Chương 2

PHƯƠNG TRÌNH LOẠI ELIP MỘT CHIỀU

(BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT DỪNG MỘT CHIỀU)

2.1. Bài toán biên loại một

.

2.1.1. Bài toán biên loại một với điều kiện biên thuần nhất.

Xét khoảng số thực $[0,1]$. Xét phương trình vi phân thường cấp hai:

$$Lu := -(pu')' + qu = f(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{2.1.1}$$

và điều kiện biên

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \tag{2.1.2}$$

trong đó p, q, f là các hàm số cho trước thỏa mãn

$$p,\ p',\ q,\ f \in L_2(0,1) \tag{2.1.3}$$

$$C_0 \le p(x) \le C_1, \quad 0 \le q(x) \le C_2, \quad 0 < x < 1 \tag{2.1.4}$$

C_0, C_1, C_2 là các hằng số dương.

Bài toán biên loại một đối với phương trình vi phân (2.1.1) phát biểu:

Tìm hàm số $u \in W^2(0,1)$ thỏa mãn phương trình vi phân (2.1.1) cùng với các điều kiện biên (2.1.2).

Vì các điều kiện biên (2.1.2) có vế phải bằng 0 ta nói điều kiện biên đó là thuần nhất và bài toán trên cũng có thể phát biểu:
Tìm hàm số $u \in W^2(0,1) \cap W_0^1(0,1)$ thỏa mãn phương trình vi phân (2.1.1).

Nghiệm của bài toán vi phân định nghĩa như vậy gọi là *nghiệm cổ điển* của bài toán (2.1.1)(2.1.2).

Bài toán (2.1.1)(2.1.2) là mô hình toán học của bài toán truyền nhiệt dừng một chiều.

2.1.2. Trường hợp điều kiện biên không thuần nhất.

Trong trường hợp điều kiện biên (2.1.2) thay bởi

$$u(0) = A, \quad u(1) = B$$

trong đó A và B không đồng thời bằng 0 ta nói điều kiện biên không thuần nhất. Ta tìm cách đổi hàm để đưa nó về trường hợp điều kiện biên thuần nhất. Muốn thế ta xét hàm số

$$g(x) = kx + A, \quad k = B - A$$

có đặc điểm:

$$g(0) = A, \quad g(1) = B$$

rồi đặt

$$v(x) = u(x) - g(x)$$

thì có

$$v(0) = u(0) - g(0) = A - A = 0, \quad v(1) = u(1) - g(1) = B - B = 0$$

Đồng thời

$$Lv = Lu - Lg = f - Lg = f - [-(pg')' + qg] = f - [-p'k + q(kx + A)] =: F(x)$$

Do đó v thỏa mãn bài toán

$$Lv = F, \quad v(0) = 0,\ v(1) = 0$$

Đó là bài toán với điều kiện biên thuần nhất.

Như vậy là trong trường hợp điều kiện biên không thuần nhất ta luôn tìm được cách đổi hàm để đưa nó về trường hợp điều kiện biên thuần nhất. Do đó từ nay về sau ta chỉ xét các bài toán biên loại một với điều kiện biên thuần nhất.

2.2. Bài toán yếu và nghiệm suy rộng

2.2.1. Bài toán yếu

Giả sử bài toán (2.1.1)(2.1.2) có nghiệm cổ điển $u \in W^2(0,1) \cap W_0^1(0,1)$. Khi đó Lu và $f \in L_2(0,1)$. Trong $L_2(0,1)$ nhân vô hướng hai vế của (2.1.1) với $v \in D(0,1)$, gọi là hàm thử, ta được

$$\int_0^1 [-(pu')' + qu]v dx = \int_0^1 fv dx, \qquad \forall v \in D(0,1) \tag{2.2.1}$$

Khi đó ta có thể lấy tích phân từng phần vế trái của (2.2.1):

$$\int_0^1 -(pu')'v dx = -pu'v|_0^1 + \int_0^1 pu'v' dx = \int_0^1 pu'v' dx$$

vì khi $v \in D(0,1)$ thì $v(0) = v(1) = 0$.

