за 0.5, створивши з них окремий список.

Вказівка. Використати функцію `filter`.

Вправа 3.16. Згенерувати список випадковий цілих чисел і рядків, які містять послідовності цифр, наприклад, [1, '25', '43', 52, ...]. Скласти списки, які складаються тільки з чисел і тільки рядків, вибравши їх елементи з вихідного списку.

Тема 4. Робота з файлами. Функції, модулі і пакети програм.

Вправа 4.1. Написати сценарій, який зберігає текст з чотирьох рядків в текстовий файл. Перевірити в «блокноті», що файл збережено вірно. Напишіть інший сценарій, який читає рядки зі створеного файлу і друкує текст рядків в зворотному порядку.

Вказівка. Інструкції роботи з текстовими файлами описано в додатку А наприкінці цього документа.

Вправа 4.2. Написати сценарій, який виконує завдання з вправи 3.2, а потім зберігає відсортований відповідним чином список в файл. Напишіть інший сценарій, який читає числа з цього файлу і знаходить їх суму.

Вправа 4.3. Напишіть сценарій, в якому будується англо-український словник з кількох слів, наприклад з 10. В якості ключів використовуйте англійські слова, а в якості значень – їх переклади на українську мову. Побудуйте із словника список кортежів, складений із пар (ключ, значення). Відсортуйте список по ключу і збережіть в текстовий файл.

Напишіть сценарій, в якому прочитайте ваш файл і знову побудуйте словник (об'єкт в робочому просторі вашої виконавчої системи). Протестуйте роботу створеного словника. Наприклад, інструкція `dic['table']` повинна повернути 'стіл'.

Вправа 4.4. Написати функцію, яка обчислює скалярний добуток двох числових списків по формулі $\sum_{k=0}^{n-1} A_k B_k$, де n – кількість елементів в списках A і B . В тілі функції виконати перевірку, що кількість елементів списків A і B однакова.

Вправа 4.5. Написати рекурсивну функцію, яка обчислює кількість сполучень m елементів з n елементів C_n^m , використовуючи формулу Паскаля $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

Вправа 4.6. Написати модуль, який містить функції обчислення характеристик геометричних фігур:

- площу кола;
- довжину окружності;
- площу сектора кола;
- площу трикутника по координатам його вершин;
- периметр трикутника по координатам його вершин.

Протестувати модуль.

Вправа 4.7. Написати модуль, який містить функції з прикладів 4.4 і 4.5, а також наступні функції.

1. Функція `root(f, a, b[, eps])` методом половинного ділення знаходить корінь неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Ім'я функції f та кінці відрізка a, b передаються аргументами до функції `root(...)`. Абсолютна похибка обчислень `eps` є необов'язковим аргументом, який за замовчуванням дорівнює 0.001.

2. Функція `sum3(...)` має три обов'язкових аргументи і обчислює суму їх n -х степенів. Показник степеня n задається як необов'язковий аргумент з одиничним значенням за замовчуванням.

3. Функція обчислює суму n -х степенів її аргументів. Кількість аргументів довільна (узагальнення функції `sum3`). Показник степеня n задається як аргумент функції з одиничним значенням за замовчуванням.

Вказівка. В Python 3 в визначенні функції можна вказати, що деякі параметри передаються тільки по іменам. Вони повинні йти після параметра з однією зірочкою, який позначає довільну кількість аргументів.

Протестуйте роботу функцій вашого модуля.

Вправа 4.8. Створіть пакет програм з трьох модулів, розмістивши їх по каталогах наступним чином.

```
test.py          # тестовий сценарій
dir1\
    __init__.py
    mod_math.py
dir2\
    __init__.py
    mod4_6.py     # модуль з прикладу 4.6
dir3\
    __init__.py
    mod4_7.py     # модуль з прикладу 4.7
```

Модулі `mod4_6.py`, `mod4_7.py` взяти з прикладів 4.6 і 4.7. В модулі `mod_math.py` створіть математичні функції (наприклад, `sin`, `cos`, `exp`), які вміють працювати зі списками, тобто вони в якості аргументів можуть приймати списки дійсних чисел і повертати списки обчислених значень.

На початку кожного модуля додайте наступний код.

```
msg="Модуль {}".format(__name__)
# Зміст файлів __init__.py однаковий.
# файл __init__.py
print("Ініціалізація модуля ", __name__)
```

В сценарії `test.py` протестуйте використання атрибута `msg`, а також роботу функцій пакета. Перевірте зміст каталогів `dir1`, `dir2`, `dir3` після тестування пакета.

Вказівка. При створенні функцій модуля `mod_math.py` використовуйте функцію `map(функція, список)`.

Тема 5. Масиви.

Для виконання вправ цієї і наступних тем потрібен доступ до наукових бібліотек Python. Ці бібліотеки автоматично встановлюються з дистрибутива Anaconda (це Python з набором наукових бібліотек) і доступні в оболонках, які постачаються з нею. Працюйте в одній із оболонок, наприклад в Spyder, і імпортуйте бажані модулі. Є інші можливості. Якщо на вашому комп'ютері встановлено стандартний Python і дистрибутив Anaconda, то з оболонки Python-Shell ви можете отримати доступ до математичних і графічних бібліотек Anaconda, не реєструючи бібліотеки в Python. Спосіб використання математичних бібліотек Anaconda з оболонки Python-Shell описано в додатку Б наприкінці цього збірника вправ. Якщо вам це не підходить, то завантажуйте і встановлюйте бібліотеки, використовуючи відповідні утиліти стандартного Python.

Вправа 5.1. Згенеруйте одновимірний масив з 16 випадкових чисел. Відсортуйте його за спаданням і потім перетворіть на матрицю A розміром 4×4 . Створіть матрицю B розміром 4×4 складену з одних п'ятірок. Згенеруйте матрицю C розміром 4×4 , елементи якої C_{ij} обчислюються за формулою $C_{ij} = i^2 - j^2$. Згенеруйте діагональний масив D з елементами на діагоналі $[1, -1, 2, -2]$. Обчисліть масив $A + B - C - D + E - 3$, де E одинична матриця розміром 4×4 .

Вправа 5.2. Створіть матрицю Z елементи якої обчислюються за формулою $Z_{ij} = X_i^2 - Y_j^2$, де $X = [-3, 0, 1, 2, 5]$, $Y = [-5, 0 - 4, 1, 3]$ одновимірні масиви. Використовуючи метод `append`, додайте до Z стовпець, складений з натуральних чисел $1, 2, 3, 4, 5$. Потім між 1-м і другим рядками вставте рядок, складений з одиниць.

Вказівка. Для створення масиву Z використайте функцію `meshgrid(...)` модуля `numpy`.

Вправа 5.3. Скласти вручну наступні масиви по правилах додавання масивів модуля `numpy`.

$$\begin{bmatrix} 3, 2, 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4, -2, 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1, -1, 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Отриману відповідь перевірити, виконавши додавання інструкціями Python.

Вправа 5.4. Створити масив A розміром 5×5 , у якого на головній діагоналі розташовані числа $1, 2, 3, 4, 5$, на верхній побічній діагоналі – одиниці, на нижній побічній – мінус одиниці, а інші елементи дорівнюють нулю. Створити масив B розміром 5×5 , всі рядки якого співпадають з вектором $1, 2, 3, 4, 5$. Створити масив C розміром 5×5 , всі стовпці якого співпадають з вектором $2, 4, 6, 8, 10$. Скласти всі масиви $D = A + B + C$. В масиві D замінити другий рядок одиницями, видалити останній стовпець та дописати праворуч до отриманого масиву масив з нулів розміром 5×2 . В отриманому масиві замінити

елементи, індекси яких одночасно задовольняють нерівностям $1 \leq i \leq 3$, $3 \leq j \leq 5$, на трійки.

Вправа 5.5. Згенерувати одновимірний масив за допомогою оператора `numpy.r_[...]` з 9 точками на відрізку $[-1,1]$ включно з кінцями. Реорганізувати його в масив 3×3 . Таким же чином згенерувати масив з координат 6 точок на відрізку $[-2,3]$ і реорганізувати його в масив 3×2 . Пристикувати другий масив до першого. Отриманий масив транспонувати, а потім від'ємні елементи замінити нулями. Новий масив розщепити на 3 масиви по 1 і 3 рядкам.

Вправа 5.6. Дано одновимірний масив, що складається з n дійсних елементів (наприклад, згенерувати масив 20 випадкових дійсних чисел на відрізку $[-10,10]$). Обчислити суму від'ємних елементів і їх кількість. Обчислити кількість елементів масиву, які дорівнюють 0. Впорядкувати масив по зростанню модулів елементів. Замінити всі від'ємні елементи масиву їх квадратами і впорядкувати елементи нового масиву по зростанню. З початкового масиву створити новий, в якому всі від'ємні елементи замінити на нуль.

