Chương 3

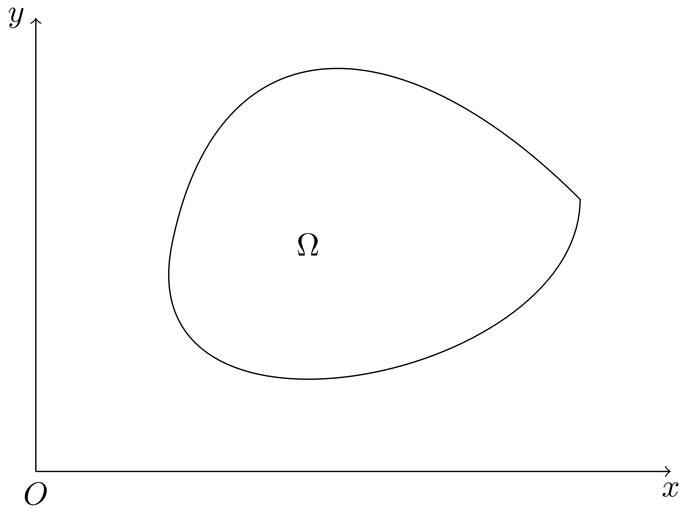
BÀI TOÁN LOẠI ELÍP HAI CHIỀU

(BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT DỪNG HAI CHIỀU)

3.1. Bài toán Dirichlet thuần nhất đối với phương trình Poisson

3.1.1. Bài toán đạo hàm riêng.

Ω là một miền bị chặn của mặt phẳng tọa độ (x,y) có biên là đường kín Γ trơn từng khúc (H.3.1.1).



H.3.1.1

Cho hàm số $f(x,y) \in L_2(\Omega)$.
Bài toán: *tìm* $u(x,y) \in W^2(\Omega)$ *thỏa mãn*

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \quad (x,y) \in \Omega \tag{3.1.1}$$

$$u|_\Gamma = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma \tag{3.1.2}$$

tức là :

tìm $u(x,y) \in W_0^1(\Omega) \cap W^2(\Omega)$ *thỏa mãn (3.1.1).*
gọi là bài toán Dirichlet thuần nhất đối với phương trình Poisson.

3.1.2. Nghiệm cổ điển. Nghiệm của bài toán vừa phát biểu gọi là *nghiệm cổ điển* của bài toán (3.1.1)(3.1.2).

Bài toán (3.1.1)(3.1.2) là mô hình toán học của hiện tượng truyền nhiệt dừng trong bản mỏng vật chất Ω mà nhiệt độ tại biên Γ ấn định bằng 0.

3.2. Bài toán yếu và nghiệm suy rộng

3.2.1. Công thức Green.

Nếu P và Q có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong $\overline{\Omega}$ thì ta có công thức Green liên hệ giữa tích phân kép và tích phân đường loại hai ([1],III, mục 4.2.3)

$$\iint_{\Omega}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy \tag{3.2.1}$$

trong đó tích phân đường ở vế phải lấy theo chiều dương của Γ.

Giả sử đường kín Γ có vectơ pháp tuyến ngoài là ν, vectơ tiếp tuyến dương là τ và vi phân cung là ds. Ta có

$$dx = \cos(\tau, x)ds = \cos((\tau,\nu) + (\nu, y) + (y, x))ds = \cos(-\pi + (\nu, y))ds = -\cos(\nu, y)ds$$

$$dy = \cos(\tau, y)ds = \cos((\tau,\nu) + (\nu, x) + (x, y))ds = \cos(\nu, x)ds$$

Do đó

$$\iint_{\Omega}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint(-P\cos(\nu, y) + Q\cos(\nu, x))ds \tag{3.2.2}$$

Cho $P = -\frac{\partial u}{\partial y}v,\ Q = \frac{\partial u}{\partial x}v$ ta thu được công thức sau đây, cũng gọi là *công thức Green*:

$$\iint_{\Omega}\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\}vdxdy = -\iint_{\Omega}\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\}dxdy + \oint_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \nu}vds \tag{3.2.3}$$

trong đó

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu, y) \tag{3.2.4}$$

3.2.2. Bài toán yếu. Giả sử bài toán (3.1.1)(3.1.2) có nghiệm $\in W_0^1(\Omega) \cap W^2(\Omega)$. Khi đó Δu và $f \in L_2(\Omega)$. Trong $L_2(\Omega)$ nhân vô hướng hai vế của (3.1.1) với hàm thử $v \in D(\Omega)$ ta có

$$\iint_{\Omega}[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}]vdxdy = \iint_{\Omega} fvdxdy, \quad \forall v \in D(\Omega)$$

Áp dụng công thức Green (3.2.3) vào vế trái ta được:

$$-\iint_{\Omega}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})dxdy + \oint_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \nu}vds = \iint_{\Omega} fvdxdy, \qquad \forall v \in D(\Omega) \tag{3.2.5}$$

Vì $v \in D(\Omega)$ thỏa mãn $v|_\Gamma = 0$ nên (3.2.5) cho

$$\iint_\Omega [\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}]dxdy = \iint_\Omega -fvdxdy, \qquad \forall v \in D(\Omega) \tag{3.2.6}$$

Vì $D(\Omega)$ trù mật trong $W_0^1(\Omega)$ nên (3.2.6) cho

$$\iint_\Omega [\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}]dxdy = \iint_\Omega -fvdxdy, \qquad \forall v \in W_0^1(\Omega) \tag{3.2.7}$$

Trong (3.2.7) không có đạo hàm cấp hai nữa.
Đặt

$$\alpha(u,v) := \iint_\Omega [\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}]dxdy, \quad L(v) := \iint_\Omega -fvdxdy \tag{3.2.8}$$

Ta phát biểu bài toán mới:
Với $\alpha(u,v)$ và $L(v)$ xác định bởi (3.2.8) hãy tìm $u \in W_0^1(\Omega)$ thỏa mãn

$$\alpha(u,v) = L(v), \quad \forall v \in W_0^1(\Omega) \tag{3.2.9}$$

tức là (3.2.7) thỏa mãn.

Bài toán (3.2.9) gọi là *bài toán yếu* ứng bài toán (3.1.1)(3.1.2).

3.2.3. Nghiệm suy rộng.

Nghiệm của bài toán yếu (3.2.9) gọi là *nghiệm suy rộng* của bài toán (3.1.1)(3.1.2).

Theo trên, nếu $u \in W_0^1(\Omega) \cap W^2(\Omega)$ là nghiệm cổ điển của bài toán (3.1.1)(3.1.2) thì nó cũng là nghiệm suy rộng của bài toán đó.

Ngược lại, nếu u là nghiệm suy rộng của bài toán (3.1.1)(3.1.2), lại thuộc $W^2(\Omega)$ nữa thì nó cũng là nghiệm cổ điển của nó (cách chứng minh xem mục 2.2.2, chương 2.)

Vì nghiệm suy rộng u tìm trong $W_0^1(\Omega) \supset W^2(\Omega) \cap W_0^1(\Omega)$, còn hàm thử v lại thuộc $W_0^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ nên nghiệm suy rộng dễ tìm hơn nghiệm cổ điển.

3.2.4. Sự tồn tại nghiệm suy rộng.

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm suy rộng ta sẽ áp dụng định lý 1.8.1 chương 1, mục 1.8.3.

Rõ ràng $\alpha(u,v)$ xác định ở (3.2.8), là một dạng song tuyến, đối xứng trên $W_0^1(\Omega)$. Ta chứng minh thêm rằng nó liên tục trên $W_0^1(\Omega)$ và $W_0^1(\Omega)-$eliptic. Ta có từ (3.2.8)

$$|\alpha(u,v)| \leq \iint_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x}|.|\frac{\partial v}{\partial x}|dxdy + \iint_\Omega |\frac{\partial u}{\partial y}|.|\frac{\partial v}{\partial y}|dxdy$$

Áp dụng bất đẳng thức C-S-B ta suy ra

$$|\alpha(u,v)| \leq \sqrt{\iint_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 dxdy}\sqrt{\iint_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x}|^2 dxdy} + \sqrt{\iint_\Omega |\frac{\partial u}{\partial y}|^2 dxdy}\sqrt{\iint_\Omega |\frac{\partial v}{\partial y}|^2 dxdy}$$

Do đó

$$|\alpha(u,v)| \leq C_1\|u\|_{W_0^1(\Omega)}.\|v\|_{W_0^1(\Omega)}, \qquad \forall u,v \in W_0^1(\Omega), \qquad C_1 = 2 \tag{3.2.10}$$

Vậy $\alpha(u,v)$ liên tục trên $W_0^1(\Omega)$.

Bây giờ để chứng minh $\alpha(u,v)$ là $W_0^1(\Omega)-$elliptic ta áp dụng công thức Friedrich (xem chương 1, mục 1.6.7, công thức (1.6.1b)), ta có

$$\iint_\Omega u^2 dxdy \leq C\iint_\Omega [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]dxdy, \qquad C = const > 0$$

$$\Rightarrow \iint_\Omega u^2 dxdy + \iint_\Omega [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]dxdy \leq 2C\iint_\Omega [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]dxdy$$

Theo (3.2.8) nữa ta có

$$\alpha(u,u) \geq \|u\|_{W_0^1(\Omega)}, \qquad \forall v \in W_0^1(\Omega), \qquad K = \frac{1}{2C} \tag{3.2.11}$$

Vậy $a(u,v)$ $V-$eliptic.

Vậy theo (3.2.10) và (3.2.11) $\alpha(u,v)$ là một dạng song tuyến đối xứng, liên tục trên $W_0^1(\Omega)$ và $W_0^1(\Omega)-$elliptic.

Bây giờ xét $L(v)$. Theo (3.2.8) ta có

$$|L(v)| = |\iint_\Omega fvdxdy| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}.\|v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{W_0^1(\Omega)}$$

Do đó

$$|L(v)| \leq C_4\|v\|_{W_0^1(\Omega)}, \qquad C_4 = \|f\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall v \in W_0^1(\Omega)$$

Vậy $L(v)$ liên tục trên $W_0^1(\Omega)$.

Các tính chất của $\alpha(u,v)$ và $L(v)$ vừa chứng minh cho phép ta áp dụng định lý 1.8.1 chương 1, mục 1.8.3 và kết luận về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (3.2.9) tức là nghiệm suy rộng của bài toán (3.1.1)(3.1.2).

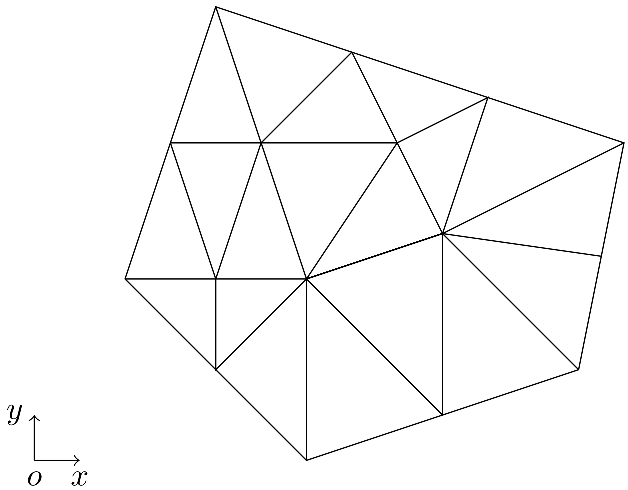
3.2.5. Vấn đề tính gần đúng nghiệm suy rộng.

Để tính gần đúng nghiệm suy rộng, tức là nghiệm của bài toán (3.2.9) hay (3.2.7) theo sơ đồ chung đã trình bầy ở chương 1 tiết 9, ta thay không gian $V = W_0^1(\Omega)$ bằng một không gian con hữu hạn chiều H_N của nó rồi giải bài toán (3.2.9) trên không gian con đó.

