TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
KHOA TOÁN TIN ỨNG DỤNG

Phan Xuân Thành

Bài giảng

Phương trình đạo hàm riêng

Hà Nội - 2011

Mục lục

1 Đại cương về phương trình vật lý toán 4

1.1 Đại cương về phương trình vật lý toán 4

1.1.1 Các định nghĩa 4

1.1.2 Một số ví dụ giải phương trình đạo hàm riêng 5

1.1.3 Thiết lập một số phương trình đạo hàm riêng 7

1.2 Phân loại phương trình đạo hàm riêng cấp hai 9

1.2.1 Trường hợp hai biến số 9

1.2.2 Dạng chính tắc 10

1.2.3 Đưa phương trình về dạng chính tắc 10

1.2.4 Phân loại phương trình 12

1.3 Trường hợp nhiều biến số 16

1.3.1 Nhắc lại kết quả về đại số 16

1.3.2 Phân loại phương trình tuyến tính cấp 2 17

1.4 Khái niệm về mặt đặc trưng 18

1.4.1 Khái niệm về mặt đặc trưng 18

1.4.2 Bài toán Cauchy và bài toán Cauchy với dữ kiện cho trên các mặt đặc trưng 20

1.5 Ba loại phương trình vật lý toán cơ bản. Bài toán đặt chỉnh . . 21

1.5.1 Ba loại phương trình cơ bản 21

1.5.2 Các dạng bài toán có điều kiện biên, điều kiện ban đầu . 23

1.5.3 Bài toán đặt chỉnh 24

2 Phương trình truyền sóng 26

2.1 Phương trình dao động của dây, của màng 26

2.2 Bài toán biên ban đầu (Bài toán hỗn hợp) 28

2.2.1 Định luật bảo toàn năng lượng 29

2.2.2 Tính duy nhất nghiệm 31

2.2.3 Đánh giá tiên nghiệm. Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu 31

2.3 Bài toán Cauchy. Công thức Kirchoff 32

2.4 Công thức Poisson, công thức Dalembert 35

2.4.1 Công thức Poisson 35

2.4.2 Công thức Dalembert 35

2.5 Phương pháp tách biến (Fourier) 40

2.5.1 Dao động tự do của dây 40

2.5.2 Phương trình không thuần nhất 43

3 Phương trình truyền nhiệt 46

3.1 Thiết lập phương trình truyền nhiệt 46

3.2 Bài toán biên ban đầu (Bài toán hỗn hợp) 48

3.2.1 Nguyên lý cực đại 49

3.2.2 Tính duy nhất nghiệm 52

3.2.3 Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện biên và ban đầu 53

3.2.4 Phương pháp tách biến 53

3.3 Sự truyền nhiệt trong thanh vô hạn. Bài toán Cauchy 59

3.3.1 Nguyên lý cực đại. Tính duy nhất nghiệm 59

3.3.2 Giải bài toán Cauchy 60

3.3.3 Sự truyền nhiệt trong nửa thanh vô hạn 61

3.3.4 Bài toán Cauchy trong không gian hai chiều và ba chiều 63

4 Phương trình Laplace và phương trình Poisson 65

4.1 Phương trình Laplace. Nghiệm cơ bản 65

4.2 Các bài toán biên: Bài toán biên Dirichlet, bài toán biên Neumann 69

4.2.1 Bài toán biên Dirichlet 69

4.2.2 Bài toán biên Neumann 69

4.2.3 Bài toán biên Robin 70

4.2.4 Bài toán Cauchy 70

4.3 Phương pháp hàm Green để giải bài toán Dirichlet. Công thức Poisson 70

4.3.1 Hàm Green đối với hình cầu và công thức Poisson 72

4.4 Giải bài toán Dirichlet trong mặt tròn 74

4.5 Các tính chất của hàm điều hòa 77

4.6 Nghiệm yếu. Phương pháp biến phân 78

4.6.1 Bài toán biên Dirichlet 78

4.6.2 Không gian Sobolev $H_0^1(\Omega)$ 79

4.6.3 Toán tử Elliptic 80

4.6.4 Bài toán yếu 81

Chương 1

Đại cương về phương trình vật lý toán

1.1 Đại cương về phương trình vật lý toán

1.1.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 1. *Một phương trình liên hệ giữa ẩn hàm $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, các biến độc lập $x_1, x_2, ..., x_n$ và các đạo hàm riêng của nó gọi là phương trình vi phân đạo hàm riêng (gọi tắt là phương trình đạo hàm riêng). Nó có dạng*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}) = 0, \tag{1.1}$$

trong đó F là một hàm nào đó. Cấp cao nhất của đạo hàm riêng của u, có mặt trong phương trình được gọi là cấp của phương trình.

Chẳng hạn, phương trình cấp một của hàm hai biến có dạng:

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0. \tag{1.2}$$

Ví dụ: Phương trình chuyển dịch tuyến tính: $u_t + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = 0$, phương trình Burger (sửa đổi): $u_t + u.u_x = 0$.

Phương trình cấp hai của hàm hai biến số có dạng

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0. \tag{1.3}$$

Ví dụ: $\Delta u = 0$ (phương trình Laplace, được Laplace nghiên cứu vào khoảng năm 1780).

Hệ phương trình đạo hàm riêng là hệ gồm các phương trình đạo hàm riêng của một hay nhiều ẩn hàm và các đạo hàm của chúng.

Phương trình đạo hàm riêng được gọi là tuyến tính, nếu như nó tuyến tính đối với ẩn hàm và tất cả các đạo hàm của nó với các hệ số phụ thuộc vào các biến độc lập $x_1, x_2, ...$. Trong trường hợp tổng quát ta có thể viết nó dưới dạng

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = |\alpha|. \tag{1.4}$$

Ví dụ:

$$\begin{aligned}
&\Delta u = f \quad \text{phương trình Poisson},\\
&u_t - \Delta u = f \quad \text{phương trình truyền nhiệt},\\
&u_{tt} - \Delta u = f \quad \text{phương trình truyền sóng},\\
&ih\psi_t = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V\psi \quad \text{phương trình Schrodinger},\\
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n u}{dx^n} = g(x).
\end{aligned}$$

Phương trình đạo hàm riêng cấp m được gọi là nửa tuyến tính (semi-linear) nếu nó tuyến tính với các đạo hàm cấp m với các hệ số phụ thuộc vào $x_1, x_2, ...$, được gọi là tựa tuyến tính nếu nó tuyến tính với các đạo hàm cấp m với các hệ số phụ thuộc vào $x_1, x_2, ...$ và các đạo hàm cấp bé hơn m. Phương trình đạo hàm riêng không phải là phương trình tuyến tính được gọi là phương trình phi tuyến. Ví dụ:

$$\begin{aligned}
&|Du| = 1 \quad \text{phương trình Eikonal},\\
&u_t + cuu_x + u_{xxx} = 0 \quad \text{phương trình Korteweg-de Vries},\\
&\det(D^2u) = f \quad \text{phương trình Monge-Ampere, được đưa ra từ năm 1775.}
\end{aligned}$$

Nghiệm của phương trình đạo hàm riêng là một hệ bất kỳ các hàm sao cho khi thay vào phương trình (1.1) trở thành đồng nhất thức trong miền Ω nào đó của các biến số độc lập. Để đơn giản, ta giả sử rằng $x_1, x_2, ...$ là thực và các đạo hàm của u trong phương trình (1.1) liên tục theo các biến $x_1, x_2, ...$ trong miền Ω.

Chú ý 1. *Số chiều không gian của các biến độc lập $x_1, x_2, ...$ có thể là vô hạn. Ngoài ra, cấp của đạo hàm trong phương trình* (1.1) *có thể là vô hạn. Khi đó, ta có phương trình đạo hàm riêng cấp vô hạn.*

1.1.2 Một số ví dụ giải phương trình đạo hàm riêng

Ví dụ 1: Giải phương trình $u_{xy} = 0$, x, y là các biến số độc lập.
Ta có $u_x = c(x) \Longrightarrow u = \int_a^x c(\xi)\, d\xi + g(y)$ ở đó $c(x)$, $g(y)$ là các hàm tùy ý.

Ví dụ 2: Phương trình $u_{xx}(x,y)+u(x,y)=0$ có nghiệm là $u(x,y)=f(y)\cos x+g(y)\sin x$, trong đó f và g là các hàm bất kỳ.
Ví dụ 3: Giải phương trình $u_{xx}-u_{yy}=0$.
Đổi biến số, đặt $\xi=x+y, y=x-y$, ta có

$$4u_{\xi\eta}=0 \Rightarrow u=\int_0^{\xi} c(t)\,dt+g(\eta)=\int_0^{x+y} c(t)\,dt+g(x-y)=h(x+y)+g(x-y).$$

Ví dụ 4: Phương trình tuyến tính cấp 1 hệ số hằng. Xét phương trình

$$au_x+bu_y=0, \tag{1.5}$$

trong đó a,b là các hằng số không đồng thời bằng không.
Phương pháp hình học: Biểu thức au_x+bu_y là đạo hàm theo hướng của hàm u theo véctơ $\overrightarrow{V}=(a,b)=a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}$. Do đó, từ phương trình (1.5), hàm $u(x,y)$ là hằng số theo hướng $\overrightarrow{V}$. Đường thẳng song song với véctơ $\overrightarrow{V}$ có phương trình là $bx-ay=c$ và dọc theo đường thẳng này, hàm u là hằng số. Như vậy, $u(x,y)=f(c)=f(bx-ay)$ với c bất kỳ. Vậy nghiệm là

$$u(x,y)=f(bx-ay) \quad \text{với mọi } x,y.$$

Phương pháp đổi biến: Đổi biến số

$$x'=ax+by, \quad y'=bx-ay.$$

Ta có

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}=au_{x'}+bu_{y'}$$

và

$$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}=bu_{x'}-au_{y'}.$$

Do đó $au_x+bu_y=a(au_{x'}+bu_{y'})+b(bu_{x'}-au_{y'})=(a^2+b^2)u_{x'}$. Do $a^2+b^2\neq 0$ nên $u_{x'}=0$. Vậy $u=f(y')=f(bx-ay)$.

Các bài tập

Bài 1: Giải thích các đẳng thức vi phân sau có là phương trình đạo hàm riêng không?

1. $\cos(u_x+u_y)-\cos u_x\cos u_y+\sin u_x\sin u_y=0$.
2. $u_{xx}^2+u_{yy}^2-(u_{xx}-u_{yy})^2=0$.
3. $\sin^2(u_{xx}+u_{yy})+\cos^2(u_{xx}+u_{yy})-u=1$.

Bài 2: Xác định cấp của các phương trình sau

1. $\log|u_{xx}u_{yy}| - \log|u_{xx}| - \log|u_{yy}| + u_x + u_y = 0$.

2. $u_x u_{xy}^2 + (u_{xx}^2 - 2u_{xy}^2 + u_y)^2 - 2xy = 0$.

3. $u_t - \Delta u = f$.

4. $u_{tt} - \Delta u = f$.

1.1.3 Thiết lập một số phương trình đạo hàm riêng

Phương trình vận tải đơn giản

Xét một luồng chất lỏng, chẳng hạn là nước, chảy với tốc độ c-hằng số, dọc theo ống nằm ngang theo hướng dương x. Một lượng chất bẩn nổi trên nước. Gọi $u(x,t)$ là mật độ của nó (g/cm) ở thời điểm t. Ta biết rằng, lượng chất bẩn trong khoảng $[0,b]$ ở thời điểm t là $M = \int_0^b u(x,t)\,dx$ (g). Ở thời điểm $t+h$, lượng chất đó đã di chuyển sang phải một đoạn $c.h$ (cm). Do đó,

$$M = \int_0^b u(x,t)\,dx = \int_{ch}^{b+ch} u(x,t+h)\,dx.$$

Lấy đạo hàm theo b, ta được

$$u(b,t) = u(b+ch, t+h).$$

Lấy đạo hàm theo h, và cho $h = 0$, ta được

$$0 = cu_x(b,t) + u_t(b,t).$$

Do b là bất kỳ, nên phương trình mô tả bài toán vận chuyển đơn giản có dạng

$$u_t + cu_x = 0. \tag{1.6}$$

Phương trình dao động

Phương trình khuếch tán (truyền nhiệt)

Bây giờ ta thiết lập phương trình truyền nhiệt hay phương trình khuếch tán. Xét một vật rắn truyền nhiệt đẳng hướng. Ký hiệu $u(x,y,z,t)$ là nhiệt độ của một vật rắn tại điểm (x,y,z) ở thời điểm t. Chúng ta biết rằng nhiệt sẽ truyền từ nơi có nhiệt độ cao sang nơi có nhiệt độ thấp hơn. Sự truyền nhiệt này tuân theo định luật sau: nhiệt lượng ΔQ đi qua một mảnh mặt khá bé ΔS chứa điểm (x,y,z) trong một thời gian Δt tỷ lệ với ΔS, Δt và đạo hàm theo pháp tuyến $\frac{\partial u}{\partial n}$, tức là

$$\Delta Q = -k(x,y,z)\Delta t.\Delta S.\frac{\partial u}{\partial n}, \tag{1.7}$$

trong đó $k(x, y, z) > 0$ là hệ số truyền nhiệt trong (k không phụ thuộc vào hướng của pháp tuyến với ΔS vì sự truyền nhiệt là đẳng hướng), $\overrightarrow{n}$ là vectơ pháp tuyến của ΔS hướng theo chiều giảm của nhiệt độ.
Gọi q là dòng nhiệt, tức là nhiệt lượng đi qua một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian. Từ (1.7) ta suy ra

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Xét một thể tích tùy ý V của vật rắn giới hạn bởi một mặt kín, trơn S và xét sự biến thiên của nhiệt lượng trong thể tích đó trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2. Từ (1.7) ta suy ra rằng nhiệt lượng qua mặt S vào trong, từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2 bằng

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

trong đó $\overrightarrow{n}$ là vectơ pháp tuyến hướng vào trong của mặt S. Áp dụng công thức Ostrogradsky, chuyển tích phân mặt sang tích phân ba lớp, ta được

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \operatorname{div}(k.gradu)\, dx\, dy\, dz.$$

Giả sử trong vật có nguồn nhiệt. Gọi $F(x, y, z, t)$ là mật độ của nguồn nhiệt, tức là nhiệt lượng sinh ra hay mất đi trong một đơn vị thể tích của vật thể và một đơn vị thời gian. Nhiệt lượng sinh ra hay mất đi trong thể tích V từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2 bằng

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz.$$

Mặt khác, nhiệt lượng cần cho thể tích V của vật thể thay đổi nhiệt độ từ $u(x, y, z, t_1)$ đến $u(x, y, z, t_2)$ bằng

$$Q_3 = \iiint_V [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]c(x, y, z)\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

trong đó $c(x, y, z)$ là nhiệt dung, $\rho(x, y, z)$ là mật độ của vật. Ta có

$$u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}\, dt,$$

nên có thể viết

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy\, dz.$$

Dĩ nhiên $Q_3 = Q_1 + Q_2$ hay $Q_3 - Q_1 - Q_2 = 0$, nên

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k.gradu) - F(x, y, z, t) \right) dx\, dy\, dz = 0.$$

Vì khoảng thời gian (t_1, t_2) và thể tích V được chọn tùy ý, nên biểu thức dưới dấu tích phân bằng không,

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k.gradu) + F(x, y, z, t)$$

hay

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z} \right) + F(x, y, z, t).$$

Phương trình trên gọi là phương trình truyền nhiệt trong vật đẳng hướng không đồng chất. Nếu vật đồng chất thì c, ρ, k là những hằng số và phương trình có dạng

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t),$$

trong đó $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ là hệ số truyền nhiệt độ, $f(x, y, z, t) = \dfrac{F(x, y, z, t)}{c\rho}$.

1.2 Phân loại phương trình đạo hàm riêng cấp hai

1.2.1 Trường hợp hai biến số

Định nghĩa 2. *Xét phương trình tuyến tính cấp hai với hệ số thực*

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{1.8}$$

Xét tại một điểm (x_0, y_0) cố định. Phương trình (1.8) tại điểm (x_0, y_0) được gọi là:

a) thuộc loại elip nếu như tại điểm đó $b^2 - ac < 0$,

b) thuộc loại hypecbôn nếu như tại điểm đó $b^2 - ac > 0$,

c) thuộc loại parabôn nếu như tại điểm đó $b^2 - ac = 0$.

Nếu phương trình (1.8) tại mọi điểm của miền Ω đều thuộc cùng một loại (elip, hypecbôn, parabôn) thì ta nói nó thuộc loại đó (elip, hypecbôn, parabôn) trong miền đó.

Ví dụ: Phương trình

$2u_{xx} + 7u_{yy} = 0$ là elip trên toàn mặt phẳng.

$u_{xx} - 5u_{yy} + u_x - 2u_y + u = 0$ là hypecbôn trên toàn mặt phẳng.

$u_{xx} - 2u_y + 3u = 0$ là parabôn trên toàn mặt phẳng.

1.2.2 Dạng chính tắc

a) Phương trình $u_{xx} - u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ gọi là dạng chính tắc của phương trình loại hypecbôn. Người ta cũng gọi phương trình $u_{xy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ là dạng chính tắc của phương trình loại hypecbôn. Chú ý rằng từ dạng đầu có thể suy ra dạng thứ hai bằng cách đổi biến số $\xi = x + y, \quad \eta = x - y$.

b) Phương trình $u_{xx} + u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ là dạng chính tắc của phương trình loại elip.

c) Phương trình $u_{xx} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ hay $u_{yy} + G(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ gọi là dạng chính tắc của phương trình parabôn.

1.2.3 Đưa phương trình về dạng chính tắc

Dùng phương pháp đổi biến $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ với ξ, η là các hàm khả vi liên tục hai lần và có định thức Jacobi khác không

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.9}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi.\xi_x + u_\eta.\eta_x, \\ u_y &= u_\xi.\xi_y + u_\eta.\eta_y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi}.\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}.\xi_x.\eta_x + u_{\eta\eta}.\eta_x^2 + u_\xi.\xi_{xx} + u_\eta.\eta_{xx}, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi}.\xi_x.\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x.\eta_y + \xi_y.\eta_x) + u_{\eta\eta}.\eta_x\eta_y + u_\xi.\xi_{xy} + u_\eta.\eta_{xy}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}.\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}.\xi_y.\eta_y + u_{\eta\eta}.\eta_y^2 + u_\xi.\xi_{yy} + u_\eta.\eta_{yy}, \end{aligned}$$

Thay các đại lượng này vào phương trình (1.8) ta nhận được

$$a_1(\xi, \eta)u_{\xi\xi} + 2b_1(\xi, \eta)u_{\xi\eta} + c_1(\xi, \eta)u_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \tag{1.10}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
a_1 &= a\xi_x^2 + 2b\xi_{xy} + c\xi_y^2,\\
b_1 &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y,\\
c_1 &= a\eta_y^2 + 2b\eta_{xy} + c\eta_y^2.
\end{aligned}$$

Dễ thấy rằng $b_1^2 - a_1c_1 = (b^2 - ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2 > 0$ (do (1.9)). Do đó loại của phương trình không thay đổi khi dùng phép đổi biến trên.

Vấn đề đặt ra là tìm phép đổi biến thích hợp để phương trình (1.10) trong hệ tọa độ mới là đơn giản nhất. Ta có bổ đề sau.

Bổ đề 1. *Giả sử $z = \varphi(x, y) \in C^1(\Omega)$, Ω là một miền nào đó của $\mathbb{R}^2$ và giả sử $(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2 > 0$. Khi đó hàm $z = \varphi(x, y)$ là nghiệm riêng nào đó của phương trình*

$$a(z_x)^2 + 2bz_xz_y + c(z_y)^2 = 0 \tag{1.11}$$

khi và chỉ khi $\varphi(x, y) = C$ là tích phân tổng quát của phương trình vi phân thường

$$a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0. \tag{1.12}$$

Chứng minh. a) Giả sử $\varphi(x, y)$ là một nghiệm riêng của phương trình (1.11) và giả sử $\varphi_y \neq 0$. Khi đó từ (1.11) ta có

$$a\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c = 0. \tag{1.13}$$

Theo định lý hàm ẩn, từ quan hệ $\varphi(x, y) = C$ xác định một hàm ẩn $y = y(x)$ liên tục, khả vi và $y'(x) = -\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$. Vậy từ (1.13) suy ra $a(y')^2 - 2by' + c = 0$ hay $a(dy)^2 - 2bdydx + c(dx)^2 = 0$.

