Chương 5

BÀI TOÁN LOẠI PARABOL

5.1 Bài toán truyền nhiệt một chiều

5.1.1. Phát biểu bài toán

Cho các số a, b, T với $a < b,\ T > 0$. Cho $p,\ q, g$ là những hàm số của $x \in [a, b]$ và cho f là hàm số của $(x, t) \in [a, b] \times [0, T]$.

Xét phương trình đạo hàm riêng loại parabol đối với hàm $u = u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(p\frac{\partial u}{\partial x}) + qu = f(x, t), \quad x \in (a, b),\ t \in (0, T] \tag{5.1.1}$$

cùng với điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = g(x), \qquad x \in [a, b] \tag{5.1.2}$$

và điều kiện biên loại một thuần nhất

$$u(a, t) = 0, \qquad u(b, t) = 0, \qquad t \in [0, T] \tag{5.1.3}$$

Giả sử

$$0 < c_0 \leq p(x) \leq c_1;\ 0 \leq q(x) \leq c_2, \quad c_i = const \tag{5.1.4}$$

$$p(x),\ \frac{dp}{dx}(x),\ q(x),\ g(x) \text{ và } f(x, t) \text{ tại } t \text{ xác định, thuộc } L_2(a, b) \tag{5.1.5}$$

đồng thời

$$\int_0^T \{\int_a^b [f(x, t)]^2 dx\} dt < \infty$$

Bài toán:

Tìm hàm số $u = u(x, t)$ thỏa mãn phương trình (5.1.1), điều kiện ban đầu (5.1.2) và điều kiện biên (5.1.3) gọi là *bài toán biên loại một thuần nhất đối với phương trình (5.1.1).*

5.1.2. Nghiệm cổ điển. Nghiệm của của bài toán (5.1.1)-(5.1.3) gọi là *nghiệm cổ điển* của nó.

5.1.3. Chú ý. Từ nay về sau khi có hàm số $F(x, t)$ thì tại t xác định $F(x, t)$ là một hàm số chỉ của x, đôi khi cần ta ký hiệu hàm số đó là $F(., t)$, chẳng hạn khi tại t xác định hàm $F(x, t)$ có bình phương khả tích trên $(0, 1)$ thì ta viết $F(., t) \in L_2(0, 1)$.

5.1.4. Bài toán biên không thuần nhất. Ta có thể thay điều kiện (5.1.3) bởi

$$u(a,t) = g_a(t), \qquad u(b,t) = g_b(t) \tag{5.1.6}$$

trong đó $g_a(t)$, $g_b(t)$ là những hàm số cho trước. Khi đó ta gặp một bài toán biên loại một với điều kiện biên không thuần nhất. Trong trường hợp này ta có thể dùng phép đổi hàm

$$v(x,t) = u(x,t) - g_a(t) - \frac{x-a}{b-a}(g_b(t) - g_a(t))$$

thì sẽ được bài toán biên loại một với điều kiện biên thuần nhất đối với ẩn hàm mới $v(x,t)$.

5.1.5. Ý nghĩa vật lý. Phương trình (5.1.1) là phương trình truyền nhiệt một chiều.

5.2. Dạng yếu của bài toán (5.1.1)-(5.1.3). Nghiệm suy rộng

5.2.1. Bài toán yếu. Trong $L_2(a,b)$ tại t xác định ta nhân vô hướng hai vế của (5.1.1) với hàm thử $v \in D(a,b)$ ta được

$$\int_a^b [\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + q(x)u]vdx = \int_a^b f(x,t)vdx, \qquad \forall v \in D(a,b) \tag{5.2.1}$$

Lấy tích phân từng phần tích phân thứ hai ở vế trái và chú ý rằng $D(a,b)$ trù mật trong $W_0^1(a,b)$ ta có

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}vdx + \int_a^b [p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + q(x,t)uv]dx = \int_a^b f(x,t)vdx, \qquad \forall v \in W_0^1(a,b) \tag{5.2.2}$$

