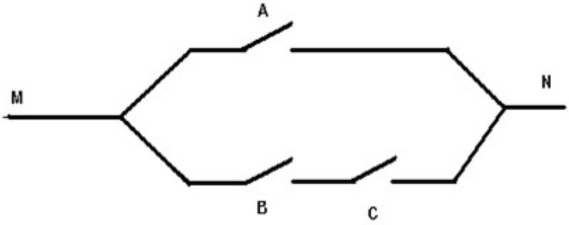
Chương 7

HÀM BOOLE

Mở đầu

Xét sơ đồ mạch điện như hình vẽ

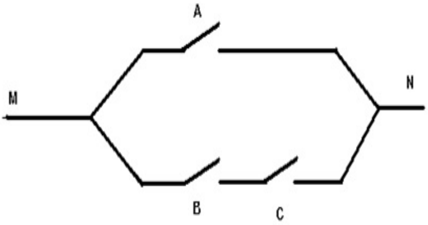


Tùy theo cách trạng thái cầu dao A, B, C mà ta sẽ có dòng điện đi qua MN hay không?

Như vậy ta sẽ có bảng giá trị sau

Bảng giá trị

A	B	C	MN
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Câu hỏi. Khi mạch điện gồm nhiều cầu dao, làm sao ta có thể kiểm soát được.

Giải pháp là đưa ra công thức, với mỗi cầu dao ta xem như là một biến.

Nội dung

Chương 7. HÀM BOOLE

1. Đại số Boole
2. Mạng logic
3. Biểu đồ Karnaugh

7.1.1. Đại số Boole

Ví dụ. Xét tập hợp $\mathbb{B} = \{0; 1\}$. Với mọi $x, y \in \mathbb{B}$, ta định nghĩa:

- $x \wedge y = xy$,
- $x \vee y = x + y - xy$,
- $\overline{x} = 1 - x$.

Các phép toán vừa định nghĩa có bảng giá trị là:

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\overline{x}$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Khi đó, tập hợp $\mathbb{B}$ với các phép toán trên là một ***đại số Boole***;

1. $\wedge$ được gọi là ***tích Boole***;
2. $\vee$ là ***tổng Boole***;
3. $\overline{x}$ là ***phần bù*** của x.

Nhận xét. Do $x \wedge y = xy$ nên ta dùng ký hiệu xy thay cho $x \wedge y$.

Nhận xét. Cho x và y là các phần tử thuộc $\mathbb{B}$. Khi đó

1. $xy = yx; \quad x \vee y = y \vee x$
2. $xx = x; \quad x \vee x = x$
3. $x\overline{x} = 0; \quad x \vee \overline{x} = 1$
4. $x(y \vee z) = xy \vee xz;$

7.1.2. Hàm Boole

Định nghĩa. Một ***hàm Boole*** n biến là ánh xạ

$$f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B},$$

trong đó $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

Như vậy hàm Boole n biến là một hàm số có dạng :

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

trong đó mỗi biến trong $x_1, x_2, \ldots, x_n$ chỉ nhận hai giá trị $0, 1$ và f nhận giá trị trong $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ và $\mathbb{B}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{B}\}$.

Ký hiệu $\mathbb{F}_n$ để chỉ tập các hàm Boole n biến.

Ví dụ.

$$f(x, y, z, t) = (\overline{x} \vee \overline{z})t \vee (\overline{x}\, y \vee \overline{y}\, t)z \vee (\overline{y}\, z \vee x\, y\, \overline{z})\overline{t}$$

là hàm Boole 4 biến.

Bảng chân trị

Định nghĩa. Xét hàm Boole n biến $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Vì mỗi biến x_i chỉ nhận một trong hai giá trị $0, 1$ nên chỉ có 2^n trường hợp của bộ biến $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Do đó, để mô tả f, ta có thể lập bảng gồm 2^n hàng ghi tất cả các giá trị của f tùy theo 2^n trường hợp của biến. Ta gọi đây là ***bảng chân trị*** của f.

Ví dụ. Xét kết quả f trong việc thông qua một quyết định dựa vào 3 phiếu bầu x, y, z. Mỗi phiếu chỉ lấy một trong hai giá trị: 1 (tán thành) hoặc 0 (bác bỏ).

Kết qủa f là 1 (thông qua quyết định) nếu được đa số phiếu tán thành, là 0 (không thông qua quyết định) nếu đa số phiếu bác bỏ.

Hãy lập bảng chân trị của f.

Giải. Bảng chân trị của hàm Boole f là:

x	y	z	f
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Ví dụ.(tự làm) Trong cuộc thi bắn cung, mỗi người phải bắn 4 lần (x, y, z, t), số điểm trúng đích cho mỗi lần lần lượt là $2, 4, 6, 8$. Kết quả là đạt nếu tổng điểm là 10 trở lên. Gọi f là boole tương ứng, là 1 nếu đạt và 0 nếu không đạt. Hãy lập bảng chân trị của f.

7.1.3. Dạng nối rời chính tắc

Từ đơn, từ tối tiểu

Định nghĩa. Xét tập hợp các hàm Boole $\mathbb{F}_n$ theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó:

i) Mỗi hàm Boole x_i hay $\overline{x}_i$ được gọi là ***từ đơn.***

ii) ***Từ tối tiểu*** là tích khác không của đúng n từ đơn.

