Chương 4

BÀI TOÁN LOẠI ELÍP BA CHIỀU

4.1. Bài toán Dirichlet thuần nhất đối với phương trình Poisson

4.1.1. Bài toán đạo hàm riêng.

Cho Ω là một miền bị chặn của không gian tọa độ (x,y,z) có biên là mặt kín Γ trơn từng mảnh, pháp tuyến ngoài của mặt Γ là ν.

Cho hàm số $f(x,y,z) \in L_2(\Omega)$. Xét bài toán:
Tìm $u(x,y,z) \in W^2(\Omega)$ *thỏa mãn*

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f, \quad (x,y,z) \in \Omega \tag{4.1.1}$$

$$u(x,y,z) = 0, \qquad (x,y,z) \in \Gamma \tag{4.1.2}$$

tức là :

$$\textit{Tìm} \quad u(x,y,z) \in W_0^1(\Omega) \cap W^2(\Omega) \quad \textit{thỏa mãn} \quad (4.1.1). \tag{4.1.3}$$

4.1.2. Nghiệm cổ điển. Nghiệm của bài toán (4.1.3) gọi là *nghiệm cổ điển* của bài toán (4.1.1)(4.1.2).

Bài toán (4.1.1)(4.1.2) là mô hình toán học của hiện tượng truyền nhiệt dừng trong khối vật chất Ω mà nhiệt độ tại biên Γ ấn định bằng 0.

4.2. Bài toán yếu và nghiệm ruy rộng

4.2.1. Công thức Green

Công thức Ostrogradsky (xem [1],III, tr.176) viết:

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_\Gamma P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

trong đó P, Q, R là các hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.
Thay $P = v\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = v\frac{\partial u}{\partial y}$, $R = v\frac{\partial u}{\partial z}$ ta được

$$\iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] dxdydz = \iint_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial x} dydz + v\frac{\partial u}{\partial y} dzdx + v\frac{\partial u}{\partial z} dxdy$$

Do đó có công thức sau đây gọi là *công thức Green:*

$$\iiint_\Omega v\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] dxdydz =$$

$$= -\iint_\Omega [\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}]dxdydz + \iint_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \nu}dS \tag{4.2.1}$$

trong đó dS là vi phân diện tích trên mặt Γ.

4.2.2. Bài toán yếu. Giả sử bài toán (4.1.1)(4.1.2) có nghiệm $u \in W_0^1(\Omega) \cap W^2(\Omega)$ Khi đó Δu và $f \in L_2(\Omega$. Trong $L_2(\Omega)$ nhân vô hướng hai vế của (4.1.1) với hàm thử $v \in D(\Omega)$ ta có

$$\iiint_\Omega [\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}]vdxdydz = \iiint_\Omega fvdxdydz, \qquad \forall v \in D(\Omega) \tag{4.2.2}$$

Bây giờ áp dụng công thức Green (4.2.1) ta thu được

$$-\iiint_\Omega [\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}]dxdydz + \iint_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \nu}dS = \iiint_\Omega fvdxdydz \tag{4.2.3}$$

Vì $v \in D(\Omega)$ nên có

$$\iiint_\Omega [\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}]dxdydz = -\iiint_\Omega fvdxdydz \qquad \forall v \in D(\Omega)$$

Vì $D(\Omega)$ trù mật trong $W_0^1(\Omega)$ nên

$$\iiint_\Omega [\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}]dxdydz = -\iiint_\Omega fvdxdydz, \qquad \forall v \in W_0^1(\Omega) \tag{4.2.4}$$

Như vậy nếu u là nghiệm của bài toán (4.1.1)(4.1.2) thì u cũng là nghiệm của bài toán (4.2.4).

Đặt

$$\alpha(u,v) := \iiint_\Omega [\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}]dxdydz, \quad L(v) := \iiint_\Omega -fvdxdydz \tag{4.2.5}$$

thì (4.2.4) gợi ý phát biểu bài toán mới:

Với $\alpha(u,v)$ và $L(v)$ xác định bởi (4.2.5) hãy tìm $u \in W_0^1(\Omega)$ thỏa mãn

$$\alpha(u,v) = L(v), \quad \forall v \in W_0^1(\Omega) \tag{4.2.6}$$

gọi là *bài toán yếu* ứng bài toán (4.1.1)(4.1.2).