Trong $L_2(a,b)$ ta tiếp tục nhân vô hướng hai vế của (5.1.2) với $v \in D(a,b)$ và chú ý rằng $D(a,b)$ trù mật trong $W_0^1(a,b)$ ta được

$$\int_a^b u(x,0)vdx = \int_a^b g(x)vdx, \qquad \forall v \in W_0^1(a,b) \tag{5.2.3}$$

Bài toán :

Tìm $u = u(x,t)$ sao cho $u(.,t) \in W_0^1(a,b)$ và $u(x,t)$ thỏa mãn (5.2.2)(5.2.3) gọi là *bài toán yếu* ứng với bài toán (5.1.1)-(5.1.3).

Để cho gọn ta ký hiệu tại t xác định

$$\alpha(u,v) := \int_a^b [p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + q(x)uv]dx, \quad (f(.,t),v)_{L_2(a,b)} := \int_a^b f(x,t)vdx \tag{5.2.4}$$

Khi đó công thức (5.2.2) trở thành

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, v)_{L_2(a,b)} + \alpha(u,v) = (f(.,t),v)_{L_2(a,b)}, \qquad \forall v \in W_0^1(a,b) \tag{5.2.5}$$

Đồng thời (5.2.3) có dạng

$$(u(.,0),v)_{L_2(a,b)} = (g,v)_{L_2(a,b)}, \qquad \forall v \in W_0^1(a,b) \tag{5.2.6}$$

Như vậy bài toán yếu của bài toán (5.1.1)-(5.1.3) là bài toán:
Tìm hàm $u = u(x,t)$ sao cho $u(.,t) \in W_0^1(a,b)$ và thỏa mãn (5.2.5)(5.2.6).

5.2.2. Nghiệm suy rộng. Nghiệm của bài toán yếu (5.2.5)(5.2.6) gọi là *nghiệm suy rộng* của bài toán (5.1.1)-(5.1.3).

Theo trên nếu u là nghiệm cổ điển của bài toán (5.1.1)-(5.1.3) thì nó cũng là nghiệm của bài toán yếu (5.2.5)(5.2.6), tức là là nghiệm suy rộng của nó.

Ngược lại, nếu $u = u(x,t)$ sao cho $u(.,t) \in W_0^1(a,b)$ là nghiệm suy rộng và lại có $u(.,t) \in W^2(a,b)$ thì u ấy cũng là nghiệm cổ điển, cách chứng minh xem mục 2.2.2, chương 2.

Dựa vào kết quả ở định lý 6.2.1 chương 6 ta có thể chứng minh sự tồn tại của nghiệm suy rộng với qui ước: đạo hàm đối với t là đạo hàm suy rộng trên $(0,T)$.

5.3. Tính gần đúng nghiệm suy rộng bằng phương pháp phần tử hữu hạn

5.3.1. Không gian H_N. Để tính gần đúng nghiệm suy rộng của bài toán (5.1.1)-(5.1.3), tức là nghiệm của bài toán (5.2.5)(5.2.6) ta thay $W_0^1(a,b)$ ở (5.2.5)(5.2.6) bằng một không gian con hữu hạn chiều H_N của nó. Muốn thế ta xây dựng N hàm tọa độ độc lập tuyến tính $\varphi_i(x) \in W_0^1(a,b)$:

$$S_N = \{\varphi_i(x),\ i = 1,2,...,N\}$$

và đặt

$$H_N := \text{span}\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_N(x)\} \tag{5.3.1}$$

H_N nhận S_N là một cơ sở.

Để xây dựng các hàm $\varphi_i(x)$ ta chia đoạn $[a,b]$ thành $N+1$ phần tử hữu hạn và xây dựng hàm $\varphi_i(x)$ như ở chương 2 mục 2.3.2.