Ví dụ. Xét tập hợp các hàm Boole theo 3 biến x, y, z. Ta có

- Các từ đơn là x, y, z, $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.
- Các từ tối tiểu là $x\,y\,z$, $\overline{x}\,y\,z$, $x\,\overline{y}\,z$, $x\,y\,\overline{z}$, $\overline{x}\,\overline{y}\,z$, $\overline{x}\,y\,\overline{z}$, $x\,\overline{y}\,\overline{z}$, $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$.

Nhận xét. Tập hợp các hàm Boole n biến chứa đúng $2n$ từ đơn và 2^n từ tối tiểu.

Định lý. *Cho f là hàm Boole n biến $x_1, x_2, \ldots x_n$. Khi đó:*

i) *Nếu f là từ tối tiểu thì bảng chân trị của f có đúng một vị trí bằng 1.*

ii) *Ngược lại, nếu f chỉ nhận giá trị 1 tại vị trí $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ thì f là từ tối tiểu có dạng $f = b_1\, b_2 \ldots b_n$, trong đó*

$$b_i = \begin{cases} x_i & \text{nếu } a_i = 1; \\ \overline{x}_i & \text{nếu } a_i = 0. \end{cases}$$

Ví dụ.

1. Nếu $f(x, y, z)$ chỉ nhận giá trị 1 tại vị trí $(1, 0, 1)$ thì $f = x\ \overline{y}\ z$.
2. Nếu $f(x, y, z, t)$ chỉ nhận giá trị 1 tại vị trí $(0, 1, 1, 0)$ thì
$$f = \overline{x}\ y\ z\ \overline{t}.$$
3. Nếu $f(x, y, z, t) = x\, y\, \overline{z}\, \overline{t}$ thì f chỉ nhận giá trị 1 tại vị trí $(1, 1, 0, 0)$.

Định nghĩa. Xét tập hợp các hàm Boole của n biến $\mathbb{F}_n$ theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó:

i) ***Đơn thức*** là tích khác không của một số hữu hạn từ đơn.

ii) ***Công thức đa thức*** là công thức biểu diễn hàm Boole thành tổng của các đơn thức.

Ví dụ. Xét tập hợp các hàm Boole theo 3 biến x, y, z. Ta có

- Các hàm Boole y, $x\,z$, $y\,z$, $x\,\overline{y}\,z$, $\overline{y}\,\overline{z}$, $\overline{z}$ là các đơn thức.
- Công thức $f = x\,y \vee \overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z}$ là một công thức đa thức.

Ví dụ. Xét hàm Boole $f(x, y, z) = x\,(y \vee \overline{z}) \vee \overline{x}\,z \quad (1)$. Ta có (1) không là công thức đa thức của f. Tuy nhiên,

$$(1) \Leftrightarrow f = x\,y \vee x\,\overline{z} \vee \overline{x}\,z, \qquad (2)$$

Khi đó (2) là công thức đa thức của f.

Nhận xét. Mọi hàm Boole đều có thể biểu diễn dưới dạng đa thức.

Định nghĩa. ***Dạng nối rời chính tắc*** là công thức biểu diễn hàm Boole thành tổng của các từ tối tiểu.

Ví dụ. Xét hàm Boole

$$f(x, y, z) = x(y \vee \overline{z}) \vee \overline{x}z. \quad (1)$$

- Ta có (1) không là công thức đa thức của f.
- Ta có
$$(1) \Leftrightarrow f = x\,y \vee x\,\overline{z} \vee \overline{x}\,z. \quad (2)$$
Khi đó (2) là công thức đa thức của f nhưng không phải là dạng nối rời chính tắc của f.
- Ta có
$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow f = x\,y(z \vee \overline{z}) \vee x\,\overline{z}(y \vee \overline{y}) \vee \overline{x}\,z(y \vee \overline{y}) \\ &\Leftrightarrow f = x\,y\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \\ &\Leftrightarrow f = x\,y\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z. \qquad (3).\end{aligned}$$

Công thức (3) là dạng nối rời chính tắc của f.

Lưu ý. $\mathbb{B}^n = \{u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{B}\}$

Định nghĩa. Xét hàm Boole f theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Đặt

- $f^{-1}(1) = \{u \in \mathbb{B}^n \,|\, f(u) = 1\}$,
- $f^{-1}(0) = \{u \in \mathbb{B}^n \,|\, f(u) = 0\}$.

Chẳng hạn, hàm Boole $f = f(x, y, z)$ có bảng chân trị

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Ta có

- $f^{-1}(1) = \{001, 011, 101, 111\}$
- $f^{-1}(0) = \{000, 010, 100, 110\}$

Trong đó, ta dùng ký hiệu 001 thay cho $(0, 0, 1)$; 011 thay cho $(0, 1, 1)$; $\ldots$.

Định lý. *Cho f là hàm Boole n biến. Khi đó, nếu*

$$f^{-1}(1) = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$$

thì dạng nối rời chính tắc của f là

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k,$$

trong đó m_i là từ tối tiểu nhận giá trị 1 tại vị trí u_i.