3.3. Phương pháp phần tử hữu hạn trong trường hợp Ω là một đa giác

3.3.1. Tam giác phân.

Ta chia Ω thành các tam giác khác nhau không có điểm chung trong, không có đỉnh của tam giác nọ nằm trên cạnh của tam giác kia (H.3.3.1), đồng thời các góc hình học của các tam giác $\geq \theta_0 > 0$, khi đó diện tích của mỗi tam giác dần đến 0 khi và chỉ khi các cạnh của tam giác có độ dài dần đến 0.



H.3.3.1

Mỗi tam giác gọi là một phần tử hữu hạn. Mỗi đỉnh của tam giác gọi là một nút.

Ta đánh số các nút, kể cả các nút biên, từ 1 đến $\overline{N}$: $P_1, P_2, \ldots, P_{\overline{N}}$ sao cho các nút từ 1 đến $N, N < \overline{N}$: $P_1, P_2, ..., P_N$ là các nút trong, còn lại là các nút biên. Đồng thời các phần tử hữu hạn tam giác được đánh số từ 1 đến M : $T_1, T_2, ..., T_M$. Tam giác thứ l, T_l có ba đỉnh hoàn toàn xác định, chẳng hạn đó là $P_i,\ P_j,\ P_k$.

3.3.2. Hàm tọa độ và không gian con H_N.

Tọa độ của nút P_i ký hiệu là (x_i, y_i).

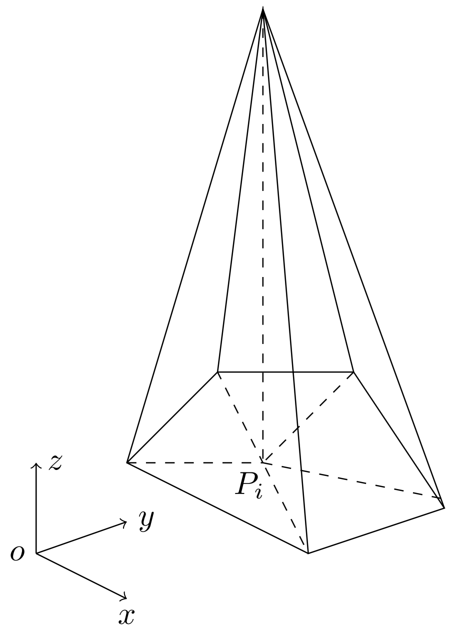
Ứng mỗi *nút trong* $P_i(x_i, y_i)$ ta xây dựng hàm số $\varphi_i(x, y)$ sau đây, gọi là hàm tọa độ thứ i: $\varphi_i(x, y)$ là một hàm bậc nhất đối với x, y trong mỗi tam giác phần tử hữu hạn, bằng 1 tại P_i và bằng 0 tại các nút P_j khác P_i. Nó có đồ thị dạng mái nhà ở H.3.3.2. Đồ thị này là một hình chóp có đáy là một đa giác, hợp của các tam giác con có chung đỉnh P_i . Hàm $\varphi_i(x, y)$ liên tục và tuyến tính từng phần trên Ω, chỉ khác 0 ở trong đáy, và bằng 0 tại mọi (x, y) ở ngoài đáy của hình chóp. Cho nên hàm φ_i thuộc $W_0^1(\Omega)$ và có giá đỡ nhỏ.

Trên phần tử hữu hạn tam giác T_l có đỉnh là $P_i(x_i, y_i), P_j(x_j, y_j), P_k(x_k, y_k)$ thì hàm φ_i ứng với P_i có dạng:

$$\varphi_i(x, y) = Ax + By + C,\ (x, y) \in T_l \tag{3.3.1}$$

với điều kiện

$$\varphi_i(x_i, y_i) = 1,\ \varphi_i(x_j, y_j) = 0,\ \varphi_i(x_k, y_k) = 0 \tag{3.3.2}$$



H.3.3.2

Họ $\{\varphi_i,\ i = 1, 2, ..., N\}$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, nếu

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

thì vì

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 0 \text{ khi } j \neq i \\ 1 \text{ khi } j = i \end{cases}$$

nên

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x_j, y_j) = 0,\ j = 1, 2, ..., N \Rightarrow c_i = 0,\ i = 1, 2, ..., N$$

Vậy họ các $\varphi_i, i = \overline{1, 2, ..., N}$ sinh ra một không gian con N chiều của $W_0^1(\Omega)$. Ta gọi

$$S_N := \{\varphi_i, \quad i = 1, 2, ..., N, \qquad H_N := \text{span}\{\varphi_i,\ i = 1, 2, ..., N\} \tag{3.3.3}$$

H_N nhận họ $\{\varphi_i,\ i = 1, 2, ..., N\}$ là một cơ sở.

Người ta còn gọi H_N là *không gian phần tử hữu hạn.*

3.3.3. Nghiệm gần đúng bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

Bây giờ ta giải bài toán (3.2.9) trên H_N, đó là bài toán:

Tìm $w_N \in H_N$ thỏa mãn

$$\alpha(w_N, v) = L(v) \qquad \forall v \in H_N \tag{3.3.4}$$

và xem nghiệm của bài toán (3.3.4) là nghiệm gần đúng của bài toán (3.2.9).

Hàm $w_N \in H_N$ nên có dạng

$$w_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x, y) \tag{3.3.5}$$

trong đó c_i xác định sao cho (3.3.4) thỏa mãn với mọi $v \in H_N$.

Vì họ $S_n = \{\varphi_j\}$ là một cơ sở của H_N nên chỉ cần (3.3.4) thỏa mãn với $v = \varphi_j,\ \ j = 1, 2, ..., N$ (xem nhận xét ở chương 1, mục 1.9.3), nghĩa là

$$\alpha(w_N, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad j = 1, 2, ..., N \Rightarrow \alpha(\sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad j = 1, 2, ..., N$$

hay

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \alpha(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad j = 1, 2, ..., N \tag{3.3.6}$$

Vậy $c_i,\ i = 1, 2, ..., N$, là nghiệm của hệ đại số (3.3.6), tức là

$$Ac = F \tag{3.3.7}$$

với

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}, \quad A = (A_{ij})$$

trong đó theo (3.2.8)

$$A_{ij} = \alpha(\varphi_i, \varphi_j) = \iint_{\Omega} (\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}) dxdy \tag{3.3.8}$$

$$F_i = -\iint_{\Omega} f(x, y)\varphi_i(x, y) dxdy \tag{3.3.9}$$

3.3.4. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ đại số.
Tương tự mục 1.9.3 chương 1.

3.3.5. Công thức tích lũy. Vì $\Omega = \bigcup_{l=1}^{M} T_l$ và $\mathrm{int}T_j \cap \mathrm{int}T_k = \emptyset,\ j \neq k$ nên theo tính chất cộng của tích phân xác định ta có

$$A_{ij} = \sum_{l=1}^{M} \iint_{T_l} (\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y})dxdy$$

$$F_i = \sum_{l=1}^{M} \iint_{T_l} f(x,y)\varphi_i(x,y)dxdy$$

Đặt

$$A_{ij}^l := \iint_{T_l} (\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y})dxdy \tag{3.3.10}$$

$$F_i^l = -\iint_{T_l} f(x,y)\varphi_i(x,y)dxdy \tag{3.3.11}$$

thì có

$$A_{ij} = \sum_{l=1}^{M} A_{ij}^l \tag{3.3.12}$$

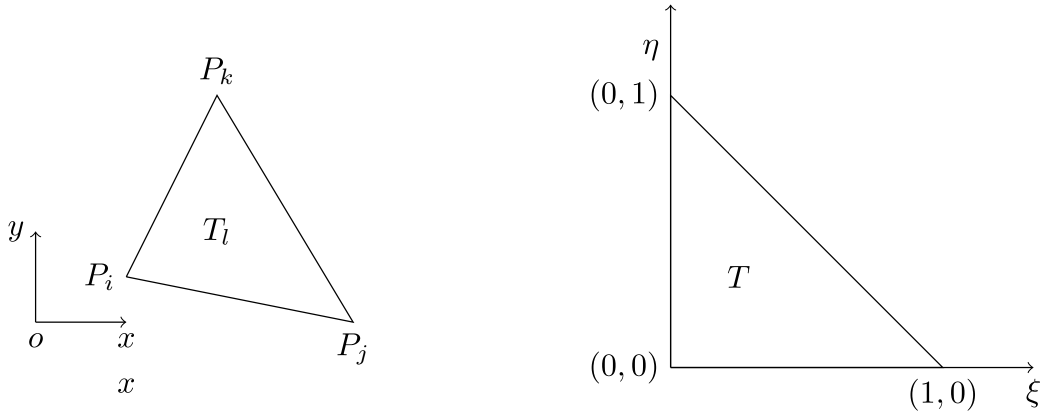
$$F_i = \sum_{l=1}^{M} F_i^l \tag{3.3.13}$$

Các công thức (3.3.12),(3.3.13) gọi là các *công thức tích lũy.*

Để có A_{ij} và F_i ta chỉ cần tính A_{ij}^l và F_i^l trên từng phần tử hữu hạn từ $l = 1$ đến $l = M$ rồi tích lũy lại theo các công thức (3.3.12),(3.3.13).

3.3.6. Cách tính các A_{ij}^l và F_i^l bằng phương pháp đổi biến.

Các tích phân (3.3.10),(3.3.11) chỉ tính trên một tam giác T_l có đỉnh hoàn toàn xác định. Chúng có thể tính trực tiếp, nhưng thường khá phức tạp. Dưới đây ta trình bầy thêm phương pháp đổi biến, từ (x, y) sang (ξ, η) (H.3.3.3) nhằm đưa việc tính tích phân trên tam giác T_l bất kỳ có đỉnh $P_i(x_i, y_i)$, $P_j(x_j, y_j)$, $P_k(x_k, y_k)$ trong mặt phẳng (x, y) về việc tính tích phân trên tam giác chuẩn T có đỉnh là $(0, 0), (1, 0)$ và $(0, 1)$ trong mặt phẳng tọa độ (ξ, η).



H.3.3.3

Phép đổi biến đó có công thức

$$\begin{aligned} x &= (x_j - x_i)\xi + (x_k - x_i)\eta + x_i = x(\xi, \eta) \\ y &= (y_j - y_i)\xi + (y_k - y_i)\eta + y_i = y(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Nó có tác dụng chuyển đỉnh $P_i(x_i, y_i)$ của T_l thành đỉnh $(0,0)$ của T, chuyển đỉnh $P_j(x_j, y_j)$ của T_l thành đỉnh $(1,0)$ của T, chuyển đỉnh $P_k(x_k, y_k)$ của T_l thành đỉnh $(0,1)$ của T.

Ta có

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = x_j - x_i, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = x_k - x_i; \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} = y_j - y_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = y_k - y_i$$

Ta suy ra định thức hàm

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{vmatrix} = (x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i) \tag{3.3.15}$$

Chú ý. Ta nhận thấy $|J| =$ hai lần số đo diện tích hình tam giác T_l. Vì góc của các tam giác phần tử hữu hạn $\geq \theta_0 > 0$ nên $|J| > 0$ chừng nào các cạnh của tam giác T_l còn khác 0.