4.2.3. Nghiệm suy rộng.

Nghiệm của bài toán yếu (4.2.6) gọi là *nghiệm suy rộng* của bài toán (4.1.1)(4.1.2).

Theo trên, nếu $u \in W_0^1(\Omega) \cap W^2(\Omega)$ là nghiệm cổ điển của bài toán (4.1.1)(4.1.2) thì nó cũng là nghiệm suy rộng của bài toán đó.

Ngược lại, nếu $u \in W_0^1(\Omega)$ là nghiệm suy rộng, lại thuộc $W^2(\Omega)$ nữa thì nó cũng là nghiệm cổ điển của nó,(cách chứng minh xem mục 2.2.2 chương 2).

4.2.4. Sự tồn tại nghiệm suy rộng.

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm suy rộng ta áp dụng định lý 1.8.1 chương 1. Cách làm tương tự cách làm ở chương 3, mục 3.2.4 đối với trường hợp hai chiều.

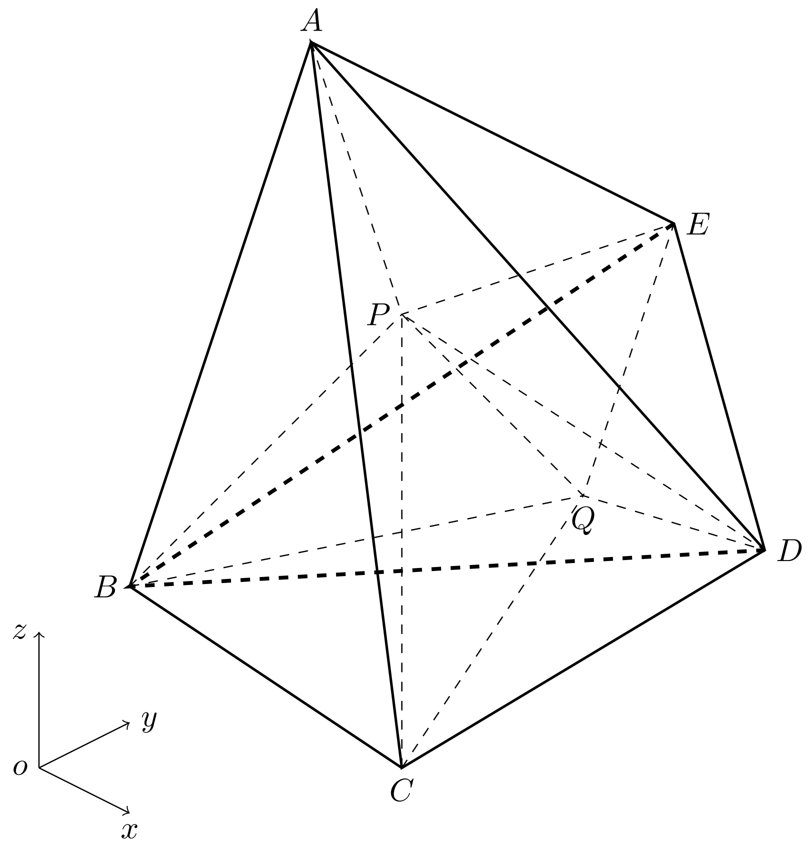
4.3. Tính gần đúng nghiệm suy rộng khi Ω là một đa diện bằng phương pháp phần tử hữu hạn

4.3.1. Mở đầu. Để tính gần đúng nghiệm suy rộng, tức là nghiệm của bài toán (4.2.6) theo sơ đồ chung đã trình bầy ở chương 1, ta thay không gian $V = W_0^1(\Omega)$ bằng một không gian con hữu hạn chiều của nó.

Xét trường hợp Ω là một đa diện, hay một khối giới hạn bởi các mặt phẳng.

