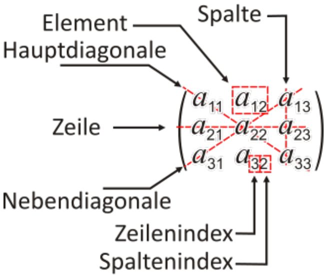
Graphentheorie: Matrizenbasierte Algorithmen

Programmieren und Software-Engineering
Theorie

2. September 2025

Matrizen

- Eine Matrix ist eine rechteckige, tabellarische Anordnung von Elementen.
- Matrizen sind zentrale Elemente der *linearen Algebra*.
- Vielfältige Anwendungen, unter Anderem: lineare Abbildungen, Lösung von Gleichungssystemen, Physik, Computergraphik, Graphentheorie (!)



Quelle: Wikipedia

Matrixmultiplikation

Ist A eine $n \times m$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

und B eine $m \times p$-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

dann ist das Matrizenprodukt

$$A \cdot B = C$$

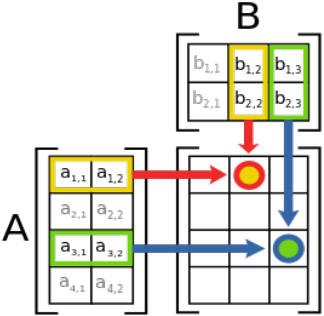
gegeben durch die $n \times p$-Matrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{np} \end{pmatrix}$$

mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

Matrixmultiplikation



Quelle: Wikipedia

- Man stelle sich die Matrizen A und B bei der Multiplikation so angeordnet vor, wie in der Grafik links dargestellt (oder schreibe sie tatsächlich so auf!)
- In

  $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

  läuft der Index über die Elemente einer Zeile der Matrix A und über die Elemente einer Spalte in der Matrix B
- Es wird das jeweils k-te Element der Zeile, bzw. Spalte *multipliziert* und zur bisherigen Summe *addiert*

Beispiel: Matrizenmultiplikation

Matrizenmultiplikation

Wir betrachten die Multiplikation von $A \cdot B = C$ (in diesem Fall $A = B$) und somit $C = A^2$:

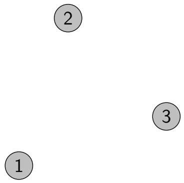
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Wert $c_{2,3} = a_{2,1} \cdot b_{1,3} + a_{2,2} \cdot b_{2,3} + a_{2,3} \cdot b_{3,3} + a_{2,4} \cdot b_{4,3} + a_{2,5} \cdot b_{5,3} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$

Adjazenzmatrix

Eine Adjazenzmatrix bietet eine Möglichkeit, einen Graphen als Datenstruktur im Computer darzustellen. In dieser Matrix werden die Knoten von 1 bis *n* durchnummeriert und jedem Knoten wird genau eine Spalte und eine Zeile zugeordnet. Die Größe der Matrix wird somit durch die Anzahl der Knoten bestimmt.

vom Knoten \ zum Knoten	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0



Adjazenzmatrix

Definition (Adjazenzmatrix)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $n = |V|$. Eine Matrix $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ heißt *Adjazenzmatrix* $A(G)$ von G, wenn gilt $A(G) = (a_{ij})$ mit

$$\forall i, j \in V : a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{wenn } \left[i, j\right] \in E(G), \\ 0, \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel: Sei $G = \left(\{1,2,3\}, \{[1,2],[1,3],[2,3]\}\right)$. Die Adjazenzmatrix $A(G)$ lautet:

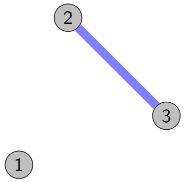
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Werte in der Adjazenzmatrix

Die Adjazenzmatrix ist in *ungerichteten* Graphen **symmetrisch**, da eine Kante $[i, j]$ der Kante $[j, i]$ entspricht.

zum Knoten

vom Knoten	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	**1**
3	0	**1**	0

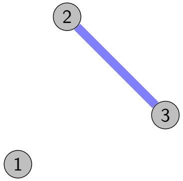


Werte in der Adjazenzmatrix

In einem *ungerichteten* Graphen erhält man eine obere Dreiecksmatrix. Die Einträge in grau sind bei derartigen Graphen nicht notwendig.

