Chương 6. QUAN HỆ

Phần 1. Bài tập

Bài 6.1. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ trên $\{1, 2, 3, 4\}$. Hãy xét $\mathcal{R}$ có những tính chất nào?

a) $\mathcal{R} = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

b) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

c) $\mathcal{R} = \{(2, 4), (4, 2)\}$

d) $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

e) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

f) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

Bài 6.2. Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên S. Hãy viết tập hợp $\mathcal{R}$, ma trận biểu diễn và xét các tính chất của $\mathcal{R}$ nếu

a) $S = \{0, 1, 2\}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 0 \leq y - x \leq 1$.

b) $S = \{0, 1, 2\}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2$.

c) $S = \{0, 1, 2\}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3x + y \leq 5$.

d) $S = \{0, 1, 2, 3\}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \geq 4$.

e) $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x = y \text{ hay } x + 2y = 4)$.

f) $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x + 2) \mid y$.

Bài 6.3. Xét các tính chất của quan hệ $\mathcal{R}$ trên S nếu

a) $S = \mathbb{Z}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y^2$.

b) $S = \mathbb{Z}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y$ không chia hết x^2.

c) $S = \mathbb{Q}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = |y|$.

d) $S = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $\forall (x, u), (y, v) \in S : (x, u)\mathcal{R}(y, v) \Leftrightarrow x \leq y$.

e) $S = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \neq y$.

f) $S = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = 2^y$ (để ý $2^t > t$, $\forall t \in \mathbb{R}$).

Bài 6.4. Kiểm chứng $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự trên S. Hỏi $\mathcal{R}$ là thứ tự toàn phần hay bán phần? Tại sao? Vẽ sơ đồ Hasse cho $(S, \mathcal{R})$ và tìm $\min, \max$ và các phần tử tối tiểu và tối đại (nếu có):

a) $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y$

b) $S = \{2, 3, 4, 6, 8, 16, 24, 32, 48, 96\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y$

c) $S = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \,\vdots\, y$

d) $S = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 24, 48, 96\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \vdots y$

e) $S = \{96, 768, 6, 48, 384, 3, 24\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in N : y = 2^k x$ (k phụ thuộc theo x và y)

f) $S = \{2, 3, \ldots, 11, 12\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow [(x$ lẻ và y chẵn) hay ($x - y$ chẵn và $x \leq y)]$

Bài 6.5. Cho $S = \{a = 2^m 3^n \,|\, m, n \in \mathbb{N}, m \leq 3$ và $n \leq 2\}$ với các quan hệ thứ tự $|$ và $\vdots$.

a) Vẽ sơ đồ Hasse và tìm min, max cho $(S, |\,)$ và $(S, \vdots)$.

b) Đặt $T = S \setminus \{1, 2, 72\}$. Vẽ sơ đồ Hasse rồi tìm các phần tử tối tiểu và tối đại của $(T, |\,)$ và $(T, \vdots)$.

Bài 6.6. Cho $S = \{a, b, c\}$ với quan hệ thứ tự $\prec$. Giả sử a là một phần tử tối tiểu và c là một phần tử tối đại của $(S, \prec)$

a) Vẽ tất cả các trường hợp khác nhau có thể xảy ra cho sơ đồ Hasse của $(S, \prec)$.

b) Yêu cầu như a) nhưng có thêm điều kiện "b cũng là một phần tử tối đại của $(S, \prec)$ "

Bài 6.7. Vẽ sơ đồ Hasse cho $(S, \prec)$ rồi toàn phần hóa (sắp xếp topo) các thứ tự bán phần $\prec$ sau:

a) $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ với $d \prec a, b \prec e, g \prec e, h \prec f, i \prec e$ và $h \prec d$.

b) $S = \{1, 2, 4, 5, 12, 15, 20\}$ với $\prec$ là quan hệ $|$.

c) $S = \{2, 3, 6, 7, 8, 9, 12, 16\}$ với $\prec$ là quan hệ $\vdots$.

d) S $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ với $\prec$ là quan hệ $|$.

Bài 6.8. Kiểm chứng $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên S rồi viết các lớp tương đương và tập thương tương ứng:

a) $S = \{$Huế, Paris, Moscow, Rome, Tokyo, Kyoto, Milan, Vinh, Lyon, Kobe, Sàigòn, Bonn, Berlin$\}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ và y là 2 thành phố thuộc cùng một quốc gia.

b) $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + 5x = y^2 + 5y$.

c) $S = \{-4, -2, -\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}, 2, 3\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 + 3y = y^3 + 3x$.

d) $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 21, 24, 25, 35, 42, 48\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2^k y$ (k phụ thuộc x và y).

e) $S = \{-11\pi/6, -\pi, -4\pi/5, -\pi/4, -\pi/5, -\pi/7, 0, \pi/6, \pi/3, 5\pi/6, \pi, 5\pi/4, 3\pi\}$, $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \sin x = \cos(y + 2 - 1.7\pi)$.

f) $S = P(E)$ với $E = \{1, 2, 3\}, \forall X, Y \in S : X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$ trong đó $A = \{1, 2\}$.

Bài 6.9. Kiểm chứng $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên $S = \mathbb{R}$ và xác định lớp tương đương $[a]$ của $a \in \mathbb{R}$ tương ứng (biện luận theo tham số thực a)

a) $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + 3x = y^2 + 3y$

b) $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2(x - y)$

c) $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 \pm 12y = y^3 \pm 12x$ (xét riêng hai trường hợp $+$ và $-$)

d) $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 y + 7x = xy^2 + 7y$

e) $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 4x + xy^2 = x^2 y + 4y$

f) $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \sin(xy)\cos^2 y = 2\cos^2 y - \sin(xy)\cos^2 x$

Bài 6.10. Cho $S = \{a, b, c, d, e, f\}$.

a) Viết tập hợp $\mathcal{R}$ nếu $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên S có 3 lớp tương đương là $\{a, d, f\}, \{c, e\}$ và $\{b\}$.

b) Trên S có bao nhiêu quan hệ tương đương chia S thành 3 lớp tương đương có số phần tử của các lớp lần lượt là $3, 2, 1$ (tương tự như quan hệ tương đương $\mathcal{R}$)?

c) Trên S có bao nhiêu quan hệ tương đương chia S thành 3 lớp tương đương?

