Graphentheorie: Kantenfolgen, Eulersche und Hamiltonsche Graphen

Programmieren und Software-Engineering
Theorie

2. September 2025

Kantenfolgen

Definition (Kantenfolge)

Eine Kantenfolge von v_1 nach v_n (aus V) ist eine endliche Folge von Kanten $\left[v_1, v_2\right], \left[v_2, v_3\right], \ldots, \left[v_{n-1}, v_n\right]$, sodass jeweils zwei aufeinanderfolgende Kanten adjazent sind.

Definition (Offene Kantenfolge)

Eine Kantenfolge $\left[v_1, v_2\right], \ldots, \left[v_{n-1}, v_n\right]$ heißt *offen*, falls $v_1 \neq v_n$.

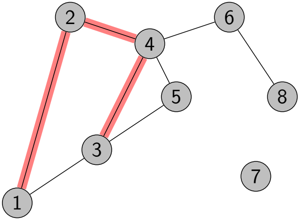
Definition (Geschlossene Kantenfolge)

Eine Kantenfolge $\left[v_1, v_2\right], \ldots, \left[v_{n-1}, v_n\right]$ heißt *geschlossen*, falls $v_1 = v_n$.

Kantenfolgen

Bemerkung: In einer Kantenfolge können bestimmte Kanten auch mehrfach vorkommen!

Beispiel: Kantenfolge $K = [1,2],[2,4],[4,3],[3,4],[4,2]$



Beispiel: *Keine* Kantenfolgen wären $[1,2],[2,3]$ oder $[1,2],[4,3]$.

Kantenzug

Definition (Kantenzug)

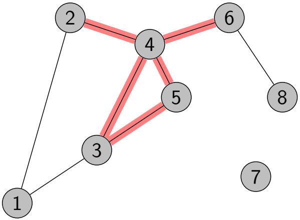
Ein *Kantenzug* ist eine Kantenfolge bei der alle Kanten paarweise verschieden sind.

Anmerkung 1: "paarweise verschieden" ... typische (mathematische) Formulierung, die ausdrückt, dass alle Elemente unterschiedlich sind, d.h. es keine zwei gleichen Elemente gibt!

Anmerkung 2: Analog zur Kantenfolge existieren *offene* und *geschlossene* Kantenzüge

Kantenzug

Beispiel: Kantenzug $K = [2,4],[4,5],[5,3],[3,4],[4,6]$



Anmerkung: der Knoten 4 wird in diesem Kantenzug mehrfach besucht!

Weg, bzw. Pfad (1)

Definition (Weg, Pfad)

Ein Weg oder Pfad (engl. path) $P(s, t)$ ist ein offener Kantenzug von $s \in V$ nach $t \in V$ bei dem alle Knoten paarweise verschieden sind.

Achtung

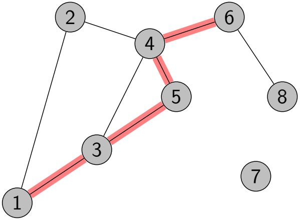
In der Literatur wird oft *Weg* so definiert, daß gleiche Knoten im Kantenzug vorkommen dürfen. bei einem *Pfad* müssen dann die Knoten voneinander verschieden sein. Allerdings existieren auch andere Definitionen in welchen dieser "Weg" als *Pfad* bezeichnet wird, und der zuvor genannte "Pfad" als *elementarer Pfad*.

Definition (Weglänge)

Die Länge $|P(s, t)|$ ist die Anzahl der Kanten in $P(s, t)$

Weg, bzw. Pfad (2)

Beispiel: der Pfad $P(1,6) = [1,3], [3,5], [5,4], [4,6]$ mit $|P(1,6)| = 4$ ist rot markiert



Allgemein können mehrere (verschiedene) Wege von s nach t existieren.

Definition (Kürzester Weg/Pfad)

Jene Wege von s nach t mit minimaler Länge $|P(s,t)|$ werden **kürzeste Wege** (oder kürzeste Pfade) genannt.

Kreis, Zyklus

Definition (Zyklus)

Ein *Zyklus* $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ ist ein geschlossener Kantenzug, d.h. $v_1 = v_n$.

