Bài tập chương 2. Tập hợp và ánh xạ

Phần 1. Bài tập

Bài 1.1. Những khẳng định nào sau đây là đúng:

a)
$$0 \in \emptyset$$

c)
$$\{0\} \subset \emptyset$$

e)
$$\{0\} \in \{0\}$$

b)
$$\emptyset \in \{0\}$$

$$\mathbf{d}) \ \emptyset \subset \{0\}$$

f)
$$\{0\} \subset \{0\}$$

Bài 1.2. Những khẳng định nào sau đây là đúng:

a)
$$\emptyset \in \{\emptyset\}$$

c)
$$\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}\$$

e)
$$\{\{\emptyset\}\}\subset\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$$

b)
$$\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

d)
$$\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

f)
$$\{\{\emptyset\}\}\subset\{\{\emptyset\},\{\emptyset\}\}\}$$

Bài 1.3. Liệt kê các tập hợp sau:

a)
$$A = \{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

b)
$$B = \{n + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^* \}$$

c)
$$C = \{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, m^2 < 2 \text{ và } 6n > n^2 - 7\}$$

d)
$$D = \{2\sin\frac{n\pi}{6} + 5 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

e)
$$E = \{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, \sqrt{17} < n \le \sqrt{80} \text{ và } \frac{1}{2} < x < 1\}$$

f)
$$F = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 4} \le 0\}$$

g)
$$G = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^4 \ge 256 \text{ và } x = \sqrt{3}\cos x - \sqrt{2}\sin 3x\}$$

Bài 1.4. Cho $A, B \subset \mathbb{R}$. Viết $\overline{A}, \overline{B}, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ thành phần hội của các đoạn, khoảng rời nhau trong \mathbb{R} .

1

a)
$$A = (-9, -3) \cup [-1, 2] \cup [4, 5) \cup (7, 11] \cup (13, +\infty]$$
 và $B = (-\infty, -7] \cup [-4, -2) \cup (0, 3) \cup (6, 8] \cup [10, 15]$

b)
$$A = (-\infty, -4) \cup [4, 7] \cup \{-1, 2, 8, 10\}$$
 và $B = (-5, 1] \cup [6, 9) \cup \{-6, 3, 5, 10\}.$

Bài 1.5. Cho $A, B, C, D \subset E$. Hãy rút gọn các biểu thức sau đây:

a)
$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

b)
$$(A \cup B) \setminus [(A \setminus B) \cup (A \cap B)]$$

c)
$$\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C})$$

- d) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap B)$
- e) $\overline{A} \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C \cap \overline{D})$

Bài 1.6. Cho $A, B, D \subset E$. Hãy chứng minh

a)
$$D \setminus (A \cup B) = (D \setminus A) \cap (D \setminus B) = (D \cup B) \setminus (A \cup B)$$

b)
$$D \setminus (A \cap B) = (D \setminus A) \cup (D \setminus B)$$

c)
$$(A \cup B) \setminus D = (A \setminus D) \cup (B \setminus D)$$

d)
$$(A \cap B) \setminus D = (A \setminus D) \cap (B \setminus D)$$

e)
$$(A \setminus B) \setminus D = A \setminus (B \cup D) = (A \setminus D) \setminus (B \setminus D)$$

Bài 1.7. Cho $A, B, H, K \subset E$. Chứng minh

a)
$$[(A \cap H) \cup (B \cap K)] \subset [(A \cup B) \cap (H \cup K)]$$

b)
$$(A \setminus H) \subset [(A \setminus B) \cup (B \setminus H)]$$

c)
$$[(A \cup B) \setminus (H \cup K)] \subset [(A \setminus H) \cup (B \setminus K)] \subset [(A \cup B) \setminus (H \cap K)]$$

d)
$$[(A \cup B) \setminus H] \subset [A \cup (B \setminus H)]$$

e)
$$[(A \cup B) \setminus (A \cup H)] \subset (B \setminus H)$$

Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong a), b), c), d) và e).

