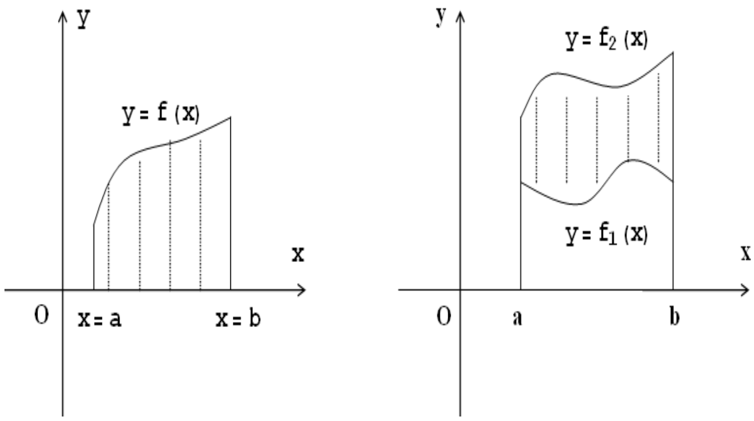
Ứng dụng hình học của tích phân xác định

1 Diện tích hình phẳng

a. Trong hệ tọa độ Đề các:

Từ ý nghĩa hình học của tích phân xác định ta suy ra diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ là

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx} \tag{1.1}$$



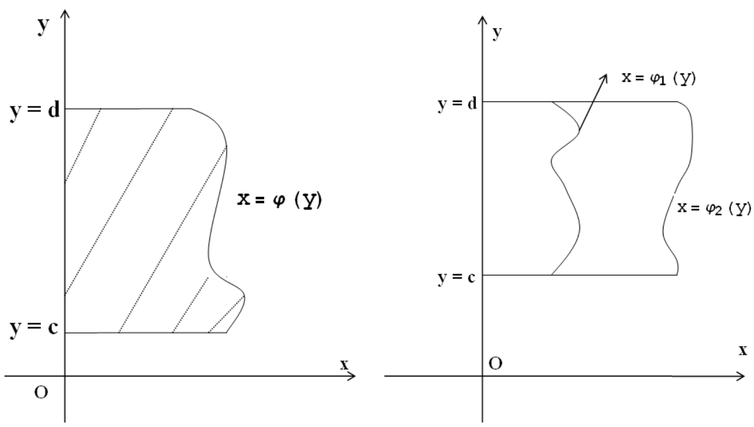
Hình 1.1

Nếu miền D giới hạn bởi: $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ thì:

$$\boxed{S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|dx.} \tag{1.2}$$

Chú ý 1.1 *Công thức (1.1), (1.2) vẫn đúng trong trường hợp đường cong cho dưới dạng $x = \varphi(y)$ đối với (1.1), $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$ đối với (1.2) (xem Hình 1.2). Khi đó (1.1), (1.2) lần lượt trở thành*

$$S = \int_c^d |\varphi(y)|dy,$$
$$S = \int_c^d |\varphi_2(y) - \varphi_1(y)|dy.$$

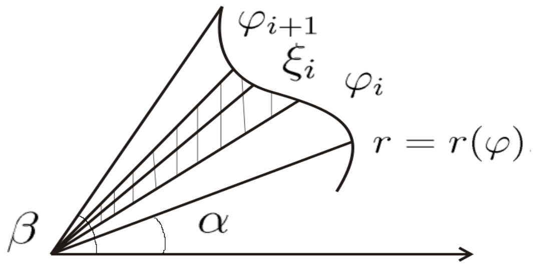


Hình 1.2

b. Trong hệ tọa độ cực:

Diện tích hình quạt cong D giới hạn bởi các đường $r = r(\varphi),\ \varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$ là

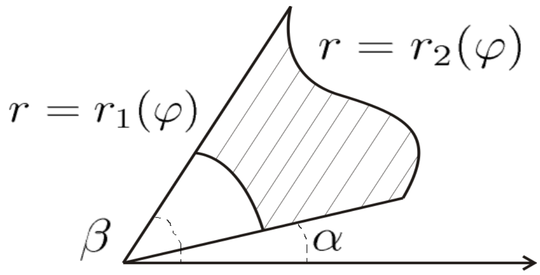
$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.} \tag{1.3}$$



Hình 1.3

Trường hợp tổng quát hơn ta có

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} |r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)|d\varphi.}$$