Вправа 5.7. Згенерувати масив з n випадкових дійсних чисел в діапазоні від -5 до 5. Округлити всі елементи до двох десяткових знаків. Обчислити суму цілих частин елементів масиву, розташованих після останнього від'ємного елемента. Впорядкувати по зростанню окремо елементи, що стоять на парних місцях, і елементи, що стоять на непарних місцях, створивши новий одновимірний масив.

Вказівка. Для генерування масиву випадкових дійсних чисел можна використати функцію `numpy.random.uniform(...)`. Цілі частини елементів масивів обчислюються функцією `numpy.floor(масив)`. Функції `round()`, `around()` (і метод `round()`) округлюють елементи масивів до найближчих значень з заданою кількістю десяткових знаків.

Вправа 5.8. Згенерувати масив з n випадкових дійсних чисел в діапазоні від 0 до 10. Обчислити номер максимального і мінімального елементу масиву. Перебудувати масив таким чином, щоб в першій його половині розміщувалися елементи, що стояли в непарних позиціях, а в другій половині – елементи, що стояли в парних позиціях. Знайти суму елементів, які розташовані між максимальним і мінімальним елементами (в суму включити обидва ці елементи).

Вказівка. При перебудові масиву використовувати операцію зрізу.

Вправа 5.9. Згенерувати масив з 30 випадкових цілих чисел в діапазоні від 1 до 10. Підрахувати кількість відмінних чисел в цьому масиві. Знайти номери всіх максимальних елементів масиву (навіть, якщо максимальний елемент не один).

Вказівка. Функція `random.randrange(start, stop, step)` повертає випадково обране ціле число X з діапазону $start \leq X < stop$, де `start`, `stop` і `step` цілі. Для пошуку номерів максимальних елементів використовуйте функцію

`nonzero(...)` модуля `numpy`. Для перевірки належності елемента масиву можна використовувати операцію `in`.

Вправа 5.10. Написати програму, яка генерує два масиви випадкових цілих чисел від 0 до 10 включно. Надрукувати числа, які належать обом масивам.

Вказівка. Функція `np.random.random_integers(A,B,N)` створює одновимірний масив `N` випадкових цілих чисел з діапазону $A \leq x \leq B$.

Елементи, які належать обом масивам, можна знайти, виконавши теоретико-множинну операцію перетину масивів, перетворивши їх на множини. Стиснутий опис Python-множин надано в додатку В наприкінці цього збірника вправ.

Вправа 5.11. Дана матриця 5×5 . Для кожного рядка матриці знайти суму її елементів. Побудувати нову матрицю, у якій елементи, що розташовані одночасно вище головної діагоналі і вище побічної, дорівнюють нулю. Замінити в початковій матриці елементи діагоналі на середні значення по рядках.

Вправа 5.12. Згенерувати матрицю випадкових цілих чисел розміром 5×5 . Замінити елементи побічної діагоналі на числа, які дорівнюють середньому мінімального і максимального елементів рядка. Знайти номер рядка з найбільшою сумою елементів і вивести цей номер, а також значення максимальної суми. Знайти максимальний елемент серед мінімальних елементів рядків матриці.

Вправа 5.13. Згенерувати матрицю випадкових цілих чисел розміром 5×5 . Побудувати вектор, елементи якого є максимумами елементів всіх діагоналей, що паралельні головній. Поміняти місцями рядок, що містить максимальний елемент, з рядком, що містить мінімальний елемент. Якщо мінімальних (максимальних) елементів більш одного, то вибрати рядок з більшим індексом.

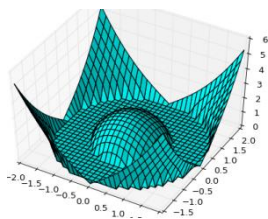
Вправа 5.14. Дано два масиви дійсних чисел `A` і `B` розміром 5×5 . В масиві `A` замінити елементи, які менші за відповідні елементи `B`, на ці відповідні елементи `B`. Решту елементів масиву `A` залишити незмінними.

Вказівка. Застосувати логічне індексування.

Вправа 5.15. Використовуючи логічне індексування, побудувати графік функції

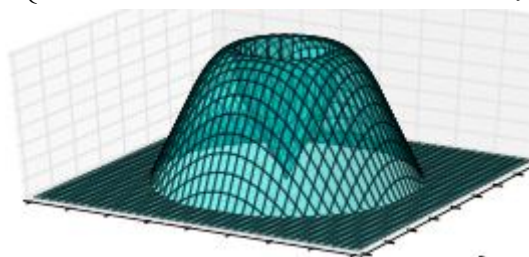
$$z = \begin{cases} 0 & , \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ \sqrt{(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2)} & , \quad \text{інакше} \end{cases}$$

Вказівка. За основу взяти код, який наведено в нашому посібнику в прикладі на сторінці 88.



Вправа 5.16. Використовуючи логічне індексування, побудувати графік функції

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2), & 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ 3 - \sqrt{x^2 + y^2} & , 4 \leq x^2 + y^2 < 9 \\ 0 & , x^2 + y^2 \geq 9 \end{cases}.$$



Тема 6. Лінійна алгебра та її використання.

Вправа 6.1. Обчислити факторіали елементів наступної матриці

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

і надрукувати їх у вигляді такої ж матриці. Побудувати матрицю $e^{x_{ij}}$, де x_{ij} - елементи матриці X .

Вказівка. Функція обчислення факторіалу, яка вміє працювати з масивами, знаходиться в модулі `scipy.misc`.

Вправа 6.2. Дано два вектора $\mathbf{a} = (1, -1, 6)$, $\mathbf{b} = (-3, 2, 1)$. Обчислити довжину векторів. Обчислити скалярний добуток векторів. Обчислити кут між векторами. Обчислити векторний добуток векторів. Обчислити зовнішній добуток векторів.

Вправа 6.3. Знайти значення матричного многочлена $2A^2 + 3A \cdot B + 5E - 1$, якщо E одинична матриця, і

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти обернену матрицю A^{-1} . Перевірити, що $A \cdot A^{-1} = E$. Обчислити визначник матриці A . Обчислити суму, різницю, матричний та поелементний добуток матриць A та B . Обчислити різницю між матричним та поелементним добутками матриць A і B . Розв'язати матричне рівняння $AX = B$ відносно невідомої матриці X .

Вправа 6.4. Дано вектор $\mathbf{x} = \{3, -1, 4\}$ та матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти вектор $(\mathbf{B} \cdot (2\mathbf{A} + \mathbf{B})) \cdot \mathbf{x}$ та $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}$, де крапка позначає матричний добуток.

Вправа 6.5. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 5, \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

двома способами: за допомогою функцій `numpy.solve` та за допомогою оберненої матриці.

Вправа 6.6. Чисельно розв'язати диференціальне рівняння 1-го порядку $y' + y = \sin x$ на відрізку $[0, 1]$ з початковою умовою $y(0) = -1$, виконавши заміну $y(x_i) = y_i$, $y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$, де h – мале число, наприклад 0.01.

Побудуйте графік дискретного розв'язку (x_i, y_i) .

Вказівка. Задача $y' + a \cdot y = f(x)$, $y(0) = \alpha$ після вказаних заміни, перетворюється на $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + a \cdot y_i = f(x_i)$, $y_0 = \alpha$, або $y_{i+1} = y_i + h \cdot (f(x_i) - a \cdot y_i)$, $y_0 = \alpha$.

Останнє є рекурентним рівнянням.

Вправа 6.7*. Методом скінчених різниць чисельно розв'язати крайову задачу

$$y''(x) + y'(x) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

замінивши $y(x_i) = y_i$, $y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$, $y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$, де h – мале

число. Порівняйте графіки дискретного розв'язку (x_i, y_i) , та функції

$$y(x) = \frac{e - e^{1-x} + x - e \cdot x}{1 - e},$$

яка є точним розв'язком задачі.

Вказівка. Задача зводиться до розв'язання стрічкової системи лінійних рівнянь. За основу взяти підхід, наведений в нашому посібнику в прикладі 3.2.1 (3.2.1 = 3.2 – номер параграфа + 1 – номер прикладу в параграфі) на сторінці 99.

Вправа 6.8*. Знайти рівняння прямої, яка найменше відхиляється від точок $(0, -3), (1, 1.5), (2, 0.5), (3, 1), (4, -0.5), (5, 0)$, тобто виконати лінійну апроксимацію множини точок. Дати графічну інтерпретацію розв'язку.

Вказівка. Задача розв'язується методом найменших квадратів за допомогою функції `scipy.linalg.lstsq(...)`. За основу взяти підхід, наведений в нашому посібнику в прикладі 3.2.2 на сторінці 101.

Тема 7. Графіки функцій та кривих.