Ví dụ. Nếu f là hàm Boole theo 3 biến x, y, z sao cho

$$f^{-1}(1) = \{101, 001, 100, 010\}$$

thì dạng nối rời chính tắc của f là:

$$f = x\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho f là hàm Boole theo 4 biến x, y, z, t được xác định bởi

$$f^{-1}(1) = \{1001, 0101, 1000, 1010, 0111\}.$$

Hãy tìm dạng nối rời chính tắc của f?

Ví dụ. Cho hàm Boole 3 biến x, y, z,

$$f^{-1}(0) = \{100, 010, 110, 011, 101\}.$$

Tìm dạng nối rời chính tắc của f

Giải. Bằng cách lập bảng chân trị cho f ta được

$$f^{-1}(1) = \{000, 001, 111\},$$

nên dạng nối rời chính tắc của f là:

$$f = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,z.$$

7.2. Mạng logic

1. **Mạng logic**
2. **Cổng NAND và cổng NOR**

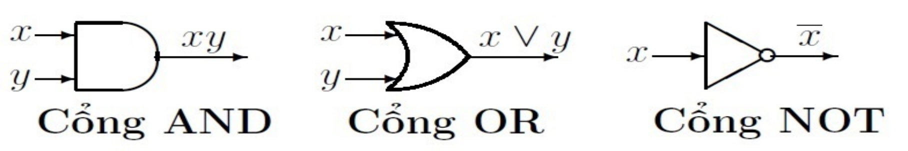
7.2.1. Mạng logic

Định nghĩa. Một ***mạng logic*** (hay ***mạng các cổng***) biểu diễn một hàm boole f là một hệ thống có dạng

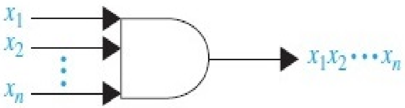
trong đó

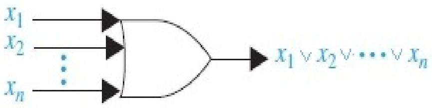
1. **Input:** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các biến boole
2. **Output:** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là hàm boole.

Một mạng các cổng luôn được cấu tạo từ một số ***mạng sơ cấp*** mà ta gọi là các cổng. Ta có các cổng cơ bản sau:



Ta có sự mở rộng cổng AND và OR cho nhiều đầu vào



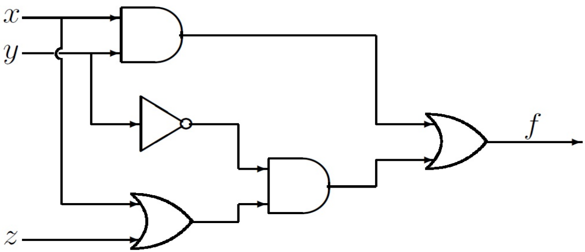


Ví dụ. Cho hàm boole

$$f = xy \vee \overline{y}(x \vee z).$$

Vẽ sơ đồ mạng logic của f

Giải.



Ví dụ.(tự làm) Cho hàm boole

$$f = (x \vee z)(\overline{x}\, y) \vee y(\overline{x}\, z)$$

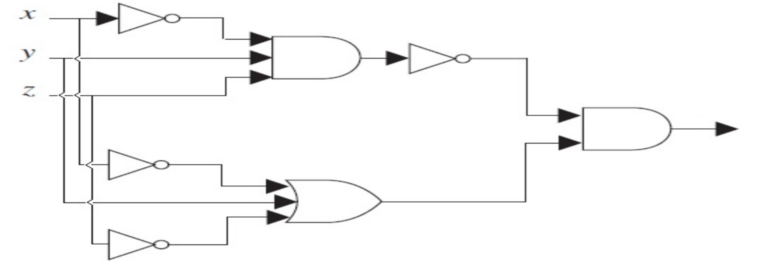
Vẽ sơ đồ mạng logic của f

Ví dụ.(tự làm) Cho hàm boole

$$f = (x \vee y \vee z)\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$

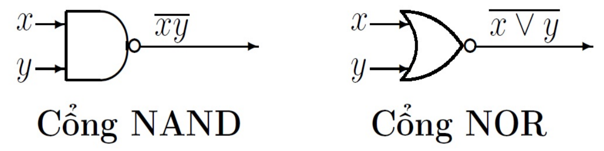
Vẽ sơ đồ mạng logic của f

Ví dụ.(tự làm) Tìm công thức của mạng logic sau:



7.2.2. Cổng NAND và cổng NOR

Định nghĩa. Ta ký hiệu cổng NAND là NOT của AND và cổng NOR là NOT của OR.



Định lý. *Chỉ cần sử dụng một loại cổng NAND hoặc NOR là đủ để tổng hợp một hàm boole.*

Chứng minh. Ta có

1. $\overline{x} = \overline{xx} = \overline{x \vee x}$
2. $xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$
3. $x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = \overline{\overline{x \vee y}}$

7.3. Biểu đồ Karnaugh

1. **Biểu đồ Karnaugh**
2. **Tế bào**
3. **Đa thức tối tiểu**

7.3.1. Biểu đồ Karnaugh

Định nghĩa. Cho f là một hàm boole theo 4 biến x, y, z, t. Khi đó bảng chân trị của f gồm 16 dòng.

Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 16 ô, được đánh dấu như sau:

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$	
z	1010	1110	0110	0010	$\overline{t}$
z	1011	1111	0111	0011	t
$\overline{z}$	1001	1101	0101	0001	t
$\overline{z}$	1000	1100	0100	0000	$\overline{t}$
	$\overline{y}$	y	y	$\overline{y}$	

Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó $x = 1$, bởi $\overline{x}$ thì tại đó $x = 0$, tương tự cho y, z, t.

Gạch chéo (hoặc tô đen) những ô mà f nhận giá trị 1. Khi đó ta được một biểu đồ, gọi là ***biểu đồ Karnaugh*** của f, ký hiệu bởi $\boldsymbol{kar(f)}$.

Ví dụ. Cho hàm boole theo 4 biến x, y, z, t với

$$f^{-1}(1) = \{1110, 0110, 1111, 1101, 0101, 1000, 0100\}.$$

Tìm biểu đồ Karnaugh của f?

Giải.

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z	1010	1110	0110	0010	$\bar{t}$
z	1011	1111	0111	0011	t
$\bar{z}$	1001	1101	0101	0001	t
$\bar{z}$	1000	1100	0100	0000	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

Ví dụ. Cho hàm boole theo 4 biến x, y, z, t với

$$f^{-1}(0) = \{1110, 0110, 1111, 1101, 0101, 1000, 0100\}.$$

Tìm biểu đồ Karnaugh của f?

Giải.

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z	1010	1110	0110	0010	$\bar{t}$
z	1011	1111	0111	0011	t
$\bar{z}$	1001	1101	0101	0001	t
$\bar{z}$	1000	1100	0100	0000	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

Ví dụ.(tự làm) Cho hàm boole theo 4 biến x, y, z, t với

$$f^{-1}(1) = \{1100,\ 1101,\ 1110,\ 1111,\ 1000,\ 1001,\ 0111,\ 0011,\ 0001\}.$$

Tìm biểu đồ Karnaugh của f?

Ví dụ.(tự làm) Cho hàm boole theo 4 biến x, y, z, t với

$$f^{-1}(0) = \{1011,\ 1001,\ 1100,\ 0100,\ 0011,\ 0001\}.$$

Tìm biểu đồ Karnaugh của f?

Mệnh đề. *Cho f và g là các hàm boole theo 4 biến x, y, z, t. Khi đó*

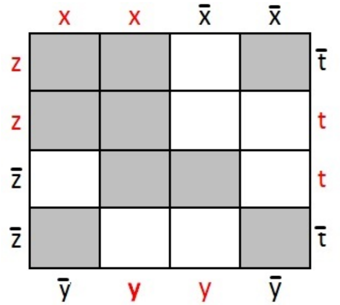
1. $f = g \Leftrightarrow kar(f) = kar(g)$;
2. $kar(fg) = kar(f) \cap kar(g)$;
3. $kar(f \vee g) = kar(f) \cup kar(g)$;

Ví dụ. Cho hàm boole theo 4 biến x, y, z, t với

$$f = x\,z \vee y\bar{z}\,t \vee \bar{y}\,\bar{t}.$$

Tìm biểu đồ Karnaugh của f.

Đáp án.



Ví dụ.(tự làm) Cho hàm boole theo 4 biến x, y, z, t với

$$f = x\bar{y}\,z \vee y\;z \vee x\,y\,t.$$

Tìm biểu đồ Karnaugh của f.

Ví dụ.(tự làm) Cho hàm boole theo 4 biến x, y, z, t với

$$f = \overline{x}\,\overline{y}\,t \vee x\,y\,z \vee x\,z \vee y\,z\,\overline{t}.$$

Tìm biểu đồ Karnaugh của f.

Định nghĩa. Tương tự đối với trường hợp hàm Boole 3 biến ta có bảng chân trị là

	x	x	$\overline{\text{x}}$	$\overline{\text{x}}$
z	**101**	**111**	**011**	**001**
$\overline{\text{z}}$	**100**	**110**	**010**	**000**
	$\overline{\text{y}}$	y	y	$\overline{\text{y}}$

Ví dụ.(tự làm) Tìm biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 3 biến x, y, z biết:

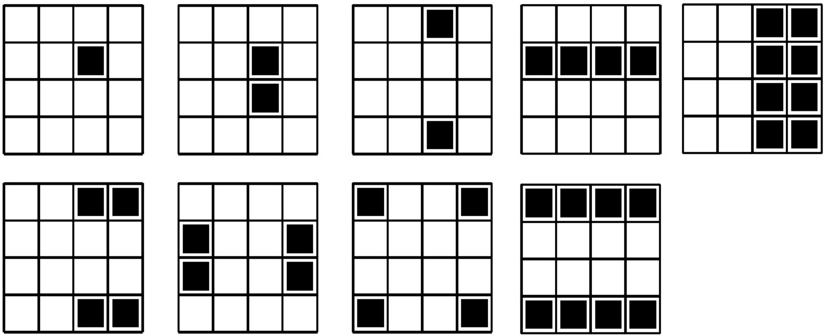
a) $f = \overline{x}\,\overline{y} \vee x\,y\,z \vee x\,\overline{z}$.

b) $f^{-1}(1) = \{111, 010, 110, 001, 100\}$.

