Phương trình đạo hàm riêng

Nguyễn Thu Hương
Viện Toán ứng dụng và Tin học,
Đại học Bách Khoa Hà Nội,
pdemath@gmail.com

Ngày 16 tháng 12 năm 2014

Mục lục

Disclaimer: Bài soạn này có thể chứa những lỗi đánh máy, những lỗi ký hiệu, những chỗ sai chưa được kiểm tra hết. Cô rất mong các bạn đọc, tìm ra lỗi sai và những chỗ khó hiểu để bài soạn được tốt hơn.

Chương 1

Nhập môn phương trình đạo hàm riêng

1.1 Các khái niệm cơ bản

Một phương trình đạo hàm riêng (ĐHR) là một phương trình có chứa hàm nhiều biến chưa biết và một số đạo hàm riêng của nó.

Định nghĩa 1.1. *Cho $k \in \mathbb{N}_+$ và $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Một biểu thức dạng*

$$F(x, u(x), \partial u(x), \ldots, \partial^k u(x)) = 0 \tag{1.1}$$

được gọi là một phương trình ĐHR bậc k, ở đây

$$F \colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \mathbb{R}^{n^k} \longrightarrow \mathbb{R}$$

là hàm cho trước và $u \colon U \to \mathbb{R}$ là hàm cần tìm.

Ở đây, chúng ta sử dụng các ký hiệu sau: $\partial^k u(x) = \{\partial^\alpha u(x) \mid \alpha| = k\}$ để chỉ đạo hàm hỗn hợp bậc k của hàm u, trong đó $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ là một bộ đa chỉ số với giá $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, và

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(x).$$

Định nghĩa 1.2.

- *Phương trình* (1.1) *được gọi là* ***tuyến tính*** *nếu nó có dạng:*

$$\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x),$$

  trong đó $a_\alpha(x), f(x)$ là các hàm số cho trước. $a_\alpha(x)$ được gọi là hệ số và $f(x)$ được gọi là vế phải của phương trình. Nếu $f(x) \equiv 0$, phương trình được gọi là **thuần nhất**.

- *Phương trình* (1.1) *được gọi là* ***nửa tuyến tính*** *nếu nó có dạng:*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\partial^\alpha u + a_0(x, u(x), \partial u(x), \ldots, \partial^{k-1}u(x)) = f(x),$$

- *Phương trình* (1.1) *được gọi là* ***tựa tuyến tính*** *nếu nó có dạng:*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u(x), \partial u(x), \ldots, \partial^{k-1}u(x))\partial^\alpha u + \\ + a_0(x, u(x), \partial u(x), \ldots, \partial^{k-1}u(x)) = f(x), \quad (1.2)$$

- *Phương trình* (1.1) *được gọi là* ***phi tuyến hoàn toàn*** *nếu nó phụ thuộc không tuyến tính vào đạo hàm bậc cao nhất.*

Một hệ PT ĐHR là một nhóm gồm vài phương trình ĐHR có chứa vài hàm số cần tìm và một số ĐHR của chúng.

Sau đây là một số phương trình hay gặp.

Phương trình tuyến tính

- Pt Laplace $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$.
- Pt truyền nhiệt $u_t - \Delta u = 0$.
- Pt Schrödinger $iu_t + \Delta u = 0$.
- Pt truyền sóng $u_{tt} - \Delta u = 0$.

Phương trình phi tuyến

- Pt phản ứng khuếch tán.
- PT $p-$Laplace (tựa tuyến tính cấp 2): $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$.

Hệ phương trình

- Hệ pt cân bằng trong lý thuyết đàn hồi tuyến tính

$$\mu\Delta U + (\lambda + \mu)D(\mathrm{divU}) = 0$$

  trong đó λ, μ là các hằng số Lamé.
- Hệ pt Maxwell

$$\begin{cases} \mathbb{E}_t = \operatorname{rot}\mathbb{B}, \\ \mathbb{B}_t = -\operatorname{rot}\mathbb{E}, \\ \operatorname{div}\mathbb{B} = \operatorname{div}\mathbb{E} = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

- Hệ pt Navier-Stokes.

1.2 Phân loại phương trình và đưa phương trình về dạng chính tắc

1.2.1 Phương trình bậc cao (Đọc thêm)

Xét toán tử tuyến tính tổng quát

$$L(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x)\partial^\alpha = 0. \tag{1.4}$$

Định nghĩa 1.3.

1. **Biểu trưng** *của toán tử* (1.4) *là biểu thức*

$$\sigma(x,\xi) := \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$$

2. **Biểu trưng chính** *của toán tử* (1.4) *là biểu thức*

$$\sigma_k(x,\xi) := \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$$

Toán tử (1.4) *được gọi là elliptic tại điểm* $x^0 \in \Omega$ *nếu* $\sigma_k(x^0,\xi) \neq 0$ *với mọi* $\xi \neq 0$.

Ví dụ 1.1.

- *Xét toán tử Laplace* $L_1 = \Delta = \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_n}^2$. *Ta có*

$$\sigma_2(L_1)(x,\xi) = (i\xi_1)^2 + \ldots + (i\xi_n)^2 = -|\xi|^2.$$

Do đó $\sigma_2(L_1)(x,\xi) \neq 0$ *với mọi* $\xi \neq 0$, *toán tử Laplace là elliptic tại mọi điểm.*

- *Xét toán tử sóng* $L_2 = \partial_t^2 - \Delta$. *Ta có*

$$\sigma_2(L_2)(t,x,\tau,\xi) = -\tau^2 + |\xi|^2.$$

Do đó $\sigma_2(L_2)(t,x,\tau,\xi) = 0$ *tại* $\tau = |\xi|, \mathbb{R}^{n+1} \ni (\tau,\xi) \neq 0$, *toán tử truyền sóng không phải là elliptic.*

- *Xét toán tử truyền nhiệt* $L_3 = \partial_t - \Delta$. *Ta có*

$$\sigma(L_3)(t,x,\tau,\xi) = i\tau + |\xi|^2,\ \sigma_2(L_3)(t,x,\tau,\xi) = |\xi|^2.$$

Do đó $\sigma_2(L_3)(t,x,\tau,\xi) = 0$ *tại* $|\xi| = 0, \tau \neq 0$, *toán tử truyền nhiệt không phải là elliptic.*

1.2.2 Phương trình tuyến tính cấp 2 trường hợp nhiều biến

Xét phương trình tuyến tính cấp hai

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\partial u_{x_i} + a(x)u = f(x) \tag{1.5}$$

với các hệ số và vế phải là các hàm thực. Ta có thể coi $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ với $i, j = 1, \ldots, n$. Thật vậy, do tính chất đối xứng của đạo hàm cấp hai, ta có thể thay thế phần đạo hàm cấp hai của (1.5) bởi $\sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}u_{x_ix_j}$ với $a'_{ij}(x) = \frac{a_{ij}(x)+a_{ji}(x)}{2}$.

Khi đưa phương trình về dạng chính tắc **tại điểm** x^0 ta xét ma trận hệ số các đạo hàm cấp hai $A = \Big(a_{ij}(x^0)\Big)$. Đây là một ma trận thực đối xứng cấp n, do đó ta có thể tìm được các giá trị riêng của nó, ký hiệu $\lambda_1(x^0), \ldots, \lambda_n(x^0)$. Gọi $n_+ = n_+(x^0)$ là số các giá trị riêng dương của A, $n_- = n_-(x^0)$ là số các giá trị riêng âm của A, $n_0 = n_0(x^0)$ là số các giá trị riêng bằng 0 của A. Gọi T là ma trận đổi cơ sở để đưa ma trận A về dạng chéo hóa $B = T^tAT$. Ta có phép biến đổi tọa độ $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Theo các biến mới này, pt (1.5) có dạng

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{n_+}^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{n_++1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{n_++n_-}^2} + F\big(\xi, v, \frac{\partial v}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial \xi_n}\big) = 0.$$

Ta tính lại phần chính của pt (1.5) theo biến ξ_i

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_p}\frac{\partial \xi_p}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_p \partial \xi_q}\frac{\partial \xi_p}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_q}{\partial x_j} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_p}\frac{\partial^2 \xi_p}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.6}$$

Định nghĩa 1.4.

- *Pt (1.5) được gọi là elliptic tại điểm x^0 nếu $n_+ = n$ hoặc $n_- = n$.*
- *Pt (1.5) được gọi là hyperbolic tại điểm x^0 nếu $n_+ = n - 1$ và $n_- = 1$ hoặc $n_- = n - 1$ và $n_+ = 1$.*
- *Pt (1.5) được gọi là parabolic tại điểm x^0 nếu $n_0 = 0$.*
- *Pt (1.5) được gọi là elliptic/hyperbolic/parabolic trên miền Ω nếu nó elliptic/hyperbolic/parabolic tại mọi điểm $x^0 \in \Omega$.*

Chú ý là định nghĩa trên không vét hết các khả năng của n_+, n_-, n_0.

Trong phần bài tập, khi tìm phép đổi biến đưa pt (1.5) tại điểm x^0 về dạng chính tắc, ta thường xét dạng đặc trưng của pt (1.5):

$$Q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\alpha_i\alpha_j.$$

Ký hiệu

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \qquad \alpha^t = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad A = (a_{ij}(x^0)).$$

Nếu ta đặt $\beta = T\alpha$, hay $\alpha = T^{-1}\beta$ trong đó $T \in \mathcal{M}_{n\times n}$ là ma trận không suy biến tương ứng với phép đổi biến nào đó, thì dạng toàn phương nói trên trở thành

$$Q(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \beta^t (T^{-1})^t A T^{-1} \beta. \tag{1.7}$$

Giả sử dạng toàn phương này là dạng đặc trưng của phương trình ban đầu sau khi sử dụng phép đổi biến $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ta sẽ tìm mối quan hệ giữa hai ma trận $J = \dfrac{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ và T.

Qua phép đổi biến, phương trình trở thành

$$\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + F(\xi_1, \dots, \xi_n, u, u_{\xi_1}, \dots, u_{\xi_n}) = 0,$$

với $b_{kl} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} a_{ji}(x) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i}$, ma trận các hệ số tuân theo quy tắc $B = JAJ^t$. Mặt khác ta đã giả sử (1.7) là dạng đặc trưng của phương trình này. Như vậy $J = (T^{-1})^t$.

Vì thế trong bài tập đưa về dạng chính tắc, ta biến đổi dạng đặc trưng để đưa về dạng chính tắc, tìm ma trận T trước, thì ma trận của phép đổi biến sẽ là $J = (T^{-1})^t$. Thêm nữa, ta có thể tìm T^{-1} bằng phương pháp Gauss-Jordan, do đó nên chọn T ở dạng ma trận tam giác trên.

Ví dụ 1.2. *Đưa pt sau về dạng chính tắc:*

$$2u_{x_1x_1} + 3u_{x_2x_2} - \frac{1}{6}u_{x_3x_3} + 6u_{x_1x_2} - 2u_{x_2x_3} = 0.$$

Dạng đặc trưng của pt là

$$\begin{aligned} K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= 2\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 - \frac{1}{6}\alpha_3^2 + 6\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2\alpha_3 \\ &= \big(\sqrt{2}\alpha_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\xi_2\big)^2 - \big(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\big)^2 + \big(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_3\big)^2 \\ &= \eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2. \end{aligned}$$

Ta đã biến đổi $\eta = B\alpha$, với $B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Ta viết ma trận I_3 vào bên phải B và thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nhân dòng cuối cùng với $\sqrt{2}$ ta được

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Nhân dòng cuối với $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ rồi cộng vào dòng 2 ta có

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Nhân dòng giữa với $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ta được

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Nhân dòng giữa với $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ rồi cộng vào dòng đầu, ta được

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Cuối cùng, chia dòng đầu cho $\sqrt{2}$ ta được

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Do đó ta thu được

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ \sqrt{2} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Và sau phép đổi biến $y = (B^{-1})^t x$ ta thu được pt ở dạng chính tắc

$$u_{\xi_1\xi_1} - u_{\xi_2\xi_2} + u_{\xi_3\xi_3} = 0.$$

1.2.3 Phương trình tuyến tính cấp 2 trường hợp hai biến

Xét phương trình tuyến tính cấp 2 hai biến ở dạng

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \tag{1.8}$$

Để phân loại phương trình, ta xét dấu của biểu thức $\Delta = b^2 - ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ phương trình thuộc loại hyperbolic.
- Nếu $\Delta = 0$ phương trình thuộc loại parabolic.
- Nếu $\Delta < 0$ phương trình thuộc loại elliptic.

Ta còn cần tìm các phép đổi biến $\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$ để đưa phương trình về dạng chính tắc. Theo (1.6)

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}
\end{aligned}$$

và các hệ số trở thành

$$\begin{aligned}
&\tilde{a} = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2\\
&\tilde{b} = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + c\xi_y\eta_y\\
&\tilde{c} = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Ở dạng chính tắc, pt có một trong các hệ số $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ triệt tiêu. Do đó phép đổi biến có mối liên hệ với nghiệm của phương trình vi phân $a\omega_x^2 + 2b\omega_x\omega_x + c\omega_y^2 = 0$. Ta cần đến các khái niệm sau đây.

Định nghĩa 1.5. *Đường đặc trưng của phương trình* (1.8) *là họ đường cong* $\omega(x,y) = C$ *sao cho*

$$a\omega_x^2 + 2b\omega_x\omega_y + c\omega_y^2 = 0.$$

Định nghĩa 1.6. *Phương trình vi phân đặc trưng của* (1.8) *là phương trình*

$$a(y')^2 - 2by' + c = 0 \tag{1.10}$$

Bổ đề 1.7. *Giả sử hàm* $\omega(x,y) \in C^1(\Omega)$ *và* $\omega_y \neq 0$ *tại mọi điểm của lân cận* Ω. *Khi đó họ đường cong* $\omega(x,y) = C$ *là đường đặc trưng của phương tình* (1.8) *nếu và chỉ nếu* $\omega(x,y) = C$ *là tích phân tổng quát của phương trình vi phân* (1.10).

Muốn đưa được phương trình về dạng chính tắc, chẳng qua ta thực hiện phép đổi biến sao cho các hệ số của phương trình sau khi biến đổi xuất hiện $\pm 1, 0$. Nếu phép đổi biến được lựa chọn sao cho $\tilde{a} = 0$ thì $\xi(x,y) = C$ chính là một đường đặc trưng của phương trình (1.8). Theo bổ đề nói trên phép đổi biến đó chẳng qua là một nghiệm của phương trình vi phân đặc trưng. Tùy theo loại của phương trình, ta có các sự lựa chọn như sau.

1. $\Delta > 0$, phương trình hyperbolic. Theo lý thuyết phương trình vi phân (GT 3), phương trình (1.10) có 2 nghiệm tổng quát độc lập tuyến tính $\omega_1(x,y) = C$ và $\omega_2(x,y) = C$. Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} \xi = \omega_1(x,y) \\ \eta = \omega_2(x,y) \end{cases}$$

Theo công thức (1.9), phương trình (1.8) đưa về phương trình có hệ số $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$. Ngoài ra,

$$\tilde{b} = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + c\xi_y\eta_y \neq 0.$$

Ta thu được phương trình

$$\tilde{b}v_{\xi\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) = 0.$$

Thực hiện phép đổi biến $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$, ta thu được dạng chính tắc của phương trình (1.8) trong trường hợp hyperbolic

$$v_{\alpha\alpha} - v_{\beta\beta} + \tilde{F}^*(\alpha, \beta, v, v_\alpha, v_\beta) = 0.$$

2. $\Delta < 0$, phương trình elliptic. Theo lý thuyết phương trình vi phân (GT 3), phương trình (1.10) có 2 tích phân tổng quát độc lập tuyến tính $\omega(x,y) = C$ và $\overline{\omega}(x,y) = C$ là liên hợp phức của nhau. Viết lại $\omega(x,y) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ và thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} \xi = \alpha(x,y) \\ \eta = \beta(x,y) \end{cases}$$

Ta có

$$\frac{D(\omega, \bar{\omega})}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \alpha_x + i\beta_x & \alpha_x - i\beta_x \\ \alpha_y + i\beta_y & \alpha_y - i\beta_y \end{vmatrix} = -2i \begin{vmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ \alpha_y & \beta_y \end{vmatrix} = -2i\frac{D(\alpha,\beta)}{D(x,y)}$$

Hai tích phân tổng quát độc lập tuyến tính nên $\frac{D(\omega,\bar{\omega})}{D(x,y)} \neq 0$, cho nên $\frac{D(\alpha,\beta)}{D(x,y)} \neq 0$, phép đổi biến là đơn trị. Hơn nữa, biến đổi pt

$$\begin{aligned} &a(\alpha_x + i\beta_x)^2 + 2b(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y) + c(\alpha_y + i\beta_y)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow &\Big[(\alpha_x^2 + 2\alpha_x\alpha_y + \alpha_y^2) - (\beta_x^2 + 2\beta_x\beta_y + \beta_y^2)\Big] + \\ &+ 2i\big(a\alpha_x\beta_x + b(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + c\alpha_y\beta_y\big) = 0. \end{aligned}$$

Theo công thức (1.9), tính toán trên cho ta: $\tilde{a} = \tilde{c} \neq 0$, $\tilde{b} = 0$. Do đó sau phép đổi biến ta thu được phương trình

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \tilde{F}^*(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) = 0.$$

3. $\Delta = 0$, phương trình parabolic. Theo lý thuyết phương trình vi phân (GT 3), phương trình (1.10) có 2 tích phân tổng quát trùng nhau $\omega(x,y) = C$. Thực hiện phép đổi biến
$$\begin{cases} \xi = \omega(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases}$$
trong đó $\psi(x,y)$ là hàm bất kỳ sao cho $\frac{D(\xi,\eta)}{(x,y)} \neq 0$.