Вправи поточної теми передбачають використання графічних функції модуля `matplotlib.pyplot`.

Вправа 7.1. Побудувати ламану по 10 точках, абсциси X і ординати Y яких є випадкові масиви. Значення в масивах генерувати в діапазонах $0 \leq x, y \leq 10$. Масив X відсортувати по зростанню.

Вправа 7.2. На відрізку $[-5, 5]$ в спільних осях побудувати графіки функцій:

$$1). y = \frac{\sin x}{x}; \quad 2). y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}; \quad 3) y = \sin x.$$

Вправа 7.3. Побудувати графіки кривих, заданих параметрично:

1. $x = \cos^5 t, y = \sin^5 t$.

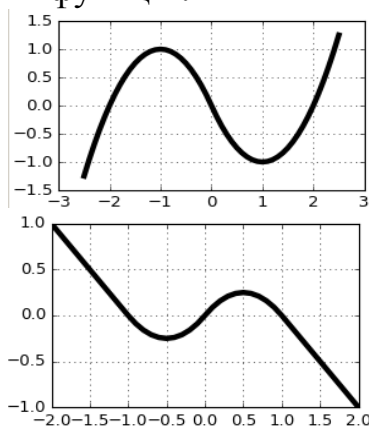
2. $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ (циклоида).

Вправа 7.4. Побудувати графік кривої $\rho = 2 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, заданої в полярних координатах.

Вправа 7.5. Побудувати графіки кускових функцій:

$$y(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^2, & x \leq 0 \\ (x-1)^2 - 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} -1 - x, & x \leq -1 \\ x(1+x), & -1 < x \leq 0 \\ x(1-x), & 0 < x \leq 1 \\ 1 - x, & x > 1 \end{cases}$$



Вказівка. Для обчислення кускових виразів призначена функція `piecewise()` з модуля `numpy`, яка має наступний формат:

`piecewise(x, список_умов, список_функцій [, ...])`

В якості першого аргументу повинен стояти масив x і результатом буде масив того ж розміру. Для запису складних умов слід використовувати операції логічної алгебри для масивів `logical_and()`, `logical_or()` та `logical_not()`.

Вправа 7.6. Побудувати графік, який складається з 18 точок, рівномірно розосереджених по одиничному колу, та з 12 точок, рівномірно розкладених по колу радіуса 0.5.

Вправа 7.7. Побудувати графік функції $y = \sin \pi x$ та дотичну до неї в точці $x_0 = 0.6$.

Вказівка. Рівняння дотичної до графіка функції $y = y(x)$ в точці x_0 має вид $Y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Рішення зводиться до побудови графіків функцій $y(x)$ та $Y(x)$. Значення $y'(x_0)$ обчислити вручну.

Вправа 7.8. Побудувати графік параметрично заданої кривої $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (циклоїда). Побудувати графіки дотичної та нормалі до кривої в точці $t = 4\pi/3$.

Вказівка. Для кривої на площині, яка задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, рівняння дотичної в точці $t = t_0$ може мати вигляд: $x_t = x(t_0) + t \cdot x'(t_0)$, $y_t = y(t_0) + t \cdot y'(t_0)$. Рівняння нормалі в цій точці можна записати у вигляді $x_n = x(t_0) + t \cdot y'(t_0)$, $y_n = y(t_0) - t \cdot x'(t_0)$. Значення похідних обчислити вручну. Рішення зводиться до побудови графіків параметрично заданих кривих: $(x(t), y(t))$, $(x_t(t), y_t(t))$, $(x_n(t), y_n(t))$.

Вправа 7.9. Побудувати графік неявно заданої кривої $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Вказівка. Використайте функцію `contour(...)` модуля `matplotlib.pyplot`.

Вправа 7.10. У спільних осях побудуйте графіки неявно заданих кривих:

1. Квадрата, з рівнянням $2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2} = 0$.

2. Трикутника, з рівнянням $2 - x + y - |x| - |x - 2y - |x|| = 0$.

Вправа 7.11. Побудувати графік неявно заданої кривої $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ (еліпс).

В точці $(-2, \sqrt{20}/3)$ побудувати графіки дотичної та нормалі.

Вказівка. Якщо крива задана неявним рівнянням $F(x, y) = 0$, і точка (x_0, y_0) належить кривій, то рівняння дотичної до кривої в цій точці має вигляд

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

а рівняння нормалі

$$F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) - F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) = 0.$$

Значення похідних обчисліть вручну. Рішення зводиться до побудови графіків неявно заданих кривих (еліпса та двох прямих).

Вправа 7.12. Побудувати графіки функцій $y = x$ та $y = x^2$. Зафарбувати сірим кольором зону, яка обмежена зверху і знизу кривими, а зліва і справа – точками перетинання (точки перетину кривих обчислити вручну).

Вправа 7.13. Створити і відобразити масив розміром 8×8 , зображення якого має вигляд однієї з літер (наприклад, літери У).

Вправа 7.14. У графічному вікні намалювати 2 зображення: графік кривої (наприклад, e^x) і в меншому прямокутному вікні зображення масиву (літери з попередньої вправи).

Вправа 7.15. Використовуючи графічні примітиви, створити двовимірний малюнок «будинку».

Тема 8. Робота з тривимірною графікою.

Вправа 8.1. Побудувати тривимірну криву по параметричному рівнянню

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t/8, \quad 0 \leq t \leq 8\pi.$$

Вправа 8.2. Побудувати каркасне зображення поверхні функції $z = \sin x \cdot \sin y \cdot (x^2 + y^2)$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$.

Вправа 8.3. Побудувати графік функції

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x^2 + y^2 \geq 4 \\ \sqrt{4 - x^2 - y^2} & , \quad 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ \sqrt{3}(x^2 + y^2) & , \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}.$$

Додати малюнок кривої, яка зображує переріз поверхні функції вертикальною площиною $y - x = 0$.

Вказівка. При побудові поверхні використати логічне індексування.

Вправа 8.4. Побудувати поверхню тора по параметричному рівнянню

$$x = (R + r \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \tau$$

$$y = (R + r \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \tau, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi.$$

$$z = r \cdot \sin \varphi$$

Покласти $R = 3$, $r = 1$.

Вказівка. Поверхню побудувати двома способами: за допомогою функції `Axes3D.plot_surface` модуля `mpl_toolkits.mplot3d`, та функції `splot` модуля `mpmath`.

Вправа 8.5. Стрічка Мебіуса - найпростіша неорієнтована поверхня. Вона утворюється рухом і обертанням відрізка прямої вздовж замкнутої просторової кривої. Нехай ця крива буде окружністю радіуса R , а n позначає кількість напівобертів відрізка при обході кривої. Тоді рівняння поверхні можна записати в параметричному вигляді

$$x(u, v) = \left(R + v \cos \left(\frac{nu}{2} \right) \right) \cos u,$$

$$y(u, v) = \left(R + v \cos \left(\frac{nu}{2} \right) \right) \sin u,$$

$$z(u, v) = v \sin \left(\frac{nu}{2} \right).$$

де $0 \leq u < 2\pi$, $-h/2 \leq v \leq h/2$, h – ширина стрічки. При побудові поверхні покласти $R = 3$, $h = 2$, $n = 1$.

Вправа 8.6. Створити графічне вікно з чотирма зображеннями, організованими в 2 рядки і 2 стовпця. Ліве верхнє зображення містить поверхню еліпсоїда, праве верхнє – каркасне зображення поверхні однопорожнинного гіперболоїда. У двох нижніх графічних зонах розташовані зображення поверхні тора з прикладу 8.4, і кривої – з прикладу 8.1.

Параметричні рівняння еліпсоїда і однопорожнинного гіперboloїда мають вид

$$\mathbf{r}_{\text{ellipse}}(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{i} + b \sin u \cos v \mathbf{j} + c \sin v \mathbf{k}, \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\mathbf{r}_{\text{hyperb}}(u, v) = a \cosh u \cosh v \mathbf{i} + b \sinh u \cosh v \mathbf{j} + c \sinh v \mathbf{k}, \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

де $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – одиничні орти координатних осей. Покласти $a = 3, b = 2, c = 1$.

Вправа 8.7. Використовуючи тривимірні графічні примітиви побудувати спрощене зображення будинку.

Вправа 8.8. Створити графічне вікно з трьома зображеннями, розташованими «хаотично». Ліве верхнє зображення містить графік розсіювання (scatter) точок, розташованих на поверхні циліндра. Праве зображення - графік поверхні $z = (x^2 + y^2) \sin x \sin y$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$, з контурними проекціями на координатні площини. В нижній зоні намальовано поверхню куба, яка побудована за допомогою тривимірних плоских просторових графічних примітивів

Вказівка. При побудові куба використати функцію `Poly3DCollection` модуля `mpl_toolkits.mplot3d.art3d`.

