2003

A

câu 5: cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

lời giải:

$$x^2 + \frac{1}{81x^2} \geq \frac{2}{9} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} \geq \frac{2}{9} + \frac{80}{81x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \sqrt{\frac{2}{9} + \frac{80}{81x^2}}$$

dùng bất đẳng thức Bunyakovsky:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2).(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1.b_1 + a_2.b_2 + ... + a_n.b_n)^2$$

cho $b_1 = 1, b_2 = 1, ..., b_n = 1$ ta có:

$$n.(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$$

$$\Rightarrow n.(t_1 + t_2 + ... + t_n) \geq (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + ... + \sqrt{t_n})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{t_1 + t_2 + ... + t_n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + ... + \sqrt{t_n})$$

áp dụng bất đẳng thức trên cho $\frac{2}{9}, \frac{2}{81x^2}, ..., \frac{2}{81x^2}$, ta có:

$$\sqrt{\frac{2}{9} + \frac{80}{81x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{41}}.(\sqrt{\frac{2}{9}} + 40.\sqrt{\frac{2}{81x^2}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{41}}.(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{40\sqrt{2}}{9}.\frac{1}{x})$$

tương tự cho y, z, từ đó ta có:

$$P \geq \frac{1}{\sqrt{41}}.(\sqrt{2} + \frac{40\sqrt{2}}{9}.(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}))$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{41}}.(\sqrt{2} + \frac{40\sqrt{2}}{9}.\frac{9}{x + y + z}) \geq \sqrt{82}$$

B

câu 4:
1) tìm min, max của hàm số

$$x + \sqrt{4 - x^2}$$

lời giải: đặt $y = \sqrt{4 - x^2}$, khi đó $x \in [-2, 2], y \in [0, 2], x^2 + y^2 = 4, f = x + y$

$$f^2 = 4 + 2xy \leq 8 \Rightarrow f \leq 2\sqrt{2}$$

vậy max của f la $2\sqrt{2}$
giả sử $x \leq 0$, khi đó

$$f^2 = 4 + 2xy \leq 4$$

suy ra min của f là -2 khi $x \leq 0$,
với $x \geq 0$, dễ thấy f luôn lớn hơn 0
vậy min của f là -2

D

2005

A

câu 5: cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \leq 1$$

lời giải: áp dụng

$$\frac{1}{a + b + c + d} \leq \frac{1}{16}.(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d})$$

ta có:

$$\frac{1}{2x + y + z} \leq \frac{1}{16}.(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})$$

tương tự cho y, z và cộng từng vế ta được:

$$P \leq \frac{1}{4}.(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) = 1$$

B

câu 5: chứng minh rằng với mọi $x \in R$ ta có:

$$(\frac{12}{5})^x + (\frac{15}{4})^x + (\frac{20}{3})^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$$

lời giải: áp dụng

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c$$

cho $3^x, 4^x, 5^x$

D

câu 5: cho các số dương x, y, z thỏa $xyz=1$, chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\geq 3\sqrt{3}$$

lời giải:

$$1+x^3+y^3\geq 3xy\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}\geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$$

$$\Rightarrow P\geq \sqrt{3}.(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}})\geq 3\sqrt{3}$$

2006

A

câu 4:
2) cho hai số thực x, y thỏa

$$(x+y)xy=x^2+y^2-xy$$

tìm giá trị lớn nhất của $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$
lời giải:
đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}$, khi đó:

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}).\frac{1}{ab}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{ab}$$

$$\Rightarrow a+b=a^2+b^2-ab\Rightarrow a+b+3ab=(a+b)^2$$

đặt $t=a+b$, khi đó $ab=\frac{t^2-t}{3}$ ta có $(a+b)^2\geq 4ab\Rightarrow t^2\geq \frac{4}{3}.(t^2-t)$

$$\Rightarrow 0\leq t\leq 4\Rightarrow 0\leq a+b\leq 4$$

vậy $P=a^3+b^3=(a^2+b^2)(a+b)-ab(a+b)=(a+b+ab)(a+b)-ab(a+b)=(a+b)^2\leq 16$

B

câu 4:
2) cho số thực x, y tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|$$

lời giải: áp dụng BĐT Minkowski

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

dấu = xảy ra khi $ad = bc$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}\geq 2\sqrt{1+y^2}$$

$$\Rightarrow P\geq 2\sqrt{1+y^2}+|y-2|$$

khảo sát hàm số này, ta thấy min đạt được khi $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$ vậy min của P là $2+\sqrt{3}$

