Algorithmus von Dijkstra

Programmieren und Software-Engineering
Theorie

2. September 2025

Algorithmus von Dijkstra

Der Algorithmus von Dijkstra berechnet die kürzesten Wege in einem gewichteten Graphen mit $w_{ij} \geq 0$, für alle $[i, j] \in E$.

Grundidee:

- Ähnlichkeit zu DFS, jedoch andere Regeln für die Auswahl des nächsten Knoten.
- Ein Aufruf von Dijkstra berechnet die kürzesten Wege von einem Startknoten zu allen anderen Knoten des Graphen.
- In jedem Schritt werden **Zwischenergebnisse** $\delta_k, k \in V$ berechnet, bzw. aktualisiert.
- Diese Zwischenergebnisse sind die Länge des kürzesten *bisher gefundenen* Weges bis zu diesem Knoten.
- Wiederhole (bis alle Knoten abgeschlossen):
  1. Wähle Knoten k mit minimalem δ_k und schließe diesen ab.
  2. Speichere Verweis auf direkten Vorgänger.
  3. Aktualisiere die Werte δ_k für noch nicht abgeschlossene Nachbarknoten von k.

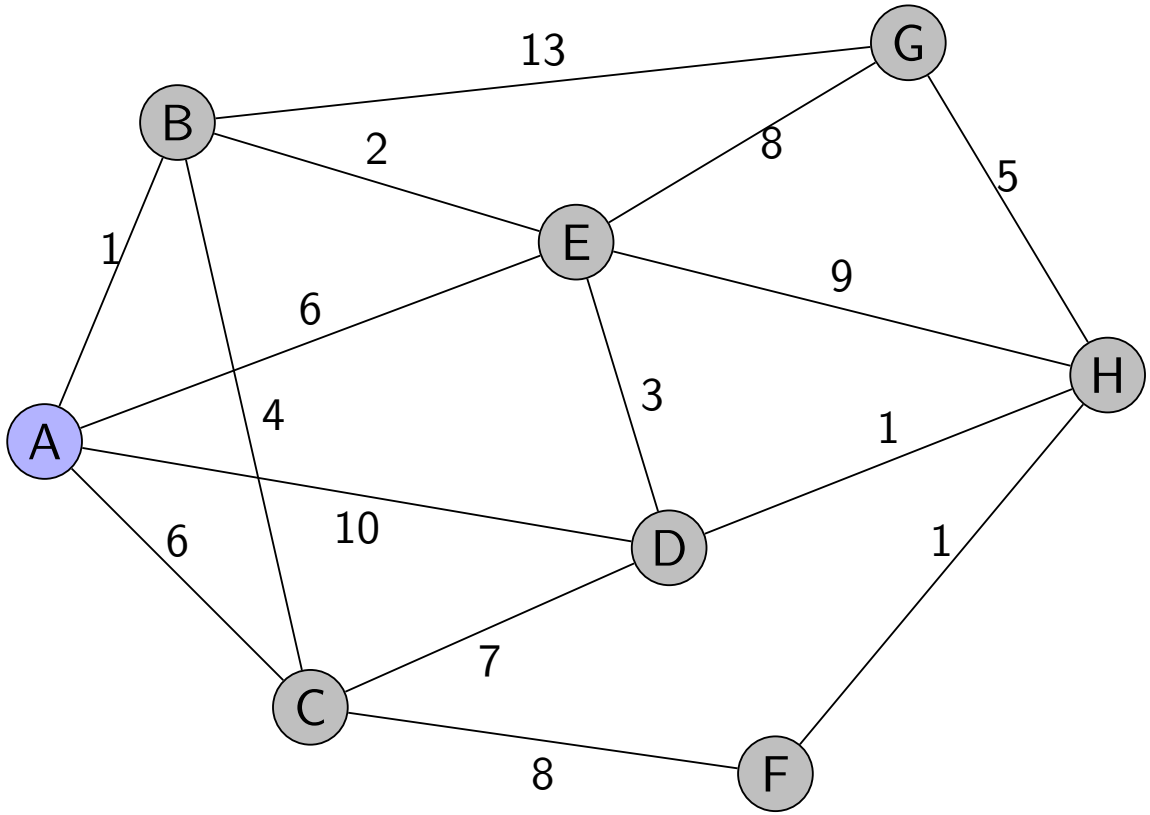
Algorithmus von Dijkstra

Algorithm 1: DIJKSTRA

Data: Graph G mit $w_{ij} \geq 0$ für alle $(i,j) \in E(G)$
Data: Startknoten s

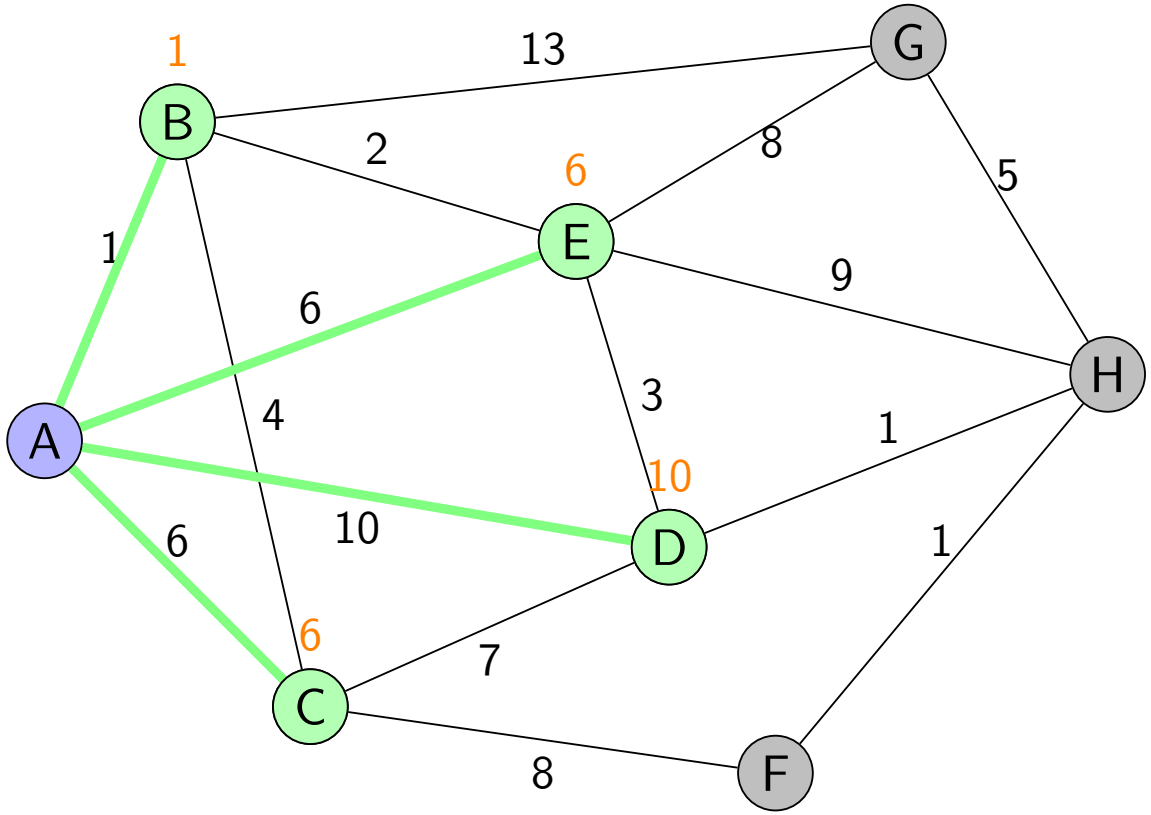
```
1  ∀v ∈ V : δ_v ← ∞;
2  δ_s ← 0;
3  Prioritätswarteschlange Q befüllt mit allen Knoten ;
4  while Q ≠ ∅ do
5      u ← Q.getMin();  // entnimmt Knoten u mit kleinstem δ_u
6      Fertigstellung von Knoten u;
7      Speichere Verweis auf direkten Vorgänger von u;
8      for all (u, v) ∈ E, v noch nicht fertiggestellt do
9          if δ_v > δ_u + w_uv then
10             δ_v ← δ_u + w_uv;
```

