Graphentheorie: Planare Graphen

Programmieren und Software-Engineering
Theorie

2. September 2025

Planare Graphen (1)

Definition (Planarer Graph)

Ein *planarer* oder *plättbarer* Graph kann in der Ebene ohne überkreuzende Kanten gezeichnet werden.

Eulerscher Polyedersatz

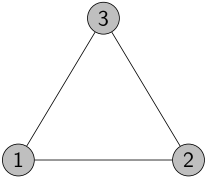
Der *Eulerscher Polyedersatz* lautet auf zusammenhängende und planare Graphen übertragen

$$|V| - |E| + |F| = 2,$$

wobei $|F|$ die Anzahl der "Flächen" (engl. Facets) bedeutet.
Wichtig: Die "äußere" Fläche (alles um den Graphen herum) ist mitzuzählen!

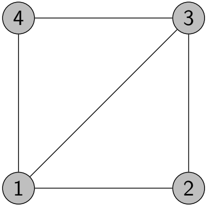
Planare Graphen (2)

Beispiel: Graph mit 3 Knoten und 3 Kanten:



Wir erhalten 3 Knoten - 3 Kanten + 2 Flächen = 2

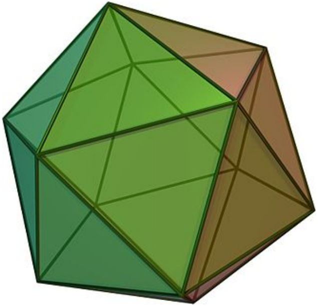
Beispiel: Graph mit 4 Knoten und 5 Kanten:



Wir erhalten 4 Knoten - 5 Kanten + 3 Flächen = 2

Planare Graphen (3)

Der Eulerscher Polyedersatz gilt allgemein für konvexe Polyeder, z.B. dem *Ikosaeder*

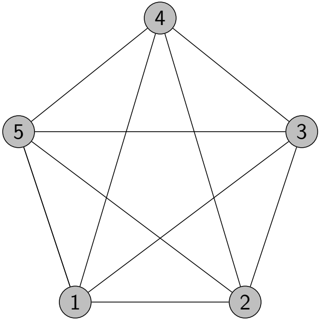


Satz von Kuratowski

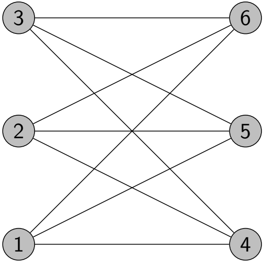
Satz von Kuratowski

Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keinen Teilgraphen besitzt, der ein Unterteilungsgraph des K_5 oder $K_{3,3}$ ist.

Vollständiger Graph K_5:



Vollständiger bipartiter Graph $K_{3,3}$:



Beweis: K_5 nicht planar (*)

Beweis (indirekt): für jeden planaren Graphen gilt der Eulerscher Polyedersatz $|V| - |E| + |F| = 2$.
Wir nehmen also an, dass der K_5 planar ist, und somit die Eulersche Formel gilt.[1] Es gilt $|V| = 5, |E| = 10$ und somit $|F| = 7$. Jede Fläche wird von mindestens drei Kanten begrenzt. Andererseits kommt jede Kante *genau zwei mal* als Begrenzung vor. Es gilt also:

$$|E| \geq \lceil \frac{3 \cdot |F|}{2} \rceil.$$

Setzen wir nun die konkreten Werte ein, erhalten wir $|E| \geq 11$, was im Widerspruch zu $|E| = 10$ steht.
Somit ist der K_5 *nicht* planar. □

[1] Vergleiche mit Aussagenlogik: $\frac{\neg a \rightarrow b, \neg b}{a}$. In diesem Fall kann der Graph planar sein oder eben nicht. Es gibt keine weitere Möglichkeit. Wenn somit die Annahme er sei planar mit korrekten logischen Umformungen zu einem Widerspruch führt, dann muss genau das Gegenteil der Annahme wahr sein: er ist *nicht* planar.

Beweis: $K_{3,3}$ nicht planar (*)

Beweis (indirekt): Der Beweis verläuft analog zum vorigen Beweis. Es gilt $|V| = 6, |E| = 9$ und somit muss gelten $|F| = 5$.
Im bipartiten Graphen muss jedoch jede Fläche von mindestens vier Kanten begrenzt werden. $|E| \geq \frac{4 \cdot |F|}{2}$ führt für den $K_{3,3}$ somit zu $|E| \geq 10$. Dies steht wieder im Widerspruch zu $|E| = 9$. □

Beweis: $K_{3,3}$ nicht planar (*)

Beweis (indirekt): Der Beweis verläuft analog zum vorigen Beweis. Es gilt $|V| = 6, |E| = 9$ und somit muss gelten $|F| = 5$.
Im bipartiten Graphen muss jedoch jede Fläche von mindestens vier Kanten begrenzt werden. $|E| \geq \frac{4 \cdot |F|}{2}$ führt für den $K_{3,3}$ somit zu $|E| \geq 10$. Dies steht wieder im Widerspruch zu $|E| = 9$. $\square$

Wir haben bisher gezeigt:

Ist G planar $\rightarrow$ G enthält nicht $K_{3,3}$ oder K_5.

Beweis: $K_{3,3}$ nicht planar (*)

Beweis (indirekt): Der Beweis verläuft analog zum vorigen Beweis. Es gilt $|V| = 6, |E| = 9$ und somit muss gelten $|F| = 5$.
Im bipartiten Graphen muss jedoch jede Fläche von mindestens vier Kanten begrenzt werden. $|E| \geq \frac{4 \cdot |F|}{2}$ führt für den $K_{3,3}$ somit zu $|E| \geq 10$. Dies steht wieder im Widerspruch zu $|E| = 9$. $\square$

Wir haben bisher gezeigt:

Ist G planar $\rightarrow$ G enthält nicht $K_{3,3}$ oder K_5.

Um den Satz von Kuratowski tatsächlich zu beweisen, muss auch die "andere Richtung" bewiesen werden:

Ist G planar $\leftarrow$ G enthält nicht $K_{3,3}$ oder K_5 (bzw. deren Unterteilungsgraphen)

Dies ist jedoch etwas schwieriger. Der Beweis kann über vollständige Induktion geführt werden. Erst dann ist tatsächlich gezeigt, dass gilt:

Ist G planar $\leftrightarrow$ G enthält nicht $K_{3,3}$ oder K_5 (bzw. deren Unterteilungsgraphen)