Trường hợp $\varphi_y = 0$, do giả thiết suy ra $\varphi_x \neq 0$. Khi đó ta cũng lý luận tương tự như trường hợp $\varphi_y \neq 0$.

b) Giả sử $\varphi(x, y) = C$ là tích phân tổng quát của phương trình (1.12). Ta sẽ chứng minh $z = \varphi(x, y)$ là nghiệm riêng của phương trình (1.11) trong miền Ω.

Thật vậy, giả sử $\varphi(x_0, y_0) = C_0$ với $(x_0, y_0) \in \Omega$. Xét quan hệ $\varphi(x, y) = C_0$; giả sử $\varphi_y \neq 0$. Khi đó quan hệ này xác định một hàm ẩn $y = y(x)$ khả vi liên tục và $y'(x) = -\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$. Do vậy từ (1.12) ta có

$$a\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c = 0$$

và do vậy tại (x_0, y_0) ta có đồng nhất thức (1.11). Trường hợp tại (x_0, y_0) mà $\varphi_y = 0$ thì từ giả thiết suy ra $\varphi_x \neq 0$. Ta lại lập luận tương tự như đối với $\varphi_y \neq 0$.

$\square$

1.2.4 Phân loại phương trình

Trên cơ sở bổ đề 1 ta sẽ tìm cách đổi biến số sao cho một trong các hệ số a_1, b_1, c_1 của phương trình (1.10) bị triệt tiêu. Để làm điều đó ta sẽ nghiên cứu phương trình (1.12) mà cơ sở của nó là biệt thức $\Delta = b^2 - ac$.

Trường hợp $\Delta > 0$:

Khi đó phương trình (1.8) là loại hypecbôn (hyperbolic). Lúc này phương trình

$$a(y')^2 - 2by' + c = 0 \tag{1.14}$$

có hai nghiệm phân biệt.
a) Nếu $a \neq 0$: Từ phương trình (1.14) suy ra

$$y_1'(x) = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad y_2'(x) = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (1.14) là

$$y_1(x) = \int \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}\, dx + C_1, \quad y_2(x) = \int \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\, dx + C_2,$$

hay

$$\varphi(x, y) = y - \int \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}\, dx = C_1, \quad \psi(x, y) = y - \int \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\, dx = C_2$$

là các tích phân tổng quát của phương trình (1.12).
Khi đó ta dùng phép đổi biến $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$ với $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ và

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

(theo lý thuyết phương trình vi phân), vì $y_1'(x) = -\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y} \neq y_2'(x) = -\dfrac{\psi_x}{\psi_y}$.
Với phép đổi biến này thì các hệ số a_1 và c_1 của phương trình (1.10) bằng 0. Khi đó phương trình (1.10) trở thành

$$2b_1 u_{\xi\eta} + F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \tag{1.15}$$

với $b_1 = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y$. Lúc này $b_1^2 - a_1c_1 = (b^2 - ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2 > 0$. Vậy $b_1 \neq 0$ nên phương trình (1.15) có thể đưa về dạng

$$u_{\xi\eta} = F_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{1.16}$$

b) Nếu $a = 0$:
+) Khi $c = 0$, do phương trình (1.8) là phương trình cấp 2 nên suy ra $b \neq 0$.

Khi đó phương trình (1.8) là có dạng chính tắc.
+) Khi $c \neq 0$ thì phương trình (1.12) tương đương với phương trình $c(x'(y))^2 - 2bx'(y) = 0$. Khi đó ta làm giống như trường hợp $a \neq 0$.

Chú ý 2. *Nếu dùng phép đổi biến $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$ thì phương trình* (4.42) *sẽ trở thành*

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = F_3(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).$$

Trường hợp $\Delta = 0$:

Khi đó phương trình (1.8) thuộc dạng parabôn (parabolic).
a) Nếu $b = 0$, do $\Delta = b^2 - ac = 0$ suy ra $ac = 0$. Khi đó hoặc $a = 0$ hoặc $c = 0$. Do đó phương trình (1.8) có dạng chính tắc $cu_{yy} + F = 0$ hoặc $au_{xx} + F = 0$.
b) Nếu $b \neq 0$, do $\Delta = b^2 - ac = 0$ suy ra a và c khác 0. Khi đó do phương trình (1.14) có nghiệm kép là $y' = \dfrac{b}{a} \Rightarrow y = \int \dfrac{b}{a}\, dx + C_1$ suy ra $\varphi(x, y) = y - \int \dfrac{b}{a}\, dx = C_1$ là tích phân tổng quát của phương trình (1.12).
Ta chọn phép đổi biến số $\xi = \varphi(x, y)$ còn $\eta = \psi(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tùy ý sao cho $\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix} \neq 0$. Khi đó theo bổ đề 1 ta có $a_1 = 0$ và do $b_1^2 - a_1c_1 = (b^2 - ac)J^2 = 0$, $J = \dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}$ nên $b_1 = 0$. Ta sẽ chỉ ra $c_1 \neq 0$. Thật vậy, nếu $c_1 = 0$ thì ta có $c_1 = a(\eta_x)^2 + 2b\eta_x\eta_y + c(\eta_y)^2 = 0$. Do giả thiết $\Delta = b^2 - ac = 0$ nên $b^2 = ac > 0$.
Giả sử $b > 0$, suy ra $b = \sqrt{ac}$. Vậy

$$c_1 = a(\psi_x)^2 + 2\sqrt{ac}\psi_x\psi_y + c(\psi_y)^2 = 0$$

hay

$$\begin{cases} (\sqrt{a}\psi_x + \sqrt{c}\psi_y)^2 = 0 & \text{nếu } a > 0, c > 0 \\ (\sqrt{-a}\psi_x + \sqrt{-c}\psi_y)^2 = 0 & \text{nếu } a < 0, c < 0. \end{cases}$$

Tương tự ta có

$$\begin{cases} (\sqrt{a}\varphi_x + \sqrt{c}\varphi_y)^2 = 0 & \text{nếu } a > 0, c > 0 \\ (\sqrt{-a}\varphi_x + \sqrt{-c}\varphi_y)^2 = 0 & \text{nếu } a < 0, c < 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} (\sqrt{a}\psi_x + \sqrt{c}\psi_y)^2 = 0 \\ (\sqrt{a}\varphi_x + \sqrt{c}\varphi_y)^2 = 0 \end{cases} \quad \text{nếu } a > 0, c > 0$$

hoặc

$$\begin{cases} (\sqrt{-a}\psi_x + \sqrt{-c}\psi_y)^2 = 0 \\ (\sqrt{-a}\varphi_x + \sqrt{-c}\varphi_y)^2 = 0 \end{cases} \quad \text{nếu } a < 0, c < 0.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)} = J = 0$ (mâu thuẫn). Khi $b < 0$ ta lập luận tương tự.
Vậy $c_1 \neq 0$. Do đó dạng chính tắc là $c_1 u_{\eta\eta} = -F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$ hay

$$u_{\eta\eta} = F_4(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Trường hợp $\Delta < 0$:

Khi đó phương trình (1.8) thuộc loại elip (elliptic). Ta giả sử các hệ số a, b, c là giải tích trong miền được xét.
Do $\Delta < 0$ nên $b^2 < ac \Rightarrow ac > 0$. Lúc này phương trình (1.14) có hai nghiệm phức liên hợp

$$y_1'(x) = \frac{b + i\sqrt{ac - b^2}}{a}, \quad y_2'(x) = \frac{b - i\sqrt{ac - b^2}}{a}.$$

Do đó $\varphi(x,y) = y - \int \frac{b+i\sqrt{ac-b^2}}{a}\,dx = C_1$ hay $\varphi(x,y) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y) = C_1$ và $\psi(x,y) = y - \int \frac{b-i\sqrt{ac-b^2}}{a}\,dx = C_2$ hay $\psi(x,y) = \alpha(x,y) - i\beta(x,y) = C_2$ là các tích phân tổng quát của phương trình (1.12), trong đó $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ là các hàm thực và $(\varphi_x')^2 + (\varphi_y')^2 > 0$, và ta cũng có $(\psi_x')^2 + (\psi_y')^2 > 0$. Khi đó ta chọn phép đổi biến số

$$\begin{cases} \xi = \alpha(x,y) \\ \eta = \beta(x,y) \end{cases}$$

Ta có $\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x = J$. Ta sẽ chứng minh $J \neq 0$.
Giả sử $\varphi_y \neq 0$. Theo định lý hàm ẩn từ quan hệ $\varphi(x,y) = C_1$ ta có hàm $y_1 = y_1(x)$, $y_1' = -\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y} = \dfrac{b + i\sqrt{-\Delta}}{a}$, suy ra $a\varphi_x = (-b - i\sqrt{-\Delta})\varphi_y$. Thay $\varphi_x = \alpha_x + i\beta_x$, $\varphi_y = \alpha_y + i\beta_y$ vào biểu thức này và tách phần thực và phần ảo, ta có

$$a\varphi_x = -b\alpha_y + \sqrt{-\Delta}\beta_y, \tag{1.17}$$

$$a\beta_x = -b\beta_y - \sqrt{-\Delta}\alpha_y. \tag{1.18}$$

Sau khi nhân β_y vào hai vế của (1.17) và α_y vào hai vế của (1.18) và trừ vế với vế ta được $aJ = \sqrt{-\Delta}(\alpha_y^2 + \beta_y^2)$. Từ đó suy ra $J \neq 0$.
Theo bổ đề 1 thì hàm $z = \varphi(x,y)$ thỏa mãn phương trình $a(\varphi_x)^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c(\varphi_y)^2 = 0$. Thay $\varphi = \alpha + i\beta$ vào ta có

$$a(\alpha_x)^2 + 2b\alpha_x\alpha_y + c(\alpha_y)^2 - a(\beta_x)^2 - 2b\beta_x\beta_y - c(\beta_y)^2 \\ + 2i\left[a\alpha_x\beta_x + b(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + c\alpha_y\beta_y\right] = 0.$$

Tách phần thực, phần ảo ta được $a_1 = c_1, b_1 = 0$. Vậy phương trình có dạng $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = -\dfrac{F}{a_1}$.

Chú ý 3. *Trong trường hợp này chỉ cần* $a, b, c \in C^2$.

Ví dụ 1: Đưa phương trình

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$$

về dạng chính tắc.
Phương trình đặc trưng $(y')^2 - 2(y') - 3 = 0$, $a = 1, b = 1, c = -3$. Ta có $\Delta = b^2 - ac = 4 > 0$. Vậy phương trình thuộc loại hypecbôn.
Ta có $y_1' = -1$ và $y_2' = 3$, suy ra $y_1 = -x + C_1, y_2 = 3x + C_2$.
Vậy $\varphi(x, y) = x + y = -C_1$, $\psi(x, y) = y - 3x = C_2$ là các tích phân tổng quát của phương trình đặc trưng.
Đặt $\xi = y + x$, $\eta = y - 3x$. Khi đó $a_1 = c_1 = 0$, còn

$$b_1 = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_x = -3 + 1(1 - 3) - 3(-3) = 4,$$

với $\xi_x = 1, \xi_y = 1, \eta_y = 1, \eta_x = 3$.
Ta có

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi - 3u_\eta, \quad u_y = u_\xi + u_\eta,\\
u_{xx} &= u_{\xi\xi} + 9u_{\eta\eta} - 6u_{\xi\eta},\\
u_{yy} &= u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta},\\
u_{xy} &= u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta} - 3u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = u_{\xi\xi} - 3u_{\eta\eta} - 2u_{\xi\eta}.
\end{aligned}$$

Vậy ta nhận được dạng chính tắc là

$$4u_{\xi\eta} + 8u_\xi = 0 \tag{1.19}$$

Chú ý 4. *Ta có thể giải phương trình* (1.19) *bằng cách đặt* $v = u_\xi$, *ta có phương trình* $v_\eta + 2v = 0$, *suy ra* $\ln|v| = -2\eta + C_1$. *Từ đó suy ra* $v = e^{-2\eta}C(\xi)$ *và do đó*

$$u_\xi = e^{-2\eta}\int C(\xi)\, d\xi + \varphi(\eta),$$

ở đó $C(\xi)$ *là hàm tùy ý chỉ phụ thuộc vào* ξ *còn* $\varphi(\eta)$ *là hàm túy ý chỉ phụ thuộc vào* η.

Bài tập:

Bài 1: Đưa các phương trình sau về dạng chính tắc

1) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + F_1(u, u_x, u_y) = 0$.

2) $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$.

3) $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0.$

4) $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u = 0.$

5) $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0.$

Bài 2: Quy các phương trình sau về dạng chính tắc, trong mỗi miền mà dạng của nó được bảo tồn

1) $(1 + x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)u_x = 0.$

2) $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0.$

1.3 Trường hợp nhiều biến số

1.3.1 Nhắc lại kết quả về đại số

Xét dạng toàn phương

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad \text{với } a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}. \tag{1.20}$$

Do ma trận $A = (a_{ij})$ là ma trận đối xứng cấp n nên có thể chéo hóa trực giao, tức là tồn tại một ma trận T không suy biến sao cho:

$$T'AT = B \tag{1.21}$$

với B là ma trận chéo (có dạng đường chéo). Số các phần tử dương, số các phần tử âm, số các phần tử bằng không trên đường chéo của B là một bất biến, không phụ thuộc vào ma trận T, nghĩa là không phụ thuộc vào phép đổi biến số

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} y_k, \quad T = (t_{ik}). \tag{1.22}$$

Cụ thể là số các phần tử dương, số các phần tử âm, số các phần tử bằng 0 trên đường chéo của B lần lượt bằng số các nghiệm dương, số các nghiệm âm, số các nghiệm bằng 0 của phương trình đặc trưng $\det(A - \lambda E) = 0$, E là ma trận đơn vị.

Với phép đổi biến (1.22), dạng toàn phương (1.20) được đưa về dạng chính tắc

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^* y_i^2, \tag{1.23}$$

a_i^* là nghiệm của phương trình $det(A - \lambda E) = 0$.
Nếu dùng phép đổi biến thích hợp ta có thể đưa dạng (1.23) về dạng

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^* z_i^2, \tag{1.24}$$

trong đó các $b_i^* = \pm 1$, nếu $a_i^* > 0$ thì $b_i^* = 1$, nếu $a_i^* < 0$ thì $b_i^* = -1$, nếu $a_i^* = 0$ thì $b_i^* = 0$.

1.3.2 Phân loại phương trình tuyến tính cấp 2

Xét phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + F(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}) = 0, \tag{1.25}$$

trong đó

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Lấy điểm $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ cố định trong Ω. Ma trận $A = (a_{ij}(x^0))$ là ma trận hằng đối xứng cấp n.
Xét phương trình đặc trưng

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad \text{với } E \text{ là ma trận đơn vị.} \tag{1.26}$$

Định nghĩa 3. *a) Phương trình* (1.25) *gọi là thuộc loại elliptic tại điểm* x^0 *nếu như tất cả n nghiệm của phương trình đặc trưng* (1.26) *đều khác không và cùng dấu. (Khi đó dạng toàn phương* $\sum a_{ij}(x^0) t_i t_j$ *là xác định dương hay âm).*
b) Phương trình (1.25) *gọi là thuộc loại hyperbolic tại điểm* x^0 *nếu như tất cả n nghiệm của phương trình đặc trưng* (1.26) *đều khác không và có* $(n-1)$ *nghiệm cùng dấu, còn nghiệm cuối cùng còn lại khác dấu.*
c) Phương trình (1.25) *gọi là thuộc loại parabolic tại điểm* x^0 *nếu như trong n nghiệm của phương trình đặc trưng* (1.26) *có một nghiệm bằng 0, còn* $(n-1)$ *nghiệm còn lại khác không và có cùng một dấu.*

Tương tự như đối với phương trình tuyến tính cấp 2 hai biến ta cũng có khái niệm phương trình thuộc loại elliptic, hyperbolic, parabolic trong miền Ω. Liên hệ với phương trình tuyến tính cấp 2 hai biến

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Xét phương trình đặc trưng $det(A - \lambda E) = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a(x_0, y_0) & b(x_0, y_0) \\ b(x_0, y_0) & c(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \quad (x_0, y_0) \in \Omega.$$

Phương trình trên tương đương với $\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$, có $\Delta = (a + c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$.
Chú ý: Khi $a = c, b = 0$ (khi đó $b^2 - ac < 0$) thì phương trình thuộc loại elliptic. Do vậy ta chỉ xét với $\Delta > 0$.
+) Khi $b^2 - ac < 0$ thì phương trình đặc trưng có hai nghiệm cùng dấu nên phương trình thuộc loại elliptic.
+) Khi $b^2 - ac > 0$ thì phương trình đặc trưng có hai nghiệm trái dấu nên phương trình thuộc loại hyperbolic.
+) Khi $b^2 - ac = 0$ thì phương trình đặc trưng có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm khác không, vì không xảy ra $(a + c) = 0$. Do đó phương trình thuộc loại parabolic.

1.4 Khái niệm về mặt đặc trưng

1.4.1 Khái niệm về mặt đặc trưng

Ta xét phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \Phi(x, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}) = 0. \tag{1.27}$$

Tương ứng với nó, ta xét phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\omega_{x_i}\omega_{x_j} = 0. \tag{1.28}$$

Phương trình (1.28) được gọi là phương trình các mặt đặc trưng (khi $n = 2$ được gọi là phương trình các đường đặc trưng) của phương trình (1.27).
Mặt S nào đó có phương trình $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ được gọi là mặt đặc trưng của phương trình (1.27) nếu như trên mặt S hàm $\omega(x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm của phương trình (1.28) và $\sum_{i=1}^{n} \omega_{x_i}^2 \neq 0$.
Rõ ràng rằng $\omega(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một nghiệm của phương trình (1.28) thì họ các mặt cong xác định bởi phương trình $\omega = C$, C là hằng số tùy ý, là họ các đường ($n = 2$), họ các mặt ($n \geq 3$) đặc trưng của phương trình (1.27).

Vectơ $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \neq 0$ được gọi là vectơ có hướng đặc trưng của phương trình (1.28) nếu ta có $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = 0$.
Do vậy mặt cong S (không có điểm kỳ dị, nghĩa là tại mọi điểm $x \in S$ nó đều có vectơ pháp tuyến $n(x) \neq 0$) là mặt đặc trưng của phương trình (1.27) nếu như tại mọi điểm $x \in S$, vectơ pháp tuyến $n(x)$ có hướng đặc trưng.

Bây giờ ta mô tả một số mặt đặc trưng của một vài phương trình quen thuộc. Xét phương trình (1.27) trong một miền Ω nào đó.

a) Giả sử phương trình (1.27) thuộc loại elliptic trong miền Ω. Khi đó, dạng toàn phương $\sum a_{ij}(x)t_it_j$ là xác định dương (hoặc âm), nên $\sum a_{ij}(x)t_it_j = 0$ chỉ xảy ra khi $t_1 = t_2 = ... = t_n = 0$. Vậy phương trình (1.28) không xác định một mặt đặc trưng nào. Ta nói rằng phương trình thuộc loại elliptic không có mặt đặc trưng thực.

b) Xét phương trình (1.27) ($n = 2$), thuộc loại hyperbolic. Khi đó, phương trình đặc trưng có dạng $a(\omega_x)^2 + 2b\omega_x\omega_y + c(\omega_y)^2 = 0$.