Theo công thức (1.9), phương trình (1.8) đưa về phương trình có hệ số $\tilde{a} = 0$.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $b = \sqrt{ac}$, $a > 0$, $c > 0$. Ta viết lại
$$\begin{aligned} &\tilde{a} = (\sqrt{a}\xi_x + \sqrt{c}\eta_x)^2 = 0 \qquad &\tilde{b} = (\sqrt{a}\xi_x + \sqrt{c}\eta_x)(\sqrt{a}\xi_y + \sqrt{c}\eta_y) \\ &\tilde{c} = (\sqrt{a}\xi_y + \sqrt{c}\eta_y)^2 \neq 0 \end{aligned}$$
trong đó $\sqrt{a}\xi_y + \sqrt{c}\eta_y \neq 0$ do $\frac{D(\xi,\eta)}{x,y} \neq 0$ và $\sqrt{a}\xi_x + \sqrt{c}\eta_x = 0$.

Ta thu được phương trình ở dạng chính tắc
$$v_{\eta\eta} + \tilde{F}^*(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta) = 0.$$

Ví dụ 1.3. *Đưa phương trình sau đây về dạng chính tắc*
$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} - u_y = 0. \tag{1.11}$$
Phương trình vi phân đặc trưng của (1.11) là: $(y')2 + 2y' - 3 = 0$, nó có nghiệm $y' = 1$ và $y' = -3$. Do đó hai tích phân tổng quát là $y - x = C$ và $y + 3x = C$.

Thực hiện phép đổi biến: $\begin{cases} \xi = y - x \\ \eta = y + 3x \end{cases}$, ta tính được
$$\begin{aligned} &u_x = -u_\xi + 3u_\eta,\ u_y = u_\xi + u_\eta, \\ &u_{xx} = u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta},\ u_{xy} = -u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}, \\ &u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{aligned}$$
Thay vào (1.11), ta thu được phương trình
$$-16v_{\xi\eta} + v_\xi + v_\eta = 0.$$

1.3 Bài toán Cauchy. Định lý Cauchy-Kovalepskaia

Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$. Định lý Cauchy-Kovalepskaia cổ điển là định lý về tính tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp m trong lớp giải tích. Để đơn giản mà vẫn làm rõ ý tưởng, chúng ta phát biểu ở đây định lý cho trường hợp phương trình cấp 2. Xét phương trình
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x). \tag{1.12}$$

Trong trường hợp một biến, $n = 1$, phương trình (1.12) là phương trình vi phân

$$u'' + b(x)u' + c = 0. \tag{1.13}$$

Bài toán Cauchy đối với (1.13) là bài toán tìm nghiệm của (1.13) thỏa mãn điều kiện ban đầu $u(x^0) = u_0$, $u'(x^0) = u_1$. Ta biết (1.13) có nghiệm giải tích duy nhất trong lân cận của điểm x^0 nếu $b(x), c(x)$ là các hàm giải tích trong lân cận x^0. Tổng quát hóa lên trường hợp nhiều biến của bài toán này được phát biểu như sau.

- Giả sử S là một mặt $(n-1)$ chiều trong Ω đủ trơn (ở đây ta có thể giả thiết S thuộc lớp C^2) và được cho bởi phương trình

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

  trong đó F là một hàm thực và $\nabla F = (F_{x_1}, F_{x_2}, \ldots, F_{x_n}) \neq 0$.

- Trong Ω ta cho trường vector $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x))$ với $\lambda_i(x)$ thực, thuộc lớp C^1, $\lambda(x) \neq 0$, $\forall x$ và trường vector này không tiếp xúc với S, có nghĩa là

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}\Big|_S = \frac{\langle \lambda, \nabla F\rangle}{|\lambda|} \neq 0.$$

- Lấy điểm $x^0 \in S$ tùy ý.

Bài toán Cauchy tổng quát là bài toán tìm nghiệm của (1.12) với điều kiện $u\big|_S = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial \lambda}\big|_S = u_1(x)$, trong đó $u_0(x)$, $u_1(x)$ – dữ kiện Cauchy, là các hàm đã cho trên S, còn S được gọi là mặt Cauchy.

Ví dụ 1.4. *Ký hiệu $x_n = t$ và $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Xét S là siêu phẳng $t = t_0$ trong $\mathbb{R}^n$, còn $\lambda(x)$ là trường vector $\frac{\partial}{\partial t}$. Ta có bài toán Cauchy với dữ kiện*

$$\begin{cases} u\big|_{t=t_0} &= u_0(x'), \\ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=t_0} &= u_1(x'). \end{cases}$$

Định nghĩa 1.8.

- *Phương trình đặc trưng của phương trình* (1.12) *là phương trình*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j = 0; \alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

- *Điểm x^0 của mặt $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ được gọi là điểm đặc trưng của phương trình* (1.12) *nếu*

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\omega_{x_i}\omega_{x_j}\Big)\Big|_{x=x^0} = 0.$$

- *Mặt S được gọi là mặt đặc trưng của phương trình* (1.12) *nếu mọi điểm của nó đều là điểm đặc trưng của phương trình* (1.12).

Xem thêm [1, chapter 3].
Ta có định lý tồn tại duy nhất nghiệm trong lớp hàm giải tích như sau

Định lí 1.9. *Giả sử các hệ số $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ và vế phải $f(x)$ là các hàm giải tích trong lân cận U của điểm x^0, các dữ kiện Cauchy $u_0(x)$, $u_1(x)$ là các hàm giải tích trong lân cận của $S \cap U$ và S không chứa điểm đặc trưng của phương trình* (1.12). *Khi đó bài toán Cauchy tổng quát có nghiệm giải tích duy nhất trong lân cận của mặt S.*

Ý tưởng chứng minh. Bài toán được chứng minh dựa trên giả thiết về tính giải tích của các hệ số và vế phải của phương trình, tính chất này cho ta biểu diễn các vế của phương trình ở dạng chuỗi lũy thừa. Nhắc lại là một hàm số f được gọi là giải tích (thực hoặc phức) trong lân cận của điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$ nếu nó khai triển được ở dạng chuỗi lũy thừa như sau

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(x^0)}{\partial x^\alpha} (x - x^0)^\alpha$$

trong $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ là bộ đa chỉ số và $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_!$, $(x - x^0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$.

Ta tìm được duy nhất nghiệm giải tích u trong lân cận điểm x^0 khi tính được các đạo hàm các cấp $\frac{\partial^\alpha u(x^0)}{\partial x^\alpha}$ tại x^0. Các giá trị này có thể tính được qua dữ kiện Cauchy, hệ số, vế phải của phương trình nếu như mặt S không chứa điểm đặc trưng của (1.12).

Thật vậy, vì $|\nabla F| \neq 0$ ta có thể giả sử $F_{x_n}(x^0) \neq 0$, và pt mặt S được viết lại như sau

$$x_n = \varphi(x'),\ x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$$

với hàm trơn $\varphi(x')$. Ta xét phép biến đổi $\begin{cases} y_i = x_i - x_i^0 \equiv F_i(x),\ i = 1, \ldots, n \\ y_n = F(x) \equiv F_n(x) \end{cases}$, trong tọa độ này mặt S có pt $y_n = 0$.

Phép đổi biến này biến U_{x^0} thành lân cận của gốc tọa độ. Ta biến đổi pt theo biến y và thu được

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(y) v_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y) v_{y_i} + \alpha(y) v = f_1(y), \tag{1.14}$$

trong đó $\alpha_{nn}(y) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x) F_{x_i} F_{x_j}$. Điều kiện Cauchy trở thành

$$\begin{cases} v \big|_S = u_0(y', \varphi(y')) \equiv v_0(y'),\ y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}), \\ \langle \nabla_y v, \lambda(y(x)) \rangle \big|_S = v_1'(y') \end{cases} \tag{1.15}$$

trong đó $\lambda(y(x)) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}, \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial \lambda}\right)$.

Từ (1.15), đạo hàm hai vế của pt thứ nhất ta có

$$v_{y_i} \big|_S = (v_0)_{y_i},\ i = 1, \ldots, n-1.$$

Sử dụng điều kiện $\frac{\partial F_n}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \neq 0$ trên S, ta có

$$v_{y_n} = \big(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\big)^{-1}\big(v_1'(y') - \sum_{i=1}^{n-1}(v_0)_{y_i}\frac{\partial F_i}{\partial \lambda}\big) = v_i(y').$$

Từ hai biểu thức trên ta có thể tính tiếp đạo hàm cấp hai hỗn hợp của v. Cuối cùng, điều kiện mặt S không có điểm đặc trưng cho ta tính từ (1.14)

$$v_{y_n y_n} = \alpha_{nn}^{-1}(y')\big\{f_1(y) - \sum_{i+j<2n}\alpha_{ij}(y)v_{v_i v_j} - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(y)v_{y_i} - \alpha(y)v\big\}$$

Như vậy ta đã chứng minh được rằng các đạo hàm cho đến cấp hai của u tại điểm x^0 được tính thông qua hệ số, vế phải và các dữ kiện Cauchy nếu mặt S không chứa điểm đặc trưng và $\frac{\partial F}{\partial \lambda} \neq 0$. □

Trong trường hợp mặt S có chứa điểm đặc trưng của phương trình (1.12) thì (1.14) cho ta một ràng buộc giữa các hệ số, vế phải và dữ kiện Cauchy của phương trình. Do đó lúc này các điều kiện Cauchy không thể cho tùy ý, và bài toán có thể không có nghiệm hoặc có nghiệm nhưng không duy nhất.

Ví dụ 1.5. *$n = 2$, xét trong miền phẳng $\Omega = \{|x| \leq r\}$ bài toán Cauchy*

$$\begin{cases} u_{xy} = f(x,y) \\ u\,\big|_{y=0} = u_0(x), u_y\,\big|_{y=0} = u_1(x). \end{cases}$$

$y = 0$ là đường đặc trưng nên bài toán cần thêm điều kiện $\frac{du_1(x)}{dx} = f(x,0)$. Điều kiện này là cần và đủ để bài toán có nghiệm, nghiệm được biểu diễn như sau

$$u(x,y) = \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi,\eta)d\eta + u_0(x) + g(y)$$

trong đó $g(y) \in C^2$, $g(0) = 0$, $g'(0) = u_1(0)$.

Định lý trên không thể tổng quát hóa lên cho lớp hàm khả vi vô hạn C^∞.

Ví dụ 1.6. *Xét bài toán*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \partial_x^2 u = 0, \\ u(0,x) = \varphi(x), \partial_t u(0,x) = \psi(x). \end{cases}$$

Phương trình này vô nghiệm trong trường hợp các điều kiện ban đầu $\varphi(x)$, $\psi(x)$ là các hàm C^∞.

Ví dụ 1.7 (Lewy)**.** *Tồn tại hàm $F(t,x,y)$ khả vi vô hạn sao cho phương trình $\partial_x u + i\partial_y u - 2i(x+iy)\partial_t u = F(t,x,y)$ không có nghiệm (Sobolev) trong lân cận của điểm $(t_0, x^0, y_0) \in \mathbb{R}^3$.*

Xem chi tiết trong [1, chapter 8]

Sau đây ta tính một số ví dụ về mặt đặc trưng của một số pt.

Ví dụ 1.8. *Xét pt truyền sóng* $u_{tt} - u_{x_1x_1} - \ldots - u_{x_{n-1}x_{n-1}} = 0$.
Pt đặc trưng của pt truyền sóng là

$$\Big(\frac{\partial\omega}{\partial t}\Big)^2 = \Big(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\Big)^2 + \ldots + \Big(\frac{\partial\omega}{\partial x_{n-1}}\Big)^2$$

Nói riêng, pt có mặt đặc trưng là mặt phẳng

$$a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + \ldots + a_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-1}^0) = 0, \quad \text{với } a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_n^2,$$

và mặt nón

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-1}^0)^2 = (t - t^0)^2.$$

Ví dụ 1.9. *Xét pt Laplace* $u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n} = 0$.
Pt đặc trưng của pt Laplace là

$$\Big(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\Big)^2 + \ldots + \Big(\frac{\partial\omega}{\partial x_{n-1}}\Big)^2 = 0.$$

Pt này không có nghiệm thỏa mãn điều kiện $\nabla\omega \neq 0$*, do đó pt Laplace không có mặt đặc trưng.*

Ví dụ 1.10. *Xét pt truyền nhiệt* $u_t - u_{x_1x_1} - \ldots - u_{x_{n-1}x_{n-1}} = 0$.
Pt đặc trưng của pt truyền sóng là

$$\Big(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\Big)^2 + \ldots + \Big(\frac{\partial\omega}{\partial x_{n-1}}\Big)^2 = 0$$

Suy ra $\omega_{x_i} = 0$ *với mọi* $i = 1, \ldots, n-1$*. Pt mặt đặc trưng có dạng* $\omega(t) = C$ *với* $\omega'(t) \neq 0$.
Nói riêng, pt có mặt đặc trưng là các mặt đẳng nhiệt $t =$*const.*

1.4 Bài toán đặt chỉnh

Chúng ta biết rằng các bài toán trong phương trình đạo hàm riêng là các mô hình để giải các bài toán vật lý trong thực tế. Chúng ta cần đảm bảo các sai số trong khi mô hình hóa không ảnh hưởng đến kết quả bài toán, nếu có sai số nhỏ trong việc đo đạc thực nghiệm thì sẽ dẫn đến sai số nhỏ trong nghiệm của mô hình toán tương ứng. Đó chính là tính chất phụ thuộc liên tục của nghiệm vào các dữ kiện ban đầu.

Một bài toán ĐHR được gọi là đặt đúng nếu nó thỏa mãn ba điểm sau đây:

1. Bài toán có nghiệm u thuộc không gian hàm X với các điều kiện ban đầu, vế phải, hệ số $\ldots \varphi \in Y$ thuộc không gian hàm Y. Ví dụX và Y có thể là không gian $C^k(\Omega)$ các hàm khả vi liên tục đến cấp k trên miền $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; không gian $L^p(\Omega)$ các hàm $p-$ khả tích trên Ω, không gian Sobolev $W^{m,p}(\Omega)\ldots$

2. Nghiệm u là duy nhất trong lớp hàm X.

3. Nghiệm phụ thuộc liên tục vào các dữ kiện ban đầu, nghĩa là nếu $\varphi_n(x)$ là dãy hàm trong không gian Y hội tụ đến $\varphi \in Y$, thì nghiệm u_n tương ứng của bài toán với dữ kiện φ_n sẽ hội tụ trong X về nghiệm u của bài toán với dữ kiện φ.

Ví dụ 1.11. *Xét bài toán biên Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta = 0, & x \in \Omega \\ u \Big|_{\partial\Omega} = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

trong đó Ω là một miền biên trơn bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó bài toán là đặt đúng trong lớp hàm $X = C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$, $Y = C(\Omega)$.

Ví dụ 1.12 (Ví dụ H'Adamard)**.** *Xét bài toán giá trị ban đầu* $\begin{cases} u_t t + u_x x = 0, (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$

Xét dãy $\varphi_n(x) = -e^{-\sqrt{n}} \sin nx$, pt tương ứng có nghiệm $u_n = e^{nt-\sqrt{n}} \sin nx$.
Theo chuẩn trong Y, $\varphi_n(x) \to 0$ khi $n \to \infty$, bởi vì

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x)| \leq e^{-\sqrt{n}} \to 0, \text{ khi } n \to \infty.$$

Nhưng nghiệm u_n không hội tụ về $u = 0$ trong X. Thật vậy

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^2_+} |u_n(x)| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} e^{nt-\sqrt{n}} \nrightarrow 0$$

vì $\lim_{n\to\infty} e^{nt-\sqrt{n}} = \infty$ nên tồn tại t_0 sao cho $e^{nt_0-\sqrt{n}} > 1$. Vậy ta có đpcm.

1.5 Ba loại phương trình cơ bản và các bài toán biên, Cauchy

1.5.1 Phương trình Laplace

Phương trình Laplace: $\Delta u = f$, $x \in \Omega$ với $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn. Phương trình Poisson $\Delta u = 0$.

Điều kiện biên Dirichlet $u \Big|_{\partial\Omega} = g$.

Điều kiện biên Neumann $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = g$, trong đó $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ là đạo hàm theo hướng pháp tuyến ngoài.

Điều kiện biên Robin $\left(au + b\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) \Big|_{\partial\Omega} = g$.

Trong trường hợp $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K$ là miền ngoài, ngoài điều kiện trên biên $\partial\Omega = \partial K$ ta cần giả sử thêm điều kiện của u khi $|x| \to \infty$.

Với phương trình elliptic tổng quát bậc $2m$, ta cần giả sử thêm m điều kiện trên biên.

1.5.2 Phương trình truyền sóng

Phương trình truyền nhiệt $u_{tt} - \Delta u = f$, $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$.

Ngoài các điều kiện trên biên $(0, T) \times \partial\Omega$, bài toán còn cần hai điều kiện ban đầu $\begin{cases} u(0,x) = \varphi(x), \\ u_t(0,x) = \psi(x), \end{cases}$ $x \in \Omega$ (bằng số đạo hàm theo biến t).

1.5.3 Phương trình truyền nhiệt

Phương trình truyền nhiệt $u_t - \Delta u = f$, $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$.

Ngoài các điều kiện trên biên $(0, T) \times \partial\Omega$, bài toán còn cần điều kiện ban đầu $u(0, x) = \varphi(x)$, $x \in \Omega$ bằng số bậc đạo hàm theo biến t.

Với phương trình parabolic dạng tổng quát $u_t - P(x, \partial_x)$, thì ta cần giả sử một điều kiện ban đầu và số điều kiện biên được cho như số điều kiện biên của phần elliptic $P(x, \partial)$.

1.6 Bài tập

1. Xác định loại của các pt sau và đưa về dạng chính tắc:

   a) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$.

   b) $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$.

   c) $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$.

   d) $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} + (e^{2y} - e^{x+y})u_y = 0$.

   e) $\sin^2 x u_{xx} - 2y \sin x u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$.

