2003

A

câu 5: cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z \le 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \ge \sqrt{82}$$

lời giải:

$$x^2 + \frac{1}{81x^2} \ge \frac{2}{9} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} \ge \frac{2}{9} + \frac{80}{81x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \ge \sqrt{\frac{2}{9} + \frac{80}{81x^2}}$$

dùng bất đẳng thức Bunyakovsky:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2).(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \ge (a_1.b_1 + a_2.b_2 + ... + a_n.b_n)^2$$

cho $b_1 = 1, b_2 = 1, ..., b_n = 1$ ta có:

$$n.(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) \ge (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$$

$$\Rightarrow n.(t_1 + t_2 + ... + t_n) \ge (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + ... + \sqrt{t_n})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{t_1 + t_2 + ... + t_n} \ge \frac{1}{\sqrt{n}}.(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + ... + \sqrt{t_n})$$

áp dụng bất đẳng thức trên cho $\frac{2}{9}, \frac{2}{81x^2}, ..., \frac{2}{81x^2}$, ta có:

$$\sqrt{\frac{2}{9} + \frac{80}{81x^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{41}}.(\sqrt{\frac{2}{9}} + 40.\sqrt{\frac{2}{81x^2}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{41}}.(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{40\sqrt{2}}{9}.\frac{1}{x})$$

tương tự cho y, z, từ đó ta có:

$$P \ge \frac{1}{\sqrt{41}}.(\sqrt{2} + \frac{40\sqrt{2}}{9}.(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}))$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{41}}.(\sqrt{2} + \frac{40\sqrt{2}}{9}.\frac{9}{x + y + z}) \ge \sqrt{82}$$

B

câu 4:
1) tìm min, max của hàm số

$$x + \sqrt{4 - x^2}$$

lời giải: đặt $y = \sqrt{4 - x^2}$, khi đó $x \in [-2, 2], y \in [0, 2], x^2 + y^2 = 4, f = x + y$

$$f^2 = 4 + 2xy \leq 8 \Rightarrow f \leq 2\sqrt{2}$$

vậy max của f la $2\sqrt{2}$
giả sử $x \leq 0$, khi đó

$$f^2 = 4 + 2xy \leq 4$$

suy ra min của f là -2 khi $x \leq 0$,
với $x \geq 0$, dễ thấy f luôn lớn hơn 0
vậy min của f là -2

D

2005

A

câu 5: cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \leq 1$$

lời giải: áp dụng

$$\frac{1}{a + b + c + d} \leq \frac{1}{16}.(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d})$$

ta có:

$$\frac{1}{2x + y + z} \leq \frac{1}{16}.(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})$$

tương tự cho y, z và cộng từng vế ta được:

$$P \leq \frac{1}{4}.(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) = 1$$

B

câu 5: chứng minh rằng với mọi $x \in R$ ta có:

$$(\frac{12}{5})^x + (\frac{15}{4})^x + (\frac{20}{3})^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$$

lời giải: áp dụng

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c$$

cho $3^x, 4^x, 5^x$

D

câu 5: cho các số dương x, y, z thỏa $xyz = 1$, chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\geq 3\sqrt{3}$$

lời giải:

$$1+x^3+y^3\geq 3xy \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}\geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$$

$$\Rightarrow P\geq \sqrt{3}.(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}})\geq 3\sqrt{3}$$

2006

A

câu 4:
2) cho hai số thực x, y thỏa

$$(x+y)xy = x^2+y^2-xy$$

tìm giá trị lớn nhất của $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$
lời giải:
đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}$, khi đó:

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}).\frac{1}{ab}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{ab}$$

$$\Rightarrow a+b=a^2+b^2-ab \Rightarrow a+b+3ab=(a+b)^2$$

đặt $t=a+b$, khi đó $ab=\frac{t^2-t}{3}$ ta có $(a+b)^2\geq 4ab \Rightarrow t^2\geq \frac{4}{3}.(t^2-t)$

$$\Rightarrow 0\leq t\leq 4 \Rightarrow 0\leq a+b\leq 4$$

vậy $P=a^3+b^3=(a^2+b^2)(a+b)-ab(a+b)=(a+b+ab)(a+b)-ab(a+b)=(a+b)^2\leq 16$

B

câu 4:
2) cho số thực x, y tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|$$

lời giải: áp dụng BĐT Minkowski

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

dấu = xảy ra khi $ad = bd$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}\geq 2\sqrt{}$$

D

2012

A1

A

B

D