

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

## Chương 3. PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

1. Các nguyên lý đếm cơ bản
2. Giải tích tổ hợp
3. Tổ hợp lặp

## 3.1. Các nguyên lý đếm cơ bản

- ① Nguyên lý cộng
- ② Nguyên lý nhân
- ③ Nguyên lý bù trừ
- ④ Nguyên lý Dirichlet

### 3.1.1. Nguyên lý cộng

Giả sử để làm công việc  $A$  ta có 2 phương pháp

- Phương pháp 1: có  $n$  cách làm
- Phương pháp 2: có  $m$  cách làm

Khi đó số cách làm công việc  $A$  là  $n + m$ .

**Ví dụ.** An có 3 áo tay dài, 5 áo tay ngắn. Để chọn một cái áo thì An có mấy cách?

**Đáp án.**  $3+5=8$  cách.

**Ví dụ.** Nhà trường cần chọn một sinh viên khoa CNTT năm hai, năm ba hoặc năm tư đi tham gia hội nghị sinh viên thành phố. Biết rằng trường có 501 sinh viên năm hai, 402 sinh viên năm ba, 345 sinh viên năm tư. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

**Đáp án.**  $501 + 402 + 345 = 1248$  cách.

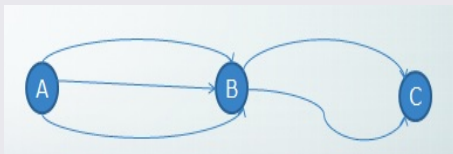
### 3.1.2. Nguyên lý nhân

Giả sử để làm công việc  $A$  cần thực hiện 2 bước

- Bước 1 có  $n$  cách làm
- Bước 2 có  $m$  cách làm

Khi đó số cách làm công việc  $A$  là  $n \times m$ .

**Ví dụ.**



Hỏi có nhiều cách đi từ  $A$  đến  $C$ ?

**Đáp án.**  $3 \times 2 = 6$  cách.

**Ví dụ.** Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 8?

**Giải.** Mỗi bit có thể chọn 1 trong 2 cách: 0 hoặc 1. Theo nguyên lý nhân ta có số lượng chuỗi là  $2^8 = 256$ .

**Ví dụ.** Cho tập  $A$  gồm 6 phần tử và tập  $B$  gồm 10 phần tử. Hỏi

- a) Có bao nhiêu ánh xạ từ  $A$  vào  $B$ ?
- b) Có bao nhiêu đơn ánh từ  $A$  vào  $B$ ?

**Giải.** a) Với mỗi phần tử  $x$  của  $A$  ta có 10 cách chọn ảnh của  $x$  (vì  $B$  có 10 phần tử). Theo nguyên lý nhân, ta có  $10^6$  ánh xạ.

b) Giả sử  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_6\}$ . Để xây dựng một đơn ánh ta cần thực hiện 6 bước:

Bước 1. Chọn ảnh của  $x_1$  có 10 cách.

Bước 2. Chọn ảnh của  $x_2$  có  $10 - 1 = 9$  cách.

.....

Bước 6. Chọn ảnh của  $x_6$  có  $10 - 5 = 5$  cách.

Vậy số đơn ánh là:  $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$ .

**Ví dụ.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau mà chia hết cho 2?

**Giải.** Gọi số có ba chữ số là  $\overline{abc}$ .

**Trường hợp 1.**  $c = 0$ . Khi đó

- $c$  có 1 cách chọn
- $a$  có 5 cách chọn (  $a = X \setminus \{0\}$  )
- $b$  có 4 cách chọn (  $b = X \setminus \{a, 0\}$  )

Trường hợp 1 có  $1 \times 4 \times 5 = 20$  số.

**Trường hợp 2.**  $c \neq 0$ . Khi đó

- $c$  có 2 cách chọn
- $a$  có 4 cách chọn (  $a = X \setminus \{c, 0\}$  )
- $b$  có 4 cách chọn (  $b = X \setminus \{a, c\}$  )

Trường hợp 2 có  $2 \times 4 \times 4 = 32$  số.