Definition (Kreis)

Ein *Kreis* ist ein Zyklus bei dem alle Knoten, bis auf den Start- und Endknoten verschieden sind.

Achtung

Auch die Begriffe Kreis und Zyklus sind leider in der Literatur nicht immer einheitlich definiert.

Eulersche Linie, Euler-Zyklus

Definition (Eulersche Linie)

Eine *Eulersche Linie* ist ein Kantenzug, der alle Kanten des Graphen genau einmal enthält.

Bemerkung: Man beachte, daß hier Knoten mehrfach durchlaufen werden können!

Definition (Euler-Zyklus)

Bei einer geschlossenen *Eulerschen Linie*, bzw. ein **Euler-Zyklus** sind Start- und Endknoten gleich!

Achtung

Oft wird von Eulerschen Kreisen oder Eulerschen Zyklen gesprochen. Ob diese Bezeichnungen tatsächlich zutreffend sind hängt wiederum von den konkreten Definitionen von diesen Begriffen ab, also insbesondere ob sie das mehrfache Durchlaufen von Knoten erlauben.

Eulersche Graphen

Definition (Eulerscher Graph)

Besitzt ein Graph einen *Euler-Zyklus*, so bezeichnet man ihn als *Eulersch*.

Satz von Euler-Hierholzer

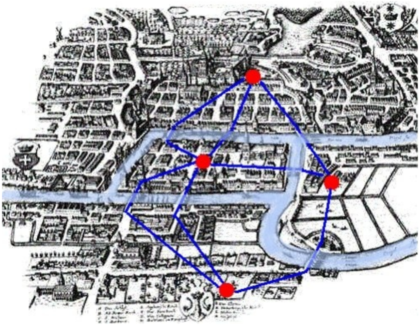
Sei G ein zusammenhängender Graph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- G ist *Eulersch*
- Jeder Knoten in G hat geraden Grad
- Die Kantenmenge von G ist die Vereinigung aller Kanten von paarweise disjunkten Zyklen [a]

[a] disjunkt bezüglich ihrer Kanten!

Königsberger Brückenproblem

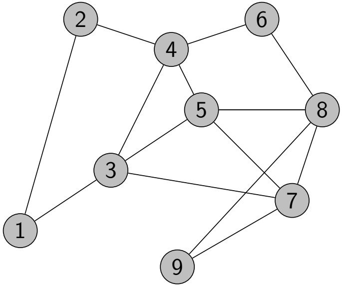
Wir haben nun die allgemeine Lösung des eingangs erwähnten Königsberger Brückenproblems



Anmerkung: Ein Graph besitzt genau dann eine offene Eulersche Linie, wenn alle Knoten bis auf zwei einen geraden Grad aufweisen.

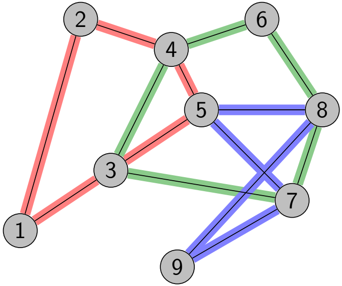
Euler-Zyklus

Beispiel: Beispiel, indem die Kantenmenge von G die Vereinigung von paarweise disjunkten Zyklen ist (und damit G eulersch)



Euler-Zyklus

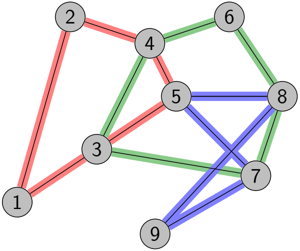
Beispiel: Beispiel, indem die Kantenmenge von G die Vereinigung von paarweise disjunkten Zyklen ist (und damit G eulersch)



Algorithmus von Hierholzer

1. Suche Zyklus Z in Graphen G
2. Ist Z ein Euler-Zyklus $\Rightarrow$ fertig
3. Wähle einen Knoten $v \in Z$ mit $d(v) > 0$ wobei die Kanten von Z ignoriert werden und suche neuen Zyklus Z'
4. Füge Z' mit Z zusammen indem Z' am ersten Schnittpunkt mit Z zur Gänze eingefügt wird, danach der Rest von Z
5. Dieser neue Zyklus wird nun Z genannt. Weiter mit Schritt (2)