4.3.2. Tứ diện phân.

Trước hết ta chia đa diện Ω thành nhiều tứ diện con khác nhau không có điểm trong



H.4.3.1

chung trong không có đỉnh của tứ diện này nằm trên cạnh hay mặt bên của tứ diện khác, không có cạnh của tứ diện này nằm trên mặt bên của tứ diện khác, đồng thời các góc tam diện của mọi tứ diện không nhỏ hơn $\theta_0 > 0$ để cho thể tích của mỗi tứ diện dần đến 0 khi và chỉ khi tất cả các cạnh của nó dần đến 0. Thí dụ như ta có một đa diện lồi ABCDE (H.4.3.1). Vẽ hai nút trong P và Q rồi vẽ 10 tứ diện con sau:

PABC, PACD, PADE, PAEB, QPBC, QPCD, QPDE, QPEB, QBCD, QBDE.

Mỗi tứ diện con gọi là một *phần tử hữu hạn*. Mỗi đỉnh của một tứ diên con gọi là một *nút*.

Giả sử có tất cả $\overline{N}$ nút. Ta đánh số các nút từ 1 đến $\overline{N}$:

$$P_1, P_2, ..., P_{\overline{N}} \tag{4.3.1}$$

sao cho các nút từ P_1 đến $P_N, N < \overline{N}$ là các nút trong. Nút P_i có tọa độ là (x_i, y_i, z_i). Cạnh dài nhất của các tứ diện con ký hiệu là h. Các tứ diện phần tử hữu hạn cũng được đánh số từ 1 đến M :

$$T_1, T_2, ..., T_M \tag{4.3.2}$$

Sau khi đánh số xong thì phần tử hữu hạn thứ l, viết T_l, có 4 nút (đỉnh) là P_i, P_j, P_k, P_r hoàn toàn xác định.

4.3.3. Hàm tọa độ.

Ứng mỗi nút *trong* P_i ta xét hàm số sau đây gọi là *hàm tọa độ thứ i* : $\varphi_i = \varphi_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, ..., N$, φ_i *là một hàm bậc nhất đối với* x, y, z, *bằng 1 tại* P_i *và bằng* 0 *tại các nút khác* $P_j, j \neq i$. Như vậy đồ thị của hàm số φ_i là một "hình chóp bốn chiều" có "đáy" là hợp của những tứ diện con có chung đỉnh P_i. Hàm φ_i liên tục và tuyến tính từng phần trên Ω chỉ khác 0 ở trong "đáy", và bằng 0 tại mọi điểm ở ngoài "đáy". Cho nên φ_i thuộc $W_0^1(\Omega)$ và có giá đỡ nhỏ, là cái "đáy " nói trên.

Ta hình dung đồ thị của φ_i giống các mái nhà như ở chương 3, nhưng ở đây không vẽ được vì là 4 chiều.

4.3.4. Không gian con hữu hạn chiều của $\in W_0^1(\Omega)$.

Dễ thấy các hàm $\varphi_i \in W_0^1(\Omega)$ và độc lập tuyến tính. Do đó họ

$$S_N = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\}$$

sinh ra không gian

$$H_N = \text{Span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\} \tag{4.3.3}$$

là một không gian con N chiều của $W_0^1(\Omega)$ nhận S_N là một cơ sở.

4.3.5. Nghiệm gần đúng

Để tính gần đúng nghiệm của bài toán (4.2.6) ta thay không gian $W_0^1(\Omega)$ ở (4.2.6) bằng không gian H_N. Bài toán tìm nghiệm gần đúng sẽ là

Tìm $w_N \in H_N$ thỏa mãn

$$\alpha(w_N, v) = L(v) \quad \forall v \in H_N \tag{4.3.4}$$

Hàm $w_N \in H_N$ có dạng

$$w_N(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x, y, z) \tag{4.3.5}$$

trong đó các hệ số c_i xác định sao cho (4.3.4) thỏa mãn với mọi $v \in H_N$. Vì S_N là một cơ sở của H_N nên chỉ cần (4.3.4) thỏa mãn với $v = \varphi_j, \quad j = 1, 2, ..., N$ (xem nhận xét ở chương 1, mục 1.9.3), nghĩa là

$$\alpha(\sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad j = 1, 2, ..., N$$

