Graphentheorie: Zusammenhang

Programmieren und Software-Engineering
Theorie

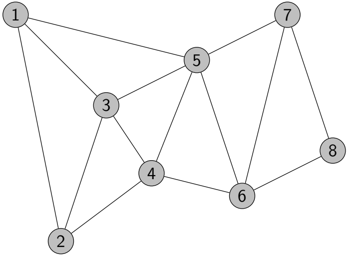
2. September 2025

Zusammenhang

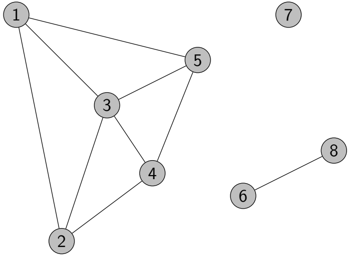
Definition (Zusammenhang)

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt genau dann *zusammenhängend*, wenn für alle Paare $u, v \in V$ gilt, dass sie durch einen Weg verbunden sind (kurz: $u \rightsquigarrow v, \forall u, v \in V(G)$).

Beispiel: Zusammenhängender Graph G_1:



Beispiel: *Nicht* zusammenhängender Graph G_2:



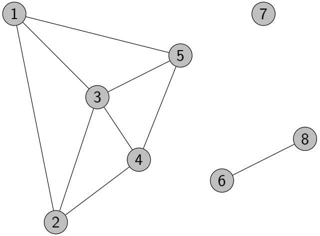
Zusammenhangskomponenten

Definition (Zusammenhangskomponenten)

Unter einer *Zusammenhangskomponenten* $K(v)$ versteht man eine *Teilmenge* von Knoten *maximaler Größe* die mit v durch einen Weg verbunden sind.

$$K(v) = \{u \in V(G) \mid v \rightsquigarrow u\}$$

Beispiel: Graph G_3 mit 3 Zusammenhangskomponenten:



$$Z_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$Z_2 = \{6, 8\}$$

$$Z_3 = \{7\}$$

Komponenten

Definition (Komponenten)

Die von den Zusammenhangskomponenten aufgespannten, gesättigten Teilgraphen von G heißen die *Komponenten* des Graphen G.

Definition (Anzahl der Komponenten)

Die *Anzahl* der Komponenten eines Graphen G wird mit $c(G)$ bezeichnet.

Beispiel: $c(G_3) = 3$

Beispiel: Die Komponenten von G_3 lauten:

$K_1 = (\{1,2,3,4,5\}, \{[1,2],[1,3],[1,5],[2,3],[2,4],[3,4],[3,5],[4,5]\})$
$K_2 = (\{6,8\}, \{[6,8]\})$
$K_3 = (\{7\}, \emptyset)$

Artikulation

Definition (Artikulation)

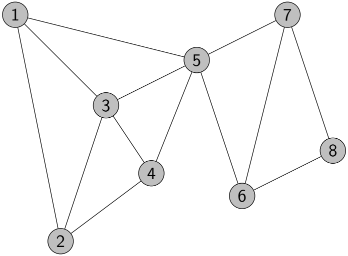
Ein Knoten v heißt *Artikulation* wenn die Anzahl der Komponenten von $G - \{v\}$ größer ist als jene von G, also

$$c(G - \{v\}) > c(G).$$

- Artikulationen haben niemals Grad 0 oder 1.
- Artikulationen sind Schnittstellen zwischen größer gleich zwei Blöcken.
- Nach Entfernung einer Artikulation ist der Graph nicht (mehr) zusammenhängend.

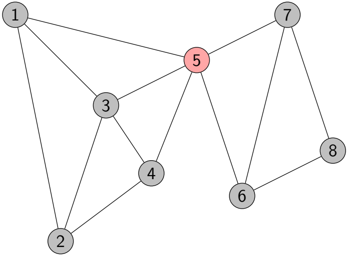
Artikulation

Beispiel: Graph G_4:



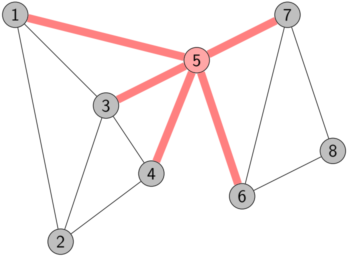
Artikulation

Beispiel: Graph G_4:



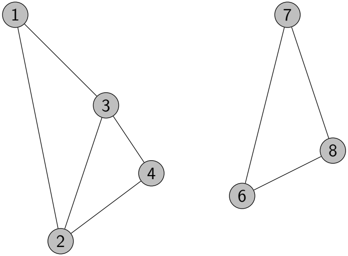
Artikulation

Beispiel: Graph G_4:



Artikulation

Beispiel: Graph G_4:



$G - \{5\}$ besteht nun aus den Komponenten
$K_1 = \big(K(1), \{[1,2], [1,3], [2,3], [2,4], [3,4]\}\big)$ und
$K_2 = \big(K(6), \{[6,7], [6,8], [7,8]\}\big)$.

Blöcke

Definition (Block)

Ein *Block* ist ein zusammenhängender Teilgraph, der keine Artikulationen hat und es keinen Obergraph zu diesem Teilgraph gibt, der ebenfalls keine Artikulationen hat.