7.3.2. Tế bào

Định nghĩa. $Kar(f)$ được gọi là ***hình chữ nhật*** (theo nghĩa rộng) nếu khi ta cuốn hình vuông lớn theo chiều dọc hay chiều ngang để thành hình trụ thì $kar(f)$ trở thành hình chữ nhật trên hình trụ đó. Hình chữ nhật có số ô là lũy thừa của 2 được gọi là một ***tế bào***.

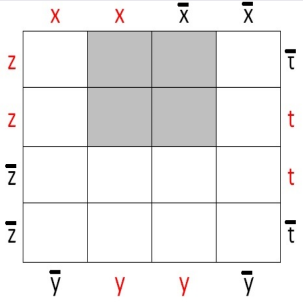
Ví dụ. Các biểu đồ sau là các tế bào

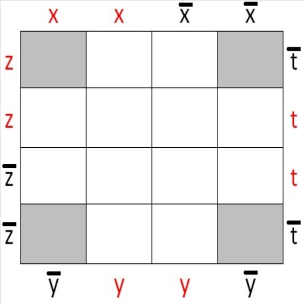


Nhận xét. Nếu T là một tế bào thì T là biểu đồ Karnaugh của một đơn thức duy nhất m, cách xác định m như sau:

Lần lượt chiếu T lên các cạnh, nếu toàn bộ hình chiếu nằm trọn trong một từ đơn nào thì từ đơn đó mới xuất hiện trong m.

Ví dụ.



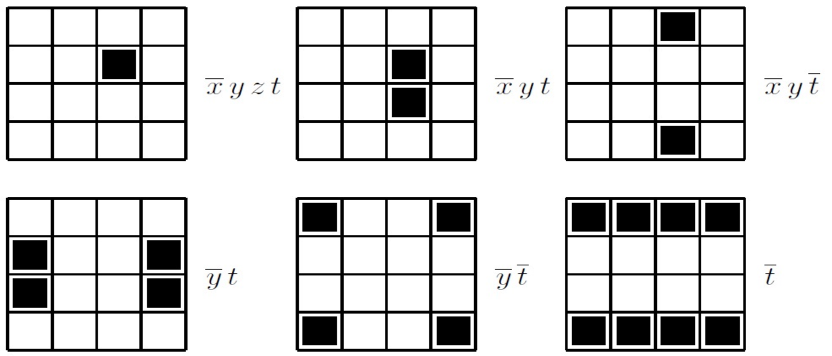


Tế bào có công thức là: $y\,z$

Tế bào có công thức là: $\overline{y}\,\overline{t}$

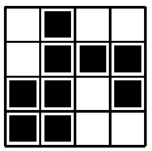
Mệnh đề. *Cho f là hàm boole theo 4 biến x, y, z, t. Khi đó $kar(f)$ là tế bào gồm 2^k ô khi và chỉ khi f là một đơn thức gồm $4-k$ từ đơn.*

Ví dụ. Ta có các tế bào và các đơn thức tương ứng là



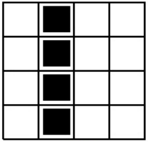
Định nghĩa. Một tế bào nằm trong $kar(f)$ được gọi là ***tế bào lớn*** nếu nó không nằm trong tế bào nào khác của $kar(f)$.

Ví dụ. Giả sử hàm boole f có biểu đồ Karnaugh là

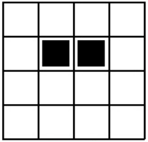


Tìm tất cả các tế bào lớn của $kar(f)$.

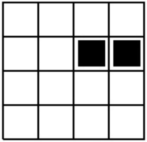
Giải. Các tế bào lớn của $kar(f)$ là:



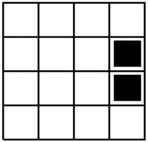
$x\,y$



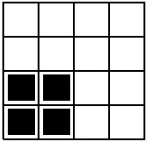
$y\,z\,t$



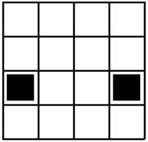
$\overline{x}\,z\,t$



$\overline{x}\,\overline{y}\,t$

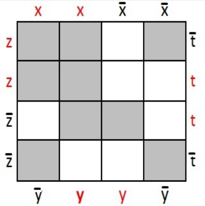


$x\,\overline{z}$



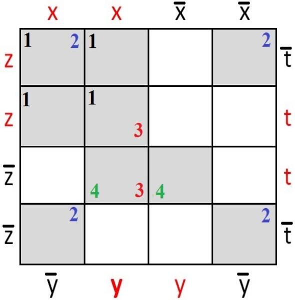
$\overline{y}\,\overline{z}\,t$

Ví dụ. Giả sử hàm boole f có biểu đồ Karnaugh là



Tìm tất cả các tế bào lớn của f?