Euler-Zyklus



1. $Z = (1, 2, 4, 5, 3, 1)$
2. $Z' = (4, 6, 8, 7, 3, 4)$
3. Kombiniere Z mit Z' zu $Z = (1, 2, 4, 6, 8, 7, 3, 4, 5, 3, 1)$
4. $Z' = (5, 8, 9, 7, 5)$
5. Kombiniere Z mit Z' zu $Z = (1, 2, 4, 6, 8, 7, 3, 4, 5, 8, 9, 7, 5, 3, 1)$

Chinese Postman Problem

- (Geschlossene) Eulersche-Linien haben große praktische Bedeutung für
  - Abfallentsorgung
  - Schneeräumung
  - Briefzustellung
- Ein Straßengraph ist jedoch nicht unbedingt *Eulersch*
  - Straßen müssen also eventuell mehrfach verwendet werden.
  - Ebenso spielt die Länge der einzelnen Straßen eine Rolle!
- $\Rightarrow$ **Chinese Postman Problem:**
  - Finde kürzesten Zyklus in Graphen, der jede Kante mindestens einmal enthält
  - Benannt nach chinesischem Mathematiker Mei Ko Kwan (*1934)
  - Später mehr dazu im nächsten Kapitel!

Hamiltonsche Linie/Kreis

Definition (Hamiltonsche Linie)

Eine *Hamiltonsche Linie* ist ein Weg, der alle Knoten des Graphen *genau* einmal enthält.

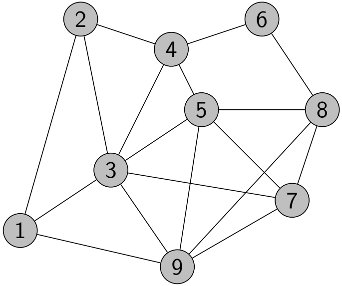
Bemerkung: In einer Hamiltonsche Linie dürfen die Knoten nicht mehrfach (wiederholt) besucht werden!

Definition (Hamilton-Kreis)

Ein *Hamilton-Kreis* ist ein Kreis der alle Knoten des Graphen genau einmal enthält.

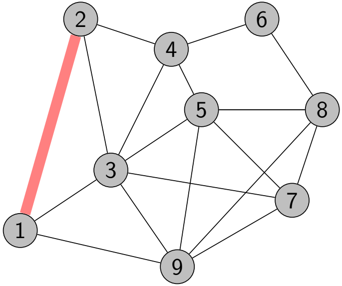
Hamiltonkreis

Beispiel:



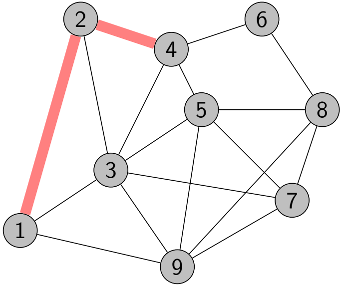
Hamiltonkreis

Beispiel:



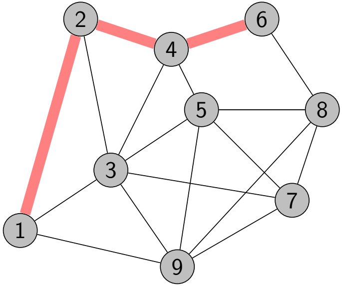
Hamiltonkreis

Beispiel:



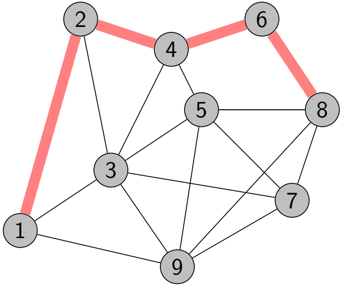
Hamiltonkreis

Beispiel:



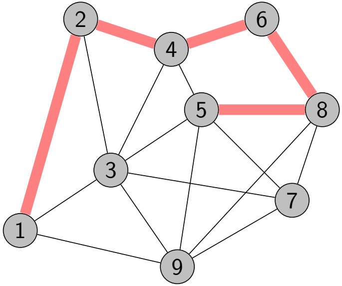
Hamiltonkreis

Beispiel:



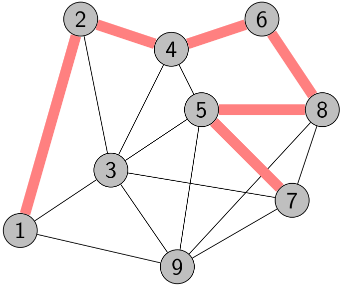
Hamiltonkreis

Beispiel:



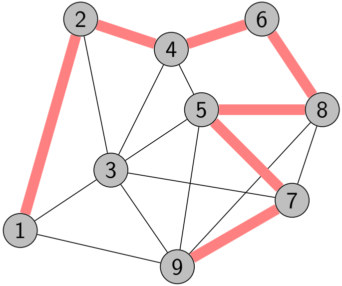
Hamiltonkreis

Beispiel:



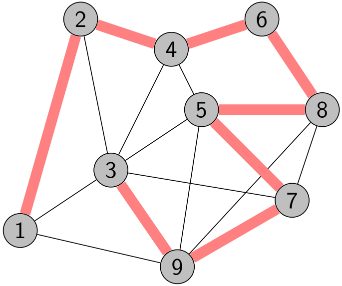
Hamiltonkreis

Beispiel:



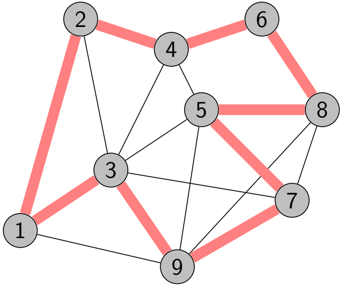
Hamiltonkreis

Beispiel:



Hamiltonkreis

Beispiel:



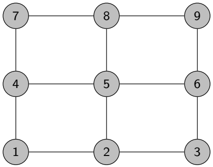
Hamiltonscher Graph

Definition (Hamiltonscher Graph)

Einen Graphen der einen Hamiltonkreis enthält nennt man *Hamiltonschen Graph*.

- Nicht alle Graph sind Hamiltonsch!
- **Es existiert keine einfache Charakterisierung ob ein Graph Hamiltonsch ist!**
- Im Gegensatz zum leicht lösbaren Problem des Euler-Zyklus, ist das Hamiltonkreisproblem im Allgemeinen sehr schwierig zu lösen.

Beispiel:



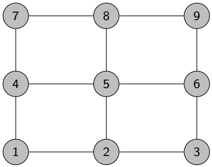
Hamiltonscher Graph

Definition (Hamiltonscher Graph)

Einen Graphen der einen Hamiltonkreis enthält nennt man *Hamiltonschen Graph*.

- Nicht alle Graph sind Hamiltonsch!
- **Es existiert keine einfache Charakterisierung ob ein Graph Hamiltonsch ist!**
- Im Gegensatz zum leicht lösbaren Problem des Euler-Zyklus, ist das Hamiltonkreisproblem im Allgemeinen sehr schwierig zu lösen.

Beispiel:



Dieser Graph ist *nicht* Hamiltonsch!

Hamiltonkreis (*)

Ein kurzer Blick hinter die Kulissen: Komplexität des Problems, Komplexitätstheorie:

- Das Hamiltonkreis-Problem liegt in der Komplexitätsklasse $NP-$vollständig:
  - NP: *"nondeterministic polynomial"*
  - Es kann nicht in *polynomieller Zeit* in Abhängigkeit von den Eingabedaten entschieden werden ob eine Lösung existiert
  - Ist enthalten in Liste der *21 klassischen NP-vollständigen Probleme* (Richard Karp, 1972)

Exkurs: Komplexitätstheorie (1) (*)

- Viele Probleme können *effizient* berechnet werden
- Die *Laufzeit* des Algorithmus wächst mit zunehmend großen Eingabedaten nur moderat.
- Sei n die Größe der Eingabedaten, dann läuft das Lösungsverfahren (Algorithmus) in $O(n^k)$ Schritten ab
  - $O(n)$ ist zu lesen als: in der Größenordnung von n
  - n^k bedeutet hier eine beliebige Potenz von n (Exponent k)
  - Beispiel: Wir sortieren $n = 10$ Zahlen aufsteigend $\Rightarrow$ dafür benötigen wir $O(n^2)$, also ca. 100 Schritte [1]
- Alle Probleme wo es einen derartigen Exponenten k gibt liegen in der **Komplexitätsklasse** P
  - Sie sind *polynomiell* berechenbar

[1] Sortieren geht auch "besser"!