5.3.2. Nghiệm gần đúng.

Ta tìm nghiệm gần đúng dưới dạng

$$w_N(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i(t)\varphi_i(x) \tag{5.3.2}$$

để tại t xác định $w_N \in H_N$. Những hàm $\beta_i(t)$ được xác định sao cho $w_N(x,t)$ thỏa mãn (5.2.5) (5.2.6) trong H_N:

$$(\frac{\partial w_N}{\partial t}, v)_{L_2(a,b)} + \alpha(w_N, v) = (f(.,t),v)_{L_2(a,b)}, \quad \forall v \in H_N \tag{5.3.3}$$

$$(w_N(.,0),v)_{L_2(a,b)} = (g,v)_{L_2(a,b)}, \quad \forall v \in H_N \tag{5.3.4}$$

Vì S_N là một cơ sở của H_N nên muốn có (5.3.3),(5.3.4) với mọi $v \in H_N$ chỉ cần có chúng với $v = \varphi_j, j = 1, 2, ..., N$ (xem nhận xét ở chương 1, mục 1.9.3), nghĩa là

$$(\frac{\partial w_N}{\partial t}, \varphi_j)_{L_2(a,b)} + \alpha(w_N, \varphi_j) = (f(.,t), \varphi_j)_{L_2(a,b)}, \quad \forall j = 1, 2, ..., N \tag{5.3.5}$$

$$(w_N(.,0), \varphi_j)_{L_2(a,b)} = (g, \varphi_j)_{L_2(a,b)}, \quad \forall j = 1, 2, ..., N \tag{5.3.6}$$

Ta suy ra bài toán Cauchy của một hệ phương trình vi phân cấp một để xác định $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), ..., \beta_N(t))$:

$$\mathcal{B}\frac{d\beta(t)}{dt} + \mathcal{A}\beta(t) = F(t), t > 0 \tag{5.3.7}$$

$$\mathcal{B}\beta(0) = G \tag{5.3.8}$$

trong đó $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là những ma trận cấp N:

$$\mathcal{B} = (b_{ij}) = ((\varphi_i, \varphi_j)_{L_2(a,b)}), \quad \mathcal{A} = (a_{ij}) = (\alpha(\varphi_i, \varphi_j)) \tag{5.3.9}$$

$$F = (F_1, ..., F_N),\ F_i = F_i(t) = (f(.,t), \varphi_i)_{L_2(a,b)} \tag{5.3.10}$$

$$G = (G_1, ..., G_N),\ G_i = (g, \varphi_i)_{L_2(a,b)} \tag{5.3.11}$$

Chú ý rằng ở đây, để cho gọn ta viết vectơ cột thành một hàng.

Dễ thấy ma trận $\mathcal{B}$ không suy biến và ma trận $\mathcal{A}$ xác định dương, do đó hệ (5.3.7) (5.3.8) có nghiệm duy nhất.

5.4. Sự ổn định của bài toán (5.3.3)(5.3.4)

Trong (5.3.3) thay $v = w_N$, rồi lấy tích phân theo $t \in [0, T]$:

$$\int_0^t [(\frac{\partial w_N}{\partial t'}, w_N)_{L_2(a,b)} + \alpha(w_N, w_N)]dt' = \int_0^t (f(.,t'), w_N)_{L_2(a,b)} dt'$$

Ta suy ra

$$\frac{1}{2}\|w_N(.,t)\|^2_{L_2(a,b)} + \int_0^t \alpha(w_N, w_N)dt' = \int_0^t (f(.,t'), w_N)_{L_2(a,b)} dt' + \frac{1}{2}\|w_N(.,0)\|^2_{L_2(a,b)} \tag{5.4.1}$$

Mặt khác (5.3.4) cho

$$\|w_N(.,0)\|^2_{L_2(a,b)} = (g, w_N(.,0))_{L_2(a,b)} \le |(g, w_N(.,0))_{L_2(a,b)}| \le \|g\|_{L_2(a,b)} \|w_N(.,0)\|_{L_2(a,b)}$$

$$\Rightarrow \|w_N(.,0)\|_{L_2(a,b)} \le \|g\|_{L_2(a,b)} \tag{5.4.2}$$

Hơn nữa

$$\int_0^t (f(.,t'), w_N)_{L_2(a,b)} dt' \leq \int_0^t \|f(.,t')\|_{L_2(a,b)}.\|w_N(.,t')\|_{L_2(a,b)} d'$$

