CHƯƠNG 6

BÀI TOÁN TRỊ RIÊNG

6.1. Bài toán trị riêng yếu tổng quát

6.1.1. Phát biểu bài toán .

Cho V và H là hai không gian Hilbert (trên R) vô số chiều, $V \subset H$.

$a(u, v)$ là một dạng song tuyến trên V, cũng nói là trên $V \times V$.

Xét bài toán trị riêng yếu tổng quát:

Tìm $\lambda \in R$ (gọi là trị riêng) sao cho tồn tại $u \in V$ khác 0 (gọi là hàm riêng ứng với trị riêng λ) sao cho phương trình

$$a(u, v) = \lambda(u, v)_H, \quad \forall v \in V \tag{6.1.1}$$

thỏa mãn.

6.1.2. Sự tồn tại trị riêng.

Sau đây là định lý 6.2.1 ở [4] phát biểu lại:

Định lý 6.1.1. Giả sử

(i) $V \subset H$, V trù mật trong H, phép nhúng V vào H là liên tục và compắc.

(ii) $a(u, v)$ là một dạng song tuyến, đối xứng, liên tục trên V và V-eliptic.

Khi đó tồn tại các trị riêng λ_i và hàm riêng w_i tương ứng, tức là

$$a(w_i, v) = \lambda_i(w_i, v)_H, \quad \forall v \in V$$

với các tính chất sau

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_i \le \ldots, \quad \lambda_i \to \infty; \tag{6.1.2}$$

Cắc hàm $\{w_i\}$ tạo thành một cơ sở trực chuẩn trong H;

Các hàm $\{\lambda_i^{-1/2} w_i\}$ tạo thành một cơ sở trực chuẩn trong V_a là không gian Hilbert trên tập nền của V với tích vô hướng $(u, v)_a := a(u, v)$ và chuẩn $\|u\|_a := \sqrt{a(u, u)}$.

6.2. Bài toán Sturm-Liouville loại một

6.2.1. Phát biểu bài toán. Cho các hàm số $p = p(x)$, $q = q(x)$, $x \in [0, 1]$.

Xẽt toán tử vi phân

$$\mathcal{L}u := -(pu')' + qu, \qquad x \in (0, 1)$$

Bài toán Sturm-Liouville loại một phát biểu: Tìm $\lambda \in R$ sao cho tồn tại $u \not\equiv 0$ để

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \qquad x \in (0, 1) \tag{6.2.1}$$

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0 \tag{6.2.2}$$

với giả thiết

$$p(x) \geq p_0,\ p_0 = const > 0,\ q(x) \geq 0, \quad x \in [0,1], \qquad p,\ p',\ q \in L_2(0,1) \tag{6.2.3}$$

6.2.2. Đưa về dạng yếu (6.1.1)

Trong $L_2(0,1)$ nhân vô hướng phương trình (6.2.1) với hàm thử $v = v(x) \in D(0,1)$

$$\int_0^1 [-(pu')' + qu]vdx = \lambda \int_0^1 uvdx, \qquad \forall v \in D(0,1)$$

Lấy tích phân từng phần, dựa vào điều kiện biên (6.2.2) ta được

$$\int_0^1 [pu'v' + quv]dx = \lambda \int_0^1 uvdx, \quad \forall v \in D(0,1)$$

Vì $D(0,1)$ trù mật trong $W_0^1(0,1)$ nên ta suy ra

$$\int_0^1 [pu'v' + quv]dx = \lambda \int_0^1 uvdx, \quad \forall v \in W_0^1(0,1) \tag{6.2.4}$$

Đặt $V = W_0^1(0,1),\ H = L_2(0,1)$ và

$$a(u,v) := \int_0^1 [pu'v' + quv]dx \tag{6.2.5}$$

Như vậy bài toán (6.2.1)(6.2.2) dẫn đến bài toán yếu dạng (6.1.1):

Tìm $\lambda \in R$ sao cho tồn tại $u \neq 0$ để

$$a(u,v) = \lambda(u,v)_{L_2(0,1)}, \quad \forall v \in W_0^1(0,1) \tag{6.2.6}$$

Bài toán này gọi là bài toán trị riêng yếu ứng với bài toán (6.2.1)(6.2.2).