zum Knoten

vom Knoten	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	1	0



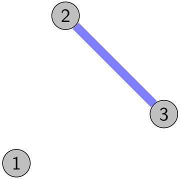
Werte in der Adjazenzmatrix

In einem *ungerichteten* Graphen erhält man eine obere Dreiecksmatrix. Die Einträge in grau sind bei derartigen Graphen nicht notwendig.

zum Knoten

vom Knoten

	1	2	3
1		0	0
2			1
3			

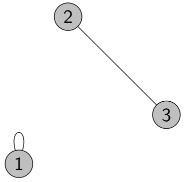


Adjazenzmatrix

Werte in der Hauptdiagonale entsprechen Schlingen

zum Knoten

vom Knoten	1	2	3
1	**1**	0	0
2	0	0	1
3	0	1	0



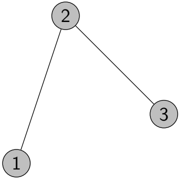
Knotengrade in der Adjazenzmatrix

Die Zeilen- bzw. Spaltensummen ergeben den Knotengrad.

zum Knoten

vom Knoten

	1	2	3	
1	0	1	0	1
2	1	0	1	2
3	0	1	0	1
	1	2	1	



Anmerkung: Einträge "1" in der Hauptdiagonale müssen für die Berechnung der Knotengrade doppelt gezählt werden. Oftmals wird für Schlingen auch einfach der Wert 2 verwendet.

Potenzmatrix

Definition (Potenzmatrix)

Unter einer *Potenzmatrix* versteht man das mehrfache Produkt einer (Adjazenz-)Matrix mit sich selbst.

Beispiel: $A^2 = A \cdot A$, bzw. $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A \cdot A$.

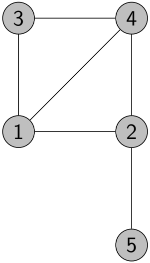
Anmerkung: Im Allgemeinen können $n \times m$ Matrizen nicht mit sich selbst multipliziert werden. Da jedoch Adjazenzmatrizen immer *quadratische* Matrizen sind, ist dies immer möglich!

Zweck und Verwendung der Potenzmatrix

Die Einträge $a_{i,j}$ der Potenzmatrix $A^k(G)$ geben die Anzahl der Kantenfolgen der Länge k zwischen dem Knoten i und Knoten j an $(i, j \in V)$.

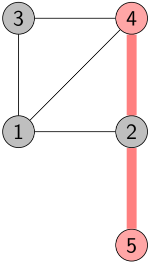
- Die Potenzmatrix soll in weiterer Folge verwendet werden um die *Distanzen* im Graphen zu berechnen.
- Grundidee:
  - Es werden nach und nach höhere Potenzmatrizen berechnet.
  - Wenn zwei Knoten i und j die Distanz k haben, dann tritt in $a_{i,j}$ aus $A^k(G)$ erstmals ein von 0 verschiedener Wert auf.
  - In allen Potenzmatrizen mit Potenzen kleiner als k war dieser Eintrag 0 (d.h. es gibt keine Kantenfolgen kürzerer Länge).
  - Das erstmalige Auftreten von $a_{i,j} \neq 0$ in einer Potenzmatrix wird im nächsten Abschnitt für die Berechnung der Distanzen verwendet.

Beispiel: Potenzmatrix (1)



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

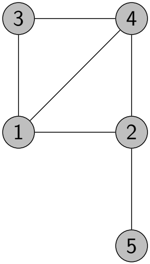
Beispiel: Potenzmatrix (2)



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Von v_4 zu v_5 existiert eine Kantenfolge der Länge 2 (über Knoten v_2). In der Matrix ist $a_{4,5} = 0$, da keine Kante $[4, 5]$ existiert. In der Matrix sind markiert: die Kante $[4, 2]$ die von v_2 weg führt, und die Kante $[2, 5]$ die zu v_5 hin führt.

