

Bài tập chương 2. Tập hợp và ánh xạ

Phần 1. Bài tập

Bài 1.1. Những khẳng định nào sau đây là đúng:

- | | | |
|--------------------------|------------------------------|--------------------------|
| a) $0 \in \emptyset$ | c) $\{0\} \subset \emptyset$ | e) $\{0\} \in \{0\}$ |
| b) $\emptyset \in \{0\}$ | d) $\emptyset \subset \{0\}$ | f) $\{0\} \subset \{0\}$ |

Bài 1.2. Những khẳng định nào sau đây là đúng:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ | c) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ | e) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ |
| b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ | d) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ | f) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$ |

Bài 1.3. Liệt kê các tập hợp sau:

- a) $A = \{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
b) $B = \{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
c) $C = \{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, m^2 < 2 \text{ và } 6n > n^2 - 7\}$
d) $D = \{2 \sin \frac{n\pi}{6} + 5 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
e) $E = \{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, \sqrt{17} < n \leq \sqrt{80} \text{ và } \frac{1}{2} < x < 1\}$
f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 4} \leq 0\}$
g) $G = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^4 \geq 256 \text{ và } x = \sqrt{3} \cos x - \sqrt{2} \sin 3x\}$

Bài 1.4. Cho $A, B \subset \mathbb{R}$. Viết \overline{A} , \overline{B} , $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ thành phần hội của các đoạn, khoảng rời nhau trong \mathbb{R} .

- a) $A = (-9, -3) \cup [-1, 2] \cup [4, 5) \cup (7, 11] \cup (13, +\infty]$ và
 $B = (-\infty, -7] \cup [-4, -2) \cup (0, 3) \cup (6, 8] \cup [10, 15]$
b) $A = (-\infty, -4) \cup [4, 7] \cup \{-1, 2, 8, 10\}$ và $B = (-5, 1] \cup [6, 9) \cup \{-6, 3, 5, 10\}$.

Bài 1.5. Cho $A, B, C, D \subset E$. Hãy rút gọn các biểu thức sau đây:

- a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$
b) $(A \cup B) \setminus [(A \setminus B) \cup (A \cap B)]$
c) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C})$

- d) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap B)$
e) $\overline{A} \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C \cap \overline{D})$

Bài 1.6. Cho $A, B, D \subset E$. Hãy chứng minh

- a) $D \setminus (A \cup B) = (D \setminus A) \cap (D \setminus B) = (D \cup B) \setminus (A \cup B)$
b) $D \setminus (A \cap B) = (D \setminus A) \cup (D \setminus B)$
c) $(A \cup B) \setminus D = (A \setminus D) \cup (B \setminus D)$
d) $(A \cap B) \setminus D = (A \setminus D) \cap (B \setminus D)$
e) $(A \setminus B) \setminus D = A \setminus (B \cup D) = (A \setminus D) \setminus (B \setminus D)$

Bài 1.7. Cho $A, B, H, K \subset E$. Chứng minh

- a) $[(A \cap H) \cup (B \cap K)] \subset [(A \cup B) \cap (H \cup K)]$
b) $(A \setminus H) \subset [(A \setminus B) \cup (B \setminus H)]$
c) $[(A \cup B) \setminus (H \cup K)] \subset [(A \setminus H) \cup (B \setminus K)] \subset [(A \cup B) \setminus (H \cap K)]$
d) $[(A \cup B) \setminus H] \subset [A \cup (B \setminus H)]$
e) $[(A \cup B) \setminus (A \cup H)] \subset (B \setminus H)$

Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong a), b), c), d) và e).

Bài 1.8. Cho $A = \{0, 1, a\}$, $B = \{a, 2\}$ và $C = \{2, b\}$.

- a) Liệt kê các tập hợp A^2 , $A \times B$, $C \times A$, $B \times C$ và $C \times B$.
b) Liệt kê các tập hợp B^3 , $A \times B^2$, $C \times A \times C$, $A \times B \times C$ và $C^2 \times B$.