Bây giờ ta xét phép đổi biến ngược lại từ T về T_l. Trong hệ (3.3.14) nếu xem ξ, η là ẩn thì nó có định thức $\Delta = J$ và do đó phép đổi biến ngược lại có công thức

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{(y_k - y_i)(x - x_i)}{J} - \frac{(x_k - x_i)(y - y_i)}{J} = \xi(x, y) \\ \eta &= -\frac{(y_j - y_i)(x - x_i)}{J} + \frac{(x_j - x_i)(y - y_i)}{J} = \eta(x, y) \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Ta suy ra

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{y_k - y_i}{J}; \ \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y_j - y_i}{J}; \ \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{x_k - x_i}{J}; \ \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{x_j - x_i}{J} \tag{3.3.17}$$

Ta suy ra định thức hàm $\overline{J}$ của phép đổi biến ngược:

$$\overline{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{J^2} \begin{vmatrix} y_k - y_i & x_i - x_k \\ y_i - y_j & x_j - x_i \end{vmatrix} = \frac{J}{J^2} = \frac{1}{J} \tag{3.3.18}$$

Ta có công thức đổi biến trong tích phân kép:

$$\iint_{T_l} g(x,y)dxdy = \iint_T G(\xi,\eta)|J|d\xi d\eta, \quad G(\xi,\eta) = g(x,y)|_{x=x(\xi,\eta),y=y(\xi,\eta)} \tag{3.3.19}$$

$$\iint_T G(\xi,\eta)d\xi d\eta = \iint_{T_l} g(x,y)\frac{1}{|J|}dxdy, \quad g(x,y) = G(\xi,\eta)|_{\xi=\xi(x,y),\eta=\eta(x,y)} \tag{3.3.20}$$

Áp dụng (3.3.19) vào tích phân (3.3.10) thì $g(x,y)$ có dạng

$$g(x,y) = (\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}) \tag{3.3.21}$$

Theo phép đổi biến (3.3.14) thì

$\varphi_i(x,y)$ chuyển thành $\Phi_{0,0} = 1 - \xi - \eta$
$\varphi_j(x,y)$ chuyển thành $\Phi_{1,0} = \xi$
$\varphi_k(x,y)$ chuyển thành $\Phi_{0,1} = \eta$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = \frac{\partial\Phi_{0,0}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_{0,0}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{y_k - y_i}{J} + \frac{y_j - y_i}{J} = \frac{y_j - y_k}{J}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial y} = \frac{\partial\Phi_{0,0}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_{0,0}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{x_k - x_i}{J} - \frac{x_j - x_i}{J} = -\frac{x_j - x_k}{J}$$

Một cách tương tự:

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} = \frac{\partial\Phi_{1,0}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_{1,0}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{y_k - y_i}{J}$$

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} = \frac{\partial\psi_{1,0}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\psi_{1,0}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} = -\frac{x_k - x_i}{J}$$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial x} = \frac{\partial\Phi_{0,1}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\psi_{0,1}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{y_i - y_j}{J}$$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial y} = \frac{\partial\Phi_{0,1}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_{0,1}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} = -\frac{x_i - x_j}{J}$$

Vậy từ (3.3.10) ta có

$$A_{ii}^l = \iint_{T_l} ([\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}]^2 + [\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}]^2)dxdy = \iint_T \{[\frac{y_j - y_k}{J}]^2 + [\frac{x_j - x_k}{J}]^2\}|J|d\xi d\eta =$$

$$= \int\int_T \frac{(y_j - y_k)^2 + (x_j - x_k)^2}{|J|} d\xi d\eta = \frac{(y_j - y_k)^2 + (x_j - x_k)^2}{2|J|} \tag{3.3.22}$$

$$A^l_{jj} = \iint_{T_l} ([\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}]^2 + [\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}]^2) dxdy = \iint_T \{[\frac{y_k - y_i}{J}]^2 + [\frac{x_k - x_i}{J}]^2\}|J| d\xi d\eta =$$

$$= \frac{(y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2}{2|J|} \tag{3.3.23}$$

$$A^l_{kk} = \iint_{T_l} ([\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}]^2 + [\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}]^2) dxdy = \iint_T \{[\frac{y_i - y_j}{J}]^2 + [\frac{x_i - x_j}{J}]^2\}|J| d\xi d\eta =$$

$$= \frac{(y_i - y_j)^2 + (x_i - x_j)^2}{2|J|} \tag{3.3.24}$$

$$A^l_{ij} = \iint_{T_l} (\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}) dxdy =$$

$$= \iint_T \{\frac{y_j - y_k}{J}\frac{y_k - y_i}{J} + \frac{x_j - x_k}{J}\frac{x_k - x_i}{J}\}|J| d\xi d\eta =$$

$$= \frac{(y_j - y_k)(y_k - y_i) + (x_j - x_k)(x_k - x_i)}{2|J|} \tag{3.3.25}$$

$$A^l_{jk} = \iint_{T_l} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}) dxdy =$$

$$= \iint_T \{\frac{y_k - y_i}{J}\frac{y_i - y_j}{J} + \frac{x_k - x_i}{J}\frac{x_i - x_j}{J}\}|J| d\xi d\eta =$$

$$= \frac{(y_k - y_i)(y_i - y_j) + (x_k - x_i)(x_i - x_j)}{2|J|} \tag{3.3.26}$$

$$A^l_{ki} = \iint_{T_l} (\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}) dxdy =$$

$$= \iint_T \{\frac{y_i - y_j}{J}\frac{y_j - y_k}{J} + \frac{x_i - x_j}{J}\frac{x_j - x_k}{J}\}|J| d\xi d\eta =$$

$$= \frac{(y_i - y_j)(y_j - y_k) + (x_i - x_j)(x_j - x_k)}{2|J|} \tag{3.3.27}$$

Từ (3.3.11) ta có

$$F^l_i = \iint_{T_l} f(x,y)\varphi_i(x,y) dxdy = \iint_T F(\xi,\eta)\Phi_{0,0}|J| d\xi d\eta$$

$$= \iint_T F(\xi,\eta)(1 - \xi - \eta)|J| d\xi d\eta \tag{3.3.28}$$

$$F_j^l = \iint_{T_l} f(x,y)\varphi_j(x,y)dxdy = \iint_T F(\xi,\eta)\Phi_{1,0}|J|d\xi d\eta$$
$$= \iint_T F(\xi,\eta)\xi|J|d\xi d\eta \tag{3.3.29}$$
$$F_k^l = \iint_{T_l} f(x,y)\varphi_k(x,y)dxdy = \iint_T F(\xi,\eta)\Phi_{0,1}|J|d\xi d\eta$$
$$= \iint_T F(\xi,\eta)\eta|J|d\xi d\eta \tag{3.3.30}$$

Các tích phân cuối cùng sẽ được tính đúng hoặc gần đúng.

3.3.7. Đánh giá sai số.

Giả sử u là nghiệm của bài toán yếu (3.2.9), w_N là nghiệm của bài toán gần đúng (3.3.4). Khi đó $u - w_N$ là sai số cần đánh giá.

Định lý 3.3.1. Giả sử $u(x,y) \in W^2(\Omega)$ thì

$$\|u - w_N\|_{W^1(\Omega)} \le K_1 h \|u\|_{W^2(\Omega)}, \quad K_1 = const > 0 \tag{3.3.31}$$

Định lý 3.3.2. Nếu $u(x,y) \in W^2(\Omega) \cap W_0^1(\Omega)$ thì

$$\|u - w_N\|_{W^1(\Omega)} \le K_2 h \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad K_2 = const > 0 \tag{3.3.32}$$

Định lý 3.3.3. Giả sử $u(x,y) \in W^2(\Omega) \cap W_0^1(\Omega)$ thì

$$\|u - w_N\|_{L_2(\Omega)} \le K_3 h^2 \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad K_3 = const > 0 \tag{3.3.33}$$

3.3.8 Phụ lục 1: Chứng minh các định lý 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3.

Ta sẽ chứng minh định lý 3.3.1 thông qua một số bổ đề.

Trước hết đặt

$$u_I(x,y) := \sum_{i=1}^{N} u_i\varphi_i(x,y), \qquad u_i = u(x_i, y_i) \tag{3.3.34}$$

Vì $u_I \in H_N$ nên áp dụng định lý 1.10.2 chương 1, ta có

Bổ đề 3.3.1.

$$\|u - w_N\|_{W^1(\Omega)} \le K_4 \|u - u_I\|_{W^1(\Omega)}, \qquad K_4 = const > 0 \tag{3.3.35}$$

Bây giờ ta đánh giá vế phải của (3.3.35).

Xét phần tử hữu hạn tam giác T_l bất kỳ có ba đỉnh P_i, P_j, P_k trong tọa độ (x, y). Ta dùng phép đổi biến (3.3.14) để đưa nó về tam giác chuẩn T trong tọa độ (ξ, η) với ba đỉnh $\bar{P}_i, \bar{P}_j, \bar{P}_k : \bar{P}_i(0,0)$ ứng P_i, $\bar{P}_j(1,0)$ ứng P_j và $\bar{P}_k(0,1)$ ứng P_k, (xem hình H.3.3.3).

Bổ đề 3.3.2. Giả sử $z = z(x,y) \in C^2(\overline{T}_l)$. Khi đó tồn tại hằng số dương K_5 để có

$$\|z - z_I\|^2_{W^1(T_l)} \leq K_5 h^2 \{\|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\|^2_{L_2(T_l)} + \|\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\|^2_{L_2(T_l)} + \|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\|^2_{L_2(T_l)}\} \tag{3.3.36}$$

Chứng minh. Ta chứng minh bổ đề 3.3.2 thông qua 4 bước.
Bước 1 Với qui ước (3.3.19) ta chứng minh

$$\|z - z_I\|^2_{W^1(T_l)} \leq K_6 \|Z - Z_I\|^2_{W^1(T)}, \qquad K_6 = const \tag{3.3.37}$$

Theo công thức đổi biến trong tích phân kép ta có

$$\iint_{T_l} |z - z_I|^2 dxdy = \iint_T |Z - Z_I|^2 |J| d\xi d\eta$$

trong đó theo (3.3.15)

$$J = (x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)$$

và vì tam giác T_l có góc $(P_jP_i, P_kP_i) = \theta$ với $|\theta| \geq \theta_0 > 0$ nên

$$J \geq |P_jP_i|.|P_kP_i| \sin(\theta_0) > 0 \Rightarrow \exists \quad J^{-1} = \bar{J} \neq 0$$

Bây giờ

$$\frac{\partial(z - z_I)}{\partial x} = \frac{\partial(Z - Z_I)}{\partial \xi} \frac{y_k - y_i}{J} + \frac{\partial(Z - Z_I)}{\partial \eta} \frac{y_i - y_j}{J}$$

$$\frac{\partial(z - z_I)}{\partial y} = \frac{\partial(Z - Z_I)}{\partial \xi} \frac{x_i - x_k}{J} + \frac{\partial(Z - Z_I)}{\partial \eta} \frac{x_j - x_i}{J}$$

$$\Rightarrow \iint_{T_l} |\frac{\partial(z - z_I)}{\partial x}|^2 dxdy = \iint_T \{|\frac{\partial(z - z_I)}{\partial x}|^2\}|_{x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta)} |J| d\xi d\eta$$

Vậy tồn tại hằng số dương K để

$$\iint_{T_l} |\frac{\partial(z - z_I)}{\partial x}|^2 dxdy \leq K \iint_T \{|\frac{\partial(Z - Z_I)}{\partial \xi}|^2 + |\frac{\partial(Z - Z_I)}{\partial \eta}|^2\} d\xi d\eta$$

Một cách tương tự,

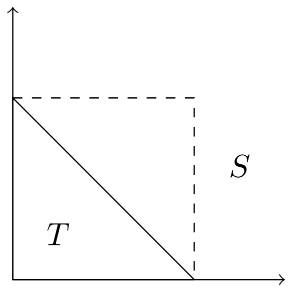
$$\iint_{T_l} |\frac{\partial(z - z_I)}{\partial y}|^2 dxdy \leq K \iint_T \{|\frac{\partial(Z - Z_I)}{\partial \xi}|^2 + |\frac{\partial(Z - Z_I)}{\partial \eta}|^2\} d\xi d\eta$$

Ta suy ra (3.3.37).