Giả sử $z = \varphi(x, y)$ là hàm nghiệm, thì các đường cong $\varphi(x, y) = C$ là các đường đặc trưng. (Do phương trình $at^2 + 2bt + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt). Chẳng hạn, phương trình có dạng $u_{tt} = a^2u_{xx} + F(x, t, u, u_x, u_y) = 0$, $(a > 0)$. Phương trình đặc trưng của nó là $(\omega_t)^2 - a^2(\omega_x)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_t = \pm a\omega_x$, suy ra phương trình này xác định các mặt đặc trưng dạng $t = \pm Ax + C$, C là hằng số, $A = a$ hay $A = \dfrac{1}{a}$.

c) Xét phương trình (1.27), (khi $n = 3$) thuộc loại hyperbolic, ví dụ $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $(a > 0)$. Phương trình các mặt đặc trưng của nó là

$$(\omega_t)^2 - a^2[(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2] = 0.$$

Dễ dàng thấy rằng $\omega(x, t) = t \pm \dfrac{1}{a}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ là nghiệm của phương trình này. Do đó các mặt cong xác định bởi

$$t \pm \frac{1}{a}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = C, \quad C \text{ là hằng số},$$

là các mặt đặc trưng. Lấy $C = t_0$, ta viết phương trình này dưới dạng

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - a(t - t_0)^2 = 0.$$

Đây là phương trình mặt nón tròn xoay có đỉnh (x_0, y_0, t_0) và trục song song với Ot.

d) Xét phương trình (1.27), (khi $n = 2$), thuộc loại parabolic. Xét phương trình truyền nhiệt $u_t - a^2u_{xx} = 0, a > 0$. Phương trình đặc trưng của nó là $-a^2(\omega_x)^2 = 0$ hay $\omega_x = 0 \Rightarrow \omega(x, t) = g(t)$. Vậy họ các đường đặc trưng là họ các đường song song với Ox.

Ta có định lý quan trọng sau:

Định lý 1. *Các mặt đặc trưng bất biến qua phép đổi biến số (trơn, không suy biến).*

1.4.2 Bài toán Cauchy và bài toán Cauchy với dữ kiện cho trên các mặt đặc trưng

Xét phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + F(x_1, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}) = 0. \tag{1.29}$$

Trong không gian $(x_1, x_2, ..., x_n)$ cho mặt S nào đó trơn. Tại mỗi điểm $x \in S$ ta xét một hướng λ nào đó không tiếp xúc với S. Bài toán Cauchy của phương trình (1.29) là bài toán sau:
Trong lân cận của mặt S, tìm một nghiệm của phương trình (1.29) thỏa mãn điều kiện

$$u|_S = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial r}|_S = \psi(x), \tag{1.30}$$

trong đó $\varphi(x)$, $\psi(x)$ là những hàm tùy ý cho trên mặt S. Ta giả thiết $\psi(x)$ là hàm liên tục còn $\varphi(x)$ là một hàm khả vi liên tục trên S.
Các hàm $\varphi(x)$, $\psi(x)$ gọi là các dữ kiện Cauchy, còn S gọi là mặt mang dữ kiện Cauchy. Ta có hai kết quả quan trọng sau:

Định lý 2. *Biết dữ kiện Cauchy, có thể tìm được các đạo hàm riêng cấp 1 của nghiệm trên mặt Cauchy.*

Định lý 3. *Trên mặt đặc trưng, các dữ kiện Cauchy phụ thuộc lẫn nhau. (Khi S là mặt đặc trưng thì $\varphi(x)$, $\psi(x)$ không được cho tùy ý).*

Ví dụ 1: Bài toán sau là bài toán Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} = au_{xx} + f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi_0(x) \\ u_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad t, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Đường thẳng $t = 0$ (hay trục Ox) đóng vai trò là mặt Cauchy, nhưng không là mặt đặc trưng. Do vậy $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ có thể cho tùy ý.
Ví dụ 2: Bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân thường

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases}$$

Các dữ kiện Cauchy y_0, y_1 cho túy ý.

Bài toán Cauchy đối với phương trình cấp 2

Giả sử

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad x_n = t, \quad x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}).$$

$t = t_0$ là siêu phẳng trong $\mathbb{R}^{n-1}$. Trong miền $\mathbb{R}^{n-1} \times (t_0, +\infty)$, xét phương trình

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x)$$

với các điều kiện ban đầu: $u(x, t_0) = \varphi(x)$, $u_t(x, t_0) = \varphi_1(x)$.

Định lý 4 (Định lý Cauchy-Kowalevski)**.** *Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*
a) Các hàm $a_\alpha(x)$, $f(x)$ giải tích trong lân cận điểm $P(x'_0, t_0)$, $x'_0 = (x^0_1, ..., x^0_{n-1})$.
b) $\varphi(x)$ và $\psi(x)$ là các hàm giải tích trong lân cận của điểm x'_0 trong $\mathbb{R}^{n-1}$.
Khi đó bài toán có duy nhất nghiệm giải tích trong lân cận của điểm $P(x'_0, t_0)$.

1.5 Ba loại phương trình vật lý toán cơ bản. Bài toán đặt chỉnh

1.5.1 Ba loại phương trình cơ bản

Phương trình Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0$$

Phương trình Laplace xuất hiện trong nhiều bài toán vật lý. Giả sử U là miền thuộc $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{F}$ là một trường vectơ xác định trên U, thỏa mãn điều kiện: Nếu $\Omega \subset U$ là một tập con bất kỳ, có biên $\partial\Omega$ trơn ($\partial\Omega$ là mặt kín) thì thông lượng của $\overrightarrow{F}$ đi qua $\partial\Omega$ bị triệt tiêu, nghĩa là ta có $\int\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}\overrightarrow{n}\, ds = 0$, $\overrightarrow{n}$ là vectơ pháp tuyến đơn vị phía ngoài.
Theo định lý Gauss-Green, ta có

$$\int_\Omega div\overrightarrow{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F}\overrightarrow{n}\, ds = 0,$$

do đó $div\overrightarrow{F} = 0$ trong Ω. Do Ω bất kỳ nên $div\overrightarrow{F} = 0$ trong U. Trong một số bài toán vật lý ta thường giải thiết $\overrightarrow{F}$ tỷ lệ với chiều ngược lại của $\overrightarrow{gradDu}$ với

u là một hàm số nào đó, nghĩa là $\overrightarrow{F} = -aDu, (a > 0)$. Thay nó vào $div\overrightarrow{F} = 0$ ta nhận được phương trình Laplace

$$div(Du) = \Delta u = 0.$$

Phương trình Laplace được Laplace đưa ra vào khoảng năm 1780.

Phương trình Poisson

$$-\Delta u = f.$$

Phương trình truyền nhiệt

Phương trình truyền nhiệt thuần nhất $u_t - \Delta u = 0$. (phương trình này được Fourier đưa ra vào khoảng 1810-1822). Phương trình truyền nhiệt không thuần nhất $u_t - \Delta u = f$ hay

$$\begin{aligned}
&u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t),\\
&u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t),\\
&u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x,y,z,t).
\end{aligned}$$

Ý nghĩa vật lý Phương trình truyền nhiệt là một phương trình khuyết tán mô tả mật độ u của các đại lượng vật lý như nhiệt, nồng độ hóa chất, ... Nếu $V \subset U$ là một miền con bất kỳ có biên ∂V trơn, tốc độ sự thay đổi tổng đại lượng trong V bằng thông lượng đi qua V (với dấu ngược lại),

$$\frac{d}{dt}\int_V u\,dx = -\int_{\partial V} \overrightarrow{F}\overrightarrow{n}\,ds,$$

$\overrightarrow{F}$ là mật độ thông lượng. Do vậy, vì V bất kỳ, nên $u_t = -div\overrightarrow{F}$. Trong nhiều trương hợp $\overrightarrow{F} = -aDu$ và do đó ta có phương trình

$$u_t = adiv(Du) = a\Delta u.$$

Phương trình truyền sóng

Phương trình thuần nhất: $u_{tt} - \Delta u = 0$. (phương trình này được Dalambert đưa ra vào năm 1752). Phương trình không thuần nhất: $u_{tt} - \Delta u = f$ hay

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\\
&u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t),\\
&u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x,y,z,t).
\end{aligned}$$

Ý nghĩa vật lý: Mô hình truyền sóng là mô hình đơn giản hóa của sự dao động của dây (1 chiều), của màng mỏng (2 chiều) và của vật rắn đàn hồi (3 chiều). Trong những hiện tượng nói trên, $u(x,t)$ là độ lệch so với trạng thái cân bằng theo một hướng nào đó của điểm x tại thời gian t.
Cho V là một miền con của U có biên ∂V trơn. Gia tốc trong V khi đó là

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_V u\,dx = \int_V u_{tt}\,dx,$$

và lực tiếp xúc là $-\int_{\partial V}\overrightarrow{F}\overrightarrow{n}\,ds$. Trong đó $\overrightarrow{F}$ là lực tác động trên V qua ∂V với mật độ khối lượng bằng đơn vị. Định luật Newton khẳng định gia tốc bằng lực tiếp xúc

$$\int_V u_{tt}\,dx = -\int_{\partial V}\overrightarrow{F}\overrightarrow{n}\,ds.$$

Đồng nhất thức này đúng với mọi miền con $V \subset U$ và do vậy $u_{tt} = -div\overrightarrow{F}$. Đối với vật đàn hồi, $\overrightarrow{F}$ là hàm của Du, cho nên $u_{tt} + div\overrightarrow{F}(Du) = 0$. Với Du khá nhỏ, ta thường lấy $\overrightarrow{F}(Du) \approx -aDu$, và do vậy ta có $u_{tt} - a\Delta u = 0$.

Chú ý: Trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng cấp 1 ta còn gặp phương trình cơ bản $u_t + bDu = 0$, phương trình này gọi là phương trình chuyển dịch tuyến tính.

1.5.2 Các dạng bài toán có điều kiện biên, điều kiện ban đầu

Tất cả các phương trình nêu ở phần trên đều có vô số nghiệm. Do vậy để phương trình có nghiệm duy nhất, ta phải cho thêm một số các điều kiện.

Ví dụ 1: Bài toán Cauchy đối với phương trình truyền nhiệt:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \end{cases}$$

Điều kiện $u(x,0) = \varphi(x)$ gọi là điều kiện ban đầu (hay dữ kiện Cauchy) - chỉ cần một điều kiện ban đầu.

Ví dụ 2: Bài toán Cauchy đối với phương trình truyền sóng

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

Cần hai điều kiện ban đầu.

Ví dụ 3:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \end{cases}$$

gọi là bài toán biên. Điều kiện $u|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ gọi là điều kiện biên.

Ví dụ 4: Bài toán Cauchy đối với phương trình elliptic

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_y(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Ví dụ 5: Bài toán biên ban đầu hỗn hợp

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \\ u|_{S_T = \partial\Omega \times (0,T)} = 0. \end{cases}$$

1.5.3 Bài toán đặt chỉnh

Trên thực tế rất nhiều vấn đề dẫn đến các bài toán của phương trình vật lý toán. Chẳng hạn cần phải xác định các hệ số của phương trình, cần tìm nghiệm của phương trình mà các điều kiện ban đầu hoặc biên chỉ xác định được do đo đạc hoặc tính toán qua thực nghiệm. Câu hỏi đặt ra là nó ảnh hưởng như thế nào đến sai số của nghiệm, khi nào thì nghiệm tồn tại và duy nhất.

Một bài toán được gọi là đặt chỉnh nếu như

+) Nó tồn tại nghiệm và duy nhất nghiệm

+) Nghiệm phụ thuộc liên tục vào các dữ kiện đã cho của bài toán: Các dữ kiện ban đầu, dữ kiện biên, vế phải, các hệ số của phương trình.

J.S.Hadamard (1865-1963) là người đầu tiên đề xuất khái niệm về bài toán đặt chỉnh (bài toán đặt đúng). Ông đã đưa ra ví dụ sau:

Xét bài toán Cauchy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u(x, 0) = \frac{1}{n}\cos nx, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad 0 < y < \delta.$$

Dễ dàng thấy rằng $u(x, y) = \frac{1}{n}\cos nx.\text{ch}ny$ là nghiệm của bài toán. Đồng thời dễ dàng thấy rằng $u^*(x, y) = 0$ là nghiệm của bài toán

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad 0 < y < \delta.$$

Khi $n \to +\infty$ ta có $\frac{1}{n}\cos nx \to 0$. Nhưng

$$\max|u(x,y) - u^*(x,y)| = \max|\frac{1}{n}\cos nx.\mathrm{ch}ny| = \frac{\mathrm{ch}n\delta}{n} \to \infty.$$

Chương 2

Phương trình truyền sóng

2.1 Phương trình dao động của dây, của màng

Xét một sợi dây mảnh, có độ dài ℓ, căng và gắn chặt ở hai đầu mút. Giả sử sợi dây rất dẻo, do đó lực căng T tại mỗi điểm của sợi dây đều hướng theo đường tiếp tuyến với sợi dây tại điểm ấy. Ta giả thiết rằng sợi dây đàn hồi và tuân theo định luật Hooke: số gia của lực căng tỷ lệ với số gia của chiều dài sợi dây.

Giả sử lúc nằm yên sợi dây ở trên đoạn $[0, \ell]$ của trục x. Ta kéo nhẹ sợi dây ra khỏi vị trí cân bằng một chút ít rồi nhẹ nhàng buông ra. Ta xét các dao động ngang của sợi dây: trong quá trình dao động sợi dây luôn luôn nằm trong cùng một mặt phẳng, mỗi điểm của sợi dây đều di chuyển vuông góc với trục x. Độ lệch u đối với vị trí cân bằng của điểm có hoành độ x trên sợi dây ở thời điểm t là một hàm phụ thuộc vào x và t. Với t cố định, đồ thị của hàm $u(x, t)$ cho ta dạng của sợi dây ở thời điểm t, còn đạo hàm riêng $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ cho ta hệ số góc của tiếp tuyến với sợi dây tại điểm có hoành độ x (vẽ hình). Với x cố định, hàm $u(x, t)$ cho ta quy luật chuyển động, $\frac{\partial u}{\partial t}$ cho ta vận tốc, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ cho ta gia tốc của điểm trên sợi dây có hoành độ x.

Ta sẽ chỉ xét những dao động nhỏ của sợi dây, do đó có thể xem

$$1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 1.$$

Lấy một đoạn tùy ý M_1M_2 của sợi dây, chiều dài của đoạn dây ấy ở thời điểm t bằng

$$\widehat{M_1M_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dt \approx x_2 - x_1,$$

trong đó x_1, x_2 theo thứ tự là hoành độ của các điểm M_1, M_2.

Vậy khi sợi dây dao động nhỏ, chiều dài của mỗi đoạn dây đều không đổi, do đó theo định luật Hooke, lực căng T ở mỗi điểm x không đổi theo thời gian. ta sẽ chứng minh rằng lực căng ấy cũng không phụ thuộc vào x, do đó T là một hằng số. Thật vậy, trên đoạn dây M_1M_2 có các lực căng tại hai điểm M_1, M_2 hướng theo tiếp tuyến với sợi dây tại hai điểm ấy, ngoại lực và lực quán tính tác dụng. Hình chiếu trên trục x của tổng các lực ấy phải bằng không. Vì ta xét những chuyển động ngang, nên lực quán tính và ngoại lực song song với trục u (vuông góc với trục x), do đó ta có

$$T(x_2)\cos\alpha(x_2) - T(x_1)\cos\alpha(x_1) = 0,$$

trong đó $\alpha(x)$ là góc giữa tiếp tuyến của sợi dây tại điểm có hoành độ x ở thời điểm t với trục x. Với giả thiết chỉ xét các dao động nhỏ, nên

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1.$$

Do đó $T(x_2) \approx T(x_1)$. Vì x_1 và x_2 là hai điểm bất bỳ trên sợi dây nên T không phụ thuộc vào x.

Bây giờ ta thành lập phương trình mà hàm $u(x,t)$ phải thỏa mãn. Lấy một đoạn tùy ý M_1M_2 của sợi dây ở thời điểm t ứng với $x_1 \le x \le x_2$.
Hình chiếu trên trục u của tổng các lực căng của sợi dây tại M_1, M_2 bằng

$$T[\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)].$$

Nhưng

$$\sin\alpha(x) = \frac{\tan\alpha(x)}{\sqrt{1+\tan^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Do đó,

$$T[\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)] = T\left[\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_1}\right] = T\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx. \tag{2.1}$$

Gọi $p(x,t)$ là ngoại lực tác dụng theo hướng song song với trục u lên một đơn vị độ dài của sợi dây chứa điểm x ở thời điểm t. Hình chiếu trên trục u của ngoại lực tác dụng lên đoạn dây M_1M_2 là

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x,t)\,dx. \tag{2.2}$$

Gọi $\rho(x)$ là mật độ dài của sợi dây. Lực quán tính tác dụng lên đoạn dây M_1M_2 cũng song song với trục u. Hình chiếu lên trục u của lực ấy là

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dx. \tag{2.3}$$

Hình chiếu trên trục u của tổng của các lực tác dụng lên đoạn dây ấy phải bằng không. Do đó, từ (2.1), (2.2) và (2.3), ta có

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx = 0. \tag{2.4}$$

Vì x_1, x_2 là hai điểm lấy tùy ý trên sợi dây nên ta có tại mỗi điểm x của sợi dây ở thời điểm t

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t)$$

hay

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t) \tag{2.5}$$

trong đó $a^2 = \frac{T}{\rho}$, $g = \frac{p}{\rho}$. Phương trình (2.5) gọi là phương trình dao động của dây. Nếu sợi dây đồng chất thì ρ là một hằng số, do đó hệ số a^2 cũng là hằng số. Nếu không có ngoại lực tác dụng vào sợi dây thì $p(x,t) = 0$ và phương trình trở thành

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.6}$$

Đó là phương trình thuần nhất mô tả dao động tự do của sợi dây không chịu tác dụng của ngoại lực. Còn phương trình (2.5), trong đó $g(x,t) \neq 0$ mô tả dao động cưỡng bức của sợi dây.

Cũng như khi xét các dao động tự do của dây, nếu xét các dao động tự do của màng, thì độ lệch $u(x,y,t)$ tại điểm (x,y) của màng ở thời điểm t thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{2.7}$$

Phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2.8}$$

gọi là phương trình truyền sóng trong không gian ba chiều.

2.2 Bài toán biên ban đầu (Bài toán hỗn hợp)

Trong không gian $\mathbb{R}^n$ cho miền Ω bị chặn. Trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$ xét hình trụ $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$. Ký hiệu $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ với $\partial\Omega$ là biên của Ω, là mặt xung quanh của hình trụ. Miền Ω xem như là đáy dưới của hình trụ. Đáy trên của hình trụ là $\Omega_T = \{(x,T) \colon x \in \Omega\}$.