Muốn thế các c_i phải thỏa mãn hệ đại số

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \alpha(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad j = 1, 2, ..., N \tag{4.3.6}$$

Đặt

$$A_{ij} = \alpha(\varphi_i, \varphi_j) = \iiint_\Omega (\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{\partial \varphi_j}{\partial z} dxdydz \tag{4.3.7}$$

$$F_i = L(\varphi_i) = -\iiint_\Omega f(x, y, z)\varphi_i(x, y, z) dxdydz \tag{4.3.8}$$

Khi đó hệ đại số (4.3.6) trở thành

$$Ac = F \tag{4.3.9}$$

trong đó

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}, \quad A = (A_{ij}), \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}$$

4.3.6. Công thức tích lũy

Theo tính cộng miền của tích phân ta có

$$A_{ij} = \sum_{l=1}^{M} A_{ij}^l \tag{4.3.10}$$

trong đó

$$A_{ij}^l = \iiint_{T_l} (\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi_j}{\partial z})dxdydz \tag{4.3.11}$$

có thể xem là đóng góp của T_l vào A_{ij}.

$$F_i = \sum_{l=1}^{M} F_i^l \tag{4.3.12}$$

trong đó

$$F_i^l = -\iiint_{T_l} f(x,y,z)\varphi_i(x,y,z)dxdydz \tag{4.3.13}$$

có thể xem là đóng góp của T_l vào F_i.

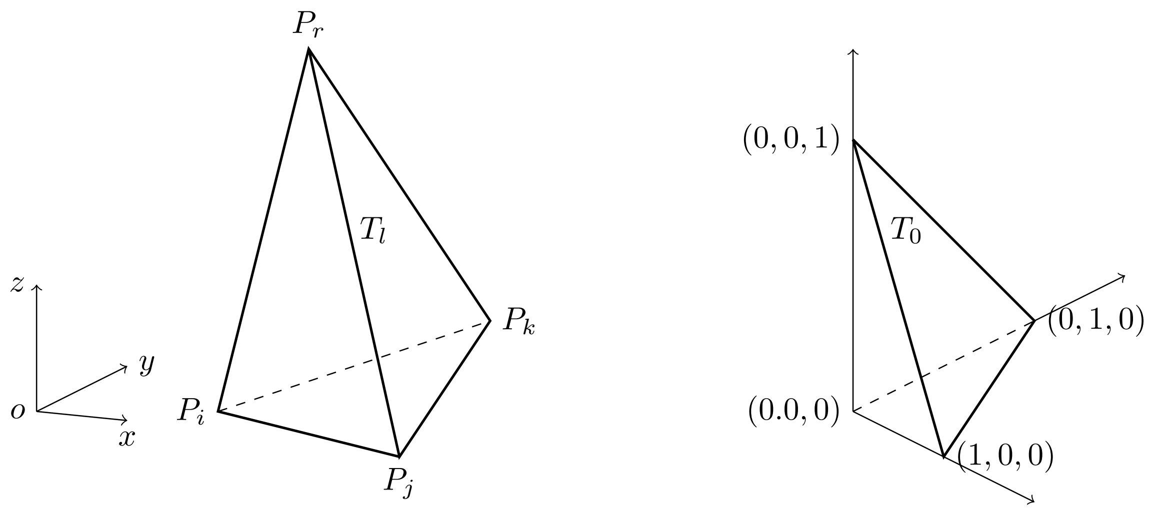
Các công thức tính (4.3.10),(4.3.12) gọi là các công thức *tích lũy.*

4.3.7. Cách tính các hệ A_{ij}^l và F_i^l bằng phương pháp đổi biến

Các công thức (4.3.11) và (4.3.13) là các tích phân bội ba chỉ tính trên một tứ diện T_l.

Để có A_{ij}^l và F_i^l ta có thể tính trực tiếp hay dùng phương pháp đổi biến.