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



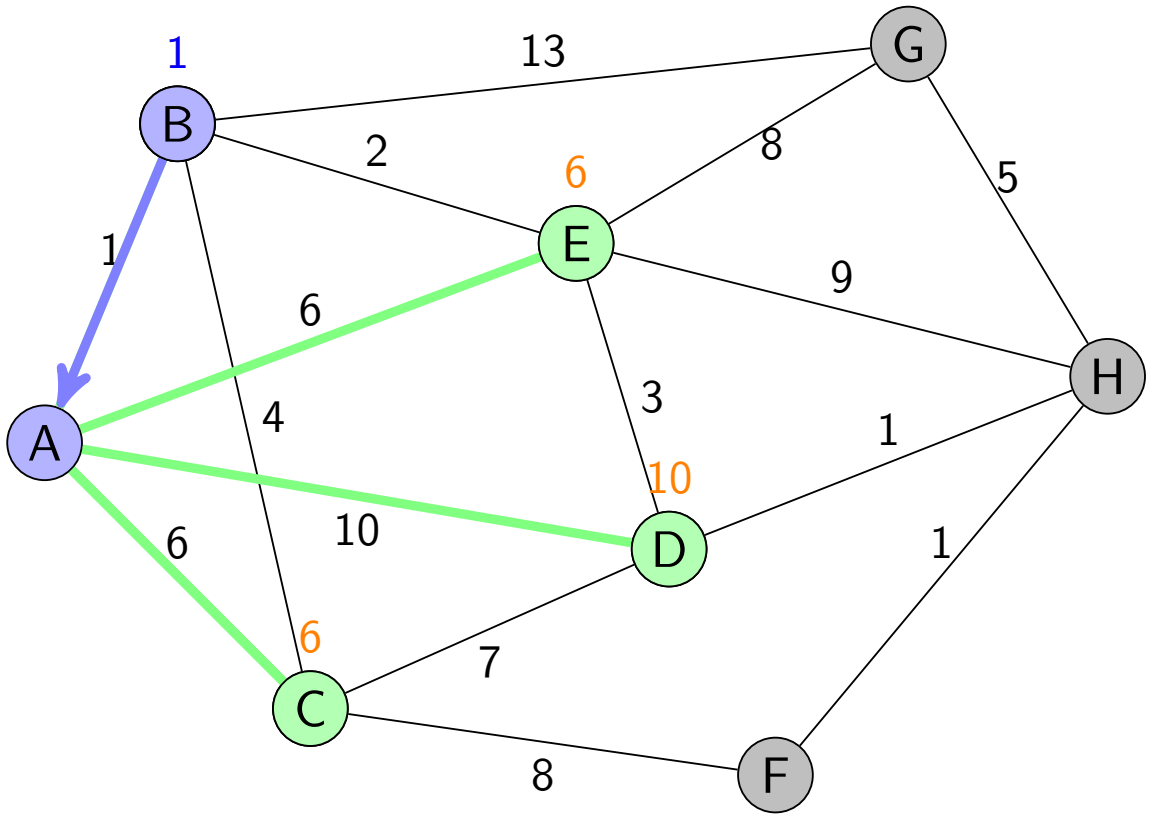
Wir suchen den kürstesten Weg vom Knoten A zum Knoten H. Im ersten Schritt wird der Startknoten "fertiggestellt".

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



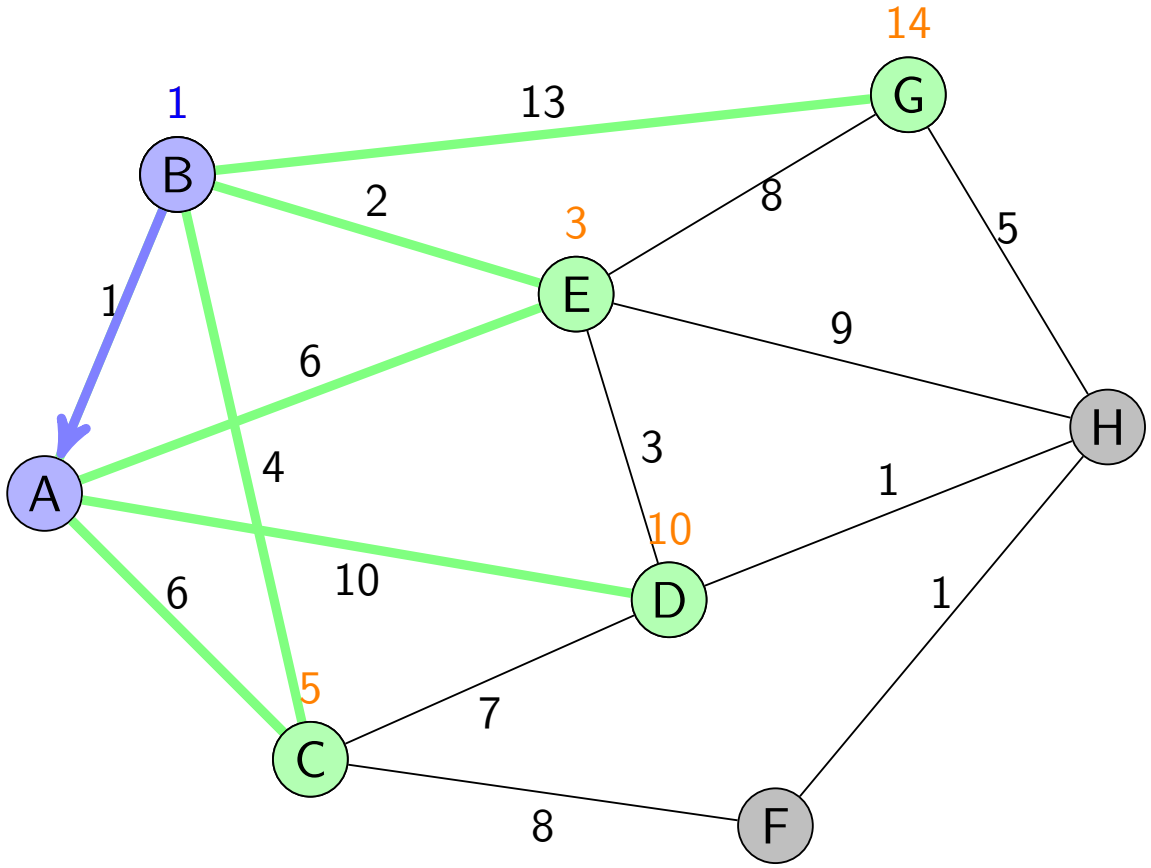
Im nächsten Schritt werden die Nachbarknoten B, C, D und E entdeckt. Die Zwischenwerte werden wie folgt berechnet:
$\delta_A = 0, \delta_B = \delta_A + 1 = 1, \delta E = \delta_A + 6 = 6, \delta_D = \delta_A + 10 = 10, \delta_C = \delta_A + 6 = 6.$

