Graphentheorie: Eigenschaften

Programmieren und Software-Engineering
Theorie

2. September 2025

Distanz (ungewichteter Graph)

Definition (Distanz)

Die Distanz (Abstand) zweier Knoten u und v in einem Graphen ist die Länge des kürzesten Weges $P(u, v)$, also

$$d(u, v) = \min_{P(u,v)} |P(u, v)|.$$

- Falls kein Weg zwischen u und v existiert, so gilt

$$d(u, v) = \infty$$

- Der Abstand eines Knoten zu sich selbst ist 0, also

$$d(u, v) = 0 \leftrightarrow u = v.$$

- In ungerichteten Graphen gilt $d(u, v) = d(v, u)$ für alle $u, v \in V$.

Distanz (gewichteten Graphen)

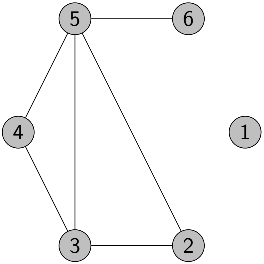
In einem gewichteten Graphen gilt für die Distanz

$$d(u, v) = \min_{P(u,v)} \sum_{e \in P(u,v)} w(e),$$

also die Summe der Kantengewichte über den kürzesten Pfad von u nach v. Die folgenden Definitionen können für beide Varianten (ungewichtete und gewichtete Graphen) verwendet werden.

Distanz (Beispiel)

Graph G mit 6 Knoten



$d(1,1) = 0$

$d(1,2) = \infty$

$d(2,6) = 2$

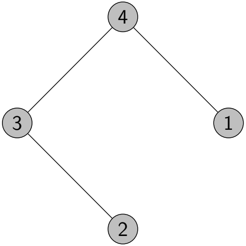
$d(3,4) = 1$

Exzentrizität

Definition (Exzentrizität)

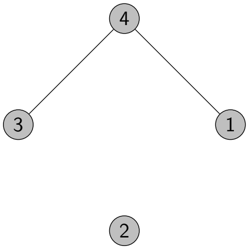
Die Exzentrizität $ex(v)$ eines Knoten $v \in V$ eines ungerichteten, *zusammenhängenden* Graphen $G = (V, E)$ ist die Distanz zum entferntesten Knoten von v in G

Zur Ermittlung der Exzentrizitäten muss der maximale Abstand jedes Knoten im Graph G bestimmt werden.



Knoten	Exzentrizität	Entferntester Knoten
1	3	2
2	3	1
3	2	1
4	2	2

Exzentrizität (2)



In einem nicht zusammenhängenden Graphen gibt es zu jedem Knoten mindestens einen Knoten der nicht erreichbar ist.

Der Wert für die Exzentrizität ist in diesem Fall für alle Knoten mit ∞ definiert.

$$\forall v \in V : ex(v) = \infty$$

WH: Chinese Postman Problem

- (Geschlossene) Eulersche-Linien haben große praktische Bedeutung für
  - Abfallentsorgung
  - Schneeräumung
  - Briefzustellung
- Ein Straßengraph ist jedoch nicht unbedingt *Eulersch*
- Ebenso spielt die Länge der einzelnen Straßen eine Rolle!
- **Chinese Postman Problem:**
  - Benannt nach chinesischem Mathematiker Mei Ko Kwan (*1934)
  - **Gegeben:** *gewichteter* Graph (nicht notwendigerweise Eulersch)
  - **Ziel:** Finde kürzesten Zyklus im Graphen, der jede Kante *mindestens* einmal enthält

Einschub: Paarung/Matching

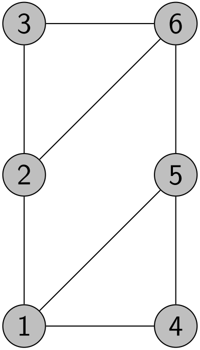
- Bildung von 2-elementigen Teilmengen ("Paaren") von Knoten

Definition (Paarung/Matching)

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Eine Menge $M \subseteq E$ heißt *Matching* (oder Paarung), wenn kein Knoten aus V zu mehr als einer Kanten aus M inzident ist.

- Paarungen heißen **vollständig**, wenn alle Knoten gepaart sind.
- In gewichteten Graphen sind meist Paarungen minimalen oder maximalen Gewichts von Interesse, wobei

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$$



Beispiel für ein (vollständiges) Matching in einem ungewichteten Graphen

Einschub: Paarung/Matching

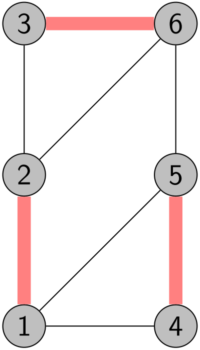
- Bildung von 2-elementigen Teilmengen ("Paaren") von Knoten

Definition (Paarung/Matching)

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Eine Menge $M \subseteq E$ heißt *Matching* (oder Paarung), wenn kein Knoten aus V zu mehr als einer Kanten aus M inzident ist.

- Paarungen heißen **vollständig**, wenn alle Knoten gepaart sind.
- In gewichteten Graphen sind meist Paarungen minimalen oder maximalen Gewichts von Interesse, wobei

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$$

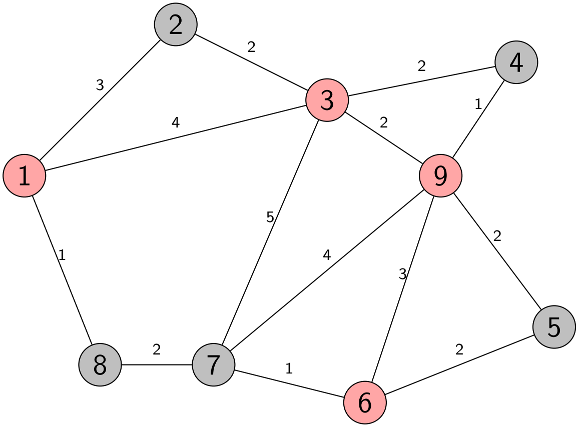


Beispiel für ein (vollständiges) Matching in einem ungewichteten Graphen

Chinese Postman Problem

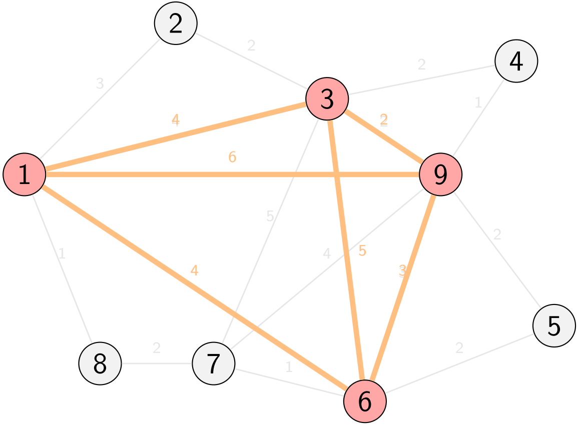
- Wähle alle Knoten mit ungeradem Grad
- Bilde vollständigen Graphen aus diesen Knoten
- Jeder Kante werden Kosten zugeordnet, die der Distanz der Knoten im ursprünglichen Graphen entsprechen
- Bilde kostenminimale *Paarung* von Knoten (ohne Details)
- Dupliziere Kanten entlang der kürzesten Wege der gepaarten Knoten im ursprünglichen Graphen
- Der resultierende Graph ist nun Eulersch, der Euler-Zyklus entspricht der kürzest möglichen geschlossenen Kantenfolge im ursprünglichen Graphen, die alle Kanten mindestens einmal enthält!

Beispiel: Chinese Postman Problem



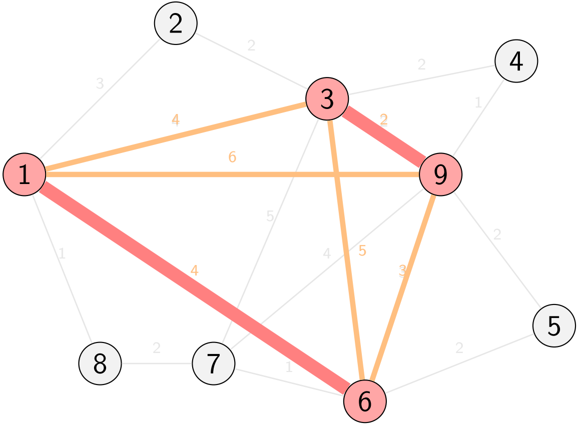
Die markierten Knoten haben ungeraden Grad, wodurch der Graph insgesamt *nicht* Eulersch ist.

Beispiel: Chinese Postman Problem



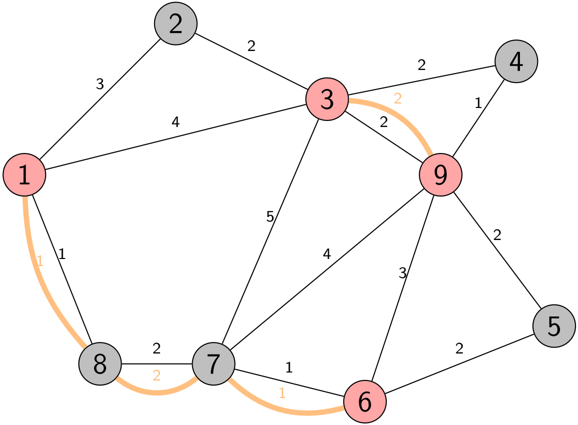
Bezüglich der “ungeraden” Knoten wird ein vollständiger Graph gebildet, dessen Kantengewichte den Distanzen im ursprünglichen Graphen entsprechen. ⇒ Bildung von kostenminimalem Matching.

Beispiel: Chinese Postman Problem



Bezüglich der “ungeraden” Knoten wird ein vollständiger Graph gebildet, dessen Kantengewichte den Distanzen im ursprünglichen Graphen entsprechen. ⇒ Bildung von kostenminimalem Matching.

Beispiel: Chinese Postman Problem



Alle Kanten entlang der kürzesten Pfade zwischen den gepaarten Knoten werden nun im ursprünglichen Graphen verdoppelt, wodurch dieser nun Eulersch wird!

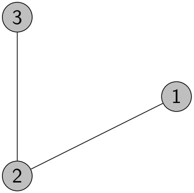
Durchmesser

Definition (Durchmesser)

Der Durchmesser $dm(G)$ eines Graphen G ist das Maximum der Exzentrizitäten aller Knoten von G.

Wenn G nicht zusammenhängend ist, so gilt $dm(G) = \infty$.

Beispiel: Graph mit $dm(g) = 2$



Knoten	Exzentrizität
1	2
2	1
3	2

Anmerkung: Das Maximum aller Exzentrizitäten im Beispielgraphen beträgt 2. Somit beträgt der Durchmesser $dm(G) = 2$

Radius (1)

Definition (Radius)

Der Radius $rad(G)$ eines Graphen G ist das Minimum aller Exzentrizitäten aller Knoten von G.

Für alle ungerichteten zusammenhängenden Graphen gilt:

$$rad(G) \leq dm(G) \leq 2 \cdot rad(G)$$

sowie

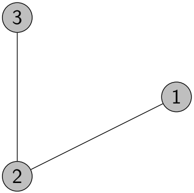
$$dm(G) \geq rad(G) \geq {}^{dm(G)}/_{2}$$

Anmerkung: Das heißt, der Radius kann maximal gleich groß sein wie der Durchmesser und muss mindestens halb so groß wie der Durchmesser sein.

Anmerkung: Wenn der Graph nicht zusammenhängend ist, ist der Radius unendlich ($rad(G) = \infty$).

Radius (2)

Beispiel: Graph mit $rad(G) = 1$



Knoten	Exzentrizität
1	2
2	1
3	2

Anmerkung: Das Minimum aller Exzentrizitäten im Beispielgraphen beträgt 1. Somit beträgt der Radius
$rad(G) = 1$

Zentrum (1)

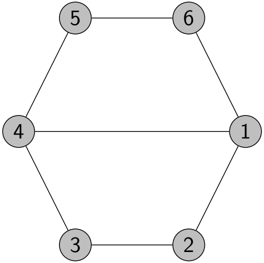
Definition (Zentrum)

In einem ungerichteten, zusammenhängenden Graphen G ist das Zentrum $Z(G)$ die Menge der Knoten $v \in V$ deren Exzentrizität dem Radius entspricht:

$$Z(G) = \{v \in V(G) : ex(v) = rad(G)\}$$

Zentrum (2)

