ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC - KỸ THUẬT MÁY TÍNH

MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC (CO2011)

Nhóm: TTSL - Bài tập lớn

Mô hình SIR trong dự báo COVID-19

GVHD: Nguyễn An Khương
Nguyễn TIến Thịnh
SV thực hiện: Nguyễn Văn A – 22102134
Trần Văn B – 88471475
Lê Thị C – 36811334
Phạm Ngọc D – 97501334
Kiều Thị E – 12341334

Tp. Hồ Chí Minh, Tháng .../2020

Mục lục

1 Bài toán 1

2 Bài toán 2

2.1 Cơ sở lý thuyết

Với một số gia h đủ nhỏ, đạo hàm của một hàm số tại một điểm x_0 bất kỳ có thể coi như tương đương với:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Về hình học, coi như cát tuyến đi qua 2 điểm $(x_0, f(x_0))$ và $(x_0+h, f(x_0+h))$ là tiếp tuyến tại x_0 khi khoảng cách h không đáng kể.Tương đương:

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + h * f'(x_0)$$

Một phương trình vi phân bậc nhất có dạng:

$$f'(x) = g(x, f(x))$$

Như vậy với x_0 bất kỳ, ta luôn xấp xỉ được giá trị hàm tại $x = x_0 + h$ bằng công thức:

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + h * g(x_0, f(x_0))$$

Nếu ta tách toàn bộ miền xác định của x thành các đoạn có độ dài là h, miền giá trị y cũng có thể được xấp xỉ bằng dãy y_n với mỗi giá trị y_n được tính bằng:

$$y_n \approx y_{n-1} + h * g(x_{n-1}, y_{n-1})$$

với bước xấp xỉ $h = x_n - x_{n-1}$ đủ nhỏ và $g(x_{n-1}, y_{n-1})$ được gọi là độ dốc của đường cong $f(x)$ tại x_0. Tương tự đối với hệ phương trình vi phân bậc nhất, với $Y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))^T$ ta có:

$$Y_n \approx Y_{n-1} + h * G(x_{n-1}, Y_{n-1})$$

Dựa theo công thức này, nếu biết x_0 và Y_0, ta có thể xấp xỉ được nghiệm $Y(x)$. Trong bài toán SIR, nếu biết được toàn bộ các thông số tại thời điểm bắt đầu khảo sát, với bước xấp xỉ đủ nhỏ ta có thể tính xấp xỉ được hệ nghiệm.

2.2 Code

- Nhóm sử dụng công cụ lập trình và hỗ trợ tính toán Matlab cho phần hiện thực.
- Với phương pháp Euler thì trong chương trình, nhóm chọn step size (Δt) = 0.1.
- Đoạn chương trình như sau:

```
%% Description %%
% TODO: Using Euler's algorithm to find solutions for SIR systems
% INPUT:
    % - t: time varaiable t
    % - beta: contact coefficient
    % - gamma: recovery coefficient
    % - S0: S(t0)
    % - I0: I(t0)
    % - R0: R(t0)
% OUTPUT:
```

```
    % - ret: vector [S(t) I(t) R(t)]
function ret=SIR_Euler(t,beta,gamma,S0,I0,R0)
    %% Initial %%
    syms diff_S(I,S) diff_I(I,S) diff_R(I)
    N = S0+I0+R0;
    diff_S(I,S) = -beta/N*I*S; % S'(t)
    diff_I(I,S) = beta/N*I*S - gamma*I; % I'(t)
    diff_R(I) = gamma*I; % R'(t)
    S_n = []; S_n(1) = S0; % initial for S_n series
    I_n = []; I_n(1) = I0; % initial for I_n series
    R_n = []; R_n(1) = R0; % initial for R_n series

    %% Euler's algorithm %%
    step_size = 0.1 ; % We chose step size (delta t) = 0.1
    t_n = [0:step_size:t]; % t_n series
    for i=2:length(t_n)
        % S_n+1 = S_n + delta_t*S'(t_n)
        S_n(i) = S_n(i-1) + step_size*diff_S(I_n(i-1),S_n(i-1));
        % I_n+1 = I_n + delta_t*I'(t_n)
        I_n(i) = I_n(i-1) + step_size*diff_I(I_n(i-1),S_n(i-1));
        % R_n+1 = R_n + delta_t*R'(t_n)
        R_n(i) = R_n(i-1) + step_size*diff_R(I_n(i-1));
    end

    %% Return result %%
    ret=[];
    ret(1) = S_n(length(S_n)); % ret(1)=S(t)
    ret(2) = I_n(length(I_n)); % ret(2)=I(t)
    ret(3) = R_n(length(R_n)); % ret(3)=R(t)

    %% Draw Graph %%
    plot(t_n,S_n,'-b',t_n,I_n,'-r',t_n,R_n,'-g')
    legend('S(t)', 'I(t)', 'R(t)')
    xlabel('Time')
    ylabel('Number of people')
    set(gca,'XTick',0:1:t)
end
```

2.3 Ví dụ

Giả sử rằng có một loại cúm đang lây lan trong cộng đồng dân cư và có những điều kiện ràng buộc sau:

- Cộng đồng này đang bị cách li, không ai được ra và cũng không ai được vào
- Một người khi mắc bệnh và hồi phục thì không còn mắc bệnh này lần nữa
- Tại thời điểm bắt đầu khảo sát $t0$ thì số người có khả năng mắc bệnh, nhiễm bệnh và hồi phục lần lượt là 950, 50 và 0 người.

