Graphentheorie: Einleitung

Programmieren und Software-Engineering
Theorie

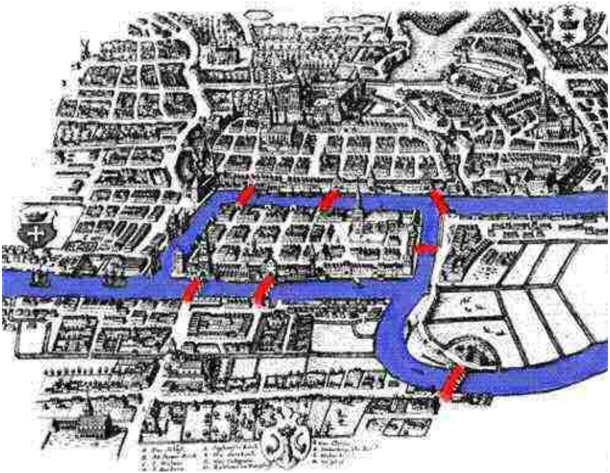
2. September 2025

Geschichte

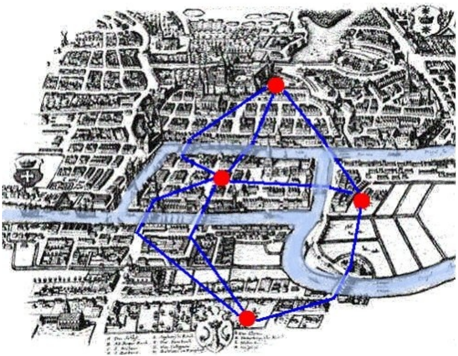
Anfänge der Graphentheorie 1736:

Leonhard Euler untersucht das *"Königsberger Brückenproblem"*

Fragestellung: Gibt es einen Weg der jede der sieben Brücken über den Fluss Pregel *genau einmal* benutzt?

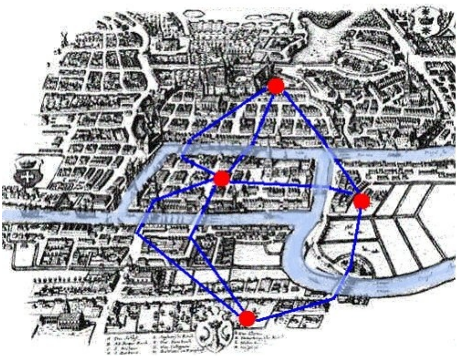


Euler modellierte erstmals eine Problemstellung mit einem **Graphen**



Die roten Kreise werden als *Knoten* bezeichnet, die blauen Verbindungen als *Kanten*.

Euler modellierte erstmals eine Problemstellung mit einem **Graphen**

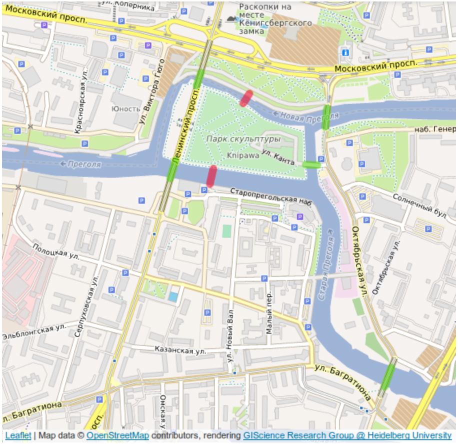


Die roten Kreise werden als *Knoten* bezeichnet, die blauen Verbindungen als *Kanten*.

Euler fand heraus: so ein Rundgang existiert nicht!

Seit 1946 trägt Königsberg den Namen *Kaliningrad* und ist eine russische Exklave nördlich von Polen.

Von den historischen sieben Brücken existieren heute nur noch fünf!



