Bài tập chương 5. SỐ NGUYÊN

Phần 1. Bài tập

Ký hiệu : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ và $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Bài 5.1. Tìm tất cả $k \in \mathbb{Z}$ thỏa

a) $(k^2+5k+5)(k^2-2k-9) = 1$

b) $(3k^2+4k-17)(-5k^2+k+49) = -2$

Bài 5.2. Tìm tất cả $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa

a) $x+y+xy = 0$

b) $3^x = 4y+1$

c) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{y}{3}$

d) $\dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{3}{4}$

Bài 5.3. Cho $n \in \mathbb{N}$ và $m, k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh

a) $7 \mid (2^n - 1) \Leftrightarrow 3 \mid n$

b) 7 không chia hết (2^n+1)

c) 100 không chia hết (9^n+1)

d) $11 \mid (k^2+3k+5) \Leftrightarrow k = 4t+11$ với $t \in \mathbb{Z}$

e) 121 không chia hết (k^2+3k+5)

f) $11 \mid (6k-7m) \Leftrightarrow 11 \mid (4m-5k)$

g) $13 \mid (m+4k) \Leftrightarrow 13 \mid (10m+k)$

h) $17 \mid (3m+2k) \Leftrightarrow 17 \mid (5m+9k)$

Bài 5.4. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a \equiv b \pmod{n}$ và $c \equiv d \pmod{n}$. Chứng minh

a) $ac \equiv bd \pmod{n}$

b) $(a \pm c) \equiv (b \pm d) \pmod{n}$.

Bài 5.5. Tìm số nguyên a sao cho

a) $a \equiv -15 \pmod{27}$ và $126 \leq a \leq 152$.

b) $a \equiv 24 \pmod{31}$ và $-85 \leq a \leq -55$.

c) $a \equiv 99 \pmod{41}$ và $100 \leq a \leq 140$.

d) $a \equiv 16 \pmod{42}$ và $201 \leq a \leq 242$.

Bài 5.6. Cho a, b là những số nguyên và $a \equiv 11 \pmod{19}$, $b \equiv 3 \pmod{19}$. Tìm số nguyên c với $0 \leq c \leq 18$ sao cho

a) $c \equiv 13a \pmod{19}$.

b) $c \equiv 8b \pmod{19}$.

c) $c \equiv a - b \pmod{19}$.

d) $c \equiv 7a + 3b \pmod{19}$.

e) $c \equiv 2a^2 + 3b^2 \pmod{19}$.

f) $c \equiv a^3 + 4b^3 \pmod{19}$.

Bài 5.7. Tìm $d = (m, n)$, $e = [m, n]$ theo 2 cách khác nhau (bằng thuật chia Eulide và phân tích ra thừa số nguyên tố), chỉ ra dạng tối giản của $\dfrac{m}{n}$ rồi chọn $a, b, u, v \in \mathbb{Z}$ sao cho $d = am + bn$ và $\dfrac{1}{e} = \dfrac{u}{m} + \dfrac{v}{n}$ nếu m và n có các giá trị sau đây:

a) 43 và 16

b) 128 và -352

c) -442 và 276

d) -675 và -459

e) 936 và 715

f) 6234 và -3312

g) -35298 và 6768

h) -8820 và -36288

i) 12096 và 17640

j) 87657 và -44441 k) -654321 và 123456 l) -148500 và -7114800

Bài 5.8. Cho $m, n \in \mathbb{Z}^*$. Chứng minh $(m,n) = [m,n] \Leftrightarrow |m| = |n|$.

Bài 5.9. Cho $r, s \in \mathbb{Z}^*$. Khi đó $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, đặt $a\mathbb{Z} = \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$ và $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z} = \{ak+bt \mid k, t \in \mathbb{Z}\}$.

a) Chứng minh $r\mathbb{Z} \subset s\mathbb{Z} \Leftrightarrow s \mid r$; $r\mathbb{Z} + s\mathbb{Z} = (r,s)\mathbb{Z}$ và $r\mathbb{Z} \cap s\mathbb{Z} = [r,s]\mathbb{Z}$.

b) Rút gọn $(24\mathbb{Z} + 36\mathbb{Z} + 60\mathbb{Z} + 84\mathbb{Z})$ và $(4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z} \cap 15\mathbb{Z})$.

Bài 5.10. Chứng minh $\forall k \in \mathbb{Z}$,

a) $(14k + 3,\ 21k + 4) = 1$

b) $(24k + 2,\ -60k - 4) = 2$

c) $(18k - 12,\ 21 - 30k) = 3$

d) $(20-75k,\ 25-100k) = 5$.

Bài 5.11. Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$. Giả sử $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_k^{r_k}$ là dạng phân tích thừa số nguyên tố của n.

a) n có bao nhiêu ước số dương và có bao nhiêu ước số ?

b) Giả sử n có $2m$ ước số dương. Chứng minh $\forall j \in 1, 2, \ldots, k, \exists s_j \in \mathbb{N}^*, r_j = 2^{s_j} - 1$.

Bài 5.12. Cho $n = 2^{14}3^9 5^8 7^{10} 11^3 13^8 37^{10}$.

a) n có bao nhiêu ước số dương và có bao nhiêu ước số ?

b) n có bao nhiêu ước số dương chia hết cho $2^3 3^4 5^7 11^2 37^2$?

c) n có bao nhiêu ước số dương chia hết cho 1 166 400 000?

