Graphentheorie:

Berechnung der Anzahl an Spannbäumen/Gerüsten eines Graphen

Programmieren und Software-Engineering
Theorie

2. September 2025

Determinante

Definition (Determinante)

In der linearen Algebra ist eine Determinante eine Zahl die einer quadratischen Matrix zugeordnet werden kann.

Anmerkung: Determinanten können beispielsweise als Volumensänderung interpretiert werden, die sich durch die *lineare Abbildung* ergibt, die durch die quadratische Matrix festgelegt wird.

Berechnung von Determinanten

- Berechnung der Determinante einer 2x2 Matrix:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- Berechnung einer Determinante einer 3x3 Matrix (**Regel von Sarrus**):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Laplacescher Entwicklungssatz

Definition (Laplacescher Entwicklungssatz)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \qquad \text{(Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte)}$$

bzw. alternativ:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \qquad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)}$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix **(Minor)** von A ist, die sich durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte in A ergibt.

Anmerkung: Das Produkt $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ wird Kofaktor $\tilde{a}_{ij}$ genannt.

Beispiel

Wir berechnen die folgende Determinante sowohl mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz, als auch mit der Regel von Sarrus:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Die Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt

$$\det A = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix},$$

und ausrechnen dieses Terms ergibt schließlich

$$= a \cdot e \cdot i - a \cdot f \cdot h - b \cdot d \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g,$$

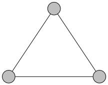
was wir auch direkt mit der Regel von Sarrus erhalten.

Alternativ: Gauß-Verfahren

- Ist eine $n \times n$ Matrix M in der oberen Dreiecksform gegeben, so ist $\det M = \prod_{i=1}^{n} m_{ii}$
- Mit dem Gauß-Verfahren kann jede quadratische Matrix auf diese Form gebracht werden.
- Bei einer Zeilenvertauschung ändert sich die Determinante um den Faktor -1.
- Bei Multiplikation einer Zeile mit c ändert sich der Wert der Determinante ebenfalls um den Faktor c.
- Die Addition des Vielfachen einer Zeile der Matrix zu einer anderen Zeile ändert den Wert der Determinante nicht!

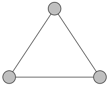
Anzahl an Spannbäumen

Beispiel: Anzahl der Spannbäume dieses Graphen?



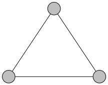
Anzahl an Spannbäumen

Beispiel: Anzahl der Spannbäume dieses Graphen? **3**

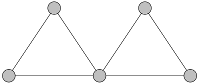


Anzahl an Spannbäumen

Beispiel: Anzahl der Spannbäume dieses Graphen? **3**

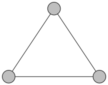


Beispiel: Anzahl der Spannbäume dieses Graphen?

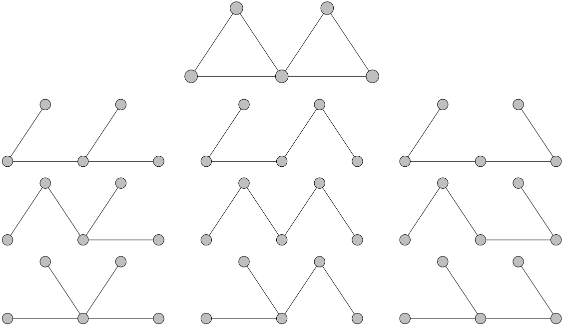


Anzahl an Spannbäumen

Beispiel: Anzahl der Spannbäume dieses Graphen? **3**



Beispiel: Anzahl der Spannbäume dieses Graphen? **9**



Anzahl an Spannbäumen

Lemma (Anzahl an Spannbäumen eines Graphen)

Die Anzahl der Spannbäume eines zusammenhängenden (schlichten) Graphen erhält man durch Multiplikation der Anzahl der Spannbäume aller Blöcke des Graphen.

Wie berechnet man die Anzahl der Spannbäume in einem Block?
$\Rightarrow$ Satz von Kirchhoff

Anzahl an Spannbäumen

Sei A die Adjazenzmatrix eines Graphen G. Sei weiters D eine Matrix mit $d_{ii} = d(i)$ für alle $i \in V$, und $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$. D.h. D ist eine Matrix die in der Hauptdiagonale die Knotengrade als Einträge enthält, und sonst lauter 0er.

Definition (Laplace-Matrix)

- $L := D - A$
- Sei nun L^* die Matrix die aus L entsteht, indem eine beliebige Zeile und beliebige Spalte gelöscht werden.
- **Anmerkung:** L^* ist also eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix

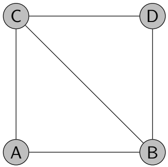
Satz von Kirchhoff

Die Anzahl der Spannbäume von G ist gegeben durch

$$\det L^*$$

Anzahl an Spannbäumen

Beispiel: Anzahl der Spannbäume vom Graphen



$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir $L^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\det L^* = 8$.