Bước 2 Ta chứng minh: tồn tại hằng số dương K_7 để có

$$\|Z - Z_I\|^2_{W^1(T)} \leq K_7\{\|\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2}\|^2_{L_2(T)} + \|\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \eta}\|^2_{L_2(T)} + \|\frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2}\|^2_{L_2(T)}\} \tag{3.3.38}$$

Muốn thế ta vẽ bổ xung T thành một hình vuông (H.3.3.4), ký hiệu là S



H.3.3.4

và xét hàm số

$$w(\xi,\eta) = \begin{cases} Z(\xi,\eta), & (\xi,\eta) \in T \\ 0, & (\xi,\eta) \in S \backslash T \end{cases} \tag{3.3.39}$$

Tại $(\xi,\eta) \in \overline{T}$ ta có

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(w - w_I) = \frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi,\eta) - (w(1,0) - w(0,0)) = \frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi,\eta) - \int_{s=0}^{s=1} \frac{\partial w}{\partial s}(s,0)ds =$$

$$= \int_{s=0}^{s=1} [\frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi,\eta) - \frac{\partial w}{\partial s}(s,\eta) + \frac{\partial w}{\partial s}(s,\eta) - \frac{\partial w}{\partial s}(s,0)]ds, \quad (s,\eta) \in \overline{T}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(w - w_I) = \int_{s=0}^{s=1} [\int_{\mu=s}^{\mu=\xi} \frac{\partial^2 w(\mu,\eta)}{\partial \mu^2} d\mu + \int_{\nu=0}^{\nu=\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \nu}(s,\nu)d\nu]ds \tag{3.3.40}$$

Ta suy ra

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(w - w_I) = A + B \tag{3.3.41}$$

trong đó

$$A = \int_{s=0}^{s=1} \int_{\mu=s}^{\mu=\xi} \frac{\partial^2 w(\mu,\eta)}{\partial \mu^2} d\mu ds, \quad B = \int_{s=0}^{s=1} \int_{\nu=0}^{\nu=\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \nu}(s,\nu) d\nu ds \tag{3.3.42}$$

Khi đó

$$|A| \leq \int_{s=0}^{s=1} \int_{\mu=s}^{\mu=\xi} |\frac{\partial^2 w(\mu,\eta)}{\partial \mu^2}| d\mu ds \leq \int_{s=0}^{s=1} \int_{\mu=0}^{\mu=1} |\frac{\partial^2 w(\mu,\eta)}{\partial \mu^2}| d\mu ds$$

Áp dụng bất đẳng thức C-S-B ta được

$$|A|^2 \le \int_{s=0}^{s=1} (\int_{\mu=0}^{\mu=1} |\frac{\partial^2 w(\mu,\eta)}{\partial \mu^2}| d\mu)^2 ds \le \int_{s=0}^{s=1} \int_{\mu=0}^{\mu=1} |\frac{\partial^2 w(\mu,\eta)}{\partial \mu^2}|^2 d\mu ds$$

$$\Rightarrow \int\int_S |A|^2 d\xi d\eta \le \int_{\xi=0}^{\xi=1} d\xi \int_{\eta=0}^{\eta=1} d\eta \int_{s=0}^{s=1} ds \int_{\mu=0}^{\mu=1} |\frac{\partial^2 w(\mu,\eta)}{\partial \mu^2}|^2 d\mu$$

Thay đổi thứ tự hai tích phân ở giữa vế phải ta được

$$\iint_S |A|^2 d\xi d\eta \le \int_{\xi=0}^{\xi=1} d\xi \int_{s=0}^{s=1} ds \int_{\eta=0}^{\eta=1} d\eta \int_{\mu=0}^{\mu=1} |\frac{\partial^2 w(\mu,\eta)}{\partial \mu^2}|^2 d\mu$$

$$= \iint_S |\frac{\partial^2 w(\mu,\eta)}{\partial \mu^2}|^2 d\mu d\eta = \|\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\|^2_{L_2(S)} \quad (3.3.43)$$

Bây giờ đánh giá B.

$$|B| = |\int_{s=0}^{s=1} \int_{\nu=0}^{\nu=\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \nu}(s,\nu) d\nu ds| \le \iint_S |\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \nu}(s,\nu)| d\nu ds$$

$$|B|^2 \le \iint_S |\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \nu}(s,\nu)|^2 d\nu ds = \iint_T |\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \nu}(s,\nu)|^2 d\nu ds = \|\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \nu}\|^2_{L_2(T)}$$

$$\Rightarrow \iint_S |B|^2 d\xi d\eta \le \iint_S \|\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \nu}\|^2_{L_2(T)} d\xi d\eta = \|\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\|^2_{L_2(S)} \quad (3.3.44)$$

Từ (3.3.41) ta có

$$\iint_S |\frac{\partial}{\partial \xi}(w - w_I)|^2 d\xi d\eta \le \iint_S 2(A^2 + B^2) d\xi d\eta \quad (3.3.45)$$

Kết hợp (3.3.43) với (3.3.44) và (3.3.45) ta thu được

$$\iint_S |\frac{\partial}{\partial \xi}(w - w_I)|^2 d\xi d\eta \le \iint_S |\frac{\partial}{\partial \xi}(w - w_I)|^2 d\xi d\eta$$

$$\le 2\{\|\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\|^2_{L_2(S)} + \|\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\|^2_{L_2(S)}\} \quad (3.3.46)$$

Một cách tương tự, ta có

$$\iint_S |\frac{\partial}{\partial \eta}(w - w_I)|^2 d\xi d\eta \le \iint_S |\frac{\partial}{\partial \eta}(w - w_I)|^2 d\xi d\eta$$

$$2\{\|\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\|^2_{L_2(S)} + \|\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\|^2_{L_2(S)}\} \quad (3.3.47)$$

Bây giờ xét $w - w_I$. Vì $(w - w_I)(0,0) = 0$, nên tại $(\xi, \eta) \in \overline{T}$ ta có

$$(w - w_I)(\xi,\eta) = (w - w_I)(\xi,\eta) - (w - w_I)(\xi,0) + (w - w_I)(\xi,0) - (w - w_I)(0,0) =$$

$$= \int_{q=0}^{q=\eta} \frac{\partial(w - w_I)}{\partial q}(\xi,q)dq + \int_{p=0}^{p=\xi} \frac{\partial(w - w_I)}{\partial p}(p,0)dp \qquad (3.3.48)$$

Vì

$$\frac{\partial(w - w_I)}{\partial p}(p,0) = -\frac{\partial(w - w_I)}{\partial p}(p,\eta) + \frac{\partial(w - w_I)}{\partial p}(p,0) + \frac{\partial(w - w_I)}{\partial p}(p,\eta)$$

$$= -\int_{q'=0}^{q'=\eta} \frac{\partial^2(w - w_I)}{\partial q'\partial p}(p,q')dq' + \frac{\partial(w - w_I)}{\partial p}(p,\eta)$$

nên

$$(w - w_I)(\xi,\eta) = \int_{q=0}^{q=\eta} \frac{\partial(w - w_I)}{\partial q}(\xi,q)dq + \int_{p=0}^{p=\xi} \frac{\partial(w - w_I)}{\partial p}(p,\eta)dp$$

$$- \int_{p=0}^{p=\xi} dp \int_{q'=0}^{q'=\eta} \frac{\partial^2(w - w_I)}{\partial q'\partial p}(p,q')dq'$$

Do đó

$$|(w - w_I)(\xi,\eta)|^2 \le 3\{(\int_{q=0}^{q=\eta} \frac{\partial(w - w_I)}{\partial q}(\xi,q)dq)^2 + (\int_{p=0}^{p=\xi} \frac{\partial(w - w_I)}{\partial p}(p,\eta)dp)^2$$

$$+(-\int_{p=0}^{p=\xi} dp \int_{q'=0}^{q'=\eta} \frac{\partial^2(w - w_I)}{\partial q'\partial p}(p,q')dq')^2\}$$

$$|(w - w_I)(\xi,\eta)|^2 \le 3\{\int_{q=0}^{q=\eta} |\frac{\partial(w - w_I)}{\partial q}|^2(\xi,q)dq + \int_{p=0}^{p=\xi} |\frac{\partial(w - w_I)}{\partial p}|^2(p,\eta)dp$$

$$+ \iint_S |\frac{\partial^2(w - w_I)}{\partial q'\partial p}|^2(p,q')dq'dp\}$$

Ta suy ra :

$$\iint_S |w - w_I|^2 d\xi d\eta \le 3\{\iint_S |\frac{\partial(w - w_I)}{\partial q}|^2(\xi,q)dqd\xi$$

$$+ \iint_S |\frac{\partial(w - w_I)}{\partial p}|^2(p,\eta)dpd\eta + \iint_S |\frac{\partial^2(w - w_I)}{\partial q'\partial p}|^2(p,q')dq'dp\} \qquad (3.3.49)$$

Áp dụng (3.3.46)(3.3.47)(3.3.49) ta thu được: tồn tại hằng số dương K_8 để

$$\iint_S |w - w_I|^2 d\xi d\eta \le K_8\{\|\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\|^2_{L_2(S)} + \|\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \eta}\|^2_{L_2(S)} + \|\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\|^2_{L_2(S)}\} \qquad (3.3.50)$$

Từ (3.3.46)(3.3.47)(3.3.50) suy ra: tồn tại hằng số dương K_9 để

$$\|w - w_I\|^2_{W^1(S)} \leq K_9\{\|\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\|^2_{L_2(S)} + \|\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\|^2_{L_2(S)} + \|\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\|^2_{L_2(S)}\} \tag{3.3.51}$$

Từ (3.3.51) và (3.3.39) ta suy ra (3.3.38) với $K_7 = K_9$.

Bước 3. Ta chứng minh: tồn tại hằng số dương K_{10} để

$$\begin{aligned}
\|\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2}\|^2_{L_2(T)} &\leq K_{10}h^2\{\|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\|^2_{L_2(T_l} + \|\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\|^2_{L_2(T_l} + \|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\|^2_{L_2(T_l}\} \\
\|\frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2}\|^2_{L_2(T)} &\leq K_{10}h^2\{\|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\|^2_{L_2(T_l} + \|\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\|^2_{L_2(T_l} + \|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\|^2_{L_2(T_l}\} \\
\|\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \eta}\|^2_{L_2(T)} &\leq K_{10}h^2\{\|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\|^2_{L_2(T_l} + \|\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\|^2_{L_2(T_l} + \|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\|^2_{L_2(T_l}\}
\end{aligned} \tag{3.3.52}$$

Chứng minh . Ta có $Z \in C^2(\overline{T})$. Ta có

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}(x_j - x_i) + \frac{\partial z}{\partial y}(y_j - y_i)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}(x_k - x_i) + \frac{\partial z}{\partial y}(y_k - y_i)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_j - x_i)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_j - x_i)(y_j - y_i) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(y_j - y_i)^2$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_k - x_i)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_k - x_i)(y_k - y_i) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(y_k - y_i)^2$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_j - x_i)(x_k - x_i) + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}[(x_j - x_i)(y_k - y_i) + (x_k - x_i)(y_j - y_i)$$
$$+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(y_j - y_i)(y_k - y_i)$$

Áp dụng công thức (3.3.19) đổi biến trong tích phân kép ta suy ra: tồn tại hằng số dương K_{11} để

$$\iint_T [\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2}]^2 d\xi d\eta \leq K_{11}h^2 \iint_{T_l} \{[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}]^2 + [\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}]^2 + [\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}]^2\} dxdy$$

$$\iint_T [\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \eta}]^2 d\xi d\eta \leq K_{11}h^2 \iint_{T_l} \{[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}]^2 + [\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}]^2 + [\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}]^2\} dxdy$$

$$\iint_T [\frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2}]^2 d\xi d\eta \leq K_{11}h^2 \iint_{T_l} \{[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}]^2 + [\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}]^2 + [\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}]^2\} dxdy$$

đó là (3.3.52) với $K_{10} = K_{11}$ khi $z = z(x, y) \in C^2(\overline{T})$. Vì T hình sao nên $C^2(\overline{T})$ trù mật trong $W^2(T)$. Từ đó suy ra (3.3.52).

Bước 4. Từ các kết quả ở bước 1,2,3 ta suy ra (3.3.36), tức là bổ đề 3.3.2.