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



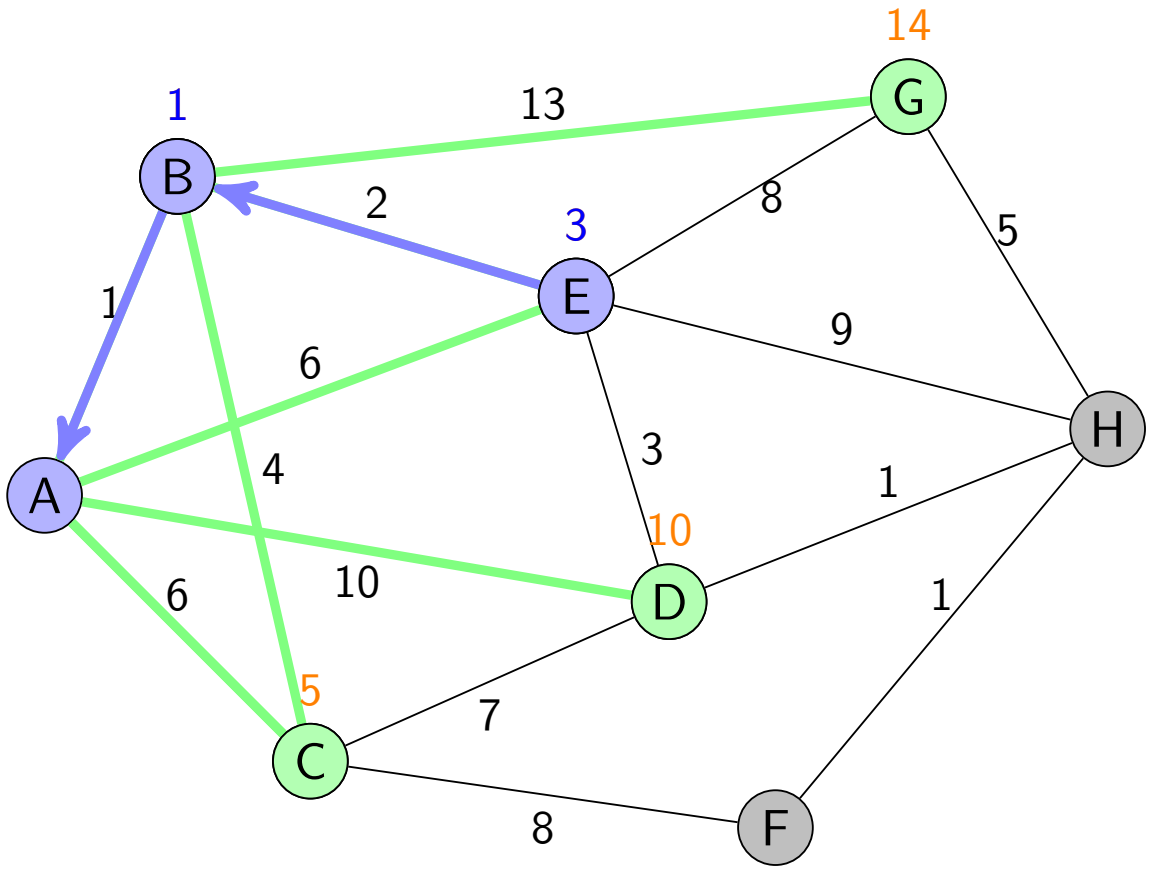
Nun wird der Knoten v mit kleinstem δ_v fertiggestellt. Im konkreten Beispiel ist dies Knoten B.

