1. năm 2001, Mỹ sẽ là chủ nhà của olympic toán quốc tế (IMO). Giả sử I, M, O là các số nguyên dương khác nhau thỏa mãn $I \times M \times O = 2001$. Giá trị lớn nhất của $I + M + O$ là bao nhiêu?

2. rút gọn $2000(2000^{2000})$

3. mỗi ngày, Jenny ăn 20% kẹo jellybean trong hũ vào đầu ngày. cuối ngày thứ hai, còn 32 viên kẹo. có bao nhiêu viên kẹo lúc ban đầu.

4. dãy số Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$ là dãy số bắt đầu với hai số 1, sau đó mỗi phần tử là tổng của hai số trước đó. các chữ số từ 0 đến 9 đều có thể là chữ số hàng đơn vị của các phần tử, hỏi chữ số nào xuất hiện cuối cùng khi các phần tử tăng dần?

5. cho $x < 2$ và $|x - 2| = p$, tính $x - p$

6. chọn hai số nguyên tố khác nhau giữa 4 và 18. lấy tích của chúng trừ đi tổng sẽ được số nào sau đây:

$$\{22, 60, 119, 180, 231\}$$

7. có bao nhiêu số nguyên dương b để cho $\log_b 729$ cũng là số nguyên dương?

——————-separator——————-

1. tấc cả ước số của 2001 là

$$\{1, 3, 23, 29, 3 \times 23, 23 \times 29, 29 \times 3, 2001\}$$

I,M,O không thể là 2001 được và không thể có hai số 1 nên ít nhất hai số phải thuộc tập hợp:

$$\{3, 23, 29, 3 \times 23, 23 \times 29, 29 \times 3\}$$

do hai số đó không thể đồng thời nằm trong

$$\{3 \times 23, 23 \times 29, 29 \times 3\}$$

nên một trong ba số phải là 3, 23 hoặc 29
không mất tính tổng quát, giả sử $I = 3$, khi đó $M \times O = 23 \times 29$. dễ thấy M,O chỉ có thể là 23,29 hoặc 23×29,1. mặt khác ta có

$$(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b$$

vậy khi $I = 3$, giá trị lớn nhất của S là $3 + 23 \times 29 + 1$ vậy giá trị lớn nhất của S là số lớn nhất trong ba số:

$$3 + 23 \times 29 + 1 = 671, 23 + 3 \times 29 + 1 = 111, 29 + 3 \times 23 + 1 = 99$$

chính là 671.

2. kết quả là 2000^{2001}

3. gọi số kẹo ban đầu là x. ăn hai lần vậy còn lại $x.\frac{4}{5}.\frac{4}{5} = 32 \Rightarrow x = 50$

4. ta có thể liệt kê các chữ số hàng đơn vị:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1, 5, 6$$

ta có thể thấy chữ số cuối cùng là 6

5. ta có:

$$2 - x = p \Leftrightarrow x - p = 2 - 2p$$

6. gọi hai số đó là a,b. ta có:

$$a, b \in \{5, 7, 11, 13, 17\}$$

$$S = ab - a - b = (a - 1)(b - 1) - 1$$

đặt $x = a - 1, y = b - 1$, khi đó:

$$x, y \in \{4, 6, 10, 12, 16\}$$

$$S = xy - 1$$

ta kiểm tra các số $\{22, 60, 119, 180, 231\}$ có thể là $xy - 1$ hay không tức là các số $\{23, 61, 120, 181, 232\}$ có thể là xy hay không
$\{23, 61, 181\}$ không thể vì xy là số chẵn
120 có thể vì $120 = 10 \times 12$
232 không thể vì 232 chia hết cho 29 nhưng xy thì không
vậy đáp án ban đầu là $\{119\}$

7. đặt $x = \log_b 729$, khi đó:

$$b^x = 729 \Rightarrow b^x = 3^6$$

dựa vào bổ đề 1, ta thấy b chỉ có một ước số nguyên tố duy nhất là 3, do đó $b = 3^a$, khi đó

$$3^{ax} = 3^6 \Rightarrow ax = 6$$

do đó a chỉ có thể là $\{1, 2, 3, 6\}$, khi đó b có thể có 4 giá trị

——————-separator——————-

bổ đề 1: cho p là số nguyên tố và 3^n chia hết cho p, chứng minh rằng $p = 3$
Chứng minh: giả sử $p \neq 3$, khi đó $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$, khi đó

$$3^n = ap = 3ak + a$$

hoặc

$$3^n = ap = 3ak + 2a$$

trong cả hai trường hợp dễ thấy a phải chia hết cho 3 chia cả hai vế cho 3 và lặp lại cuối cùng ta có được $1 = ap$ hoặc $3^n = p$, cả hai trường hợp đều vô lý, vậy $p = 3$