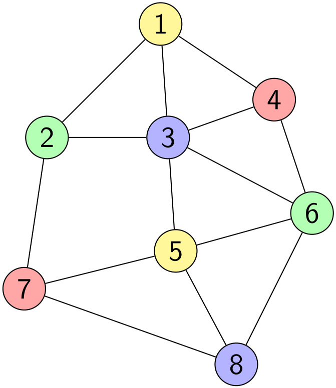
Anwendungen

Navigationssysteme

- Berechnung von kürzesten Wegen in Navigationssystemen
- Straßennetz wird als Graph repräsentiert

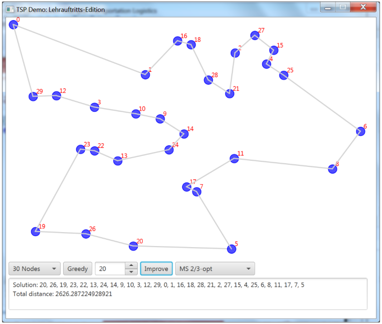
Mobilfunk

- Frequenzplanung in der Mobilfunkindustrie
- Interferenzen bei gleichen Frequenzen und nahen Senderstandorten
- Modellierung durch Graphen:
  - Ordne jedem Knoten eine Frequenz ("Farbe") zu
  - Benachbarte Knoten dürfen nicht die selbe Farbe haben
  - Finde minimale Anzahl an Farben: Optimierungsproblem



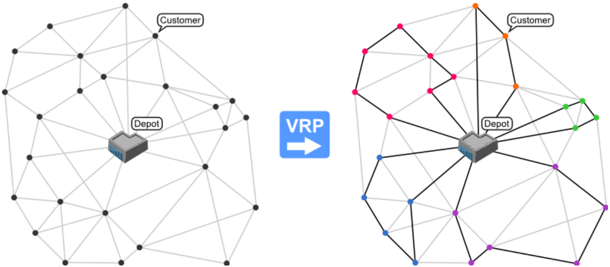
Problem des Handlungsreisenden

- "Travelling Salesman Problem" (TSP)
- Archetypisches Optimierungsproblem auf Graphen
- Problemstellung: Handlungsreisender möchte bestimmte Orte jeweils einmal besuchen
- Gesucht: Kürzester Weg
- Extrem schwierig (optimal) zu lösen.
- Fundamentale Bedeutung für viele Anwendungen in Logistik, Verbindungen auf Leiterplatten



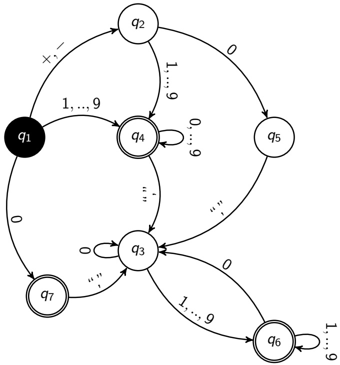
Vehicle Routing Problem

- Ähnlich zu TSP, jedoch ist hier auszuwählen welches Fahrzeug einer vorgegebenen Flotte welchen Ort (Kunden) anfährt
- Häufiges Problem in der Transportlogistik
- Ebenso extrem schwierig zu lösen: deshalb meist Anwendung von Heuristiken (teilweise auf Zufallsoperationen basierende Näherungsverfahren)



Endlicher Automat (Finite State Machine)

Erkennung einer rationalen Zahl (z.B. -0,425) durch einen endlichen Automaten.
Nicht gültig wären ("00,4" oder "-,3" oder "3,000" oder "01,")



⇒ Mehr dazu im Sommersemester!

Weitere Einsatzgebiete

- Theoretische Informatik, formale Sprachen, Compilerbau
- Datenstrukturen (beim Programmieren)
- Analyse von Abhähgigkeiten, Prozessplanung, Betriebssysteme
- Standortplanung
- Kommunikationsnetzwerke
- Schneeräumung, Postzustellung, Krankentransport
- Netzwerkdesign: Telekommunikation, Energie, Luftverkehr
- Biomedizin, Bioinformatik
- Produktionsplanung
- Modellierung von Teilproblemen in zahlreichen weiteren Aufgabestellungen

Mengen

Definition

Menge nach Cantor „Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“

- Konkrete Elemente können in Mengen nur einmal enthalten sein.
- Es gibt keine Reihenfolge der Elemente in der Menge. Es wird lediglich festgehalten ob ein Element zugehörig zu einer Menge ist, oder nicht.

Eine Menge ohne Elemente nennt man *leere Menge*. Sie wird entwedet mit $\emptyset$ oder $\{\}$ angeschrieben.