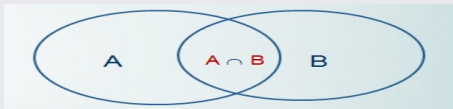
Như vậy có  $20 + 32 = 52$  số.

### 3.1.3. Nguyên lý bù trừ

**Ví dụ.** Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 8 hoặc được bắt đầu bằng 1 hoặc được kết thúc bằng 00?

Cho  $A$  và  $B$  là hai tập hữu hạn. Khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Giải ví dụ trên.

- Số lượng chuỗi bit bắt đầu bằng 1 là  $2^7 = 128$ .
- Số lượng chuỗi bit kết thúc bằng 00 là  $2^6 = 64$ .
- Số lượng chuỗi bit bắt đầu bằng 1 và kết thúc bằng 00 là  $2^5 = 32$ .

Số lượng chuỗi bit thỏa đề bài là  $128 + 64 - 32 = 160$ .



**Ví dụ.** Có 2 bài toán kiểm tra. Trong lớp có 30 sinh viên làm được bài thứ nhất và 20 sinh viên làm được bài thứ hai và chỉ có 10 sinh viên làm được cả 2 bài. Biết rằng mỗi sinh viên đều làm ít nhất một bài, hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên?

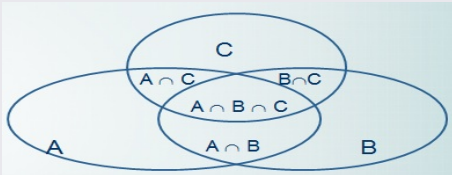
**Giải.** Ta gọi

- $A$  là những sinh viên giải được bài 1
- $B$  là những sinh viên giải được bài 2

Khi đó  $A \cap B$  là những sinh viên giải được cả 2 bài toán. Bài toán đặt ra là tính số phần tử  $A \cup B$ . Ta có

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 30 + 20 - 10 = 40.\end{aligned}$$

Như vậy lớp có 40 sinh viên.



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

**Ví dụ.**(tự làm) Bài kiểm tra Toán rời rạc có 3 bài. Biết rằng, mỗi sinh viên làm được ít nhất 1 bài, trong đó có

- 20 sinh viên làm được bài 1.
- 14 sinh viên làm được bài 2.
- 10 sinh viên làm được bài 3.
- 6 sinh viên giải được bài 1 và 3.
- 5 sinh viên giải được bài 2 và bài 3.
- 2 sinh viên giải được bài 1 và 2.
- 1 sinh viên giải được cả 3 bài.

Hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên?

### 3.1.4. Nguyên lý Dirichlet (chuồng bồ câu)

#### Ví dụ.

- Trong một nhóm 367 người thì có ít nhất 2 người có cùng ngày sinh nhật.
- Có 20 chim bồ câu ở trong 7 cái chuồng. Khi đó sẽ có ít nhất 1 chuồng có 3 con bồ câu trở lên.

**Định nghĩa.** *Giá trị trần* của  $x$ , ký hiệu là  $\lceil x \rceil$ , là số nguyên nhỏ nhất mà lớn hơn hay bằng  $x$ .

**Ví dụ.**  $\lceil 2.1 \rceil = 3$ ;  $\lceil 1.9 \rceil = 2$ ;  $\lceil 4 \rceil = 4$ ;  $\lceil -1.1 \rceil = -1$ .  $\lceil -2.9 \rceil = -2$ .

#### Nguyên lý Dirichlet

Giả sử có  $n$  chim bồ câu ở trong  $k$  chuồng, khi đó tồn tại ít nhất một chuồng chứa từ  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$  bồ câu trở lên.

**Ví dụ.** Trong 100 người thì có ít nhất  $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$  cùng tháng sinh.

**Ví dụ.** Chứng minh rằng trong 10 số tự nhiên bất kỳ luôn chọn được hai số có hiệu chia hết cho 9.

**Giải.** Khi chia 10 số bất kỳ cho 9 ta sẽ có mỗi số có một số dư trong 9 số dư:  $0, 1, 2, \dots, 7, 8$ . Do đó theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư. Khi đó hiệu của hai số đó sẽ chia hết cho 9.