Trong hình trụ Q_T ta xét bài toán hỗn hợp sau

$$u_{tt} = a^2\Delta u, \tag{2.9}$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \tag{2.10}$$

$$u_t(x,0) = \varphi_1(x), \tag{2.11}$$

$$u|_{S_T} = 0 \quad \text{hoặc} \quad \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}|_{S_T} = 0, \tag{2.12}$$

với $\overrightarrow{n}$ là vectơ pháp tuyến ngoài. Giả thiết $\varphi_0 \in C^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in C(\Omega)$. (vẽ hình minh họa)

2.2.1 Định luật bảo toàn năng lượng

Nhân cả hai vế của phương trình (2.9) với $2u_t$ sau đó lấy tích phân cả hai vế theo x và t trong miền $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $0 \le \tau \le T$, ta nhận được

$$\int\limits_{Q_\tau} 2u_{tt}u_t\,dx\,dt = a^2 \int\limits_{Q_\tau} 2\Delta u.u_t\,dx\,dt. \tag{2.13}$$

Vế trái của (2.13) bằng

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_\tau} (u_t)_t^2\,dx\,dt &= \int\limits_{\Omega}\left[\int\limits_0^\tau (u_t)_t^2\,dt\right]dx = \int\limits_{\Omega_\tau}[u_t(x,\tau)]^2\,dx - \int\limits_{\Omega}[u_t(x,0)]^2\,dx \\ &= \int\limits_{\Omega_\tau}[u_t(x,\tau)]^2\,dx - \int\limits_{\Omega}\varphi_1^2(x)\,dx,\end{aligned}$$

với Ω_τ là đáy trên của hình trụ $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$.
Biến đổi vế phải, sử dụng công thức Oxtrôgorátxki

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

với S là mặt kín, có hướng ra ngoài, $\overrightarrow{n}$ là vectơ pháp tuyến ngoài của S, Ω là miền giới hạn bởi S.
Chú ý $dxdy = \cos(\overrightarrow{n}, Oz)dS$, $dydz = \cos(\overrightarrow{n}, Ox)dS$, $dzdx = \cos(\overrightarrow{n}, Oy)dS$.
Trong không gian nhiều chiều ta cũng có công thức tương tự. Như vậy ta có

$$\int\limits_\Omega u_{x_i}.v\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} uv\cos(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}_i)\,dS - \int\limits_\Omega u.v_{x_i}\,dx.$$

Biến đổi vế phải của (2.13) ta có

$$a^2 \iint\limits_{Q_\tau} 2\Delta u.u_t\, dx\, dt = a^2 \iint\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} 2u_{x_i x_i}.u_t\, dx\, dt$$
$$= a^2 \int\limits_{\partial Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} 2u_{x_i}.u_t.\cos(\overrightarrow{n}, Ox_i)\, dS - a^2 \iint\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} 2u_{x_i}.u_{x_i t}\, dx\, dt,$$

với $\partial Q_\tau = S_\tau \cup \Omega \cup \Omega_\tau$. Các vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}$ của đáy trên Ω_τ và đáy dưới Ω vuông góc với các trục Ox_i, do đó $\cos(\overrightarrow{n}, Ox_i) = 0$. Vậy

$$a^2 \int\limits_{\partial Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} 2u_{x_i}.u_t.\cos(\overrightarrow{n}, Ox_i)\, dS = a^2 \int\limits_{S_\tau} \sum_{i=1}^{n} 2u_{x_i}.u_t.\cos(\overrightarrow{n}, Ox_i)\, dS.$$

Do $u|_{S_T} = 0$ nên $u_t|_{S_T} = 0$ (ở đây ta hiểu $u_t|_{S_T} = \lim\limits_{t' \to t} \dfrac{u(x,t') - u(x,t)}{t' - t}$, $(x,t'), (x,t) \in S_T$). Vậy $u_t|_{S_\tau} = 0$, còn $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i} \cos(\overrightarrow{n}, Ox_i)$.
Do đó từ điều kiện (2.12) suy ra

$$a^2 \int\limits_{S_\tau} \sum_{i=1}^{n} 2u_{x_i}.u_t.\cos(\overrightarrow{n}, Ox_i)\, dS = 0.$$

Vậy vế phải của (2.13) bằng

$$-a^2 \iint\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} 2u_{x_i} u_{x_i t}\, dx\, dt = -a^2 \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{Q_\tau} (u_{x_i})_t^2\, dx\, dt$$
$$= a^2 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2(x,0)\, dx - a^2 \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2(x,\tau)\, dx$$
$$= a^2 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{0x_i}^2(x,0)\, dx - a^2 \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2(x,\tau)\, dx.$$

Vậy từ (2.13) ta có

$$a^2 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{0x_i}^2(x)\, dx - a^2 \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2(x,\tau)\, dx = \int\limits_{\Omega_\tau} u_t^2(x,\tau)\, dx - \int\limits_{\Omega} \varphi_1^2(x)\, dx$$

hay

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[u_t^2(x,\tau) + a^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2(x,\tau) \right] dx = \int\limits_{\Omega} \left[\varphi_1^2(x) + a^2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_{0x_i}^2(x) \right] dx. \quad (2.14)$$

Đẳng thức (2.14) phản ánh quy luật là: Năng lượng ở thời điểm $t = 0$ cũng bằng năng lượng ở thời điểm $t = \tau$, $0 < \tau \le T$. Quy luật này gọi là định luật bảo toàn năng lượng hay đẳng thức năng lượng.

2.2.2 Tính duy nhất nghiệm

Định lý 5. *Nghiệm của bài toán* (2.9)-(2.12) *(nếu có) là duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử bài toán (2.9)-(2.12) có 2 nghiệm là u_1, u_2. Đặt $u = u_1 - u_2$. Khi đó dễ dàng thấy rằng u là nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u, \\ u(x,0) &= 0, \\ u_t(x,0) &= 0, \\ u|_{S_T} &= 0 \quad \text{hoặc} \quad \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}|_{S_T} = 0. \end{aligned}$$

Theo đẳng thức năng lượng (2.14) ta có

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[u_t^2(x,\tau) + a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,\tau) \right] dx = 0,$$

do vậy $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\tau) = 0$ và $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x,\tau) = 0$ trên Ω_τ. Vậy $u(x,t) = constant$ trên Ω_τ với mọi $0 \le \tau \le T$. Do đó $u(x,t)$ là hằng số trong Q_T, ta có $u(x,0) = 0$ nên $u = 0$ trong Q_T, do vậy $u_1 = u_2$ trong Q_T. Do đó bài toán (2.9)-(2.12) có nghiệm duy nhất. □

2.2.3 Đánh giá tiên nghiệm. Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu

Theo công thức Newton-Leibnitz ta có

$$u(x,t) = \varphi_0(x) + \int\limits_0^t \frac{\partial u}{\partial t}\, dt.$$

Vậy

$$u^2(x,t) \le 2\varphi_0^2(x) + 2 \left(\int\limits_0^t \frac{\partial u}{\partial t}\, dt \right)^2.$$

Từ đó suy ra

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^2\, dt \le 2 \int\limits_{\Omega_\tau} \varphi_0^2(x)\, dx + 2 \int\limits_0^t 1^2\, dt \int\limits_{Q_\tau} u_t^2\, dx\, dt \le 2 \int\limits_{\Omega_\tau} \varphi_0^2(x)\, dx + 2\tau \int\limits_{Q_\tau} u_t^2\, dx\, dt.$$

Lấy tích phân cả hai vế của đẳng thức năng lượng (2.14) theo biến t trên đoạn $[0, \tau]$ ta được

$$\iint\limits_{Q_\tau} \left(u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \right) dx\, dt = \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \left(\varphi_1^2 + a^2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_{0x_i}^2 \right) dx\, dt$$
$$= \tau \int\limits_\Omega \left(\varphi_1^2 + a^2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_{0x_i}^2 \right) dx. \quad (2.15)$$

Do đó

$$\iint\limits_{Q_\tau} u^2(x,t)\, dx\, dt \le C \int\limits_\Omega \left(\varphi_0^2 + \varphi_1^2 + a^2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_{0x_i}^2 \right) dx \quad (2.16)$$

hay

$$||u||^2_{L_2(Q_\tau)} \le C \left(||\varphi_0||^2_{H^1(\Omega)} + ||\varphi_1||^2_{L_2(\Omega)} \right),$$

C là một hằng số nào đó không phụ thuộc vào u, φ_0, φ_1.
Ý nghĩa: Đánh giá được nghiệm qua các dữ kiện đã cho của bài toán.

2.3 Bài toán Cauchy. Công thức Kirchoff

Ký hiệu $Q_T = \mathbb{R}^3 \times (0,T)$ với T là một số dương nào đó. Chúng ta xét bài toán sau

Bài toán Cauchy: Trong miền Q_T, tìm nghiệm của phương trình

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t) \quad (2.17)$$

thỏa mãn các điều kiện ban đầu

$$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z) \quad (2.18)$$
$$u_t(x,y,z,0) = \psi(x,y,z), \quad (2.19)$$

với $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in C^{2,0}(Q_T)$, $a > 0$.
Để giải bài toán này, ta lần lượt giải các bài toán phụ sau:
Bài toán 1: Trong miền Q_T, tìm hàm $u(x,y,z,t)$ thỏa mãn

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad (2.20)$$
$$u(x,y,z,0) = 0, \quad (2.21)$$
$$u_t(x,y,z,0) = \psi(x,y,z), \quad (2.22)$$

với $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $a > 0$.

Định lý 6. *Nghiệm của bài toán* (2.20)-(2.22) *có dạng*

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{S_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{t}\, dS, \tag{2.23}$$

trong đó, S_{at} là mặt cầu tâm (x,y,z) bán kính at.

Chứng minh. Dùng phép đổi biến không suy biến $\xi = x + \alpha at$, $\eta = y + \beta at$, $\zeta = z + \gamma at$. Khi đó mặt cầu S_{at} biến thành mặt cầu đơn vị S_1, tâm tại gốc tọa độ trong không gian $O\alpha\beta\gamma$. Công thức (2.23) có dạng

$$u(x,y,z,t) = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_1} \psi(x+\alpha at, y+\beta at, z+\gamma at)\, dS_1, \tag{2.24}$$

với $dS = (at)^2 dS_1$.
Do hàm ψ liên tục, nên theo định lý giá trị trung bình tích phân,ta có

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\psi(\xi^*,\eta^*,\zeta^*)|S_{at}| = t\psi(\xi^*,\eta^*,\zeta^*)$$

trong đó $(\xi^*,\eta^*,\zeta^*) \in S_{at}$, $|S_{at}| = 4\pi a^2 t^2$ là diện tích của mặt cầu S_{at}.
Do tính liên tục của hàm ψ, nên khi $t \to 0$, $\psi(\xi^*,\eta^*,\zeta^*)$ giới nội. Vậy ta suy ra $\lim\limits_{t\to 0} u(x,y,z,t) = 0$. Như vậy điều kiện (2.21) được thỏa mãn.
Để kiểm tra điều kiện (2.22) ta sử dụng dạng (2.24) của $u(x,y,z,t)$. Lấy đạo hàm cả hai vế của (2.24) theo t ta nhận được: □

Bài toán 2: Trong miền Q_T, tìm hàm $v(x,y,z,t)$ thỏa mãn

$$v_{tt} = a^2 \Delta v, \tag{2.25}$$

$$v(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), \tag{2.26}$$

$$v_t(x,y,z,0) = 0. \tag{2.27}$$

Định lý 7. *Giả sử v_φ là nghiệm của bài toán 1, với vế phải của* (2.22) *là hàm $\varphi(x,y,z)$, thì nghiệm của bài toán 2 là*

$$v(x,y,z,t) = \frac{\partial v_\varphi}{\partial t}.$$

Chứng minh. Từ phương trình

$$(v_\varphi)_{tt} = a^2\left[(v_\varphi)_{xx} + (v_\varphi)_{yy} + (v_\varphi)_{zz}\right],$$

suy ra

$$\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}\right)_{tt} = a^2\left[\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}\right)_{xx} + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}\right)_{yy} + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}\right)_{zz}\right].$$

Do đó hàm $v(x, y, z, t)$ thỏa mãn phương trình (2.25). Ngoài ra,

$$\lim_{t\to 0} v(x, y, z, t) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial v_\varphi(x, y, z, t)}{\partial t} = (v_\varphi)_t(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z).$$

$$\frac{\partial v(x, y, z, 0)}{\partial t} = (v_\varphi)_{tt}|_{t=0} = a^2 \Delta v_\varphi|_{t=0} = 0,$$

vì từ $v_\varphi|_{t=0} = 0$ nên $\Delta v_\varphi|_{t=0} = 0$. □

Bài toán 3: Trong miền Q_T, tìm hàm $w(x, y, z, t)$ sao cho

$$w_{tt} = a^2 \Delta w + f(x, y, z, t), \quad (2.28)$$

$$w(x, y, z, 0) = 0, \quad (2.29)$$

$$w_t(x, y, z, 0) = 0. \quad (2.30)$$

Định lý 8 (Nguyên lý Duhamel). *Nếu $v(x, y, z, t, \tau)$ là nghiệm của bài toán*

$$v_{tt} = a^2 \Delta v, \quad (2.31)$$

$$v(x, y, z, 0, \tau) = 0, \quad (2.32)$$

$$v_t(x, y, z, 0, \tau) = f(x, y, z, \tau), \quad (2.33)$$

với mọi tham biến τ, thì hàm $w(x, y, z, t) = \int\limits_0^t v(x, y, z, t - \tau, \tau)\, d\tau$ là nghiệm của bài toán 3.

Bài toán (2.31)-(2.33) chính là bài toán 1. Nghiệm của bài toán này là

$$v(x, y, z, t, \tau) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{S_{at}} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{t}\, dS.$$

Do đó

$$w(x, y, z, t) = \int\limits_0^t v(x, y, z, t - \tau, \tau)\, d\tau = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{S_{a(t-\tau)}} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{t - \tau}\, dS$$

là nghiệm của bài toán 3. Thực hiện đổi biến số $r = a(t - \tau)$, ta có

$$w(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^{at} dr \iint\limits_{S_r} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r}\, dS = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint\limits_{V_{at}} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r}\, dV$$

trong đó V_{at} là hình cầu tâm (x, y, z) bán kính at.
Theo nguyên lý chồng nghiệm thì nghiệm của bài toán Cauchy là tổng các

nghiệm của các bài toán 1, 2, 3. Do đó, nghiệm của bài toán Cauchy là

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\iint\limits_{S_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{t}\,dS + \frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{S_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{t}\,dS\right)\right] + \frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{V_{at}} \frac{f(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a})}{r}\,dV. \quad (2.34)$$

Công thức (2.34) là **công thức Kirchoff** (Kiếcsop). Công thức này cho chúng ta nghiệm của bài toán Cauchy trong không gian ba chiều.

2.4 Công thức Poisson, công thức Dalembert

Công thức Kirchoff (2.34) cho ta công thức biểu diễn nghiệm của bài toán Cauchy trong không gian ba chiều. Trong không gian hai chiều và một chiều, ta có tương ứng các công thức Poisson và công thức Dalembert sau đây.

2.4.1 Công thức Poisson

Một cách tương tự như trên, ta có thể xây dựng công thức nghiệm của bài toán Cauchy trong mặt phẳng (không gian hai chiều)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2\Delta u = a^2(u_{xx}+u_{yy}),\\ u(x,y,0) &= \varphi(x,y),\\ u_t(x,y,0) &= \psi(x,y). \end{aligned}$$

Công thức Poisson

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{K_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta + \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{K_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta, \quad (2.35)$$

trong đó K_{at} là hình tròn tâm (x,y) bán kính at.

2.4.2 Công thức Dalembert

Xét bài toán Cauchy trên đường thẳng

$$u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad x\in(-\infty,\infty),\, t\in(0,T), \quad a>0, \quad (2.36)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (2.37)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x). \quad (2.38)$$

Nghiệm của bài toán này là

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi. \tag{2.39}$$

Công thức (2.39) được gọi là công thức Dalembert (D'Alembert).
Công thức Dalembert được xây dựng như sau. Trước hết, ta có phương trình đặc trưng

$$dx^2 - a^2dt^2 = 0 \quad \text{hay} \quad (x')^2 - a^2 = 0.$$

Suy ra $dx \pm adt = 0$. Nghiệm của phương trình đặc trưng là $x - at = c_1$, $x + at = c_2$ (đường cong tích phân tổng quát).
Đổi biến số

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at,$$

ta có

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi + u_\eta, \quad u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},\\ u_t &= a(u_\xi - u_\eta), \quad u_{tt} = a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}). \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình $u_{tt} = a^2u_{xx}$ trở thành

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Suy ra

$$u(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)\,d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

trong đó f_1, f_2 là các hàm bất kỳ, khả vi hai lần, hàm f_1 chỉ phụ thuộc vào ξ, f_2 chỉ phụ thuộc vào η. Trở lại bài toán cũ, ta thu được nghiệm tổng quát

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at). \tag{2.40}$$

Để xác định các hàm f_1, f_2, ta dựa vào các điều kiện (2.37) và (2.38).
Với $t = 0$, từ (2.37) và (2.40), ta có

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x). \tag{2.41}$$

Lấy đạo hàm cả hai vế của (2.40) theo t, ta nhận được

$$af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) \quad \text{hay} \quad f_1'(x) - f_2'(x) = \frac{1}{a}\psi(x),$$

và suy ra

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\xi)\,d\xi + c, \tag{2.42}$$

trong đó x_0, c là các hằng số. Từ (2.41), (2.42) suy ra

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{c}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi - \frac{c}{2}.$$

Hệ thức trên đúng với mọi $x \in (-\infty, +\infty)$. Thay x bởi $x + at$ trong biểu thức hàm của $f_1(x)$ và $x - at$ trong biểu thức của hàm $f_2(x)$, từ (2.40) ta có công thức nghiệm

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi.$$

Như vậy bài toán Cauchy (2.36)-(2.38) có duy nhất nghiệm. Muốn cho hàm u khả vi liên tục hai lần, phải giả thiết rằng hàm φ khả vi liên tục hai lần và hàm ψ khả vi liên tục một lần.
Ngoài ra, từ công thức Dalembert (2.39), ta còn có thể chứng minh rằng nghiệm của bài toán Cauchy phụ thuộc liên tục vào các điều kiện ban đầu (chứng minh điều này xem như một bài tập). Như vậy bài toán Cauchy đặt chỉnh.

Chú ý 5. *Nếu ta giải bài toán Cauchy với các điều kiện ban đầu*

$$u(x,\tau) = \varphi(x), \quad u_t(x,\tau) = \psi(x),$$

(thời điểm ban đầu là τ với $\tau < t$), ta sẽ được công thức nghiệm

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x + a(t-\tau)) + \varphi(x - a(t-\tau))}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \psi(\xi)\, d\xi.$$

Ý nghĩa của công thức Dalembert

Xem $u(x,t)$ là độ lệch của sợi dây tại điểm x, ở thời điểm t. Ta xét hai trường hợp riêng của công thức Dalembert: trường hợp vận tốc ban đầu bằng không $\psi(x) = 0$, trường hợp độ lệch ban đầu bằng không $\varphi(x) = 0$.
Trường hợp vận tốc ban đầu bằng không: $\psi(x) = 0$ **và** $\varphi(x) \neq 0$, $x \in (-\infty, \infty)$.
Từ công thức (2.39) suy ra

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2}\varphi(x-at).$$

Độ lệch u là kết quả của việc chồng hai sóng: $u_1(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x+at)$ và $u_2(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at)$. Vận tốc truyền sóng là a. Đồ thị của các hàm $u_1(x,t)$ và $u_2(x,t)$ trong mặt phẳng Oxu là đồ thị của hàm $\widetilde{u}(x) = \frac{1}{2}\varphi(x)$ tịnh tiến song song với trục Ox lần lượt sang trái và sang phải một đoạn bằng at. $u_1(x,t)$ biểu thị cho sóng truyền sang trái còn $u_2(x,t)$ biểu thị cho sóng truyền sang phải.
Nếu biết dạng của sợi dây ở thời điểm ban đầu ta có thể xác định được dạng của sợi dây ở thời điểm t.
Ở thời điểm ban đầu $t = 0$, hai sóng trùng nhau (vẽ hình minh họa). Sau đó hai sóng tách ra và truyền theo hai hướng ngược nhau. Một sóng dịch chuyển sang trái, một sóng dịch chuyển sang phải (vẽ các hình minh họa). Điều đáng lưu ý ở đây là sau khi sóng đi qua, các điểm của sợi dây lại trở về vị trí cân bằng trên trục hoành.
Trường hợp độ lệch ban đầu bằng không: $\varphi(x) = 0$ **và** $\psi(x) \neq 0$**,** $x \in (-\infty, \infty)$.
Ta được

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi = F(x+xt) - F(x-at),$$

trong đó $F(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi$ là nguyên hàm của hàm $\frac{1}{2a}\psi(x)$.