Beispiel

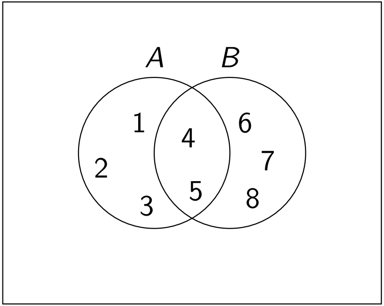
Wir betrachten die folgenden Mengen:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$D = \{6, 7, 8\}$$

$$E = \{7, 8\}$$



Im (Euler-)Venn-Diagramm werden Mengen grafisch dargestellt. Im konkreten Beispiel sind D und E nicht dargestellt, jedoch die Mengen A und B wie links definiert.

Zugehörigkeit zu einer Menge

Um die Zugehörigkeit zu einer Menge zu notieren, wird das Symbol "$\in$" verwendet. So ist beispielsweise $3 \in A$, oder $7 \in E$.

Oftmals werden in diesem Zusammenhang Variablen verwendet, um die Elemente einer Menge anzusprechen. Beispiel: die Summe aller Elemente der Menge A, also aller $x \in A$ kann angeschrieben werden als

$$\sum_{x \in A} x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Mengentheoretische Begriffe und Notation anhand von Beispielen

- **Schnittmenge:** enthält alle Elemente die in beiden Mengen enthalten sind.

$$A \cap B = \{4, 5\}$$

- **Vereinigungsmenge:** enthält alle Elemente die in einer der beiden Mengen (oder beiden) enthalten sind.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

- **Differenzmenge:** enthält alle Elemente der ersten Menge die jedoch nicht in der zweiten Menge enthalten sind.

$$A \backslash B = \{1, 2, 3\}$$

$$B \backslash A = \{6, 7, 8\}$$

Mengentheoretische Begriffe und Notation anhand von Beispielen

- **(Echte) Teilmenge:** (alle Elemente einer Menge sind auch in einer anderen Menge enthalten, die Mengen sind *nicht* gleich)

$$E \subset (B \backslash A)$$

- **(Unechte) Teilmenge:** entweder (echte) Teilmenge, oder die Mengen sind gleich!

$$D \subseteq (B \backslash A)$$

Im konkreten Fall gilt nicht $D \subset (A \backslash B)$, da D keine echte Teilmenge von $(B \backslash A)$ ist.

Kardinalität

Unter *Kardinalität* versteht man die *Größe* oder *Mächtigkeit* einer Menge. Bei endlichen Mengen entspricht dies der Anzahl der darin enthaltenen Elemente. Die Schreibweise sind die vertikalen Striche.

Bemerkung: dies hat nichts mit dem Betrag (Zahlen) oder der Längen von Vektoren zu tun. Diese Begriffe sind für Mengen gar nicht sinnvoll anwendbar.

Beispiel:

$$F = \{2, 4, 6, 8, 11\}$$

$$|F| = 5$$

Beispiel:

$$|\{\}| = 0$$

Potenzmenge (*)

Die Potenzmenge einer Menge enthält alle ihre Teilmengen als Elemente.

$$\mathcal{P}(X) = \{U \mid U \subseteq X\}$$

Die Potenzmenge einer Menge X wird entweder durch $\mathcal{P}(X)$ oder oft auch als 2^X angeschrieben.

Beispiel:

$$M = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Kartesisches Produkt (*)

Das kartesische Produkt ist die Menge aller geordneten Paare der Elemente zweier Mengen.

Definition (Kartesisches Produkt)

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Beispiel: Sei $X = \{a, b, c\}$ und $Y = \{1, 2, 3\}$. Das kartesische Produkt lautet:

$$X \times Y = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$$

Symmetrische Differenz (*)

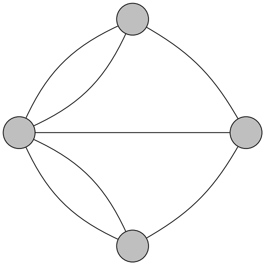
Die symmetrische Differenz ist definiert als

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} = \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$

Grundlagen

Graphen

- Die Abbildung zeigt nochmals den Graphen des Königsberger Brückenproblems
- Die grauen Kreise werden **Knoten** *(engl. vertex, vertices [pl.])* genannt
- Die Verbindungen zwischen den Knoten werden **Kanten** *(engl. edges)* genannt



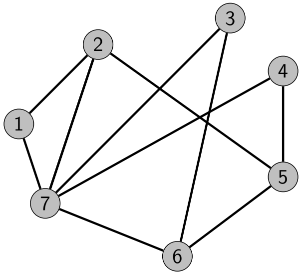
- Das Brückenproblem hat keine Lösung, weil von den Knoten eine ungerade Anzahl von Kanten weggeht.
- Damit ein derartiger *Eulerscher Weg* existiert, dürfen jedoch maximal zwei Knoten ungeraden *Grad* aufweisen.