**Ví dụ.** Trong một lớp học phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để có ít nhất 6 sinh viên có cùng thứ bậc học tập, biết rằng có 5 loại thứ bậc  $A, B, C, D$  và  $E$ ?

**Giải.** Gọi số sinh viên của lớp là  $N$ . Theo nguyên lý Dirichlet ta có  $\left\lceil \frac{N}{5} \right\rceil \geq 6$ . Khi đó

$$N > 25.$$

Do đó ta chọn  $N = 26$ . Vậy lớp phải có ít nhất 26 sinh viên.

## 3.2. Giải tích tổ hợp

- ① Hoán vị
- ② Chỉnh hợp
- ③ Tổ hợp

### 3.2.1. Hoán vị

**Định nghĩa.** Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử. Mỗi cách sắp đặt có thứ tự  $n$  phần tử của  $A$  được gọi là một **hoán vị của  $n$  phần tử**.

**Ví dụ.** Cho  $A = \{1, 2, 3\}$ . Khi đó  $A$  có các hoán vị sau:

$$123, 132, 213, 231, 312, 321$$

**Định lý.** Số các hoán vị của  $n$  phần tử, ký hiệu  $P_n$ , là

$$P_n = n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$$

Quy ước  $0! = 1$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Cho  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập  $X$ ?

**Ví dụ.** Cần sắp xếp 5 sinh viên  $A, B, C, D, E$  thành một dãy hàng dọc

- a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?
- b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho hai sinh viên  $A$  và  $B$  luôn đứng ở đầu hàng?

**Giải.** a) Để xếp 5 sinh viên theo một dãy hàng dọc ta chỉ cần xếp 5 sinh viên theo thứ tự. Vậy có  $P_5 = 5! = 120$  cách.

b) Do 2 bạn  $A, B$  đứng đầu hàng nên có  $2!$  cách xếp 2 bạn đứng đầu. Ba vị trí còn lại ta chọn 3 sinh viên còn lại và xếp theo thứ tự nên có  $3!$  cách. Vậy theo nguyên lý nhân ta có:  $2! \times 3! = 2 \times 6 = 12$  cách.

**Ví dụ.** Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó có bao nhiêu số lẻ? bao nhiêu số không chia hết cho 5?

**Giải.** Để có số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau ta chọn sắp xếp 6 chữ số đã cho theo thứ tự. Nên có  $P_6 = 6! = 720$  số.

Gọi  $x = \overline{abcdef}$  là số có 6 chữ số khác nhau.

- Nếu  $x$  là số lẻ thì  $f \in \{1, 3, 5\}$  nên  $f$  có 3 cách chọn. Năm số còn lại  $a b c d e$  là hoán vị của 5 chữ số còn lại (vì đã loại đi số  $f$ ). Nên có  $5!$  cách chọn. Vậy theo qui tắc nhân ta có  $3 \times 5! = 360$  số lẻ
- Tương tự như lý luận trên, ta có  $5!$  số chia hết cho 5. Như vậy số không chia hết cho 5 là  $6! - 5! = 600$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Cần sắp xếp 3 sinh viên nữ và 5 sinh viên nam thành một hàng dọc.

- Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu 3 sinh viên nữ luôn đứng liền nhau ?
- Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu sinh viên đứng đầu hàng là sinh viên nữ và sinh viên cuối hàng là sinh viên nam ?

**Đáp án.** a)  $5! \times 6 \times 3! = 4320$  cách      b)  $3 \times 5 \times 6! = 10800$  cách



### 3.2.2. Chỉnh hợp

**Định nghĩa.** Cho  $A$  là tập hợp gồm  $n$  phần tử. Mỗi bộ sắp thứ tự gồm  $k$  phần tử của  $A$  được gọi là một **chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$**  phần tử.