Beispiel: Potenzmatrix (3)

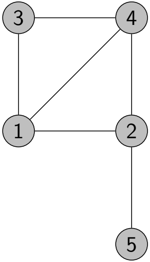


$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2(G) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir bezeichnen mit $a^2_{i,j}$ einen Wert in der Matrix $A^2(G)$. Bei der Berechnung von $a^2_{4,5} = a_{4,1} \cdot a_{1,5} + a_{4,2} \cdot a_{2,5} + a_{4,3} \cdot a_{3,5} + a_{4,4} \cdot a_{4,5} + a_{4,5} \cdot a_{5,5} =$ $1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$ wurde der Eintrag der Kantenfolge von v_4 nach v_2 mit jener von v_2 nach v_5 multipliziert, und ergab einen Wert $a^2_{4,5} = 1 > 0$.

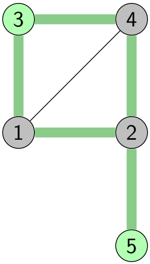
Beispiel: Potenzmatrix (4)



$$A^2(G) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Einträge in $A^2(G)$ enthalten in a_{ij}^2 die Anzahl der Kantenfolgen vom Knoten i zum Knoten j.
- Die Matrix ist ebenso wie $A(G)$ symmetrisch (im ungerichteten Fall).
- $a_{3,5}^2 = a_{5,3}^2 = 0$, weil keine Kantenfolge der Länge 2 von v_3 nach v_5 (und umgekehrt) existiert.

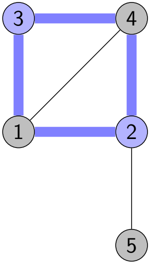
Beispiel: Potenzmatrix (5)



$$A^2(G) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Wir betrachten nun einen weiteren Schritt, und dabei die Kantenfolgen von v_3 nach v_5 der Länge 3, die im dritten Schritt (Matrix $A^3(G)$) gefunden werden.
- Die Kantenfolgen der Länge 3 sind im Graphen grün markiert.

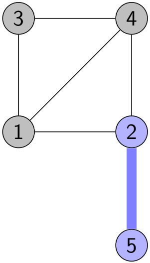
Beispiel: Potenzmatrix (6)



$$A^2(G) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- In $A^2(G)$ finden wir zwei Kantenfolgen von v_3 nach v_2
- Somit ist $a^2_{3,2} = 2$

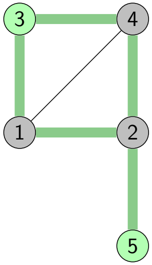
Beispiel: Potenzmatrix (7)



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- In $A^1(G)$ finden wir eine Kantenfolge von v_2 nach v_5
- Somit ist $a_{2,5} = 1$

Beispiel: Potenzmatrix (8)



$$A^2(G) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2(G) \cdot A(G) = A^3(G) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- In $a^3_{3,5} = 2$ erhalten wir nun die Information, daß es zwei Kantenfolgen der Länge 3 von v_3 nach v_5 gibt.
- Rechnung: $a^3_{3,5} = a^2_{3,1} \cdot a^1_{1,5} + a^2_{3,2} \cdot a^1_{2,5} + a^2_{3,3} \cdot a^1_{3,5} + a^2_{3,4} \cdot a^1_{4,5} + a^2_{3,5} \cdot a^1_{5,5}$ $= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2$

Ergänzende Erklärung zur Berechnung der Anzahl der Kantenfolgen der Länge k:

Bei der Operation der Multiplikation der Matrizen A^{k-1} mit A werden die Informationen über (die Anzahl der) Kantenfolgen der Länge $k-1$ und der Länge 1 zusammengefügt (nämlich zu jenen der Länge k). Dabei werden alle Knoten als Zwischenknoten berücksichtigt; konkret als vorletzten Knoten der Kantenfolge.

Distanzmatrix

Definition (Distanzmatrix)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und $n = |V|$. Eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *Distanzmatrix* von G, wenn alle Einträge d_{ij} der Distanz zwischen den Knoten i und j entsprechen $(i, j \in V)$.