Hình 1.4

c. Đường cong cho dưới dạng tham số: Giả sử hình thang cong giới hạn bởi đường cong cho bởi phương trình tham số: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Ta đổi biến $x = x(t)$ trong công thức (1.1), giả thiết rằng :

$$x = a \Rightarrow t = t_1, \quad x = b \Rightarrow t = t_2,$$

ta được:

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)|dt.} \tag{1.4}$$

Nếu sử dụng công thức (1.3) thì ta sẽ có công thức tính diện tích đối xứng. Ta đã biết:

$$r^2 = x^2 + y^2,\ \varphi = \arctan\frac{y(t)}{x(t)} \Rightarrow \varphi_t' = \frac{xy_t' - x_t'y}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\big(xy_t' - x_t'y\big)dt.$$

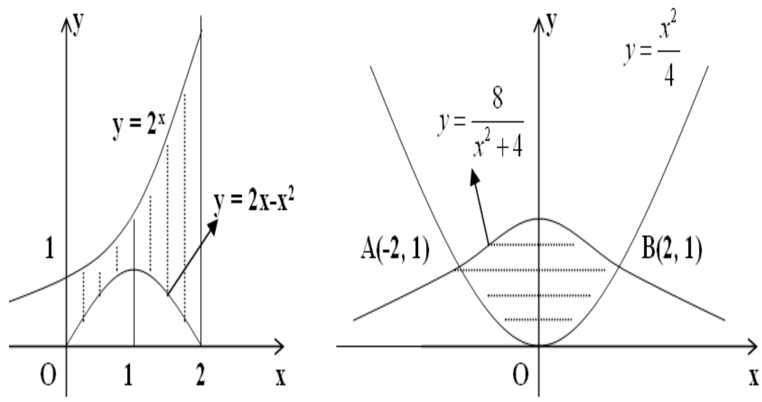
Vì vậy nếu khi φ thay đổi từ α đến β tương ứng với t thay đổi từ t_1 tới t_2 thì ta có:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \big[x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big]dt.} \tag{1.5}$$

Ví dụ 1.1 *Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau đây:*

1. $y = 2^x,\ y = 2x - x^2,\ x = 0,\ x = 2.$
2. $x = -2y^2,\ x = 1 - 2y^2.$
3. $y = x^2 + 2x - 3,\ y = -x^2 - 2x + 3.$
4. $y = \dfrac{1}{4}x^2,\ y = \dfrac{8}{x^2+4}$
5. *Đường cong dưới dạng tham số* $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$
6. *Đường cong dưới dạng tham số* $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$
7. *Đường cong dưới dạng tham số* $\begin{cases} x = 12\cos t + 5\sin t \\ y = 5\cos t - 12\sin t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$
8. $r = a(1 + \cos\varphi)$
9. *Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường Lemnixcat*
$$r^2 = 2\cos 2\varphi.$$

Giải: 1) Hình 1.5:

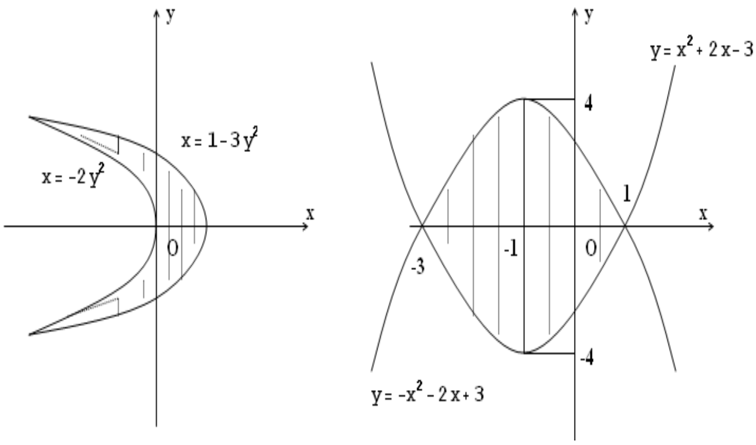


Hình 1.5

Ta có

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 [2^x - (2x - x^2)]dx \\ &= \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 - \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 \\ &= \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3} \text{ (đ.v.d.t)} \end{aligned}$$

2) $x = -2y^2 = 1 - 3y^2 \Longrightarrow y^2 = 1 \Longleftrightarrow y = \pm 1 \Longrightarrow x = -2$ *(xem Hình 1.6).*