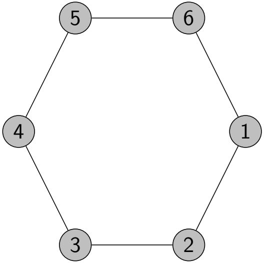
Beispiel: Graph G_1 mit 6 Knoten



Somit gilt: $dm(G_1) = 3, rad(G_1) = 2, Z(G_1) = \{1, 4\}$

Zentrum (3)

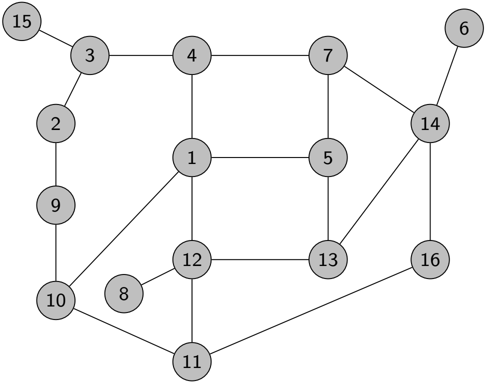
Beispiel: Graph G_2 mit 6 Knoten



Somit gilt: $dm(G_2) = 3, rad(G_2) = 3, Z(G_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

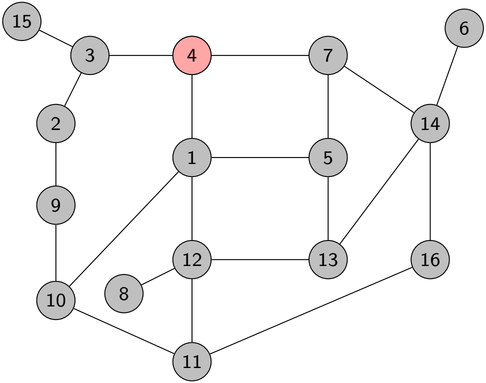
Zentrum (4)

Beispiel: In einer Stadt soll eine neue Feuerwache gebaut werden. Um im Brandfall eine optimale Anfahrtszeit zu gewährleisten, soll der Standort der Feuerwache so gewählt werden, dass auch das am weitesten entfernte Haus schnell zu erreichen ist.
Der Graph stellt die Stadt dar. Ein Haus wird durch einen Knoten und eine Straßenverbindung durch eine Kante symbolisiert. Aus diesem Graph lässt sich sehr rasch das Zentrum der Stadt berechnen.



Zentrum (4)

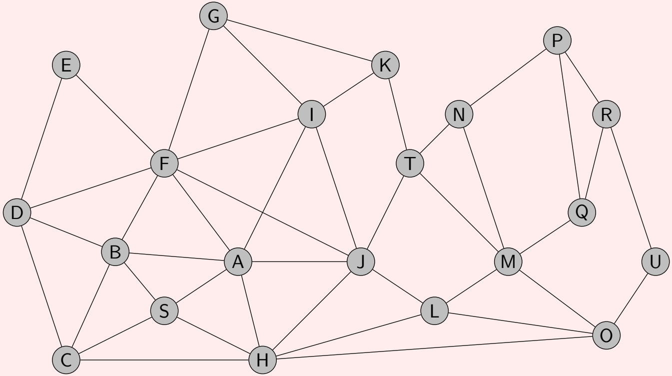
Beispiel: In einer Stadt soll eine neue Feuerwache gebaut werden. Um im Brandfall eine optimale Anfahrtszeit zu gewährleisten, soll der Standort der Feuerwache so gewählt werden, dass auch das am weitesten entfernte Haus schnell zu erreichen ist.
Der Graph stellt die Stadt dar. Ein Haus wird durch einen Knoten und eine Straßenverbindung durch eine Kante symbolisiert. Aus diesem Graph lässt sich sehr rasch das Zentrum der Stadt berechnen.



v	$ex(v)$	v	$ex(v)$
1	4	9	5
2	5	10	4
3	4	11	5
4	3	12	4
5	4	13	5
6	5	14	4
7	4	15	5
8	5	16	5

Aufgabe 5.11

Gegeben sei der Graph G:



1. Geben Sie die Exzentrizitäten zu allen Knoten an.
2. Bestimmen Sie den Radius $\mathrm{rad}(G)$.
3. Bestimmen Sie den Durchmesser $\mathrm{dm}(G)$.
4. Bestimmen Sie das Zentrum, und schreiben Sie die Knotenmenge $Z(G)$ auf.