**Ví dụ.** Cho  $X = \{a, b, c\}$ . Khi đó  $X$  có các chỉnh hợp chập 2 của 3 là:

$$ab, ba, ac, ca, bc, cb$$

**Định lý.** Số các chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$ , ký hiệu  $A_n^k$ , là

$$A_n^k = n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

**Ví dụ.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau được tạo thành từ 1, 2, 3, 4, 5, 6.

**Đáp án.**  $A_6^3$  số.

**Ví dụ.** (tự làm) Một lớp có 15 sinh viên nam và 20 nữ. Trong buổi tập trung lớp đầu năm, giáo viên chọn 3 sinh viên làm ban cán sự lớp gồm: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thủ quỹ.

- a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?
- b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng là nam?
- c) Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 3 bạn được chọn phải có ít nhất 1 nữ?

**Đáp án.** a)  $A_{35}^3$

b)  $15 \times A_{34}^2$

c)  $A_{35}^3 - A_{15}^3$

### 3.2.3. Tổ hợp

**Định nghĩa.** Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử. Mỗi **tập con** gồm  $k$  phần tử của  $A$  được gọi là một **tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử**.

**Ví dụ.** Cho  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ . Tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của  $X$  là

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$$

**Định lý.** Số tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử, kí hiệu  $\binom{n}{k}$  hay  $C_n^k$ , là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Ví dụ.** Có bao nhiêu cách chọn 10 sinh viên trong một lớp có 30 sinh viên?

**Đáp án.**  $C_{30}^{10}$  cách.

**Ví dụ.**(tự làm) Cho 20 điểm khác nhau nằm trên mặt phẳng, không có bất cứ 3 điểm nào trong số đó thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác, tứ giác có đỉnh là một trong các điểm đã cho?

**Đáp án.**  $C_{20}^3$  tam giác

$C_{20}^4$  tứ giác

**Ví dụ.**(tự làm) Một lớp có 40 sinh viên gồm 25 nam và 15 nữ. Ta cần chọn ra 6 sinh viên tham gia hội nghị của trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

- a) Không phân biệt nam nữ ?
- b) Có 4 nam và 2 nữ ?
- c) Có ít nhất là 4 sinh viên nam ?

**Đáp án.** a)  $C_{40}^6$

b)  $C_{25}^4 \times C_{15}^2$

c)  $C_{25}^4 \times C_{15}^2 + C_{25}^5 \times C_{15}^1 + C_{25}^6 \times C_{15}^0$

**Ví dụ.**(tự làm) Cho  $T = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ . Ký hiệu  $|X|$  để chỉ số phần tử của tập hợp  $X$ .

- a)  $T$  có bao nhiêu tập hợp con  $A$  thỏa  $|A| = 6$ ?
- b)  $T$  có bao nhiêu tập hợp con  $A$  thỏa  $|A| = 6$  và  $d \in A$ ?
- c)  $T$  có bao nhiêu tập hợp con  $A$  thỏa  $|A| = 6$  và  $d \notin A$

**Đáp án.** a)  $C_{11}^6$       b)  $C_{10}^5$       c)  $C_{11}^6 - C_{10}^5$

**Ví dụ.**(tự làm) Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bác sĩ, 4 kỹ sư, 3 luật sư vào một bàn dài có 12 chỗ ngồi (được đánh số từ 1 đến 12) trong mỗi trường hợp sau:

- a) không có điều kiện gì thêm?
- b) các đồng nghiệp ngồi cạnh nhau?
- c) các bác sĩ ngồi cạnh nhau ở một đầu bàn, còn các kỹ sư, luật sư ngồi xen kẽ ở đầu bàn còn lại?

**Đáp án.** a)  $12!$       b)  $3! \times 5! \times 4! \times 3!$       c)  $2 \times 5! \times 4! \times 3!$

**Ví dụ.**(tự làm) Có bao nhiêu số tự nhiên  $N = \overline{abcdefgh}$  gồm 8 chữ số hệ thập phân  $a, b, c, d, e, f, g, h$  thỏa các điều kiện  $a$  lẻ,  $b = 4, g > 6, h$  chia hết cho 3 và  $c, d, e, f$  tùy ý ?