Ta áp dụng phép đổi biến



H.4.3.2

nhằm đưa việc tính tích phân trên một tứ diện bất kỳ T_l trong không gian (x,y,z) có đỉnh $P_i(x_i,y_i,z_i)$, $P_j(x_j,y_j,z_j)$, $P_k(x_k,y_k,z_k)$, $P_r(x_r,y_r,z_r)$ về việc tính tích phân trên tứ diện chuẩn T_0 trong không gian (ξ, η, ζ) có đỉnh là $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ (hình (H.4.3.2)). Muốn thế ta xây dựng phép đổi biến từ (x, y, z) sang (ξ, η, ζ) :

$$\begin{aligned} x &= (x_j - x_i)\xi + (x_k - x_i)\eta + (x_r - x_i)\zeta + x_i \\ y &= (y_j - y_i)\xi + (y_k - y_i)\eta + (y_r - y_i)\zeta + y_i \\ z &= (z_j - z_i)\xi + (z_k - z_i)\eta + (z_r - z_i)\zeta + z_i \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

. Cách đổi biến đó có tác dụng đưa đỉnh $P_i(x_i, y_i, z_i)$ của T_l chuyển thành đỉnh $(0,0,0)$ của T_0, đỉnh $P_j(x_j, y_j, z_j)$ của T_l chuyển thành đỉnh $(1,0,0)$ của T_0, đỉnh $P_k(x_k, y_k, z_k)$ của T_l chuyển thành đỉnh $(0,1,0)$ của T_0, đỉnh $P_r(x_r, y_r, z_r)$ của T_l chuyển thành đỉnh $(0,0,1)$ của T_0.

Công thức đổi biến trong tích phân bội ba có dạng :

$$\iiint_{T_l} g(x,y,z)dxdydz = \iiint_{T_0} \overline{g}(\xi,\eta,\zeta)|J|d\xi d\eta d\zeta \tag{4.3.15}$$

trong đó

$$\overline{g}(\xi,\eta,\zeta) = g(x,y,z)|_{x,\,y,\,z \text{ thay bởi } (4.3.14)}, \tag{4.3.16}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i & x_r - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i & y_r - y_i \\ z_j - z_i & z_k - z_i & z_r - z_i \end{vmatrix} \tag{4.3.17}$$

Xét phép đổi biến ngược lại. Hệ (4.3.14) đối với các ẩn ξ, η, ζ có định thức $\Delta = J$ và do đó

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{J}\begin{vmatrix} x - x_i & x_k - x_i & x_r - x_i \\ y - y_i & y_k - y_i & y_r - y_i \\ z - z_i & z_k - z_i & z_r - z_i \end{vmatrix} \\ \eta &= \frac{1}{J}\begin{vmatrix} x_j - x_i & x - x_i & x_r - x_i \\ y_j - y_i & y - y_i & y_r - y_i \\ z_j - z_i & z - z_i & z_r - z_i \end{vmatrix} \\ \zeta &= \frac{1}{J}\begin{vmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i & x - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i & y - y_i \\ z_j - z_i & z_k - z_i & z - z_i \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Từ (4.3.18) ta suy ra

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} y_k - y_i & y_r - y_i \\ z_k - z_i & z_r - z_i \end{vmatrix}}{J}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} x_k - x_i & x_r - x_i \\ z_k - z_i & z_r - z_i \end{vmatrix}}{J}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\begin{vmatrix} x_k - x_i & x_r - x_i \\ y_k - y_i & y_r - y_i \end{vmatrix}}{J}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} y_j - y_i & y_r - y_i \\ z_j - z_i & z_r - z_i \end{vmatrix}}{J}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} x_j - x_i & x_r - x_i \\ z_j - z_i & z_r - z_i \end{vmatrix}}{J}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{\begin{vmatrix} x_j - x_i & x_r - x_i \\ y_j - y_i & y_r - y_i \end{vmatrix}}{J}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} y_j-y_i & y_k-y_i\\ z_j-z_i & z_k-z_i\end{vmatrix}}{J};\ \frac{\partial\zeta}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} x_j-x_i & x_k-x_i\\ z_j-z_i & z_k-z_i\end{vmatrix}}{J};\ \frac{\partial\zeta}{\partial z}=\frac{\begin{vmatrix} x_j-x_i & x_k-x_i\\ y_j-y_i & y_k-y_i\end{vmatrix}}{J}$$

Bây giờ ta áp dụng công thức (4.3.15) để tính các tích phân A^l_{ij} và F^l_i.