Giải. Bằng cách đánh số các tế bào lớn ta có



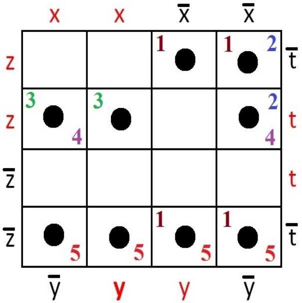
Như vậy $kar(f)$ có 4 tế bào lớn là

1. Tế bào 1: $x\,z$
2. Tế bào 2: $\overline{y}\,\overline{t}$
3. Tế bào 3: $x\,y\,t$
4. Tế bào 4: $y\,\overline{z}\,t$

Ví dụ. Tìm các tế bào lớn của biểu đồ Karnaugh của f với

$$f(x,y,z,t) = \bar{y}\,z\,t \vee \bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee y\,\bar{z}\,\bar{t} \vee x\,y\,z\,t \vee \bar{x}\,z\,\bar{t}$$

Giải. Biểu đồ $kar(f)$ là



Bằng cách đánh số các tế bào lớn, ta có $kar(f)$ có 5 tế bào lớn là

1. Tế bào 1: $\bar{x}\,\bar{t}$
2. Tế bào 2: $\bar{x}\,\bar{y}\,z$
3. Tế bào 3: $x\,z\,t$
4. Tế bào 4: $\bar{y}\,z\,t$
5. Tế bào 5: $\bar{z}\,\bar{t}$

Ví dụ.(tự làm) Tìm các tế bào lớn của biểu đồ Karnaugh của f với

$$f(x,y,z,t) = x\bar{y}\,z \vee \bar{y}\,\bar{z}\,t \vee x\,\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z\,\bar{t}$$

7.3.3. Đa thức tối tiểu

Định nghĩa. Cho hai công thức đa thức của một hàm boole:

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k \qquad (F)$$
$$f = M_1 \vee M_2 \vee \ldots \vee M_l \qquad (G)$$

Ta nói rằng công thức F ***đơn giản hơn*** công thức G nếu tồn tại đơn ánh

$$h : \{1, 2, .., k\} \to \{1, 2, \ldots, l\}$$

sao cho với mọi $i \in \{1, 2, .., k\}$ thì số từ đơn của m_i không nhiều hơn số từ đơn của $M_{h(i)}$

Ví dụ. Giả sử f có hai công thức đa thức là

$$f = \bar{y}\bar{t} \vee x\bar{y}t \vee x\bar{t} \vee xzt \vee \bar{x}\bar{y}z \qquad (F)$$
$$f = \bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{y}zt \qquad (G)$$

Hỏi công thức nào đơn giản hơn? **Đáp án.** G

Ví dụ. Giả sử f có hai công thức đa thức là

$$f = \bar{y}\bar{t} \vee x\bar{y}t \vee x\bar{t} \vee xz \qquad (F)$$

$$f = \bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{y}zt \qquad (G)$$

Hỏi công thức nào đơn giản hơn?

Đáp án. F

Định nghĩa. Công thức F của hàm boole f được gọi là ***đa thức tối tiểu*** nếu không có công thức nào của f đơn giản hơn nó.

Thuật toán Karnaugh

Bước 1. Vẽ biểu đồ $kar(f)$

Bước 2 Xác định tất cả các tế bào lớn của $kar(f)$ và các công thức đơn thức tương ứng với từng tế bào lớn.

Bước 3. Tìm trong $kar(f)$ những ô chỉ nằm trong duy nhất một tế bào lớn và chọn tế bào này để phủ $kar(f)$.

Bước 4. Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn.

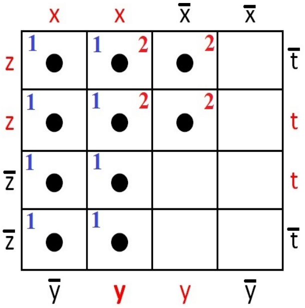
- Nếu các tế bào lớn chọn được ở Bước 3 đã phủ được $kar(f)$ thì $kar(f)$ chỉ có duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của $kar(f)$.
- Ngược lại, ta xét một ô bất kỳ chưa bị phủ. Sẽ có ít nhất hai tế bào lớn chứa ô này. Ta chọn một trong các tế bào lớn đó để phủ. Cứ tiếp tục quá trình trên đến khi nào $kar(f)$ được phủ kín. Khi đó, ứng với mỗi phép phủ ta có một công thức đa thức. Công thức đơn giản nhất trong các công thức trên chính là công thức đa thức tối tiểu của f.

Ví dụ. Tìm đa thức tối tiểu của hàm boole sau:

$$f(x, y, z, t) = xyzt \vee x(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee yz \vee xy(\bar{z} \vee \bar{t})$$

Giải. Ta có $f = xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$

Bước 1. Vẽ biểu đồ $kar(f)$



Bước 2. Xác định các tế bào lớn của $kar(f)$

Bằng cách đánh số các tế bào lớn, ta có $kar(f)$ có 2 tế bào lớn là:

1. Tế bào 1: x
2. Tế bào 2: yz

Bước 3.

1. Ô $(1,1)$ chỉ nằm trong tế bào lớn 1. Ta phải chọn tế bào 1.
2. Ô $(1,3)$ chỉ nằm trong tế bào lớn 2. Ta phải chọn tế bào 2.