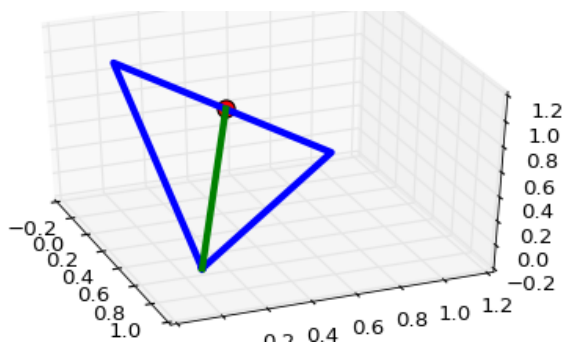
Вправа 8.9. Використовуючи модуль `mpmath`, побудувати графік функції $\tan x/x$ (виключити з графіка особливі точки).

Вправа 8.10. Використовуючи модуль `mpmath`, побудувати зображення куба по його параметричним рівнянням (параметричні рівняння куба наведені в одному з прикладів параграфу 4.2 нашого посібника).

Тема 9. Геометричні побудови, ділова та наукова графіка.

Вправа 9.1. Знайти довжини сторін, величини кутів та площу трикутника з вершинами в точках $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Намалювати трикутник, точку E – середину сторони BC , та медіану AE .

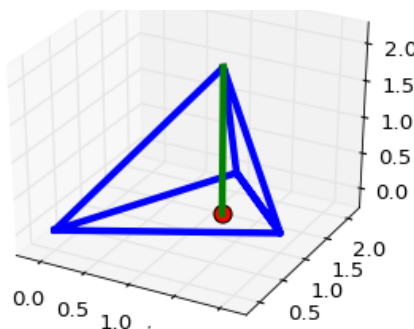
Вказівка. Створити три масиви з координат вершин. Використовуючи функції роботи з масивами, визначити вектори сторін і з ними виконати потрібні обчислення. Для зображення контура трикутника застосувати функцію `mpl_toolkits.mplot3d.plot(...)`, використовуючи координати вершин в якості даних для малювання ламаної в просторі.



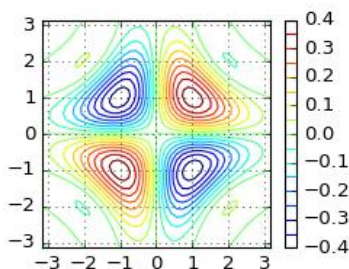
Вправа 9.2. В просторі дано плоский паралелограм, три вершини якого мають координати $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$. Знайти координати четвертої вершини D , яка протилежна вершині A . Обчислити площу паралелограма. Графічно зобразити контур цього паралелограма, та точки його вершин.

Вказівка. Паралелограм зобразити як ламану. Вершини намалювати функцією `scatter(...)` модуля `matplotlib.pyplot`.

Вправа 9.3. Дано тетраедр з вершинами в точках $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(1.3, 1.1, 2)$. Обчислити об'єм тетраедра, площу грані ABC та довжину висоти $h = |DE|$. Графічно зобразити контур тетраедра, висоту DE та точку E .



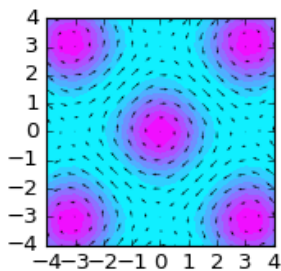
Вправа 9.4. Побудувати контурний графік функції $z = \sin(x y) e^{\frac{-x^2 - y^2}{3}}$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$.



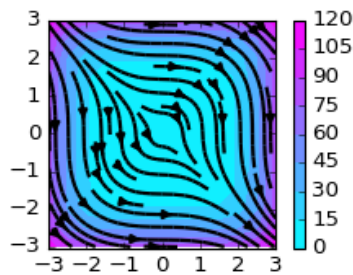
Вправа 9.5. На площині XY побудувати векторне поле $U = (\sin y, -\sin x)$ на фоні модуля його дивергенції.

Вказівка. Дивергенція плоского векторного поля $F = (F_x, F_y)$ обчислюється за

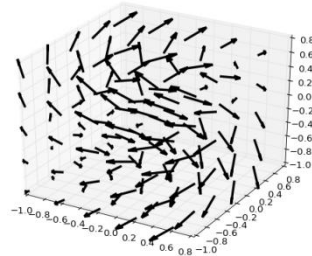
формулою $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$.



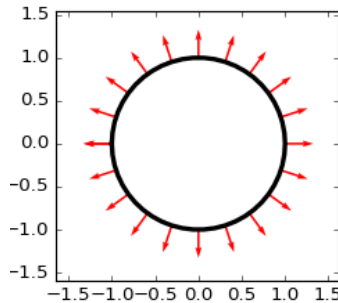
Вправа 9.6. На площині XY побудувати лінії течії векторного поля $U = (y^2, -x^2)$ на фоні залитого контурного графіка модуля цього поля U .



Вправа 9.7. Побудувати в тривимірному просторі векторне поле $U = (y, -x, z)$.



Вправа 9.8. Зобразити одиничну окружність і поле її нормалей.



Вправа 9.9. Згенерувати 3 масиви по 10 випадкових цілих чисел з діапазону $[5, 20]$. На одному рисунку побудувати стовпчасті діаграми створених векторів.

Вправа 9.10. Згенерувати масив 8 випадкових цілих чисел з діапазону $[1, 10]$. Побудувати кругову діаграму створеного масиву.

Вправа 9.11. Побудувати гістограму двовимірного масиву, який взяти з якого-небудь графічного файлу.

Вказівка. Стиснутий опис Python функцій роботи з графічними файлами надано в додатку Г наприкінці цього збірника вправ. Для побудови гістограм в matplotlib використовується функція `pyplot.hist(вектор, n)`, де n - кількість кошиків. Двовимірний масив перед передачею в функцію `hist()` слід перетворити в одновимірний.

Тема 10. Основи символічних обчислень.

Вправа 10.1. Спростити вираз

$$\frac{x}{ax - 2a^2} - \frac{2}{x^2 + x - 2ax - 2a} \cdot \left(1 + \frac{3x + x^2}{3 + x}\right)$$

Відповідь: $1/a$.

Вправа 10.2. Обчислити значення виразу

$$\frac{b}{a-b} \sqrt[3]{(a^2 - 2ab + b^2)(a^2 - b^2)(a+b)} \cdot \frac{a^3 - b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$$

при $a = 5, b = 3$.

Вказівка. Обчислення виконати двома способами: використовуючи метод `subs` або функцію `lambdify`.

Відповідь: 294.0.

Вправа 10.3. Використовуючи функцію `sympy.solve`, розв'язати рівняння відносно x :

$$\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} == 3cx + \frac{bx}{a}$$

Відповідь: $\frac{ab}{a+b}$.

Вправа 10.4. Використовуючи функцію `sympy.solve`, розв'язати рівняння:

$$\frac{x-4}{\sqrt{x+2}} = x-8.$$

Відповідь: 9.

Вправа 10.5. Розв'язати систему лінійних рівнянь двома способами: використовуючи функцію `sympy.linsolve` або обернену матрицю.

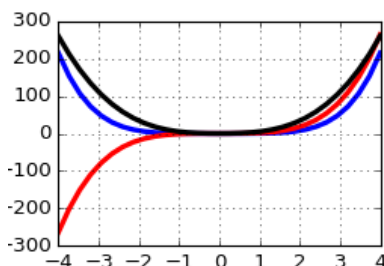
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x - 5y + 2z = -7 \\ 4x - 7y + z = -12 \end{cases}$$

Відповідь: (2, 3, 1).

Вправа 10.6. Обчислити першу і другу похідні функції

$$y = \frac{3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2}{15\sqrt{1+x^2}}.$$

Використовуючи функцію `plot` модуля `sympy`, в спільних осях побудувати графік функції $y(x)$ та її похідних $y'(x), y''(x)$. Обчислити значення першої похідної в точках $x = 0, x = 0.5, x = 1$. Побудувати графіки функцій $y(x), y'(x), y''(x)$ в інший спосіб, використовуючи функції модуля `matplotlib.pyplot`.



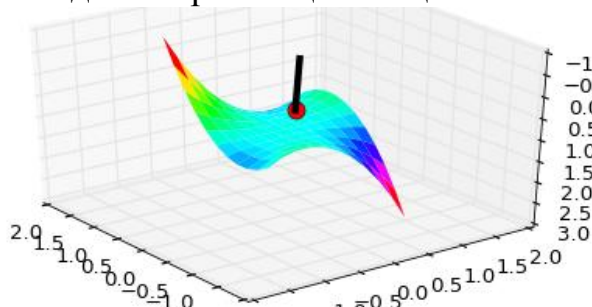
Вправа 10.7. Побудувати графік функції $y = 2x + \frac{1}{x}$ та дотичну до неї в точці $x_0 = 1.4$ (див. вправу 7.7). Всі обчислення (зокрема значення похідної в точці x_0) виконати за допомогою функцій модуля `sympy`.