Cho nên (5.4.1) cho

$$\frac{1}{2}\|w_N(.,t)\|^2_{L_2(a,b)} + \int_0^t \alpha(w_N, w_N) dt'$$

$$\leq \int_0^t \|f(.,t')\|_{L_2(a,b)} \|w_N(.,t)\|_{L_2(a,b)} dt + \frac{1}{2}\|g\|^2_{L_2(a,b)} \tag{5.4.3}$$

Áp dụng bất đẳng thức :

$$|ab| \leq \frac{a^2}{4\varepsilon} + \varepsilon b^2, \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{5.4.4}$$

vào số hạng thứ nhất ở vế phải của (5.4.3) ta thu được

$$\frac{1}{2}\|w_N(.,t)\|^2_{L_2(a,b)} + \int_0^t \alpha(w_N, w_N) dt' \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t \|f(.,t')\|^2_{L_2(a,b)} dt' + \varepsilon \int_0^t \|w_N(.,t')\|^2_{L_2(a,b)} dt' + \frac{1}{2}\|g\|^2_{L_2(a,b)}) \tag{5.4.5}$$

Vậy tồn tại hằng số $c_3 > 0$ để có

$$\max_{t\in[0,T]} \|w_N(.,t)\|^2_{L_2(a,b)} + \int_0^T \alpha(w_N, w_N) dt \leq c_3(\int_0^T \|f(.,t')\|^2_{L_2(a,b)} dt' + \|g\|^2_{L_2(a,b)}) \tag{5.4.6}$$

Đó là sự ổn định của nghiệm gần đúng w_N đối với vế phải và điều kiện ban đầu.

5.5. Đánh giá sai số và sự hội tụ

Giả sử u là nghiệm suy rộng của bài toán (5.1.1)-(5.1.3) tức nghiệm của bài toán (5.2.5)(5.2.6) và w_N là nghiệm của bài toán (5.3.3)(5.3.4).

Gọi $z_N(x,t) = u(x,t) - w_N(x,t)$ là sai số tại $(x,t) \in [a,b] \times [0,T]$. Ta có

$$(\frac{\partial z_N}{\partial t}, v_N)_{L_2(a,b)} + \alpha(z_N, v_N) = 0, \quad \forall v_N = \sum_{i=1}^N b_i(t)\varphi_i \in H_N$$

$$(z_N(.,0), v_N(0))_{L_2(a,b)} = 0, \quad \forall v_N(0) = \sum_{i=1}^N b_i(0)\varphi_i \in H_N$$

Khi đó

$$(\frac{\partial z_N}{\partial t}, z_N)_{L_2(a,b)} + \alpha(z_N, z_N) =$$

$$= (\frac{\partial z_N}{\partial t}, u - v_N + v_N - w_N)_{L_2(a,b)} + \alpha(z_N, u - v_N + v_N - w_N) =$$

$$= (\frac{\partial z_N}{\partial t}, u - v_N)_{L_2(a,b)} + \alpha(z_N, u - v_N)$$

Lấy tích phân theo t từ 0 đến t ta suy ra

$$\frac{1}{2}\|z_N(.,t)\|^2_{L_2(a,b)} + \int_0^t \alpha(z_N, z_N)dt'$$

$$= \int_0^t \alpha(z_N, u - v_N)dt' + \int_0^t (\frac{\partial z_N}{\partial t'}, u - v_N)_{L_2(a,b)}dt' + \frac{1}{2}\|z_N(.,0)\|^2_{L_2(a,b)}$$