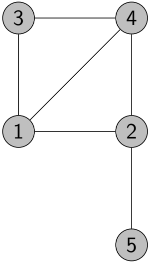
Distanzmatrix: Berechnung

Die Berechnung der Distanzmatrix $D(G)$ basiert wiederum auf der Adjazenzmatrix:

1. Initialisierung:
   - Einträge "1" aus $A(G)$ werden in $D^{(1)}(G)$ übernommen
   - Bei Einträgen "0" in $A(G)$ erhält $D^{(1)}(G)$ Einträge ∞
   - Nullen in Hauptdiagonale
2. $k = 2$
3. Für alle Einträge aus der $A^k(G)$ mit $a_{ij}^k \neq 0$ und $d_{ij} = \infty$ setzen wir in $D^{(k)}(G)$ die Werte $d_{ij} = k$
4. $k = k + 1$
5. Gehe zu Schritt 3, außer wenn $\forall i, j, i \neq j : d_{ij} \neq \infty$ oder $k = n$ oder $D^{(k-2)} = D^{(k-1)}$

Anmerkung: $D^{(k)}$ steht hier für die Distanzmatrix im Schritt k.

Beispiel: Distanzmatrix (1)

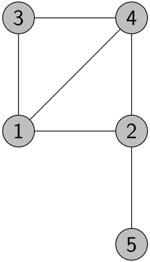


$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)}(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \infty \\ 1 & 0 & \infty & 1 & 1 \\ 1 & \infty & 0 & 1 & \infty \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Die Hauptdiagonale in $D^{(1)}(G)$ enhält lauter 0en, alle 1en werden aus $A(G)$ übernommen, für alle 0en in $A(G)$ die nicht in der Hauptdiagonale liegen, wird in $D^{(1)}(G)$ der Wert ∞ übernommen.

Beispiel: Distanzmatrix (2)

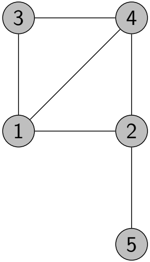


$$A^2(G) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^{(2)}(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & \infty \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Schritt $k = 2$ wird für alle neu entstandenen Werte $a_{ij}^2 \neq 0$ der Wert $d_{ij} = k$ gesetzt.

Beispiel: Distanzmatrix (3)



$$A^3(G) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)}(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Schritt $k = 3$ wird für alle neu entstandenen Werte $a_{ij}^3 \neq 0$ der Wert $d_{ij} = k$ gesetzt.

Distanzmatrix: Anwendungen

- Mit der Distanzmatrix können die **Exzentrizitäten** berechnet werden: Maximum einer Zeile, bzw.

$$ex(i) = \max_k d_{ik}, 1 \leq k \leq n$$

- **Durchmesser:**

$$dm(G) = \max_k ex(v_k), 1 \leq k \leq n$$

- **Radius:**

$$rad(G) = \min_k ex(v_k), 1 \leq k \leq n$$

Beispiel: Anwendung Distanzmatrix

$D(G)$:

	1	2	3	4	5	$ex(v)$
1	0	1	1	1	2	2
2	1	0	2	1	1	2
3	1	2	0	1	3	3
4	1	1	1	0	2	2
5	2	1	3	2	0	3

Die Exzentrizitäten können aus den Zeilen der Matrix ermittelt werden.

Wegmatrix

Definition (Wegmatrix)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und $n = |V|$. Eine Matrix $W \in \{0, 1\}^{n \times n}$ heißt *Wegmatrix* oder *Erreichbarkeitsmatrix* von G, wenn für alle Elemente w_{ij} gilt:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \rightsquigarrow j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Anmerkung: $i \rightsquigarrow j$ bedeutet hierbei, dass der Knoten j von Knoten i aus erreichbar ist, also dass ein Weg zwischen diesen Knoten exisiert. In anderen Worten: die beiden Knoten liegen in der selben (Zusammenhangs-)Komponente.