Hình 1.6

$$S = \int_{-1}^{1} [(1-3y^2) - (-2y^2)]dy = \left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3} \text{ (đ.v.d.t)}$$

3) $x^2 + 2x - 3 = -x^2 - 2x + 3 \Longleftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -3$ *(xem Hình 1.6).*

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{1} [(-x^2 - 2x + 3) - (x^2 + 2x - 3)]dx \\ &= \int_{-3}^{1} (-2x^2 - 4x + 6)dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 6x\right)\Big|_{-3}^{1} = \frac{64}{3} \text{ (đ.v.d.t)} \end{aligned}$$

4) Hai đường cắt nhau tại hai điểm $A(-2,1), B(2,1)$ *(Hình vẽ 1.5). Rõ ràng*

$$\frac{8}{x^2+4} \geq \frac{x^2}{4},\ \forall x \in [-2,2].$$

Vậy

$$S = \int_{-2}^{2} \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left(4\arctan\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_{-2}^{2} = 2\pi - \frac{4}{3} \text{ (đ.v.d.t)}$$

5) Do tính chất đối xứng của hình elip nên ta chỉ cần tính diện tích ở góc $1/4$ *thứ nhất. Ta có*

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^{\pi/2} |b\sin t a(-\sin t)|dt \\ &= ab\int_0^{\pi/2} 2\sin^2 t dt = 2ab\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2t)dt \\ &= 2ab\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right] = \pi ab \end{aligned}$$

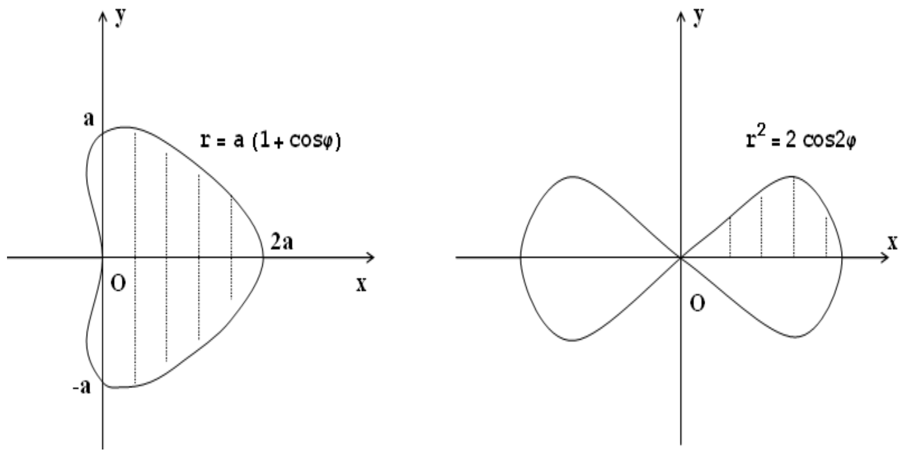
Chú ý nếu $a = b$ *thì elip trở thành hình tròn, diện tích của hình tròn* $(a = b)$ *là* $\pi a^2 = \pi b^2$.
6) Ta có

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} |2(1-\cos t)2(1-\cos t)|dt = 4\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt \\ &= 4\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt \\ &= 8\pi - 8\sin t\Big|_0^{2\pi} + 4\pi + \sin 2t\Big|_0^{2\pi} = 12\pi \text{ (đ.v.d.t)} \end{aligned}$$

7) Ta có

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} |(5\cos t - 12\sin t)(-12\sin t + 5\cos t)|dt = \int_0^{2\pi} (5\cos t - 12\sin t)^2 dt \\
&= \int_0^{2\pi} (25\cos^2 t + 144\sin^2 t - 120\sin t\cos t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big[25 + \frac{119}{2}(1-\cos 2t) - 60\sin 2t\big] dt \\
&= 50\pi + 119\pi - \frac{119}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} + 30\cos 2t\Big|_0^{2\pi} \\
&= 169\pi \text{ (đ.v.d.t)}
\end{aligned}$$

8) Hình 1.7:



Hình 1.7

Ta có

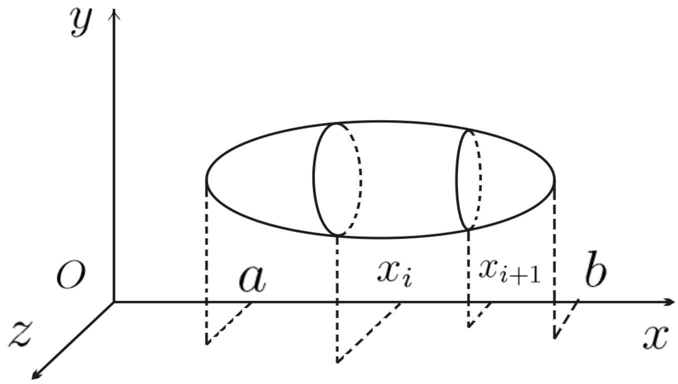
$$\begin{aligned}
S &= 2.\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi \\
&= a^2\int_0^{\pi}\big(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\big)d\varphi \\
&= \frac{3}{2}a^2\pi + 2a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{3\pi a^2}{2} \text{ (đ.v.d.t)}
\end{aligned}$$

9) Hình 1.7. Ta có

$$S = 4\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\varphi d\varphi = 2\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 2 \text{ (đ.v.d.t)}$$

2 Thể tích

a. Trường hợp tổng quát: Cho vật thể Ω giới hạn bởi mặt cong khép kín và cho Ω nằm giữa 2 mặt phẳng $x = a, x = b$. Gọi $S(x_1)$ là diện tích của thiết diện tạo bởi Ω và mặt phẳng $x = x_1$.



Hình 1.8

Chia Ω thành n phần bởi các mặt phẳng $x = x_i, i = 0, 1, \ldots, n$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Trong $[x_i, x_{i+1}]$, ta lấy ξ_i bất kỳ. Thay miền Ω_i (nằm giữa hai mặt phẳng $x = x_i$ và $x = x_{i+1}$) bằng hình trụ với đường cao $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ và đáy $S(\xi_i)$. Vậy thể tích của Ω được tính gần đúng $V \approx \sum\limits_{i=0}^{n-1} S(\xi_i)\Delta x_i$.

Qua giới hạn ta được:

$$\boxed{V = \int\limits_a^b S(x)dx}$$

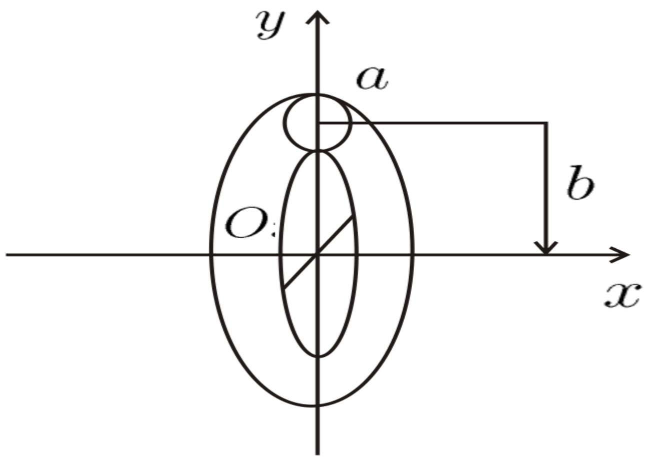
b. Hình tròn xoay (quanh Ox): Giả sử Ω tạo bởi hình thang cong $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$ xoay quanh Ox thì $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$. Vậy:

$$\boxed{V_x = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx}$$

Ví dụ 2.1 Tính thể tích hình xuyến tạo bởi hình tròn:

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2 \quad (b \geq a)$$

xoay quanh Ox.



Hình 1.9

Nửa trên hình tròn có phương trình là: $y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, nửa dưới hình tròn có phương trình là: $y = b - \sqrt{a^2 - x^2}$.

Vậy thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình tròn quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int\limits_{-a}^{a} [(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2]dx = 8\pi b \int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Đổi biến $x = a\sin t \Rightarrow V = 8\pi ba^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2\pi^2 a^2 b$ (đvtt).