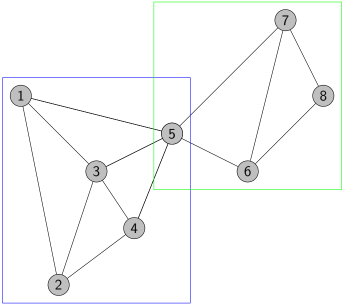
Bemerkung: ein Block ist also ein *maximaler* Teilgraph ohne Artikulationen (maximal bezüglich der Anzahl seiner Knoten).

Folgerungen:

- Jede Kante und jeder Kreis liegen in genau einem Block von G.
- Es gibt keine Kante die in zwei Blöcken liegen kann.
- Zwei Blöcke eines Graphen haben höchstens einen gemeinsamen Knoten und dieser ist eine Artikulation.
- Der kleinste Block eines Graphen ist ein isolierter Knoten.

Blöcke

Beispiel: Graph G_5 mit zwei Blöcken:



Die Knotenmengen der Blöcke lauten:

$B_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B_2 = \{5, 6, 7, 8\}$

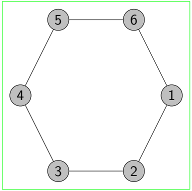
Der Block selbst ist der durch diese Knotenmengen definierte spannende, gesättigte Teilgraph.

Blöcke

Beispiel: Der Kleinstmögliche Block besteht nur aus einem Knoten. Graph G_6:

Knotenmenge zum Block: $B_1 = \{1\}$

Beispiel: Ein zusammenhängender Graph ohne Artikulation ist selbst ein Block. Graph G_7:



Knotenmenge zum Block: $B_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Brücke

Definition (Brücke)

Eine Kante e eines Graphen G heißt *Brücke*, wenn sich nach Entfernung dieser Kante die Anzahl der Komponenten des Graphen erhöht, also

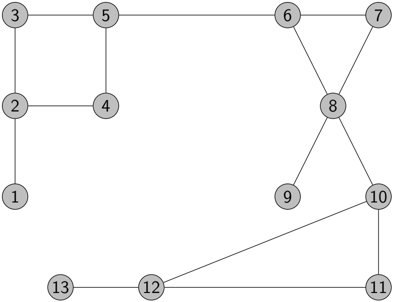
$$c(G - \{e\}) > c(G).$$

Anmerkung:

- Eine Brücke ist selbst ein Block.
- Eine Brücke ist damit, wie auch eine Artikulation, eine Schwachstelle im Graphen.

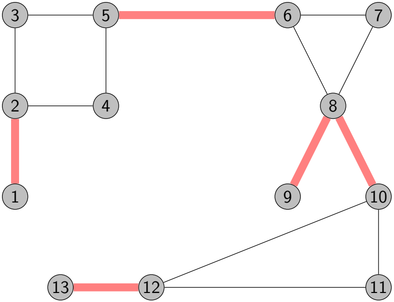
Brücken

Beispiel: Graph G_8 mit 5 Brücken



Brücken

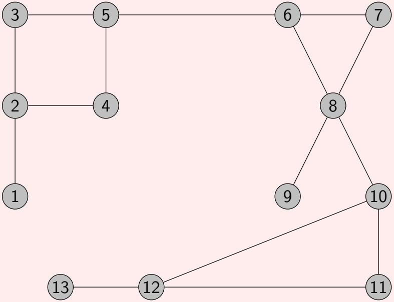
Beispiel: Graph G_8 mit 5 Brücken



Brücken

Beispiel 6.01

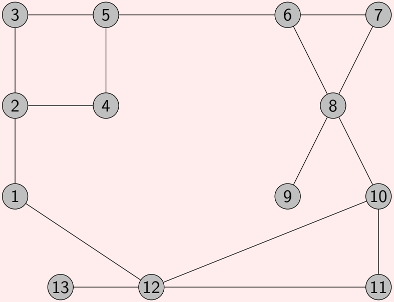
Gegeben sei der folgende Graph G_8. Bestimmen Sie alle Artikulationen, Brücken und Blöcke.



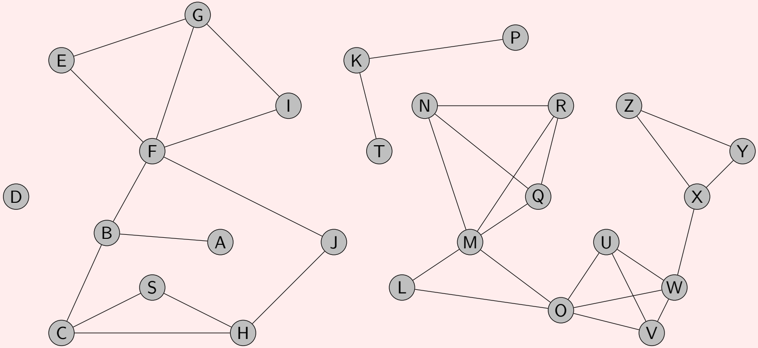
Brücken

Beispiel 6.02

Gegeben sei der folgende Graph G_9. Bestimmen Sie alle Artikulationen, Brücken und Blöcke.



Beispiel 6.11: Gegeben sei der folgende Graph G_{10}:



1. Geben Sie alle Zusammenhangskomponenten an.
2. Bestimmen Sie alle Artikulationen.
3. Bestimmen Sie alle Brücken.
4. Bestimmen Sie alle Blöcke, und schreiben Sie diese jeweils als Knotenmenge auf.