Вправа 10.8. Скласти рівняння дотичної та нормалі до параметрично заданої кривої $x = \sin^3 t$, $y = \cos^3 t$ в точці $t_0 = \pi/3$ (див. вправу 7.8). Всі обчислення (зокрема значення похідних в точці t_0) виконати за допомогою функцій модуля `sympy`.

Вправа 10.9. Використовуючи функції модуля `sympy`, обчислити частинні похідні першого і другого порядків функції

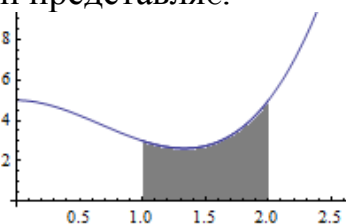
$$z = x^2 y - x y^2 + 1$$

в точці $x_0 = 0.5$, $y_0 = 0.5$. Побудувати графік функції, точку $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ на поверхні і вектор нормалі до поверхні в цій точці.

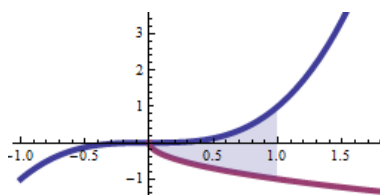


Вправа 10.10. Обчислити невизначений інтеграл $\int (4 - 3x)e^{-x} dx$. Побудувати графіки підінтегрального виразу та первісної.

Вправа 10.11. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 (2x^3 - 4x^2 + 5) dx$. Графічно зобразити зону, площу якої він представляє.



Вправа 10.12. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (54x^2 y^2 + 150x^4 y^4) dx dy$ по області D , де область D обмежена кривими: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt{x}$. Графічно зобразити область D .



Вказівка. Записати подвійний інтеграл як повторний

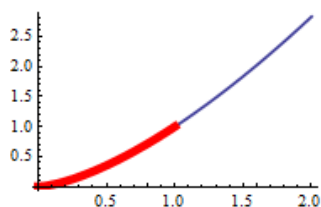
$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{x^3} (54x^2 y^2 + 150x^4 y^4) dy \right) dx.$$

Відповідь: 11

Тема 11. Застосування символічної математики.

Вправа 11.1. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = (x-2)^3$, $x = 4x-8$, і точками їх перетину. Точки перетину та інтеграл обчислювати символічно. Графічно зобразити зону, площа якої обчислюється.

Вправа 11.2. Обчислити довжину дуги кривої $y = x\sqrt{x}$ для $0 \leq x \leq 1$. Побудувати графік кривої та криволінійного відрізка, довжина якого обчислюється.



Вказівка. Довжина дуги плоскої кривої, заданої в декартових координатах явним рівнянням $y = y(x)$, обчислюється за формулою

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

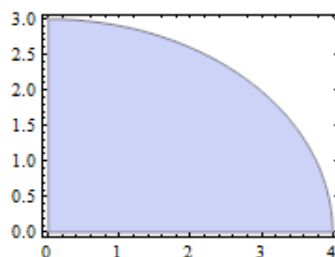
де x_0 та x_1 визначають початкову та кінцеву точки дуги.

Вправа 11.3. Платівка D задана нерівностями $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, з поверхневою густиною $\mu(x, y) = x \cdot y$. Намалювати платівку та знайти її масу.

Вказівка. Якщо $\mu = \mu(x, y)$ представляє густину матеріалу двовимірного тіла (масу одиниці площі в точці x, y), тоді маса платівки, яка займає область D на площині, обчислюється за формулою $M = \iint_D \mu(x, y) dx dy$. Записати цей

подвійний інтеграл, як повторний, і символічного його обчислити.

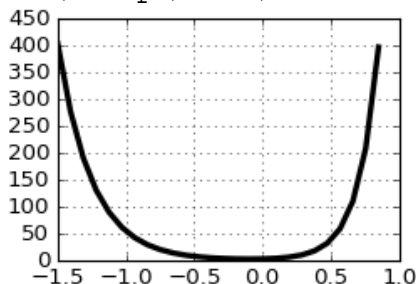
Відповідь: 18



Вправа 11.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''' - 6y'' - 19y' + 84y = 0$. Побудувати графік розв'язку при одиничних значеннях довільних сталих.

Вказівка. Загальний розв'язок диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами будується в залежності від значення коренів характеристичного рівняння (див. додаток Д). Побудувати і розв'язати характеристичне рівняння. Впевнитися, що корені дійсні та різні, тобто зустрівся перший випадок з додатку Д.

Відповідь: $\exp(7x) + \exp(3x) + \exp(-4x)$



Вправа 11.5. Використовуючи функції модуля $\sinh x$, розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 1/8$. Побудувати графік розв'язку.

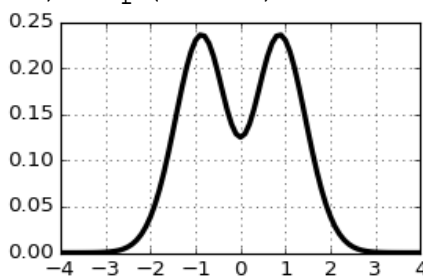
Вказівка. Лінійне диференціальне рівняння першого порядку записується у виді $y' + P(x)y = Q(x)$.

Його загальний розв'язок має вигляд

$$y = \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right) e^{-\int P(x) dx},$$

де C – довільна стала. Якщо до рівняння додається початкова умова $y(x_0) = y_0$, то це (рівняння разом з умовою) називається задачею Коші. Записати загальний розв'язок, потім знайти значення сталої C .

Відповідь: $(x^2/2 + 0.125) \exp(-x^2)$



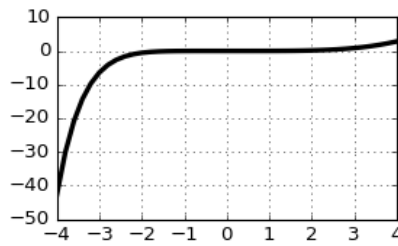
Вправа 11.6. Розв'язати рівняння $y^{(4)} = xe^{-x}$ з початковими умовами $y(0) = 1/32$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1/8$, $y'''(0) = 0$. Побудувати графік розв'язку.

Вказівка. Загальний розв'язок диференціального рівняння $y^{(n)} = f(x)$ знаходиться n – кратним інтегруванням

$$y = \underbrace{\int \int \int \dots \int f(x) dx \dots dx}_{n \text{ раз}} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n,$$

де C_1, \dots, C_n довільні сталі.

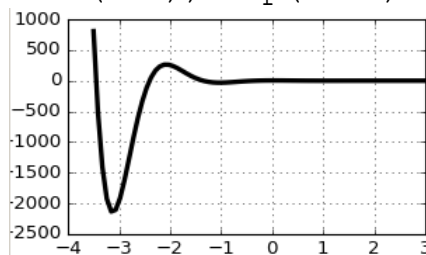
Відповідь: $x^3/6 - x^2/2 + 3x + (x+4) \exp(-x) - 4$



Вправа 11.7. Знайти розв'язок задачі Коші $y'' + 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$ та побудувати його графік.

Вказівка. Загальний розв'язок диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами будується в залежності від значення коренів характеристичного рівняння (див. додаток Д). Побудувати і розв'язати характеристичне рівняння. Впевнитися, що корені комплексні і різні, тобто зустрівся третій випадок з додатку Д.

Відповідь: $(3\sin(3x) + 4\cos(3x)) \cdot \exp(-2x)$

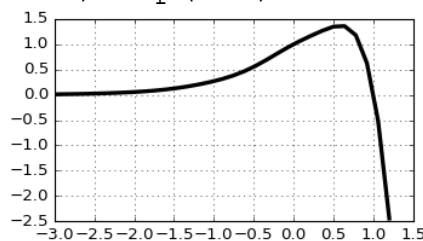


Вправа 11.8. Використовуючи функцію `dsolve` модуля `sympy`, знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x.$$

Призначити довільним сталим значення $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ та побудувати графік цього окремого розв'язку.