Exkurs: Komplexitätstheorie (2) (*)

- Jetzt stark vereinfacht: bei bestimmten anderen Problemen weiß man, dass sie in $O(k^n)$ berechenbar sind!
- Man beachte: n steht jetzt selbst im Exponenten $\Rightarrow$ exponentielles Wachstum der Laufzeit
- Die Folge ist, das Programm wird nicht in sinnvoll kurzer Zeit fertig.
- Man nennt dies die **Komplexitätsklasse** NP
- Bei bestimmten Problemen weiß man, dass sie in NP liegen, und zu den schwierigsten Problemen in NP zählen $\Rightarrow$ **Komplexitätsklasse** NP**-vollständig**

Exkurs: Komplexitätstheorie (3) (*)

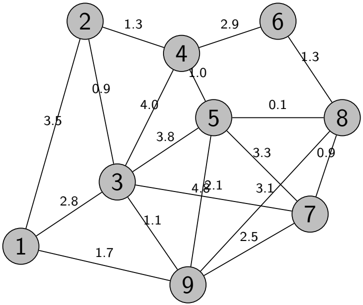
- Diese *NP*-vollständigen Probleme sind alle aufeinander abbildbar (d.h. hat man einen Algorithmus für ein Problem gefunden, kann man damit grundsätzlich alle derartigen Probleme lösen).
- Großes Problem: Es ist nicht bewiesen, dass $P \neq NP$
- Dies ist eines der großen (wahrscheinlich das größte) ungelöste Problem der theoretischen Informatik.
- Nahezu alle Forscher sind jedoch überzeugt, dass tatsächlich $P \neq NP$, aber es fehlt der Beweis.
- Wäre $P = NP$, so könnten es plötzlich effiziente Algorithmen für schwierige aber praxisrelevante Aufgabestellungen geben!

(Kanten-)Gewichtete Graphen

Definition ((Kanten-)Gewichteter Graph)

Sei $w : E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung die jeder Kante $e \in E$ eine reelle Zahl zuordnet. Man bezeichnet w als die Gewichtsfunktion.

Beispiel: mit $w(e) \geq 0, \forall e \in E$:



Kürzester Hamiltonkreis (*)

- Betrachten wir nun einen vollständigen Graphen mit Kantengewichten $w(e) \geq 0$ für alle $e \in E$.
- Existiert hier ein Hamiltonkreis?

Kürzester Hamiltonkreis (*)

- Betrachten wir nun einen vollständigen Graphen mit Kantengewichten $w(e) \geq 0$ für alle $e \in E$.
- Existiert hier ein Hamiltonkreis?
- In diesem Graphen existiert auf jeden Fall ein Hamiltonkreis! Es gibt tatsächlich sogar
$$\frac{(|V|-1)!}{2}$$
verschiedene Hamiltonkreise!

Kürzester Hamiltonkreis (*)

- Betrachten wir nun einen vollständigen Graphen mit Kantengewichten $w(e) \geq 0$ für alle $e \in E$.
- Existiert hier ein Hamiltonkreis?
- In diesem Graphen existiert auf jeden Fall ein Hamiltonkreis! Es gibt tatsächlich sogar

  $$\frac{(|V|-1)!}{2}$$

  verschiedene Hamiltonkreise!
- Alle Permutationen der Knoten ergeben einen gültigen Hamiltonkreis!

Kürzester Hamiltonkreis (*)

- Im Gegensatz zum **Entscheidungsproblem** "gibt es einen Hamiltonkreis" wollen wir nun das **Optimierungsproblem** betrachten: Finde hinsichtlich der Kantengewichte $w(e)$ den *kürzesten* Hamiltonkreis H, also

$$\min_H \sum_{e \in H} w(e).$$

- Da das Entscheidungsproblem NP-vollständig ist, ist das Optimierungsproblem ***NP*-schwierig**
- Diese Variante des Problems nennt man **Travelling Salesman Problem (TSP)**
- Wie schon in der Einleitung erwähnt, ist das TSP von immens großer Bedeutung für Wirtschaft, Industrie und Informatik