**Đáp án.**  $5 \times 1 \times 10^4 \times 3 \times 4$

**Ví dụ.**(tự làm) Có bao nhiêu cách sắp 7 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà nam và nữ đứng xen kẽ ?

Có bao nhiêu cách sắp 6 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà nam và nữ đứng xen kẽ ?

Có bao nhiêu cách sắp 6 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà 6 nam đứng gần nhau ?

Có bao nhiêu cách sắp 7 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà 7 nam đứng gần nhau và 6 nữ đứng gần nhau ?

**Đáp án.**  $7! \times 6! \quad 6! \times 6! + 6! \times 6! \quad 6! \times 7 \times 6! \quad 2! \times 7! \times 6!$

**Ví dụ.**(tự làm) Từ 9 sinh viên nam và 8 sinh viên nữ, ta muốn chọn ra một đội gồm 10 người sao cho trong đội đó có ít nhất 4 nam và 4 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

**Đáp án.**  $C_9^4 \times C_8^6 + C_9^5 \times C_8^5 + C_9^6 \times C_8^4$

**Ví dụ.**(tự làm) Cho  $S = \{1, 2, \dots, 9, 10\}$ .

- a) Có bao nhiêu tập hợp con ?
- b) Có bao nhiêu tập hợp con mà mỗi tập có đúng 5 phần tử ?
- c) Có bao nhiêu tập hợp con mà mỗi tập có không quá 4 phần tử?

**Đáp án.** a)  $2^{10}$       b)  $C_{10}^5$       c)  $C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4$

**Ví dụ.**(tự làm) Từ 9 nam và 11 nữ, ta muốn chọn ra một đội văn nghệ gồm 10 người sao cho số nam và số nữ trong đội chênh lệch nhau không quá 2. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn đội?

**Đáp án.**  $C_9^4 \times C_{11}^6 + C_9^5 \times C_{11}^5 + C_9^6 \times C_{11}^4$

**Ví dụ.**(tự làm) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 và 8, ta có thể tạo ra

- a) bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?
- b) bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau trong đó có chữ số 5?

**Đáp án.** a)  $A_8^4$                       b)  $A_8^3 - A_7^3$

**Ví dụ.**(tự làm) Có 3 luật sư, 4 bác sĩ và 5 kỹ sư xếp thành một hàng dọc sao cho các đồng nghiệp phải đứng cạnh nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp? Nếu yêu cầu thêm các luật sư không đứng ở đầu hàng thì có tất cả bao nhiêu cách xếp ?

**Đáp án.**  $3! \times 3! \times 4! \times 5!$                        $2 \times 2! \times 3! \times 4! \times 5!$



### 3.3. Tổ hợp lặp

- ① Hoán vị lặp
- ② Chỉnh hợp lặp
- ③ Tổ hợp lặp
- ④ Khai triển lũy thừa của đa thức

### 3.3.1. Hoán vị lặp

**Ví dụ.** Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ AAABB?

**Đáp án.** 10

**Định nghĩa.** Cho  $n$  đối tượng trong đó có  $n_i$  đối tượng loại  $i$  ( $1 < i \leq k$ ) giống hệt nhau, nghĩa là

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

Mỗi cách sắp xếp có thứ tự  $n$  đối tượng đã cho gọi là **một hoán vị lặp** của  $n$ .

Số hoán vị lặp của  $n$  trong trường hợp này là

$$P_n^*(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

**Ví dụ.** Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ SUCCESS?

**Giải.** Trong từ SUCCESS có 3 chữ S, 1 chữ U, 2 chữ C và 1 chữ E. Do đó số chuỗi có được là

$$\frac{7!}{3! \times 1! \times 2! \times 1!} = 420$$

**Ví dụ.**(tự làm) Từ các chữ số 1, 2, 3 lập được bao nhiêu số tự nhiên có đúng 5 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 3 chữ số 3.