2. Xác định loại của các pt sau và đưa về dạng chính tắc:

   a) $4u_{x_1x_1} + 3u_{x_2x_2} + \frac{2}{3}u_{x_3x_3} + 2u_{x_1x_2} + 2u_{x_1x_3} = 0$.

   b) $4u_{x_1x_1} + 4u_{x_2x_2} - \frac{2}{3}u_{x_3x_3} + 4u_{x_1x_2} + 2u_{x_2x_3} = 0$.

   c) $3u_{x_1x_1} + 2u_{x_2x_2} - 2u_{x_3x_3} - \frac{1}{2}u_{x_4x_4} + 6u_{x_1x_2} - 2u_{x_1x_4} + 2u_{x_2x_3} - 2u_{x_2x_4} + 2u_{x_3x_4} = 0$.

   d) $4u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \frac{1}{3}u_{x_3x_3} - 2u_{x_1x_2} + 2u_{x_1x_3} = 0$.

Chương 2

Phương trình truyền sóng

2.1 Thiết lập phương trình dao động của dây, của màng mỏng, bài toán Cauchy

2.1.1 Phương trình dao động của dây

Xét một đoạn dây không uốn, đàn hồi, thuần nhất có chiều dài l đặt dọc theo trục Ox. Giả sử rằng sợi dây dao động quanh vị trí cân bằng Ox và tại thời điểm t, sợi dây có hình dáng như sau đây.

Giả sử rằng sợi dây tiếp tục dao động trog mặt phẳng thẳng đứng với độ dịch chuyển của điểm có vị trí x tại thời điểm t là $u(t, x)$, và có thể bỏ qua chuyển động theo phương ngang ($u_x << 0$).

Xét một đoạn dây giữa điểm x_0 và x_1 bất kỳ, khi đó sợi dây chịu tác động của hai lực căng đặt tại hai đầu mút $x = x_0$ và $x = x_1$. Theo định luật thứ ba của Newton ta có $F = ma$.

Chiếu lên trục Ox ta có:

$$\frac{T}{\sqrt{1+u_x^2}} \Big|_{x_0}^{x_1} = 0.$$

Chiếu lên trục thẳng đứng ta có:

$$\frac{Tu_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt} dx.$$

Xấp xỉ $\sqrt{1+u_x^2} \sim 1$, ta có $T(t, x_0) = T(t, x_1)$, lực căng dây là hằng số trên toàn bộ sợi dây. Do ta xét với x_0, x_1 bất kỳ, nên pt sau cho ta

$$Tu_{xx} = \rho u_{tt} \Leftrightarrow u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \text{ với } c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Một số dạng khác của pt

- Nếu sức cản của không khí $r > 0$ đáng kể, pt có thêm thành phần tỉ lệ thuận với lực cản này
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + ru_t = 0.$$

- Nếu sợi dây chịu lực đàn hồi theo phương ngang, ta có pt

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + ku = 0,\ k > 0.$$

- Nếu sợi dây chịu tác động của ngoại lực $f(t,x)$, ta có pt không thuần nhất

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t,x).$$

Bên cạnh đó, những điều kiện vật lý cho trên sợi dây tương ứng với điều kiện biên của bài toán.

- Nếu sợi dây được giữ cố định tại mỗi đầu: $u(t,0) = u(t,l) = 0$.
- Nếu một đầu của sợi dây được cho chuyển động tự do theo chiều ngang, không chịu lực cản nào thì lực căng tại đầu dây đó $T\big|_{x=l} = 0$, hay $u_x\big|_{x=l} = 0$.

2.1.2 Phương trình dao động của màng mỏng

Xét một màng mỏng thuần nhất được căng lên một khung phẳng trong mặt phẳng Oxy như hình vẽ.

Giả sử màng không dịch chuyển trên mặt phẳng mà chỉ dao động theo phương thẳng đứng và gọi $u(t,x,y)$ là độ dịch chuyển của màng tại điểm có tọa độ (x,y) tại thời điểm t. Xét một phần của màng mỏng giới hạn bởi miền $\Omega \subset D$. Theo định luật ba Newton ta có $F = ma$ trên miền này.

Tương tự phần trên, do màng không dịch chuyển theo phương của mặt phẳng, nên ta có lực căng T là hằng số.

Chiếu lên trục thẳng đứng ta có

$$F = \int_{\partial\Omega} T \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{\Omega} \rho u_{tt} dxdy.$$

Áp dụng định lý Ostrogradsky ta có

$$\int_{\partial\Omega} T \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{\Omega} \nabla(T\nabla u) dxdy.$$

Do đẳng thức đúng trên miền Ω ta suy ra

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, c^2 = \frac{T}{\rho}, \Delta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

Các hiện tượng vật được mô tả bởi pt truyền sóng trong không gian ba chiều bao gồm hiện tượng rung của sợi dây đàn hồi, sóng âm trong không khí, sóng điện từ, sóng địa chất truyền trong lòng trái đất.

Hai mô hình này được giới thiệu trong [6] và xây dựng chi tiết hơn trong [7].

2.1.3 Bài toán Cauchy

Là bài toán $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$

Phương pháp đặc trưng giải bài toán Cauchy

Ví dụ 2.1. *Giải bài toán Cauchy*

$$\begin{cases} 4y^2 u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0, \\ u(x,y)\Big|_{y=0} = \varphi(x), u_y(x,y)\Big|_{y=0} = \psi(x), x \in (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Phương trình vi phân đặc trưng

$$4y^2(y')^2 - 2(1-y^2)y' - 1 = 0.$$

Suy ra $y' = -\frac{1}{2}$ và $y' = \frac{1}{2y^2}$, hai tích phân tổng quát của pt vi phân này là $x + 2y = C$ và $x - \frac{2y^3}{3} = C$.

Đổi biến $\begin{cases} \xi = x + 2y \\ \eta = x - \frac{2y^3}{3} \end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned} & u_x = u_\xi + u_\eta, u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ & u_y = 2u_\xi - 2y^2 u_\eta, u_{yy} = 4u_{\xi\xi} - 8y^2 u_{\xi\eta} + 4y^4 u_{\eta\eta} - 4y u_\eta \\ & u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + 2(1-y^2)u_{\xi\eta} - 2y^2 u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

Thay vào pt ban đầu ta có $4(1+y^2)^2 u_{\xi\eta} = 0 \leftrightarrow u_{\xi\eta} = 0$. Phương trình này có nghiệm $u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$.

Thay lại biến x, y ta có $u(x,y) = f(x+2y) + g(x - \frac{2y^3}{3})$. Từ điều kiện ban đầu $y = 0$,

$$\begin{aligned} & f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ & u_y = 2f'(x+2y) - 2y^2 g'(x - \frac{2y^3}{3}), \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\psi(x), \\ \Rightarrow & f(x) = \int_0^x f'(r)dr + f(0) = \frac{1}{2}\int_0^x \psi(r)dr + f(0), \\ & g(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \psi(r)dr - f(0). \end{aligned}$$

Cuối cùng ta thu được nghiệm của pt

$$u(t,x) = \varphi(x - \frac{2y^3}{3}) + \frac{1}{2}\int_{x-\frac{2y^3}{3}}^{x+2y} \psi(r)dr.$$

2.1.4 Bài tập

Giải các bài toán Cauchy sau đây bằng phương pháp đặc trưng

1. $\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = 3x^2, u_y(x,0) = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_{xx} - 4u_{xy} - 5u_{yy} = 0, \\ u\,\big|_{\Gamma} = 8x - 4y^2, u_x\,\big|_{\Gamma} = 5 + 4x, x \in \mathbb{R}, \end{cases}$ trong đó Γ là đường thẳng $y = 3x$.

3. $\begin{cases} u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0 \\ u\,\big|_{y=\sin x} = \varphi(x), u_y|_{y=\sin x} = \psi(x), x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

2.2 Bài toán Cauchy

2.2.1 Công thức d'Alembert

Xét bài toán Cauchy $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x), x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Sử dụng phép đổi biến $\begin{cases} \xi = x - t \\ \eta = x + t \end{cases}$, ta đưa phương trình về dạng $-4u_{\xi\eta} = 0$. Phương trình này có nghiệm tổng quát

$$u(\xi, \eta) = u_1(\xi) + u_2(\eta)$$

với các hàm số u_1, u_2 tùy ý. Thay lại biến t, x ta có nghiệm tổng quát

$$u(t,x) = u_1(x-t) + u_2(x+t).$$

Thay vào điều kiện ban đầu ta có hệ

$$\begin{cases} u_1(x) + u_2(x) = \varphi(x), \\ -u_1'(x) + u_2'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Lấy tích phân trên đoạn $[0, x]$ hai vế pt thứ hai ta có

$$u_2(x) - u_1(x) = \int_0^x [u_2'(r) - u_1'(r)]dr + [u_2(0) - u_1(0)].$$

Kết hợp với pt thứ nhất, giải ra u_1, u_2 rồi thay vào công thức nghiệm tổng quát ta có

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-t) + \varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(r)dr. \tag{2.1}$$

2.2.2 Công thức Kirchhoff

Xét bài toán Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x). \end{cases} \tag{2.2}$$

Bổ đề 2.1. *Gọi $u_p = u_p(t,x)$ là nghiệm của bài toán*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, x = (x_1, x_2, x_3), \\ u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = p(x), \end{cases} \tag{2.3}$$

(chú ý chỉ số dưới $p(x,y,z)$ của nghiệm u_p là điều kiện xuất hiện ở dữ kiện Cauchy). Khi đó $v = \partial_t u_p$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta u = 0, (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ v(0,x) = p(x),\ v_t(0,x) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Ngoài ra, nghiệm này được cho bởi công thức

$$u_p(t,x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} p(y) dS_y, \tag{2.5}$$

trong đó $S_t(x)$ là mặt cầu tâm x, bán kính t (cho bởi pt $(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 = t^2$), dS_y là phần tử diện tích của mặt cầu này.

Chứng minh. Lấy đạo hàm hai vế của pt (2.3) theo t, ta có

$$u_{ttt} - \partial_t \Delta u = 0 \Rightarrow (u_t)_{tt} - \Delta u_t = 0 \Rightarrow v_{tt} - \Delta v = 0.$$

Thay các điều kiện ban đầu, ta có

$$\begin{cases} v(0,x) = u_t(0,x) = p(x) \\ v_t(0,x) = u_{tt}(0,x) = \Delta u(0,x) = 0. \end{cases}$$

Vậy $v = \partial_t u_p$ là nghiệm của bài toán (2.4).

Nhắc lại về tích phân phụ thuộc tham số: giả sử $a(y), b(y)$ xác định trên đoạn $[c,d]$, khả vi trên (c,d), $f(x,y)$ xác định, liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$ và có đạo hàm riêng $f_y(x,y)$ liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$. Khi đó tích phân phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y) dx$$

là hàm số xác định, liên tục, khả vi trên đoạn $[c,d]$, và

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x,y) dx + f(b(y),y) b'(y) - f(a(y),y) a'(y).$$

Nói riêng, tích phân phụ thuộc tham số với cận $a(y) \equiv a$, $b(y) \equiv b$ có

$$I'(y) = \int_a^b f_y(x,y) dx.$$

Ta kiểm tra rằng (2.5) là nghiệm của (2.3). Thật vậy ta sử dụng phép đổi biến $\xi = x+t\alpha$, khi đó công thức (2.5) trở thành

$$u_p(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{S_1(0)} p(x+t\alpha)t^2 dS_1 = \frac{t}{4\pi}\int_{S_1(0)} p(x+t\alpha)dS_1,$$

trong đó dS_1 là phần tử diện tích trên mặt cầu đơn vị.

Do đó $u_p(0,x) = 0$, và lấy đạo hàm hai vế theo t và theo x:

$$\begin{aligned}
\Delta u_p(t,x) &= \frac{t}{4\pi}\int_{S_1(0)} \Delta p(x+t\alpha)dS_1 \\
\partial_t u_p(t,x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{S_1(0)} p(x+t\alpha)dS_1 + \frac{t}{4\pi}\int_{S_1(0)} \nabla p(x+t\alpha)\cdot\alpha dS_1 \qquad (2.6)\\
&= \frac{1}{t}u_p + \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} \nabla p(y)dS_y \\
&= \frac{1}{t}u_p + \frac{1}{4\pi t}\int_{B_t(x)} \Delta p(y)dy, \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

ở đây ta sử dụng định lý Gauss cho tích phân trong (2.7).

Từ công thức (2.6) và điều kiện $p(y)$ là hàm C^2 bị chặn trên $S_1(0)$ ta có

$$\partial u_p(0,x) = \lim_{t\to 0}\partial u_p(t,x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{4\pi}\int_{S_1(0)} p(x+t\alpha)dS_1 = p(x).$$

Lấy đạo hàm lần nữa (2.7) theo t, ta có

$$\begin{aligned}
\partial_{tt}u_p(t,x) &= -\frac{1}{t^2}u_p + \frac{1}{t}\partial_t u_p - \frac{1}{4\pi t^2}\int_{B_t(x)} \Delta p(y)dS_y + \frac{1}{4\pi t}\partial_t\int_{B_t(x)} \Delta p(y)dy \\
&= \partial_t\int_0^t dr\int_{S_r(x)} \Delta p(x+r\alpha)dS_\alpha \\
&= \int_{S_t(x)} \Delta p(y)d\alpha = \Delta u_p.
\end{aligned}$$

□

Sử dụng nguyên lý chồng chất nghiệm (đúng với pt tuyến tính) ta có định lý sau đây

Định lí 2.2. *Giả sử $\varphi(x)\in C^k(\mathbb{R}^3)$, $\psi\in C^{k-1}(\mathbb{R}^3)$. Bài toán Cauchy (2.2) có nghiệm $u\in C^{k-1}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$ được cho bởi công thức*

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} \psi(y)dS_y + \partial_t\Big(\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} \varphi(y)dS_y\Big). \qquad (2.8)$$

2.2.3 Công thức Poisson biểu diễn nghiệm trường hợp hai chiều

Ta xét bài toán Cauchy trong không gian hai chiều.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) = \varphi(x),\ u_t(0, x) = \psi(x). \end{cases} \tag{2.9}$$

Ta sẽ sử dụng phương pháp hạ thấp số chiều không gian, sử dụng nghiệm trong trường hợp ba chiều để thu được nghiệm trong trường hợp hai chiều. Thật vậy, ta có thể coi hàm số và các điều kiện ban đầu không phụ thuộc vào biến số thứ ba x_3. Áp dụng công thức Kirchhoff ta có

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} \psi(y_1, y_2, 0) dS_y + \partial_t \Big(\frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} \varphi(y_1, y_2, 0) dS_y \Big).$$

Ta muốn chuyển hai tích phân mặt loại 1 trên $S_t(x)$ về tích phân bội hai trên hình tròn $K_t(x)$ trong mặt phẳng $x_3 = 0$.

Nhắc lại: giả sử mặt S được cho bởi pt $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, khi đó tích phân mặt loại 1 trên S được chuyển về tích phân bội hai trên D bởi công thức

$$\int_S f(x, y) dS = \iint_D f(x, y) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy.$$

Vì hàm dưới dấu tích phân $\varphi(y_1, y_2, 0), \psi(y_1, y_2, 0)$ là hàm chẵn đối với biến y_3, miền lấy tích phân đối xứng qua mặt phẳng $y_3 = 0$, do đó

$$u(t, x) = 2 \Big\{ \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t^+(x)} \psi(y_1, y_2, 0) dS_y + \partial_t \Big(\frac{1}{4\pi t} \int_{S_t^+(x)} \varphi(y_1, y_2, 0) dS_y \Big) \Big\},$$

trong đó $S_t^+(x)$ là nửa mặt cầu trên. Đưa về tích phân bội hai, hình chiếu của mặt cầu trên xuống mặt phẳng $y_3 = 0$ là hình tròn $K_t(x)$ và mặt cầu có pt

$$y_3 = \sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}$$

ta thu được

$$\begin{aligned} u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi t} \int_{K_t(x)} & \frac{\psi(y_1, y_2)}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy_1 dy_2 \\ & + \partial_t \Big(\frac{1}{2\pi t} \int_{K_t(x)} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy_1 dy_2 \Big) \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.2.4 Nguyên lý Duhamel giải phương trình không thuần nhất

Nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = F(t, x), \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = 0, x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

được cho bởi công thức $u(t,x) = \int_0^t \omega(\tau, x, t-\tau)d\tau$, trong đó $\omega(t,x,\tau)$ là nghiệm của bài toán Cauchy với tham số τ

$$\begin{cases} \omega_{tt} - \Delta\omega = 0, \\ \omega(0,x,\tau) = 0, u_t(0,x,\tau) = F(\tau,x), x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Chứng minh. □

2.2.5 Tính duy nhất nghiệm (đọc thêm)

Định lí 2.3. *Giả sử $u(t,x)$ là nghiệm của bài toán Cauchy sao cho $u$và các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên hình nón $K \cup G \cup S$. Khi đó nghiệm này được xác định một cách duy nhất bởi các dữ kiện Cauchy trên mặt đáy G của hình nón.*

Chứng minh. Để đơn giản về ký hiệu ta chứng minh trong trường hợp biến $x \in \mathbb{R}^2$, n tổng quát được chứng minh tương tự.

Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm của bài toán, khi đó $u = u_1 - u_2$ sẽ là nghiệm của bài toán Cauchy với các điều kiện ban đầu bằng 0:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, (t,x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \\ u(0,x,y) = 0,\ u_t(0,x,y) = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Ta sẽ chứng minh $u(A) = 0$ với A là đỉnh của hình nón. Thật vậy, trong K ta có $\partial_t(u_{tt} - \Delta u) = 0$, lấy tích phân trên K ta thu được

$$\iiint_K \partial u_t \Big\{ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} \Big\} dxdydt = 0$$

Sử dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\frac{1}{2} \iiint_K \partial_t \Big\{ u_t^2 - u_x^2 - u_y^2 \Big\} dxdydt = \iiint_K [\partial_x(u_t u_x) + \partial_y(u_t u_y)] dxdydt$$

Áp dụng công thức Gauss-Ostrogradsky ta có

$$\frac{1}{2} \int_{S \cup G} \Big\{ u_t^2 - u_x^2 - u_y^2 \Big\} \cos(t,\nu) dS = \int_{S\cup G} [u_t u_x \cos(x,\nu) + u_t u_y \cos(t,\nu)] dS$$

Trên mặt đáy G do các điều kiện ban đầu bằng 0 nên $u_t = u_x = u_y = 0$. Trên mặt S, do mặt nón có góc mở $45°$, $\cos(t,\nu) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ và do đó $\cos(t,\nu)^2 = \cos(x,\nu)^2 + \cos(y,\nu)^2$. Thay vào đẳng thức trên, nhân $\cos(t,\nu)$ vào cả hai vế ta có

$$\int_G [u_t \cos(x,\nu) - u_x \cos(t,\nu)]^2 dS + \int_G [u_t \cos(y,\nu) - u_y \cos(t,\nu)]^2 dS = 0.$$

Từ đó

$$\frac{u_t}{\cos(t,\nu)} = \frac{u_x}{\cos(x,\nu)} = \frac{u_y}{\cos(y,\nu)} =: w.$$

Xét l là phương của một đường sinh bất kỳ của hình nón, khi đó

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l} &= u_x \cos(l,x) + u_y \cos(l,y) + u_t \cos(l,t) \\ &= w\big[\cos(x,\nu)\cos(l,x) + \cos(y,\nu)\cos(l,y) + \cos(t,\nu)\cos(l,t)\big] \\ &= w\cos(l,\nu) = 0.\end{aligned}$$

Vậy hàm số $u(t,x,y)$ là hàm hằng dọc theo phương của các đường sinh, nói riêng $u(A) = 0$. □

2.2.6 Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào các điều kiện ban đầu

Trong các công thức biểu diễn nghiệm, nghiệm của pt truyền sóng được cho bởi những tích phân mà hàm dưới dấu tích phân phụ thuộc vào dữ kiện Cauchy hoặc đạo hàm theo t của chúng. Do đó, nếu xét trên những đoạn thời gian bị chặn $[T_1, T_2]$, nếu ta thay đổi các dữ kiện Cauchy và các đạo hàm của chúng khá nhỏ thì nghiệm cũng sẽ thay đổi khá nhỏ, vậy ta thu được tính liên tục của nghiệm vào dữ kiện Cauchy.

2.2.7 Các tính chất đặc trưng của pt truyền sóng (đọc thêm)

Ta sẽ sử dụng các công thức biểu diễn nghiệm để minh họa các tính chất đặc trưng của pt truyền sóng.

Tốc độ truyền sóng hữu hạn

Giả sử nhiễu động ban đầu chỉ xuất hiện trên miền không gian G bị chặn, trong trường hợp một chiều giả sử $G = [a,b]$, nghĩa là $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ ngoài đoạn $[a,b]$.

Theo công thức d'Alembert

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-t) + \varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(r)dr. \tag{2.12}$$

Các nhiễu động chỉ có ảnh hưởng đến nghiệm u tại điểm x_0 nếu như $x_0 - t, x_0 + t \in [a,b]$ hay điều kiện là

$$\min\{|a - x_0|, |x_0 - b|\} \le t \max\{|a - x_0|, |x_0 - b|\}.$$

Tại vị trí x đó, khi t nằm ngoài khoảng nói trên thì $u(t,x) = 0$. Nói cách khác, sau một khoảng thời gian hữu hạn, nhiễu động sẽ được truyền đến x_0 và sau một khoảng thời gian hữu hạn, nhiễu động được truyền qua x^0. Vận tốc truyền sóng là hữu hạn.

Miền phụ thuộc của nghiệm

Từ (2.12), $u(t,x)$ phụ thuộc vào giá trị của φ tại $x \pm t$ và giá trị của ψ trên đoạn $[x-t, x+t]$. Ta nói miền phụ thuộc của nghiệm là hình nón đỉnh tại điểm (t,x).

Nguyên lý Huyghen. Sự tồn tại của mặt sóng sau

Trong trường hợp không gian với số chiều lẻ $n = 1, 3$, từ công thức của nghiệm ta thấy rằng, tích phân được tính trên **mặt cầu**, do đó khi thời gian t đủ lớn, giá trị của các hàm dưới dấu tích phân triệt tiêu trên mặt cầu, do đó $u(t, x) = 0$. Nói cách khác sau một thời gian hữu hạn, sóng được truyền qua điểm cho trước trong không gian.

Trong trường hợp không gian với số chiều chẵn, từ công thức của nghiệm, tích phân được tính trên **hình tròn**, do đó sau một thời gian tùy ý, giá trị của hàm dưới dấu tích phân không triệt tiêu trong hình tròn, nghiệm $u(t, x) \neq 0$. Nói cách khác tại mọi điểm vẫn chịu ảnh hưởng của nhiễu động ban đầu, không có hiện tượng sóng truyền qua một điểm trong không gian.

2.2.8 Bài tập

1. Sử dụng công thức d'Alembert cho nghiệm $u(t, x)$ của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x), x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   chứng minh rằng

   (a) Nếu $\varphi(x), \psi(x)$ là các hàm số lẻ thì $u(t, x) \Big|_{x=0} = 0$.

   (b) Nếu $\varphi(x), \psi(x)$ là các hàm số chẵn thì $u_t(t, x) \Big|_{x=0} = 0$.

2. Giải các bài toán sau

   (a) $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + xt, \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = x. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^x, \\ u(0, x) = \sin x, u_t(0, x) = x + \cos x. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + 2, \\ u(0, x, y) = x, u_t(0, x, y) = y. \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + t \sin y, \\ u(0, x, y) = x^2, u_t(0, x, y) = \sin y. \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2xyz, \\ u \Big|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2, u_t \Big|_{t=0} = 1. \end{cases}$

2.3 Bài toán biên ban đầu

Xét pt

$$u_{tt} = \Delta u + f(t, x),\ (t, x) \in [0, \infty) \times \Omega \tag{2.13}$$

với $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn.

Ta muốn tìm nghiệm u thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} u \big|_{t=0} = \varphi_0(x), \\ u_t \big|_{t=0} = \varphi_1(x), \end{cases} \tag{2.14}$$

và điều kiện biên Dirichlet

$$u \big|_{S_T} = \psi_1(t, x), \tag{2.15}$$

hoặc điều kiện biên Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \big|_{S_T} = \psi_2(t, x). \tag{2.16}$$

Ta gọi bài toán (2.13),(2.14),(2.15) là bài toán biên ban đầu thứ nhất, và (2.13),(2.14),(2.16) là bài toán biên ban đầu thứ hai, chúng cùng là bài toán hỗn hợp.

Nghiệm của bài toán hỗn hợp là nghiệm $u \in C^2(Q_T)$ thỏa mãn các pt và các điều kiện tương ứng.

2.3.1 Tính duy nhất nghiệm

Định lí 2.4. *Bài toán* (2.13),(2.14),(2.15) *có không quá một nghiệm* $u \in C^2(\bar{Q}_T)$.

Chứng minh. Giả sử bài toán có hai nghiệm $u_1, u_2 \in C^2(\bar{Q}_T)$, ta sẽ chứng minh rằng $u_1 - u_2 \equiv 0$ trong $\bar{Q}_T$. Thật vậy, do tính chất tuyến tính của phương trình và các điều kiên biên, điều kiện ban đầu, ta có u là nghiệm của bài toán sau đây:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & x \in Q_T \\ u \big|_{t=0} = u_1 \big|_{t=0} - u_2 \big|_{t=0} = 0, \\ u_t \big|_{t=0} = (u_1)_t \big|_{t=0} - (u_2)_t \big|_{t=0} = 0, \\ u \big|_{S_T} = u_1 \big|_{S_T} - u_2 \big|_{S_T} = 0. \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình $u_{tt} = \Delta u$ với u_t rồi lấy tích phân trên miền $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$

$$\iint_{Q_\tau} (u_{tt} - \Delta u) u_t dx dt = 0.$$

Ta viết $u_t u_{tt} = \frac{1}{2}\partial_t(u_t^2)$, $u_t u_{x_i x_i} = \partial_{x_i}(u_t u_{x_i}) - u_{x_i} u_{x_i t} = \partial_{x_i}(u_t u_{x_i}) - \frac{1}{2}\partial_t(u_{x_i}^2)$. Áp dụng công thức tích phân từng phần ta thu được

$$\iint_{Q_\tau} \Big\{ \frac{1}{2}\partial_t(u_t^2) - \sum_{i=1}^n \Big(\partial_{x_i}(u_t u_{x_i}) - \frac{1}{2}\partial_t(u_{x_i}^2) \Big) \Big\} dV = 0$$

$$\Leftrightarrow \iint_{S_\tau \cup G \cup G'} u_t \sum_{i=1}^n u_{x_i} \cos(\nu, x_i) dS + \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} (u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2) dV \Big|_0^\tau = 0.$$

Trên mặt đáy Ω, Ω' vector pháp tuyến ngoài cùng phương Ot do đó $\cos(\nu, x_i) = 0$. Trên mặt xung quanh S_τ, nếu cho điều kiện biên Dirichlet $u = 0$ thì $u_t = 0$, nếu cho điều kiện biên Neumann thì $\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \cos(\nu, x_i) = 0$, do đó tích phân trên mặt S_τ triệt tiêu. Cuối cùng trên mặt đáy Ω $u = 0$ nên $u_t = u_{x_i} = 0$. Đẳng thức trên trở thành

$$\int_{Q_\tau} (u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2) dV \Big|_{t=\tau} = 0.$$

Suy ra $u_t \Big|_{t=\tau} = u_{x_i} \Big|_{t=\tau} = 0$. Hơn nữa τ thay đổi tùy ý trong $[0, T]$. Vậy $u_t = u_{x_i} = 0$ trong $\bar{Q}_T$. Vậy $u(x,t) \equiv u(x,0) = 0$. □

2.3.2 Định luật bảo toàn năng lượng

Giả sử $u(x,t) \in C^2(\bar{Q}_T)$ là nghiệm của bài toán (2.13),(2.14) với điều kiện biên (2.15) hoặc (2.16).

Trong phần trên ta đã chứng minh

$$\int_{Q_\tau} (u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2) \Big|_{t=0} dV = \int_{Q_\tau} (u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2) \Big|_{t=\tau} dV.$$

Đây chính là định luật bảo toàn năng lượng, trong đó biểu thức

$$\int_{Q_\tau} u_t^2 \Big|_{t=\tau} dV, \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \Big|_{t=\tau} dV$$

lần lượt là biểu thức mô tả động năng và thế năng tại thời điểm $t = \tau$.

2.3.3 Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu

Ta sẽ chứng minh trong trường hợp $n = 1$, $\Omega = [0, l] \subset \mathbb{R}$. Giả sử u_i, $i = 1, 2$ lần lượt là nghiệm của bài toán sau đây với dữ kiện φ_i, ψ_i

$$\begin{cases} (u_i)_{tt} - (u_i)_{xx} = 0, 0 < x < l, 0 < t < T, \\ u_i(0,t) = u_i(l,t) = 0, 0 < t < T, u_i(x,0) = \varphi_i(x), (u_i)_t(x,0) = \psi_i(x), 0 < x < l. \end{cases}$$

Định lí 2.5. *Nếu $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$, $|\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)|$, $|\psi_1(x) - \psi_2(x)|$ đủ nhỏ với $x \in [0, l]$ thì nghiệm $|u_1(x,t) - u_2(x,t)|$ đủ nhỏ trong $[0, l] \times [0, T]$.*

Chứng minh. Đặt $v = u_1 - u_2$, $v_{tt} - \Delta v = 0$. Nhân với v_t rồi lấy tích phân trên miền, ta có

$$\int_0^l \int_0^\tau v_t (v_{tt} - v_{xx}) dx dt = 0, \forall 0 \le \tau \le T.$$

Lấy tích phân từng phần ta được

$$\frac{1}{2} \int_0^l (v_t^2 + v_x^2) \Big|_{t=\tau} dx - \frac{1}{2} \int_0^l (v_t^2 + v_x^2) \Big|_{t=0} dx - \int_0^\tau v_t v_x \Big|_{x=l} dt + \int_0^\tau v_t v_x \Big|_{x=0} dt = 0.$$

Do điều kiện biên $v(0,t) = v(l,t) = 0$, hai tích phân sau cùng triệt tiêu. v thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$v_x(x,0) = \varphi_1'(x) - \varphi_2'(x),\ v_t(x,0) = \psi_1(x) - \psi_2(x).$$

Chúng ta giả sử $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{2l}}$, $|\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)| \le \varepsilon\sqrt{l}$, $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{2l}}$, vậy thì $\int_0^l (v_t^2 + v_x^2)\Big|_{t=\tau} dx \le \varepsilon^2$. Ta đánh giá v như sau

$$\begin{aligned}
|v(x,t)| &\le |v(x,t) - v(x,0)| + |v(x,0)| \\
&\int_0^x |v_x(s,t)|ds + |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \\
&\le (\int_0^x ds)^{\frac{1}{2}}(\int_0^x |v_x|^2 ds)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon\sqrt{l} \le 2\varepsilon\sqrt{l}.
\end{aligned}$$

□

2.4 Phương pháp tách biến

2.4.1 Nhắc lại về chuỗi Fourier

Giả sử hàm số $f(x)$ cho trên $\mathbb{R}$ là hàm liên tục với chu kỳ $2l$. Khi đó hàm $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi lượng giác

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}),$$

trong đó

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ b_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[0,l]$. Muốn khai triển f theo hàm sine, ta thác triển lẻ f lên $[-l,l]$ và thác triển tuần hoàn lên $\mathbb{R}$. Khi đó $a_k = 0$, chuỗi Fourier của f hội tụ về chính hàm số đó tại những điểm liên tục của hàm số f, nói riêng thác triển này liên tục khi $f(0) = f(l) = 0$.

Muốn khai triển f theo hàm cosine, ta thác triển chẵn f lên $[-l,l]$ và thác triển tuần hoàn lên $\mathbb{R}$. Khi đó $b_k = 0$, chuỗi Fourier của f hội tụ về chính hàm số đó tại những điểm liên tục của hàm số f, nói riêng thác triển này liên tục khi $f(0) = 0$.

Chúng ta cũng nhắc lại định lý sau đây về sự hội tụ của chuỗi Fourier về hàm số ban đầu

Định lí 2.6. *Nếu một hàm số $F(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $2l$, có các đạo hàm đến cấp p liên tục và các đạo hàm cấp $p+1$ liên tục từng khúc, gọi a_k, b_k là hệ số Fourier của nó thì chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} k^p(|a_k| + |b_k|)$ hội tụ.*

2.4.2 Phương pháp tách biến

Trong phần này chúng ta sẽ sử dụng phương pháp tách biến Fourier để tìm nghiệm của bài toán hỗn hợp trong **hình chữ nhật** $0 \le x \le l, 0 \le t \le T$. Xét bài toán

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t < T, \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{2.17}$$

Ta tìm nghiệm của (2.17) ở dạng tách biến $u(x,t) = X(x)T(t)$. Thay vào phương trình truyền sóng $a^2 X''T = T''X \Rightarrow a^2 \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$, vế trái chỉ phụ thuộc x, vế phải chỉ phụ thuộc t cho nên hai vế bằng nhau và bằng hằng số $a^2\lambda$.

Ta xét bài toán đối với X: $X'' = \lambda X$, $X(0) = X(l) = 0$. Tùy theo dấu của λ công thức nghiệm $X(x)$ có dạng khác nhau.

- Nếu $\lambda > 0$, phương trình có nghiệm $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Thay điều kiện biên ta có

$$\begin{aligned} X(0) &= A + B = 0, \\ X(l) &= Ae^{\sqrt{\lambda}l} + Be^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \Rightarrow \qquad A = B = 0, X(x) = 0. \end{aligned}$$

- Nếu $\lambda = 0$, $X(x) = ax + b$. Thay điều kiện ban đầu ta cũng có $a = b = 0$.

- Nếu $\lambda < 0$, phương trình có nghiệm tổng quát $X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x$. Điều kiện ban đầu cho chúng ta $X(0) = A = 0$, $X(l) = B\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$. Bài toán có nghiệm không tầm thường nếu $B \ne 0$, như vậy $\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$, tức là với các giá trị $\sqrt{-\lambda_k}l = k\pi$, $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Nghiệm tương ứng $X_k = B_k \sin\frac{k\pi x}{l}$, $k \ge 1$

Với giá trị riêng λ_k ta giải bài toán đối với T: $T'' = -\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T$. Suy ra $T_k(t) = A\cos\frac{k\pi a}{l}t + B\frac{k\pi a}{l}t$.

Nghiệm hình thức của bài toán ban đầu có dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=1} \left(A_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi a}{l}t\right) \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{2.18}$$

Ta còn cần tìm A_k, B_k sao cho nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu. Thay $t = 0$ vào công thức $u(x,t)$ và $u_t(x,t)$ ta được

$$\begin{aligned} \varphi(x) = u(x,0) &= \sum_{k=1} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} \\ u_t(x,t) &= \sum_{k=1} \frac{k\pi a}{l}\left(-A_k \sin\frac{k\pi a}{l}t + B_k \cos\frac{k\pi a}{l}t\right) \sin\frac{k\pi x}{l} \\ \psi(x) = u_t(x,0) &= \sum_{k=1} \frac{k\pi a}{l} B_k \sin\frac{k\pi x}{l} \end{aligned}$$

Như vậy A_k, B_k chính là hệ số trong khai triển Fourier của hàm số $\varphi(x), \psi(x)$

$$A_k = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \qquad B_k = \frac{\sqrt{l}}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Định lí 2.7. *Giả sử hàm $\varphi(x)$ trong $[0,l]$ có các đạo hàm liên tục cho tới cấp hai, đạo hàm cấp ba liên tục từng khúc, ngoài ra $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, hàm số $\psi(x)$ trong $[0,l]$ có các đạo hàm liên tục tới cấp một, đạo hàm cấp hai liên tục từng khúc, ngoài ra $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Khi đó bài toán có nghiệm* (2.18).