6.2.3. Nghiệm suy rộng. Nghiệm của bài toán (6.2.6) gọi là nghiệm suy rộng của bài toán (6.2.1)(6.2.2).

6.2.4. Sự tồn tại nghiệm suy rộng. Theo chương 1 mục 1.6.7 thì $V = W_0^1(0,1)$ và $H = L_2(0,1)$ là hai không gian Hilbert (trên R) vô số chiều thỏa mãn $V \subset H$, V trù mật trong H, phép nhúng V vào H là liên tục và compắc.

Theo cách lập luận tương tự ở mục 2.2.3 thì $a(u,v)$ xác định ở (6.2.5) là một dạng song tuyến, đối xứng, liên tục trên V và V-eliptic.

Vậy áp dụng định lý 6.1.1 ta suy ra

Định lý 6.2.1. Giả sử các hàm số cho trước thỏa mãn (6.2.3). Khi đó tồn tại các trị riêng λ_i và hàm riêng w_i tương ứng với các tính chất

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_i \leq \ldots, \quad \lambda_i \to \infty; \tag{6.2.7}$$

Hệ $\{w_i\}$ tạo thành một cơ sở trực chuẩn của $H = L_2(0,1)$;

Hệ $\{\lambda_i^{-1/2} w_i\}$ tạo thành một cơ sở trực chuẩn của V_a là không gian Hilbert trên tập nền của $W_0^1(0,1)$ với tích vô hướng $a(u,v) = \int_0^1 [pu'v' + quv]dx, \quad \forall u,\ v\ \in W_0^1(0,1)$.

6.2.5. Tính gần đúng trị riêng λ

Thay V bằng một không gian con V^h của V, V^h có N chiều và xét bài toán (6.2.1) trong V^h:

Tìm $\lambda^h \in R$ sao cho bài toán

$$a(u^h, v) = \lambda^h (u^h, v)_{L_2(0,1)}, \qquad \forall v \in V_h \tag{6.2.8}$$

có nghiệm $u^h \in V^h$, khác 0.

Sau đó ta xem $\lambda^h \approx \lambda$.

6.2.6. Phương pháp phần tử hữu hạn. Bài toán đại số. Để có V^h theo phương pháp phần tử hữu hạn, ta làm như ở chương 2, tiết 2.3 : chia khoảng $[0,1]$ thành $N+1$ phần tử hữu hạn bởi các điểm

$$x_i,\ i = 0,1,...,N+1, \quad x_i = x_{i-1} + h_i, \quad x_0 = 0, \quad \max\{h_i\} = h$$

Sau đó xây dựng các hàm tọa độ mái nhà $\varphi_i,\ i = 1,2,...,N$ theo công thức (2.3.2), chương 2. Các hàm $\varphi_i,\ i = 1,2,...,N$ thuộc $V = W_0^1(0,1)$ và độc lập tuyến tính. Đặt

$$S_h := \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}, \qquad V^h := \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\} \tag{6.2.9}$$

S^h là một cơ sở của V^h.