Lấy tích phân từng phần theo t trong tích phân thứ hai ở vế phải:

$$\int_0^t (\frac{\partial z_N}{\partial t'}, u - v_N)_{L_2(a,b)}dt' = (z_N(.,t), u(.,t) - v_N(.,t))_{L_2(a,b)}$$

$$-(z_N(.,0), u(.,0) - v_N(.,0))_{L_2(a,b)} - \int_0^t (z_N, \frac{\partial u}{\partial t'} - \frac{\partial v_N}{\partial t'})_{L_2(a,b)}dt'$$

ta thu được

$$\frac{1}{2}\|z_N(.,t)\|^2_{L_2(a,b)} + \int_0^t \alpha(z_N, z_N)dt' \leq$$

$$\leq \int_0^t (\alpha(z_N, z_N))^{1/2}(\alpha(u - v_N, u - v_N))^{1/2}dt' + \frac{1}{2}\|z_N(.,0)\|^2_{L_2(a,b)} +$$

$$+\|z_N(.,t)\|_{L_2(a,b)}\|u(.,t) - v_N(.,t)\|_{L_2(a,b)} + \|z_N(.,0)\|_{L_2(a,b)}\|g - v_N(.,0)\|_{L_2(a,b)} +$$

$$+\int_0^t \|z_N(.,t')\|_{L_2(a,b)}\|\frac{\partial u}{\partial t'} - \frac{\partial v_N}{\partial t'}\|_{L_2(a,b)}dt' \qquad (5.5.1)$$

Bây giờ xét điều kiện ban đầu (5.3.4). Nó thỏa mãn $\forall v = \varphi_i$. Các hàm số φ_i, $i = 1, 2, ..., N$ không trực giao trong $L_2(a,b)$. Ta trực giao hóa chúng bằng quá trình Gram-Smidt thì được hệ cơ sở mới trực chuẩn cho H_N, đó là: $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$, đối với các hàm này ta cũng có

$$(w_N(.,0), \psi_i)_{L_2(a,b)} = (g, \psi_i)_{L_2(a,b)}, \qquad i = 1, 2, ..., N$$

Do đó

$$w_N(x,0) = \sum_{i=1}^{N}(w_N(x,0), \psi_i(x))_{L_2(a,b)}\psi_i(x) = \sum_{i=1}^{N}(g, \psi_i(x))_{L_2(a,b)}\psi_i(x)$$

Vậy $w_N(x,0)$ là hình chiếu trực giao trong $L_2(a,b)$ của $u(.,0) = g$ lên H_N. Cho nên $\|z_N(.,0)\|_{L_2(a,b)} = \|u(x,0) - w_N(x,0)\|_{L_2(a,b)}$ là khoảng cách từ $u(x,0) = g$ đến H_N, đó là khoảng cách ngắn nhất từ $u(x,0) = g$ đến một vectơ bất kỳ của H_N, vậy

$$\|z_N(.,0)\|_{L_2(a,b)} \leq \|g - v_N(.,0)\|_{L_2(a,b)}, \qquad \forall v_N \in H_N \qquad (5.5.2)$$

Áp dụng bất đẳng thức (5.4.4) ta có

$$\int_0^t (\alpha(z_N, z_N))^{1/2}(\alpha(u - v_N, u - v_N))^{1/2}dt' \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_0^t \alpha(z_N, z_N)dt' + \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^t \alpha(u - v_N, u - v_N)dt',$$

$$\|z_N(.,t)\|_{L_2(a,b)}.\|u(.,t) - v_N(.,t)\|_{L_2(a,b)} \leq \varepsilon'\|z_N(.,t)\|^2_{L_2(a,b)} + \frac{1}{4\varepsilon'}\|u(.,t) - v_N(.,t)\|^2_{L_2(a,b)}$$

và

$$\int_0^t \|z_N(.,t')\|_{L_2(a,b)}\|\frac{\partial u}{\partial t'} - \frac{\partial v_N}{\partial t'}\|_{L_2(a,b)}dt' \leq$$

$$\leq \varepsilon"(\int_0^t \|z_N(.,t')\|^2_{L_2(a,b)}dt') + \frac{1}{4\varepsilon"}(\int_0^t \|\frac{\partial u}{\partial t'} - \frac{\partial v_N}{\partial t'}\|^2_{L_2(a,b)}dt')$$