Ví dụ 2.2 Tính thể tích khi xoay hình Xicloit $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $y = 0$ quanh Ox.

$$V = \pi \int\limits_{0}^{2\pi} y^2 dx = \pi a^3 \int\limits_{0}^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3 \text{ (đvtt)}.$$

Ví dụ 2.3 *1) Tính thể tích của vật thể cho bởi mặt elipxoit*

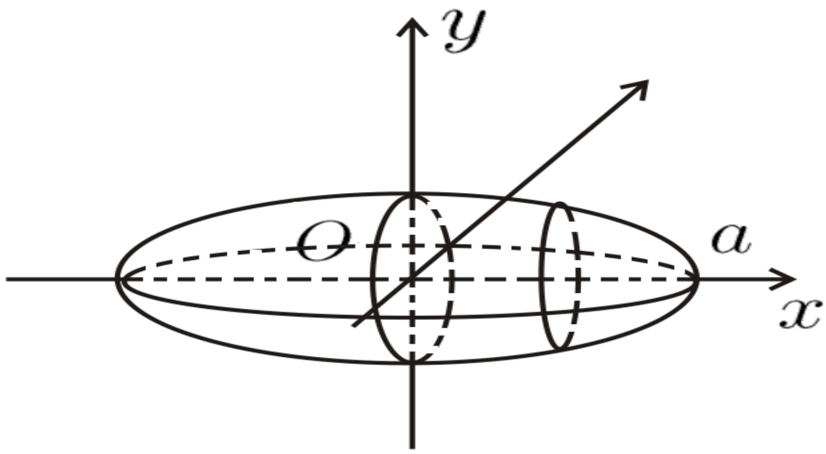
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2) Tìm thể tích của vật thể giới hạn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ và hai mặt phẳng vuông góc với Ox là $x = 2, x = 3$.

3) Tìm thể tích của vật thể được tạo ra khi quay hình giới hạn bởi đường cong $y^2 = (x-1)^3$ và đường thẳng $x = 2$ quanh trục Ox.

Giải: 1) Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là một hình elip có phương trình là

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$



Hình 1.10

Diện tích của elip đó được tính theo công thức

$$S(x) = \pi.b.\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}c.\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2}),\ -a \leqslant x \leqslant a.$$

Vậy thể tích của vật thể được tạo ra bởi mặt elipxoit là

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2})dx = \frac{4}{3}\pi abc \text{ (đvtt)}.$$

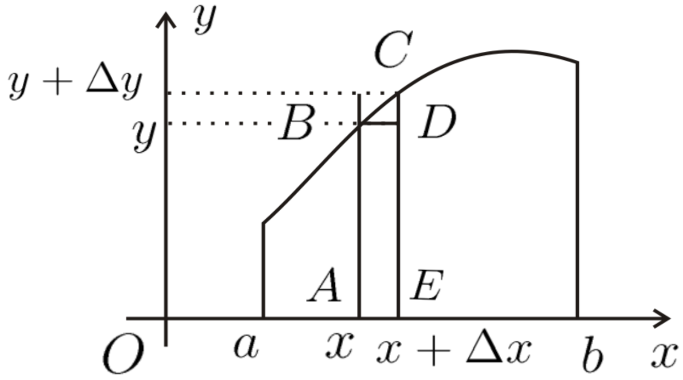
Chú ý: Nếu $a = b = c$ thì ta có ngay thể tích hình cầu $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.
2) Cắt mặt cầu bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là hình tròn bán kính bằng $\sqrt{16 - x^2}$. Vậy thể tích V của phần hình cầu giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 2$ và $x = 3$ là

$$V = \int_2^3 S(x)dx = \int_2^3 \pi(16 - x^2)dx = \frac{29}{3}\pi \text{ (đvtt)}.$$

3)

$$V = \pi \int_1^2 y^2(x)dx = \pi \int_1^2 (x-1)^3 d(x-1)$$
$$= \frac{\pi}{4}(x-1)^4\Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} \text{ (đvtt)}.$$

c. Hình tròn xoay (quanh Oy): Cho hình thang cong: $0 \le y \le f(x)$, $a \le x \le b$ xoay quanh Oy.



Hình 1.11

Nếu gọi $V[a, b]$ là thể tích cần tìm thì rõ ràng nó có tính cộng tính đối với các đoạn. Đặt $V(x) = V[a, x]$, tính $\Delta V = V[x, x + \Delta x]$. Như vậy ΔV sẽ là thể tích của hình do hình thang cong $ABCE$ xoay quanh Oy, nó bằng thể tích V_1 do hình chữ nhật $ABDE$ xoay quanh Oy cộng thêm thể tích V_2 do tam giác cong BCD xoay quanh Oy.

$$V_1 = \pi(x + \Delta x)^2 y - \pi x^2 y = 2\pi xy\Delta x + \pi y \Delta x^2 \tag{2.6}$$