Bài 6.11. Viết các phần tử sau dưới dạng chuẩn trong $\mathbb{Z}_n$ ($n = 25$ và 38) :

a) $\overline{\pm 95}$

b) $\overline{\pm 378}$

c) $\overline{\pm 5124}$

d) $\overline{\pm 68047}$

e) $\overline{\pm 815691}$

f) $\overline{\pm 23242423}$

Bài 6.12. Làm các phép tính sau rồi viết kết quả dưới dạng chuẩn trong $\mathbb{Z}_n$ ($n = 28$ và 43) :

a) $\overline{52} \pm \overline{-94}$

b) $\overline{52} \cdot \overline{-94}$

c) $\overline{-341} \pm \overline{926}$

d) $\overline{-341} \cdot \overline{926}$

e) $\overline{-7083} \pm \overline{-8646}$

f) $\overline{7083} \cdot \overline{8646}$

g) $7 \cdot \overline{9245}$

h) $\overline{9245}^2$

Bài 6.13. Trong $\mathbb{Z}_{26}$ và Z_{60}, hãy xác định tất các phần tử khả nghịch và tìm nghịch đảo của chúng.

Bài 6.14. Giải các phương trình sau trong $\mathbb{Z}_n$ tương ứng :

a) $\overline{3}\overline{x} = \overline{7}\,(n = 16)$

b) $\overline{41}\overline{x} - \overline{51} = \overline{-19}\overline{x} + \overline{24}\,(n = 105)$

c) $\overline{78}\overline{x} - \overline{13} = \overline{35}\,(n = 666)$

d) $\overline{3}\overline{x} + \overline{9} = \overline{8}\overline{x} + \overline{61}\,(n = 64)$

e) $\overline{21}\overline{x} + \overline{24} = \overline{108}\,(n = 63)$

f) $\overline{5}\overline{x} + \overline{7} = \overline{6}\,(n = 23)$

g) $\overline{68}(\overline{x} + \overline{24}) = \overline{102}\,(n = 492)$

h) $\overline{4}\overline{x} + \overline{3} = \overline{7}\overline{x} + \overline{12}\,(n = 11)$

Bài 6.15. Giải các hệ phương trình sau trong $\mathbb{Z}_n$ tương ứng :

a) $\begin{cases} \overline{3x} + \overline{2y} = \overline{1} \\ \overline{2x} - \overline{5y} = \overline{-3} \end{cases}\ (n = 7)$

b) $\begin{cases} \overline{4x} + \overline{y} = \overline{-2} \\ \overline{7x} + \overline{3y} = \overline{7} \end{cases}\ (n = 8)$

c) $\begin{cases} \overline{5x} - \overline{3y} = \overline{3} \\ \overline{-4x} + \overline{5y} = \overline{-4} \end{cases}\ (n = 6)$

d) $\begin{cases} \overline{x} + \overline{2z} = \overline{1} \\ \overline{y} + \overline{2z} = \overline{2} \\ \overline{z} + \overline{2x} = \overline{1} \end{cases}\ (n = 3 \text{ và } 5)$

Phần 1. Thực hành

Một số hàm trong MAPLE

- **irem**(a, n): viết $\overline{a}$ dưới dạng chuẩn trong $\mathbb{Z}_n$
- **msolve(eqns,n)**: giải phương trình hay hệ phương trình trong $\mathbb{Z}_n$. Ví dụ
  - msolve$(2x + 3 = 5, 7)$: giải phương trình $2\overline{x} + \overline{7} = \overline{5}$ trong $\mathbb{Z}_7$.

- msolve$(2x+3y=5, x-2y=4$,11): giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\overline{x}+3\overline{y}=\overline{5}, \\ \overline{x}-2\overline{y}=\overline{4} \end{cases}$ trong $\mathbb{Z}_{11}$.

Bài 6.1. Cho A là ma trận biểu diễn của quan hệ $\mathcal{R}$. Hãy viết chương trình kiểm tra:

a) $\mathcal{R}$ phản xạ

b) $\mathcal{R}$ đối xứng

c) $\mathcal{R}$ phản xứng

d) $\mathcal{R}$ bắc cầu

e) $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương

f) $\mathcal{R}$ là quan hệ thứ tự

Bài 6.2. Cho Cho A có 3 phần tử. Hãy liệt kê tất cả quan hệ trên A.

Bài 6.3. Cho Cho A có 5 phần tử. Hãy liệt kê tất cả quan hệ $\mathcal{R}$ trên A thỏa

a) $\mathcal{R}$ có tính chất phản xạ, đối xứng.

b) $\mathcal{R}$ có tính chất phản xạ, bắc cầu.

c) $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương.

d)* $\mathcal{R}$ là quan hệ thứ tự.

Bài 6.4. Cho tập A có n phần tử. Hãy viết chương trình liệt kê tất cả quan hệ trên A.

Bài 6.5. Cho là A tập con của $\mathbb{N}$. Hãy viết chương trình để tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, phần tử lớn nhất, nhỏ nhất của tập thứ tự $(A, |)$ và $(A, \vdots)$.

Bài 6.6. Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{N}$. Hãy viết chương trình tìm nghiệm của phương trình $\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{b}$ trong $\mathbb{Z}_n$.