Bây giờ vì T_l có " tính sao" nên $C^2(\overline{T}_l)$ trù mật trong $W^2(T_l)$ và do đó từ bổ đề 3.3.2 ta suy ra

Bổ đề 3.3.3. Giả sử $z \in W^2(T_l)$. Khi đó tồn tại hằng số dương K_{12} để

$$\|z - z_I\|^2_{W^1(T_l)} \le K_{12}h^2\{\|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\|^2_{L_2(T_l)} + \|\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\|^2_{L_2(T_l)} + \|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\|^2_{L_2(T_l)}\} \tag{3.3.53}$$

Bổ đề 3.3.4. Giả sử $z \in W^2(\Omega)$. Khi đó : tồn tại hằng số dương K_{13} để

$$\|z - z_I\|^2_{W^1(\Omega)} \le K_{13}h^2\{\|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\|^2_{L_2(\Omega)}\} \tag{3.3.54}$$

Chứng minh. Theo giả thiết $z \in W^2(\Omega)$. Do đó $z \in W^2(T_l) \quad \forall l = \overline{1, M}$. Theo bổ đề 3.3.3 ta có (3.3.53). Cộng lại theo $l = \overline{1, M}$ ta suy ra (3.3.54) với $K_{13} = K_{12}$, tức là bổ đề 3.3.4.

Chứng minh định lý 3.3.1: Nhờ bổ đề 3.3.4 và bổ đề 3.3.1 ta suy ra định lý 3.3.1.

Chứng minh định lý 3.3.2. Trong lý thuyết các phương trình đạo hàm riêng người ta chứng minh được mệnh đề quan trọng sau đây:

Mệnh đề 3.3.1. *Nếu nghiệm của bài toán (3.1.1)(3.1.2)* $\in W^2(\Omega) \cap W^1_0(\Omega)$ *thì tồn tại hằng số dương* K_{14} *để:*

$$\|u\|_{W^2(\Omega)} \le K_{14}\|f\|_{L_2(\Omega)} \tag{3.3.55}$$

Nhờ có mệnh đề 3.3.1, từ định lý 3.3.1 ta suy ra định lý 3.3.2.

Chứng minh định lý 3.3.3. Trước hết ta chú ý rằng

$$\alpha(u, v) = L(v) \quad \forall v \in W^1_0(\Omega), \qquad \alpha(w_N, v) = L(v), \quad \forall v \in H_N \subset W^1_0(\Omega) \tag{3.3.56}$$

Bằng phép trừ ta suy ra

$$\alpha(u, v) - \alpha(w_N, v) = 0, \qquad \forall v \in H_N$$

tức là

$$\alpha(u - w_N, v) = 0, \qquad \forall v \in H_N \tag{3.3.57}$$

Bây giờ xét bài toán

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = F, \quad F = u - w_N \tag{3.3.58}$$

$$\psi|_\Gamma = 0 \tag{3.3.59}$$

Ta được bài toán dạng (3.1.1)-(3.1.2) với vế phải là $F = u - w_N \in L_2(\Omega)$. Do đó hàm ψ thỏa mãn

$$\alpha(\psi, v) = (F, v), \qquad \forall v \in W^1_0(\Omega)$$

Thay $v = u - w_N \in W_0^1(\Omega)$ ta có

$$\alpha(\psi, u - w_N) = (F, u - w_N) = (u - w_N, u - w_N)$$

tức là

$$(u - w_N, u - w_N) = \alpha(\psi, u - w_N) \tag{3.3.60}$$

Với

$$\psi_I(x, y) := \sum_{i=1}^{N} \psi(x_i, y_i)\varphi_i(x, y)$$

thì $\psi_I \in H_N$ nên theo (3.3.57 ta có

$$\alpha(u - w_N, \psi_I) = 0$$

Từ đó (3.3.60) viết

$$(u - w_N, u - w_N) = \alpha(\psi, u - w_N) - \alpha(u - w_N, \psi_I) = \alpha(\psi - \psi_I, u - w_N)$$

$$\Rightarrow \|u - w_N\|^2_{L_2(0,1)} \leq K_{15}\|\psi - \psi_I\|_{W^1(\Omega)}\|u - w_N\|_{W^1(\Omega)}, \qquad K_{15} = const \tag{3.3.61}$$

Theo định lý 3.3.2 ta suy ra

$$\|u - w_N\|_{W^1(\Omega)} \leq K_2 h\|f\|_{L_2(\Omega)}$$

Ngoài ra

$$\|\psi - \psi_I\|_{W^1(\Omega)} \leq K_{16}h\|F'\|_{L_2(\Omega)} = K_{16}h\|u - w_N\|_{L_2(\Omega)}, \qquad K_{16} = const > 0$$

$$\Rightarrow \|u - w_N\|^2_{L_2(\Omega)} \leq K_{15}K_{16}h\|u - w_N\|_{L_2(\Omega)}K_2 h\|f\|_{L_2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|u - w_N\|_{L_2(\Omega)} \leq K_{15}K_{16}K_2 h^2\|f\|_{L_2(\Omega)}$$

Đó là (3.3.33) với $K_3 = K_{15}K_{16}K_2$.

Từ các định lý 3.3.1, 2, 3 ta suy ra sự hội tụ và đánh giá sai số.

3.4. Trường hợp đặc biệt:
Ω là miền chữ nhật có các cạnh cùng phương với trục tọa độ

Trước hết chú ý rằng đây là một miền đa giác đặc biệt. Cho nên những gì đã nói về miền đa giác vẫn còn giữ nguyên giá trị. Tuy nhiên do tính đặc thù của hình chữ nhật có cạnh cùng phương với trục tọa độ so với một đa giác tổng quát nên ta có thể khai thác thêm một số lợi thế.

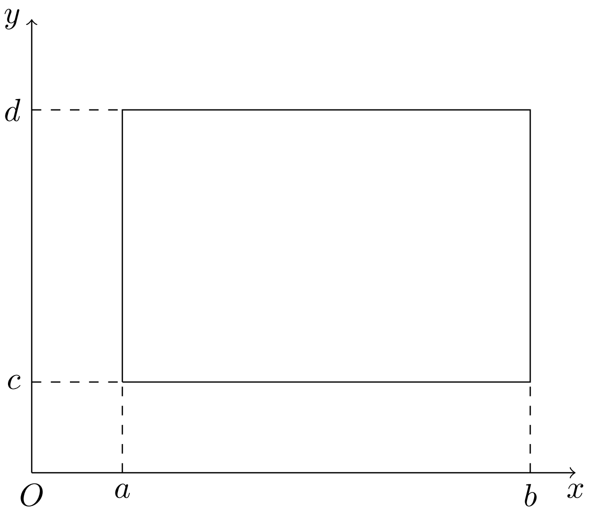
3.4.1.Tam giác phân. Xét trường hợp biên Γ là những đoạn thẳng cùng phương với hai trục tọa độ (H.3.4.1a):

$$\Omega = \{(x, y) | a < x < b,\ c < y < d\}$$

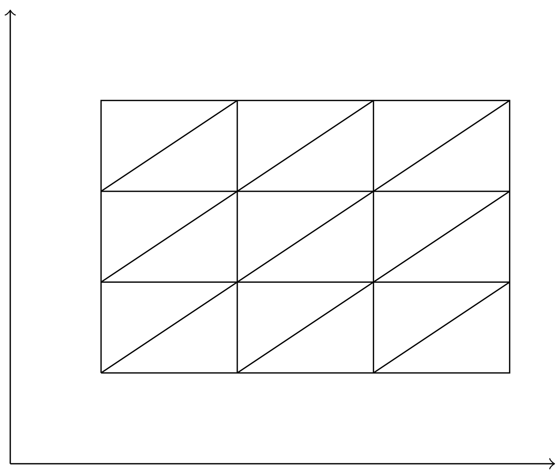
Trước hết ta chia miền Ω thành một lưới đều bằng các đường thẳng cùng phương với các trục tọa độ (H.3.4.1b): $x = x_i, \quad y = y_j$ với

$$x_i = ih, \quad h = \frac{b-a}{N+1}, \quad y_j = jk, \quad k = \frac{d-c}{M+1}, \quad N,\ M \text{ nguyên } \geq 2 \tag{3.4.1}$$

Sau đó kẻ các đường chéo song song của các hình chữ nhật con như ở hình vẽ. Như vậy miền Ω được chia thành những miền tam giác khác nhau,không có điểm trong chung, đồng thời đỉnh của tam giác này không nằm trên cạnh của một tam giác kia. Tập hợp các tam giác thu được tạo nên một phân hoạch của miền Ω, mỗi tam giác gọi là một phần tử hữu hạn, mỗi đỉnh của một tam giác gọi là một nút.



H.3.4.1a



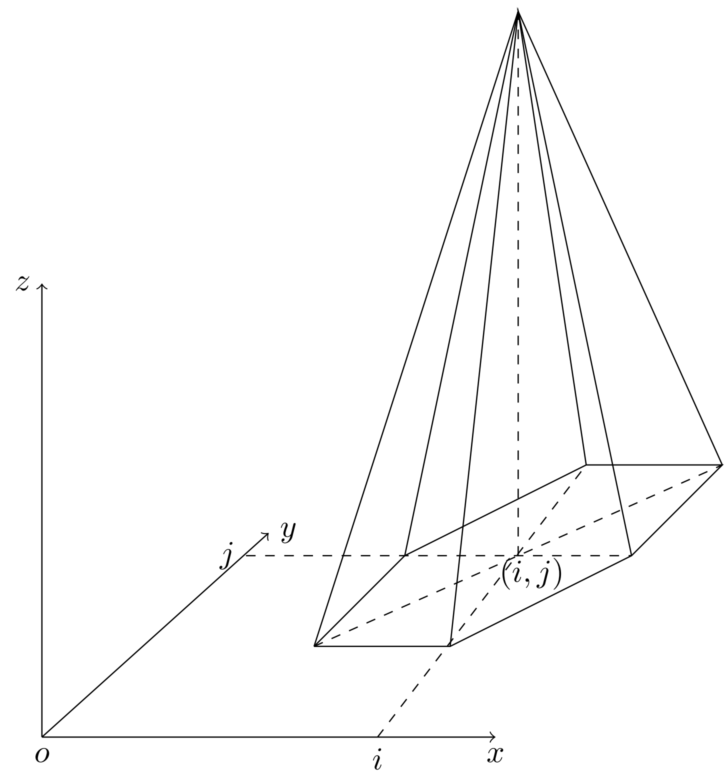
H.3.4.1b

3.4.2. Các hàm tọa độ và không gian con H_N của $W_0^1(\Omega)$.

Trước hết ta đánh số các nút : mỗi nút P_{ij} có tọa độ (x_i, y_j) ký hiệu là (i,j) $i = 0, 1, ..., N+1$; $j = 0, 1, 2, ..., M+1$. Sau đó ứng với mỗi *nút trong* (i,j) $i = 1, 2, ..., N$; $j = 1, 2, ..., M$ ta xây dựng hàm tọa độ $\varphi_{ij}(x,y)$: là một hàm bậc nhất đối với x, y trên mỗi tam giác, lấy giá trị 1 tại nút (i,j) và lấy giá trị 0 tại tất cả các nút khác , kể cả nút biên, cụ thể là

$$\varphi_{ij}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h}(x - x_i) \text{ khi } x_i \le x \le x_{i+1}, \\ \qquad\qquad y_j \le y \le y_j + \frac{k}{h}(x - x_i), \\ 1 - \frac{1}{k}(y - y_j) \text{ khi } x_i \le x \le x_{i+1}, \\ \qquad\qquad y_j + \frac{k}{h}(x - x_i) \le y \le y_{j+1}, \\ 1 + \frac{1}{h}(x - x_i) - \frac{1}{k}(y - y_j) \text{ khi } x_{i-1} \le x \le x_i, \\ \qquad\qquad y_j \le y \le y_j + \frac{k}{h}(x - x_{i-1}) \\ 1 + \frac{1}{h}(x - x_i) \text{ khi } x_{i-1} \le x \le x_i, \\ \qquad\qquad y_{j-1} + \frac{k}{h}(x - x_{i-1}) \le y \le y_j, \\ 1 + \frac{1}{k}(y - y_j) \text{ khi } x_{i-1} \le x \le x_i, \\ \qquad\qquad y_{j-1} \le y \le y_{j-1} + \frac{k}{h}(x - x_{i-1}), \\ 1 - \frac{1}{h}(x - x_i) + \frac{1}{k}(y - y_j) \text{ khi } x_i \le x \le x_{i+1}, \\ \qquad\qquad y_{j-1} + \frac{k}{h}(x - x_i) \le y \le y_j, \end{cases} \tag{3.4.2}$$