Відповідь: $(-x - \sin(6x)/36 + 1) \cdot \exp(2x)$



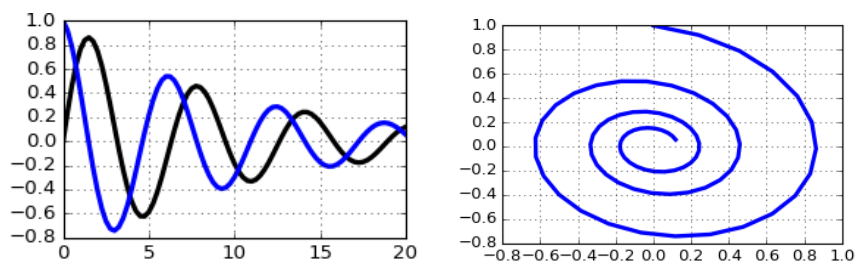
Вправа 11.9. Використовуючи функцію `dsolve` модуля `sympy`, знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + 0.2y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Побудувати графік розв'язку, його похідної та фазову траєкторію. При побудові графіка обрати діапазон незалежної змінної $0 \leq t \leq 20$.

Вказівка. Фазовою траєкторією диференціального рівняння 2-го порядку є крива на площині з параметричним рівнянням $(y(t), y'(t))$.

Відповідь: $10\sqrt{11} \sin(3\sqrt{11}x/10) / (33\exp(x)^{(1/10)})$



Вправа 11.10. Використовуючи функцію `dsolve` модуля `sympy`, знайти розв'язок задачі Коші для лінійної системи трьох диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

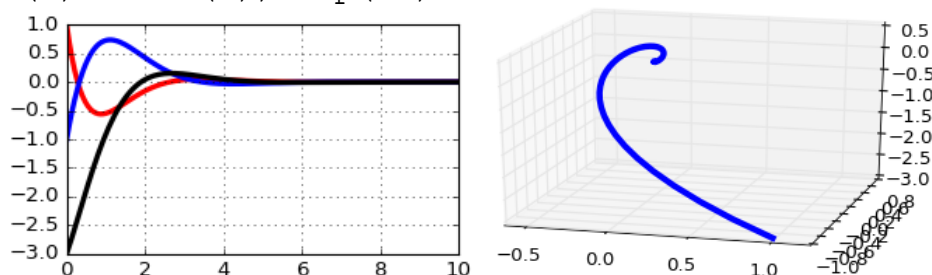
$$\begin{cases} x'_t = -2x + z, & x(0) = 1 \\ y'_t = -y - z, & y(0) = -1. \\ z'_t = y - z, & z(0) = -3 \end{cases}$$

Побудувати графіки розв'язків та фазову траєкторію. При побудові графіків обрати діапазон незалежної змінної $0 \leq t \leq 10$.

Вказівка. Фазовою траєкторією системи трьох диференціальних рівнянь 1-го порядку є крива в тривимірному просторі з параметричним рівнянням $(x(t), y(t), z(t))$.

Відповідь:

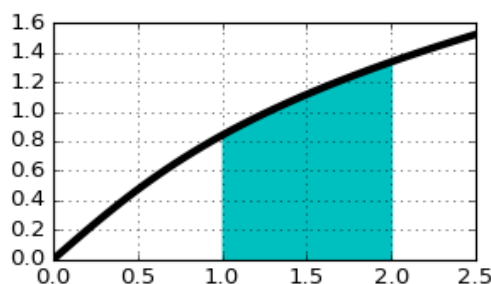
$$\begin{aligned} & -(2 \sin(t) + \cos(t)) \exp(t) + 2 \exp(-2t) \\ & (3 \sin(t) - \cos(t)) \exp(-t) \\ & -(\sin(t) + 3 \cos(t)) \exp(-t) \end{aligned}$$



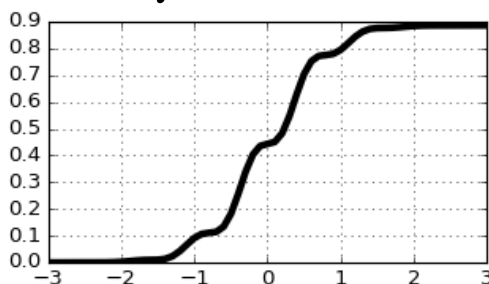
Тема 12. Чисельне інтегрування.

Вправа 12.1. Використовуючи функцію `scipy.integrate.quad`, чисельно знайти визначений інтеграл $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 + 1}} dx$. Графічно зобразити зону, площу якої він представляє.

Відповідь: 1.1079391295831205

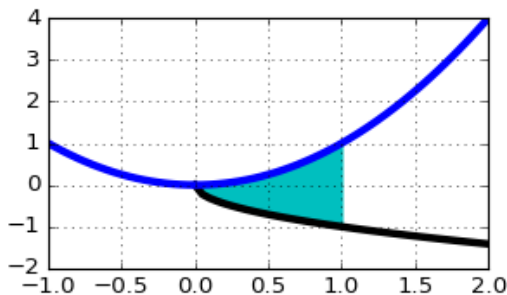


Вправа 12.2. Використовуючи функцію `scipy.integrate.cumtrapz`, обчислити невизначений інтеграл $\int e^{-x^2} \sin^2 4x dx$ і побудувати його графік.



Вправа 12.3. Чисельно знайти подвійний інтеграл $\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy$ по області D , яка обмежена кривими: $x=1$, $y=x^2$, $y=-\sqrt{x}$. Обчислення виконати двома способами: за допомогою функції `scipy.integrate.dblquad`, та функції `scipy.integrate.nquad`. Графічно зобразити область інтегрування. *Вказівка.* Зліва область обмежена точкою перетину кривих $y=x^2$, $y=-\sqrt{x}$, тобто $x=0$.

Відповідь: 1.0000000000001181



Вправа 12.4. Чисельно знайти подвійний інтеграл $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}$, якщо область D обмежена півколом $y=\sqrt{1-x^2}$ та віссю Ox . Обчислення виконати двома способами: за допомогою функції `scipy.integrate.dblquad`, та функції `scipy.integrate.nquad`. Графічно зобразити область інтегрування.

Вправа 12.5. Чисельно визначити площу області між кривими $y=x^2+2x-1$ та $y=x-e^x$. Побудувати графіки кривих та зобразити область, площа якої обчислюється.

Вказівка. Площа фігури, обмеженої знизу та зверху кривими $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ ($f_1(x) < f_2(x)$), та абсцисами $x=a$, $x=b$, знаходиться за формулою

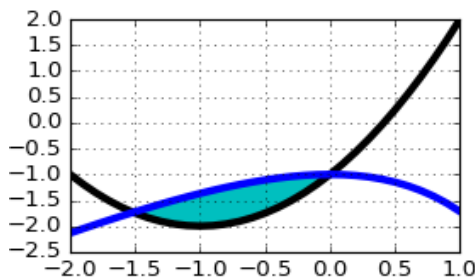
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Тут a, b - абсциси точок перетину кривих.

Для пошуку точок перетину кривих використовуйте функцію `r=scipy.optimize.fsolve(fun, x0, ...)`. Вона чисельно знаходить корінь рівняння $fun(x)=0$, починаючи пошук з початкового значення $x0$. Функція

повертає корінь в змінній $x[0]$. Намалюйте графіки кривих і двічі використайте функцію `fsolve` з різними початковими значеннями.

Відповідь: 0.7233320601519402



Вправа 12.6. Обчислити довжину дуги відрізка кривої $y = x e^{-x^2}$ для $-1 \leq x \leq 1$. Побудувати графік кривої та криволінійного відрізка, довжина якого обчислюється.

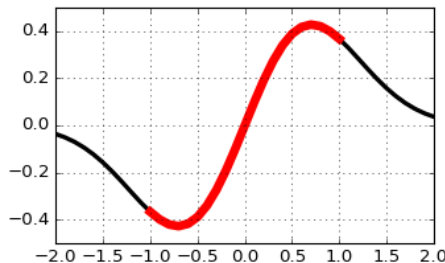
Вказівка. Довжина дуги плоскої кривої, заданої в декартових координатах явним рівнянням $y = y(x)$, обчислюється за формулою

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

де x_0 та x_1 визначають початкову та кінцеву точки дуги.

Задайте функцію $y(x)$ символьно і обчисліть вираз $\sqrt{1 + (y'(x))^2}$. Перетворіть його до функції масивів `numpy` і використайте при чисельному інтегруванні.

Відповідь: 2.3022895181529375



Вправа 12.7. Знайти довжину кривої $x = e^{t/5}(\cos t + \sin t)$, $y = e^{t/5}(\cos t - \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$, яка задана параметрично. Побудувати графік криволінійного відрізка, довжина якого обчислюється.

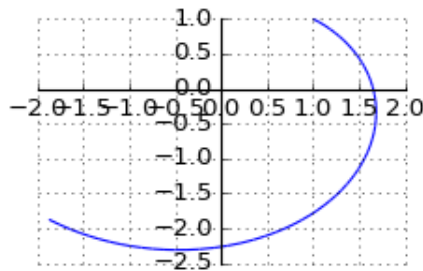
Вказівка. Довжина дуги плоскої кривої, заданої в параметричному вигляді $x = x(t)$, $y = y(t)$, обчислюється за формулою

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

де t_0 та t_1 – значення параметра в початковій та кінцевій точках дуги.