**Hướng dẫn.** Số tự nhiên đó có 10 chữ số, trong đó có đúng 5 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 3 chữ số 3. Do đó ta sẽ lập được

$$\frac{10!}{5! \times 2! \times 3!} = 2520 \text{ số}$$

### 3.3.2. Chỉnh hợp lặp

**Ví dụ.** Từ bảng chữ cái tiếng Anh, ta lập được bao nhiêu chuỗi chữ cái có độ dài 5?

**Đáp án.**  $26^5$

**Định nghĩa.** Cho  $A$  là tập hợp gồm  $n$  phần tử. **Chỉnh hợp lặp** chập  $k$  của  $n$  phần tử là một bộ sắp thứ tự  $k$  phần tử của  $A$ , các phần tử có thể lặp lại.

Số chỉnh hợp lặp chập  $k$  của  $n$  là:  $F_n^k = n^k$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Hỏi có bao nhiêu số có 10 chữ số mà 3 chữ số đầu và 3 chữ số cuối tương ứng giống nhau?

**Đáp án.**  $9 \times 10^2 \times 10^4 = 9000000$ .

### 3.3.3. Tổ hợp lặp

**Ví dụ.** Cửa hàng có 3 loại nón A, B, C, An muốn mua 2 cái nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn?

**Đáp án.** An có 6 cách chọn là AA, AB, AC, BB, BC, CC.

**Định nghĩa.** Mỗi cách chọn ra  $k$  vật từ  $n$  loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là **tổ hợp lặp** chập  $k$  của  $n$ .

Số các tổ hợp lặp chập  $k$  của  $n$  được ký hiệu là  $K_n^k$  và

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

**Hệ quả.** Số nghiệm nguyên không âm  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0$ ) của phương trình

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

là  $K_n^k = C_{n+k-1}^k$ .

**Ví dụ.** Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10.$$

**Giải.** Số nghiệm nguyên không âm của phương trình là:  $K_3^{10} = C_{12}^{10}$ .

**Ví dụ.** Tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad (*)$$

thỏa điều kiện  $x_1 \geq 4; x_2 > 2; x_3 > 5; x_4 \geq -2$

**Giải.** Ta viết điều kiện đã cho thành

$$x_1 \geq 4; x_2 \geq 3; x_3 \geq 6; x_4 \geq -2.$$

Đặt

$$y_1 = x_1 - 4; y_2 = x_2 - 3; y_3 = x_3 - 6; y_4 = x_4 + 2.$$

Khi đó  $y_i \geq 0$  ( $1 \leq i \leq 4$ ). Phương trình (\*) trở thành

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9 \quad (**)$$

Ta có số nghiệm của phương trình (\*) bằng số nghiệm của phương trình (\*\*). Do đó số nghiệm của phương trình (\*) là  $K_4^9 = C_{12}^9$ .

**Ví dụ.** Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

thỏa điều kiện  $x_1 \leq 3; x_2 \geq 2; x_3 > 4$ . (\*)

**Giải.** Ta viết điều kiện đã cho thành

$$0 \leq x_1 \leq 3; x_2 \geq 2; x_3 \geq 5; x_4 \geq 0.$$

Xét các điều kiện sau:

- $x_1 \geq 0; x_2 \geq 2; x_3 \geq 5; x_4 \geq 0$  (\*\*)
- $x_1 > 3; x_2 \geq 2; x_3 \geq 5; x_4 \geq 0$  (\*\*\*)

Gọi  $p, q, r$  lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình thỏa các điều kiện (\*), (\*\*), (\*\*\*). Khi đó  $p = q - r$ .

Trước hết ta tìm  $q$ . Đặt

$$y_1 = x_1; y_2 = x_2 - 2; y_3 = x_3 - 5; y_4 = x_4$$

Phương trình (1) trở thành

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13 \quad (2)$$

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (\*\*) bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2)

Số nghiệm đó là  $K_4^{13} = C_{16}^{13}$ . Vậy  $q = C_{16}^{13}$ .