Với cách ký hiệu ở (4.3.16) trong trường hợp $g=\varphi_i,\ \varphi_j,\ \varphi_r$ ta thấy qua phép biến đổi (4.3.14)

$$\begin{aligned}&\overline{\varphi}_i(\xi,\eta,\zeta)=1-\xi-\eta-\zeta\\&\overline{\varphi}_j(\xi,\eta,\zeta)=\xi\\&\overline{\varphi}_k(\xi,\eta,\zeta)=\eta\\&\overline{\varphi}_r(\xi,\eta,\zeta)=\zeta\end{aligned}$$

Do đó

$$\overline{\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}}=\frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}=-\frac{1}{J}\Delta_{ix},\qquad \Delta_{ix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\ y_j-y_i & y_k-y_i & y_r-y_i\\ z_j-z_i & z_k-z_i & z_r-z_i\end{vmatrix}$$

$$\overline{\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}}=\frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}==\frac{1}{J}\Delta_{iy},\qquad \Delta_{iy}=\begin{vmatrix}1&1&1\\ x_j-x_i & x_k-x_i & x_r-x_i\\ z_j-z_i & z_k-z_i & z_r-z_i\end{vmatrix}$$

$$\overline{\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}}=\frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}-\frac{1}{J}\Delta_{iz},\qquad \Delta_{iz}=\begin{vmatrix}1&1&1\\ x_j-x_i & x_k-x_i & x_r-x_i\\ y_j-y_i & y_k-y_i & y_r-y_i\end{vmatrix}$$

$$\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}}=\frac{\partial\overline{\varphi}_j}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{1}{J}D_{jx},\qquad D_{jx}=\begin{vmatrix} y_k-y_i & y_r-y_i\\ z_k-z_i & z_r-z_i\end{vmatrix}$$

$$\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}}=\frac{\partial\overline{\varphi}_j}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{1}{J}D_{jy}=\qquad D_{jy}=\begin{vmatrix} x_k-x_i & x_r-x_i\\ z_k-z_i & z_r-z_i\end{vmatrix}$$

$$\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}}=\frac{\partial\overline{\varphi}_j}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}=\frac{\partial\xi}{\partial z}=\frac{1}{J}D_{jz},\qquad D_{jz}=\begin{vmatrix} x_k-x_i & x_r-x_i\\ y_k-y_i & y_r-y_i\end{vmatrix}$$

$$\overline{\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}}=\frac{\partial\overline{\varphi}_k}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{1}{J}D_{kx},\qquad D_{kx}=\begin{vmatrix} y_j-y_i & y_r-y_i\\ z_j-z_i & z_r-z_i\end{vmatrix}$$

$$\overline{\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}}=\frac{\partial\overline{\varphi}_k}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{1}{J}D_{ky},\qquad D_{ky}=\begin{vmatrix} x_j-x_i & x_r-x_i\\ z_j-z_i & z_r-z_i\end{vmatrix}$$

$$\overline{\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}}=\frac{\partial\overline{\varphi}_k}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}=\frac{\partial\eta}{\partial z}=-\frac{1}{J}D_{kz},\qquad D_{kz}=\begin{vmatrix} x_j-x_i & x_r-x_i\\ y_j-y_i & y_r-y_i\end{vmatrix}$$

$$\overline{\frac{\partial\varphi_r}{\partial x}}=\frac{\partial\overline{\varphi}_r}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{1}{J}D_{rx},\qquad D_{rx}=\begin{vmatrix} y_j-y_i & y_k-y_i\\ z_j-z_i & z_k-z_i\end{vmatrix}$$

$$\overline{\frac{\partial \varphi_r}{\partial y}} = \frac{\partial \overline{\varphi}_r}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{1}{J}D_{ry}, \qquad D_{ry} = \begin{vmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ z_j - z_i & z_k - z_i \end{vmatrix}$$

$$\overline{\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{\varphi}_r}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{J}D_{rz}, \qquad D_{rz} = \begin{vmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{vmatrix}$$