V_2 nhỏ hơn thể tích V_3 do hình chữ nhật với các cạnh $BD = \Delta x, CD = \Delta y$ xoay quanh Oy:

$$V_2 < V_3 = \pi(x + \Delta x)^2\Delta y - \pi x^2 \Delta y = 2\pi x\Delta x\Delta y + \pi\Delta x^2\Delta y = o(\Delta x)$$

vì với giả thiết hàm liên tục, khi $\Delta x \to 0$ thì $\Delta y \to 0$. Vậy

$$V_2 = o(\Delta x) \tag{2.7}$$

Từ (2.6) và (2.7) ta được:

$$\Delta V = V_1 + V_2 = 2\pi xy\Delta x + o(\Delta x) \Rightarrow dV = 2\pi xydx.$$

Cho nên:

$$\boxed{V_y = 2\pi \int_a^b xydx = 2\pi \int_a^b xf(x)dx.}$$

Ví dụ 2.4 *Tính thể tích do hình phẳng giới hạn bởi $y = 2x - x^2, y = 0$ xoay quanh:*

a) Trục Ox

b) Trục Oy

Giải: a) Đường $y = 2x - x^2$ cắt Ox tại $x = 0, x = 2$ nên:

$$V_x = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16}{15}\pi \ \text{(đvtt)}.$$

b)

$$V_y = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = \frac{8}{3}\pi \ \text{(đvtt)}.$$

Ví dụ 2.5 *Tính thể tích vật thể sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$*

1) quanh Ox,

2) quanh Oy.

Giải. 1) Ta có

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \ \text{(đvtt)}. \end{aligned}$$

2) Ta có

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = -2\pi \int_0^\pi x d\cos x \\ &= -2\pi (x \cos x\big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos x dx) \\ &= -2\pi(-\pi - \sin x\big|_0^\pi) = 2\pi^2 \ \text{(đvtt)}. \end{aligned}$$

Cách 2: Chia đường cong ra hai phần

$$\{y = \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\} \ \text{và} \ \{y = \sin x,\ \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi\}.$$

Suy ra

$$\{x = \arcsin y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\} \ \text{và} \ \{x = \pi - \arcsin y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^1 (\pi - \arcsin y)^2 dy - \pi \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 [\pi^2 - 2\pi \arcsin y] dy = \pi^2 [\pi y\big|_0^1 - 2\int_0^1 \arcsin y dy] \\ &= \pi^2 \left[\pi - 2y \arcsin y\big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}}\right] \\ &= -2\pi^2 \sqrt{1 - y^2}\Big|_0^1 = 2\pi^2 \ \text{(đvtt)}. \end{aligned}$$

3 Độ dài cung

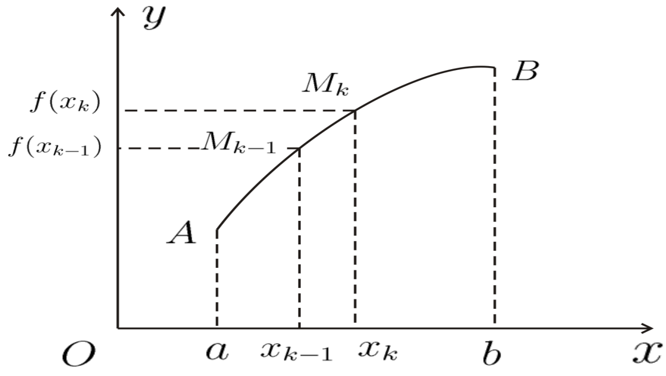
a. Trong tọa độ Đề các: Giả sử cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình:

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia:

$$A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B.$$

Mỗi phép chia cung như vậy ứng với một phép phân hoạch P của đoạn $[a, b]$ trong đó x_k là hoành độ của điểm M_k.



Hình 1.12

Độ dài đường gấp khúc $M_0M_1...M_n$ là một giá trị xấp xỉ của độ dài L của đường cong $\overset{\frown}{AB}$:

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}M_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}.$$

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ để

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Do đó

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(c_k)}(x_k - x_{k-1}).$$

Khi $d(P) \to 0$ thì tổng vế phải dần đến độ dài L của $\overset{\frown}{AB}$, nhưng tổng đó cũng là tổng tích phân của hàm $y = \sqrt{1 + f'^2(x)}$ trên đoạn $[a, b]$, do đó nếu $f(x)$ có đạo hàm liên tục thì

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx}$$

b. Đường cong cho dưới dạng tham số: Tính độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