Bài 1.8. Cho
$$A = \{0, 1, a\}, B = \{a, 2\}$$
 và $C = \{2, b\}.$

- a) Liệt kê các tập hợp $A^2,\,A\times B,C\times A,\,B\times C$ và $C\times B.$
- b) Liệt kê các tập hợp $B^3, A \times B^2, C \times A \times C, A \times B \times C$ và $C^2 \times B$.

Bài 1.9. Cho $A, B \subset E$ và $H, K \subset F$. Chứng minh

a)
$$A \times (H \setminus K) = (A \times H) \setminus (A \times K)$$

b)
$$[(A \times H) \setminus (B \times K)] = [(A \setminus B) \times H] \cup [A \times (H \setminus K)]$$

c)
$$(A \times H) \cap (B \times K) = (A \cap B) \times (H \cap K)$$

d)
$$[(A \times H) \cup (B \times K)] \subset [(A \cup B) \times (H \cup K)]$$

e)
$$[(A \setminus B) \times (H \setminus K)] \subset [(A \times H) \setminus (B \times K)]$$

Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong d) và e).

Bài 1.10. Các qui tắc $f: X \to Y$ sau có phải là ánh xạ không? Tại sao?

a)
$$X = (-2, 1], Y = \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x - 3}, \forall x \in X$$

b)
$$X = \mathbb{R}, Y = (6, +\infty), f(x) = e^x + 9e^{-x}, \forall x \in X$$

c)
$$X = Y = \mathbb{R}, f(x) = \ln|\sin x|, \forall x \in X$$

d)
$$X = [-1, +\infty), Y = \mathbb{R}, f(x) = y \text{ sao cho } y^2 - 2y = x, \forall x \in X$$

e)
$$X = [1, 3], Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = 3x^2 - 9x + 5, \forall x \in X$$

f)
$$X = \mathbb{Q}, Y = \mathbb{Z}, f\left(\frac{m}{n}\right) = m^2 + 3^n - mn, \forall \frac{m}{n} \in X$$

Bài 1.11. Xét tính đơn ánh và toàn ánh của các ánh xạ $f: X \to Y$ sau:

a)
$$X = Y = \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \forall x \in X$$

b)
$$X = [-2, +\infty), Y = (-20, +\infty), f(x) = x^2 + 6x - 3, \forall x \in X$$

c)
$$X = Y = \mathbb{R}, f(x) = (x-1)(x+3)(x-4), \forall x \in X$$

d)
$$X = \mathbb{R} \setminus \{0\}, Y = \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-3}{x}, \forall x \in X$$

e)
$$X = \mathbb{R}, Y = [-2, 2], f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x, \forall x \in X$$

f)
$$X = Y = \mathbb{R}, f(x) = 3\cos 2x - 7x + 8, \forall x \in X$$

Bài 1.12. Xét hai ánh xạ $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi: f(x)=ax+b và $g(x)=1-x+x^2$. Giả sử $g_{\circ}f = f_{\circ}g$, hãy xác định a và b?

Bài 1.13. Xác định $u = g_o f$, $v = f_o g$ và $w = h_o g_o f$ (nếu có) khi $f: X \to Y$, $g: Z \to T$ và $h: U \to V$ trong đó

a)
$$X = Y = Z = T = U = V = \mathbb{R}$$
, $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 + x - 3$ và $h(x) = x^3 + 4\cos x$

b)
$$X = T = U = (0, +\infty), Y = Z = \mathbb{R}, V = [1, +\infty), f(x) = 3 \ln x - 2, g(x) = e^{\sin x}$$
 và $h(x) = 5x^4 - x^2 + 1$

c)
$$X = V = \mathbb{R}, Y = Z = \mathbb{R} \setminus \{1\}, T = U = \mathbb{R} \setminus \{-3\}, f(x) = x^2 - 4x + 6, g(x) = \frac{3x + 2}{1 - x}$$
 và $h(x) = \ln|x + 3|$