Hàm tọa độ φ_{ij} có đồ thị (H.3.4.2) là một hình chóp, có đáy là một lục giác, hợp của các tam giác con có chung nút (i,j). Nó liên tục và tuyến tính từng phần trên Ω, chỉ khác 0 ở trong đáy, và bằng 0 tại mọi (x,y) ở ngoài đáy của hình chóp. Cho nên hàm φ_{ij} thuộc $W_0^1(\Omega)$ và có giá đỡ nhỏ, là đáy của hình chóp, ký hiệu bởi Ω_{ij}:



H.3.4.2

$$\Omega_{ij} := \{(x,y) \in \Omega \mid \varphi_{ij}(x,y) \neq 0\} \tag{3.4.3}$$

Dễ thấy các hàm $\varphi_{ij}(x,y)$ độc lập tuyến tính. Chúng sinh ra không gian

$$H_{N;M} = \text{span}\{\varphi_{ij}\} \tag{3.4.4}$$

và là một cơ sở của $H_{N;M}$. $H_{N;M}$ là không gian con $N \times M$ chiều của $W_0^1(\Omega)$.

3.4.3. Hệ đại số.

Sau khi đã có không gian $H_{N;M}$ ta tìm nghiệm $w_{N;M}$ của bài toán (3.2.9) tức (3.2.7) trên $H_{N;M}$ ở dạng

$$w_{N;M} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}\varphi_{ij}(x,y) \tag{3.4.5}$$

Như vậy c_{ij} được xác định sao cho

$$\alpha(w_{N;M}, \varphi_{rs}) = (f, \varphi_{rs}), \quad r = 1,2,...,N; s = 1,2,...,M \tag{3.4.6}$$

tức là

$$\alpha(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}\varphi_{ij}, \varphi_{rs}) = (f, \varphi_{rs}),\ r = 1,2,...,N;\ s = 1,2,...,M$$

hay

$$(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}\alpha(\varphi_{ij}, \varphi_{rs}) = (f, \varphi_{rs}), r = 1,2,...,N; s = 1,2,...,M$$

Hệ này trở thành

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} A_{ij,rs}c_{ij} = F_{rs}, \quad r = 1,2,...,N,\ s = 1,2,...,M \tag{3.4.7}$$

trong đó

$$A_{ij,rs} = \alpha(\varphi_{ij}, \varphi_{rs}) = \alpha(\varphi_{rs}, \varphi_{ij}) = A_{rs,ij}$$

$$= \iint_\Omega (\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{rs}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{rs}}{\partial y})dxdy = \iint_{\Omega_{ij,rs}} (\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{rs}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{rs}}{\partial y})dxdy \tag{3.4.8}$$

với

$$\Omega_{ij,rs} = \Omega_{ij} \cap \Omega_{rs} \tag{3.4.9}$$

$$F_{rs} = -\iint_\Omega f(x,y)\varphi_{rs}dxdy = -\iint_{\Omega_{rs}} f(x,y)\varphi_{rs}dxdy \tag{3.4.10}$$

Vì φ_{ij} có giá đỡ nhỏ nên có rất nhiều hệ số $A_{ij,rs}$ bằng không. Do đó hệ (3.4.7) là một hệ *rất thưa*. Hệ (3.4.7) là một hệ đại số tuyến tính có $N \times M$ phương trình đối với $N \times M$ ẩn là c_{ij}, $i = 1,2,...,N; j = 1,2,...,M$.

Thực hiện các phép tính tích phân, từ (3.4.7) ta thu được hệ

$$kh\{\frac{2c_{ij} - c_{i-1j} - c_{i+1j}}{h^2} + \frac{2c_{ij} - c_{ij-1} - c_{ij+1}}{k^2}\} = F_{ij} \tag{3.4.11}$$

$$c_{0j} = c_{N+1j} = c_{i0} = c_{iM+1} = 0 \tag{3.4.12}$$

$$i = 1, 2, ..., N; \quad j = 1, 2, ..., M$$

trong đó F_{ij} tính theo (3.4.10), có thể tính đúng, cũng có thể áp dụng một công thức gần đúng, chẳng hạn như :

$$F_{rs} = -\iint_\Omega f(x,y)\varphi_{rs}dxdy \approx - - f(x_r, y_s)\iint_{\Omega_{rs}} \varphi_{rs}dxdy = -f(x_r, y_s)hk$$

Cho nên (3.4.11) trở thành

$$\frac{2c_{ij} - c_{i-1j} - c_{i+1j}}{h^2} + \frac{2c_{ij} - c_{ij-1} - c_{ij+1}}{k^2}\} = -f_{ij} \tag{3.4.13}$$

Như vậy là nhờ lợi dụng các đặc điểm của hình chữ nhật có cạnh cùng phương với trục tọa độ ta đã đi đến một hệ đại số khá đơn giản như (3.4.13)(3.4.12) chẳng hạn.

Giải hệ đại số ta thu được c_{ij}. Lắp vào (3.4.5) ta thu được nghiệm gần đúng $w_{N,M}$ cần tìm.

3.4.4. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ đại số.

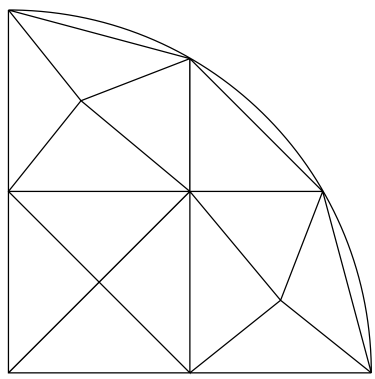
Xem mục 3.3.4.

3.4.5. Đánh giá sai số.

Xem mục 3.3.7.

3.5. Trường hợp biên cong

Ở đây chỉ giới thiệu một phương pháp đơn giản.



H.3.5.1

Người ta chia miền Ω thành các miền tam giác, chẳng hạn như ở H.3.5.1, rồi làm như ở tiết 3.3. Khi đó ở gần biên xuất hiện những tam giác có một cạnh cong (tam giác kề biên), ta sẽ xem như nó là một tam giác bình thường, nghĩa là xem cạnh cong là một cạnh thẳng. Đương nhiên cách làm này đơn giản nhưng kém chính xác. Để khắc phục điều đó ta chia biên nhỏ hơn nữa, nghĩa là xét những tam giác kề biên nhỏ hơn các tam giác ở trong.

3.6. Bài toán biên loại ba đối với phương trình Poisson

3.6.1. Bài toán đạo hàm riêng.

Cho Ω là một miền bị chặn của mặt phẳng tọa độ (x, y) có biên là đường kín Γ trơn từng khúc (H.3.1.1). Pháp tuyến ngoài của Γ là ν.

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên Ω, hàm số $g(x, y)$ xác định trên Γ, hàm số $\sigma(x, y)$ xác định trên Γ.

Xét phương trình đạo hàm riêng

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \tag{3.6.1}$$

và điều kiện biên

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x, y)u = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \tag{3.6.2}$$

gọi là *điều kiện biên loại ba*

Giả sử $f \in L_2(\Omega)$, $g,\ \sigma \in L_2(\Gamma)$, và tồn tại hằng số dương σ_0 sao cho

$$\sigma(x, y) \geq \sigma_0, \quad (x, y) \in \Gamma \tag{3.6.3}$$

Xét bài toán sau đây, gọi *là bài toán biên loại ba*:

Tìm $u(x, y) \in W^2(\Omega)$ thỏa mãn (3.6.1)(3.6.2).

Bài toán (3.6.1)(3.6.2) là mô hình toán học của hiện tượng truyền nhiệt dừng trong bản mỏng vật chất Ω mà quan hệ giữa luồng nhiệt và nhiệt độ tại biên Γ được ấn định trước.

Nghiệm $u \in W^2(\Omega)$ thỏa mãn bài toán (3.6.1)(3.6.2) gọi là *nghiệm cổ điển* của nó.

3.6.2. Bài toán yếu.

Giả sử bài toán (3.6.1)(3.6.2) có nghiệm $\in W^2(\Omega)$. Khi đó Δu và $f \in L_2(\Omega)$.

Trong $L_2(\Omega)$ nhân vô hướng trong hai vế của (3.6.1) với hàm thử $v \in D(\overline{\Omega})$:

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] v dxdy = \iint_\Omega f v dxdy, \quad \forall v \in D(\overline{\Omega})$$

Áp dụng công thức Green (3.2.3) vào vế trái ta được:

$$-\iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy + \oint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v ds = \iint_\Omega f v dxdy \qquad \forall v \in D(\overline{\Omega})$$

Ở đây theo (3.6.2) $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\sigma u + g(x,y)$ nên có

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy + \oint_\Gamma \sigma uvds = -\iint_\Omega fvdxdy + \oint_\Gamma gvds \tag{3.6.4}$$

Vì $D(\overline{\Omega})$ trù mật trong $W^1(\Omega)$ nên (3.6.4) thỏa mãn $\forall v \in W^1(\Omega)$. Đặt

$$\alpha(u,v) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy + \oint_\Gamma \sigma uvds, \quad L(v) = -\iint_\Omega fvdxdy + \oint_\Gamma gvds \tag{3.6.5}$$

Xét bài toán:

Với $\alpha(u,v)$ và $L(v)$ xác định bởi (3.6.5) hãy tìm hàm số $u \in W^1(\Omega)$ thỏa mãn

$$\alpha(u,v) = L(v), \quad \forall v \in W^1(\Omega) \tag{3.6.6}$$

Bài toán (3.6.6) gọi là *bài toán yếu* ứng với bài toán (3.6.1)(3.6.2).

Như vậy nếu u là nghiệm của bài toán (3.6.1)(3.6.2) thì u cũng là nghiệm của bài toán yếu (3.6.6).

3.6.3. Nghiệm suy rộng.

Nghiệm của bài toán yếu (3.6.6) gọi là *nghiệm suy rộng* của bài toán (3.6.1)(3.6.2).

Theo trên, nếu u là nghiệm cổ điển của bài toán (3.6.1)(3.6.2) thì nó cũng là nghiệm suy rộng của bài toán đó.

Ngược lại, nếu $u \in W^1(\Omega)$ là nghiệm suy rộng của bài toán (3.6.1)(3.6.2), lại thuộc $W^2(\Omega)$ thì nó cũng là nghiệm cổ điển của nó (cách chứng minh xem mục 2.4.10 chương 2.)