D

2007

A

câu 4
2) cho các số dương x, y, z thỏa $xyz = 1$, tìm giá trị nhỏ nhất:

$$\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

lời giải:

$$\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}\geq\frac{2x^2.\sqrt{yz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}$$

$$=\frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}$$

$$\Rightarrow P\geq\frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

đặt $a=x\sqrt{x}, b=y\sqrt{y}, c=z\sqrt{z}$, khi đó:

$$P\geq 2(\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b})$$

đặt $m = b + 2c, n = c + 2a, p = a + 2b$, khi đó:

$$a = \frac{-2m + 4n + p}{9}, b = \frac{m - 2n + 4p}{9}, c = \frac{4m + n - 2p}{9}$$

$$P \geq \frac{2}{9}.(\frac{-2m + 4n + p}{m} + \frac{m - 2n + 4p}{n} + \frac{4m + n - 2p}{p})$$

$$= \frac{2}{9}.(\frac{p}{m} + \frac{m}{n} + \frac{n}{p} + 4(\frac{n}{m} + \frac{p}{n} + \frac{m}{p}) - 6) \geq 2$$

vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2.

B

câu 4

2) cho các số dương x, y, z, tìm giá trị nhỏ nhất

$$x(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}) + y(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}) + z(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy})$$

lời giải:

$$x(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}) = x^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{xyz})$$

$$\Rightarrow P = (\frac{1}{2} + \frac{1}{xyz})(x^2 + y^2 + z^2) \geq (\frac{1}{2} + \frac{1}{xyz}).3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$$

đặt $t = \sqrt[3]{xyz}$, ta được:

$$P \geq 3t^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{t^3}) = \frac{3}{2}(t^2 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t}) \geq \frac{9}{2}$$

D

câu 4

2) cho $a \geq b > 0$, chứng minh rằng:

$$(2^a + \frac{1}{2^a})^b \leq (2^b + \frac{1}{2^b})^a$$

lời giải:

$$(2^a + \frac{1}{2^a})^b \leq (2^b + \frac{1}{2^b})^a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}.ln(2^a + \frac{1}{2^a}) \leq \frac{1}{b}.ln(2^b + \frac{1}{2^b})$$

đặt $f(x) = \frac{1}{x}.ln(2^x + \frac{1}{2^x})$ đặt $u = \frac{1}{x}, v = ln(2^x + \frac{1}{2^x})$

$$f'(x) = (uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v = -\frac{1}{x^2}.ln(2^x + \frac{1}{2^x}) \leq -\frac{1}{x^2}.ln(2^x) = -\frac{ln(2)}{x}$$

đặt $w = 2^x + \frac{1}{2^x}$

$$w' = ln(2).2^x - \frac{ln(2)}{2^x}$$

$$ln(w)' = \frac{w'}{w} = ln(2).\frac{4^x - 1}{4^x + 1}$$

$$uv' = \frac{ln(2)}{x}.\frac{4^x - 1}{4^x + 1} \leq \frac{ln(2)}{x}$$

vậy $f'(x) = u'v + uv' \leq 0 \Rightarrow f(a) \leq f(b)$

2008

A

B

câu 4
2) cho x, y thỏa $x^2 + y^2 = 1$. tìm min,max

$$\frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$$

lời giải:

$$\frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} = \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2}$$

giả sử $\frac{2(x^2+6xy)}{x^2+2xy+3y^2} \leq k$

$$\Rightarrow (k - 2)x^2 + 3ky^2 + (2k - 12)xy \geq 0$$

tìm k để BDT trên dạng $(a - b)^2 \geq 0$, ta được $k = 3$ vậy max là 3
giả sử $\frac{2(x^2+6xy)}{x^2+2xy+3y^2} \geq k$

$$\Rightarrow (2 - k)x^2 - 3ky^2 + (12 - 2k)xy \geq 0$$

tìm k để BDT trên dạng $(a + b)^2 \geq 0$, ta được $k = -6$ vậy min là -6

D

câu 4

2) cho hai số không âm x, y, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của:

$$\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$$

lời giải: đặt $a = 1+x, b = 1+y$

$$P = \frac{(a-b)(a+b-ab)}{a^2b^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{b} - (\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a})$$

xét hàm số $f(x) = x^2 - x$ trên $(0, 1]$ thì $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq f(\frac{1}{b}) - f(\frac{1}{a}) \leq \frac{1}{4}$$