Bài 1.14. Cho hai ánh xạ $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x)=x^2-3$ và $g(x)=2x^2+4x+1$. Hãy tìm f(A), g(A), $f^{-1}(A)$ và $g^{-1}(A)$ với

a)
$$A = \{2, 3\}$$

c)
$$A = (-3, 3)$$

e)
$$A = [-7, 2]$$

b)
$$A = \{-3, -2, 2, 3\}$$
 d) $A = (-3, 2]$

d)
$$A = (-3, 2)$$

f)
$$A = (-4, -3] \cup [5, 6]$$

Bài 1.15. Tìm f(A), f(B), f(C), f(D), f(E), $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(G)$, $f^{-1}(H)$, $f^{-1}(K)$, $f^{-1}(L)$, $f^{-1}(M)$ và $f^{-1}(N)$ cho các ánh xạ sau

a)
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
 với $f(x) = \begin{cases} x - 5 \text{ nếu } x \leq 1 \\ 2x + 1 \text{ nếu } x > 1 \end{cases}$ trong đó

• $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ • B = [1, 3]• C = (-1, 2)• $D = (-\infty, 0]$ • $E = (3, +\infty)$ • $G = \{-7, -5, -3, 1, 2, 5, 7, 9\}$ • M = [1, 9)• N = (-3, 2]

b)
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
 với $f(x) =$

$$\begin{cases} x+7 \text{ nếu } x \leq 0 \\ 5-2x \text{ nếu } 0 < x < 3 \end{cases} \text{ trong đó}$$

$$x-1 \text{ nếu } x \geq 3$$

$$\bullet \ A = \{-2,-1,0,1,2,4,5\}$$

$$\bullet \ H = [-5,-1]$$

•
$$B = [-2, 1]$$

• $C = (2, 4)$
• $C = (2, 4)$
• $C = (2, 4)$

•
$$D = (-1, 5]$$

• $E = [0, +\infty)$
• $M = (5, 10]$

$$\bullet \ \ G = \{-5, -2, -1, 0, 4, 5, 7, 10, 11\} \\ \bullet \ \ N = (7, 11).$$

Bài 1.16. Chứng minh các ánh xạ dưới đây là song ánh và tìm ánh xạ ngược của chúng:

a)
$$f: \mathbb{R} \to (-1,1), f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

b) $h: [1,2) \to [5,7), h(x) = 3x + \frac{2}{x}$
c) $p: \mathbb{R} \to (-2,3), p(x) = \frac{9-2e^x}{e^x+3}$
d) $q: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-3\}, q(x) = \frac{5-3x}{x-1}$
e) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = e^x - 3e^{-x} + 1$
f) $r: (0,3] \to (2,\frac{17}{4}], r(x) = (x+1) + \frac{1}{x+1}$

Bài 1.17. Với các ánh xạ đã cho ở bài trên, hãy tìm các ánh xạ u, v, w thỏa $p_{\circ}^{-1}u = g$, $v_{\circ}f = g$ và $f_{\circ}^{-1}w_{\circ}p = g$.

Phần 2. Thực hành

Cho tập hợp hữu hạn $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Khi đó A được biểu diễn dưới dạng một danh sách là $[a_1, a_2, \dots, a_n]$. Hãy viết những chương trình sau:

Bài 1.1. Kiểm tra một phần tử x có phải là phần tử của tập A không?

Bài 1.2. Rút gọn một tập hợp. Ví dụ cho A = [1, 2, 3, 2, 3], sau khi rút gọn ta có A = [1, 2, 3].

Bài 1.3. Liệt kê tất cả các tập con của A.

Bài 1.4. Cho A và B là hai tập hợp. Hãy kiểm tra $A \subset B$ hay A = B?

Bài 1.5. Cho A và B là tập hợp con của E. Hãy tìm \overline{A} , $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$.

Cho f là ánh xạ từ $X = \{1, 2, ..., n\}$ vào A và được biểu diễn dưới dạng một danh sách $[a_1, a_2, ..., a_n]$, trong đó $a_i \in A$ là ảnh của i (hay $f(i) = a_i$). Hãy viết những chương trình sau:

Bài 1.6. Kiểm tra một ánh xạ từ $X = \{1, 2, \dots, n\}$ vào \mathbb{Z} có phải là đơn ánh không?

Bài 1.7. Kiểm tra một ánh xạ từ $X = \{1, 2, ..., n\}$ vào chính nó có phải là song ánh không? Nếu có, hãy tìm ảnh ngược.