3.6.4. Sự tồn tại nghiệm suy rộng.

Dựa vào (3.6.5) ta thấy $\alpha(u,v)$ là một dạng song tuyến đối xứng còn $L(v)$ là một phiếm hàm tuyến tính trên $W^1(\Omega)$. Giả sử Ω có "tính sao cầu từng phần". Ta có từ (3.6.5)

$$\alpha(u,v) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy + \oint_\Gamma \sigma uvds \tag{3.6.7}$$

Áp dụng bất đẳng thức C-S-B vào tích phân kép (xem cách làm ở mục 3.2.4) ta được

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy \leq 2\|u\|_{W^1(\Omega)}.\|v\|_{W^1(\Omega)} \tag{3.6.8}$$

Về tích phân đường ta có

$$\left|\oint_\Gamma \sigma uvds\right| \leq \sigma\sqrt{\oint_\Gamma u^2ds}\sqrt{\oint_\Gamma v^2ds}.$$

Áp dụng định lý nhúng, (mệnh đề 1.6.2, mục 1.6.7, chương 1: tồn tại hằng số dương K_2 để

$$\sqrt{\oint_\Gamma u^2 ds} \leq K_2 \|u\|_{W^1(\Omega)}, \qquad \sqrt{\oint_\Gamma v^2 ds} \leq K_2 \|v\|_{W^1(\Omega)} \tag{3.6.9}$$

Do đó

$$|\oint_\Gamma \sigma uvds| \leq (2 + \sigma K_2^2)\|u\|_{W^1(\Omega)}.\|v\|_{W^1(\Omega)}.$$

Kết hợp với (3.2.8) ta suy ra

$$|\alpha(u,v)| \leq K_3 \|u\|_{W^1(\Omega)}.\|v\|_{W^1(\Omega)}, \qquad \forall u \in W^1(\Omega), \qquad K_3 = 2 + \sigma K_2^2$$

Vậy $\alpha(u,v)$ liên tục trên $W^1(\Omega)$

Bây giờ theo công thức Friedrich, (chương 1, mục 1.6.7,công thức (1.6.1a)), ta có

$$\iint_\Omega v^2 dxdy \leq C\{\iint_\Omega (|\frac{\partial v}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial v}{\partial y}|^2)dxdy + \oint_\Gamma v^2 ds\}$$

$$\|v\|^2_{W^1(\Omega)} = \iint_\Omega (v^2 + |\frac{\partial v}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial v}{\partial y}|^2)dxdy \leq (C+1)\int_\Omega (|\frac{\partial v}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial v}{\partial y}|^2)dxdy + C\oint_\Gamma v^2 ds$$

$$\leq K_4\{\iint_\Omega (|\frac{\partial v}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial v}{\partial y}|^2)dxdy + \oint_\Gamma \sigma v^2 ds\}, \qquad K_4 = \max\{C+1, \frac{C}{\sigma_0}\}$$

Chú ý đến (3.6.7) với $u = v$ nữa ta suy ra

$$\Rightarrow \alpha(v,v) \geq K_5 \|v\|^2_{W^1(\Omega)}, \qquad \forall v \in W^1(\Omega), \qquad K_5 = \frac{1}{K_4}$$

Vậy $\alpha(u,v)$ $W^1(\Omega)-$eliptic.

Bây giờ chứng minh $L(v)$ liên tục trên $W^1(\Omega)$. Ta có theo (3.6.5)

$$L(v) = -\iint_\Omega fvdxdy + \oint_\Gamma gvds \tag{3.6.10}$$

$$|-\iint_\Omega fvdxdy| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{W^1(\Omega)}, \qquad |\oint_\Gamma gvds| \leq \sqrt{\oint_\Gamma g^2 ds}\sqrt{\oint_\Gamma v^2 ds}$$

Theo định lý nhúng ta có (3.6.9). Do đó

$$|L(v)| \leq K_6 \|v\|_{W^1(\Omega)}, \qquad \forall v \in W^1(\Omega), \qquad K_6 = \|f\|_{L_2(\Omega)} + K_2\|g\|_{L_2(\Gamma)}$$

nghĩa là $L(v)$ liên tục trên $W^1(\Omega)$

Vậy theo định lý 1.8.1 chương 1 ta suy ra sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (3.6.6), tức là tồn tại nghiệm suy rộng của bài toán (3.6.1)(3.6.2).

3.7. Nghiệm gần đúng bằng phương pháp phần tử hữu hạn khi Ω là một đa giác

Để tính gần đúng nghiệm suy rộng, tức là nghiệm của bài toán (3.6.6) theo sơ đồ chung đã trình bầy ở chương 1 tiết 9, ta thay không gian $V = W^1(\Omega)$ bằng một không gian con hữu hạn chiều của nó.

3.7.1. Tam giác phân.

Giống như trường hợp bài toán biên loại một, xem hình H.3.3.1, ta chia Ω thành các tam giác khác nhau không có điểm chung trong, không có đỉnh của tam giác nọ nằm trên cạnh của tam giác kia, đồng thời các góc hình học của mọi tam giác đều $\geq \theta_0 > 0$ để cho diện tích của mỗi tam giác dần tới 0 khi và chỉ khi các cạnh của nó dần tới 0 (vì nếu a và b là hai cạnh của tam giác kẹp góc $\theta \geq \theta_0$ thì diện tích của tam giác bàng $\frac{1}{2}|a|.|b|\sin\theta \geq \frac{1}{2}|a|.|b|\sin\theta_0$).

Mỗi tam giác gọi là một phần tử hữu hạn. Mỗi đỉnh của tam giác gọi là một nút. Đỉnh P_i có tọa độ là (x_i, y_i). Giả sử các nút được đánh số từ 1 đến N, trong đó kể cả nút trong và nút biên (xem hình H.3.3.1, mục 3.3.1): $P_1, P_2, ..., P_N$, .

Giả sử các tam giác cũng được đánh số từ 1 đến M : $T_1, T_2, ..., T_M$.

3.7.2. Hàm tọa độ.

Ứng mỗi nút P_i ta xây dựng hàm tọa độ ký hiệu là $\varphi_i(x, y)$ như sau: đó là một hàm bậc nhất đốivới x, y, bằng 1 tại P_i và bằng 0 tại các nút khác. Như vậy tại mỗi nút trong hàm tọa độ có đồ thị tựa như ở H.3.3.2 là một hình chóp với đáy là một đa giác, hợp của nhiều tam giác có chung một đỉnh ở chân của hình chóp. Tại nút biên đồ thị của hàm tọa độ là "một nửa" hình chóp. Mỗi hàm tọa độ liên tục và tuyến tính từng phần trên Ω, chỉ khác 0 ở trong đáy, và bằng 0 tại mọi (x, y) ở ngoài đáy của hình chóp. Cho nên hàm φ_i thuộc $W_0^1(\Omega)$ và có giá đỡ nhỏ. Các hàm $\varphi_i,\ i = 1, 2, ..., N$ độc lập tuyến tính.

3.7.3. Không gian con hữu hạn chiều của $W^1(\Omega)$.

Đó là không gian

$$H_N = \text{span}\{\varphi_i,\ i = 1, 2, ..., N\} \tag{3.7.1}$$

nhận $S_N = \{\varphi_i, \quad i = 1, 2, ..., N\}$ là một cơ sở.

3.7.4. Nghiệm gần đúng.

Nghiệm gần đúng thuộc H_N có dạng

$$w_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x, y) \tag{3.7.2}$$

trong đó các hệ số c_i được xác định sao cho

$$\alpha(w_N, v) = L(v), \quad \forall v \in H_N \tag{3.7.3}$$

Vì S_N là một cơ sở của H_N nên muốn có (3.7.3) với mọi $v \in H_N$ chỉ cần (3.7.3) thỏa mãn với $v = \varphi_i,\ i = 1, 2, ..., N$, (xem nhận xét ở chương 1, mục 1.9.3). Vậy phải xác định các hệ số c_i ở (3.7.2) sao cho

$$\alpha(\sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad j = 1, 2, ..., N$$

hay

$$\sum_{i=1}^{N} c_i\alpha(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad j = 1, 2, ..., N \tag{3.7.4}$$

Hệ đại số (3.7.4) viết dưới dạng ma trận

$$\mathcal{A}c = \mathcal{F} \tag{3.7.5}$$

với

$$c = (c_1, c_2, ..., c_N)^T, \quad \mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij}), \quad \mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_N)^T$$

trong đó

$$\mathcal{A}_{ij} = \alpha(\varphi_i, \varphi_j) = \iint_\Omega (\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y})dxdy + \oint_\Gamma \sigma\varphi_i\varphi_j ds \tag{3.7.6}$$

$$\mathcal{F}_i = -\iint_\Omega f(x, y)\varphi_i(x, y)dxdy + \oint_\Gamma g\varphi_i ds \tag{3.7.7}$$

Ta đặt

$$\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ij}^\Omega + \mathcal{A}_{ij}^\Gamma, \qquad \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i^\Omega + \mathcal{F}_i^\Gamma \tag{3.7.8}$$

với

$$\mathcal{A}_{ij}^\Omega = \iint_\Omega (\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y})dxdy, \quad \mathcal{A}_{ij}^\Gamma = \oint_\Gamma \sigma\varphi_i\varphi_j ds \tag{3.7.9}$$

$$\mathcal{F}_i^\Omega = -\iint_\Omega f(x, y)\varphi_i(x, y)dxdy, \quad \mathcal{F}_i^\Gamma = \oint_\Gamma g\varphi_i ds \tag{3.7.10}$$

3.7.5. Công thức tích lũy. Với Ω ta đã biết

$$\Omega = \bigcup_{l=1}^{M} T_l, \qquad \text{int}T_{l_1} \cap \text{int}T_{l_2} = \emptyset, \qquad l_1 \neq l_2$$

Với biên Γ ta giả sử các nút biên là $P_m, \quad m = 1, 2, \ldots, N_\Gamma,\ N_\Gamma < N$ sao cho

$$\Gamma = \bigcup_{m=1}^{N_\Gamma} [P_{m-1}P_m), \qquad [P_{m-1}P_m) \cap [P_{n-1}P_n) = \emptyset, \quad m \neq n$$

Theo tính cộng của tích phân ta có các công thức tích lũy sau đây:

$$\mathcal{A}_{ij}^{\Omega} = \sum_{l=1}^{M} \mathcal{A}_{ij}^{l}, \quad \mathcal{A}_{ij}^{l} = \iint_{T_l} (\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y})dxdy$$

$$\mathcal{F}_{i}^{\Omega} = \sum_{l=1}^{M} \mathcal{F}_{i}^{l}, \quad \mathcal{F}_{i}^{l} = -\iint_{T_l} f(x,y)\varphi_i(x,y)dxdy$$

$$\mathcal{A}_{ij}^{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \sigma\varphi_i\varphi_j ds = \sum_{m=1}^{N_\Gamma} \mathcal{A}_{ij}^{m}, \quad \mathcal{A}_{ij}^{m} = \int_{P_{m-1}P_m} \sigma\varphi_i\varphi_j ds$$

$$\mathcal{F}_{i}^{\Gamma} = \int_{\Gamma} g(x,y)\varphi_i(x,y)ds = \sum_{m=1}^{N_\Gamma} \mathcal{F}_{i}^{m}, \quad \mathcal{F}_{i}^{m} = \int_{P_{m-1}P_m} g\varphi_i ds$$

3.7.6. Tính các tích phân bằng phép đổi biến.

Các tích phân $\mathcal{A}_{ij}^{l}$ và $\mathcal{F}_{i}^{l}$ chỉ tính trên một tam giác phần tử hữu hạn T_l. Các tích phân $\mathcal{A}_{ij}^{m}$ và $\mathcal{F}_{i}^{m}$ chỉ tính trên một cạnh tam giác biên $P_{m-1}P_m$. Để tính $\mathcal{A}_{ij}^{l}$ và $\mathcal{F}_{i}^{l}$ ta có thể áp dụng phương pháp đổi biến như đã làm ở mục 3.3.6.

Để tính $\mathcal{A}_{ij}^{m}$ và $\mathcal{F}_{i}^{m}$ ta viết phương trình tham số của đường thẳng $P_{m-1}P_m$

$$x = x_{m-1} + (x_m - x_{m-1})t =: x(t), \qquad y = y_{m-1} + (y_m - y_{m-1})t =: y(t)$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x_m - x_{m-1})^2 + (y_m - y_{m-1})^2}dt$$

Do đó các tích phân đường $\mathcal{A}_{ij}^{m}$ và $\mathcal{F}_{i}^{m}$ trở thành các tích phân xác định

$$\mathcal{A}_{ij}^{m} = \int_{P_{m-1}P_m} \sigma\varphi_i\varphi_j ds = \int_0^1 [\sigma\varphi_i\varphi_j]\big|_{x=x(t),\ y=y(t)} \sqrt{(x_m - x_{m-1})^2 + (y_m - y_{m-1})^2}dt$$

$$\mathcal{F}_{i}^{m} = \int_{P_{m-1}P_m} g\varphi_i ds = \int_0^1 [g\varphi_i]\big|_{x=x(t),\ y=y(t)} \sqrt{(x_m - x_{m-1})^2 + (y_m - y_{m-1})^2}dt$$

Các tích phân xác định này có thể tính chính xác hoặc áp dụng một công thức gần đúng như công thức (3.3.11).