Задайте функції $x(t)$, $y(t)$ символьно і обчисліть вираз $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Перетворіть його до функції масивів `numpy` і використайте при чисельному інтегруванні.

Відповідь: 6.305792523861133



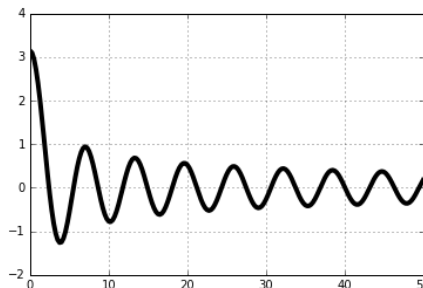
Вправа 12.8. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz$, де тіло V

обмежено поверхнями: $V: \begin{cases} x=0, y=1, y=x \\ z=0, z=1 \end{cases}$. Обчислення виконати двома способами: за допомогою функції `scipy.integrate.tplquad`, та функції `scipy.integrate.nquad`.

Вказівка. Записати потрійний інтеграл як триразовий $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_0^1 (2y^2 e^{xy}) dz$.

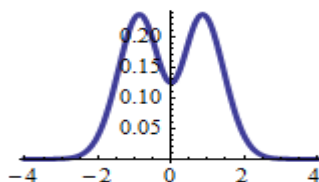
Вправа 12.9. Побудувати графік функції $g(y) = \int_0^\pi \cos(y \cos t) dt$.

Вказівка. Використати можливість функції `quad` передавати підінтегральній функції додаткові аргументи з опцією `args`. Для побудови графіка функції $g(y)$ її треба векторизувати.



Тема 13. Чисельне розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.

Вправа 13.1. Побудувати графік розв'язку задачі Коші $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 1/8$.



Вправа 13.2. Знайти розв'язок задачі Коші $y'' + 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$ та побудувати його графік. Побудувати фазову траєкторію задачі.

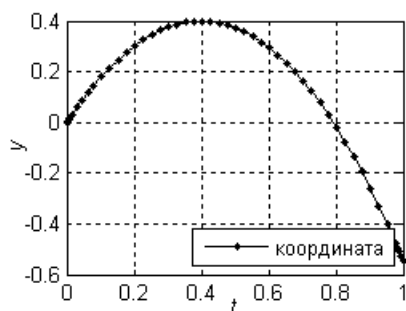
Вказівка. Фазовою траєкторією для диференціального рівняння другого порядку є крива на площині з рівнянням $X = y(t)$, $Y = y'(t)$.

Вправа 13.3. Чисельно розв'язати ЗДР третього порядку $z''' - x^2 z'' + x z' - z = 0$ з початковими умовами $z(0) = 0; z'(0) = 2; z''(0) = -5$. Побудувати графік розв'язку.

Вказівка. Перетворити рівняння до системи трьох ЗДР першого порядку

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = w \\ w' = x^2 w - x v + u \end{cases}, \quad u(0) = 0; v(0) = 2; w(0) = -5,$$

де $u = z, v = z', w = z''$.

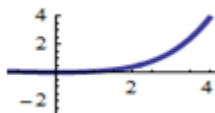


Вправа 13.4. Знайти чисельний розв'язок задачі Коші

$$y'''(x) + y''(x) - 6y'(x) = (20x + 14) \cdot e^{2x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0$$

та побудувати його графік.

Вправа 13.5. Побудувати графік розв'язку диференціального рівняння $y^{(4)} = x e^{-x}$ з початковими умовами $y(0) = 1/32, y'(0) = 0, y''(0) = 1/8, y'''(0) = 0$.

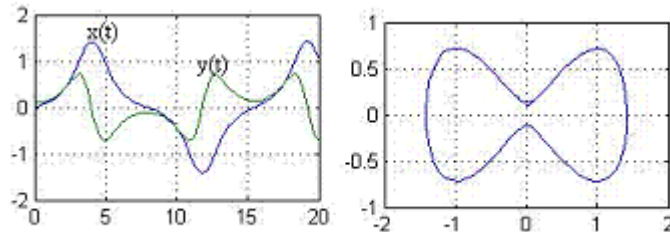


Вправа 13.6. Чисельно розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) з початковими умовами Коші.

$$x' = y(t), \quad y' = -x^3(t) + x(t), \quad x(0) = 0, y(0) = 0.1$$

Побудувати графіки розв'язку та фазову траєкторію.

Вказівка. Фазовою траєкторією для системи двох ЗДР першого порядку є крива з рівнянням $x = x(t), y = y(t)$.



Графіки розв'язків $x(t), y(t)$

Фазова траєкторія

Вправа 13.7. Чисельно розв'язати систему ЗДР з початковими умовами Коші.

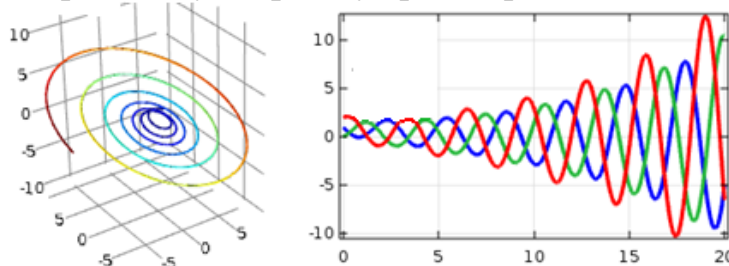
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_2 - 5y_1 + \sin t \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати графіки розв'язку та фазову траєкторію.

Вправа 13.8. Чисельно розв'язати систему ЗДР з початковими умовами Коші.

$$\begin{cases} x'_t = y - z & , x(0) = 1 \\ y'_t = z - x & , y(0) = 0 \\ z'_t = x - 2 \cdot y & , z(0) = 2 \end{cases} \quad , \quad 0 \leq t \leq 20.$$

Побудувати графіки розв'язку та фазову траєкторію.

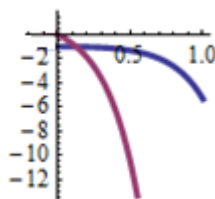


Вказівка. Фазовою траєкторією для системи трьох ЗДР першого порядку є крива в просторі з рівнянням $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Вправа 13.9. Використовуючи функцію `odeint`, знайти розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь другого порядку.

$$\begin{cases} x'' + y' - 7x - 5y = 0 \\ x'' + x' - x - y = 0 \end{cases} \quad , \quad x(0) = -1, y(0) = 0, x'(0) = 0.$$

Побудувати графіки отриманих розв'язків.



Вказівка. Перебудувати задачу до системи трьох ЗДР першого порядку.

Додатки .

Додаток А. Робота з текстовими файлами.

Перш ніж працювати з файлом, необхідно створити об'єкт файла за допомогою функції `open()`. Вона повертає об'єкт-файл (file) і зазвичай використовується з двома аргументами: `open(filename, mode)`. Перший аргумент `filename` – рядок, який містить ім'я файлу, другий (`mode`) – рядок, що складається з кількох символів, які вказують режим використання файлу. В режимі `'r'` файл відкривається лише для читання, в режимі `'w'` – лише для запису (існуючий файл буде перезаписаний), в режимі `'a'` – для дозапису в кінець файлу. В режимі `'r+'` файл відкривається одночасно для читання і запису. Якщо аргумент `mode` опущено, то мається на увазі `'r'`.

Для демонстрування наступних прикладів заздалегідь в блокноті ми створили текстовий файл `001.txt`.

```
>>>sr=r'D:\Work\Python\TestWorkWithFiles\001.txt'
```

```
>>>f=open(sr,'r') # відкриваємо файл для читання
```

Після створення об'єкту `file` інформацію з нього можна читати, використовуючи декілька різних методів. Метод `f.read(size)` зчитує і повертає `size` символів з файлу. Якщо аргумент `size` опущено, то зчитується весь вміст файлу.

```
>>> f.read()
'Hello univer!\nGreetings PhysTech!'
```

Після досягнення кінця файлу повертається порожній рядок.

```
>>> f.read()
''
```

Після того, як ви закінчили всі операції з файлом, закрийте файл за допомогою методу `f.close()`.

```
>>> f.close()
```

Замість абсолютного шляху до файлу можна вказувати відносний шлях. В абсолютному і відносному шляхах можна вказувати як прямі, так і зворотні слеші. Всі слеші будуть автоматично перетворені з урахуванням значення атрибута `sep` (розділювач) з модуля `os.path`.

Метод `f.readline()` зчитує з файлу один рядок. Рядок, що повертається, завжди закінчується символом нового рядка `\n` за винятком останнього рядка, якщо він не закінчується символом нового рядка.

```
>>> f=open(sr)      # відкриваємо файл для читання
>>> f.readline()
'Hello univer!\n'
>>> f.readline()
'Greetings PhysTech!'
>>> f.close()
```

Метод `f.readlines()` зчитує весь вміст файла і повертає список рядків.

```
>>> f=open(sr)
>>> ss=f.readlines()
>>> ss
['Hello univer!\n', 'Greetings PhysTech!']
>>> f.close()
```

Метод `f.write(s)` записує вміст рядка `s` в файл.

```
>>> fw='D:\\Work\\Python\\TestWorkWithFiles\\002.txt'
>>> f=open(fw,'w')  # відкриваємо файл для запису
>>> f.write('Привіт універ!')
14
>>> f.close()
```

Знайдіть вказаний вами каталог і перевірте, що файл `002.txt` в ньому створено. Відкрийте файл в блокноті і перевірте, що він містить вказаний вами текст.

При читанні або запису даних в файл звернення до нього здійснюється за допомогою файлового покажчика. В попередніх прикладах для того, щоб цей покажчик вказував на початок файлу ми файл закривали, а потім вдруге відкривали. Але це робити необов'язково. Коли файл відкритий, то ви можете переміщати по ньому покажчик за допомогою методу `f.seek(offset,`

from_what). Нове положення покажчика обчислюється шляхом додавання offset до точки відліку. Точка відліку вибирається в залежності від значення аргументу from_what: 0 відповідає початку файлу (значення за замовчуванням), 1 – останньому положенню покажчика і 2 – кінцю файлу.

```
>>> f=open(sr)
>>> f.readlines()
['Hello univer!\n', 'Greetings PhysTech!']
>>> f.read()
''

>>> f.seek(0,0) % переведення «покажчика» на початок файлу
0
>>> f.readline()
'Hello univer!\n'
Метод f.tell() повертає поточне положення покажчика, яке відлічується від початку файлу.
>>> f.tell()
15
>>> f.close()
```

Додаток Б. Можливий спосіб підключення наукових бібліотек.

Якщо на вашому комп'ютері встановлено стандартний Python і дистрибутив Anaconda, то ви з Python (з оболонки Python-Shell) можете отримати доступ до математичних і графічних бібліотек, встановлених разом з анакондою (не реєструючи бібліотеки в Python). Для цього треба дізнатися шлях на потрібний каталог з встановленими в ньому модулями. Наприклад, виконайте в консолі Spyder (Spyder встановлюється разом з анакондою) інструкції:

```
>>> import sys
>>> sys.path
['', ..., 'C:\\Anaconda3\\lib\\site-packages', ...]
```

Будуть показані імена каталогів, які використовуються виконавчою системою Anaconda (назви більшості каталогів ми замінили трьома крапками). Нас цікавить розташування каталогу site-packages. Припустимо, що для нього ви отримали шлях 'C:\\Anaconda3\\lib\\site-packages'. Запустіть оболонку Python-Shell і додайте в список її шляхів ім'я отриманого каталогу. Для цього виконайте такі інструкції:

```
>>> ss='C:\\Anaconda3\\lib\\site-packages'
>>> import sys
>>> sys.path.append(ss)
```

Тепер в Python-Shell ви можете імпортувати основні наукові бібліотеки. Цю послідовність інструкцій потрібно буде виконувати на початку кожного сеансу роботи Python-Shell. Якщо вам це не підходить, то завантажуйте і встановлюйте бібліотеки, використовуючи відповідні утиліти Python, або просто працюйте в одній із оболонок, які встановлені з Anaconda.

Перевіримо роботу однієї з графічних функцій.

```
>>> import matplotlib.pyplot as plt
```

```
>>>plt.plot([1, 3, -2, 5, 0, 3])
>>>plt.show()
```

Для відкриття графічного вікна в Python-Shell використовується функція `show()`. Щоб продовжити роботу з інтерпретатором команд Python-Shell графічне вікно слід закрити (інакше не з'являється символ запрошення `>>>`).

Додаток В. Множини.

Множина – це невпорядкована колекція розрізнених об'єктів. Множина створюється командою `set` (послідовність) або переліком елементів всередині фігурних дужок.

```
>>> S1={1,3,5,6,8}
>>> S2=set([-1,2,3,6,7])
```

Над множинами можна виконувати теоретико-множинні операції. Ось приклади деяких з них.

```
>>> S1 | S2          # об'єднання множин
{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, -1}
>>> S1 & S2          # перетин множин
{3, 6}
>>> S1-S2            # різниця множин
{8, 1, 5}
```

Так само, як для списків, для множин визначена велика кількість операцій і функцій. У множин, як у об'єктів, існують власні атрибути і методи. Будь яку послідовність за допомогою функції `set(...)` можна перетворити на множину і, навпаки, множину можна перетворити на список або кортеж.

Додаток Г. Робота з зображеннями.

Для завантаження зображення в робочий простір виконавчої системи використовується функція `imread` з модуля `scipy.ndimage` з наступним синтаксисом:

```
f=imread('filename')
```

Тут `'filename'` - це рядок символів, який утворює повне ім'я файлу. Наприклад, інструкції

```
from scipy.ndimage import imread
f=imread(r'D:\Work\Python\StartProgs\Graphics\PogorelovDesk01.png')
```

присвоюють матричній змінній `f` зображення (точніше тривимірний масив яскравості) з файлу «PogorelovDesk01.png» (використайте для завантаження будь який графічний файл типу `*.png` або `*.jpg`). Команда

```
f.shape
(108, 238, 3)
```

друкує розміри масиву. Отже ми маємо в масиві три шари, які складаються з матриць. Кожна трійка чисел, по одному з кожного шару (колірної площини), визначає RGB колір відповідного пікселя (маленького прямокутника) зображення. Наприклад трійка чисел

```
f[0,0,0],f[0,0,1],f[0,0,2]
(197, 191, 179)
```


визначає RGB колір лівого верхнього пікселя зображення, де відтінки кожного кольору змінюються від 0 до 255 (або від 0 до 1, в залежності від типу матриці). Зображення масиву виконується функцією `imshow` модуля `matplotlib.pyplot`. Наприклад,
`plt.imshow(f)`



Інструкція

```
g=f[0:108,0:238,0]
```

виділяє одну кольорову площину (в нашому випадку червону).

При зображенні двовимірних масивів (таких, як `g`) функція `imshow` інтерпретує елементи цілочислової матриці, як номери кольорів, RGB значення яких вказано в спеціальній таблиці (матриці $m \times 3$), що називається палітрою. В Python визначено багато палітр, які обираються за їх ім'ям. Наприклад, інструкції

```
import matplotlib as mpl
cm_hot = mpl.cm.get_cmap('gray')
im = cm_hot(g)
plt.imshow(im)
```

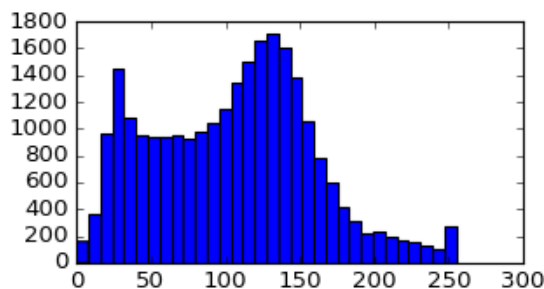
обирають палітру `'gray'` і відображають в ній матрицю зображення.



Для побудови гістограм зображення (чи іншого масиву) в `matplotlib` використовується функція `pyplot.hist` (вектор, `n`), де `n` - кількість кошиків.

Двовимірний масив перед передачею в функцію `hist()` слід перетворити в одновимірний. Наприклад,

```
G=f.flatten()
plt.hist(G,32)
```



Тут множину значень масиву `G` розбито на 32 інтервали (кошика).

Додаток Д. Загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами мають вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ – дійсні числа. Для розв'язання цього диференціального рівняння треба побудувати алгебраїчне рівняння відносно невідомої k :

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Останнє рівняння має n коренів (дійсних або комплексних, серед яких можуть бути і рівні). Загальний розв'язок диференціального рівняння будується в залежності від характеру цих коренів:

- 1) кожному дійсному кореню k першої кратності у загальному розв'язку відповідає доданок вигляду $C e^{kx}$;
- 2) кожному дійсному кореню кратності m у загальному розв'язку відповідає доданок вигляду $(C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) e^{kx}$;
- 3) кожній парі комплексно спряжених простих коренів $k = \alpha \pm i\beta$ у загальному розв'язку відповідає доданок $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$;
- 4) кожній парі комплексно спряжених коренів $k = \alpha \pm i\beta$ кратності m у загальному розв'язку відповідає доданок вигляду $e^{\alpha x} ((C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) \cos \beta x + (C'_1 + C'_2 x + \dots + C'_m x^{m-1}) \sin \beta x)$.