Phương trình không thuần nhất

Xét bài toán

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t < T, \\ u(x,0) == u_t(x,0) = 0, 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Giả sử $f(0,t) = f(l,t) = 0$, hàm số $f(x,t)$ liên tục, có đạo hàm riêng cấp một liên tục. Điều kiện này đảm bảo hàm số $f(x,t)$ có thể khai triển thành chuỗi Fourier.

Bài toán thuần nhất ứng với bài toán này là

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Theo phần bài toán thuần nhất ta đã biết nghiệm riêng dạng tách biến của bài toán này là $u_k(x,t) = \left(A_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$. Do đó ta sẽ tìm nghiệm hình thức của bài toán **không thuần nhất** dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

Khai triển hàm $f(x,t)$ thành chuỗi Fourier sine, ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t)\sin\frac{k\pi x}{l} = -a^2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi x}{l}\right)^2\sin\frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

trong đó

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Đồng nhất hệ số của $\sin\frac{k\pi x}{l}$ ta thu được hệ phương trình đối với $T_k(t)$, $k \ge 1$

$$\begin{cases} T_k'' + \left(\frac{k\pi x}{l}\right)^2 T_k = f_k(t) \\ T_k(0) = 0, T_k'(0) = 0 \end{cases}$$

ở đây $T_k(0) = T_k'(0) = 0$ do điều kiện ban đầu

$$0 = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l}$$
$$0 = u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

với mọi $0 \leq x \leq l$.

Phương trình vi phân này có nghiệm

$$T_k(t) = \int_0^t f_k(\tau) \sin \frac{k\pi(t-\tau)}{l} d\tau.$$

Vậy ta đã tìm được công thức nghiệm của bài toán không thuần nhất.

Ví dụ 2.2. *Giải bài toán* $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = x, u_t(x,0) = \sin \frac{\pi x}{2l} + \sin \frac{3\pi x}{2l} \end{cases}$

Ta tìm nghiệm dưới dạng tách biến $u(x,t) = X(x)T(t)$. Thay vào phương trình ta có

$$u_{tt} = u_{xx} \Rightarrow T''X = X''T \Rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$
$$X(0)T(t) = X'(l)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = X'(l) = 0$$

Tùy theo giá trị λ ta có nghiệm của bài toán đối với X như sau

- $\lambda > 0$, $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Thay điều kiện ta được $A + B = \sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}lx} - B^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0$, suy ra $A = B = 0$.

- $\lambda = 0$, $X(x) = Ax + B$. Thay điều kiện ta có $B = 0, Al + B = 0$ nên $A = 0$, $X \equiv 0$.

- $\lambda < 0$, $X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x$. Thay điều kiện ta được

$$X(0) = A = 0$$
$$X'(l) = B\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}l = 0 \Rightarrow \lambda_k = -\Big(\frac{(2k+1)\pi}{2l}\Big)^2$$

Vậy bài toán có nghiệm không tầm thường $X_k = B_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$ khi $\lambda_k = -\Big(\frac{(2k+1)\pi}{2l}\Big)^2$.

Nghiệm hình thức của bài toán ban đầu có dạng

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 0}\Big(A_k \cos\frac{(2k+1)\pi t}{2l} + B_k \sin\frac{(2k+1)\pi t}{2l}\Big)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

Thay vào điều kiện ban đầu ta có

$$
\begin{aligned}
u(x,0) = x &= \sum_{k\geq 0} A_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\\
u_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l} &= \sum_{k\geq 0}\frac{(2k+1)\pi}{2l}B_k\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}\\
\Rightarrow B_0 = \frac{2l}{\pi}, B_1 &= \frac{2l}{3\pi}, B_k = 0, k\geq 2\\
A_k &= \frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}dx = \frac{(-1)^k 8l}{(k+1)^2\pi^2}
\end{aligned}
$$

Vậy nghiệm của bài toán là

$$
u(x,t) = \frac{2l}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l} + \frac{2l}{3\pi}\sin\frac{3\pi t}{2l}\sin\frac{3\pi x}{2l} + \frac{8l}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}
$$

2.4.3 Bài tập

Giải các bài toán biên ban đầu sau đây

1. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0,\\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\\ u(x,0) = x, u_t(x,0) = 1.\end{cases}$

2. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0,\\ u(0,t) = 0, u(l,t) = t,\\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0.\end{cases}$

3. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, 0 < x < 1, t > 0,\\ u(0,t) = t+1, u(1,t) = t^3 + 2,\\ u(x,0) = x+1, u_t(x,0) = 0.\end{cases}$

Chương 3

Phương trình truyền nhiệt

3.1 Thiết lập phương trình truyền nhiệt

3.1.1 Phương trình khuếch tán

Xét một chất lỏng không chuyển động lấp đầy một ống dẫn và một chất hóa học (thuốc nhuộm) đang khuếch tán trong chất lỏng đó.

Thuốc nhuộm khuếch tán từ nơi có nồng độ cao đến nơi có nồng độ thấp, và theo định luật Fick sự dịch chuyển này tỉ lệ thuận với gradient của nồng độ. Ta ký hiệu $u(t, x)$ là nồng độ (khối lượng trên đơn vị độ dài) của thuốc nhuộm tại điểm có tọa độ x tại thời điểm t.

Xét một đoạn ống dẫn bất kỳ từ vị trí x_0 đến x_1, lượng thuốc nhuộm chứa trong đoạn ống này được tính bằng:

$$M(t) = \int_{x_0}^{x_1} u(t, x)dx,$$

do đó độ thay đổi nồng độ theo thời gian được tính bằng

$$\frac{dM}{dt} = \int_{x_0}^{x_1} u_t(t, x)dx.$$

Khối lượng này là do lượng thuốc nhuộm chảy ra khỏi đoạn ống tại vị trí x_1 và chảy vào tại x_0. Theo định luật Fick

$$\frac{dM}{dt} = \text{ dòng chảy vào } - \text{ dòng chảy ra } = ku_x(t, x_1) - ku_x(t, x_0) = \int_{x_0}^{x_1} u_{xx}dx,$$

trong đó k là hệ số khuếch tán. Từ hai công thức của $\frac{dM}{dt}$ và đoạn $[x_0, x_1]$ tùy ý, ta có pt $u_t = u_{xx}$.

Trong trường hợp trong ống dẫn có nguồn (hoặc có điểm hút) thuốc nhuộm với độ lớn $f(t, x)$, ta có pt $u_t = u_{xx} + f(t, x)$.

Điều kiện biên:

1. Nếu chất khuếch tán được chứa trong một ống dẫn không bị thấm, sự thay đổi nồng độ theo hướng pháp tuyến trên bề mặt của ống dẫn bằng 0, ta có điều kiện biên Neumann $u_x = 0$.

2. Nếu chất khuếch tán được chứa trong một ống dẫn bị thấm, và nếu chất khuếch tán thấm qua ống dẫn đều được rửa sạch ngay, thì trên bề mặt ống dẫn ta có điều kiện biên Dirichlet $u = 0$.

3.1.2 Phương trình truyền nhiệt

Xét một vật rắn truyền nhiệt đẳng hướng chiếm miền D trong không gian. Ký hiệu $u(x, y, z, t)$ là nhiệt độ tại thời điểm t đo được tại điểm có tọa độ (x, y, z). Xét một thể tích V tùy ý của vật thể, V được giới hạn bởi mặt kín S. Gọi c là nhiệt dung riêng của vật liệu và ρ là mật độ. Khi đó nhiệt lượng được tích tụ trong V là

$$Q(t) = \iiint_V C\rho u dxdydz.$$

Độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian là

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \iiint_V C\rho u_t dxdydz.$$

Theo định luật Fourier, dòng nhiệt truyền từ nơi nóng hơn sang nơi lạnh hơn tỉ lệ với gradient của nhiệt độ, do đó ta có

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \iint_{\partial V} \kappa(\nu \cdot \nabla u) dS,$$

trong đó κ là hệ số dẫn nhiệt. Áp dụng định lý Ostrogradsky ta có

$$\iint_{\partial V} \kappa(\nu \cdot \nabla u) dS = \iiint_V \nabla(\kappa(\nu \cdot \nabla u)) dV.$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng, ta có

$$\iiint_V C\rho u dxdydz = \iiint_V \nabla(\kappa(\nu \cdot \nabla u)) dV.$$

Trong trường hợp c, ρ, κ là các hằng số đẳng thức trên đúng với mọi miền V, do đó ta có $u_t = \frac{\kappa}{c\rho}\Delta u$.

Điều kiện biên

- Nếu vật thể D làm bởi chất cách nhiệt, sẽ không có dòng nhiệt được truyền qua biên, dó đó ta có điều kiện biên Neumann $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D} = 0$.

- Nếu vật thể này được chứa trong một bình đựng lớn với nhiệt độ biến thiên $g(t)$ và vật liệu dẫn nhiệt tốt thì ta có điều kiện biên Dirichlet $u\Big|_{\partial D} = g(t)$.

3.2 Bài toán Cauchy

Bài toán Cauchy đối với phương trình truyền nhiệt là bài toán tìm nghiệm $u(x,t)$ của bài toán

trong lớp hàm $C^{2,1}(\Gamma_T) \cap C^0(\bar{\Gamma}_T)$. Ở đây $C^{2,1}(\Gamma_T)$ ký hiệu các hàm khả vi cấp hai theo biến không gian x và khả vi cấp một theo biến thời gian t trong miền Γ_T.

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = 0, (x,t) \in C^{2,1}(\Gamma_T), \Gamma_T = (0,T] \times \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.1}$$

3.2.1 Nguyên lý cực trị

Chúng ta phát biểu và chứng minh trong trường $n = 2$. Định lý được phát biểu và chứng minh tương tự cho n tổng quát.

Trước hết ta ký hiệu Q_T là miền giới hạn bởi mặt bên S_T, đáy dưới G trong mặt phẳng $t = 0$, đáy trên G_T trong mặt phẳng $t = T$.

Định lí 3.1 (Nguyên lý cực trị trong miền bị chặn)**.** *Giả sử $u(x,y,t)$ là nghiệm của bài toán (3.1) trong miền đóng $\bar{Q}_T$. Khi đó $u(x,y,t)$ đặt giá trị cực đại và cực tiểu trên biên $S_T \cup G$ (trên mặt xung quanh hoặc mặt đáy).*

Chứng minh. Ta thấy hàm số $u(x,y,t)$ đạt cực đại tại những điểm hàm số $-u(x,y,t)$ đạt cực tiểu, do đó ta chỉ cần chứng minh cho điểm cực đại của hàm $u(x,y,t)$.

Đặt $M = \max_{\bar{Q}_T} u(x,y,t)$ và $\mu = \max_{S_T \cup G} u(x,y,t)$. Vì $S_T \cup G \subset \bar{Q}_T$ nên $\mu \leq M$. Ta cần chứng minh $\mu = M$.

Giả sử điều này không đúng, $\mu < M$, và giả sử hàm số u đạt giá trị lớn nhất tại điểm $(x_0, y_0, t_0) \in \bar{Q}_T = Q_T \cup G_T$.

Xét hàm số $v(x,y,t) = u(x,y,t) + \frac{M-\mu}{2T}(t_0 - t)$, dễ thấy $v(x_0,y_0,t_0) = u(x_0,y_0,t_0) = M$. Mặt khác với mọi $(x,y,t) \in S_T \cup G$, do $u(x,y,t) \leq M$, $t_0 - t \leq t_0 \leq T$, ta có

$$v(x,y,t) \leq M + \frac{M-\mu}{2T}T < M.$$

Do $v(x,y,t) \in C^{2,1}(Q_T)$ nên $v(x,y,t)$ đạt cực đại tại điểm (x_1,y_1,t_1) nào đó trong $\bar{Q}_T$. Nếu $A(x_1,y_1,t_1) \in Q_T$, theo điều kiện cần của điểm đạt cực đại ta có $v_t \big|_A = 0$ và $u_{xx} \big|_A \leq 0, u_{yy} \big|_A \leq 0$.

Nếu $A(x_1,y_1,t_1) \in G_T$, $t_1 = T$, ta có

$$v_t \big|_A = \lim_{t \to t_1^-} \frac{v(x,y,t) - v(x_1,y_1,t_1)}{t - t_1} \geq 0.$$

Ngoài ra, do tính chất cực trị của hàm một biến, ta cũng có $u_{xx} \big|_A \leq 0, u_{yy} \big|_A \leq 0$ Tóm lại $(v_t - \Delta v) \big|_A \geq 0$. Tuy nhiên, theo công thức xác định v, ta lại có $(v_t - \Delta v) = (u_t - \Delta u) - \frac{M-\mu}{2T} = -\frac{M-\mu}{2T} < 0$, mâu thuẫn.

Vậy điều giả sử sai, $M = \mu$. $\square$

Định lí 3.2 (Nguyên lý cực trị trong miền không bị chặn)**.** *Gỉa sử $u(x,y,t)$ là nghiệm bị chặn của bài toán (3.1), khi đó với mọi $(x,y,t) \in \Gamma_T$, ta có*

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} u(x,y,0) \leq u(x,y,t) \leq \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} u(x,y,0).$$

Chứng minh. Đặt $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} u(x,y,0) = M_1, \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} u(x,y,0) = M_2$.

Xét hàm số $v(x,y,t) = x^2+y^2+4t$ (trong trường hợp tổng quát $v(x,t) = |x|^2+4nt$). Ta có $v(x,y,t) \geq 0$ trong $\bar{\Gamma}_T$, và hơn nữa $v_t - \Delta v = 0$ trong Γ_T.

Xét hai hàm số

$$v_1(x,y,t) = u(x,y,t) - M_1 - \varepsilon v(x,y,t)$$
$$v_2(x,y,t) = u(x,y,t) - M_2 + \varepsilon v(x,y,t).$$

Ta thấy v_1 và v_2 thỏa mãn phương trình truyền nhiệt $(\partial_t - \Delta)v_1 = (\partial_t - \Delta)v_2 = 0$ trong Γ_T. Bên cạnh đó trên đáy dưới $t = 0$,

$$v_1(x,y,0) = u(x,y,0) - M_1 - \varepsilon(x^2+y^2) \leq 0,$$
$$v_2(x,y,0) = u(x,y,0) - M_2 + \varepsilon(x^2+y^2) \geq 0.$$

Trên mặt xung quanh $x^2+y^2 = R^2$ của mặt trụ tròn xoay Q_T^R nào đó, ta có

$$v_1(x,y,t) = u(x,y,t) - M_1 - \varepsilon(R^2+4t),$$
$$v_2(x,y,t) = u(x,y,t) - M_2 + \varepsilon(x^2+y^2+4t).$$

Theo giả thiết, nghiệm u bị chặn nên ta có thể chọn $R \geq R_0$ đủ lớn sao cho $2M - \varepsilon R_0^2 < 0$ và $M - M_2 + \varepsilon R_0^2 > 0$. Trên mặt xung quanh S_T^R này, $v_1(x,y,t) \leq 0$, $v_2(x,y,t) \geq 0$. Áp dụng nguyên lý cực đại cho miền bị chặn Q_T^R với $R \geq R_0$, ta có

$$v_1(x,y,t) \leq 0, v_2(x,y,t) \geq 0, \forall (x,y,t) \in \Gamma_T.$$

Cho $\varepsilon \to 0$ trong hai đánh giá trên, ta có

$$M_2 \leq u(x,y,t) \leq M_1, \forall (x,y,t) \in \Gamma_T.$$

□

3.2.2 Định lý tồn tại nghiệm

Định lí 3.3 (Giải bài toán thuần nhất)**.** *Nghiệm $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ của bài toán* (**??**) *được cho bởi công thức Poisson*

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y) dy & \text{khi } t > 0, \\ \varphi(x) & \text{khi } t = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

với $\varphi(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}^n$.

Nhận xét 1.
- *Chứng minh xem tài liệu [2] trang* $148 - 150$.
- *Tích phân trong (**??**) hội tụ đều với mọi* $t > 0$. *Hơn nữa khi lấy đạo hàm của hàm dưới dấu tích phân cấp tùy ý theo* t, x *hàm dưới dấu tích phân chỉ thay đổi một đa thức theo* t, x, *do đó tích phân này vẫn hội tụ đều và việc lấy đạo hàm dưới dấu tích phân là hợp lý. Do đó, nghiệm* $u(x,t)$ *khả vi mọi cấp ngay cả khi điều kiện ban đầu chỉ là hàm liên tục. Tính chất này phân biệt căn bản pt truyền nhiệt và pt truyền sóng.*

Định lí 3.4 (Nguyên lý Duhamel)**.** *Nghiệm của bài toán Cauchy*

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = f(x,y,t), (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \\ v(x,y,0) = \varphi(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

được cho bởi công thức

$$v(x,y,t) = \int_0^t V(x,y,t-\tau,\tau)d\tau,$$

trong đó $V(x,y,t,\tau)$ *là nghiệm của bài toán* $\begin{cases} V_t - V_{xx} = 0, (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \\ v(x,y,0,\tau) = f(x,y,\tau),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$

Ví dụ 3.1. *Giải bài toán* $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Theo công thức Poisson ta có

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{t-x} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-(x-2t))^2}{4t}} dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{t-x} \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} 2\sqrt{t} dv, \text{ (đổi biến } v = \frac{y-(x-2t)}{2\sqrt{t}}) \\ &= e^{t-x}. \end{aligned}$$

Ở đây ta sử dụng tích phân Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Ví dụ 3.2. *Giải bài toán* $\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-t-x}, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Theo nguyên lý chồng chất nghiệm, ta có thể viết $u = v + \omega$ trong đó v, ω là nghiệm của hai bài toán sau đây

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(x,0) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_t - \omega_{xx} = e^{-t-x}, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \omega(x,0,\tau) = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Theo công thức Poisson ta có

$$v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} e^{-y} dy = e^{t-x}$$

$$\omega(x,t) = \int_0^t V(x, t-\tau, \tau) d\tau.$$

với $V(x,t,\tau)$ là nghiệm của bài toán $\begin{cases} V_t - V_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ V(x,0,\tau) = e^{-\tau - x}, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Theo công thức Poisson ta có

$$V(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} e^{-\tau - y} dy = e^{t-x-\tau}$$

Theo nguyên lý Duhamel

$$v(x,t) = \int_0^t e^{(t-\tau)-x-\tau} d\tau = \frac{e^{t-x} - e^{-t-x}}{2}$$

Vậy bài toán ban đầu có nghiệm $u(x,t) = \frac{3e^{t-x} - e^{-t-x}}{2}$

3.2.3 Bài tập

1. $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}, \end{cases}$ trong đó $\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } |x| < 1 \\ 0 \text{ nếu } |x| > 1 \end{cases}$

   ĐS: $u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{erf}\big(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\big) - \mathrm{erf}\big(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\big)\Big)$, với $\mathrm{erf}(x) = \int_0^x e^{-p^2} dp$.

2. $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

   ĐS: $u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}$.

3. $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x,y,z,0) = xyz, \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$

   ĐS: $u(x,y,z,t) =$.

4. $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x,y,z,0) = x^2yz - xyz^2, \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$

   ĐS: $u(x,y,z,t) = (x^2 + 2t)yz - xy(z^2 + 2t)$.

5. $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \cos 3x, \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

   ĐS: $u(x,t) = \cos 3x e^{-36t}$. Sử dụng $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cos au du = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}$.

6. $\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \sin 2x \cos 4x,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

ĐS: $u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\sin 6x e^{-324t} - \sin 2x e^{-36t}\Big)$.

7. $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x},\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

ĐS: $u(x,t) = e^{-t-x}$.

3.2.4 Định lý duy nhất nghiệm và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu

Định lí 3.5. *Xét bài toán*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u(x,0) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.3}$$

Khi đó nghiệm bị chặn của bài toán là duy nhất và phụ thuộc liên tục vào điều kiện ban đầu.

Chứng minh. Giả sử u_1, u_2 lần lượt là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} (u_i)_t = a^2 \Delta u_i, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Khi đó, do tính tuyến tính của phương trình truyền nhiệt, ta có $v := u_1 - u_2$ là nghiệm của bài toán sau $\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ v(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$ Áp dụng nguyên lý cực trị đối với miền không bị chặn $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ ta được với mọi $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} (\varphi_1(x) - \varphi(x)) \le v(x,t) \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\varphi_1(x) - \varphi(x)) \tag{3.4}$$

Như vậy nếu $\varphi_1 - \varphi_2$ đủ nhỏ, điều kiện ban đầu thay đổi đủ nhỏ thì $v = u_1 - u_2$ đủ nhỏ, nghiệm thay đổi đủ nhỏ, ta thu được sự phục thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu.

Đặc biệt nếu u_1, u_2 cùng là nghiệm của một bài toán $\varphi_1 = \varphi_2$ thì từ (3.4) ta có $v = u_1 - u_2 \equiv 0$, bài toán có nghiệm duy nhất. □

3.2.5 Sự truyền nhiệt trong nửa thanh vô hạn

Trong phần này, ta sẽ xét bài toán truyền nhiệt trong nửa thanh vô hạn. Chúng ta đưa bài toán về bài toán Cauchy trên toàn không gian và áp dụng công thức D'Alembert để viết nghiệm của bài toán.

1. Ta xét bài toán sau

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), 0 \leq x \\ u_x(0,t) = C, 0 \leq t \leq T. \end{cases} \tag{3.5}$$

Miền xét đối với x có biên $x = 0$ nên ta cần thêm điều kiện này, ta đang xét điều kiện biên Neumann tại điểm $x = 0$.

Khi đó ta gọi $\tilde{\varphi}(x)$ là mở rộng chẵn của hàm $\varphi(x)$ từ $(0, \infty)$ lên $\mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, $x < 0$. Điều kiện $C = 0$ đảm bảo $\tilde{\varphi}(x)$ là hàm liên tục.

Theo công thức Poisson ta có

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t})\tilde{\varphi}(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \Big(\int_{-\infty}^{0} \exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t})\tilde{\varphi}(\xi)d\xi + \int_{0}^{\infty} \exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t})\tilde{\varphi}(\xi)d\xi \Big) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \Big(\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}) + \exp(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}) \Big) \varphi(\xi)d\xi \end{aligned}$$

ở đây ta đã dùng phép đổi biến $y = -x$ để tính tích phân $\int_{-\infty}^{0}$, và dùng định nghĩa của hàm $\tilde{\varphi}$.

Thêm nữa, tính đạo hàm theo x ta có

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi - x}{2a^2 t} \exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t})\tilde{\varphi}(\xi)d\xi \\ \Rightarrow u_x(0,t) &= \frac{1}{4a^3 t\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \xi \exp(-\frac{\xi^2}{4a^2 t})\tilde{\varphi}(\xi)d\xi = 0 \end{aligned}$$

do hàm dưới dấu tích phân là hàm số lẻ.

2. Ta xét bài toán sau

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \psi(x), 0 \leq x \\ u(0,t) = 0, 0 \leq t \leq T. \end{cases} \tag{3.6}$$

Miền xét đối với x có biên $x = 0$ nên ta cần thêm điều kiện này, ta đang xét điều kiện biên Dirichlet tại điểm $x = 0$.

Trước hết, tại $x = t = 0$ các điều kiện của bài toán cần thỏa mãn điều kiện tương thích sau đây $0 = u(0,0) = \psi(0)$.

Khi đó ta gọi $\tilde{\psi}(x)$ là mở rộng lẻ của hàm $\psi(x)$ từ $(0, \infty)$ lên $\mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}(x) = -\varphi(-x)$, $x < 0$. Điều kiện $\psi(0) = 0$ đảm bảo $\tilde{\psi}(x)$ là hàm liên tục.

Theo công thức Poisson ta có

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t})\tilde{\psi}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\Big(\int_{-\infty}^{0}\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t})\tilde{\psi}(\xi)d\xi + \int_0^{\infty}\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t})\tilde{\psi}(\xi)d\xi\Big) \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\Big(\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}) - \exp(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t})\Big)\psi(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

ở đây ta đã dùng phép đổi biến $y = -x$ để tính tích phân $\int_{-\infty}^{0}$, và dùng định nghĩa của hàm $\tilde{\psi}$. Thêm nữa, ta có

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t})\tilde{\psi}(\xi)d\xi \\
\Rightarrow u(0,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\exp(-\frac{\xi^2}{4a^2t})\tilde{\psi}(\xi)d\xi = 0
\end{aligned}$$

do hàm số dưới dấu tích phân là hàm số lẻ.

Ví dụ 3.3. *Giải bài toán* $\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = 0, x \geq 0 \\ u(0,t) = 2, 0 \leq t \leq T. \end{cases}$

Đây là bài toán truyền nhiệt trong nửa thanh với điều kiện Dirichlet tại điểm $x = 0$. Trước hết ta cần đưa điều kiện biên về 0 như lý thuyết bằng cách đặt $u(x,t) = 2 + v(x,t)$, khi đó

$$\begin{cases} v_t = 4v_{xx}, x > 0, t > 0, \\ v(x,0) = -2, x \geq 0 \\ v(0,t) = 0, 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán được cho bởi

$$v(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} -2\Big(\exp(-\frac{(x-y)^2}{16t} - \exp(-\frac{(x+y)^2}{16t})\Big)dy$$

Sử dụng phép đổi biến $s = \frac{y-x}{4\sqrt{t}}$ và $s = \frac{y+x}{4\sqrt{t}}$ hai tích phân trên trở thành

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\exp(-\frac{(x-y)^2}{16t}dy &= 4\sqrt{t}\int_{\frac{-x}{4\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-v^2}dv \\
\int_0^{\infty}\exp(-\frac{(x+y)^2}{16t})dy &= 4\sqrt{t}\int_{\frac{x}{4\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-v^2}dv
\end{aligned}$$

Do vậy nghiệm của bài toán là

$$u(x,t) = 2 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big(\int_{\frac{-x}{4\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-v^2}dv - 4\sqrt{t}\int_{\frac{x}{4\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-v^2}dv\Big) = 2 + \mathrm{erf}(\frac{x}{4\sqrt{t}}) - \mathrm{erf}(\frac{-x}{4\sqrt{t}}),$$

trong đó hàm $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-p^2}dp$.

Ví dụ 3.4. $\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + \cos 2x, x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = 0, x > 0, \\ u(0,t) = 0, t > 0. \end{cases}$

Ta dùng nguyên lý Duhamel giải bài toán không thuần nhất $u(x,t) = \int_0^t V(x, t-\tau, \tau)d\tau$ trong đó $V(x,t,\tau)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} V_t = 4V_{xx}, x > 0, t > 0, \\ V(x,0,\tau) = \cos 2x, x > 0, \\ V(0,t,\tau) = 0, t > 0. \end{cases}$$

Sử dụng công thức nghiệm bài toán truyền nhiệt trong nửa thanh ta được

$$V(x,t,\tau) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \Big(\exp(-\frac{(x-y)^2}{16t} - \exp(-\frac{(x+y)^2}{16t}\Big) \cos 2y dy$$

3.3 Bài toán biên ban đầu thứ nhất

Xét phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} u_t &= a^2\Delta u, (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T], \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) &= \varphi(x), x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

Ta tìm nghiệm $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ thoả mãn phương trình và điều kiện ban đầu (3.7) và một trong các điều kiện biên sau đây

$$u \Big|_{S_T} = \psi(x,t), \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_T} = \psi_0(x,t), \tag{3.9}$$

$$(au + b\frac{\partial u}{\partial n}) \Big|_{S_T} = \psi_0(x,t), \tag{3.10}$$

Trường hợp không thuần nhất, phương trình có dạng $u_t - a^2\Delta u = f(x,t)$. Bài toán (3.7), (3.8) goi là bài toán **biên ban đầu thứ nhất**.

3.3.1 Định lý tồn tại nghiệm. Phương pháp tách biến Fourier

Ta sử dụng phương pháp tách biên Fourier tìm nghiệm của bài toán trường hợp một chiều $n = 1$.

Bài toán thuần nhất

Xét bài toán

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_x x, 0 < x < l, 0 < t < T, \\ u(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{3.11}$$

Ta tìm nghiệm của bài toán dưới dạng tách biến $u(x,t) = X(x)T(t)$. Phương trình truyền nhiệt trở thành

$$XT' = a^2 X''T \Leftrightarrow a^2\frac{X''}{X} = -\frac{T'}{T}.$$

Do vế trái chỉ phụ thuộc x, vế phải chỉ phụ thuộc t nên hai vế bằng nhau khi chúng bằng hằng số, ta ký hiệu bởi $a^2\lambda$. Do đó ta có phương trình đối với X: $X'' - \lambda X = 0$. Ngoài ra, điều kiện biên của bài toán cho ta

$$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0 \forall t \in [0,T] \Leftrightarrow X(0) = X(l) = 0.$$

Tùy theo dấu của λ công thức nghiệm $X(x)$ có dạng khác nhau.

- Nếu $\lambda > 0$, phương trình có nghiệm $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Thay điều kiện biên ta có
$$\begin{aligned} X(0) &= A + B = 0, \\ X(l) &= Ae^{\sqrt{\lambda}l} + Be^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \Rightarrow \qquad A = B = 0, X(x) = 0. \end{aligned}$$
- Nếu $\lambda = 0$, $X(x) = ax + b$. Thay điều kiện ban đầu ta cũng có $a = b = 0$.
- Nếu $\lambda < 0$, phương trình có nghiệm tổng quát $X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x$. Điều kiện ban đầu cho chúng ta $X(0) = A = 0$, $X(l) = B\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$. Bài toán có nghiệm không tầm thường nếu $B \neq 0$, như vậy $\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$, tức là với các giá trị $\sqrt{-\lambda_k}l = k\pi$, $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Nghiệm tương ứng $X_k = B_k \sin\frac{k\pi x}{l}$

Với giá trị riêng λ_k ta giải bài toán đối với T: $T' = -\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T$. Suy ra $T(t) = \exp^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}$.

Nghiệm hình thức của bài toán ban đầu có dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=1} B_k \exp^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{3.12}$$

Nghiệm này thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{k=1} B_k \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Như vậy B_k chính là các hệ số trong khai triển Fourier của hàm $\varphi(x)$

$$B_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Vậy ta có được biểu thức của nghiệm hình thức, ta còn cần xét tính hội tụ của chuỗi số này. Ta cần kiểm tra

- Chuỗi (3.12) hội tụ và là hàm liên tục trong $[0,l] \times [0,T]$.
- Ta có thể đạo hàm từng số hạng trong chuỗi hai lần theo x, một lần theo t.

Xem lại phần về khai triển Fourier trong chương hai, ta có định lý sau đây

Định lí 3.6. *Giả sử hàm số $\varphi(x)$ liên tục, khả vi từng khúc và $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Khi đó chuỗi* (3.12) *hội tụ đều và cho ta nghiệm của bài toán* (3.7), (3.8).

Phương trình không thuần nhất

Xét bài toán
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t < T, \\ u(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, 0 \le t \le T. \end{cases}$$
Giả sử $f(0,t) = f(l,t) = 0$, hàm số $f(x,t)$ liên tục, có đạo hàm riêng cấp một liên tục. Điều kiện này đảm bảo hàm số $f(x,t)$ có thể khai triển thành chuỗi Fourier.

Bài toán thuần nhất ứng với bài toán này là $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t < T, \\ u(x,0) = 0, 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, 0 \le t \le T. \end{cases}$

Theo phần bài toán thuần nhất ta đã biết nghiệm riêng dạng tách biến của bài toán này là $u_k(x,t) = \exp^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}$. Do đó ta sẽ tìm nghiệm hình thức của bài toán **không thuần nhất** dưới dạng
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$
Khai triển hàm $f(x,t)$ thành chuỗi Fourier sine, ta có
$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) \sin \frac{k\pi x}{l} = -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{k\pi x}{l})^2 \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$
trong đó
$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$
Đồng nhất hệ số của $\sin \frac{k\pi x}{l}$ ta thu được hệ phương trình đối với $T_k(t)$, $k \ge 1$
$$\begin{cases} T_k' + \left(\frac{k\pi x}{l}\right)^2 T_k = f_k(t) \\ T_k(0) = 0, \end{cases}$$
ở đây $T_k(0) = 0$ do điều kiện ban đầu $0 = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l}$ với mọi $0 \le x \le l$.

Phương trình vi phân này có nghiệm
$$T_k(t) = \int_0^t \exp -(\frac{k\pi x}{l})^2 (t-\tau) f_k(\tau) d\tau.$$
Vậy ta đã tìm được công thức nghiệm của bài toán không thuần nhất.

Ta xét thêm ví dụ sau

Ví dụ 3.5. *Giải bài toán*
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < t < T, \\ u(x,0) = x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ u(0,t) = 0, u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 1, 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Đây là bài toán không thuần nhất có điều kiện biên khác không, do đó muốn giải bài toán, ta đặt hàm phụ sao cho điều kiện biên của bài toán phụ bằng 0: $v := u - x$. Ta suy ra phương trình đối với v

$$v_t = v_{xx} + v + 2\sin 2x\cos x.$$

Các điều kiện biên là $v(0,t) = v_x(l,t) = 0$. Ta sẽ tìm nghiệm riêng của **phương trình thuần nhất tương ứng** $v_t = v_{xx} + v$ ở dạng tách biến $v(x,t) = X(x)T(t)$.

Khi đó ta có phương trình $XT' = X''T + XT \Leftrightarrow \frac{X''+X}{X} = \frac{T'}{T}$.

Vế trái chỉ phụ thuộc x, vế phải chỉ phụ thuộc t nên chúng cùng bằng hằng sô $\lambda + 1$. Ta có hai phương trình $X'' = \lambda X$ và $T' = (\lambda+1)T$.

Điều kiện biên cho ta

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \forall t \in [0,T] \Rightarrow X(0) = 0.$$
$$u_x(\frac{\pi}{2},t) = X'(\frac{\pi}{2})T(t) = 0 \Rightarrow X'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Chú ý ở đây ta có điều kiện biên Dirichlet tại điểm $x = 0$ và điều kiện biên Neumann tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$, do đó công thức nghiệm riêng sẽ khác hai ví dụ nói trên. Giải phương trình $X'' = \lambda X$ ta có công thức nghiệm phụ thuộc dấu của λ.

- Nếu $\lambda > 0$, phương trình có nghiệm $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Thay điều kiện biên ta có

$$X(0) = A + B = 0,$$
$$X'(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}} - Be^{-\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}}) = 0 \Rightarrow \qquad A = B = 0, X(x) = 0.$$

- Nếu $\lambda = 0$, $X(x) = ax + b$. Thay điều kiện ban đầu ta cũng có $X(0) = b = 0$, $X'(\frac{\pi}{2}) = a = 0$. Vậy $X \equiv 0$.

- Nếu $\lambda < 0$, phương trình có nghiệm tổng quát $X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x$. Điều kiện ban đầu cho chúng ta $X(0) = A = 0$, $X'(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{-\lambda}B\cos\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2} = 0$. Bài toán có nghiệm không tầm thường nếu $B \neq 0$, như vậy $\cos\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2} = 0$, tức là với các giá trị $\sqrt{-\lambda_k}\frac{\pi}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $\lambda_k = -(2k+1)^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Nghiệm tương ứng $X_k = B_k\sin(2k+1)x$

Biết công thức nghiệm riêng này, ta tìm nghiệm hình thức của bài toán không thuần nhất dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=0} T_k(t)\sin(2k+1)x. \tag{3.13}$$

Thay vào phương trình $v_t = v_{xx} + v + 2\sin 2x\cos x$, ta có

$$\sum_{k=0} T_k'(t)\sin(2k+1)x = \sum_{k=0}\big(1-(2k+1)^2\big)T_k(t)\sin(2k+1)x + \sin 3x + \sin x.$$

Đồng nhất hệ số của $\sin(2k+1)x$ ở hai vế ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned}
&T_0'(t) = 1, T_0(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = t\\
&T_1'(t) = -8T_1(t) + 1, T_1(0) = 0 \Rightarrow T_1(t) = \frac{1}{8}1 - e^{-8t}\\
&T_k'(t) = -4k(k+1)T_k(t), T_k(0) = 0 \Rightarrow T_k(t) = 0, \forall k \geq 2.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là

$$u(x,t) = x + t\sin x + \frac{1}{8}1 - e^{-8t}\sin 3x.$$

Ví dụ 3.6. *Giải bài toán* $\begin{cases} u_t - u_{xx} - u = xt(2-t) + 2\cos t \\ u_x \Big|_{x=0} = t^2, u_x \Big|_{x=\pi} = t^2, u \Big|_{t=0} = \cos 2x. \end{cases}$

Đặt $v = u - t^2x - \cos 2x$, ta có

$$\begin{aligned}
&v_t - v_{xx} = u_t - 2tx - (u_{xx} + 4\cos 2x) = v - 3\cos 2x + 2\cos t\\
&v_x \Big|_{x=0} = v_x \Big|_{x=\pi} = 0, v \Big|_{t=0} = 0.
\end{aligned}$$

Ta giải phương trình thuần nhất tương ứng: $v_t - v_{xx} = v$ và tìm nghiệm ở dạng tách biến $v(x,t) = X(x)T(t)$. Phương trình tương đương

$$XT' - X''T = XT \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T' - T}{T} = \lambda.$$

Vậy ta giải phương trình $X'' = \lambda X$ với điều kiện biên

$$v_x \Big|_{x=0} = v_x \Big|_{x=\pi} = 0 \Rightarrow X'(0) = X'(\pi) = 0.$$

Tùy theo dấu của λ ta biện luận nghiệm $X(x)$.

- Nếu $\lambda > 0$, phương trình có nghiệm $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Suy ra $X'(x) = \sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}x} - Be^{-\sqrt{\lambda}x})$. Thay điều kiện biên ta có

$$\begin{aligned}
&X'(0) = \sqrt{\lambda}(A - B) = 0,\\
&X'(\pi) = \sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}\pi} - Be^{-\sqrt{\lambda}\pi}) = 0 \Rightarrow \qquad A = B = 0, X(x) = 0.
\end{aligned}$$

- Nếu $\lambda = 0$, $X(x) = ax + b$. Thay điều kiện ban đầu ta cũng có $X'(0) = X'(\pi) = a = 0$. Vậy $X(x) = C$.

- Nếu $\lambda < 0$, phương trình có nghiệm tổng quát $X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x$. Suy ra $X'(x) = \sqrt{-\lambda}(-A\sin\sqrt{-\lambda}x + B\cos\sqrt{-\lambda}x)$.

  Điều kiện ban đầu cho chúng ta

$$X'(0) = B\sqrt{-\lambda} = 0, X'(\pi) = \sqrt{-\lambda}(-A)\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0.$$

  Bài toán có nghiệm không tầm thường nếu $A \neq 0$, như vậy $\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$, tức là với các giá trị $\sqrt{-\lambda_k}\pi = k\pi$, $\lambda_k = -k^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Nghiệm tương ứng $X_k = A_k\cos kx$.

Biết công thức nghiệm riêng này, ta tìm nghiệm hình thức của bài toán không thuần nhất dưới dạng

$$u(x,t) = T_0(t) + \sum_{k=1} T_k(t)\cos kx. \tag{3.14}$$

Thay vào phương trình $v_t - v_{xx} = v - 3\cos 2x + 2\cos t$, ta có

$$T_0'(t) + \sum_{k=1} T_k'(t)\cos kx = T_0(t) + \sum_{k=1}(1-k^2)T_k(t)\cos kx - 3\cos 2x + 2\cos t.$$

Đồng nhất hệ số của $\cos kx$ ở hai vế ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned}
&T_0'(t) = T_0(t) + 2\cos t, T_0(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = e^t + \sin t - \cos t\\
&T_2'(t) = -3T_2(t) - 3, T_2(0) = 0 \Rightarrow T_2(t) = e^{-3t} - 1\\
&T_k'(t) = (1-k^2)T_k(t), T_k(0) = 0 \Rightarrow T_k(t) = 0, \forall k \neq 2.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là

$$u(x,t) = t^2x + e^t + \sin t - \cos t + e^{-3t}\cos 2x.$$

3.3.2 Bài tập

1. $\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0\\ u(0,t) = 2, u(1,t) = 6, t > 0,\\ u(x,0) = \sin 2\pi x + 4x. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0\\ u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0,\\ u(x,0) = x^2 - 1, 0 < x < 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_t + u = u_{xx}, 0 < x < l, t > 0\\ u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0,\\ u(x,0) = 1, 0 < x < l. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 < x < l, t > 0\\ u_x(0,t) = 1, u(l,t) = 0, t > 0,\\ u(x,0) = 0, 0 < x < l. \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0\\ u_x(0,t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0, t > 0,\\ u(x,0) = 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t, 0 < x < 1, t > 0\\ u(0,t) = u(1,t) = t, t > 0,\\ u(x,0) = e^x \sin \pi x, 0 < x < 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2t + 2\cos^2 x, 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u_x(\pi, t) = 2\pi t, t > 0, \\ u(x,0) = 0, 0 < x < \pi. \end{cases}$

3.3.3 Định lý duy nhất nghiệm và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu

Định lí 3.7. *Bài toán (3.7), (3.8) có nghiệm duy nhất $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ và nghiệm này phụ thuộc liên tục vào điều kiện biên (dữ kiện trên S_T) và điều kiện ban đầu (trên Ω).*

Chứng minh. Cách chứng minh tương tự chứng minh cho bài toán Cauchy, sử dụng nguyên lý cực trị trong miền bị chặn.

Giả sử $u_i \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$, $i = 1, 2$ lần lượt là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} (u_i)_t = a^2 \Delta u_i, (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0, T], \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x,t), x \in \Omega, \\ u_i \big|_{S_T} = \psi_i(x,t). \end{cases}$$

Do tính chất tuyến tính của phương trình và các điều kiện, ta có hàm số $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ là nghiệm của bài toán sau

$$\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v, (x,t) \in Q_T, \\ v(x,0) = \varphi_1(x,t) - \varphi_2(x,t), x \in \Omega, \\ v \big|_{S_T} = \psi_1(x,t) - \psi_2(x,t). \end{cases}$$

Theo nguyên lý cực trị ta có với mọi $(x,t) \in \bar{Q}_T$:

$$\inf_{S_T \cup \Omega} v(x,t) \le v(x,t) \le \sup_{S_T \cup \Omega} v(x,t).$$

Nói riêng nếu $\sup_{S_T} |\psi_1 - \psi_2| < \varepsilon, \sup_{\Omega} |\varphi_1 - \varphi_2| < \varepsilon$ thì $|(u_1 - u_2)(x,t)| \le \varepsilon$ với mọi $(x,t) \in \bar{Q}_T$. Ta thu được sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện biên và điều kiện ban đầu.

Đặc biệt đối với cùng một bài toán, $\psi_1 \equiv \psi_2$, $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ ta có $u_1 \equiv u_2$, phương trình có nghiệm duy nhất. □

3.4 Công thức Green. Biểu diễn nghiệm nhờ các thế vị

Giả sử Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Ta ký hiệu $Q_T = \Omega \times (0, T]$ và $S_T = \partial\Omega \times [0, T]$ là mặt xung quanh của hình trụ. Giả sử rằng Ω là miền có biên trơn (tổng quát hơn là miền mà công thức tích phân từng phần đúng cho miền đó, xem thêm [2][trang 3]).

Đặt $Lu = u_t - u_{xx} - u_{yy}$, $L = \partial_t - \partial_x^2 - \partial_y^2$ (toán tử truyền nhiệt). Ta có $L^*u = -u_t - u_{xx} - u_{yy}$, $L^* = -\partial_t - \partial_x^2 - \partial_y^2$ (toán tử liên hợp hình thức của toán tử truyền nhiệt).

Giả sử $u, v \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$. Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} vLudV =& \int_{Q_T} v(u_t - u_{xx} - u_{yy})dV \\ =& -\int_{Q_T}(uv_t - v_xu_x - v_yu_y)dV + \int_{\partial Q_T}\Big[uv\cos(\nu,t) - vu_x\cos(\nu,x) - vu_y\cos(\nu,y)\Big]d\sigma\end{aligned}$$

Trên ba thành phần của biên ∂Q_T, thứ nhất trên mặt xung quanh S_T pháp vector đơn vị vuông góc với đường sinh của Q_T, do đó $\cos(\nu,t) = 0$, thứ hai trên mặt đáy dưới Ω và đáy trên Ω_T pháp vector lần lượt cùng hướng và đối hướng với chiều dương của trục t, do đó, $\cos(\nu,x) = \cos(\nu,y) = 0$, $\cos(\nu,t) = \pm 1$ lần lượt trên Ω_T và Ω. Do đó ta có

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} vLudV =& -\int_{Q_T}(uv_t - v_xu_x - v_yu_y)dV + \int_{S_T}\Big[-vu_x\cos(\nu,x) - vu_y\cos(\nu,y)\Big]d\sigma + \\ &+ \int_{S_T} u(x,y,T)v(x,y,T)dxdy - \int_S u(x,y,0)v(x,y,0)dxdy \\ =& -\int_{Q_T}(uv_t - v_xu_x - v_yu_y)dV - \int_{S_T} v\frac{\partial u}{\partial \nu}d\sigma + \int_{\Omega_T} u(x,y,T)v(x,y,T)dxdy - \\ & \int_\Omega u(x,y,0)v(x,y,0)dxdy\end{aligned}$$

Lại áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$-\int_{Q_T} u(v_{xx} + v_{yy})dV = \int_{Q_T}(v_xu_x + v_yu_y)dV - \int_{\partial Q_T} u\frac{\partial v}{\partial \nu}d\sigma$$

Trừ tương ứng vế với vế, chuyển $\int_{Q_T} uv_t dV$ sang vế trái ta có công thức Green đối với toán tử truyền nhiệt

$$\begin{aligned}\int_{Q_T}(vLu - uL^*v)dV =& \int_{S_T}\Big(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\Big)d\sigma + \\ &+ \int_{\Omega_T} u(x,y,T)v(x,y,T)dxdy - \int_\Omega u(x,y,0)v(x,y,0)dxdy\end{aligned}$$

Đặc biệt, chọn v bằng hàm số sau đây

$$\Gamma(x,\xi,t,\tau) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \le \tau \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\Big(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\Big) & \text{khi } t > \tau. \end{cases} \tag{3.15}$$

Xem điểm (ξ,τ) là tham số ta kiểm tra được rằng với $t > \tau$: $L\Gamma = \Gamma_t - \Gamma_{xx} - \Gamma_{yy} = 0$.

Định nghĩa 3.8. *Hàm số $\Gamma(x, \xi, t, \tau)$ được gọi là nghiệm cơ bản của phương trình truyền nhiệt.*

Mặt khác, nếu xem (x, t) là tham số thì $L^*_{\xi,\tau}\Gamma = -\Gamma_\tau - \Delta_\xi = 0$.

Vì hàm số Γ có điểm kỳ dị tại $t = \tau$ do đó không thể thay trực tiếp $v(x, y, t) = \Gamma(x, \xi, t, \tau)$ vào công thức Green thứ hai (3.15). Ta lấy $\varepsilon > 0$, áp dụng công thức Green trên miền $Q_{\tau-\varepsilon}$ rồi lấy giới hạn khi $\varepsilon \to 0$.

$$\int_{Q_{\tau-\varepsilon}} (\Gamma Lu - uL^*\Gamma)dV = \int_{S_{\tau-\varepsilon}} \Big(\Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\Big)d\sigma + \\ + \int_{\Omega_{\tau-\varepsilon}} u\Gamma dxdy - \int_\Omega u\Gamma dxdy$$

Ta có $L^*\Gamma(\xi, x, \tau, t) = 0$ (chú ý ta đã đổi thứ tự x và ξ, t và τ trong biểu thức của Γ). Ngoài ra

$$\int_{Q_{\tau-\varepsilon}} \Gamma(\xi, x, \tau, \tau - \varepsilon)u(x, \tau - \varepsilon)dx \to u(\xi, \tau).$$

Chuyển qua giới hạn khi $\varepsilon \to 0$, ta có

$$u(\xi, \tau) = \int_{Q_\tau} \Gamma(\xi, x, \tau, t)LudV + \int_{S_\tau} \Big(\Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\Big)d\sigma + \int_\Omega u(x, 0)\Gamma(\xi, x, \tau, 0)dxdy$$

Các tích phân có mặt trong công thức trên có tên gọi như sau

Định nghĩa 3.9.

- *$\int_{Q_\tau} \Gamma(\xi, x, \tau, t)a_0(x)dV$ gọi là **thế vị nhiệt khối** với hàm mật độ $a_0(x)$ trên Q_T.*
- *$\int_{S_\tau}(\Gamma a_1(x)d\sigma$ gọi là **thế vị nhiệt lớp đơn** với hàm mật độ $a_1(x)$.*
- *$\int_{S_\tau}(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}a_2(x)d\sigma$ gọi là **thế vị nhiệt lớp kép** với hàm mật độ $a_2(x)$.*

Vậy khi biết nghiệm cơ bản Γ của phương trình truyền nhiệt ta có thể biểu diễn tường minh hàm số u thông qua các thế vị nhiệt khối, thế vị nhiệt lớp đơn và thế vị nhiệt lớp kép với các hàm mật độ lần lượt là Lu, giá trị của đạo hàm của u và chính nó trên ∂Q_T.

Chương 4

Phương trình Laplace và phương trình Poisson

4.1 Thiết lập phương trình. Các bài toán biên

4.1.1 Thiết lập phương trình

Chúng ta đã xét một số hiện tượng vật lý trong các chương trước, ví dụ như mô hình dây rung, mô hình dao động của màng mỏng, hiện tượng khuếch tán, hiện tượng truyền nhiệt. Các đại lượng vật lý như độ rời của dây, của màng trong trường hợp đơn giản được mô tả bởi phương trình truyền sóng $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$, nồng độ chất khuếch tán hay nhiệt độ của vật thể được mô tả bởi phương trình truyền nhiệt $u_t - c^2\Delta u = 0$.

Giả sử chúng ta xét trường hợp vật thể đang ở trạng thái cân bằng, ví dụ như một vật thể đang truyền nhiệt ra môi trường xung quanh, mặc dù vẫn xảy ra quá trình trao đổi nhiệt nhưng ở trạng thái cân bằng, nhiệt độ của vật thể không thay đổi theo thời gian, nhiệt lượng do vật thể sinh ra bằng với dòng nhiệt thoát ra môi trường bên ngoài. Nói cách khác, các trạng thái vật lý không thay đổi theo thời gian, tức là $u_t = u_{tt} = 0$. Khi đó phương trình truyền sóng và phương trình truyền nhiệt thu gọn về $\Delta u = 0$.

4.1.2 Các bài toán biên

Trong chương trình ta chỉ xét bài toán biên đối với miền bị chặn. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn và có biên trơn $\partial\Omega$ (từng đoạn nhỏ của $\partial\Omega$ có thể xem là đồ thị của một hàm số khả vi vô hạn).

Hai phương trình được xét trong chương này là

- Phương trình Laplace $\Delta u = 0$.
- Phương trình Poisson $\Delta u = f$.

Để xét tính đặt đúng của bài toán này, chúng ta còn cần thêm các điều kiện biên như sau.

1. Điều kiện biên Dirichlet $u\,\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$.

2. Điều kiện biên Neumann $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$. Trong trường hợp này, ta còn cần **điều kiện tương thích** giữa vế phải f và điều kiện biên φ. Thật vậy, sử dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_\Omega f dV = \int_\Omega \Delta u dV = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\partial u \partial x_i\Big) dV = -\int_\partial \Omega \sum_{i=1}^n \partial u \partial x_i \nu_i d\sigma = \int_\partial \Omega \varphi(x) d\sigma,$$

trong đó $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ là pháp vector đơn vị ngoài.

Ta có thể hiểu đẳng thức trên như sau: nếu xét một vật thể đang trao đổi nhiệt ở trạng thái cân bằng $u_t = 0$, $\Delta u = 0$, vế trái chính là nhiệt lượng sinh ra do nguồn nhiệt bên trong vật thể, còn vế phải là dòng nhiệt trao đổi qua biên của vật thể. Vật thể ở trạng thái cân bằng khi nhiệt lượng sinh ra chính bằng nhiệt lượng trao đổi với môi trường bên ngoài, chính là điều kiện tương thích nói trên.

3. Điều kiện biên Robin (hỗn hợp) $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x) u \Big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$.

Chúng ta sẽ xét nghiệm cổ điển của phương trình Laplace/Poisson: với điều kiện biên Dirichlet $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, với điều kiện biên Neumann và Robin $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ (các đạo hàm hiểu theo nghĩa thông thường).

4.1.3 Công thức Green. Nghiệm cơ bản của phương trình Laplace

Giả sử $u, v \in u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_\Omega v \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} dV = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} dV + \int_\partial \Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i d\sigma.$$

Lấy tổng các vế các đẳng thức trên với $i = 1, 2, \ldots, n$ ta có

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \sum_{i=1}^n v \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} dV = -\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} dV + \int_\partial \Omega v \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i d\sigma \\ \Leftrightarrow &\int_\Omega v \Delta u dV = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dV + \int_\partial \Omega v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma (\text{ CT Green thứ nhất}) \end{aligned}$$

. Đổi vai trò giữa u và v ta có

$$\int_\Omega u \Delta v dV = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dV + \int_\partial \Omega u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma$$

Trừ vế với vế ta có công thức Green thứ hai

$$\int_\Omega (v\Delta u - u \Delta v) dV = \int_\partial \Omega \Big(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big) d\sigma \tag{4.1}$$

Cố định điểm $y \in \Omega$ và xét hàm số

$$\Gamma(x,y) = \Gamma(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n} & \text{khi } n > 2, \\ \frac{1}{2\pi}\ln|x-y| & \text{khi } n = 2, \end{cases}$$

trong đó $\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2+1)}$ là thể tích của hình cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 4.1. $\Gamma(x,y)$ *là nghiệm cơ bản của phương trình Laplace.*

Khi $x \neq y$, ta tính được

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} = \frac{1}{n\omega_n}(x_j - y_j)|x-y|^{-n}$$
$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_j^2} = \frac{1}{\omega_n}(x_j - y_j)^2|x-y|^{-n-2} + \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{-n}$$

do đó $\Delta_x \Gamma(x,y) = 0$.