Trong phần này, nhóm sẽ sử dụng cộng đồng dân cư trên để lấy 2 ví dụ về việc sử dụng phương pháp Euler tìm nghiệm cho hệ SIR. Với 2 ví dụ này thì hệ SIR chỉ khác nhau ở 2 hệ số β và γ

2.3.1 Ví dụ 1

a) **Điều kiện đầu**

- Hệ số tiếp xúc $\beta = 0.4$
- Hệ số phục hồi $\gamma = 0.5$
- Biến thời gian $t = 12$
- $S(t0) = 950$, $I(t0) = 50$, $R(t0) = 0$

b) **Hệ SIR thành lập được**

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -0.0004IS \\ \frac{dI}{dt} &= 0.0004IS - 0.5I \\ \frac{dR}{dt} &= 0.5I \end{aligned} \tag{I}$$

c) **Dùng chương trình đã viết ở phần 2.2 tìm nghiệm hệ phương trình** (I)

Trong commandline Matlab, ta dùng lệnh sau để tìm nghiệm của hệ

```
>> Output = SIR_Euler(12,0.4,0.5,950,50,0)
```

Kết quả:
Sau khi chạy lệnh trên ta được kết quả như sau

```
Output = 844.4828    8.4349   147.0823
```

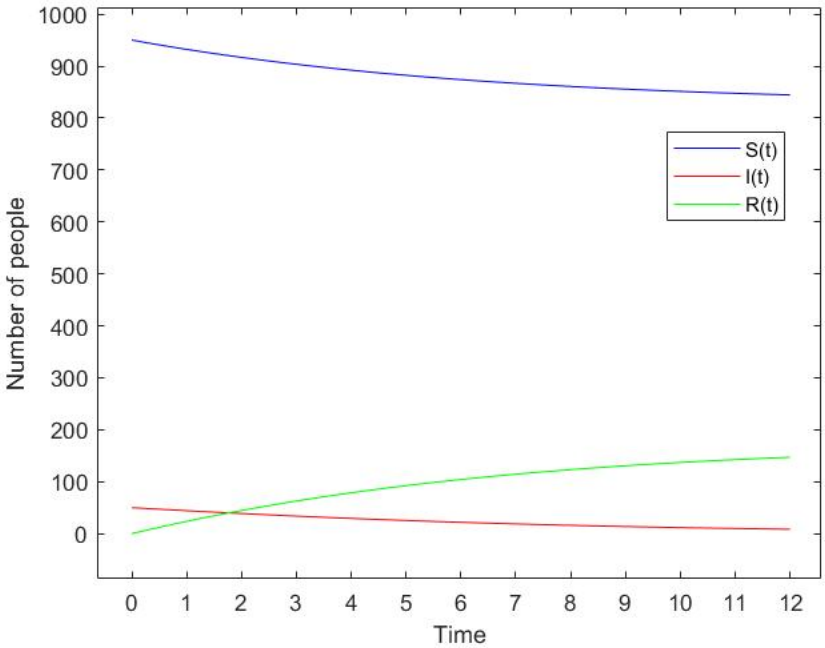
Vậy tại thời điểm $t = 12$ thì:

- Số người có nguy cơ nhiễm bệnh là khoảng 845 người
- Số người nhiễm bệnh là khoảng 8 người
- Số người hồi phục là khoảng 147 người

d) **Đồ thị biểu diễn nghiệm xấp xỉ - Hình 1**.

e) **Nhận xét**

- Số người nhiễm bệnh tại từng thời điểm sẽ giảm dần
- Tại thời điểm $t = 12$ thì số người có nguy cơ nhiễm bệnh còn khoảng 845 người, nghĩa là có thêm khoảng 105 (được tính bằng $S(t) - S(t0)$) người chuyển từ nhóm có nguy cơ sang nhóm nhiễm bệnh, chiếm tỉ lệ nhỏ so với số người có nguy cơ ban đầu. Điều này chứng tỏ dịch bệnh đã không bùng phát.
- Như vậy, ta thấy với tỉ số $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8 < 1$ thì dịch bệnh sẽ không có nguy cơ bùng phát.