Xét hàm $\psi(x) \neq 0$ với $x \in (\alpha,\beta)$, $\psi(x) \equiv 0$ với $x \in (\alpha,\beta)$. Khi đó

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \leq \alpha, \\ \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^x \psi(\xi)\,d\xi & \text{với } \alpha \leq x \leq \beta, \\ \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \psi(\xi)\,d\xi = const & \text{với } x \geq \beta. \end{cases}$$

Hình dáng của sợi dây thu được là kết hợp của hai sóng $F(x+at)$ (truyền sang trái) và $-F(x-at)$ (truyền sang phải).
Như vậy, tại một điểm x nào đó của dây ngoài đoạn $[\alpha,\beta]$ trước một khoảng thời gian nào đó $u(x,t) = 0$, nhiễu động tại $[\alpha,\beta]$ chưa truyền tới. Sau đó $u(x,t) \neq 0$, nhiễu động truyền tới x và từ một lúc nào đó trở đi $u(x,t) = const$ (không trở lại vị trí ban đầu) (vẽ hình mô tả).

Áp dụng: Tìm nghiệm $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}, t \in [0,T]$ của bài toán

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u(x,0) &= \varphi(x) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

trong đó $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $f(x,t) \in C^{2,0}(Q_T)$ với $Q_T = \mathbb{R}\times(0,T)$, $a > 0$.

Để giải bài toán trên, ta xét các bài toán sau:

Bài toán phụ thứ nhất

$$\begin{aligned} u^*_{tt} &= a^2 u^*_{xx} \\ u^*(x,0) &= \varphi(x) \\ u^*_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

Theo công thức Dalembert, ta có nghiệm

$$u^*(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi.$$

Bài toán phụ thứ hai

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{xx} \\ v(x,0,\tau) &= 0 \\ v_t(x,0,\tau) &= f(x,\tau) \quad \text{với } \tau \text{ là một tham số.} \end{aligned}$$

Nghiệm là

$$v(x,t,\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} f(\xi,\tau)\, d\xi.$$

Bài toán phụ thứ ba

$$\begin{aligned} w_{tt} &= a^2 w_{xx} + f(x,t) \\ w(x,0) &= 0 \\ w_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Nghiệm là

$$w(x,t) = \int\limits_0^t v(x,t-\tau)\, d\tau \quad \text{(theo nguyên lý Duyhamen),}$$

trong đó v là nghiệm của bài toán phụ thứ hai, cụ thể

$$w(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi \right) d\tau.$$

Vậy theo nguyên lý chồng nghiệm, ta có nghiệm cần tìm là

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u^*(x,t) + w(x,t) \\ &= \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi \right) d\tau. \end{aligned}$$

2.5 Phương pháp tách biến (Fourier)

2.5.1 Dao động tự do của dây

Xét bài toán

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell,\ t > 0, \tag{2.43}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \quad \text{(điều kiện biên)} \tag{2.44}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le \ell, \quad \text{(đk ban đầu)}. \tag{2.45}$$

Giả thiết: $\varphi(x) \in C^2[0,\ell]$, đạo hàm cấp 3 của $\varphi(x)$ liên tục từng khúc trên $[0,\ell]$

$$\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(\ell) = 0, \quad k = 0, k = 2,$$

$\psi(x) \in C^1[0,\ell]$ và có đạo hàm cấp 2 liên tục từng khúc trên $[0,\ell]$,

$$\psi(0) = \psi(\ell) = 0.$$

Phương trình (2.43) là tuyến tính và thuần nhất. Do đó, tổng của các nghiệm riêng cũng là nghiệm của phương trình. Chúng ta sẽ tìm nghiệm của bài toán (2.43)-(2.45) dưới dạng tổng của các nghiệm riêng với các hệ số phù hợp. Để thực hiện việc này, trước hết ta tìm nghiệm của (2.43)-(2.44) dưới dạng tách biến

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{2.46}$$

Thế vào phương trình (2.43) ta có

$$XT'' = a^2 X'' T \quad \text{suy ra} \quad \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}. \tag{2.47}$$

Vế phải của (2.47) chỉ phụ thuộc x, trong khi vế trái lại chỉ phụ thuộc t. Do đó, tồn tại hằng số λ sao cho

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

Vậy ta thu được hệ phương trình vi phân

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{2.48}$$

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0. \tag{2.49}$$

Từ điều kiện biên (2.44), suy ra

$$X(0) = X(\ell) = 0, \tag{2.50}$$

vì nếu không thì $T(t) \equiv 0$ và do đó $u(x,t) \equiv 0$ là nghiệm tầm thường.
Như vậy, ta có bài toán giá trị riêng: Tìm λ sao cho bài toán

$$\begin{cases} X'' + \lambda X & = 0, \\ X(0) = X(\ell) & = 0 \end{cases} \tag{2.51}$$

có nghiệm không tầm thường.
Ta xét các trường hợp sau
a) Khi $\lambda < 0$. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2.48) là

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Nghiệm này phải thỏa mãn điều kiện biên, tức là

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0,$$
$$X(\ell) = c_1 e^{\ell\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-\ell\sqrt{-\lambda}} = 0.$$

Từ đó suy ra $c_1 = c_2 = 0$, vậy $X(x) \equiv 0$, nghiệm tầm thường (loại).
b) Khi $\lambda = 0$. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2.48) là

$$X(x) = ax + b.$$

Từ điều kiện biên ta dễ dàng suy ra $a = b = 0$, và do đó $X(x) \equiv 0$.
c) Khi $\lambda > 0$. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2.48) là

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Từ điều kiện biên ta suy ra

$$X(0) = c_1 = 0,$$
$$X(\ell) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\ell = 0.$$

Do $X(x) \neq 0$ nên $c_2 \neq 0$ và do đó

$$\sin\sqrt{\lambda}\ell = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{\ell}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Do vậy ta có các trị riêng

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.52}$$

và các hàm riêng tương ứng

$$X_n(x) = c_n \sin\frac{\pi n}{\ell}x, \quad \text{với } c_n \text{ là một hằng số nào đó.} \tag{2.53}$$

Với giá trị λ ở trên, nghiệm của (2.49) là

$$T_n(t) = C_n \cos\frac{\pi n}{\ell}at + D_n \sin\frac{\pi n}{\ell}at, \tag{2.54}$$

trong đó C_n và D_n là các hằng số sẽ xác định sau. Vậy

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \Big(A_n \cos\frac{\pi n}{\ell}at + B_n \sin\frac{\pi n}{\ell}at\Big)\sin\frac{\pi n}{\ell}x, \tag{2.55}$$

với $A_n = c_nC_n$, $B_n = c_nD_n$ là các hằng số tùy ý, là nghiệm của (2.43)-(2.44). Ta thành lập chuỗi lũy thừa hình thức

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \cos\frac{\pi n}{\ell}at + B_n \sin\frac{\pi n}{\ell}at\Big)\sin\frac{\pi n}{\ell}x \tag{2.56}$$

để xác định các hệ số A_n và B_n sao cho $u(x,t)$ là nghiệm của phương trình (2.43) và thỏa mãn điều kiện ban đầu (2.45).
Từ điều kiện (2.45), ta suy ra

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{\ell}x = \varphi(x).$$

Vậy

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\,dx. \tag{2.57}$$

Cũng từ điều kiện ban đầu (2.45), ta lại có

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{\ell}aB_n \sin\frac{\pi n}{\ell}x = \psi(x).$$

Do đó,

$$B_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\,dx. \tag{2.58}$$

Chú ý 6. *Với các giả thiết về $\varphi(x)$ và $\psi(x)$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ hội tụ đều và có các đạo hàm riêng đến cấp hai hội tụ đều.*

Về chứng minh phương pháp Fourier có thể xem trong cuốn sách của Thầy Đinh Nho Hào.

2.5.2 Phương trình không thuần nhất

Tìm nghiệm của phương trình

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \tag{2.59}$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu và biên

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{2.60}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t > 0. \tag{2.61}$$

Ta tìm nghiệm $u(x,t)$ của bài toán (2.59)-(2.61) dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n}{\ell} x, \tag{2.62}$$

trong đó $T_n(t)$ là hàm sẽ được xác định như sau: Giả thiết các hàm f, φ và ψ có thể khai triển thành chuỗi Fourier

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{\ell} x, \quad \text{trong đó} \quad f_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,t) \sin\frac{\pi n}{\ell} x\, dx \tag{2.63}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{\ell} x, \quad \text{trong đó} \quad \varphi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x) \sin\frac{\pi n}{\ell} x\, dx, \tag{2.64}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{\ell} x, \quad \text{trong đó} \quad \psi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{\pi n}{\ell} x\, dx. \tag{2.65}$$

Thay (2.62), (2.63) vào phương trình (2.59), ta thu được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)\left(-a^2\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 T_n(t) - T_n''(t) + f_n(t)\right) = 0.$$

Do đó,

$$T_n''(t) + a^2\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 T_n(t) = f_n(t). \tag{2.66}$$

Mặt khác, điều kiện ban đầu cho ta

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin\frac{\pi n}{\ell} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{\ell} x,$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin\frac{\pi n}{\ell} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{\ell} x.$$

Suy ra

$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n. \tag{2.67}$$

Phương trình vi phân thuần nhất của (2.66) có nghiệm tổng quát

$$T_n(t) = c_1 \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right).$$

Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số, nghiệm của phương trình không thuần nhất (2.66) là

$$\begin{aligned} T_n(t) = c_2 \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right) + \frac{\ell}{\pi n a} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right) \int_0^t \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} a\tau\right) f_n(\tau)\, d\tau \\ + c_1 \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right) - \frac{\ell}{\pi n a} \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right) \int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} a\tau\right) f_n(\tau)\, d\tau, \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} T_n(t) =& c_1 \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right) \\ &+ \frac{\ell}{\pi n a} \int_0^t \left[\sin\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} a\tau\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} a\tau\right)\right] f_n(\tau)\, d\tau, \\ =& c_1 \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right) + \frac{\ell}{\pi n a} \int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} a(t-\tau)\right) f_n(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu (2.67), ta có $c_1 = \varphi_n$, $c_2 = \frac{\ell}{\pi n a}\psi_n$. Vậy

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell}{\pi n a} \int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} a(t-\tau)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) f_n(\tau)\, d\tau \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right) + \frac{\ell}{\pi n a} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} at\right)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right), \\ :=& u^{(I)}(x,t) + u^{(II)}(x,t). \end{aligned}$$

Từ khai triển Fourier (2.63) của hàm $f(x,t)$, ta có thể viết $u^{(I)}(x,t)$ dưới dạng

$$\begin{aligned} u^{(I)}(x,t) &= \int_0^t \int_0^\ell \left(\frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell}{\pi n a} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} a(t-\tau)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} \xi\right)\right) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \\ &:= \int_0^t \int_0^\ell G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \end{aligned}$$

trong đó

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}a(t-\tau)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}\xi\right) \qquad (2.68)$$

là hàm Green.

Chương 3

Phương trình truyền nhiệt

3.1 Thiết lập phương trình truyền nhiệt

Xét một vật rắn truyền nhiệt đẳng hướng. Ký hiệu $u(x, y, z, t)$ là nhiệt độ của một vật rắn tại điểm (x, y, z) ở thời điểm t. Chúng ta biết rằng nhiệt sẽ truyền từ nơi có nhiệt độ cao sang nơi có nhiệt độ thấp hơn. Sự truyền nhiệt này tuân theo định luật sau: nhiệt lượng ΔQ đi qua một mảnh mặt khá bé ΔS chứa điểm (x, y, z) trong một thời gian Δt tỷ lệ với ΔS, Δt và đạo hàm theo pháp tuyến $\frac{\partial u}{\partial n}$, tức là

$$\Delta Q = -k(x, y, z)\Delta t.\Delta S.\frac{\partial u}{\partial n}, \tag{3.1}$$

trong đó $k(x, y, z) > 0$ là hệ số truyền nhiệt trong (k không phụ thuộc vào hướng của pháp tuyến với ΔS vì sự truyền nhiệt là đẳng hướng), $\overrightarrow{n}$ là vectơ pháp tuyến của ΔS hướng theo chiều giảm của nhiệt độ.
Gọi q là dòng nhiệt, tức là nhiệt lượng đi qua một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian. Từ (3.1) ta suy ra

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Xét một thể tích tùy ý V của vật rắn giới hạn bởi một mặt kín, trơn S và xét sự biến thiên của nhiệt lượng trong thể tích đó trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2. Từ (1.7) ta suy ra rằng nhiệt lượng qua mặt S vào trong, từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2 bằng

$$Q_1 = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_S k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

trong đó $\overrightarrow{n}$ là vectơ pháp tuyến hướng vào trong của mặt S. Áp dụng công thức Ostrogradsky, chuyển tích phân mặt sang tích phân ba lớp, ta được

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \operatorname{div}(k.gradu)\, dx\, dy\, dz.$$

Giả sử trong vật có nguồn nhiệt. Gọi $F(x, y, z, t)$ là mật độ của nguồn nhiệt, tức là nhiệt lượng sinh ra hay mất đi trong một đơn vị thể tích của vật thể và một đơn vị thời gian. Nhiệt lượng sinh ra hay mất đi trong thể tích V từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2 bằng

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz.$$

Mặt khác, nhiệt lượng cần cho thể tích V của vật thể thay đổi nhiệt độ từ $u(x, y, z, t_1)$ đến $u(x, y, z, t_2)$ bằng

$$Q_3 = \iiint_V [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]c(x, y, z)\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

trong đó $c(x, y, z)$ là nhiệt dung, $\rho(x, y, z)$ là mật độ của vật. Ta có

$$u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}\, dt,$$

nên có thể viết

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy\, dz.$$

Dĩ nhiên $Q_3 = Q_1 + Q_2$ hay $Q_3 - Q_1 - Q_2 = 0$, nên

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k.gradu) - F(x, y, z, t)\right) dx\, dy\, dz = 0.$$

Vì khoảng thời gian (t_1, t_2) và thể tích V được chọn tùy ý, nên biểu thức dưới dấu tích phân bằng không,

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k.gradu) + F(x, y, z, t)$$

hay

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + F(x, y, z, t). \tag{3.2}$$

Phương trình trên gọi là phương trình truyền nhiệt trong vật đẳng hướng không đồng chất. Nếu vật đồng chất thì c, ρ, k là những hằng số và phương trình có dạng

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \tag{3.3}$$

trong đó $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ là hệ số truyền nhiệt độ, $f(x, y, z, t) = \frac{F(x,y,z,t)}{c\rho}$.
Đó là phương trình truyền nhiệt không thuần nhất. Nếu trong vật không có nguồn nhiệt, thì $F(x, y, z, t) = 0$, ta sẽ được phương trình truyền nhiệt thuần nhất

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \tag{3.4}$$

Nếu ta xét sự truyền nhiệt trên một đĩa đồng chất, rất mỏng, đặt trên mặt phẳng Oxy thì nhiệt độ $u(x, y, t)$ tại điểm (x, y) ở thời điểm t thỏa mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t). \tag{3.5}$$

Phương trình truyền nhiệt trên một thanh đồng chất, rất mảnh, đặt dọc theo trục x là

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \tag{3.6}$$

3.2 Bài toán biên ban đầu (Bài toán hỗn hợp)

Bài toán biên đối với phương trình truyền nhiệt tương ứng với các bài toán vật lý, liên quan đến chế độ nhiệt độ ở trên biên của vật thể và sự phân bố nhiệt độ ở thời điểm ban đầu.

Bài toán biên ban đầu thứ nhất đối với phương trình truyền nhiệt là bài toán tìm hàm $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ trong hình trụ

$$Q_T = \{(x, t) \colon x \in \Omega, 0 < t \leq T\}$$

và thỏa mãn phương trình

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{3.7}$$

điều kiện ban đầu

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.8}$$

và điều kiện biên

$$u|_{S_T} = \psi_1(x, t), \tag{3.9}$$

trong đó φ và ψ_1 là các hàm số cho trước. Ở đây, $S_T := \Gamma \times (0, T)$.
Bài toán biên ban đầu thứ nhất còn được gọi là *bài toán hỗn hợp*. Ta cần xác định nhiệt độ bên trong vật thể Ω khi cho trước sự phân bố nhiệt độ ở trên biên của vật thể và tại thời điểm ban đầu $t = 0$.

Bài toán biên ban đầu thứ hai đối với phương trình truyền nhiệt là bài toán tìm hàm $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, thỏa mãn phương trình (3.7), điều kiện ban đầu (3.8), và điều kiện biên

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{S_T} = \psi_2(x,t), \tag{3.10}$$

trong đó ψ_2 là hàm cho trước. Với bài toán này, ta giả sử miền Ω đủ trơn, chẳng hạn thuộc C^1. Điều kiện (3.10) có nghĩa là tại một thời điểm bất kỳ $t \geq 0$ dòng nhiệt truyền qua biên của vật thể đã biết.

Nếu biết được nhiệt độ môi trường bên ngoài khi $t > 0$, thì điều kiện biên (3.10) được thay bởi điều kiện

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right)|_{S_T} = \psi_3. \tag{3.11}$$

Bài toán biên (3.7), (3.8) và (3.11) được gọi là *bài toàn biên loại ba* đối với phương trình truyền nhiệt.
Chú ý, nếu trong vật thể Ω không có nguồn nhiệt, thì sự phân bố nhiệt độ $u(x,t)$ bên trong Ω thỏa mãn phương trình thuần nhất

$$Lu = 0.$$

3.2.1 Nguyên lý cực đại

Ta xét phương trình truyền nhiệt trong không gian hai chiều

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{3.12}$$

Giả sử nghiệm $u(x,y,t)$ của phương trình (3.12) là hàm khả vi liên tục hai lần đối với x, y và một lần đối với t trong miền Q_T. Ta có định lý sau

Định lý 9 (Nguyên lý cực đại). *Giả sử $u(x,y,t)$ là nghiệm của phương trình (3.12) liên tục trong miền đóng $\overline{Q}_T$. Khi đó nghiệm $u(x,y,t)$ đạt giá trị cực đại và cực tiểu của nó trên biên $S_T \cup \Omega$ (tức là trên mặt đáy dưới hoặc mặt bên).*

Chú ý rằng, nếu hàm u đạt cực tiểu tại một điểm nào đó thì $-u$ sẽ đạt cực đại tại điểm đó. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp hàm đạt cực đại.