2009

A

câu 5: cho các số dương x, y, z thỏa $x(x+y+z) = 3yz$, chứng minh rằng:

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 5(y+z)^3$$

lời giải:

$$(x+y)^3+(x+z)^3 = (2x+y+z)(2x^2+y^2+z^2+2xy+2xz-(x^2+xy+xz+yz))$$
$$= (2x+y+z)(y^2+z^2+x^2+xy+xz-yz) = (2x+y+z)(y+z)^2$$

$$\Rightarrow (x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 5(y+z)^3$$
$$\Leftrightarrow (2x+y+z)(y+z)^2 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 5(y+z)^3$$
$$\Leftrightarrow (2x+y+z)(y+z) + 3(x+y)(x+z) \leq 5(y+z)^2$$
$$\Leftrightarrow 2x(y+z) + (y+z)^2 + 3(x^2+xy+xz+yz) \leq 5(y+z)^2$$
$$\Leftrightarrow x(y+z) + 6yz \leq 2(y+z)^2$$
$$\Leftrightarrow 5yz \leq 2(y^2+z^2) + x^2(*)$$

đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{x}, c = ab$, khi đó:

$$3c = 1+a+b \Rightarrow (3c-1)^2 = (a+b)^2 \geq 4c \Leftrightarrow t \geq 1 || t \leq \frac{1}{9}(**)$$

$$(*) \Leftrightarrow 5c \leq 2(a^2+b^2)+1 = 2((a+b)^2-2c)+1 = 2((3c-1)^2-2c)+1$$
$$= 18c^2 - 16c + 3 \Leftrightarrow 6c^2 - 7c + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (c-1)(6c-1) \geq 0(***)$$

từ $(**) \Rightarrow (***)$

B

câu 5: cho các số thực x, y thỏa $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$, tìm giá trị nhỏ nhất

$$3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

lời giải:

$$(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 \geq (x+y)^3 + 4xy \geq 2$$

khảo sát hàm số $f(x) = x^3 + x^2 - 2$, ta thấy $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$
vậy $x + y \geq 1$

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \geq x + y \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$x^4 + y^4 + x^2y^2 \geq \frac{3}{4}.(x^2 + y^2)^2 \Rightarrow P \geq \frac{9}{4}.(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$$

khảo sát hàm số $f(x) = \frac{9}{4}.x^2 - 2x + 1$, ta thấy hàm số đồng biến khi $x \geq \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$
vậy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \frac{1}{2}$, giá trị đó là $\frac{9}{16}$

D

câu 5: cho các số thực không âm x, y thỏa $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

$$(4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$$

lời giải:

$$P = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy = 16x^2y^2 + 9xy + 12(x^3 + y^3) + 25xy$$
$$= 16x^2y^2 + 34xy + 12(x+y)(x^2 + y^2 - xy) = 16x^2y^2 + 34xy + 12(1 - 3xy)$$
$$= 16x^2y^2 - 2xy + 12$$

đặt $t = xy$, khi đó $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$
khảo sát hàm số $f(x) = 16x^2 - 2x + 12$ trên $[0, \frac{1}{4}]$, ta thấy min khi $x = \frac{1}{16}$, max khi $x = \frac{1}{4}$
vậy min là $\frac{191}{16}$, max là $\frac{25}{2}$

2010

A

B

câu 5: cho các số không âm a, b, c thỏa $a + b + c = 1$, tìm giá trị nhỏ nhất

$$3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

lời giải:
đặt $x = ab + bc + ca$, khi đó $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$

$$P \geq 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3t + 2\sqrt{1 - 2t}$$

khảo sát hàm số ta thấy $min = 2$

D

câu 5: tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$\sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$$

lời giải:

$$f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{-x^2 + 4x + 21}} - \frac{-2x + 3}{2\sqrt{-x^2 + 3x + 10}}$$

2011

A

B

D

2012

A1

A

B

D