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



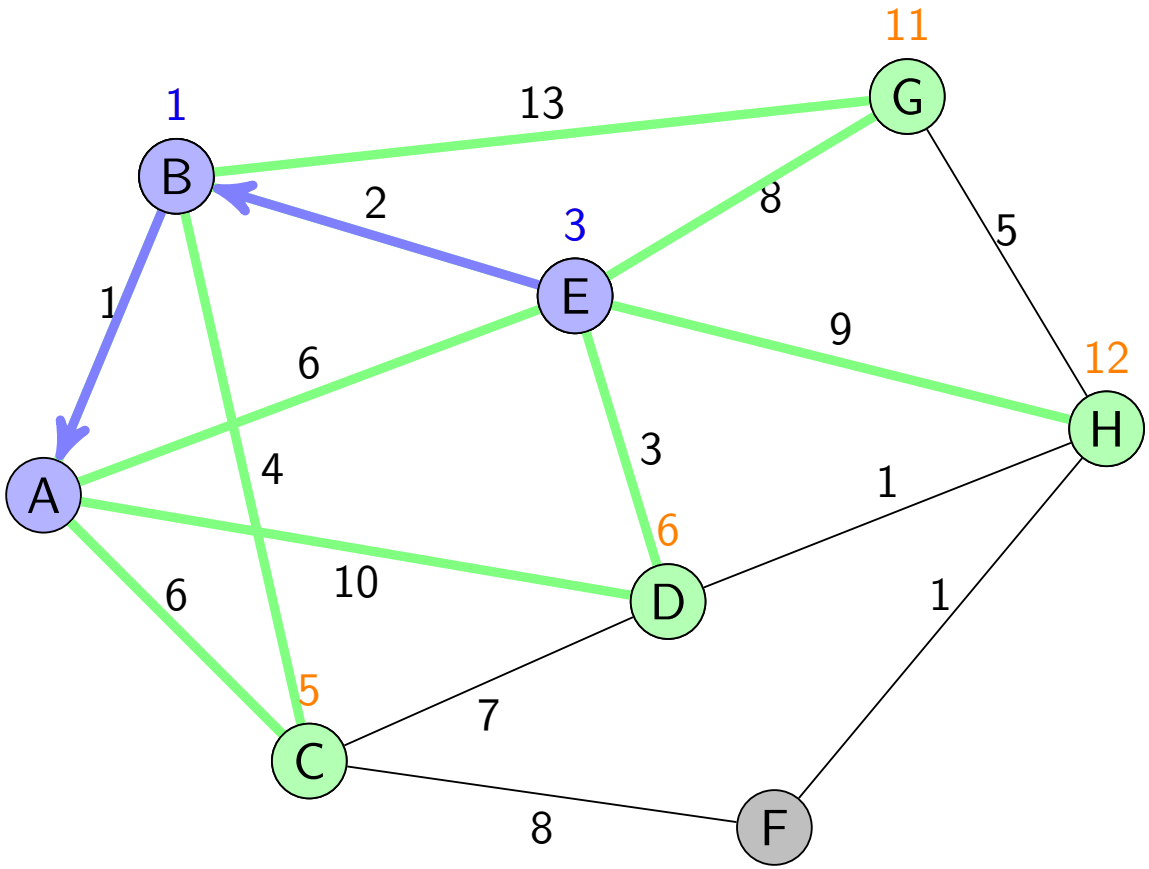
Ausgehend vom letzten fertiggestellten Knoten (B) werden nun neue Zwischenergebnisse für C, E und G berechnet. Wir erhalten $\delta_G = 1 + 13 = 14, \delta_E = 1 + 2 = 3, \delta_C = 1 + 4 = 5$. Für die Knoten C und E erhalten wir kleinere Werte als die bisher gefundenen.

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



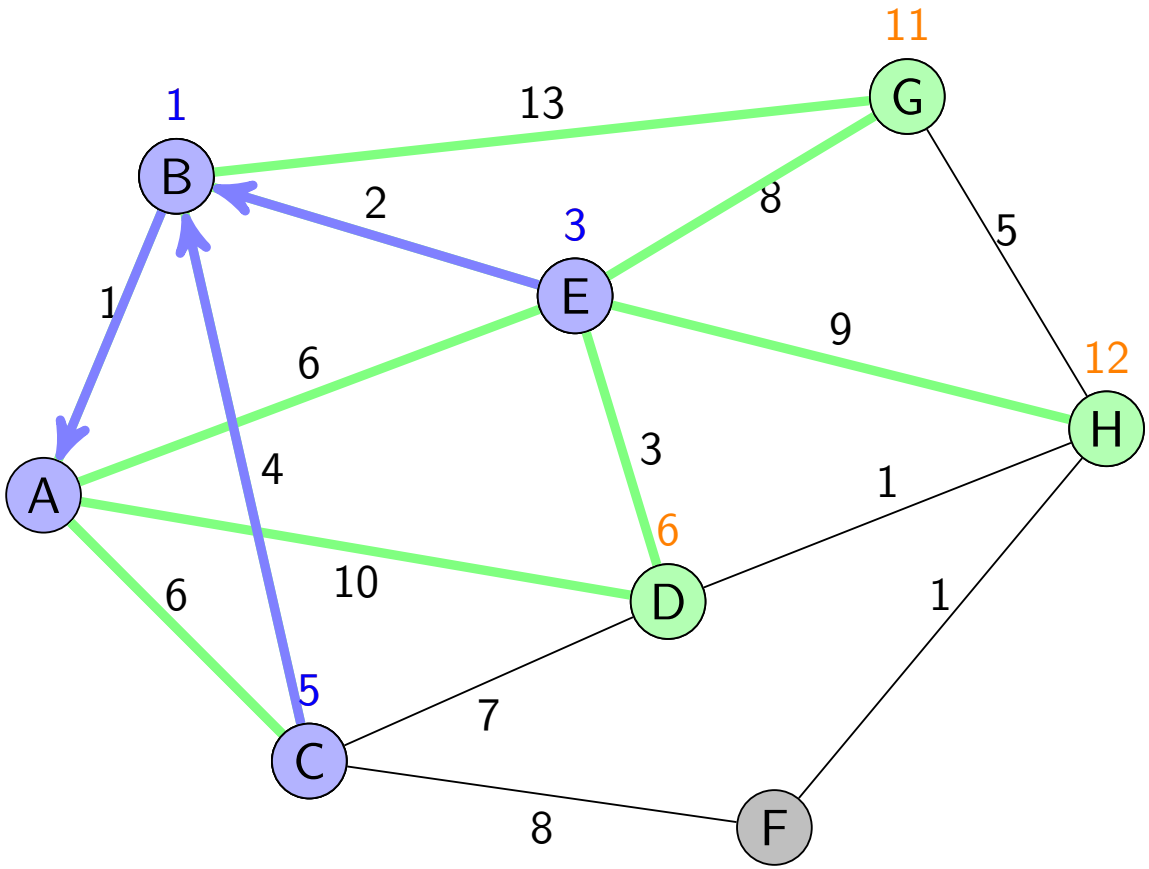
Knoten E wird fertiggestellt. Bei fertiggestellten Knoten merkt man sich wo man hergekommen ist (daher die blaue Kante).