Chứng minh. Trước hết ta đặt

$$M = \max_{(x,y,t)\in \overline{Q}_T} u(x,y,t), \quad m = \max_{(x,y,t)\in S_T\cup\Omega} u(x,y,t).$$

Định lý khẳng định rằng

$$M = m.$$

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $m < M$. Do hàm $u(x,y,t)$ liên tục trên miền đóng $\overline{Q}_T$ nên nó đạt cực đại tại một điểm (x_0,y_0,t_0) nào đó hoặc thuộc Q_T hoặc thuộc đáy trên Ω_T

$$u(x_0,y_0,t_0) = M, \quad (x_0,y_0,t_0) \in Q_T \cup \Omega_T.$$

Ta xây dựng hàm phụ sau

$$v(x,y,t) = u(x,y,t) + \frac{M-m}{2T}(t_0 - t).$$

Giá trị của hàm này trên biên $S_T \cup \Omega$ nhỏ hơn M. Thực vậy, trên biên $S_T \cup \Omega$ thì $u(x,y,t) \le m$, $t_0 - t \le t_0 \le T$, do đó

$$v(x,y,t) \le m + \frac{M-m}{2} = \frac{M+m}{2} < M.$$

Nhưng tại (x_0,y_0,t_0) thì

$$v(x_0,y_0,t_0) = u(x_0,y_0,t_0) = M.$$

Do đó, hàm $v(x,y,t)$ đạt giá trị cực đại của nó đối với miền đóng $\overline{Q}_T$ tại một điểm (x_1,y_1,t_1) nào đó nằm trong $Q_T \cup \Omega_T$. Ta sẽ chỉ ra điều này là không thể xảy ra được. Thật vậy, ta có

$$Lu = 0, \quad \text{và} \quad Lv = Lu + \frac{M-m}{2T}L(t_0 - t) = -\frac{M-m}{2T} < 0. \tag{3.13}$$

Ta xét trường hợp đầu tiên nếu

$$(x_1,y_1,t_1) \in Q_T.$$

Khi đó (x_1,y_1,t_1) là một điểm trong của Q_T mà tại đó hàm $v(x,y,t)$ đạt cực đại nên tại điểm đó ta có

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \le 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \le 0.$$

Do đó

$$Lv(x_1,y_1,t_1) = \frac{\partial v}{\partial t}|_{(x_1,y_1,t_1)} - a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)|_{(x_1,y_1,t_1)} \ge 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (3.13). Bây giờ, ta giả sử

$$(x_1, y_1, t_1) \in \Omega_T.$$

Khi đó, trong mặt phẳng $t = T$, điểm (x_1, y_1) là điểm trong của Ω_T, còn $t_1 = T$ là điểm biên của khoảng $[0, T]$. Tại (x_1, y_1, t_1) hàm $v(x, y, t)$ đạt cực đại, nên ta suy ra tại điểm đó

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0,$$

và do đó

$$Lv(x_1, y_1, t_1) = \frac{\partial v}{\partial t}|_{(x_1,y_1,t_1)} - a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)|_{(x_1,y_1,t_1)} \geq 0.$$

Như vậy, trong cả hai trường hợp ta đều nhận được điều mâu thuẫn với (3.13). Do vậy, $M = m$ và định lý được chứng minh. □

Chú ý 7. *Nguyên lý cực đại ở trên cũng đúng cho trường hợp n chiều, tức là đối với nghiệm của phương trình*

$$u_t = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + ... + u_{x_nx_n}).$$

Trường hợp một chiều

Với trường hợp một chiều, chúng ta xét phương trình với hệ số hằng

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v. \tag{3.14}$$

Thực hiện phép đổi biến

$$v = e^{\mu x + \lambda t} u, \quad \mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \quad \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2},$$

phương trình trở thành

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{3.15}$$

Nguyên lý cực đại: *Giả sử $u(x, t)$ là hàm xác định và liên tục trên miền đóng $0 \leq x \leq \ell$, $0 \leq t \leq T$ và thỏa mãn phương trình (3.15) trên miền mở $0 < x < \ell$, $0 < t < T$. Khi đó hàm $u(x, t)$ đạt giá trị lớn nhất (bé nhất) tại $t = 0$, hoặc $x = 0$, hoặc $x = \ell$.*

Nguyên lý cực đại và cực tiểu đối với phương trình loại parabôn tổng quát

Xét phương trình sau

$$Mu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial t} + d(x,y,t)u = 0 \quad (3.16)$$

trên miền Q_T. Ta có định lý sau.

Định lý 10. *Giả sử cho phương trình* (3.16) *trong đó*

$$d(x,y,t) < 0, \quad \text{với } (x,y,t) \in Q_T \cup \Omega_T, \quad (3.17)$$

và

$$c(x,y,t) \leq 0, \quad \text{với } (x,y,t) \in \Omega_T. \quad (3.18)$$

Khi đó nghiệm của phương trình (3.16) *không thể có cực đại dương hoặc cực tiểu âm trong* $Q_T \cup \Omega_T$*.*

3.2.2 Tính duy nhất nghiệm

Định lý 11 (Định lý duy nhất nghiệm)**.** *Bài toán biên* (3.7)-(3.9),

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega,$$
$$u|_{S_T} = \psi(x,t)$$

có không qúa một nghiệm

Định lý 12 (Định lý duy nhất nghiệm)**.** *Giả sử* $u_1(x,t)$ *và* $u_2(x,t)$ *là các hàm số liên tục trên miền đóng* $0 \leq x \leq \ell$, $0 \leq t \leq T$*, thỏa mãn phương trình*

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < \ell, 0 < t < T,$$

cùng với điều kiện ban đầu

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

và điều kiện biên

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$
$$u_1(\ell,t) = u_2(\ell,t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Khi đó $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$*.*

Chứng minh. Xét hàm

$$v(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

□

3.2.3 Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện biên và ban đầu

Giả sử $u_i \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, $i = 1, 2$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} Lu_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} - a^2 \Delta u_i &= f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \\ u_i|_{t=0} &= \varphi_i(x), \quad x \in \Omega, \\ u_i|_{S_T} &= \psi_i(x,t). \end{aligned}$$

Khi đó hàm

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

là nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u &= 0, \quad (x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} &= \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \quad x \in \Omega, \\ u|_{S_T} &= \psi_1(x,t) - \psi_2(x,t). \end{aligned}$$

Theo nguyên lý cực đại, ta có

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_T} |u(x,t)| = \max\{\max_{x\in\Omega} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|, \max_{(x,t)\in S_T} |\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)|\}.$$

Suy ra,

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| = \max_{x\in\Omega} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| + \max_{(x,t)\in S_T} |\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)|.$$

Vậy nghiệm của *bài toán biên ban đầu thứ nhất* phụ thuộc liên tục vào điều kiện ban đầu và điều kiện biên.

3.2.4 Phương pháp tách biến

Trong phần này, chúng ta sử dụng phương pháp Fourier để giải bài toán sau

$$\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < \ell, 0 < t \le T, \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \ell, \\ &u(0,t) = \psi_1(t), \quad u(\ell,t) = \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Bài toán thuần nhất

Trước hết, ta xét bài toán thuần nhất

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, 0 < t \leq T, \tag{3.19}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \tag{3.20}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.21}$$

Xét nghiệm không tầm thường của phương trình

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

với điều kiện biên

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0.$$

Ta tìm nghiệm dưới dạng tách biến

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{3.22}$$

trong đó $X(x)$ là hàm của biến x và $T(t)$ là hàm chỉ phụ thuộc vào biến t. Thay (3.22) vào phương trình (3.19) và chia cả hai vế cho a^2XT, ta thu được

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{3.23}$$

trong đó λ là hằng số, bởi vì T'/T chỉ phụ thuộc t còn X''/X chỉ phụ thuộc x. Như vậy, ta có các phương trình vi phân

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{3.24}$$

$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{3.25}$$

Từ điều kiện biên (3.21), ta có bài toán giá trị riêng

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0. \tag{3.26}$$

Giá trị riêng của bài toán này là

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2, \quad \text{với } n = 1, 2, 3, ... \tag{3.27}$$

và hàm riêng tương ứng là

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{\ell}x. \tag{3.28}$$

Với giá trị riêng λ_n ở (3.27), nghiệm của phương trình (3.25) có dạng

$$T_n(t) = c_n e^{-a^2\lambda_n t}, \tag{3.29}$$

với c_n là hằng số được xác định sau.
Như vậy, ta tìm được một nghiệm riêng của phương trình (3.19)

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n e^{-a^2\lambda_n t} X_n(x) \tag{3.30}$$

thỏa mãn điều kiện biên (3.21).
Xét chuỗi hàm

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right). \tag{3.31}$$

Hàm $u(x,t)$ thỏa mãn điều kiện biên (3.21). Xét điều kiện ban đầu (3.20),

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right).$$

Do đó, c_n là các hệ số Fourier của hàm $\varphi(x)$, tức là

$$c_n = \varphi_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} \xi\right) d\xi. \tag{3.32}$$

Vậy nghiệm của bài toán (3.19)-(3.21) có dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right),$$

với c_n cho bởi (3.32).
Chúng ta cần tìm điều kiện để chuỗi hàm (3.31) hội tụ và khả vi 2 lần đối với x và một lần đối với t.
Người ta chứng minh được rằng, các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

hội tụ đều với mọi $t \geq t_0 > 0$. Ngoài ra ta có kết quả sau

Định lý 13. *Nếu hàm φ khả vi từng khúc và $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$, thì chuỗi hàm*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \tag{3.33}$$

hội tụ đều và $u(x,t)$ là hàm liên tục với mọi $t \geq 0$.

Hàm Green

Nghiệm $u(x,t)$ cho bởi công thức (3.33) có thể viết lại

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}\xi\right) d\xi\right] e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \\
&= \int_0^{\ell} \left[\frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}\xi\right)\right] \varphi(\xi)\, d\xi.
\end{aligned}$$

Chúng ta có thể đổi thứ tự lấy tổng và lấy tích phân, bởi vì chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}\xi\right) \quad \text{với } t > 0$$

là hội tụ đều đối với ξ. Đặt

$$G(x,\xi,t) := \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}\xi\right). \tag{3.34}$$

Khi đó nghiệm $u(x,t)$ có thể viết lại dưới dạng

$$u(x,t) = \int_0^{\ell} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi. \tag{3.35}$$

Hàm $G(x,\xi,t)$ gọi là hàm Green.

Phương trình truyền nhiệt không thuần nhất

Bây giờ, ta xét phương trình không thuần nhất

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad \text{với } 0 < x < \ell, 0 < t \le T, \tag{3.36}$$

với điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \ell, \tag{3.37}$$

và điều kiện biên

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad 0 < t \le T. \tag{3.38}$$

Ta tìm nghiệm của phương trình dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right), \tag{3.39}$$

trong đó hàm $u_n(t)$ cần được xác định. Ta biểu diễn hàm $f(x,t)$ dưới dạng

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right),$$

trong đó

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(\xi, t) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} \xi\right) d\xi. \tag{3.40}$$

Thay (3.39) và (3.40) vào (3.36), ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \left[\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}_n(t) - f_n(t)\right] = 0.$$

Suy ra

$$\dot{u}_n(t) = -a^2 \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 u_n(t) + f_n(t). \tag{3.41}$$

Mặt khác, ta có

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) = 0,$$

suy ra

$$u_n(0) = 0. \tag{3.42}$$

Giải phương trình vi phân (3.41) với điều kiện ban đầu (3.42), ta được

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau. \tag{3.43}$$

Do đó,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau\right] \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}\right). \tag{3.44}$$

Kết hợp với điều kiện (3.40), ta có thể viết

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \int_0^\ell \left[\frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} \xi\right)\right] f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \\ &=: \int_0^t \int_0^\ell G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \end{aligned} \tag{3.45}$$

trong đó

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} \xi\right) \tag{3.46}$$

là hàm Green đã được xác định ở công thức (3.34).

Bài toán không thuần nhất

Bây giờ, ta quay trở lại xét bài toán không thuần nhất

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < \ell, 0 < t \le T, \tag{3.47}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{3.48}$$

$$u(0,t) = \psi_1(t), \quad u(\ell,t) = \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{3.49}$$

Để giải bài toán này, ta chuyển nó về bài toán biên thuần nhất. Xét hàm số

$$U(x,t) = \psi_1(t) + \frac{x}{\ell}[\psi_2(t) - \psi_1(t)]. \tag{3.50}$$

Hàm $U(x,t)$ thỏa mãn điều kiện biên

$$U(0,t) = \psi_1(t) \quad \text{và} \quad U(\ell,t) = \psi_2(t),$$

và phương trình

$$U_t = a^2 U_{xx} + f_1(x,t),$$

trong đó $f_1(x,t) = U_t(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = U_t(x,t)$.
Khi đó hàm số

$$v(x,t) = u(x,t) - U(x,t)$$

là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx} + f(x,t) - f_1(x,t),\\ v(0,t) &= v(\ell,t) = 0,\\ v(x,0) &= \varphi(x) - U(x,0). \end{aligned}$$

Theo công thức (3.35), nghiệm $\hat{v}(x,t)$ của bài toán

$$\begin{aligned} \hat{v}_t &= a^2 \hat{v}_{xx},\\ \hat{v}(0,t) &= \hat{v}(\ell,t) = 0,\\ \hat{v}(x,0) &= \varphi(x) - U(x,0) \end{aligned}$$

có dạng

$$\hat{v}(x,t) = \int_0^\ell G(x,\xi,t)[\varphi(\xi) - U(\xi,0)]\, d\xi. \tag{3.51}$$

Hơn nữa, hàm $\tilde{v}(x,t)$ xác định bởi

$$\tilde{v}(x,t) = \int_0^t \int_0^\ell G(x,\xi,t-\tau)[f(\xi,\tau) - f_1(\xi,\tau)]\, d\xi\, d\tau. \tag{3.52}$$

Theo nguyên lý chồng nghiệm, nghiệm $u(x,t)$ của bài toán (3.47)-(3.49) là

$$\begin{aligned} u(x,t) &= U(x,t) + \hat{v}(x,t) + \tilde{v}(x,t) \\ &= \psi_1(t) + \frac{x}{\ell}[\psi_2(t) - \psi_1(t)] + \int_0^\ell G(x,\xi,t)[\varphi(\xi) - U(\xi,0)]\, d\xi \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\ell G(x,\xi,t-\tau)[f(\xi,\tau) - f_1(\xi,\tau)]\, d\xi\, d\tau. \end{aligned} \tag{3.53}$$

3.3 Sự truyền nhiệt trong thanh vô hạn. Bài toán Cauchy

Bài toán Cauchy đối với phương trình truyền nhiệt là bài toán tìm hàm $u(x,t)$ trên miền vô hạn

$$G_T := \{(x,t)\colon x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \le T\},$$

từ lớp các hàm thuộc $C^{2,1}(G_T) \cap C(\overline{G}_T)$ và thỏa mãn phương trình

$$Lu = 0, \quad (x,t) \in G_T, \tag{3.54}$$

và điều kiện ban đầu

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.55}$$

Bài toán Cauchy ứng với việc xác định nhiệt độ trên một thanh vô hạn (vật thể đủ lớn, sao cho có thể xem là toàn bộ không gian). Mặt $t = 0$ là mặt đặc trưng của phương trình $Lu = 0$.

Ngoài ra, người ta còn thiết lập bài toán Cauchy cho phương trình không thuần nhất, tức là trong miền Ω có nguồn nhiệt,

$$Lu = f.$$

3.3.1 Nguyên lý cực đại. Tính duy nhất nghiệm

Định lý 14 (Nguyên lý cực đại). *Giả sử $u(x,y,t)$ là nghiệm của phương trình*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

liên tục và giới nội trong miền G_T,

$$G_T = \{(x,y,t)\colon x, y \in \mathbb{R}, 0 \le t \le T\}.$$

Khi đó nếu gọi M và m là cận trên đúng và cận dưới đúng của nghiệm $u(x,y,t)$ trong mặt phẳng $t=0$:

$$M = \sup_{x,y\in\mathbb{R}} u(x,y,0),$$
$$m = \inf_{x,y\in\mathbb{R}} u(x,y,0),$$

thì trong miền G_T ta có

$$m \le u(x,y,t) \le M. \tag{3.56}$$

Bài toán Cauchy đối với phương trình truyền nhiệt: *Tìm hàm $u(x,y,t)$ liên tục và giới nội khi $t \ge 0$, thỏa mãn phương trình truyền nhiệt khi $t>0$*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{3.57}$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad x,y\in\mathbb{R}, \tag{3.58}$$

trong đó $\varphi(x,y)$ là hàm giới nội cho trước.

Định lý 15. *Nghiệm giới nội của bài toán* (3.57)-(3.58) *là duy nhất và phụ thuộc liên tục vào giá trị ban đầu.*

3.3.2 Giải bài toán Cauchy

Trước hết ta giải bài toán trong trường hợp một chiều. Bài toán phát biểu như sau:
Tìm nghiệm $u(x,t)$ liên tục, giới nội thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.59}$$

trong miền $t>0$, với điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}, \tag{3.60}$$

trong đó $\varphi(x)$ là một hàm liên tục và giới nội cho trước.
Bằng cách sử dụng phương pháp tách biến, ta thấy rằng nghiệm của phương trình phải có dạng

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{3.61}$$

Công thức này gọi là công thức Poisson đối với bài toán Cauchy (3.59)-(3.60). Hàm số $\mathcal{E}(x,t,\xi,\tau)$ xác định bởi

$$\mathcal{E}(x,t,\xi,\tau) := \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} & \text{với } \tau < t \\ 0 & \text{với } \tau \geq t. \end{cases} \tag{3.62}$$

Chứng minh của kết quả này có thể xem trong tài liệu tham khảo của Đinh Nho Hào, hoặc sách của Nguyễn Thừa Hợp. Ta có thể lấy đạo hàm của hàm $u(x,t)$ cho bởi công thức (3.61) bằng cách lấy đạo hàm của hàm dưới dấu tích phân. Để làm được điều này, ta chỉ cần chứng minh các tích phân tương ứng hội tụ đều. Xem chi tiết trong cuốn sách của Nguyễn Thừa Hợp.

3.3.3 Sự truyền nhiệt trong nửa thanh vô hạn

Xét sự truyền nhiệt trong nửa thanh vô hạn

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, t > 0 \tag{3.63}$$

với điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < +\infty \tag{3.64}$$

và cách nhiệt ở mút $x = 0$, tức là

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{3.65}$$

hoặc có nhiệt độ ở mút $x = 0$, không đổi

$$u(0,t) = u_0. \tag{3.66}$$

Trước hết, ta xét trường hợp cách nhiệt ở biên. Tìm nghiệm của bài toán (3.63), (3.64) và (3.65). Ta kéo dài chẵn hàm $\varphi(x)$ sang phía $x < 0$:

$$\varphi(x) = \varphi(-x), \quad x < 0.$$

Hàm $u(x,t)$ xác định bởi (3.61),

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi \tag{3.67}$$

là nghiệm của phương trình (3.63), thỏa mãn điều kiện (3.64),

$$u(x,0) = \varphi(x).$$

Ở đây, hàm $\varphi(x)$ là hàm số chẵn xác định trên toàn trục số. Để chỉ ra điều kiện (3.65), từ (3.67) ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)(\xi - x)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\, d\xi,$$

suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\varphi(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\, d\xi.$$

Vì hàm $\varphi(\xi)$ là hàm chẵn nên hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ, do đó tích phân bằng không, tức là

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0.$$

Vậy hàm $u(x,t)$ cho bởi (2.67) là nghiệm của bài toán (3.63), (3.64) và (3.65). Nghiệm $u(x,t)$ có thể viết lại

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\, d\xi.$$

Đổi biến số $\eta = -\xi$ trong tích phân đầu ở vế phải và chú ý hàm $\varphi(\xi)$ chẵn, ta được

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right] d\xi. \tag{3.68}$$

Truyền nhiệt trong nửa thanh vô hạn, có nhiệt độ ở mút không đổi

Bây giờ ta giải bài toán (3.63), (3.64) và điều kiện biên (3.66),

$$u(0,t) = u_0, \quad t \geq 0,$$

trong đó u_0 là hằng số.

Đặt $v(x,t) = u(x,t) - u_0$, $\varphi_1(x) = \varphi(x) - u_0$. Hàm $v(x,t)$ là nghiệm của bài toán

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(x,0) = \varphi_1(x), \quad v(0,t) = 0.$$

Ta kéo dài lẻ hàm $\varphi_1(x)$ sang phía $x < 0$:

$$\varphi_1(x) = -\varphi_1(-x), \quad x < 0.$$

Hàm

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi_1(\xi)\, d\xi, \tag{3.69}$$

trong đó $\varphi_1(x)$ là hàm lẻ xác định trên toàn trục số, là nghiệm của phương trình (3.63), thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$v(x,0) = \varphi_1(x).$$

Hơn nữa

$$v(0,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} \varphi_1(\xi)\, d\xi = 0,$$

vì hàm $\varphi_1(x)$ là hàm lẻ. Vậy nghiệm của bài toán là

$$\begin{aligned} u(x,t) = u_0 + v(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi_1(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi_1(\xi)\, d\xi \\ &= u_0 + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] d\xi. \end{aligned}$$

3.3.4 Bài toán Cauchy trong không gian hai chiều và ba chiều

Trong không gian hai chiều, ta có kết quả sau:
Nghiệm giới nội của bài toán Cauchy trong mặt phẳng

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$
$$u(x,y,0) = \varphi(x,y)$$

được cho bởi công thức

$$u(x,y,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Trong không gian ba chiều, nghiệm của bài toán Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$
$$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z)$$

được cho bởi công thức

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \iint_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Bài tập

Bài 1. Giả sử u là nghiệm trơn của phương trình truyền nhiệt

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{trong } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty).$$

i) Chứng minh rằng $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ cũng là nghiệm của phương trình truyền nhiệt với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Từ đó suy ra $v(x,t) := x \cdot Du(x,t) + 2tu_t(x,t)$ cũng là nghiệm của phương trình truyền nhiệt.