Ungerichtete Graphen

Definition (Ungerichteter Graph)

Ein (ungerichteter) Graph $G = (V, E)$ besteht aus:

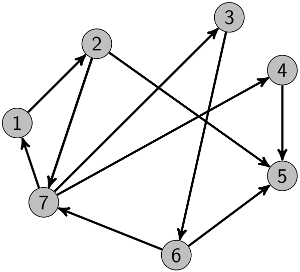
- einer (endlichen) Menge an *Knoten* $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$; die Knoten werden meist mit Großbuchstaben oder Zahlen bezeichnet.
- einer (endlichen) Menge an *Kanten* $E(G)$; Eine Kante zwischen i and j wird mit $[i, j]$ oder $\{i, j\}$ bezeichnet.



Anmerkung: Die Bezeichnung V für die Knotenmenge stammt von der englischen Bezeichnung *"vertices"* (pl.), bzw. *"vertex"* (sing.), was wörtlich übersetzt *Eckpunkt* bedeutet. Dennoch ist die Bezeichnung *Knoten* auf Deutsch gebräuchlicher. Die Kantenmenge E stammt vom englischen Begriff *"edge(s)"*.

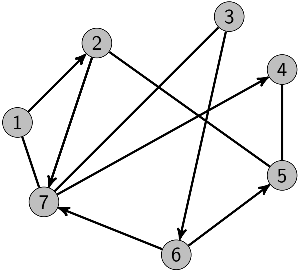
Gerichtete Graphen

- Ungerichtete Kanten haben wir in eckigen Klammern notiert (z.B. $[1, 3]$): Reihenfolge der Knoten spielt keine Rolle!
- Ein *gerichteter Graph* enthält nur *gerichtete Kanten*
- **Def. gerichtete Kante:** (i, j) ist eine gerichtete Verbindung vom Knoten i zum Knoten j
- Eine gerichtete Kanten wird auch *Bogen* oder *Pfeil* genannt. (engl.: *arc*)



Gemischte Graphen

- *Gemischte Graphen* enthalten sowohl gerichtete als auch ungerichtete Kanten



Adjazenz

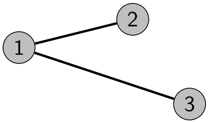
Definition (Adjazente Knoten)

Zwei Knoten i und j sind adjazent, wenn eine Kante $[i, j]$ existiert.

Definition (Adjazente Kanten)

Zwei Kanten $[i, j]$ und $[j, k]$ sind adjazent wenn sie einen gemeinsamen Knoten j besitzen.

Beispiel: im folgenden Graph sind die Kanten $[1, 2]$ und $[1, 3]$ adjazent. Ebenso sind die Knoten 1 und 2, sowie die Knoten 1 und 3 adjazent.

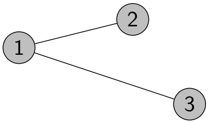


Inzidenz

Definition (Inzidenz)

Ein Knoten ist *inzident* mit einer Kante wenn der Knoten Endpunkt dieser Kante ist.

Beispiel:



Hier ist die Kante $[1, 2]$ und $[1, 3]$ jeweils inzident mit dem Knoten 1.

Knotengrad

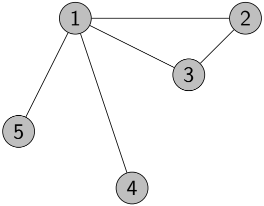
Definition (Knotengrad)

Unter dem Grad (engl. degree) $d(v)$ eines Knotens $v \in V(G)$ versteht man die Anzahl der Kanten $e \in E(G)$ die mit v verbunden sind.