Bài 5.13. Phân tích 15!, 20! và 25! thành tích của các thừa số nguyên tố.

Bài 5.14. Cho $k \in \mathbb{N}^*$. Tìm một $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho n có đúng k ước số dương.

Bài 5.15. Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq 2$.

a) Chứng minh $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$.

b) Giả sử $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_k^{r_k}$ là dạng phân tích thừa số nguyên tố của m và có $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ thỏa r_j lẻ. Chứng minh $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$.

Cho $n, b \in \mathbb{N}^*$. Khi đó n được viết duy nhất dưới dạng $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0$ với $k \in \mathbb{N}$ và $0 \leq a_i < b$. Khi đó, ta gọi $(\boldsymbol{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0})_{\boldsymbol{b}}$ là dạng biểu diễn của n theo cơ số b.

- Khi $b = 2$, thì biểu diễn này được gọi là hệ nhị phân
- Khi $b = 8$, thì biểu diễn này được gọi là hệ bát phận
- Khi $b = 10$, thì biểu diễn này được gọi là hệ thập phân
- Khi $b = 16$, thì biểu diễn này được gọi là hệ thập lục phân. Trong hệ thập lục phân người ta sử dụng A, B, C, D, E và F để biểu diễn các số 10 đến 15.

Bài 5.16. Hãy chuyển các số sau sang hệ nhị phân, bát phân và thập lục phân

a) 15

b) 234

c) 3453

d) 24234535

e) 45324523

f) 65646434234

Bài 5.17. Hãy biểu diễn các số mà có biểu diễn sau theo hệ thập phân

a) $(1\,1011)_2$

b) $(10\,1011\,0101)_2$

c) $(11\,1011\,1110)_2$

d) $(111\,1100\,0001\,1111)_2$

e) $(572)_8$

f) $(1604)_8$

g) $(423)_8$

h) (2417)8

i) $(80E)_{16}$

j) $(135AB)_{16}$

k) $(ABBA)_{16}$

l) $(DEFACED)_{16}$

Bài 5.18. Hãy tính tổng và tích của các cặp số sau và biểu diễn chúng theo cơ số tương ứng.

a) $(100\,0111)_2$, $(111\,0111)_2$

b) $(1110\,1111)_2$, $(1011\,1101)_2$

c) $(10\,1010\,1010)_2$, $(1\,1111\,0000)_2$

d) $(10\,0000\,0001)_2$, $(11\,1111\,1111)_2$

e) $(112)_3$, $(210)_3$

f) $(2112)_3$, $(12021)_3$

g) $(20001)_3$, $(1111)_3$

h) $(120021)_3$, $(2002)_3$

i) $(763)_8$, $(147)_8$

j) $(6001)_8$, $(272)_8$

k) $(1111)_8$, $(777)_8$

l) $(54321)_8$, $(3456)_8$

m) $(1AE)_{16}$, $(BBC)_{16}$

n) $(20CBA)_{16}$, $(A01)_{16}$

o) $(ABCDE)_{16}$, $(1111)_{16}$

p) $(E0000E)_{16}$, $(BAAA)_{16}$

Phần 1. Thực hành

Một số hàm liên quan đến số nguyên trong MAPLE

- **iquo**(a, b): tính phần thương của a chia cho b
- **irem**(a, b): tính phần dư của a chia cho b
- **igcd**$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$: tính ước chung lớn nhất của $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- **ilcm**$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$: tính bội chung nhỏ nhất của $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- **igcdex**$(a, b, `s`, `t`)$: trả về giá trị $d =$igcd(a, b) và hai giá trị s, t sao cho $d = sa + tb$
- **isprime**(a): kiểm tra a có phải là số nguyên tố không?
- **ithprime**(n): số nguyên tố thứ n
- **nextprime**(a): số nguyên tố nhỏ nhất mà lớn hơn hay bằng a
- **prevprime**(a): số nguyên tố lớn nhất mà nhỏ hơn hay bằng a
- **ifactor**(a): phân tích a thành thừa số nguyên tố.
- **ifactors**(a): phân tích a thành thừa số nguyên tố và được viết dưới dạng danh sách.

- **convert**($n, base, b$): biểu diễn n theo cơ số b.
- **convert**($[a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0], base, b, c$): biểu diễn một số từ cơ số b sang cơ số c.
- **convert(n, binary)**: biểu diễn một số theo hệ nhị phân
- **convert(n, octal)**: biểu diễn một số theo hệ bát phân
- **convert(n, hex)**: biểu diễn một số theo hệ thập lục phân

Bài 5.1. Cho n và b là hai số nguyên dương lớn hơn 1. Hãy viết chương trình để tìm biểu diễn của n theo cơ số b.

Bài 5.2. Cho n và m được biểu diễn dưới dạng cơ số b. Hãy viết chương trình tính tổng và tích và biểu diễn chúng dưới dạng cơ số b.

Bài 5.3. Cho b, c là số nguyên dương lớn hơn 1 và một biểu diễn n theo cơ số b. Hãy viết chương trình để tìm biểu diễn của n theo cơ số c.

Bài 5.4. Cho a, b là hai số nguyên dương. Viết chương trình để tính ước chung lớn nhất của a và b theo thuật toán Euclid.

Bài 5.5. Cho a, b là hai số nguyên. Goi $d = (a, b)$, hãy viết chương trình để tìm m, n sao cho $d = ma + nb$.