Bài 2. Tìm nghiệm của bài toán sau

$$u_t = a^2 u_{xx} + \alpha u_x + \beta u, \quad u(x,0) = \varphi(x).$$

Lời giải: Thực hiện việc đổi biến

$$u(x,t) = e^{\mu x + \lambda t} v(x,t), \quad \text{trong đó } \mu = -\frac{\alpha}{2a^2}, \quad \lambda = \beta - \frac{\alpha^2}{4a^2}$$

phương trình trở thành

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad v(x,0) = e^{-\mu x}\varphi(x).$$

Nghiệm của bài toán Cauchy này là

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} e^{-\mu\xi} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Từ đó suy ra nghiệm của bài toán ban đầu.

Bài 3. Tìm nghiệm của phương trình

$$u_t = a^2 u_{xx} + \beta u$$

và thỏa mãn điều kiện

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0.$$

Chương 4

Phương trình Laplace và phương trình Poisson

4.1 Phương trình Laplace. Nghiệm cơ bản

Phương trình Laplace là một trong những phương trình quan trọng trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Đó là phương trình có dạng

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0. \tag{4.1}$$

Đây là phương trình thường gặp trong các bài toán tĩnh điện học, lý thuyết thế vị, lý thuyết truyền nhiệt và nhiều lĩnh vực khác nhau của vật lý. Chẳng hạn trong lý thuyết hàm biến phức, hàm giải tích có dạng $u(x, y) + iv(x, y)$, trong đó $u(x, y)$ và $v(x, y)$ là nghiệm của phương trình Laplace.

Hàm số $u(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại (x, y, z) và tại đó nó thỏa mãn phương trình Laplace $\Delta u = 0$ được gọi là hàm điều hòa tại (x, y, z). Hàm số $u(x, y, z)$ được gọi là hàm điều hòa trong miền giới nội Ω nếu nó là hàm điều hòa tại mọi điểm trong miền đó.
Ví dụ: Hàm $u(x, y, z) = x^2 + xy + 2y^2 - 3z^2$ là hàm điều hòa trong mọi miền giới nội của $\mathbb{R}^3$. Hàm $v(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ là hàm điều hòa trừ gốc $O(0, 0, 0)$.

Phương trình Laplace không thuần nhất là phương trình có dạng

$$\Delta u(x) = f(x). \tag{4.2}$$

Phương trình này thường được gọi là *phương trình Poisson*.

Trong một số trường hợp, ta cần nghiên cứu phương trình Laplace trong tọa độ cực hay tọa độ cầu.
Với phép đổi biến

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

phương trình Laplace trong mặt phẳng

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

được viết dưới dạng

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{4.3}$$

Phương trình Laplace trong không gian ba chiều

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

viết trong hệ tọa độ cầu

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta$$

dưới dạng

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{4.4}$$

Công thức Green

Cho miền $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ giới nội và liên thông với biên đủ trơn $\Gamma = \partial\Omega$. Gọi $n(x)$ là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài tại x, được xác định hầu khắp nơi trên Γ.

Ta xuất phát từ công thức tích phân Gauss

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\,dx = \int_\Gamma u(x)n_i(x)\,ds, \quad i = 1, ..., n,$$

trong đó $n_i(x)$ là tọa độ thứ i của vectơ pháp tuyến đơn vị. Áp dụng công thức Gauss cho hàm $u(x)v(x)$, ta có công thức tích phân từng phần sau

$$\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\,dx = \int_\Gamma u(x)v(x)n_i(x)\,ds - \int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx. \tag{4.5}$$

Với hàm thử v (hàm trơn), áp dụng công thức tích phân từng phần cho hai hàm $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ và v rồi lấy tổng theo i, ta thu được

$$\begin{aligned}\int_\Omega v(x)\Delta u(x)\,dx &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega v(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Gamma v(x)n_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\,ds - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx \\ &= \int_\Gamma v(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\,ds - \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx\end{aligned}$$

và do đó ta thu được **công thức Green thứ nhất**

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Gamma v(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\,ds - \int_\Omega v(x)\Delta u(x)\,dx \qquad (4.6)$$

trong đó $a(u,v)$ là toán tử song tuyến tính, $\nabla u(x)$ là **vectơ gradient** của hàm $u(x)$, tức là

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x),\ ...,\frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right)$$

và

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \lim_{\Omega\ni\tilde{x}\to x\in\Gamma}\left[\sum_{i=1}^n n_i(x)\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x})\right], \quad \text{với } x\in\Gamma$$

là đạo hàm theo pháp tuyến $n(x)$ của hàm $u(x)$.
Đổi vai trò của u và v, ta có

$$a(v,u) = \int_\Omega \nabla v(x)\nabla u(x)\,dx = \int_\Gamma u(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x)\,ds - \int_\Omega u(x)\Delta v(x)\,dx.$$

Vậy ta thu được **công thức Green thứ hai**

$$\int_\Omega \left[v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)\right]\,dx = \int_\Gamma \left[v(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) - u(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x)\right]\,ds. \qquad (4.7)$$

Đặt

$$\begin{aligned} P[u,v] :&= v(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) - u(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n n_i(x)\left[v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right] =: \sum_{i=1}^n n_i(x)P_i(x). \end{aligned}$$

Công thức Green thứ hai viết lại là

$$\int_\Omega \left[v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)\right]\,dx = \int_\Gamma P[u,v]\,ds \qquad (4.8)$$

hay

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial P_i}{\partial x_i}(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_\Gamma P_i(x)n_i(x)\,ds, \qquad (4.9)$$

trong đó, ta có

$$v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x_i}(x).$$

Công thức (4.9) chính là công thức tích phân Gauss quen thuộc.

Giả sử v là một nghiệm nào đó của phương trình Laplace $\Delta v(x) = 0$, với điểm kỳ dị cô lập tại y. Để áp dụng công thức Green, ta xét miền $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{U}_\varepsilon$, trong đó U_ε là một $\varepsilon-$lân cận của y. Biên của miền Ω_ε gồm biên $\Gamma = \partial\Omega$ của Ω và mặt cầu tâm y, bán kính ε.

Gọi $U^*(x,y)$ là một nghiệm của phương trình Laplace $\Delta v = 0$, với kỳ dị tại điểm $x = y$. Áp dụng công thức Green thứ hai cho hàm $v = U^*(x,y)$ và hàm u (khả vi liên tục cấp 2) trên miền Ω_ε

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} U^*(x,y)\Delta u(y)\,dy = \int\limits_{\Gamma} P[u(y), U^*(x,y)]\,ds_y + \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} P[u(y), U^*(x,y)]\,ds_y. \tag{4.10}$$

Đẳng thức này đưa đến khái niệm *nghiệm cơ bản* sau.

Định nghĩa 4. *Hàm số $u = U^*(x,y)$ được gọi là nghiệm cơ bản của phương trình Laplace $\Delta u = 0$, nếu*

1. *$u = U^*(x,y)$ là nghiệm của phương trình Laplace $\Delta u = 0$ với $x \neq y$.*
2. *$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} P[u(y), U^*(x,y)]\,ds_y = u(x)$.*
3. *Hàm $U^*(x,y)$ có kỳ dị yếu tại $x = y$, tức là*

$$|U^*(x,y)| \le \frac{c}{|x-y|^\alpha}, \quad \text{với } \alpha < n, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Bổ đề 2. *Nghiệm cơ bản của phương trình Laplace được cho bởi*

$$U^*(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln|x-y| & \text{với } n = 2, \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\dfrac{1}{|x-y|^{n-2}} & \text{với } n \ge 3, \end{cases} \tag{4.11}$$

trong đó $\alpha(n)$ là thể tích của hình cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$,

$$\alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}, \quad \alpha(3) = \frac{4}{3}\pi, \quad \alpha(4) = \frac{\pi^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Giả sử $U^*(x,y)$ là nghiệm cơ bản của phương trình Laplace được cho bởi (4.11). Áp dụng công thức Green thứ hai (4.10), ta có

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} U^*(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\,ds_y - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial U^*}{\partial n_y}(x,y)u(y)\,ds_y - \int\limits_{\Omega} U^*(x,y)\Delta u(y)\,dy, \tag{4.12}$$

trong đó $u(x)$ là một hàm khả vi đến cấp 2. Như vậy với nghiệm $u(x)$ của phương trình Poisson $\Delta u(x) = f(x)$, ta có công thức biểu diễn nghiệm

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} U^*(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\,ds_y - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial U^*}{\partial n_y}(x,y)u(y)\,ds_y - \int\limits_{\Omega} U^*(x,y)f(y)\,dy. \tag{4.13}$$

Do đó, nghiệm $u(x)$ sẽ được hoàn toàn xác định nếu ta biết được dữ kiện Cauchy $[u(x), \frac{\partial u}{\partial n}(x)]$ với $x \in \Gamma$.

4.2 Các bài toán biên: Bài toán biên Dirichlet, bài toán biên Neumann

4.2.1 Bài toán biên Dirichlet

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một miền giới nội với biên đủ trơn $\Gamma = \partial\Omega$. **Bài toán biên Dirichlet** đối với phương trình Poisson là bài toán tìm hàm số $u(x)$ thỏa mãn phương trình Poisson

$$\Delta u(x) = f(x),$$

trong miền Ω và thỏa mãn điều kiện biên

$$u|_\Gamma = g_D(x) \quad \text{với } x \in \Gamma, \tag{4.14}$$

trong đó $g_D(x)$ là hàm cho trước trên biên Γ.
Điều kiện biên (4.19) được gọi là điều kiện biên Dirichlet.

4.2.2 Bài toán biên Neumann

Ngoài điều kiện biên Dirichlet (4.19), người ta còn xét điều kiện biên Neumann sau

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = g_N(x) \quad \text{với } x \in \Gamma. \tag{4.15}$$

Bài toán biên Neumann đối với phương trình Poisson là bài toán tìm hàm số $u(x)$ thỏa mãn phương trình Poisson (4.2) và điều kiện biên (4.15).
Dễ thấy rằng, nếu $u(x)$ là nghiệm của bài toán Neumann thì $u(x) + C$, với C là hằng số, cũng là nghiệm của bài toán đó. Ngoài ra, nếu chọn hàm $v(x) \equiv 1$ thì từ công thức Green (4.7), ta có

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u(x)\,dx = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(x)\,ds,$$

tức là

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx = \int_{\Gamma} g_N(x)\,ds. \tag{4.16}$$

Như vậy, đối với bài toán Neumann, các hàm $f(x)$ và $g(x)$ phải thỏa mãn **điều kiện tương thích** (4.16).

4.2.3 Bài toán biên Robin

Bài toán biên Robin đối với phương trình Poisson là bài toán tìm hàm số $u(x)$ thỏa mãn phương trình Poisson (4.2) và điều kiện biên Robin

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u(x) = g_R(x) \quad \text{với } x \in \Gamma, \tag{4.17}$$

trong đó $g_R(x)$ và $\sigma(x)$ là các hàm số cho trước, $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$.

4.2.4 Bài toán Cauchy

Tìm hàm $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ thỏa mãn phương trình Poisson

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{trong } \mathbb{R}^n. \tag{4.18}$$

Định lý 16. *Nghiệm của bài toán Cauchy* (4.18) *được cho bởi*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} U^*(x,y)f(y)\,dy = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n} \log(|x-y|)f(y)\,dy & (n=2), \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_{\mathbb{R}^n} \dfrac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy & (n=3). \end{cases}$$

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ..., xem [2, 7] □

4.3 Phương pháp hàm Green để giải bài toán Dirichlet. Công thức Poisson

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một miền giới nội với biên đủ trơn $\Gamma = \partial\Omega$. Xét bài toán biên Dirichlet tìm hàm số $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ thỏa mãn phương trình Laplace

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{trong } \Omega.$$

và điều kiện biên

$$u|_\Gamma = g(x) \quad \text{với } x \in \Gamma, \tag{4.19}$$

trong đó $g(x)$ là hàm cho trước trên biên Γ.
Áp dụng công thức biểu diễn nghiệm (4.13) ta có

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} U^*(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\,ds_y - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial U^*}{\partial n_y}(x,y)u(y)\,ds_y. \tag{4.20}$$

Ý tưởng xây dựng hàm Green xuất phát từ việc xét nghiệm $\Phi(x,y)$ của bài toán sau

$$\Delta_y \Phi(x,y) = 0 \quad \text{trong } \Omega$$
$$\Phi|_\Gamma = U^*(x,y).$$

Áp dụng công thức Green thứ hai (4.7) đối với hàm $u(y)$ và hàm $\Phi(x,y)$, ta được

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\Gamma} \left[\Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial n_y}(x,y)\right] ds_y \\ &= \int\limits_{\Gamma} \left[U^*(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial n_y}(x,y)\right] ds_y. \end{aligned}$$

Như vậy, công thức biểu diễn nghiệm (4.20) trở thành

$$\begin{aligned} u(x) &= \int\limits_{\Gamma} u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial n_y}(x,y)\,ds_y - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial U^*}{\partial n_y}(x,y)u(y)\,ds_y \\ &= \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_y}(x,y) - \frac{\partial U^*}{\partial n_y}(x,y)\right) u(y)\,ds_y. \end{aligned}$$

Định nghĩa 5. *Ta gọi hàm số sau đây là hàm Green đối với miền Ω*

$$G(x,y) := U^*(x,y) - \Phi(x,y), \quad x,y \in \Omega, x \neq y. \tag{4.21}$$

Định lý 17 (Công thức biểu diễn nghiệm sử dụng hàm Green)**.** *Nếu $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ là nghiệm của bài toán biên Dirichlet*

$$\Delta u(x) = f(x), \quad \textit{trong miền } \Omega, \quad u|_\Gamma = g(x) \quad \textit{trên biên } \Gamma$$

thì ta có biểu diễn

$$u(x) = -\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y)g(y)\,ds_y - \int\limits_{\Omega} G(x,y)f(y)\,dy \quad \textit{với } x \in \Omega.$$

Đặc biệt, với hàm điều hòa $u(x)$ trên miền Ω, ta có

$$u(x) = -\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y)g(y)\,ds_y.$$

Như vậy, nếu xây dựng được hàm Green thì ta có công thức nghiệm cho bài toán biên Dirichlet. Tuy nhiên, đây là một việc làm khó, ta chỉ thành công trong việc xây dựng hàm Green cho miền Ω có cấu trúc hình học đơn giản. Trước hết, ta hãy xét một số tính chất đơn giản của hàm Green:

i) Hàm Green có giá trị luôn dương: $G(x, y) > 0$ với mọi $x \neq y$.

ii) Hàm Green có tính đối xứng: $G(x, y) = G(y, x)$ với mọi $x \neq y$.

4.3.1 Hàm Green đối với hình cầu và công thức Poisson

Ta xây dựng hàm Green cho hình cầu đơn vị $B(0, 1)$. Tức là, ta tìm nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} \Delta_y \Phi(x, y) = 0 & \text{trong } B(0, 1) \\ \Phi = U^*(x, y) & \text{trên biên } \partial B(0, 1). \end{cases}$$

Hàm Green cho bởi

$$G(x, y) := U^*(x, y) - \Phi(x, y).$$

Định lý 18. *Hàm Green đối với hình cầu đơn vị được xác định như sau*

$$G(x, y) = U^*(x, y) - U^*(|y|x, \frac{y}{|y|}) = U^*(x, y) - U^*(|x|y, \frac{x}{|x|}). \tag{4.22}$$

Công thức này cũng đúng với $n = 2$.

Giả sử $u(x)$ là nghiệm của bài toán biên

$$\Delta u(x) = 0, \quad \text{trong } B(0, 1), \quad u(x) = g(x) \quad \text{trên biên } \partial B(0, 1).$$

Công thức biểu diễn nghiệm

$$u(x) = -\int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) g(y)\, ds_y \quad \text{với } x \in B(0, 1).$$

Ta có

$$\frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} n_{y,i} \frac{\partial G}{\partial y_i}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(x, y).$$

Theo công thức (4.22)

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x, y) = \frac{\partial U^*}{\partial y_i}(x, y) - \frac{\partial U^*}{\partial y_i}(|x|y, \frac{x}{|x|}).$$

Mặt khác, ta có

$$\frac{\partial U^*}{\partial y_i}(x, y) = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n},$$

và

$$\frac{\partial U^*}{\partial y_i}(|x|y, \frac{x}{|x|}) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y_i|x|^2 - x_i}{(|\,|x|y - \dfrac{x}{|x|}|)^n} = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_i|x|^2 - x_i}{|y-x|^n} \quad y \in \partial B(0,1).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y) &= \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) \\
&= \frac{-1}{n\alpha(n)|x-y|^n} \sum_{i=1}^n y_i((y_i - x_i) - y_i|x|^2 + x_i) \\
&= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}.
\end{aligned}$$

Do đó, ta có công thức biểu diễn nghiệm

$$u(x) = \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, ds_y \quad \text{với } x \in B(0,1).$$

Bây giờ ta xét bài toán trong miền hình cầu tâm O bán kính R:

$$\Delta u(x) = 0, \quad \text{trong } B(0,R), \quad u(x) = g(x) \quad \text{trên biên } \partial B(0,R)$$

với $R > 0$ cho trước. Khi đó hàm số $\tilde{u}(x) = u(Rx)$ là nghiệm của bài toán biên Dirichlet trong miền hình cầu đơn vị với giá trị biên $\tilde{g}(x) = g(Rx)$. Dùng phép đổi biến số ta nhận được công thức Poisson

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha(n)R} \int\limits_{\partial B(0,R)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, ds_y \quad \text{với } x \in B(0,R). \tag{4.23}$$

Hàm số

$$K(x,y) := \frac{R^2-|x|^2}{n\alpha(n)R} \frac{1}{|x-y|^n} \quad \text{với } x \in B(0,R), y \in \partial B(0,R)$$

được gọi là nhân Poisson cho hình cầu $B(0,R)$.

Định lý 19. *Cho hàm số $g \in C(\partial B(0,R))$ và hàm số u được cho bởi công thức* (4.23). *Khi đó*

i) $u \in C^\infty(B(0,R))$,

ii) $\Delta u = 0$ *trong* $B(0,R)$,

iii) $\lim\limits_{B(0,R) \ni x \to x^0} u(x) = g(x^0)$ *với mỗi điểm* $x^0 \in \partial B(0,R)$.

Dùng phương pháp đổi biến số trong hệ tọa độ cực, ta thu được công thức nghiệm

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2Rr\cos(\varphi-\theta) + R^2} g(R,\theta)\, d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2Rr\cos(\varphi-\theta) + R^2} \hat{g}(\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

4.4 Giải bài toán Dirichlet trong mặt tròn

Xét bài toán biên Dirichlet

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \text{trên miền } \Omega := \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \le a^2\} \tag{4.24}$$

$$u|_\Gamma = g(x,y), \quad \text{trên biên } \Gamma = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 = a^2\}, \tag{4.25}$$

trong đó $a > 0$, và g là hàm cho trước.
Ngoài việc áp dụng công thức Poisson, ta có thể xác định nghiệm của bài toán bằng phương pháp tách biến.