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



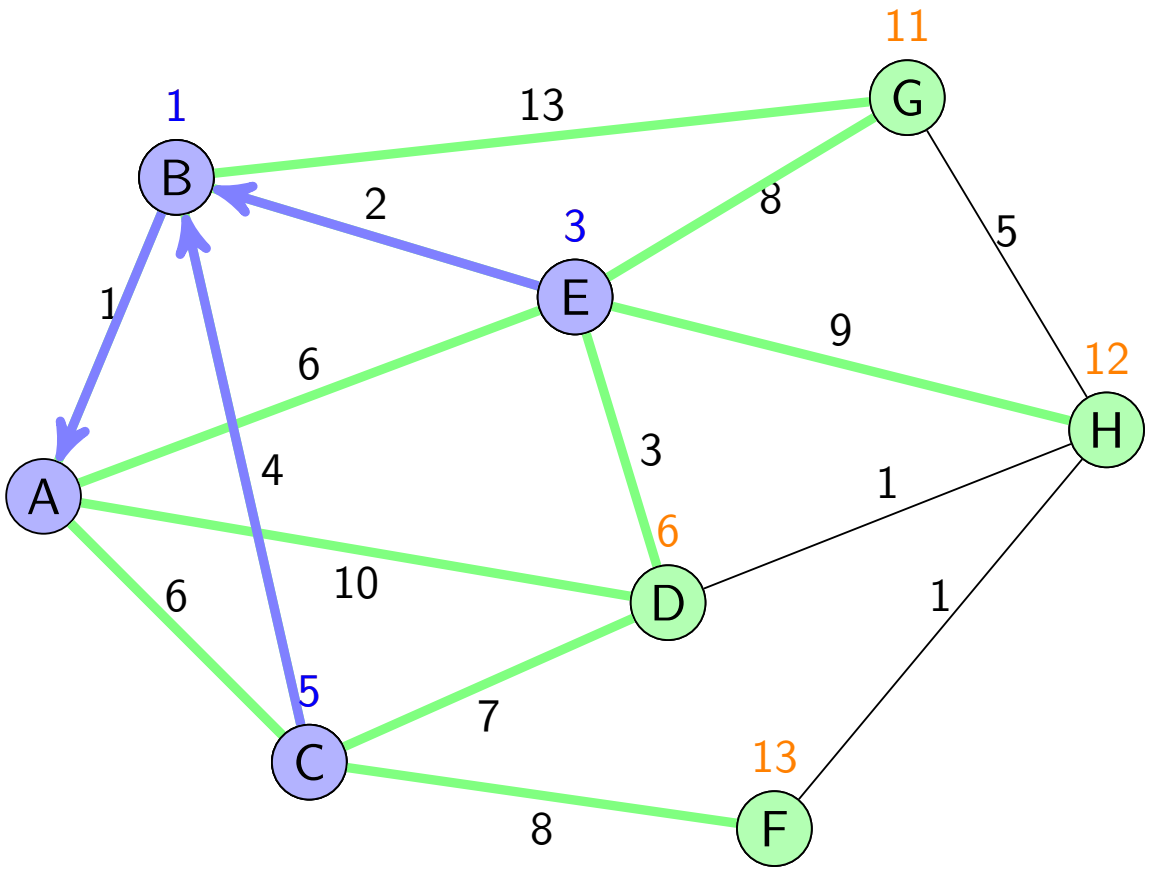
Berechnung neuer Zwischenergebnisse für D, G und H.

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



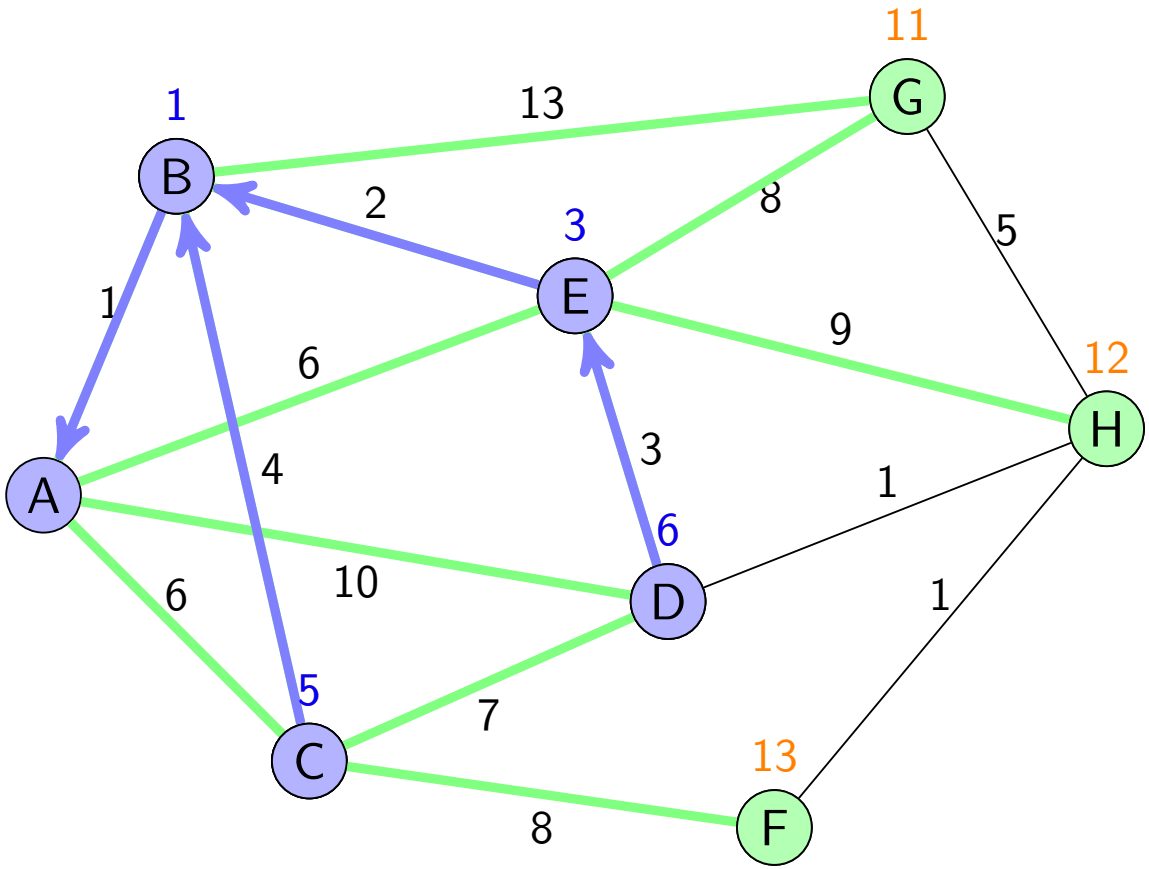
Knoten C wird fertiggestellt, da er nun den kleinsten Zwischenwert δ hat.