Vậy (4.3.11) dẫn đến

$$A^l_{ii} = \iiint_{T_l} ([\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}]^2 + [\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}]^2 + [\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}]^2) dxdydz$$

$$= \iiint_{T_0} \frac{1}{|J|}\{[\Delta_{ix}]^2 + [\Delta_{iy}]^2 + [\Delta_{iz}]^2\} d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{6|J|}\{[\Delta_{ix}]^2 + [\Delta_{iy}]^2 + [\Delta_{iz}]^2\} \quad (4.3.19)$$

Một cách tương tự,

$$A^l_{jj} = \iiint_{T_l} ([\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}]^2 + [\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}]^2 + [\frac{\partial \varphi_j}{\partial z}]^2) dxdydz = \frac{1}{6|J|}\{[D_{jx}]^2 + [D_{jy}]^2 + [D_{jz}]^2\} \quad (4.3.20)$$

$$A^l_{kk} = \iiint_{T_l} ([\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}]^2 + [\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}]^2 + [\frac{\partial \varphi_k}{\partial z}]^2) dxdydz = \frac{1}{6|J|}\{[D_{kx}]^2 + [D_{ky}]^2 + [D_{kz}]^2\} \quad (4.3.21)$$

$$A^l_{rr} = \iiint_{T_l} ([\frac{\partial \varphi_r}{\partial x}]^2 + [\frac{\partial \varphi_r}{\partial y}]^2 + [\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}]^2 dxdydz = \frac{1}{6|J|}\{[D_{rx}]^2 + [D_{ry}]^2 + [D_{rz}]^2\} \quad (4.3.22)$$

$$A^l_{ij} = \iiint_{T_l} (\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{\partial \varphi_j}{\partial z}) dxdydz$$

$$= \iiint_{T_0} \frac{-1}{|J|}\{\Delta_{ix}D_{jx} + \Delta_{iy}D_{jy} + \Delta_{iz}D_{jz}\} d\xi d\eta d\zeta = \frac{-1}{6|J|}\{\Delta_{ix}D_{jx} + \Delta_{iy}D_{jy} + \Delta_{iz}D_{jz}\} \quad (4.3.23)$$

Một cách tương tự,

$$A^l_{ik} = \frac{-1}{6|J|}\{\Delta_{ix}D_{kx} + \Delta_{iy}D_{ky} + \Delta_{iz}D_{kz}\} \quad (4.3.24)$$

$$A^l_{ir} == \frac{-1}{6|J|}\{\Delta_{ix}D_{rx} + \Delta_{iy}D_{ry} + \Delta_{iz}D_{rz}\} \quad (4.3.25)$$

$$A^l_{jk} = \frac{-1}{6|J|}\{D_{kx}D_{rx} + D_{ky}D_{ry} + D_{kz}D_{rz}\} \quad (4.3.26)$$

$$A^l_{jr} = \frac{-1}{6|J|}\{D_{jx}D_{rx} + D_{jy}D_{ry} + D_{jz}D_{rz}\} \quad (4.3.27)$$

$$A^l_{kr} = \frac{-1}{6|J|}\{D_{kx}D_{rx} + D_{ky}D_{ry} + D_{kz}D_{rz}\} \quad (4.3.28)$$

Bây giờ với qui ước viết

$$F(\xi,\eta,\zeta) = f(x,y,z)|_{x=x(\xi,\eta,\zeta),y=y(\xi,\eta,\zeta),z=z(\xi,\eta,\zeta)}, \tag{4.3.29}$$

trong đó $x = x(\xi,\eta,\zeta), y = y(\xi,\eta,\zeta), z = z(\xi,\eta,\zeta)$ cho bởi (4.3.14) và J cho bởi (4.3.17) từ (4.3.13) ta có

$$F_i^l = -\iiint_{T_l} f(x,y,z)\varphi_i(x,y,z)dxdydz = -\iiint_{T_0} F(\xi,\eta,\zeta)(1-\xi-\eta-\zeta)|J|d\xi d\eta d\zeta \tag{4.3.30}$$

$$F_j^l = -\iiint_{T_l} f(x,y,z)\varphi_j(x,y,z)dxdydz = -\iiint_{T_0} F(\xi,\eta,\zeta)\xi|J|d\xi d\eta d\zeta \tag{4.3.31}$$

$$F_k^l = -\iiint_{T_l} f(x,y,z)\varphi_i(x,y,z)dxdydz = -\iiint_{T_0} F(\xi,\eta,\zeta)\eta|J|d\xi d\eta d\zeta \tag{4.3.32}$$

$$F_r^l = -\iiint_{T_l} f(x,y,z)\varphi_i(x,y,z)dxdydz = -\iiint_{T_0} F(\xi,\eta,\zeta)\zeta|J|d\xi d\eta d\zeta \tag{4.3.33}$$