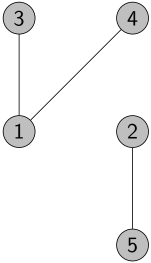
Wegmatrix: Berechnung

Die Berechnung der Wegmatrix basiert auf der Adjazenzmatrix:

1. Initialisierung:
$$W^{(1)}(G) = A(G) + \mathbb{1}$$
Dabei bezeichnet $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix, die in der Hauptdiagonale die Werte 1, und sonst nur die Werte 0 enthält.
2. $k = 2$
3. Für alle Einträge aus der $A^k(G)$ mit $a_{ij}^k \neq 0$ setzen wir in $W^{(k)}(G)$ die Werte $w_{ij} = 1$
4. $k = k + 1$
5. Gehe zu Schritt 3, außer wenn $\forall i, j : w_{ij} \neq 0$ oder $k = n$ oder $W^{(k-2)} = W^{(k-1)}$

Anmerkung: $W^{(k)}$ steht hier für die Wegmatrix im Schritt k.

Beispiel: Wegmatrix (1)

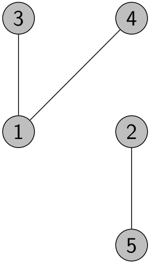


$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^{(1)}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Hauptdiagonale von $W^{(1)}(G)$ wird mit 1en initalisiert, der Rest wird von $A(G)$ übernommen.

Beispiel: Wegmatrix (2)

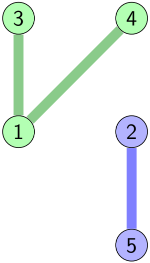


$$A^2(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W^{(2)}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die neuen Einträge $a_{ij}^2 \neq 0$ aus $A^2(G)$ wird $w_{ij} = 1$ in $W^{(2)}(G)$ übernommen.

Beispiel: Wegmatrix (3)

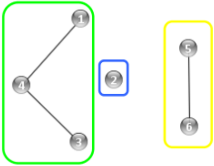


$$W(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir können aus $W(G)$ die Komponenten $K_1 = (\{1,3,4\},\{[1,3],[1,4]\})$ und $K_2 = (\{2,5\},\{[2,5]\})$ ablesen.

Wegmatrix: Anwendungen

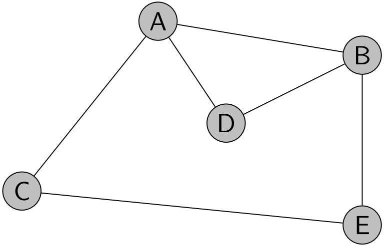
	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	1	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0
4	1	0	1	1	0	0
5	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	1	1



- Die Anzahl der unterschiedlichen Zeilen von $W(G)$ ergibt die Anzahl der Komponenten von G
- Artikulationen können durch Entfernung eines Knoten und Neuberechnung der Matrix ermittelt werden (Anzahl der Komponenten wird größer)
- Brücken können durch Entfernung von Kanten und Neuberechnung der Matrix ermittelt werden (Anzahl der Komponenten wird ebenso wieder größer)

Beispiel 7.1.1

Gegeben sei der Graph G_1:



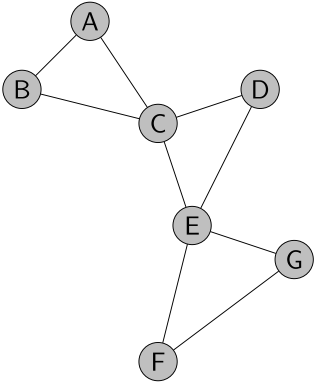
Berechnen Sie die

1. Distanzmatrix, und die
2. Wegmatrix

anhand der Potenz-Matrizen.

Beispiel 7.1.3

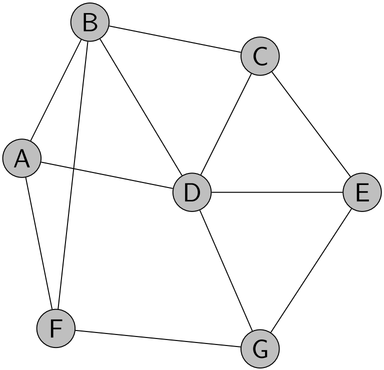
Gegeben sei der Graph G_2:



Berechnen Sie die Distanzmatrix des Graphen G_2.

Beispiel 7.2.1

Gegeben sei der Graph G_3:



Berechnen Sie die Anzahl der Kantenfolgen der Länge 5 vom Knoten D zu B in möglichst wenigen Schritten.