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



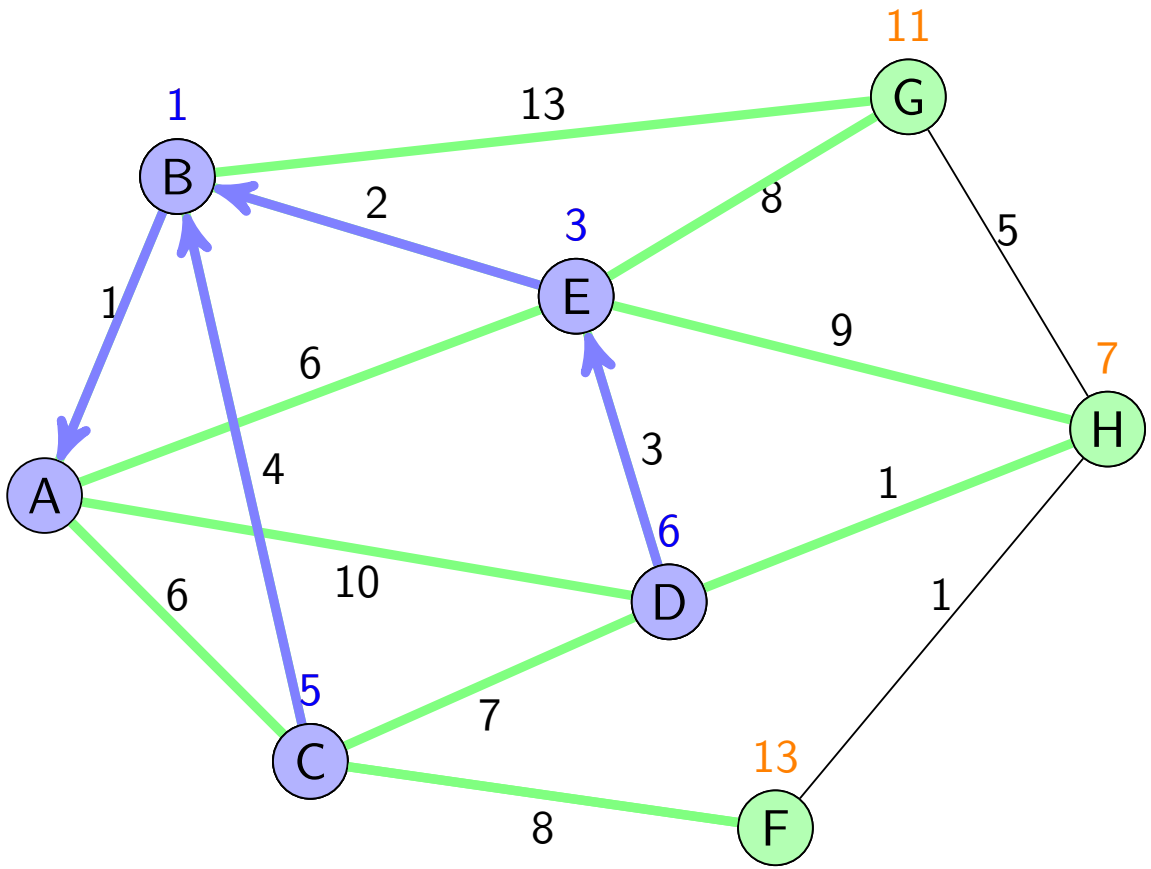
Ausgehend von C werden die Werte δ_D und δ_F berechnet. Da $5 + 7 > 6$ kommt es bei δ_D zu keiner Änderung.

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



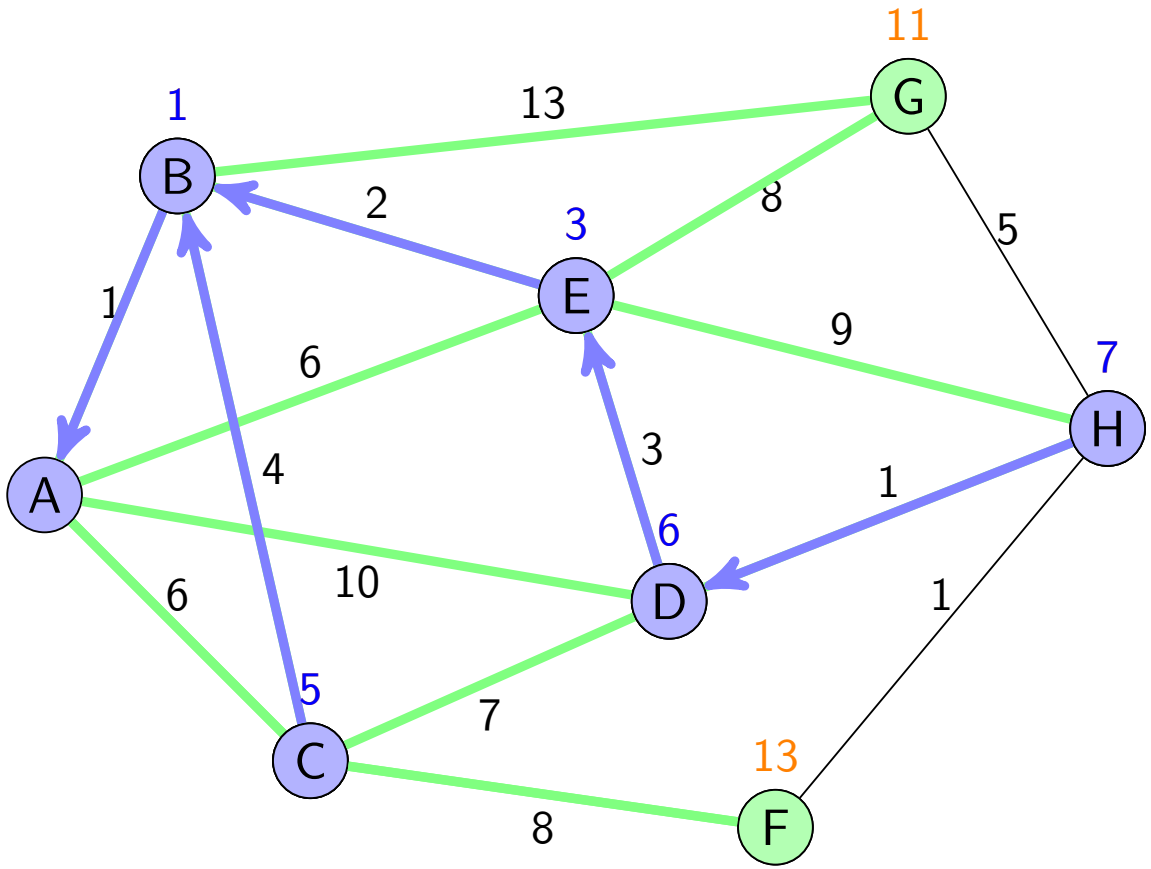
Fortgefahren wird mit Knoten D, da kleinstes δ.