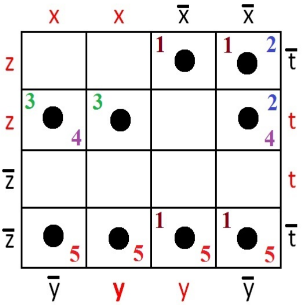
Bước 4. Ta được duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của $kar(f)$ là $x \vee yz$. Vậy công thức đa thức tối tiểu của f là

$$f = x \vee yz.$$

Ví dụ. Tìm đa thức tối tiểu của hàm boole sau:

$$f(x,y,z,t) = \bar{y}zt \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee y\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}z\bar{t}.$$

Giải. Bước 1. Biểu đồ $kar(f)$



Bước 2. Xác định các các tế bào lớn của $kar(f)$, ta có 5 tế bào lớn là

1. Tế bào 1: $\bar{x}\,\bar{t}$
2. Tế bào 2: $\bar{x}\,\bar{y}\,z$
3. Tế bào 3: $x\,z\,t$
4. Tế bào 4: $\bar{y}\,z\,t$
5. Tế bào 5: $\bar{z}\,\bar{t}$

Bước 3.

1. Ô $(1,3)$ chỉ nằm trong tế bào lớn 1. Ta phải chọn tế bào 1.
2. Ô $(2,2)$ chỉ nằm trong tế bào lớn 3. Ta phải chọn tế bào 3.
3. Ô $(4,1)$ chỉ nằm trong tế bào lớn 5. Ta phải chọn tế bào 5.

Bước 4. Như vậy chỉ còn ô $(2,4)$ là chưa được phủ, để phủ ô $(2,4)$ ta có 2 cách chọn

1. **Cách 1.** Chọn tế bào 2. Khi đó tế bào 1, 2, 3, 5 sẽ phủ hết các ô. Do đó, ta có

$$f = \bar{x}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xzt \vee \bar{z}\bar{t} \qquad (1)$$

2. **Cách 2.** Chọn tế bào 4. Khi đó tế bào 1, 3, 4, 5 sẽ phủ hết các ô. Do đó, ta có

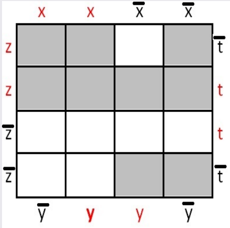
$$f = \bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{y}zt \vee \bar{z}\bar{t} \qquad (2)$$

Do công thức (1) và (2) đơn giản như nhau nên f có hai công thức đa thức tối tiểu là

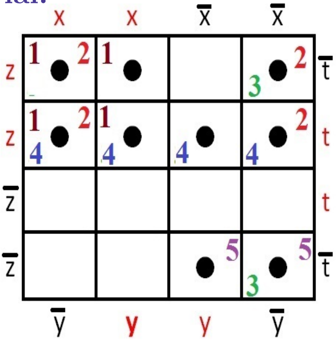
$$f = \bar{x}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xzt \vee \bar{z}\bar{t} \qquad (1)$$

$$f = \bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{y}zt \vee \bar{z}\bar{t} \qquad (2)$$

Ví dụ. Tìm đa thức tối tiểu của hàm boole f biết rằng biểu đồ $kar(f)$ là



Giải.



Bước 2. Xác định các các tế bào lớn của $kar(f)$, ta có 5 tế bào lớn là

1. Tế bào 1: $x\,z$
2. Tế bào 2: $\overline{y}\,z$
3. Tế bào 3: $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t}$
4. Tế bào 4: $z\,t$
5. Tế bào 5: $\overline{x}\,\overline{z}\,\overline{t}$

Bước 3.

1. Ô $(1,2)$ chỉ nằm trong tế bào lớn 1. Ta phải chọn tế bào 1.
2. Ô $(2,3)$ chỉ nằm trong tế bào lớn 4. Ta phải chọn tế bào 4.
3. Ô $(4,3)$ chỉ nằm trong tế bào lớn 5. Ta phải chọn tế bào 5.

Bước 4. Như vậy chỉ còn ô $(1,4)$ là chưa được phủ, để phủ ô $(1,4)$ ta có 2 cách chọn

1. **Cách 1.** Chọn tế bào 2. Khi đó tế bào 1, 2, 4, 5 sẽ phủ hết các ô. Do đó, ta có

$$f = x\,z \vee \overline{y}\,z \vee z\,t \vee \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{t} \qquad (1)$$

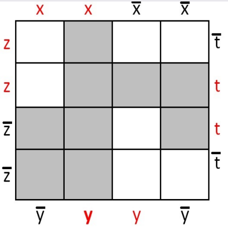
2. **Cách 2.** Chọn tế bào 3. Khi đó tế bào 1, 3, 4, 5 sẽ phủ hết các ô. Do đó, ta có

$$f = x\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} \vee z\,t \vee \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{t} \qquad (2)$$

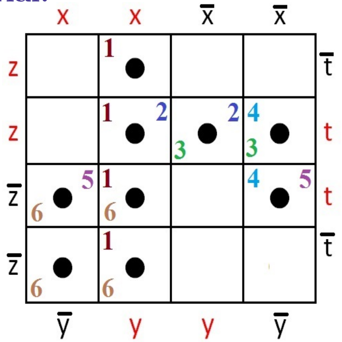
Ta có công thức (1) đơn giản hơn công thức (2). Do đó công thức đa thức tối tiểu của f là

$$f = x\,z \vee \overline{y}\,z \vee z\,t \vee \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{t}$$

Ví dụ. Tìm đa thức tối tiểu của hàm boole f biết rằng biểu đồ $kar(f)$ là



Giải.