Các tích phân (4.3.30)-(4.3.33) có thể tính đúng hay gần đúng.

4.3.8. Đánh giá sai sai số.

Đặt

$$u_I(x,y,z) := \sum_{i=1}^{N} u(x_i,y_i,z_i)\varphi_i(x,y,z), \tag{4.3.34}$$

Áp dụng định lý 1.10.2 chương 1 ta có

Bổ đề 4.3.1.

$$\|u - w_N\|_{W^1(\Omega)} \leq \|u - u_I\|_{W^1(\Omega)} \tag{4.3.35}$$

Sau đó ta đánh giá $\|u - u_I\|_{W^1(\Omega)}$, và với cách làm giống như ở chương 3, chứng minh được kết quả sau:

Định lý 4.3.1. *Nếu* $u(x,y) \in W^2(\Omega) \cap W_0^1(\Omega)$ *thì*

$$\|u - w_N\|_{W^1(\Omega)} \leq C_{12}h\|f\|_{L_2(\Omega)},\, ,\ C_{12} = const > 0 \tag{4.3.36}$$

$$\|u - w_N\|_{L_2(\Omega)} \leq C_{13}h^2\|f\|_{W^2(\Omega)}, \quad C_{13} = const > 0 \tag{4.3.37}$$

Đó là đánh giá sai số. Từ đó ta suy ra sự hội tụ.

BÀI TẬP

Cho Ω là một miền bị chặn của không gian tọa độ (x,y,z) có biên là mặt kín Γ trơn từng mảnh, pháp tuyến ngoài của mặt Γ là ν.

1. Xét bài toán biên loại ba:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y,z) + \sigma(x,y,z)u(x,y,z) = g(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \Gamma$$

trong đó $f,\ \sigma$ và g cho trước với $\sigma \geq \sigma_0,\ \sigma_0 = const > 0$

1/ Chứng minh rằng bài toán yếu tương ứng là

Tìm $u \in W^1(\Omega)$ sao cho

$$\alpha(u,v) = L(v), \qquad \forall v \in W^1(\Omega)$$

trong đó

$$\alpha(u,v) = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz + \iint_\Gamma \sigma uvdS,$$

$$L(v) = -\iiint_\Omega fvdxdydz + \iint_\Gamma gvdS$$

2/ Trình bầy phương pháp phần tử hữu hạn khi Ω là một đa diện.

2. Xét bài toán biên loại hai:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - q(x,y,z)u = f(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y,z) = g(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \Gamma$$

trong đó f, q, g cho trước với $q(x,y,z) \geq q_0,\ q_0 = const > 0.$

1/ Chứng minh rằng bài toán yếu tương ứng là

Tìm $u \in W^1(\Omega)$ sao cho

$$\alpha(u,v) = L(v), \qquad \forall v \in W^1(\Omega)$$

trong đó

$$\alpha(u,v) = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + quv\right)dxdydz,$$

$$L(v) = -\iiint_\Omega fvdxdydz + \iint_\Gamma gvdS$$

2/ Trình bầy phương pháp phần tử hữu hạn khi Ω là một đa diện.

3. Xét bài toán biên loại một không thuần nhất:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \Omega$$

$$u(x, y, z) = g(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \Gamma$$

trong đó $f,\ g$ cho trước.

Xét bài toán phụ

$$\Delta u_\varepsilon := \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z^2} = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega$$

$$\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + u_\varepsilon|_\Gamma = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Gamma$$

trong đó ε là một tham số dương nhỏ.

Hãy đánh giá

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W^1(\Omega)}$$

so với ε.