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



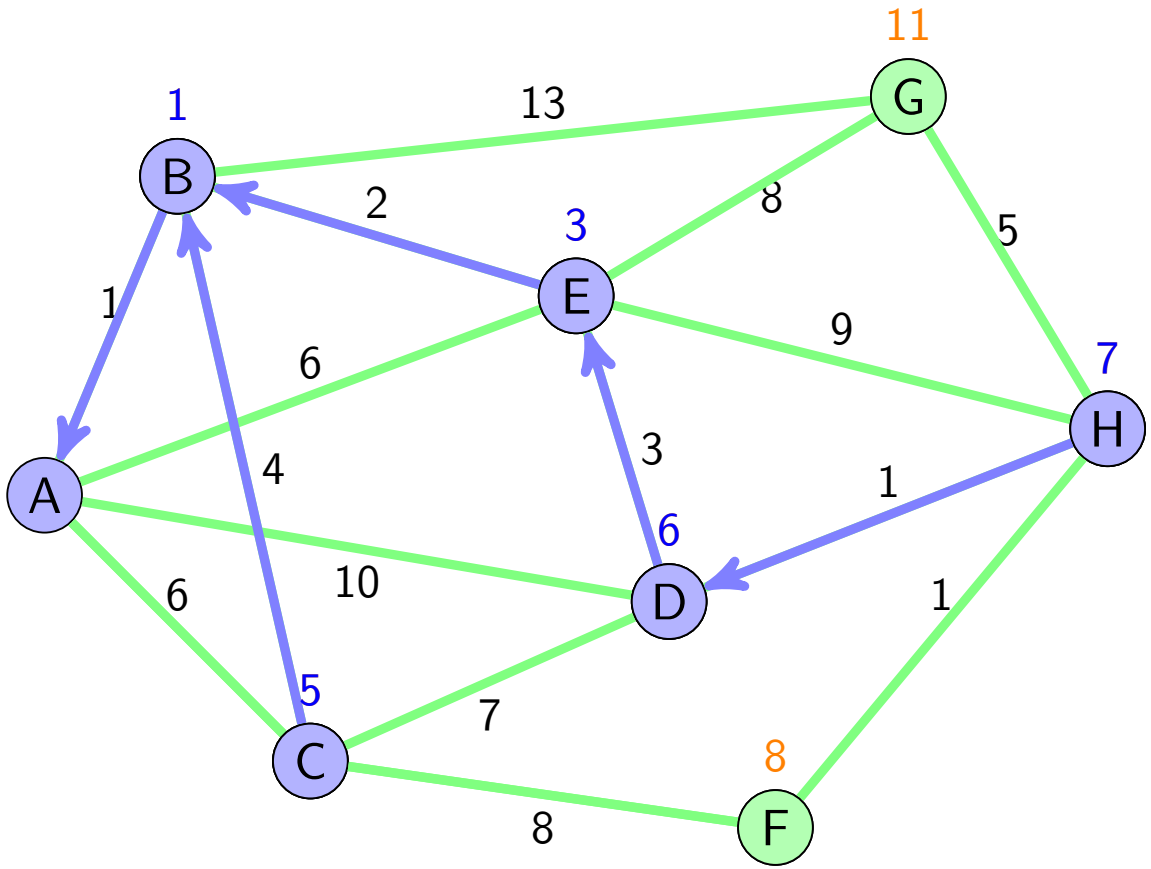
δ_H wird aktualisiert.

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



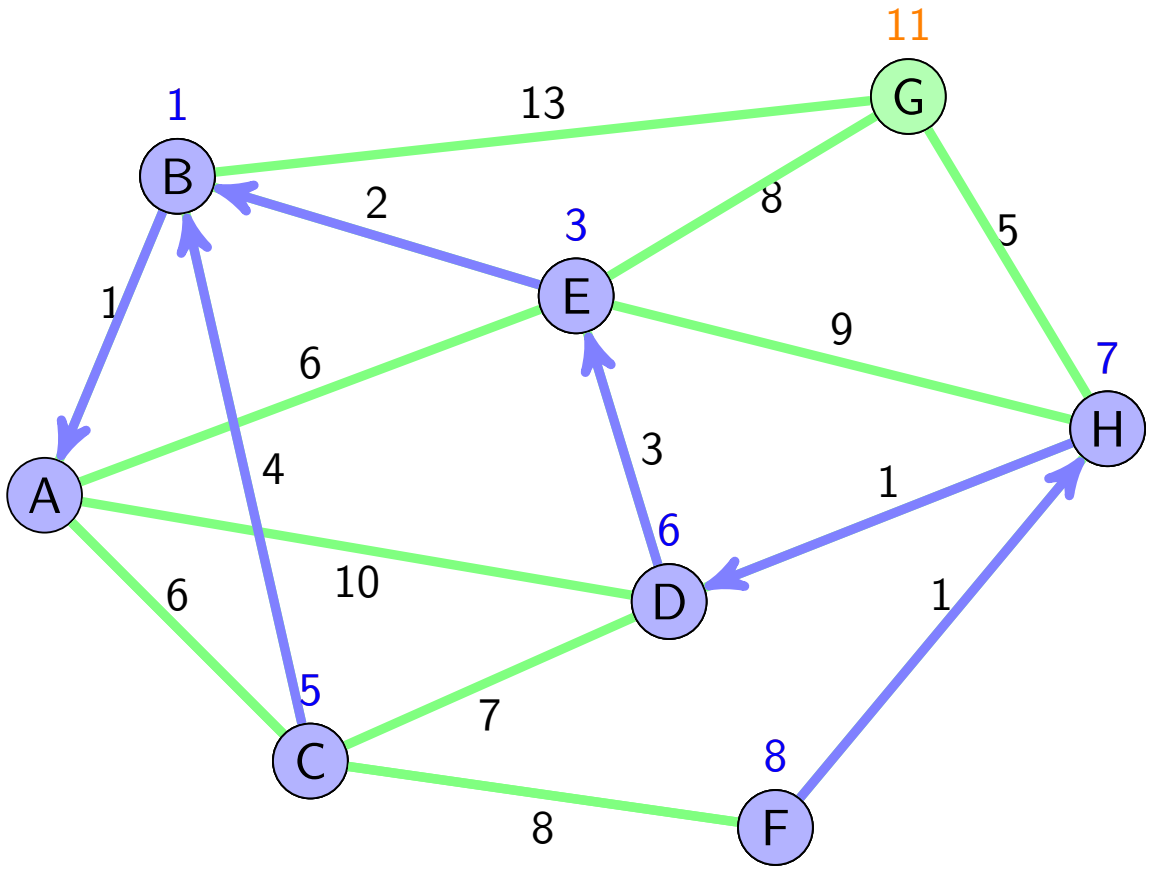
H wird fertiggestellt.