Definition (Endpunkt)

Ist $d(v) = 1$ nennt man v einen *Endpunkt* des Graphen.

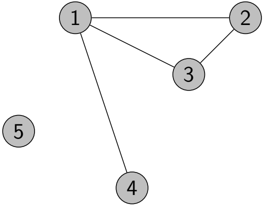
Beispiel: $d(1) = 4, d(2) = 2, d(3) = 2, d(4) = 1, d(5) = 1;$



Isolierter Knoten

Einen Knoten v mit $d(v) = 0$ nennt man *isolierten Knoten*.

Beispiel: $d(5) = 0$

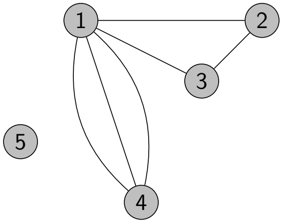


Mehrfachkante

Definition (Mehrfachkante)

Verlaufen zwischen zwei Knoten mindestens zwei Kanten, so heißt diese Menge von Kanten *Mehrfachkante* oder *Multikante*.

Beispiel: Mehrfachkante zwischen Knoten 1 und 4

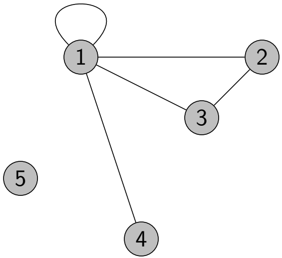


Schlinge

Definition (Schlinge)

Als *Schlinge* wird in einem Graphen eine Kante bezeichnet, die einen Knoten mit sich selbst verbindet.

Beispiel: Schlinge $[1, 1]$



Schlichter Graph

Definition (Schlichter Graph)

Unter einem *schlichten Graphen* (auch: einfacher Graph) versteht man einen Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten.

Anmerkung: Wir betrachten, sofern nicht anders angegeben, immer schlichte Graphen!

Beispiel

Anmerkung: Ein Graph G ist ausschließlich durch die *Menge* V der Knoten und die *Menge* E der Kanten bestimmt. Wie genau die Knoten und Kanten aufgezeichnet werden, ist nicht relevant!

Beispiel: Graph $G = (V, E)$

Beispiel

Anmerkung: Ein Graph G ist ausschließlich durch die *Menge* V der Knoten und die *Menge* E der Kanten bestimmt. Wie genau die Knoten und Kanten aufgezeichnet werden, ist nicht relevant!

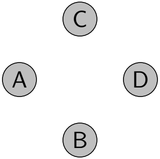
Beispiel: Graph $G = (V, E)$
mit $V = \{A, B, C, D\}$

Beispiel

Anmerkung: Ein Graph G ist ausschließlich durch die *Menge* V der Knoten und die *Menge* E der Kanten bestimmt. Wie genau die Knoten und Kanten aufgezeichnet werden, ist nicht relevant!

Beispiel: Graph $G = (V, E)$
mit $V = \{A, B, C, D\}$

Eine mögliche Darstellung des Graphen sieht wie folgt aus:

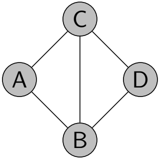


Beispiel

Anmerkung: Ein Graph G ist ausschließlich durch die *Menge* V der Knoten und die *Menge* E der Kanten bestimmt. Wie genau die Knoten und Kanten aufgezeichnet werden, ist nicht relevant!

Beispiel: Graph $G = (V, E)$
mit $V = \{A, B, C, D\}$
und $E = \{[A, B], [A, C], [B, C], [B, D], [C, D]\}$

Eine mögliche Darstellung des Graphen sieht wie folgt aus:

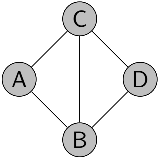


Beispiel

Anmerkung: Ein Graph G ist ausschließlich durch die *Menge* V der Knoten und die *Menge* E der Kanten bestimmt. Wie genau die Knoten und Kanten aufgezeichnet werden, ist nicht relevant!

Beispiel: Graph $G = (V, E)$
mit $V = \{A, B, C, D\}$
und $E = \{[A, B], [A, C], [B, C], [B, D], [C, D]\}$

Eine mögliche Darstellung des Graphen sieht wie folgt aus:



Eine andere Darstellung ist: