Sortierverfahren

Andreas Hohenauer

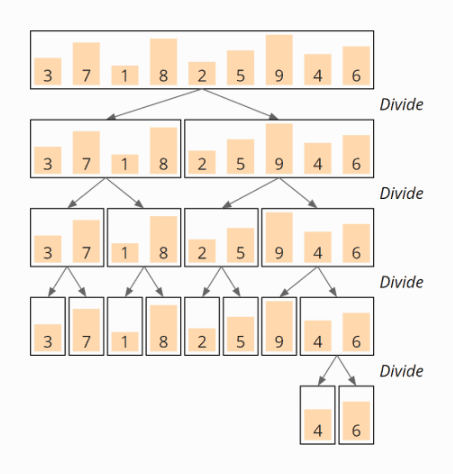
Algorithmen und Datenstrukturen

14. September 2025

Mergesort

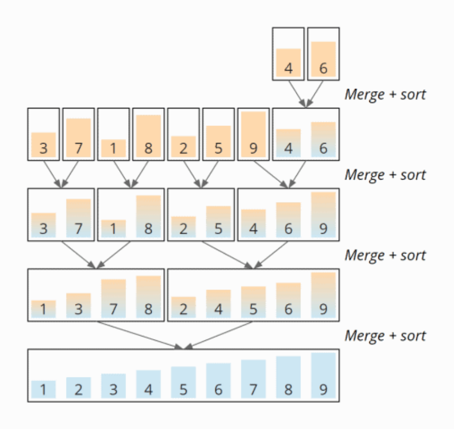
- Der Algorithmus *Mergesort* sortiert die Daten nach dem Prinzip **Divide & Conquer** (dt.: Teile und Herrsche)
- Vorgehensweise bei Divide & Conquer:
  - *Teile* das Problem in kleinere Teilprobleme
  - *Löse* diese Teilprobleme
  - Füge Teillösungen zusammen
- **Mergesort**
  - Zahlenfolge (Array) wird durch rekursive Aufrufe unterteilt.
  - Die Sortierung wird beim anschließenden Zusammenfügen der Arrays erreicht
  - Mergesort weist bessere Laufzeit-Eigenschaften als die bisher besprochenen Sortieralgorithmen auf!

Mergesort



Quelle: `https://www.happycoders.eu/de/algorithmen/mergesort/`

Mergesort



Quelle: `https://www.happycoders.eu/de/algorithmen/mergesort/`

Mergesort

- Rekursive Mergesort-Implementierung
- Aufruf mit $\textsc{Mergesort}(A, 0, len(A))$

Algorithmus 1: Mergesort

Input: Array $A[l..r]$

Function $\textsc{Mergesort}(A,\ l,\ r)$
- **if** $l = r$ **then**
  - **return** $[A[l]]$
- $m = l + \lfloor (r - l)/2 \rfloor$
- $L = \textsc{Mergesort}(A, l, m)$
- $R = \textsc{Mergesort}(A, m + 1, r)$
- **return** $\textsc{Merge}(L, R)$

Merge-Methode

Algorithmus 2: Merge zweier sortierter Listen

Input: sortierte Arrays $L[0..a-1]$, $R[0..b-1]$
Output: zusammengefügtes sortiertes Array $S[0..a+b-1]$

```
Function Merge(L, R)
    leftPos = 0
    rightPos = 0
    targetPos = 0
    while leftPos < a and rightPos < b do
        if L[leftPos] ≤ R[rightPos] then
            S[targetPos] = L[leftPos]
            leftPos = leftPos + 1
        else
            S[targetPos] = R[rightPos]
            rightPos = rightPos + 1
        targetPos = targetPos + 1
    while leftPos < a do
        S[targetPos] = L[leftPos]
        leftPos = leftPos + 1
        targetPos = targetPos + 1
    while rightPos < b do
        S[targetPos] = R[rightPos]
        rightPos = rightPos + 1
        targetPos = targetPos + 1
    return S
```

Quicksort

- Effizienter Sortieralgorithmus von Tony Hoare (1959)
- Ebenso Divide & Conquer
- Array wird anhand von *Pivot-Element* rekursiv geteilt.
- Letztes Element im Teil-Array ist Pivot-Element[1].
- Trotz Worst-Case-Laufzeit von $O(n^2)$ in der Praxis schneller als Mergesort.
- Der Average-Case $O(n \log n)$ tritt so gut wie immer ein!

[1] Es gibt viele Varianten zur Wahl des Pivot-Elements.

Quicksort

Algorithmus 3: Quicksort

Input: Array $A[l..r]$

Function $\textsc{Quicksort}(A,\ l,\ r)$
- **if** $l \geq r$ **then**
  - **return**
- $p = \textsc{Partition}(A, l, r)$
- $\textsc{Quicksort}(A, l, p - 1)$
- $\textsc{Quicksort}(A, p + 1, r)$

Algorithmus 4: Partition

Input: Array $A[l..r]$

```
Function Partition(A, l, r)
    pivot = A[r]
    i = l
    j = r − 1
    while i < j do
        while A[i] < pivot do
            i = i + 1
        while j > l and A[j] ≥ pivot do
            j = j − 1
        if i < j then
            Swap(A, i, j) i = i + 1
            j = j − 1
    if i = j and A[j] < pivot then
        i = i + 1
    if A[i] ≠ pivot then
        Swap(A, i, r)
    return i                    // finale Pivot-Position
```

Quicksort (Beispiel)

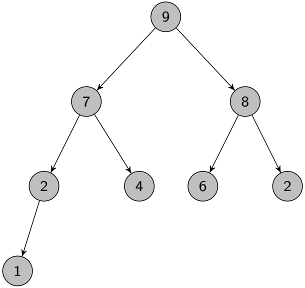
Ablauf Zahlenfolge 3, 7, 1, 8, 2, 5, 9, 4, 6:

```
|> 3   7    1    8    2    5    9    4   6 <|

|> 3   7    1    8    2    5    9    4  (6)<|
|> 3   4    1    8    2    5    9    7   6 <|
|> 3   4    1    5    2    8    9    7   6 <|
|> 3   4    1    5    2   [6]   9    7   8 <|

|> 3   4    1    5   (2)<| 6    9    7   8
|> 1   4    3    5    2 <| 6    9    7   8
|> 1  [2]   3    5    4 <| 6    9    7   8

   1   2 |> 3    5   (4)<| 6    9    7   8
   1   2 |> 3   [4]   5 <| 6    9    7   8

   1   2    3    4    5    6 |> 9    7  (8)<|
   1   2    3    4    5    6 |> 7    9   8 <|
   1   2    3    4    5    6 |> 7   [8]  9 <|
```

Anmerkung: |> und <| notieren die Grenzen (*l* und *r*). () notiert die Wahl des Pivot-Elements, [] die Platzierung an der endgültigen Stelle.

Heap

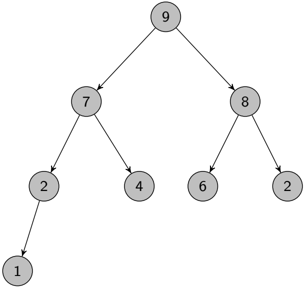
- (Max-)Heap: Vollständiger Binärbaum mit der Eigenschaft: Wert jedes Knotens größer oder gleich seiner Kinder.
- Max-Heap mit 8 Elementen: Die Werte in den Knoten stellen die gespeicherten Werte dar:



Da Baumstruktur implizit gegeben, können die Elemente (Ebene für Ebene betrachte) in einem Array $[9, 7, 8, 2, 4, 6, 2, 1]$ gespeichert werden.

Heap

- (Max-)Heap: Vollständiger Binärbaum mit der Eigenschaft: Wert jedes Knotens größer oder gleich seiner Kinder.
- Max-Heap mit 8 Elementen: Die Werte in den Knoten stellen die gespeicherten Werte dar:

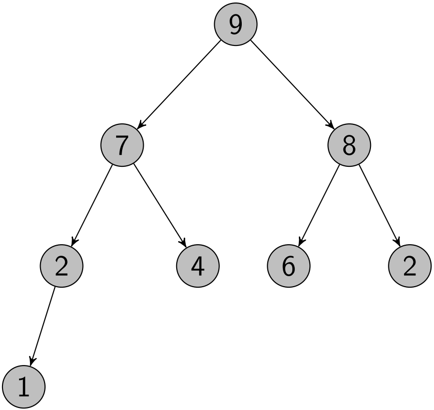


Da Baumstruktur implizit gegeben, können die Elemente (Ebene für Ebene betrachte) in einem Array $[(9),(7,8),(2,4,6,2),1]$ gespeichert werden.

Heapsort

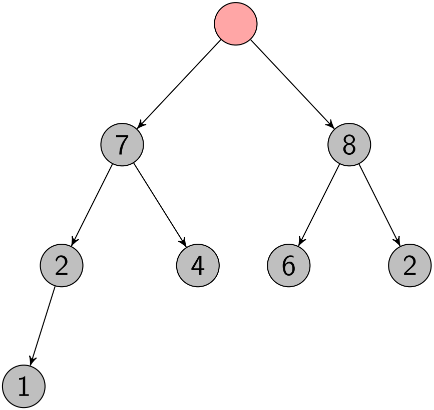
- Nutzen für Sortierung: teilweise Ordnung
- Start mit gültigem Heap (kann in $O(n)$ aufgebaut werden)
- Entnahme Maximum: $O(1)$
- Platzierung des Maximums am Ende, und Verkleinerung des Heaps um ein Element
- Getauschtes Element von letzter Stelle ist nun in Wurzel
- $\rightarrow$ Versickern/Heapify

Versickern/Heapify



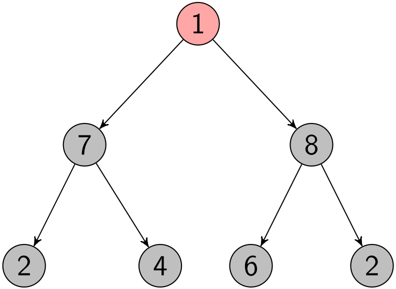
Initialer Heap: Maximum steht in Wurzel $[9, 7, 8, 2, 4, 6, 2, 1]$

Versickern/Heapify



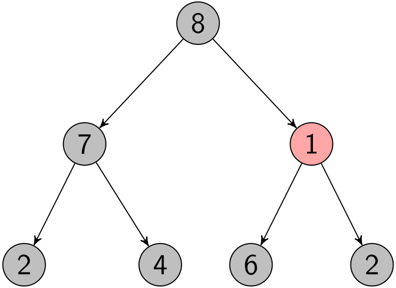
Entnahme der Wurzel (Platzierung am Ende des Heaps)
$[1, 7, 8, 2, 4, 6, 2 \mid 9]$

Versickern/Heapify



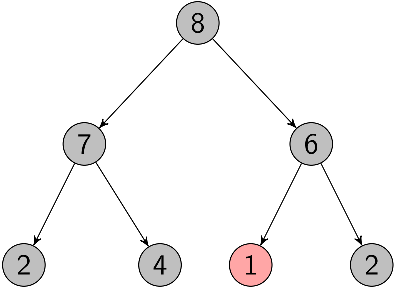
Entnahme der Wurzel (Platzierung am Ende des Heaps)
$[1, 7, 8, 2, 4, 6, 2 \mid 9]$

Versickern/Heapify



Versickern von 1 durch Tausch mit größtem Kind (8)

Versickern/Heapify



Weiter-versickern von 1 durch Tausch mit größtem Kind (8)

Aufbau des initialen Heaps

- Bottom-Up-Aufbau eines Max-Heaps aus [1, 9, 8, 7, 4, 6, 2, 2].
- Versickern aller Nicht-Blätter

Arrayzustand	**Kommentar**
1, 9, 8, 7, 4, 6, 2, 2	Ausgangsfolge (unsortierte Anordnung)
	Heapify bei Index 3 (7 mit Kind 2): alles ok.
	Index 2 (8 mit Kindern 6 und 2): alles ok.
	Index 1 (9 mit Kindern 7 und 4): 9 $\geq$ max(7,4), bleibt.
9, 1, 8, 7, 4, 6, 2, 2	Index 0 (1 mit Kindern 9 und 8): $\rightarrow$ tausche mit 9
9, 7, 8, 1, 4, 6, 2, 2	Jetzt 1 an Index 1 (Kinder 7,4) $\rightarrow$ tausche mit 7
9, 7, 8, 2, 4, 6, 2, 1	Jetzt 1 an Index 3 (Kind 2) $\rightarrow 1 < 2 \rightarrow$ tausche
9, 7, 8, 2, 4, 6, 2, 1	Fertiger Max-Heap

Ausführung von Heapsort

Detaillierte Zwischenschritte von Heapsort mit der Eingabefolge [9, 7, 8, 2, 4, 6, 2, 1]

Schritt	Arrayzustand	Kommentar
1	1, 7, 8, 2, 4, 6, 2 | 9	Vertausche Wurzel 9 mit letztem Heap-Element 1
	8, 7, 6, 2, 4, 1, 2 | 9	Heapify bei Index 0: versickern von 1
2	2, 7, 6, 2, 4, 1 | 8, 9	Vertausche Wurzel 8 mit letztem Heap-Element 2
	7, 4, 6, 2, 2, 1 | 8, 9	Heapify bei Index 0: versickern von 2
3	1, 4, 6, 2, 2 | 7, 8, 9	Vertausche Wurzel 7 mit letztem Heap-Element 1
	6, 4, 1, 2, 2 | 7, 8, 9	Heapify bei Index 0: versickern von 1
4	2, 2, 1, 4 | 6, 7, 8, 9	Vertausche Wurzel 6 mit letztem Heap-Element 2
	4, 2, 1, 2 | 6, 7, 8, 9	Heapify bei Index 0: versickern von 2
5	2, 2, 1 | 4, 6, 7, 8, 9	Vertausche Wurzel 4 mit letztem Heap-Element 2
	2, 2, 1 | 4, 6, 7, 8, 9	Heapify bei Index 0: keine Veränderung nötig
6	1, 2 | 2, 4, 6, 7, 8, 9	Vertausche Wurzel 2 mit letztem Heap-Element 1
	2, 1 | 2, 4, 6, 7, 8, 9	Heapify bei Index 0: versickern von 1
7	1 | 2, 2, 4, 6, 7, 8, 9	Vertausche Wurzel 2 mit letztem Heap-Element 1
	1 | 2, 2, 4, 6, 7, 8, 9	Heapify nicht nötig
–	**1, 2, 2, 4, 6, 7, 8, 9**	Endergebnis: Array aufsteigend sortiert

Definition

Worst-Case Analyse einfacher Sortieralgorithmen:

Algorithmus	**Vergleiche**	**Swaps**
Bubblesort	$O(n^2)$	$O(n^2)$
Insertionsort	$O(n^2)$	$O(n^2)$
Selectionsort	$O(n^2)$	$O(n)$

Analyse weiterer Algorithmen:

Algorithmus	**Worst-Case**	**Average-Case**
Heapsort	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
Mergesort	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
Quicksort	$O(n^2)$	$O(n \log n)$

Quicksort:

- Worst-Case bei Quicksort wird nur selten erreicht
- In der Praxis schneller als Mergesort und Heapsort

Definition

Python verwendet intern für `list.sort()` und `sorted()` einen Hybrid aus Mergesort und Insertionsort, genannt Timsort[a]. In `NumPy` wird allerdings standardmäßig Quicksort verwendet.
Anmerkung: bei Java kommt für primitive Datentypen ein Dual-Pivot-Quicksort zum Einsatz, für Objektarrays Timsort. Bei C++ wird in der Standard Template Library ein Hybrid aus Quicksort, Heapsort und Insertion Sort verwendet (Introsort).

[a] Benannt nach dem Erfinder Tim Peters.