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



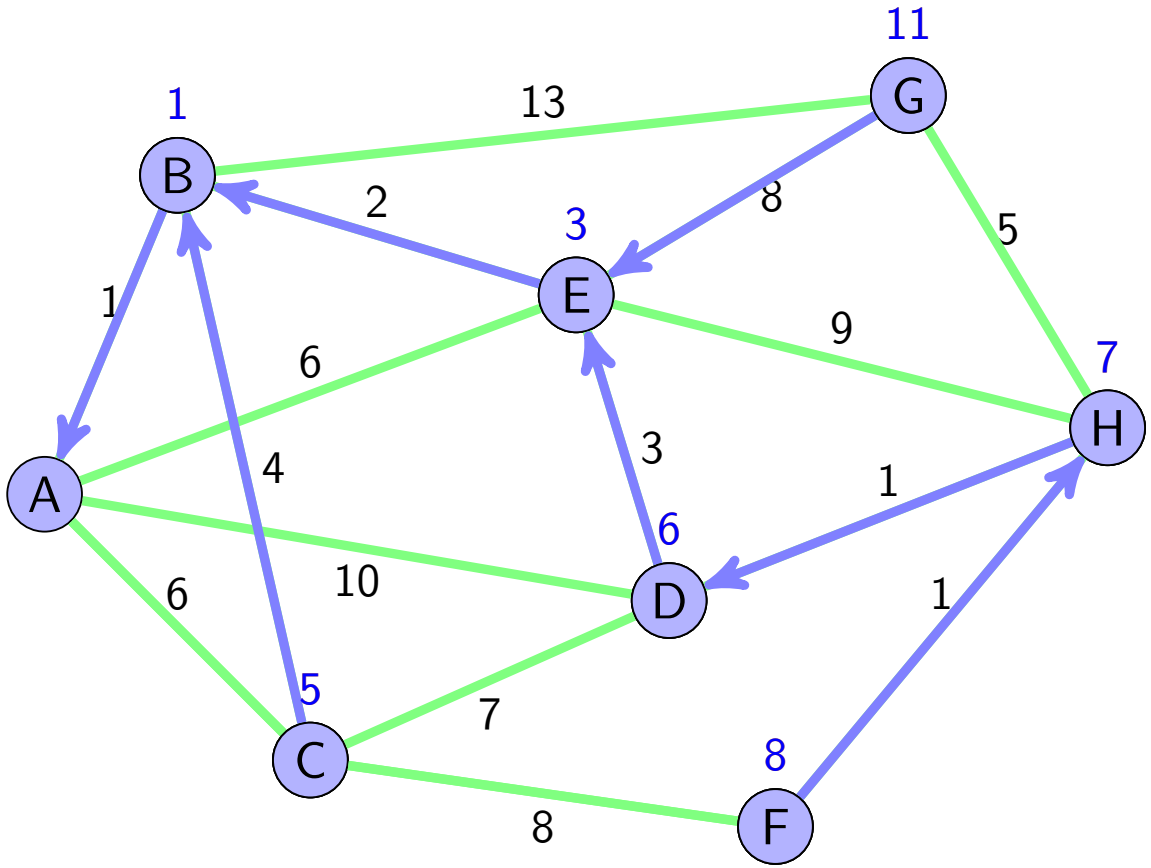
Update von δ_F und δ_G, wobei nur δ_F tatsächlich geändert wird.

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



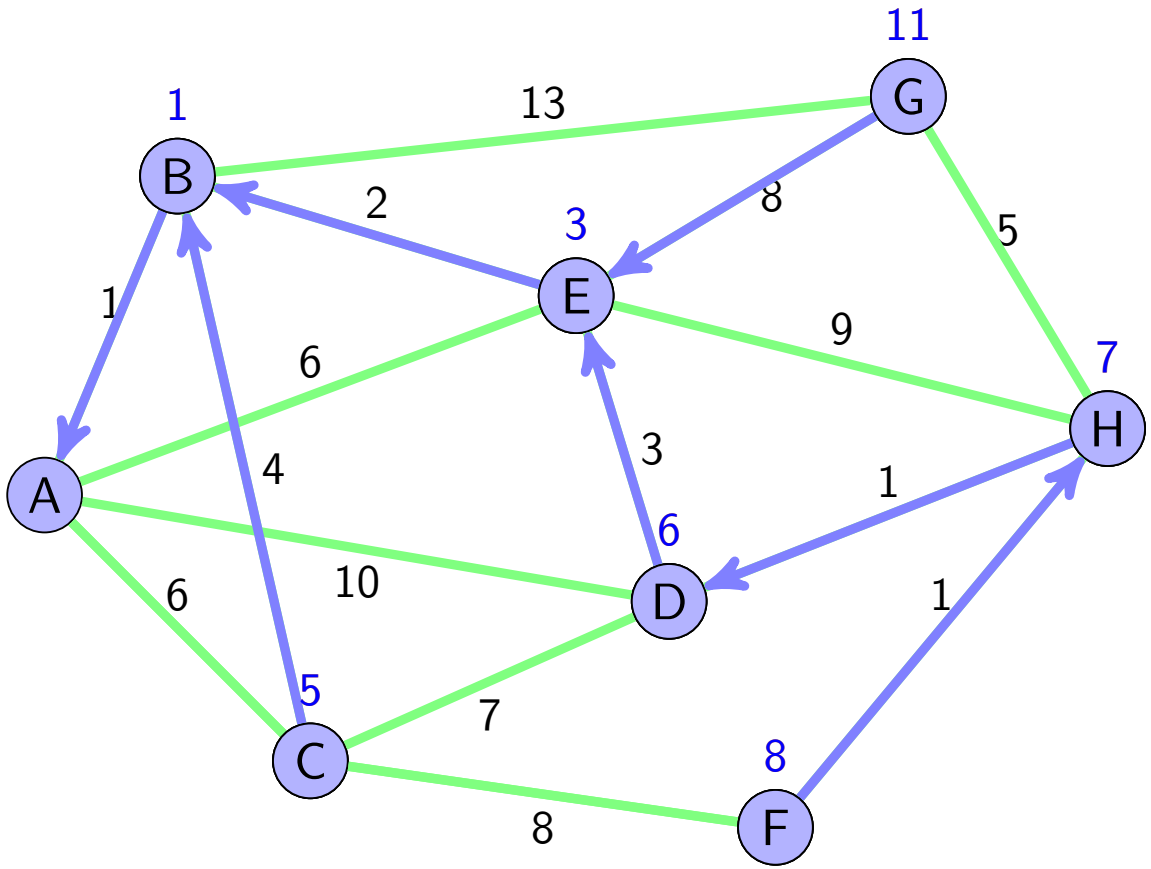
F wird fertiggestellt.

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



G wird fertiggestellt (Vorgänger *E*).

Algorithmus von Dijkstra: Beispiel



Die `blauen Kanten` bilden einen Wurzelbaum, der die kürzesten Wege vom Startknoten zu jedem Knoten enthält.

Algorithmus von Dijkstra

- Die `blauen Kanten` bilden einen Wurzelbaum, der die kürzesten Wege vom Startknoten zu jedem Knoten enthält.
- Die Berechnung des kürzesten Weges von einem Startknoten zu einem Zielknoten beinhaltet also die Berechnung der kürzesten Wege vom Startknoten zu *allen* anderen Knoten.

Algorithmus von Dijkstra – Laufzeitanalyse

Mit $n = |V|$ und $m = |E|$ können wir die Laufzeiteigenschaften angeben. Diese hängen von der konkreten Umsetzung der Prioritätswarteschlange Q ab.

Operation		Queue Implementierung		
Name	Anzahl	Liste	Heap	Fibonacci Heap[1]
decreaseKey [10]	m	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(1)$
getMin [5]	n	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
create [3]	1	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
Gesamt		$O(n^2 + m)$ $= O(n^2)$	$O((n+m)\log n)$	$O(n \log n + m)$

Anmerkung: In der Spalte ganz links ist in eckigen Klammern auf die Zeile der jeweiligen Operation im Pseudocode verwiesen!

[1] amortisierte Laufzeit