Do đó , với các số dương $\varepsilon,\ \varepsilon',\ \varepsilon"$ chọn thích hợp thì công thức (5.5.1) cho

$$\|z_N(.,t)\|^2_{L_2(a,b)} + \int_0^t \alpha(z_N, z_N)dt' \leq$$

$$\leq c_4\{\int_0^t \alpha(u - v_N, u - v_N)dt' + \|u(.,t) - v_N(.,t)\|^2_{L_2(a,b)} +$$

$$+\|g - v_N(.,0)\|^2_{L_2(a,b)} + \int_0^t \|\frac{\partial u}{\partial t'} - \frac{\partial v_N}{\partial t'}\|^2_{L_2(a,b)}dt'\}, \quad c_4 = const \tag{5.5.3}$$

Đặt $u_I = \sum_{i=1}^N u(x_i,t)\varphi_i(x)$ ta có

$$\frac{\partial u_I}{\partial t} = \frac{\partial \sum_{i=1}^N u(x_i,t)\varphi_i(x)}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u(x_i,t)}{\partial t}\varphi_i(x)$$

nghĩa là

$$\frac{\partial u_I}{\partial t} = (\frac{\partial u}{\partial t})_I \tag{5.5.4}$$

Vậy thay trong (5.5.3) $v_N = u_I$ ta được

$$\|z_N(.,t)\|^2_{L_2(a,b)} + \int_0^t \alpha(z_N, z_N)dt' \leq c_5\{\|u(.,t) - u_I(.,t)\|^2_{L_2(a,b)}$$

$$+\int_0^t \|\frac{\partial u}{\partial t'} - (\frac{\partial u}{\partial t'})_I\|^2_{L_2(a,b)}dt') + +\|g - u_I(0)\|^2_{L_2(a,b)} + \int_0^t \alpha(u - u_I, u - u_I)dt'\} \tag{5.5.5}$$

trong đó $c_5 = const > 0$

Áp dụng bổ đề 2.3.2 chương 2 ta có

$$\|u(.,t) - u_I(.,t)\|_{L_2(a,b)} \le c_6 h^2 \|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\|_{L_2(a,b)}, \quad c_6 = const > 0$$

$$\|\frac{\partial u}{\partial t} - (\frac{\partial u}{\partial t})_I\|_{L_2(a,b)} \le c_7 C h^2 \|\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\|_{L_2(a,b)}, \quad c_7 = const > 0$$

$$\alpha(u - u_I, u - u_I) = \int_a^b \{[p\frac{\partial}{\partial x}(u - u_I)]^2 + p[u - u_I]^2\}dx \le C_8 h^2, \quad C_8 = const > 0$$

Giả sử $g(x) \in L_2(a,b)$ và tại t xác định

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in L_2(a,b) \tag{5.5.6}$$

sao cho chuẩn của chúng có bình phương khả tích trong $[0,T]$.

Khi đó (5.5.5)cho

$$\max_{0\le t\le T} \|u(.,t) - w_N(.,t)\|^2_{L_2(a,b)} + \int_0^T \alpha(u - w_N, u - w_N)dt \le c_9 h^2, \quad c_9 = const > 0 \tag{5.5.7}$$

Từ đó ta suy ra đánh giá sai số: tồn tại các hằng số dương $c_{10},\ c_{11}$ để có

$$\max_{0\le t\le T} \|u(.,t) - w_N(.,t)\|_{L_2(a,b)} \le c_{10} h, \qquad \sqrt{\int_0^T \|u - w_N\|^2_{W^1(a,b)} dt} \le c_{11} h$$

Từ đánh giá sai số ta suy ra sự hội tụ.

BÀI TẬP

1. Giải bài toán sau bằng phương pháp phần tử hữu hạn:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x(1-x) + 2, \quad 0 < x < 1$$

$$u(x,0) = x - x^2, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 < t \le 1$$

Hãy chia đoạn $0 \le x \le 1$ thành 4 đoạn con bằng nhau.

1. Giải bài toán sau bằng phương pháp phần tử hữu hạn:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad 0 < x < 1$$

$$u(x,0) = g(x), \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 < t \le 1$$