Hàm số $\Gamma(x,y)$ có kỳ dị yếu tại điểm $x = y$. Áp dụng công thức Green thứ hai (4.1) cho miền $\Omega \setminus B_\varepsilon(y)$ và hàm $v = \Gamma(x,y)$

$$\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(y)} \Gamma \Delta u dV = \int_{\partial\Omega \cup \partial B} \Big(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\Big) d\sigma$$

Người ta chứng minh được ([2][trang 45])

$$\Big|\int_{\partial B} \Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma\Big| \neq 0, \qquad \Big|\int_{\partial B} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} d\sigma \to -u(y)$$

Do đó cho $\varepsilon \to 0$ ta có

$$u(y) = \int_{\partial} \Omega \Big(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} - \Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big) d\sigma + \int_\Omega \Gamma \Delta u dV \tag{4.2}$$

Định nghĩa 4.2.

- *Tích phân dạng* $\int_\Omega \Gamma a_0(x) dV$ *được gọi là* ***thế vị khối*** *với mật độ* $a_0(x)$ *trong* Ω.
- *Tích phân dạng* $\int_{\partial\Omega} \Gamma a_1(x) dV$ *được gọi là* ***thế vị lớp đơn*** *với mật độ* $a_1(x)$ *trong* Ω.
- *Tích phân dạng* $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} a_2(x) dV$ *được gọi là* ***thế vị lớp kép*** *với mật độ* $a_2(x)$ *trong* Ω.

Công thức (4.2) cho ta biểu diễn của một hàm $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ bất kỳ thông qua các thế vị khối, lớp đơn, lớp kép với hàm mật độ lần lượt là Δu, giá trị u và đạo hàm theo hướng pháp tuyến của u trên biên.

Nếu $\Delta u = 0$, thế vị khối bằng 0, như vậy hàm điều hòa u được biểu diễn thông qua các giá trị của nó và đạo hàm theo hướng pháp tuyến của nó trên biên $\partial\Omega$. Hơn nữa, do $y \in \Omega$, các thế vị lớp đơn và lớp kép là các tích phân lấy trên biên, do đó các tích phân này xác định, do $\Gamma(x,y)$ khả vi vô hạn, giải tích theo y khi $y \neq x$, nên ta có thể lấy đạo hàm vô số lần theo y, hàm thu được cũng là hàm giải tích. Vậy hàm điều hòa là hàm giải tích. Tính chất này cũng đúng cho lớp các phương trình elliptic với hệ số giải tích.

4.2 Phương pháp hàm Green, công thức Poisson

Trong phần này ta xây dựng công thức biểu diễn nghiệm $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ của bài toán Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & x \in \Omega \\ u = \varphi(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Giả sử $h(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ là hàm điều hòa, $\Delta h = 0$. Áp dụng công thức Green thứ hai cho u và h ta có

$$\int_\Omega h\Delta u dV = \int_\partial \Omega\Big(h\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial h}{\partial \nu}\Big)d\sigma$$

Cộng tương ứng hai vế với (4.2) ta có

$$u(y) = \int_\Omega (\Gamma + h)\Delta u dV - \int_\partial \Omega\Big((\Gamma + h)\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial(\Gamma + h)}{\partial \nu}\Big)d\sigma$$

Đặt $G = \Gamma + h$ và chọn hàm h sao cho $G\big|_{\partial\Omega} = 0$. Đẳng thức trên trở thành

$$u(y) = \int_\Omega G\Delta u dV + \int_\partial \Omega u\frac{\partial G}{\partial \nu}d\sigma$$

Định nghĩa 4.3.

Định lí 4.4. *Nghiệm $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ của bài toán biên Dirichlet được biểu diễn bởi công thức*

$$u(y) = -\int_\partial \Omega\frac{\partial G}{\partial \nu}\varphi(x)d\sigma + \int_\Omega Gf(x)dx,\ y \in \Omega.$$

Hàm G với tính chất trên được gọi là hàm Green, cụ thể $\begin{cases} \Delta_x G(x,y) = 0 & \textit{khi } x \in \Omega \\ G\big|_\partial \Omega = 0. \end{cases}$

Hàm Green đối với miền bất kỳ không dễ tìm ở dạng tường minh. Trong trường hợp hình tròn, người ta tìm được công thức như sau

Định nghĩa 4.5. *Hàm Green đối với hình cầu cho bởi công thức sau*

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(|x-y|) - \Gamma\Big(\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}|\Big) & \textit{khi } y \neq 0 \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(R) & \textit{khi } y = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

trong đó $\bar{y} = \frac{R^2}{|x|^2}x$ là điểm nghịch đảo của x đối với hình cầu $\Omega = B(O,R)$, khi $x = 0$, $\bar{x} = \infty$.

Ta có thể kiểm tra được $G(x,y) = G(y,x)$ và $\frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{\partial G}{\partial |x|} = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R}|x-y|^{-n}$.

Định lí 4.6. *Giả sử $\varphi(x)$ là hàm liên tục trên $\partial B(O,R)$. Hàm u xác định bởi*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial B}\frac{\varphi(y)d\sigma}{|x-y|^n}, x \in \partial B(O,R)$$

thuộc $C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ và thỏa mãn phương trình Laplace $\Delta u = 0$ với điều kiện biên $u\big|_\partial \Omega = \varphi(x)$.

Trong trường hợp $n = 2$ ta có thể dùng phép đổi biến trong tọa độ cực và thu được công thức

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \eta) + r^2}\varphi(r,\eta)d\eta. \tag{4.4}$$

4.3 Tính duy nhất nghiệm và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm

4.3.1 Nguyên lý cực trị

Định lí 4.7. *Giả sử Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ là hàm điều hòa trong Ω. Khi đó u đạt GTLN, GTNN trên biên $\partial\Omega$.*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \ \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Chứng minh. Ta chứng minh với $n = 2$, trường hợp tổng quát viết tương tự. Ngoài ra, do $\max u = -\min(-u)$, ta chỉ cần chứng minh nguyên lý trên đối với điểm cực đại.

Xét hàm số $v(x,y) = u(x,y) + \varepsilon(x^2+y^2)$, $(x,y) \in \bar{\Omega}$, $\varepsilon > 0$. Ta có $v \in C^2(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$, và $\Delta v = \Delta u + 4\varepsilon > 0$.

Do hàm số $v \in C^0(\bar{\Omega})$, nó đạt GTLN tại điểm $(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}$. Ta sẽ chứng minh $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$. Thật vậy, nếu $(x_0, y_0) \in \Omega$, nói riêng $x = x_0$ và $y = y_0$ lần lượt là điểm cực đại của hai hàm một biến $v(x, y_0)$ và $v(x_0, y)$, nên $v_{xx}(x_0, y_0), v_{yy}(x_0, y_0) \le 0$. Điều này mâu thuẫn với tính chất $\Delta v > 0$.

Vậy $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ và ta có với mọi $(x,y) \in \bar{\Omega}$

$$u(x,y) \le v(x,y) \le v(x_0, y_0 = u(x_0,y_0) + \varepsilon(x_0^2 + y_0^2)) \le \max_{\partial\Omega} u(x,y) + \varepsilon(x_0^2 + y_0^2)).$$

Do miền $\bar{\Omega}$ bị chặn nên ta có thể đánh giá $x_0^2 + y_0^2$ bởi M. Ước lượng đúng với mọi $(x,y) \in \bar{\Omega}$ nên

$$\max_{\bar{\Omega}} u \le \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon M.$$

Cho $\varepsilon \to 0$, ta có $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. □

4.3.2 Tính duy nhất nghiệm, sự phụ thuộc liên tục

Giả sử u_1, u_2 là nghiệm của phương trình Laplace với điều kiện biên Dirichlet lần lượt là $\psi_1(x), \psi_2(x)$.

$$\begin{cases} \Delta u_i = 0 & x \in \Omega, \\ u_i \big|_{\partial\Omega} = \psi_i(x). \end{cases}$$

Như vậy $v = u_1 - u_2$ là nghiệm của bài toán $\begin{cases} \Delta v = 0 & x \in \Omega, \\ v \big|_{\partial\Omega} = \psi_1(x) - \psi_2(x). \end{cases}$

Áp dụng nguyên lý cực trị cho hàm số v ta có với mọi $x \in \bar{\Omega}$

$$\min_{\partial\Omega}(\psi_1 - \psi_2) \le u_1(x) - u_2(x) \le \max_{\partial\Omega}(\psi_1 - \psi_2). \tag{4.5}$$

Do đó, nghiệm u phụ thuộc liên tục vào điều kiện biên.

Nói riêng, đối với cùng bài toán, $\psi_1 = \psi_2$, (4.5) cho ta $u_1(x) = u_2(x)$ với mọi $x \in \partial\Omega$. Ta thu được tính duy nhất nghiệm của bài toán.

4.4 Giải bài toán Dirichlet trong hình tròn

Trong trường hợp $n = 2$, miền Ω là hình tròn ta cũng có thể sử dụng phương pháp tách biến Fourier để tìm nghiệm của bài toán Dirichlet ở dạng chuỗi.

4.4.1 Phương pháp tách biến

Giả sử với $a > 0$, $f(x, y)$ là hàm cho trước ta xét bài toán

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x,y) \in B(0,a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < a^2\}, \\ u \big|_{\partial\Omega} = f(x,y) & (x,y) \in \partial B(0,a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\}, \end{cases}$$

Sử dụng hệ tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ phương trình Laplace trở thành

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Ta tìm nghiệm của phương trình dưới dạng $u(r,\theta) = R(r)\psi(\theta)$. Phương trình Laplace trở thành

$$R''\psi + \frac{R}{r}\psi + \frac{R}{r^2}\psi'' = 0 \tag{4.6}$$

và điều kiện biên trở thành $u \big|_{\partial B} = g(a\cos\theta, a\sin\theta) = \varphi(\theta)$. Dễ thấy φ là hàm tuần hoàn, $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$. Phương trình (4.6) tương đương

$$\frac{r^2R'' + rR}{R} = -\frac{\psi''}{\psi} = \lambda$$

do vế trái chỉ phụ thuộc r, vế phải chỉ phụ thuộc θ, hai vế bằng nhau và cùng bằng hằng số.

Do đó, ta sẽ tìm nghiệm tuần hoàn $\psi(\theta)$ của phương trình $\psi'' + \lambda\psi = 0$.

- Nếu $\lambda < 0$, phương trình có nghiệm tổng quát $\psi = C_1e^{-\sqrt{-\lambda}\theta} + C_2e^{\sqrt{-\lambda}\theta}$, nghiệm này không tuần hoàn nếu C_1 hoặc C_2 khác 0.

- Nếu $\lambda = 0$, $\psi'' = 0$, phương trình có nghiệm $\psi = C_1\theta + C_2$. Nghiệm này tuần hoàn khi $C_1 = 0$, ta có hàm số hằng.

- Nếu $\lambda > 0$, phương trình có nghiệm $\psi(\theta) = C_1\cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2\sin\sqrt{\lambda}\theta$.

  Từ tính chất $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$, ta cũng có $\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi)$ với mọi θ

  $$C_1\cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2\sin\sqrt{\lambda}\theta = C_1\cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) + C_2\sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi).$$

  Suy ra, $\sqrt{\lambda}\theta + 2k\pi = \sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)$. Như vậy, nghiệm $\varphi(\theta)$ không tầm thường khi $\lambda_k = k^2$, $k \geq 1$, và $\psi_k(\theta) = A_k\cos k\theta + B_k\sin k\theta$.

Với $\lambda_k = k^2$, ta giải phương trình $r^2R'' + rR = k^2R$. Ta tìm nghiệm của phương trình này ở dạng $R(r) = r^\alpha$. Thay vào ta được $\alpha^2 = k^2$, nên $\alpha = \pm k$. Tuy nhiên do ta đang tìm nghiệm u lớp $C^0(\bar{B})$ nên nghiệm r^{-k} bị loại.

Vậy nghiệm hình thức của phương trình có thể viết ở dạng

$$u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta). \tag{4.7}$$

Thay điều kiện biên $r = a$ ta có

$$\varphi(\theta) = u(a,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a^k(A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta).$$

Do đó A_0, A_k, B_k, $k \geq 1$ có thể tính theo hệ số trong khai triển Fourier của hàm số $\varphi(\theta)$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)d\theta, \\ A_k &= \frac{1}{\pi a^k}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\cos k\theta d\theta, \\ B_k &= \frac{1}{\pi a^k}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\sin k\theta d\theta. \end{aligned}$$

Giả sử hàm số $f(x,y)$ liên tục trên ∂B, do đó nó là hàm bị chặn, hàm $\varphi(\theta)$ cũng bị chặn, ta ký hiệu bởi hằng số M. Khi đó từ công thức của A_k, B_k, ta dễ ước lượng

$$|A_k|, |B_k| \leq \frac{1}{\pi a^k}\int_0^{2\pi} |\varphi(\theta)|d\theta \leq 2M.$$

Do đó chuỗi nghiệm hình thức (4.7) được chặn trên bởi

$$\frac{A_0}{2} + 4M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{a^k}$$

Chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{a^k}$ hội tụ khi $|r| < a$, do đó chuỗi (4.7) hội tụ đều trên mọi hình tròn $B(0,R_0)$ với $0 < R_0 < a$. Ta vừa chứng minh định lý sau đây

Định lí 4.8. *Giả sử hàm số $f(x,y)$ liên tục trên ∂B. Khi đó bài toán Dirichlet trong hình cầu có nghiệm (4.7) với A_0, A_k, B_k, $k \geq 1$, được tính theo công thức trên.*

Công thức nghiệm này trùng với công thức Poisson khi $n = 2$, chứng minh xem trong [2, trang 80].

4.4.2 Ví dụ

Giải bài toán $\begin{cases} \Delta u = 4 & x \in \Omega = \{x^2 + y^2 < 1\}, \\ u = 1 + x^2 + 2xy & x \in \partial\Omega = \{x^2 + y^2 = 1\}. \end{cases}$

Đặt $v = u - x^2 - y^2$, ta có $\begin{cases} \Delta v = \Delta u - 4 = 0 & x \in \Omega, \\ v = u - 1 = x^2 + 2xy & x \in \partial\Omega. \end{cases}$

Đổi sang tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\theta, \quad 0 \le r < 1, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$

Bài toán trở thành $\begin{cases} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0, & 0 < r < 1, \\ u(1,\theta) = \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta. \end{cases}$ Áp dụng lý thuyết ta có, nghiệm hình thức của phương trình có dạng

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\ge1} r^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta),$$

do đó $\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} + \sin 2\theta = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\ge1}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)$. Đồng nhất các hệ số của $\cos k\theta, \sin k\theta$ ở hai vế ta thu được $a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $b_2 = 1$, $a_k = b_k = 0$ khi $k \neq 2$.

Vậy $v(r,\theta) = \frac{1}{2} + r^2(\frac{1}{2}\cos 2\theta + \sin 2\theta)$. Nghiệm của bài toán là

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(1 + x^2 + y^2) + x^2 + 2xy = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}.$$

4.4.3 Bài tập

1. Cho hình tròn $B(0,R)$. Tìm nghiệm của phương trình Laplace với điều kiện biên

   (a) $u\,\big|_{\partial B} = 1 + 2\sin\theta$.

   (b) $u = a\cos^3\theta + b\sin^2\theta$.

2. Giải bài toán $\begin{cases} \Delta u = 2x, & x \in B(0,2), \\ u\,\big|_{\partial B} = x - x^3 - 2xy^2. \end{cases}$

3. Giải bài toán $\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2 \\ u\,\big|_{r=1} = x - y, u\,\big|_{r=2} = \ln 2 - \frac{y}{4} + x. \end{cases}$

4. Xét bài toán $\begin{cases} \Delta u = 0, (x,y) \in B(0,1) \\ \frac{\partial u}{\partial n}\,\big|_{\partial B} = 2x - y^2 + k. \end{cases}$ Tìm k để phương trình có nghiệm, tìm nghiệm đó.

5. Tìm công thức phương trình Laplace trong hệ tọa độ cực.

Ta có $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ nên

$$\begin{aligned}
u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x \\
u_{xx} &= u_{rr}(r_x)^2 + 2u_{r\theta} r_x \theta_x + u_{\theta\theta}(\theta_x)^2 + u_r r_{xx} + u_\theta \theta_{xx} \\
r_x &= \frac{x}{r}, r_y = \frac{y}{r}, \theta_x = 0\frac{-y}{x^2+y^2}, \theta_y = 0\frac{x}{x^2+y^2} \\
r_{xx} &= \frac{y^2}{r^3}, r_{yy} = \frac{x^2}{r^3}
\end{aligned}$$

Thay vào công thức $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$.

4.5 Hàm điều hòa

Tài liệu tham khảo

[1] Fritz John, *Partial differential equations*, Springer-Verlag, 1982.

[2] Nguyễn Mạnh Hùng, *Phương trình đạo hàm riêng phần 1*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2002.

[3] Nguyễn Minh Chương, Hà Tiến Ngoạn *Phương trình đạo hàm riêng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2000.

[4] Trần Đức Vân, *Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng*, Nhà Xuất bản Đại học Quốc gia, 2005.

[5] Yehuda Pinchover, Jacob Rubinstein *An introduction to partial differential equations*, Cambridge University Press, 2005.

[6] Walter Strauss *Partial differential equations, an introduction*, John Wiley and Sons, Inc., 1992.

[7] Hans Weinberger *A First Course in Partial Differential Equations*, Blaisdell, Waltham, Mass., 1965.