Sau đó tìm $w^h \in V^h$ ở dạng

$$w^h = \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j \tag{6.2.10}$$

Vì S^h là một cơ sở của V^h nên muốn có (6.2.8) chỉ cần (xem nhận xét ở chương 1, mục 1.9.3)

$$a(w^h, \varphi_i) = \lambda^h (w^h, \varphi_i)_{L_2(0,1)}, \qquad \forall i = 1,2,...,N$$

Thay w^h có dạng (6.2.10) vào phương trình trên ta được

$$a(\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j, \varphi_i) = \lambda^h (\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j, \varphi_i)_{L_2(0,1)}, \qquad 1 \le i \le N$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{N} a(\varphi_j, \varphi_i) c_j = \lambda^h \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j, \varphi_i)_{L_2(0,1)} c_j, \qquad 1 \le i \le N \tag{6.2.11}$$

Xét các ma trận vuông A và B cấp N:

$$A = (A_{ij}), \quad A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i); \qquad B = (B_{ij}), \quad B_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i)_{L_2(0,1)} \tag{6.2.12}$$

và vectơ cột $c = (c_1, c_2, \ldots, c_N)^t$. Bài toán đại số (6.2.11) trở thành

$$Ac = \lambda^h Bc \tag{6.2.13}$$

Đó là một bài toán trị riêng ma trận, cho phép tính trị riêng λ_i^h và vectơ riêng c, từ đó (6.2.10) cho hàm riêng w_i^h.

Cách giải bài toán (6.2.13) có thể làm như sau: Từ định nghĩa (6.2.12) của hai ma trận A và B ta nhận thấy ngay chúng đối xứng và xác định dương. Do đó có phân tích Cholesky $B = LL^T$, L là một ma trận tam giác dưới . Sau đó với $\xi := L^T c$ thì (6.2.13) trở thành

$$L^{-1}A(L^T)^{-1}\xi = \lambda^N \xi \tag{6.2.14}$$

Dễ thấy ma trận $L^{-1}A(L^T)^{-1}$ đối xứng và xác định dương nên bài toán trị riêng ma trận (6.2.14) luôn có nghiệm. Đó là nghiệm của bài toán (6.2.13).

Trong thực tế người ta thay (6.2.13) bởi (6.2.14) để tính λ_i^h và c.

6.2.7. Về sự hội tụ và sai số. Với giả thiết các hàm cho trước đủ trơn người ta chứng minh được kết quả sau:

$$\lambda_m^h = \lambda_m + O((\frac{1}{N})^2), \qquad m = 1, 2, ..., N$$

Nếu ngoài ra λ_m là một trị riêng *đơn* thì có

$$\|w_m^h - w_m\|_{W^1(0,1)} = O(\frac{1}{N}).$$

Trường hợp $m = 1$ có thể xem ở [5], định lý 8.5. Trường hợp $m \geq 1$ có thể xem ở [3], định lý 6.5.1.

6.3. Bài toán Sturm-Liouville loại ba

6.3.1. Phát biểu bài toán. Cho các hàm số $p = p(x),\ q = q(x),\ x \in [0,1]$ và các số $\sigma_0,\ \sigma_1$.

Xét toán tử vi phân

$$\mathcal{L}u := -(pu')' + qu, \qquad x \in (0,1)$$

Bài toán Sturm-Liouville loại ba phát biểu:

Tìm $\lambda \in R$ (gọi là trị riêng) sao cho tồn tại $u \neq 0$ (gọi là hàm riêng tương ứng) để

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \qquad x \in (0,1) \tag{6.3.1}$$

$$-p(0)u'(0) + \sigma_0 u(0) = 0, \qquad p(1)u'(1) + \sigma_1 u(1) = 0 \tag{6.3.2}$$

thỏa mãn giả thiết

$$p(x) \geq p_0,\ p_0 = const > 0,\ q(x) \geq 0;\ \sigma_0 \geq 0,\ \sigma_1 \geq 0,\ \sigma_0 + \sigma_1 > 0, \quad p, p', q \in L_2(0,1) \tag{6.3.3}$$

6.3.2. Đưa về dạng yếu (6.1.1)

Nhân vô hướng trong $L_2(0,1)$ phương trình (6.3.1) với hàm $v = v(x) \in D([0,1])$ và dựa vào điều kiện biên (6.3.2) ta được

$$\int_0^1 [pu'v' + quv]dx + p(0)u(0)v(0) + p(1)u(1)v(1) = \lambda \int uvdx, \quad \forall v \in D([0,1])$$