Bài 1.9. Cho $A, B \subset E$ và $H, K \subset F$. Chứng minh

- a) $A \times (H \setminus K) = (A \times H) \setminus (A \times K)$
b) $[(A \times H) \setminus (B \times K)] = [(A \setminus B) \times H] \cup [A \times (H \setminus K)]$
c) $(A \times H) \cap (B \times K) = (A \cap B) \times (H \cap K)$
d) $[(A \times H) \cup (B \times K)] \subset [(A \cup B) \times (H \cup K)]$
e) $[(A \setminus B) \times (H \setminus K)] \subset [(A \times H) \setminus (B \times K)]$

Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong d) và e).

Bài 1.10. Các qui tắc $f : X \rightarrow Y$ sau có phải là ánh xạ không ? Tại sao ?

- a) $X = (-2, 1]$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x - 3}$, $\forall x \in X$
b) $X = \mathbb{R}$, $Y = (6, +\infty)$, $f(x) = e^x + 9e^{-x}$, $\forall x \in X$

- $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
- $B = [1, 3]$
- $C = (-1, 2)$
- $D = (-\infty, 0]$
- $E = (3, +\infty)$
- $G = \{-7, -5, -3, 1, 2, 5, 7, 9\}$
- $H = [-7, -5]$
- $K = (-5, 5)$
- $L = [7, +\infty)$
- $M = [1, 9)$
- $N = (-3, 2]$.

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ với $f(x) = \begin{cases} x + 7 & \text{nếu } x \leq 0 \\ 5 - 2x & \text{nếu } 0 < x < 3 \\ x - 1 & \text{nếu } x \geq 3 \end{cases}$ trong đó

- $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5\}$
- $B = [-2, 1]$
- $C = (2, 4)$
- $D = (-1, 5]$
- $E = [0, +\infty)$
- $G = \{-5, -2, -1, 0, 4, 5, 7, 10, 11\}$
- $H = [-5, -1]$
- $K = (-\infty, 0]$
- $L = [-2, 4)$
- $M = (5, 10]$
- $N = (7, 11)$.

Bài 1.16. Chứng minh các ánh xạ dưới đây là song ánh và tìm ánh xạ ngược của chúng:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$
- b) $h : [1, 2) \rightarrow [5, 7), h(x) = 3x + \frac{2}{x}$
- c) $p : \mathbb{R} \rightarrow (-2, 3), p(x) = \frac{9 - 2e^x}{e^x + 3}$
- d) $q : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-3\}, q(x) = \frac{5 - 3x}{x - 1}$
- e) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x - 3e^{-x} + 1$
- f) $r : (0, 3] \rightarrow (2, \frac{17}{4}], r(x) = (x+1) + \frac{1}{x+1}$

Bài 1.17. Với các ánh xạ đã cho ở bài trên, hãy tìm các ánh xạ u, v, w thỏa $p \circ^{-1} u = g, v \circ f = g$ và $f \circ^{-1} w \circ p = g$.

Phần 2. Thực hành

Cho tập hợp hữu hạn $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Khi đó A được biểu diễn dưới dạng một danh sách là $[a_1, a_2, \dots, a_n]$. Hãy viết những chương trình sau:

Bài 1.1. Kiểm tra một phần tử x có phải là phần tử của tập A không?

Bài 1.2. Rút gọn một tập hợp. Ví dụ cho $A = [1, 2, 3, 2, 3]$, sau khi rút gọn ta có $A = [1, 2, 3]$.

Bài 1.3. Liệt kê tất cả các tập con của A .

Bài 1.4. Cho A và B là hai tập hợp. Hãy kiểm tra $A \subset B$ hay $A = B$?

Bài 1.5. Cho A và B là tập hợp con của E . Hãy tìm $\overline{A}, A \cap B, A \cup B, A \setminus B$.

Cho f là ánh xạ từ $X = \{1, 2, \dots, n\}$ vào A và được biểu diễn dưới dạng một danh sách $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, trong đó $a_i \in A$ là ảnh của i (hay $f(i) = a_i$). Hãy viết những chương trình sau:

Bài 1.6. Kiểm tra một ánh xạ từ $X = \{1, 2, \dots, n\}$ vào \mathbb{Z} có phải là đơn ánh không?

Bài 1.7. Kiểm tra một ánh xạ từ $X = \{1, 2, \dots, n\}$ vào chính nó có phải là song ánh không? Nếu có, hãy tìm ánh xạ ngược.