Travelling Salesman Problem (*)

Beispiel: Beliefere ausgehend von einem Lagerstandort 50 Kunden in Wien
Modellierung:

- Die Kunden werden durch Knoten V modelliert
- Wir betrachten den vollständigen Graphen G bezüglich V
- Kantengewichte $w(e_{ij})$ ergeben sich durch Berechnung der kürzesten Wege im Straßengraphen vom Kunden i zum Kunden j
- Lösung: **kürzester** Hamiltonkreis in G

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1

Ein Bauer steht mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf an einem Flussufer und möchte mit einem Boot an die andere Seite des Flusses gelangen. Das Boot ist jedoch nur groß genug um ein weiteres Tier, bzw. den Kohlkopf mitzunehmen.

Weiters gelten die folgenden Einschränkungen: ist die Ziege alleine mit dem Kohlkopf, so frisst sie diesen! Ebenso frisst der Wolf die Ziege, wenn er alleine mit ihr ist. Wie kann der Bauer schnellstmöglich mit allen Dreien (lebendig!) an das andere Ufer gelangen?

Aufgabe: Modellieren Sie die Aufgabenstellung graphentheoretisch. Was entspricht den Knoten, was entspricht den Kanten? Sie sollen also *nicht* die Lösung finden, sondern eine korrekte Modellierung angeben!

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.2

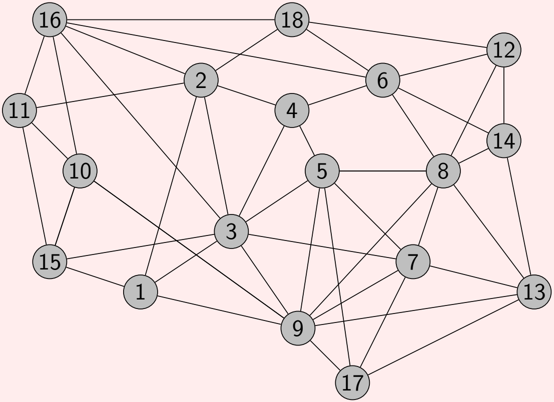
Vier Personen wollen eine Höhle verlassen. Sie haben nur noch eine Lampe, die aber nicht mehr lange brennt. Es können immer nur maximal zwei Personen mit einer Lampe gehen, für drei Personen wäre das Licht nicht ausreichend hell.

Die Personen weisen jedoch stark unterschiedliche Fähigkeiten im Klettern auf. Die erste Person (A) benötigt 1 Zeiteinheit (ZE) für den Weg, die zweite Person (B) 2 ZE, die dritte (C) 5 ZE und die vierte Person (D) 10 ZE.

Wie können die vier Personen am schnellsten die Höhle verlassen? Ziel der Aufgabenstellung ist wiederum die korrekte *Modellierung* und nicht primär die Lösung!

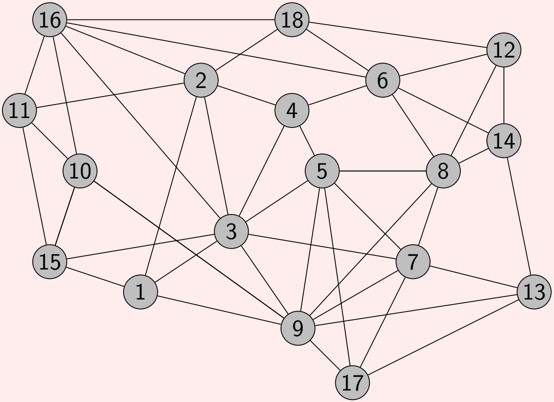
Aufgabe 4.3

Berechnen Sie einen Euler-Zyklus für den folgenden Graphen. Wenn der Graph nicht Eulersch ist, dann ändern Sie eine Kante (hinzufügen, entfernen), sodaß der Graph dann Eulersch ist.



Aufgabe 4.3

Berechnen Sie einen Euler-Zyklus für den folgenden Graphen. Wenn der Graph nicht Eulersch ist, dann ändern Sie eine Kante (hinzufügen, entfernen), sodaß der Graph dann Eulersch ist.



Aufgabe 4.4

Geben Sie einen Hamilton-Kreis für den folgenden Graphen an.