Hình 1: *Đồ thị biểu diễn nghiệm xấp xỉ Ví dụ 1*

2.3.2 Ví dụ 2

a) **Điều kiện đầu**

- Hệ số lây nhiễm $\beta = 2$
- Hệ số phục hồi $\gamma = 0.5$
- Biến thời gian $t = 12$
- $S(t0) = 950$, $I(t0) = 50$, $R(t0) = 0$

b) **Hệ SIR thành lập được**

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -0.002IS \\ \frac{dI}{dt} &= 0.002IS - 0.5I \\ \frac{dR}{dt} &= 0.5I \end{aligned} \tag{II}$$

c) **Dùng chương trình đã viết ở phần 2.2 tìm nghiệm hệ phương trình** (II)

Trong commandline Matlab, ta dùng lệnh sau để tìm nghiệm của hệ

```
>> Output = SIR_Euler(12,2,0.5,950,50,0)
```

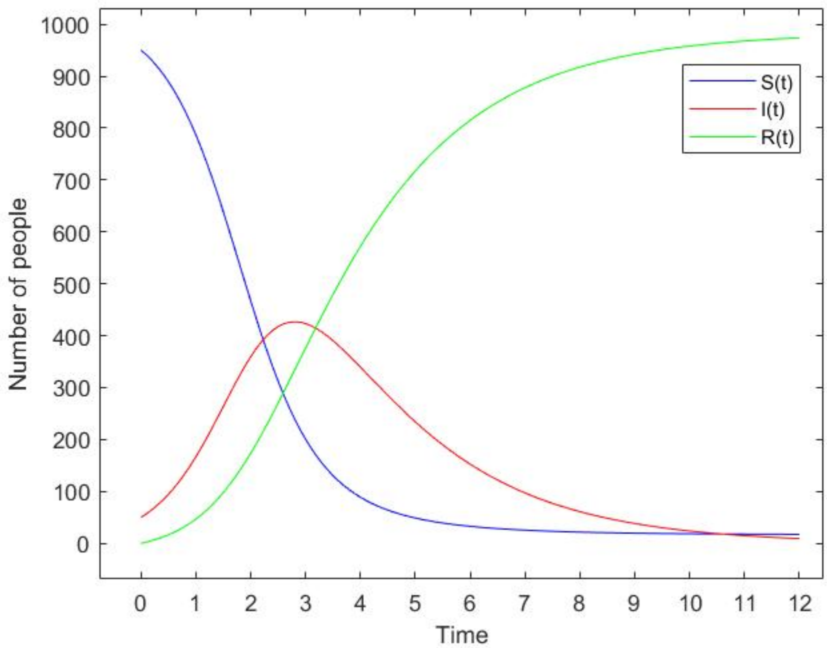
Kết quả:
Sau khi chạy lệnh trên ta được kết quả như sau

```
Output = 17.2474    9.1779   973.5747
```

Vậy tại thời điểm $t = 12$ thì:

- Số người có nguy cơ nhiễm bệnh là khoảng 17 người
- Số người nhiễm bệnh là khoảng 9 người
- Số người hồi phục là khoảng 974 người

d) **Đồ thị biểu diễn nghiệm xấp xỉ - Hình 2**.



Hình 2: *Đồ thị biểu diễn nghiệm xấp xỉ Ví dụ 2*

e) **Nhận xét**

- Số người nhiễm bệnh tại từng thời điểm sẽ tăng trong khoảng thời gian từ 0 đến 3 và sau đó giảm dần. Tại thời điểm t=3 thì số người trong nhóm nhiễm bệnh lên đến 400 người.
- Tại thời điểm $t = 12$ thì số người có nguy cơ nhiễm bệnh còn khoảng 17 người, nghĩa là có thêm khoảng 933 (được tính bằng $S(t) - S(t0)$) người chuyển từ nhóm có nguy cơ sang nhóm nhiễm bệnh, chiếm tỉ lệ cao so với số người có nguy cơ ban đầu. Điều này chứng tỏ dịch bệnh đã bùng phát mạnh mẽ, gần như cả cộng đồng đều đã nhiễm bệnh.
- Như vậy, ta thấy với tỉ số $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{2}{0.5} = 4 > 1$ thì dịch bệnh sẽ bùng phát.

2.4 Kết luận

Như vậy trong phần này, nhóm đã trình bày về phương pháp Euler trong việc tìm nghiệm cho hệ SIR. Nhóm đã trình bày phần chương trình (code được viết bằng Matlab) cũng như đưa ra một số ví dụ kiểm tra và sử dụng chương trình. Thông qua các ví dụ thì chúng ta đã phần nào hình dung được tỉ lệ $\frac{\beta}{\gamma}$ ảnh hưởng như thế nào đến dịch bệnh. Trong phần tiếp theo nhóm sẽ làm rõ hơn những vấn đề liên quan đến tỉ lệ này

3 Bài toán 3