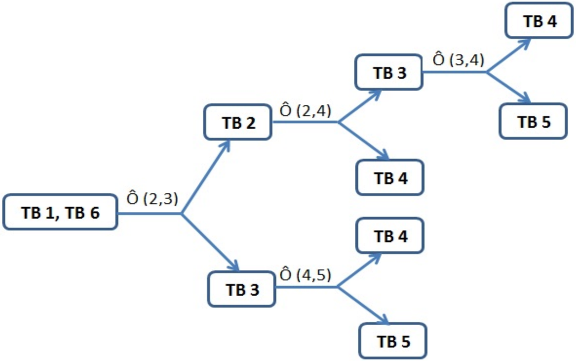
Bước 2. Xác định các các tế bào lớn của $kar(f)$, ta có 5 tế bào lớn

1. Tế bào 1: $x\,y$
2. Tế bào 2: $y\,z\,t$
3. Tế bào 3: $\overline{x}\,z\,t$
4. Tế bào 4: $\overline{x}\,\overline{y}\,t$
5. Tế bào 5: $\overline{y}\,\overline{z}\,t$
6. Tế bào 6: $x\,\overline{z}$

Bước 3.

1. Ô $(1, 2)$ chỉ nằm trong tế bào lớn 1. Ta phải chọn tế bào 1.
2. Ô $(4, 1)$ chỉ nằm trong tế bào lớn 6. Ta phải chọn tế bào 6.

Bước 4.



Như vậy, ta có 5 tập phủ là:

1) $\{1, 2, 3, 4, 6\}$
2) $\{1, 2, 3, 5, 6\}$
3) $\{1, 2, 4, 6\}$
4) $\{1, 3, 4, 6\}$
5) $\{1, 3, 5, 6\}$

Nhưng ta chỉ xem xét 3 tập phủ là $\{1,2,4,6\}$, $\{1,3,4,6\}$ và $\{1,3,5,6\}$.

1. Đối với tập phủ $\{1,2,4,6\}$, ta có $f = x\,y \vee y\,z\,t \vee \overline{x}\,\overline{y}\,t \vee x\,\overline{z}$ (1)
2. Đối với tập phủ $\{1,3,4,6\}$, ta có $f = x\,y \vee \overline{x}\,z\,t \vee \overline{x}\,\overline{y}\,t \vee x\,\overline{z}$ (2)
3. Đối với tập phủ $\{1,3,5,6\}$, ta có $f = x\,y \vee \overline{x}\,z\,t \vee \overline{y}\,\overline{z}\,t \vee x\,\overline{z}$ (3)

Ba công thức này đơn giản như nhau nên ta chọn cả 3.

Ví dụ.(tự làm) Cho hàm Boole

$$f(x,y,z,t) = (\overline{x} \vee \overline{z})t \vee (\overline{x}\,y \vee \overline{y}\,t)z \vee (\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z})\overline{t}$$

a) Vẽ biểu đồ Karnaugh và tìm công thức đa thức tối tiểu của f.

b) Vẽ một mạng các cổng tổng hợp hàm Boole f.

Ví dụ.(tự làm) Cho hàm Boole

$$f(x,y,z,t) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} \vee x\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} \vee y\,z\,t \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z\,t \vee y\,\overline{z}\,t$$

Hãy vẽ biểu đồ Karnaugh và tìm các công thức đa thức tối tiểu của f.

Ví dụ.(tự làm) Cho hàm Boole

$$f(x,y,z,t) = \overline{x}\,\overline{y}\,t \vee x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} \vee \overline{x}\,y\overline{z}\,\overline{t} \vee \overline{y}\,z\,\overline{t} \vee x\,z\,t \vee y\,z\,\overline{t}$$

Vẽ biểu đồ Karnaugh và tìm các công thức đa thức tối tiểu cho f.

Ví dụ.(tự làm) Cho hàm Boole

$$f(x,y,z,t) = x\,\overline{y}\,t \vee \overline{x}\,y \vee y\,\overline{z}\,\overline{t} \vee x\,\overline{y}\text{-}z \vee x\,y\,\overline{z}\,t \vee \overline{x}\,z\,t$$

Vẽ biểu đồ Karnaugh và tìm công thức đa thức tối tiểu của f.

Ví dụ.(tự làm) Cho f là một hàm boole theo 4 biến x, y, z, t xác định bởi:

$$f^{-1}(0) = \{0010, 0011, 1001, 1101, 1000\}$$

1. Vẽ biểu đồ Karnaugh $kar(f)$ của f và xác định tất cả các tế bào lớn của nó.
2. Hãy xác định tất cả các công thức đa thức tối tiểu của f.