Vì $D([0,1])$ trù mật trong $W^1(0,1)$ nên ta suy ra

$$\int_0^1 [pu'v' + quv]dx + p(0)u(0)v(0) + p(1)u(1)v(1) = \lambda \int uvdx, \quad \forall v \in W^1(0,1) \quad (6.3.4)$$

Đặt $V = W^1(0,1),\ H = L_2(0,1)$ và

$$a(u,v) := \int_0^1 [pu'v' + quv]dx + p(0)u(0)v(0) + p(1)u(1)v(1) \quad (6.3.5)$$

Bài toán (6.3.1)(6.3.2) dẫn đến bài toán yếu dạng (6.1.1):

Tìm $\lambda \in R$ sao cho tồn tại $u \neq 0$ để

$$a(u,v) = \lambda(u,v)_{L_2(0,1)}, \quad \forall v \in W^1(0,1) \quad (6.3.6)$$

thỏa mãn, tức là có (6.1.1) với $V = W^1(0,1),\ H = L_2(0,1)$

6.3.3. Nghiệm suy rộng. Nghiệm của bài toán (6.3.6) gọi là nghiệm suy rộng của bài toán (6.3.1)(6.3.2).

6.3.4. Sự tồn tại nghiệm suy rộng. Theo chương 1 mục 1.6.7 thì $V = W^1(0,1)$ và $H = L_2(0,1)$ là hai không gian Hilbert (trên R) vô số chiều thỏa mãn $V \subset H$, V trù mật trong H, phép nhúng V vào H là liên tục và compắc.

Theo các kết quả ở chương 2 mục 2.4.3, thì $a(u,v)$ xác định ở (6.3.5) là một dạng song tuyến, đối xứng, liên tục trên V và V-eliptic.

Vậy áp dụng định lý 6.1.1 ta suy ra

Định lý 6.3.1. Giả sử các hàm số cho trước thỏa mãn (6.3.3). Khi đó tồn tại các trị riêng λ_i và hàm riêng w_i tương ứng với các tính chất

$$0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_i \leq \ldots, \quad \lambda_i \to \infty; \quad (6.3.7)$$

Hệ $\{w_i\}$ tạo thành một cơ sở trực chuẩn của $H = L_2(0,1)$;

Hệ $\{\lambda_i^{-1/2} w_i\}$ tạo thành một cơ sở trực chuẩn của V_a là một không gian Hilbert trên tập nền của $W^1(0,1)$ với tích vô hướng $a(u,v) = \int_0^1 [pu'v' + quv]dx + \sigma_a u(0)v(0) + \sigma_b u(1)v(1), \quad \forall u,\ v\ \in W^1(0,1)$.

Chú ý rằng ở đây ta ký hiệu trị riêng bé nhất là λ_0, khác trong định lý 6.2.1.

6.3.5. Tính gần đúng trị riêng.

Thay V bằng một không gian con V_N hữu hạn chiều của V, (tuy ký hiệu là V_N nhưng sau này ta sẽ thấy nó có $N+1$ chiều) và xét bài toán (6.1.1) trong V_N:

Tìm $\lambda^N \in R$ sao cho phương trình

$$a(u^N, v) = \lambda^N (u^N, v)_H, \qquad \forall v \in V_N \tag{6.3.8}$$

có nghiệm $u^N \in V_N$ khác 0.

Sau đó ta xem $\lambda^N \approx \lambda$.

6.3.6. Phương pháp phần tử hữu hạn; Bài toán đại số. Để có V_N theo phương pháp phần tử hữu hạn, ta làm như ở chương 2, tiết 2.4 : chia khoảng $[0,1]$ thành N phần tử hữu hạn, bởi các điểm

$$x_i,\ i = 0, 1, ..., N, \quad h_i = x_i - x_{i-1} + h_i, \quad x_0 = 0, \quad \max\{h_i\} = h$$

Sau đó xây dựng các hàm mái nhà $\varphi_i,\ i = 0, 1, ..., N$ theo công thức (2.4.15)-(2.4.17), chương 2. Các hàm $\varphi_i,\ i = 0, 1, ..., N$ thuộc $V = W^1(0,1)$ và độc lập tuyến tính. Đặt

$$S_N := \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N\}, \qquad V_N := \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N\} \tag{6.3.9}$$

S^N là một cơ sở của V_N.