Lý luận tương tự ta có  $r = K_4^9 = C_{12}^9$ . Như vậy

$$p = q - r = C_{16}^{13} - C_{12}^9 = 560 - 220 = 340.$$

Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (\*) là 340.

**Hệ quả.** Số cách chia  $k$  vật giống nhau vào  $n$  hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lặp chập  $k$  của  $n$ .



**Ví dụ.**(tự làm) Tìm số cách chia 15 viên bi giống nhau cho 4 đứa trẻ.

**Đáp án.**  $K_4^{15} = C_{18}^{15}$ .

**Ví dụ.** Tìm số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình sau:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11.$$

**Giải.** Đặt  $x_4 = 11 - (x_1 + x_2 + x_3)$ . Khi đó  $x_4 \geq 0$  và bất phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

với  $x_1, x_2, x_3, x_4$  là các số nguyên không âm. Do đó số nghiệm của bất phương trình là:  $K_4^{11} = C_{14}^{11} = 364$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$x + y + z \leq 20,$$

biết  $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình  $x + y + z \leq 15$  thỏa điều kiện  $2 \leq x \leq 6, y \geq 2, z \geq 3$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình  $x + y + z + t = 16$  thỏa điều kiện  $2 \leq x \leq 5, y \geq 1, z \geq 2, t \geq 3$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$  biết  $x_1 \geq 1$  hay  $x_2 \geq 2$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Có bao nhiêu cách chia 18 viên bi giống nhau cho 4 đứa trẻ sao cho mỗi đứa trẻ đều có bi và đứa lớn nhất được ít nhất 6 viên bi.

### 3.3.4. Khai triển lũy thừa của đa thức

**Định lý.** Cho  $x, y$  là biến và  $n$  là số tự nhiên. Khi đó

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k \\ &= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n.\end{aligned}$$

**Ví dụ.** Khai triển  $(x + y)^4$

**Giải.** 
$$\begin{aligned}(x + y)^4 &= \sum_{k=0}^4 C_4^k x^{4-k} y^k \\ &= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 y + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x y^3 + C_4^4 y^4. \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4x y^3 + y^4.\end{aligned}$$

**Ví dụ.**(tự làm) Khai triển  $(2x - 3y)^5$

**Ví dụ.** Tìm hệ số của  $x^{12}y^{13}$  trong khai triển  $(2x - 3y)^{25}$ ?

**Giải.** Dựa vào Định lý, ta có

$$\left[2x + (-3y)\right]^{25} = \sum_{k=0}^{25} C_{25}^k (2x)^{25-k} (-3y)^k.$$

Do đó hệ số của  $x^{12}y^{13}$  có được khi  $k = 13$ . Suy ra hệ số cần tìm là:

$$C_{25}^{13} 2^{12} (-3)^{13} = -33959763545702400.$$

**Định lý.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_m$  là các biến và  $n$  là số nguyên dương. Khi đó

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

**Ví dụ.** Tìm hệ số của  $x^3y^5z$  trong khai triển  $(x + 2y - 3z + t)^9$

**Giải.** Áp dụng Định lý trên, ta có số hạng chứa  $x^3y^5z$  là

$$\frac{9!}{3!5!1!0!}x^3(2y)^5(-3z)^1t^0 = -48384x^3y^5z.$$

Vậy hệ số của  $x^3y^5z$  là  $-48384$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Cho khai triển của  $(-x + y - 2z + t)^{10}$

- a) Tìm hệ số của  $x^5y^4t$ .
- b) Có bao nhiêu số hạng khác nhau trong phép khai triển trên?

**Hướng dẫn.** b) Mỗi số hạng có dạng  $Mx^ay^bz^ct^d$ . Suy ra các số hạng khác nhau của khai triển là số nghiệm của phương trình

$$a + b + c + d = 10,$$

với  $a, b, c, d$  là các số nguyên không âm. **Đáp án.**  $K_4^{10} = C_{13}^{10}$ .