3.7.7. Đánh giá sai số.

Giả sử $u \in W^1(\Omega)$ là nghiệm của bài toán yếu (3.6.6), $w_N \in H_N$ là nghiệm cũng của bài toán yếu (3.6.6) nhưng trên H_N. Khi đó $u - w_N$ là sai số cần đánh giá.

Trước hết đặt

$$u_I(x,y) := \sum_{i=1}^{N} u_i\varphi_i(x,y), \qquad u_i = u(x_i, y_i) \tag{3.7.11}$$

Vì $u_I \in H_N$ nên áp dụng định lý 1.10.2 chương 1, ta có

Bổ đề 3.7.1.

$$\|u - w_N\|_{W^1(\Omega)} \leq K_2\|u - u_I\|_{W^1(\Omega)}, \qquad K_2 = const > 0 \tag{3.7.12}$$

Bổ đề 3.7.2. Nếu $u \in W^2(\Omega)$ thì

$$\|u - u_I\|_{W^1(\Omega)} \leq K_3 h\|u\|_{W^2(\Omega)}, \qquad K_3 = const > 0 \tag{3.7.13}$$

Xem cách chứng minh tương tự ở mục 3.3.8, công thức (3.3.37).

Từ bổ đề 3.7.1 và bổ đề 3.7.2 ta suy ra

Định lý 3.7.1. Giả sử $u(x, y) \in W^2(\Omega)$ thì

$$\|u - w_N\|_{W^1(\Omega)} \leq K_1 h\|u\|_{W^2(\Omega)}, \quad K_1 = const > 0 \tag{3.7.14}$$

Bây giờ trong lý thuyết về phương trình đạo hàm riêng người ta chứng minh được

Mệnh đề 3.7.1. Nếu nghiệm u của bài toán (3.6.1)(3.6.2) thỏa mãn $u \in W^2(\Omega)$ thì

$$\|u\|_{W^2(\Omega)} \leq K_6\{\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{W^{1/2}(\Gamma)}\}, \ K_6 = const > 0 \tag{3.7.15}$$

Chú ý. Về không gian $W^{1/2}(\Gamma)$ và bất đẳng thức (3.3.15) có thể xem [4].

Vậy từ định lý 3.7.1 và mệnh đề 3.7.1 ta suy ra

Định lý 3.7.2. Giả sử $u(x, y) \in W^2(\Omega)$ thì có

$$\|u - w_N\|_{W^1(\Omega)} \leq K_7 h\{\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{W^{1/2}(\Gamma)}\}, \ K_7 = const > 0 \tag{3.7.16}$$

Từ đó ta suy ra sự hội tụ và đánh giá sai số.

3.8. Bài toán biên loại hai (bài toán Neumann) đối với phương trình Poisson

3.8.1. Bài toán đạo hàm riêng.

Cho Ω là một miền bị chặn của mặt phẳng tọa độ (x,y) có biên là đường kín Γ trơn từng khúc. Pháp tuyến ngoài của Γ là ν.

Cho các hàm số $q(x, y), \ f(x, y) \in L_2(\Omega)$, hàm số $g(x, y) \in L_2(\Gamma)$.

Xét bài toán đạo hàm riêng sau đây *gọi là bài toán biên loại hai: tìm* $u(x, y) \in W^2(\Omega)$ *thỏa mãn*

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - q(x, y)u = f, \quad (x, y) \in \Omega \tag{3.8.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g(x, y) \tag{3.8.2}$$

trong đó $f,\ q \in L_2(\Omega),\quad g \in L_2(\Gamma)$,

$$q(x,y) \geq c_0 > 0,\ (x,y) \in \overline{\Omega},\ c_0 = const \tag{3.8.3}$$

Hàm số u nói trên là *nghiệm cổ điển* của bài toán (3.8.1)(3.8.2).

Bài toán (3.8.1)(3.8.2) là mô hình toán học của hiện tượng truyền nhiệt dừng trong bản mỏng vật chất Ω mà luồng nhiệt tại biên Γ được ấn định trước.

3.8.2. Bài toán yếu.

Bây giờ giả sử bài toán (3.8.1)(3.8.2) có nghiệm duy nhất thuộc $W^2(\Omega)$. Trong $L_2(\Omega)$ nhân vô hướng hai vế của (3.8.1) với hàm thử $v \in D(\overline{\Omega})$ ta có

$$\iint_\Omega [\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - qu]vdxdy = \iint_\Omega fvdxdy \tag{3.8.4}$$

Áp dụng công thức Green (3.2.3) ta được

$$\iint_\Omega [\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + quv]dxdy = -\iint_\Omega fvdxdy + \oint_\Gamma gvds, \qquad \forall v \in W^1(\Omega) \tag{3.8.5}$$

Nếu đặt

$$\alpha(u,v) := \iint_\Omega [\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + quv]dxdy, \qquad L(v) := -\iint_\Omega fvdxdy + \oint_\Gamma gvds \tag{3.8.6}$$

thì (3.8.5) gợi ý ta phát biểu bài toán:
Với $\alpha(u,v)$ và $L(v)$ xác định bởi (3.8.6) hãy tìm $u \in W^1(\Omega)$ thỏa mãn

$$\alpha(u,v) = L(v), \quad \forall v \in W^1(\Omega) \tag{3.8.7}$$

gọi là *bài toán yếu* ứng bài toán (3.8.1)(3.8.2).

3.8.3. Nghiệm suy rộng.

Nghiệm của bài toán yếu (3.8.7) gọi là nghiệm suy rộng của bài toán (3.8.1)(3.8.2).

Nếu u là nghiệm cổ điển của bài toán (3.8.1)(3.8.2) thì nó cũng là nghiệm suy rộng của bài toán đó. Ngược lại nếu u là nghiệm suy rộng của bài toán (3.8.1)(3.8.2) lại thuộc $W^2(\Omega)$ thì cũng là nghiệm cổ điển của nó (cách chứng minh xem mục 2.4.9 chương 2.)

3.8.4. Sự tồn tại nghiệm suy rộng.

Giả sử miền Ω có "tính sao cầu từng phần". Dựa vào (3.8.6) và áp dụng định lý nhúng và công thức Friedrich ở chương 1, mục 1.6.7 người ta chứng minh được (xem (3.2.4) và (3.6.4)) rằng $\alpha(u,v)$ là một dạng song tuyến đối xứng, liên tục trên $W^1(\Omega)$ và

$W^1(\Omega)$-eliptic, đồng thời $L(v)$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $W^1(\Omega)$. Vậy theo định lý 1.8.1 chương 1 ta suy ra sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (3.8.7), tức là nghiệm suy rộng của bài toán (3.8.1)(3.8.2).

3.8.5. Tính gần đúng nghiệm suy rộng bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

Để tính gần đúng nghiệm suy rộng, tức là nghiệm của bài toán (3.8.7) theo sơ đồ chung đã trình bầy ở chương 1 và có thể tiến hành giống như ở tiết 3.6. Có thể lặp lại việc làm đó với chú ý rằng $\alpha(u, v)$ và $L(v)$ ở đây có dạng (3.8.6).

Trong trường hợp Ω là một miền đa giác, đề nghị xem mục 3.6.5.

3.9. Bài toán biên loại một không thuần nhất.

3.9.1. Bài toán đạo hàm riêng

Cho Ω là một miền bị chặn của mặt phẳng tọa độ (x,y) có biên là đường kín Γ trơn từng khúc. Pháp tuyến ngoài của Γ là ν.

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên Ω, hàm số $g(x, y)$ xác định trên Γ là các hàm số đủ trơn.

Xét bài toán đạo hàm riêng sau đây: *tìm* $u(x, y) \in W^2(\Omega)$ *thỏa mãn*

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \tag{3.9.1}$$

$$u|_\Gamma = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \tag{3.9.2}$$

trong đó $f \in L_2(\Omega), \quad g \in L_2(\Gamma)$.

Với ε là một tham số dương, nói chung là nhỏ, xét bài toán phụ:

$$\Delta u_\varepsilon := \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \tag{3.9.3}$$

$$\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + u_\varepsilon|_\Gamma = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \tag{3.9.4}$$

Ta xét bài toán phụ này vì bài toán (3.9.1)(3.9.2) chưa có cách giải bằng phương pháp phần tử hữa hạn, trong khi bài toán (3.9.3)(3.9.4) đã có cách giải ở tiết 3.6, ta hi vọng u_ε là gần đúng của u.

Ta có kết quả:

3.9.2. Đánh giá sai số. định lý. Nếu u là nghiệm của bài toán (3.9.1)(3.9.2) và u_ε là nghiệm của bài toán (3.9.3)(3.9.4) thì

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W^1(\Omega)} \le K\sqrt{\varepsilon}, \qquad K = const > 0 \tag{3.9.5}$$

Chứng minh. Đặt $z = u - u_\varepsilon$ ta có

$$\Delta z := \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \qquad z + \varepsilon \frac{\partial z}{\partial \nu}|_\Gamma = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad (x,y) \in \Gamma$$

Ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\iint_\Omega [\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}] z dxdy = 0 \\
&\Rightarrow \iint_\Omega [(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2] dxdy - \oint_\Gamma \frac{\partial z}{\partial \nu} z ds = 0 \\
&\Rightarrow \iint_\Omega [(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2] dxdy - \oint_\Gamma (\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{1}{\varepsilon} z) z ds = 0 \\
&\Rightarrow \iint_\Omega [(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2] dxdy + \oint_\Gamma \frac{1}{\varepsilon} z^2 ds = \oint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} z ds \\
&\Rightarrow \iint_\Omega [(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2] dxdy + \oint_\Gamma \frac{1}{2\varepsilon} z^2 ds \le \oint_\Gamma 2\varepsilon (\frac{\partial u}{\partial \nu})^2 ds
\end{aligned}$$

Theo định lý về chuẩn tương đương, chương 1 thì tồn tại hằng số dương M để có

$$\|z\|^2_{W^1(\Omega)} \le M\{\iint_\Omega [(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2] dxdy + (\oint_\Gamma \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} z ds)^2$$

$$\Rightarrow \|z\|^2_{W^1(\Omega)} \le M \oint_\Gamma 2\varepsilon (\frac{\partial u}{\partial \nu})^2 ds$$

Vậy định lý được chứng minh với

$$K = \sqrt{M \oint_\Gamma 2 (\frac{\partial u}{\partial \nu})^2 ds}$$

Bất đẳng thức (3.9.5) chứng tỏ nghiệm của bài toán phụ u_ε xấp xỉ nghiệm u của bài toán đã cho. Vậy ta có thể từ cho trước ε đủ nhỏ rồi giải bài toán phụ thay thế bài toán đã cho.

BÀI TẬP

1. Cho

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$$

với biên ký hiệu là Γ.

Áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn giải bài toán

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2(x^2 + y^2 - x - y), \quad (x,y) \in \Omega$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma$$

2. Cho

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < \pi,\ 0 < x + y < \pi\}$$

với biên ký hiệu là Γ.

Áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn giải bài toán

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\sin(x + y), \quad (x, y) \in \Omega$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma$$

3. Cho

$$\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

với biên ký hiệu là Γ, pháp tuyến của Γ là ν.

Trình bầy phương pháp phần tử hữu hạn giải bài toán

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + u = 0, \quad (x, y) \in \Gamma$$