Với giả thiết $x(t)$, $y(t)$ có đạo hàm liên tục, từ công thức $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$, thực hiện phép đổi biến $x = x(t)$ ta có $dx = x'(t)dt$, $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$. Do đó

$$\boxed{L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt}$$

(Trong chứng minh ta sử dụng $x'(t) > 0$, tuy nhiên để công thức đúng, chỉ cần giả thiết $x'(t) \neq 0$ hoặc $y'(t) \neq 0$ với mọi $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$).

c. Trong tọa độ cực: Cho cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình:

$$r = r(\varphi),\ \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

Đưa về phương trình tham số: $x = r(\varphi)\cos\varphi, y = r(\varphi)\sin\varphi, \alpha \leq \varphi \leq \beta$, thay vào công thức trên ta được:

$$\boxed{L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi}$$

Ví dụ 3.1 *Tính chu vi đường tròn bán kính R.*

Giải: Ta có phương trình tham số của đường tròn $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Vì vậy

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

Ví dụ 3.2 *Tính độ dài một nhịp Xicloit:*

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Giải:

$$x' = a(1 - \cos t), y' = a\sin t \Rightarrow x'^2 + y'^2 = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow L = 2a\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = 8a \text{ (đvđd)}.$$

Ví dụ 3.3 *Tìm độ dài cung của đường cong trong các trường hợp sau:*

1. $y = \ln\cos x,\ o \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}.$
2. $y = \ln\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1};\ a \leqslant x \leqslant b.$
3. $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y;\ 1 \leqslant y \leqslant 2.$
4. *Đường cong dưới dạng tham số* $\begin{cases} x = \cos^5 t \\ y = \sin^5 t \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \pi/2.$
5. *Đường cong dưới dạng tham số* $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 - t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \pi/2.$
6. $r = \sin^3\dfrac{\varphi}{3},\ o \leqslant \varphi \leqslant \pi/2.$
7. $r = a(1 + \cos\varphi).$

Giải:

1)

$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} = \ln\tan\frac{3\pi}{8}.$$

2) Ta có

$$y' = \frac{e^x-1}{e^x+1}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)' = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx = \int_a^b \frac{e^{2x}-1+2}{e^{2x}-1}dx = b-a+2\int_a^b \frac{dx}{e^{2x}-1}\\
&= (b-a)+2\int_a^b \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}(e^{2x}-1)} = (b-a)+\int_a^b \frac{de^{2x}}{e^{2x}(e^{2x}-1)}\\
&= (b-a)+\int_a^b \left(\frac{d(e^{2x}-1)}{e^{2x}-1} - \frac{de^{2x}}{e^{2x}}\right)\\
&= (b-a)+\ln\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}\Big|_a^b = (b-a)+\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2b}} - \ln\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}}\\
&= (b-a)+\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1} - 2b+2a = 3(b-a)+\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}.
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
L &= \int_1^2 \sqrt{1+x_y'^2}dy = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{4y^2}-\frac{1}{2}}dy\\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \left|y+\frac{1}{y}\right|dy = \frac{1}{2}\int_1^2 (y+\frac{1}{y})dy\\
&= \frac{1}{4}y^2\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\ln y\Big|_1^2 = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{x_t'^2+y_t'^2} = \int_0^{\pi/2} 5\sin t\cos t\sqrt{\cos^6 t+\sin^6 t}dt\\
&= \frac{5}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2t}dt\\
&= -\frac{5}{8}\int_0^{\pi/2} (1+3\cos^2 2t)^{1/2}d\cos 2t\\
&= -\frac{5}{8}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(\sqrt{3}\cos 2t+\sqrt{1+3\cos^2 2t})\Big)\Big|_0^{\pi/2}\\
&= \frac{5}{8}\left(2\sqrt{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

5) $x_t' = t^2-1,\ y_t' = 2t.$

$$L = \int_0^3 \sqrt{(t^2-1)^2+4t^2}dt = \int_0^3 (t^2+1)dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^3 + 3 = 12.$$

6) $r' = \sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}.$

$$2\sqrt{r^2+r'^2} = \sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3}+\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi/2} \sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos\frac{2\varphi}{3})d\varphi\\
&= \frac{1}{8}(2\pi-3\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned}
2L &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2+r'^2}d\varphi\\
&= 4a\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}d\frac{\varphi}{2} = 8a.
\end{aligned}$$