Trong hệ tọa độ cực, phương trình Laplace có dạng

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{4.26}$$

Ta tìm nghiệm của phương trình này dưới dạng tách biến

$$u(r,\varphi) = R(r)\Theta(\varphi).$$

Thay vào phương trình (4.26) ta được

$$\Theta\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r}R\Theta'' = 0.$$

Suy ra

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda,$$

trong đó λ là một hằng số. Từ đó, ta có

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \tag{4.27}$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0. \tag{4.28}$$

Hàm $u(r,\varphi)$ là hàm điều hòa theo φ với chu kỳ 2π nên hàm $\Theta(\varphi)$ là hàm điều hòa theo φ: $\Theta(\varphi) = \Theta(\varphi + 2\pi)$. Nếu $\lambda < 0$, nghiệm của phương trình vi phân (4.27) có dạng

$$\Theta(\varphi) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$$

không phải là hàm tuần hoàn. Với $\lambda \geq 0$, nghiệm của phương trình vi phân (4.27) có dạng

$$\Theta(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi.$$

Do hàm Θ tuần hoàn với chu kỳ 2π theo φ nên $\sqrt{\lambda} = n$, n là số tự nhiên và do đó

$$\Theta_n(\varphi) = A\cos(n\varphi) + B\sin(n\varphi).$$

Với $\lambda = n^2$, phương trình vi phân (4.28) có dạng

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0. \tag{4.29}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (4.29) là

$$R_0(r) = C_1 + C_2\ln r \quad \text{với } n = 0,$$

và

$$R_n(r) = C_3r^n + C_4r^{-n} \quad \text{với } n = 1, 2, ...$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình (4.26) có dạng

$$u_n(r,\varphi) = R_n(r)\Theta(\varphi) = \begin{cases} C_1 + C_2\ln r, & \text{với } n = 0, \\ (C_3r^n + C_4r^{-n})(A\cos(n\varphi) + B\sin(n\varphi)) & \text{với } n > 0. \end{cases} \tag{4.30}$$

Vì u là hàm điều hòa trên mặt tròn nên nó liên tục tại $r = 0$. Do đó trong biểu thức nghiệm (4.30), các hệ số của $\ln r$ và r^{-n} triệt tiêu. Vậy ta thu được các nghiệm riêng có dạng

$$u_n(r,\varphi) = r^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)).$$

Xét chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)). \tag{4.31}$$

Ta cần xác định A_n, B_n sao cho chuỗi trên hội tụ và tổng của nó là một hàm điều hòa thỏa mãn điều kiện biên (4.25). Với $r \to a$, ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)) = g(r,\varphi)|_{r=a} = \hat{g}(\varphi).$$

Do đó, ta tìm được các hệ số của chuỗi Fourier

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\varphi)\, d\varphi = \frac{\alpha_0}{2}, \tag{4.32}$$

$$A_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\varphi)\cos(n\varphi)\, d\varphi = \frac{\alpha_n}{a^n}, \tag{4.33}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\varphi)\sin(n\varphi)\, d\varphi = \frac{\beta_n}{a^n}, \tag{4.34}$$

trong đó, với các hệ số α_n, β_n ta có đánh giá

$$|\alpha_n| = |\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\varphi)\cos(n\varphi)\, d\varphi| \le M, \quad |\beta_n| = |\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\varphi)\sin(n\varphi)\, d\varphi| \le M.$$

Suy ra, ta có đánh giá

$$|r^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi))| \le 2M\frac{r^n}{a^n} = 2M\left(\frac{r}{a}\right)^n \quad \forall n \ge 1.$$

Chuỗi

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2M\left(\frac{r}{a}\right)^n$$

hội tụ với $r \le r_0 < a$. Vậy theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi (4.31) hội tụ đều theo (r, φ) với $r \le r_0 < a$. Tổng của chuỗi là

$$u(r,\varphi) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} r^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)). \tag{4.35}$$

Như vậy, $u(r,\varphi)$ là giới hạn của một dãy hàm điều hòa hội tụ đều trong mặt tròn $r < a$. Theo định lý Harnack hàm u cũng là một hàm điều hòa trong mặt tròn $r < a$. Người ta có thể chỉ ra u là hàm điều hòa trong $r \le a$ với giả thiết $\hat{g}(\varphi)$ là hàm khả vi liên tục theo φ. Vậy

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(\alpha_n\cos(n\varphi) + \beta_n\sin(n\varphi)) \tag{4.36}$$

trong đó

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\varphi)\cos(n\varphi)\, d\varphi, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\varphi)\sin(n\varphi)\, d\varphi.$$

Bài tập 1 Tìm hàm điều hòa $u(x, y)$ trong hình tròn $B_1(0) := \{x^2 + y^2 < 1\}$ thỏa mãn:

$$u(x, y) = 6 + 7x - 8y^2 + 6xy \quad \text{trên biên } x^2 + y^2 = 1.$$

4.5 Các tính chất của hàm điều hòa

Trước hết, ta nhắc lại khái niệm hàm điều hòa trên miền Ω. Hàm số $u(x) \in C^2(\Omega)$ được gọi là hàm điều hòa trong miền Ω nếu $\Delta u = 0$.

Định lý 20 (Nguyên lý cực đại)**.** *Giả sử Ω là một miền bị chặn và liên thông trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử u là hàm số điều hòa và liên tục trên $\overline{\Omega}$. Khi đó, hàm u đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên biên $\Gamma = \partial\Omega$.*

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp 2 chiều. Xét hàm số

$$v(x,y) = u(x,y) + \varepsilon(x^2 + y^2), \quad \text{trong đó } \varepsilon > 0.$$

Ta có

$$\Delta v = \Delta u + \varepsilon\Delta(x^2 + y^2) = 4\varepsilon > 0.$$

Do đó, hàm v không đạt giá trị cực đại bên trong miền Ω. Vì nếu ngược lại thì ta sẽ có $v_{xx} \le 0$, $v_{yy} \le 0$ và do đó $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} \le 0$.
Mặt khác, do hàm v là hàm số liên tục trên miền đóng $\overline{\Omega}$ nên nó đạt giá trị lớn nhất trên miền đó. Do hàm v không đạt cực đại tại một điểm bên trong miền Ω nên nó đạt giá trị lớn nhất tại một điểm $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$. Do đó, với mọi $(x,y) \in \Omega$, ta có

$$u(x,y) \le v(x,y) \le v(x_0,y_0) = u(x_0,y_0) + \varepsilon(x_0^2 + y_0^2) \le \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon(x_0^2 + y_0^2).$$

Lấy giới hạn $\varepsilon \to 0$ với chú ý rằng $x_0^2 + y_0^2$ bị chặn, ta thu được bất đẳng thức sau:

$$u(x,y) \le \max_{\partial\Omega} u.$$

Như vậy hàm số u chỉ có thể đạt cực đại trên biên $\partial\Omega$. Một cách tương tự, ta chứng minh cho trường hợp cực tiểu. □

Hệ quả suy ta trực tiếp từ *nguyên lý cực đại* đó là: Nếu $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ là hàm điều hòa trong Ω và u có giá trị trên biên bằng 0 thì $u \equiv 0$ trong Ω. Tức là bài toán biên Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \quad \text{trong } \Omega \\ u|_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

có nghiệm nghiệm duy nhất $u \equiv 0$.

Mệnh đề 1. *Giả sử u là hàm số điều hòa trong miền* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *và liên tục trên* $\overline{\Omega}$. *Giả sử* M_0 *là một điểm thuộc* Ω, *ký hiệu* B_ε *là hình cầu tâm* M_0 *bán kính* ε *và nằm hoàn toàn trong* Ω. *Khi đó*

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int\limits_{\partial B_\varepsilon} u(x, y)\, ds.$$

Mệnh đề 2. *Cho* $u \in C^2(\Omega)$ *là hàm điều hòa trong miền* Ω. *Khi đó* $u \in C^\infty(\Omega)$.

Định lý 21 (Liouville)**.** *Giả sử* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *là hàm điều hòa và giới nội. Khi đó u là hằng số.*

Định lý 22 (Bất đẳng thức Harnack)**.** *Với mỗi tập mở liên thông* $U \subsetneq \Omega$, *tồn tại hằng số dương C, chỉ phụ thuộc vào U, thỏa mãn*

$$\sup_U u \leq C \inf_U u$$

với mọi hàm u điều hòa và không âm trong Ω.

4.6 Nghiệm yếu. Phương pháp biến phân

4.6.1 Bài toán biên Dirichlet

Cho miền $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ giới nội và liên thông với biên đủ trơn $\Gamma = \partial\Omega$. Gọi $n(x)$ là vectơ pháp tuyến ngoài tại x, được xác định hầu khắp nơi trên Γ. Với $x \in \Omega$, ta xét phương trình loại elliptic sau:

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} + c(x)u(x) = f(x), \tag{4.37}$$

trong đó $c(x) \in C(\overline{\Omega})$, $c(x) \geq 0\ \forall x \in \Omega$, $f(x) \in L_2(\Omega)$.
Đạo hàm theo pháp tuyến

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = n(x).\nabla u(x), \quad \text{với } x \in \Gamma.$$

Công thức Green thứ nhất

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega v(x)[-\Delta u(x)]\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial n} v(x)\, ds_x, \tag{4.38}$$

và công thức Green thứ hai

$$\int\limits_\Omega v(x)\Delta u(x)\, dx - \int\limits_\Omega u(x)\Delta v(x)\, dx = \int\limits_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial n} v(x)\, ds_x - \int\limits_\Gamma \frac{\partial v(x)}{\partial n} u(x)\, ds_x. \tag{4.39}$$

Xét bài toán biên Dirichlet tìm hàm $u(x)$ thỏa mãn phương trình đạo hàm riêng

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \text{với } x \in \Omega, \tag{4.40}$$

với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất

$$u(x) = 0, \quad \text{với } x \in \Gamma. \tag{4.41}$$

Ta sẽ nghiên cứu tính tồn tại và duy nhất nghiệm của các bài toán này trong các không gian thích hợp.

4.6.2 Không gian Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Xét không gian các hàm bình phương khả tích $L_2(\Omega)$ trên miền Ω, với chuẩn

$$||u||_{L_2(\Omega)} := \left(\int_\Omega u^2(x)\, dx \right)^{1/2} < +\infty.$$

Ta định nghĩa không gian

$$H^1(\Omega) := \{u \colon u(x) \in L_2(\Omega), u_{x_i}(x) \in L_2(\Omega)\}$$

và

$$H_0^1(\Omega) := \{u \colon u(x) \in L_2(\Omega), u_{x_i}(x) \in L_2(\Omega), u|_\Gamma = 0\} \subset H^1(\Omega)$$

với chuẩn

$$||u||_{H^1(\Omega)} := \left(||u||^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n ||u_{x_i}||^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

và

$$|u|_{H^1(\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^n ||u_{x_i}||^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

Một cách chính xác thì không gian $H_0^1(\Omega)$ là bao đóng của không gian $C_0^\infty(\Omega)$ với chuẩn $||\cdot||_{H^1(\Omega)}$. Tức là, với $u \in H_0^1(\Omega)$, tồn tại dãy $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Không gian $H^1(\Omega)$ một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle u, v\rangle := (u, v)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (u_{x_i}, v_{x_i})_{L_2(\Omega)}.$$

4.6.3 Toán tử Elliptic

Cho X là một không gian Hilbert. X' là không gian đối ngẫu của X.

Định nghĩa 6. *Toán tử $A : X \to X'$ được gọi là X-elliptic nếu*

$$\langle Av, v\rangle \geq c_1^A ||v||_X^2 \quad \text{với mọi } v \in X, \tag{4.42}$$

trong đó c_1^A là một hằng số dương.

Với toán tử tuyến tính và elliptic A ta có định lý về sự tồn tại nghiệm sau.

Định lý 23 (Lax-Migram)**.** *Giả sử $A : X \to X'$ là toán tử bị chặn và X-elliptic. Khi đó, với mọi $f \in X'$, tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình*

$$Au = f$$

thỏa mãn đánh giá

$$||u||_X \leq \frac{1}{c_1^A}||f||_{X'}. \tag{4.43}$$

Chứng minh. Xem [6]. □

Định lý Lax-Migram có một dạng khác như sau.

Định lý 24 (Lax-Migram)**.** *Cho X là một không gian Hilbert và $V \subset X$ là không gian con trù mật trong X. Giả sử $a : X \times V \to \mathbb{R}$ là song tuyến tính thỏa mãn*

i) Với mọi $v \in V$, dạng tuyến tính $u \mapsto a(u, v)$ liên tục trên X.

ii) Tồn tại $c_1^A > 0$ sao cho

$$a(v, v) \geq c_1^A ||v||_V^2 \quad \text{với mọi } v \in V.$$

Khi đó với mỗi $f \in X'$, tồn tại duy nhất $u \in X$ thỏa mãn

$$||u||_X \leq \frac{1}{c_1^A}||f||_{X'}$$

và

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle \quad \text{với mọi } v \in V.$$

4.6.4 Bài toán yếu

Xét bài toán biên Dirichlet

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{với } x \in \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{với } x \in \Gamma. \tag{4.44}$$

Công thức Green thứ nhất

$$a(u, v) = \int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial n} v(x)\, ds_x - \int_\Omega v(x)\Delta u(x)\, dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\, dx$$

đúng với $u \in H^1(\Omega)$, và hàm thử $v \in H^1(\Omega)$, tức là ta có

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle_\Omega + \langle \frac{\partial u}{\partial n}, v\rangle_\Gamma \tag{4.45}$$

trong đó $a(\cdot, \cdot)$ là dạng song tuyến tính đối xứng

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\, dx. \tag{4.46}$$

Ngoài ra,

$$\langle u, v\rangle_\Omega := \int_\Omega u(x)v(x)\, dx, \quad \langle \varphi, \psi\rangle_\Gamma := \int_\Gamma \varphi(x)\psi(x)\, ds_x.$$

Với hàm thử $v \in H_0^1(\Omega)$, ta có

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle_\Omega.$$

Định nghĩa 7. *Giả sử $f \in L_2(\Omega)$. Người ta gọi nghiệm (yếu) của bài toán (4.44) là hàm $u \in H_0^1(\Omega)$ thỏa mãn*

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle_\Omega \quad \text{với mọi } v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.47}$$

Bổ đề 3. *Dạng song tuyến tính $a(\cdot, \cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ bị chặn, thỏa mãn*

$$|a(u, v)| \leq c_2^A ||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} \quad \text{với mọi } u, v \in H^1(\Omega),$$

trong đó c_2^A là một hằng số dương.

Bổ đề 4. *Với dạng song tuyến tính $a(\cdot, \cdot)$, ta có*

$$a(v, v) \geq \lambda_0 |v|^2_{H^1(\Omega)} \quad \text{với mọi } v \in H^1(\Omega), \tag{4.48}$$

trong đó λ_0 là một hằng số dương.

Định lý 25. *Dạng song tuyến tính* (4.46) *là* $H_0^1(\Omega)-$*elliptic, nghĩa là*

$$a(v,v) \geq c_1^A ||v||^2_{H^1(\Omega)} \quad \text{với mọi } v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.49}$$

Sử dụng định lý Lax-Migram, ta có thể thiết lập tính tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán biên Dirichlet như sau.

Định lý 26. *Với* $f \in L_2(\Omega)$, *tồn tại duy nhất nghiệm (yếu)* $u \in H_0^1(\Omega)$ *của bài toán biên Dirichlet* (4.44), *thỏa mãn*

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c_1^A} ||f||_{L_2(\Omega)}, \tag{4.50}$$

trong đó c_1^A *là một hằng số dương.*

Chứng minh. Theo định nghĩa, nghiệm yếu của bài toán biên Dirichlet thuần nhất (4.44) là hàm $u \in H_0^1(\Omega)$ sao cho

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle_\Omega \quad \text{với mọi } v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.51}$$

Dạng song tuyến tính $a(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ là bị chặn (Bổ đề 3) và $H_0^1(\Omega)-$elliptic (Định lý 25). Theo định lý Lax-Migram, tồn tại duy nhất nghiệm yếu $u \in H_0^1(\Omega)$ thỏa mãn (4.51).
Mặt khác, từ tính chất $H_0^1(\Omega)$-elliptic của dạng song tuyến tính $a(\cdot,\cdot)$, ta có

$$c_1^A ||u||^2_{H^1(\Omega)} \leq a(u,u) = \langle f, u\rangle_\Omega \leq ||f||_{L_2(\Omega)} ||u||_{L_2(\Omega)} \leq ||f||_{L_2(\Omega)} ||u||_{H^1(\Omega)}.$$

Suy ra

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c_1^A} ||f||_{L_2(\Omega)}.$$

□

Bài tập

Bài 1. Chứng minh bổ đề 2.
Bài 2. Kiểm tra điều kiện tương thích của bài toán biên Neumann sau

$$\Delta u = 6 \quad \text{trong } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 2x^2 + 2xy + 4y^2 + x \quad \text{trên biên } \Gamma,$$

trong đó Ω là mặt tròn đơn vị

$$\Omega := \{(x,y) \colon x^2 + y^2 < 1\}, \quad \Gamma := \partial\Omega.$$

Bài 3. Chứng minh rằng nếu hàm $u(x, y, z)$ khả vi liên tục hai lần trong miền Ω và

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0$$

đối với mọi mặt S kín nằm trong Ω thì hàm $u(x, y, z)$ là một hàm điều hòa trong Ω.

Bài 4. Cho phương trình

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + du = 0$$

trong đó a, b, c, d là các hằng số. Hãy tìm một phép thế hàm $v(x, y, z) = \varphi(x, y, z)u(x, y, z)$ để đưa về phương trình $\Delta v + \lambda v = 0$ với λ là một hằng số.

Bài 5. Cho phương trình Helmholz trong không gian 3 chiều

$$-\Delta u - k^2 u = 0.$$

a) Tìm những nghiệm của phương trình trên chỉ phụ thuộc r, không phụ thuộc φ, θ.

b) Tìm biểu diễn tích phân của nghiệm của phương trình nói trên qua giá trị u và $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ trên mặt S.

Bài 6. Tìm nghiệm của bài toán biên Dirichlet sau:

$$\Delta u = 0 \quad \text{trong } \Omega, \quad u|_\Gamma = 3 - 4y^2 - 4xy^2,$$

trong đó Ω là mặt tròn $x^2 + y^2 < 4$, $\Gamma := \partial\Omega$.

Bài 7. Tìm nghiệm của bài toán biên Dirichlet sau:

$$\Delta u = 2x \quad \text{trong } \Omega, \quad u|_\Gamma = x - x^3 - 2xy^2,$$

trong đó Ω là mặt tròn đơn vị $x^2 + y^2 < 1$, $\Gamma := \partial\Omega$.

Bài 8. Dùng công thức Poisson để tính trực tiếp nghiệm của bài toán biên Dirichlet

$$\Delta u = 0 \quad \text{trong } \Omega, \quad u|_\Gamma = \cos\theta,$$

trong đó Ω là mặt tròn $x^2 + y^2 < R^2$, $\Gamma := \partial\Omega$.

Bài 9. Cho $u(r, \varphi)$ là hàm điều hòa trong mặt phẳng. Chứng minh rằng hàm $v(r, \varphi) = r\dfrac{\partial u}{\partial r}$ cũng là hàm điều hòa trong mặt phẳng. Từ đó dựa trên công thức Poisson, tìm công thức nghiệm của bài toán Neumann đối với mặt tròn.

Tài liệu tham khảo

[1] Đinh Nho Hào *Introduction to partial differential equations*. Lecture Notes, 1996.

[2] Lawrence C. Evans *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics Volume 19, American Mathematical Society, 1997.

[3] Nguyễn Mạnh Hùng *Phương trình đạo hàm riêng*. NXB Đại học sư phạm, 2008.

[4] Nguyễn Thừa Hợp *Giáo trình phương trình đạo hàm riêng*. NXB Đại học quốc gia Hà Nội, 2002.

[5] Nguyễn Đình Trí, Nguyễn Trọng Thái *Phương trình vật lý toán*. NXB Đại học và trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1971.

[6] Olaf Steinbach *Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems. Finite and boundary elements*. Springer, New York, 2008.

[7] Trần Đức Vân *Lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng*. NXB Đại học quốc gia Hà Nội, 2005.