Sau đó tìm $w^N \in V_N$ ở dạng

$$w^N = \sum_{j=0}^{N} c_j \varphi_j \tag{6.3.10}$$

Vì S^N là một cơ sở của V_N nên muốn có (6.3.8) chỉ cần (xem nhận xét ở chương 1, mục 1.9.3)

$$a(w^N, \varphi_i) = \lambda^N (w^N, \varphi_i)_{L_2(0,1)}, \qquad \forall i = 0, 1, ..., N$$

Thay w^N có dạng (6.3.10) vào phương trình trên ta được

$$a(\sum_{j=0}^{N} c_j \varphi_j, \varphi_i) = \lambda^N (\sum_{j=0}^{N} c_j \varphi_j, \varphi_i)_{L_2(0,1)}, \qquad 0 \le i \le N \tag{6.3.11}$$

$$\sum_{j=0}^{N} a(\varphi_j, \varphi_i) c_j = \lambda^N \sum_{j=0}^{N} (\varphi_j, \varphi_i)_{L_2(0,1)} c_j, \qquad 0 \le i \le N \tag{6.3.11}$$

Xét các ma trận A và B cấp N+1

$$A = (A_{ij}), \quad A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i); \qquad B = (B_{ij}), \quad B_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i)_{L_2(0,1)} \tag{6.3.12}$$

và vectơ cột $c = (c_0, c_1, \ldots, c_N)^t$ thì bài toán đại số (6.3.11) viết

$$Ac = \lambda^N Bc \tag{6.3.13}$$

Đó là bài toán trị riêng đại số cho phép tính trị riêng λ_i^N và vectơ riêng c, từ đó (6.3.10) cho hàm riêng w_i^N.

Từ định nghĩa (6.3.12) của các ma trận A và B ta nhận thấy chúng đối xứng và xác định dương. Do đó có phân tích Cholesky $B = LL^T$. Sau đó với $\xi := L^T c$ thì (6.3.13) viết

$$L^{-1}A(L^T)^{-1}\xi = \lambda^N \xi \tag{6.3.14}$$

Có thể chứng minh ma trận $L^{-1}A(L^T)^{-1}$ đối xứng và xác định dương nên bài toán trị riêng ma trận (6.3.14) luôn có nghiệm . Trong thực tế (6.3.14) thay (6.3.13) để tính λ_i^N và c.

6.3.7. Về sự hội tụ và sai số. Với giả thiết các hàm cho trước đủ trơn người ta chứng minh được kết quả sau:

$$\lambda_i^N = \lambda_i + O\left(\left(\frac{1}{N+1}\right)^2\right)$$

Nếu ngoài ra λ_i là một trị riêng đơn thì

$$\|w_i^N - w_i\|_{W^1(0,1)} = O\left(\frac{1}{N+1}\right).$$

Trường hợp $i = 0$ có thể xem ở [5], định lý 8.5. Trường hợp $i \geq 0$ có thể xem ở [3], định lý 6.5.1.

BÀI TẬP

Cho $p(x) \geq p_0 = const > 0,\ q(x) \geq 0;\ \sigma \geq 0$. Trình bầy cách giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn bài toán:

Tìm $\lambda \in R$ sao cho tồn tại $u \neq 0$ để

$$\mathcal{L}u := -(pu')' + qu = \lambda u, \qquad x \in (0,1)$$

$$u(0) = 0, \qquad p(1)u'(1) + \sigma u(1) = 0$$