Vậy (2.2.1) trở thành

$$\int_0^1 (pu'v' + quv) dx = \int_0^1 fv dx, \qquad \forall v \in D(0,1)$$

Vì $D(0,1)$ trù mật trong $W_0^1(0,1)$ nên ta suy ra

$$\int_0^1 (pu'v' + quv)dx = \int_0^1 fvdx, \qquad \forall v \in W_0^1(0,1) \tag{2.2.2}$$

Ta nhận thấy trong (2.2.2) không có đạo hàm cấp hai của u nữa.

Đặt

$$\alpha(u,v) := \int_0^1 (pu'v' + quv)dx \tag{2.2.3}$$

$$L(v) := \int_0^1 fvdx \tag{2.2.4}$$

Ta phát biểu bài toán mới:

Với $\alpha(u,v)$ và $L(v)$ xác định bởi (2.2.3) và (2.2.4) hãy tìm $u \in W_0^1(0,1)$ sao cho

$$\alpha(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in W_0^1(0,1) \tag{2.2.5}$$

tức là (2.2.2) thỏa mãn.

Bài toán (2.2.5) gọi là *bài toán yếu* ứng bài toán (2.1.1)(2.1.2).

2.2.2. Nghiệm suy rộng và quan hệ với nghiệm cổ điển.

Nghiệm của bài toán yếu (2.2.5) gọi là *nghiệm suy rộng* của bài toán (2.1.1)(2.1.2).

Theo phân tích ở trên nếu u là nghiệm cổ điển của bài toán (2.1.1)(2.1.2) thì nó cũng là nghiệm suy rộng của nó.

Ngược lại giả sử $u \in W_0^1(0,1)$ là nghiệm suy rộng, tức là u thỏa mãn (2.2.5) đồng thời lại thuộc $W^2(0,1)$ nữa. Khi đó u thỏa mãn (2.2.2). Thực vậy,

Vì $D(0,1) \subset W_0^1(0,1)$ nên từ (2.2.2) ta có

$$\int_0^1 (pu'v' + quv)dx = \int_0^1 fvdx, \qquad \forall v \in D(0,1)$$

Lấy tích phân từng phần ta suy ra

$$\int_0^1 [-(pu')' + qu]vdx + pu'v|_0^1 = \int_0^1 fvdx, \qquad \forall v \in D(0,1)$$

Vì $v \in D(0,1)$ nên $v(0) = v(1) = 0$, do đó

$$\int_0^1 [-(pu')' + qu]vdx = \int_0^1 fvdx, \qquad \forall v \in D(0,1)$$

Vì $D(0,1)$ trù mật trong $L_2(0,1)$ nên

$$\int_0^1 [-(pu')' + qu - f]vdx = 0, \qquad \forall v \in L_2(0,1)$$

Vậy

$$-(pu')' + qu - f = 0 \Rightarrow -(pu')' + qu = f$$

Đó là (2.1.1). Còn điều kiện biên (2.1.2) thỏa mãn vì $u \in W_0^1(0,1)$. Vậy nghiệm suy rộng của bài toán (2.1.1)(2.1.2) mà $\in W^2(0,1)$ thì sẽ là nghiệm cổ điển của nó.

Vì tập hợp chứa nghiệm ở bài toán (2.2.5) là $W_0^1(0,1)$ rộng hơn tập hợp chứa nghiệm $W_0^1(0,1) \cup W^2(0,1)$ ở bài toán (2.1.1)(2.1.2), trong khi tập hợp hàm thử $W_0^1(0,1)$ ở bài toán (2.2.5) hẹp hơn tập hợp hàm thử $L_2(0,1)$ ở bài toán (2.1.1)(2.1.2) cho nên ta hi vọng việc tìm nghiệm của bài toán (2.2.5) sẽ dễ hơn.

2.2.3. Sự tồn tại nghiệm suy rộng

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm suy rộng ta sẽ áp dụng định lý 1.8.1 chương 1.

Xét bài toán (2.2.5).

Rõ ràng $\alpha(u,v)$ xác định bởi (2.2.3) là một dạng song tuyến đối xứng trên $W_0^1(0,1)$. Ta chứng minh tiếp rằng *nó liên tục trên $W_0^1(0,1)$ và $W_0^1(0,1)$-eliptic.*

(1). Từ (2.2.3) ta có

$$|\alpha(u,v)| \leq \int_0^1 (p|u'|.|v'| + q|u|.|v|)dx \leq C_1 \int_0^1 |u'|.|v'|dx + C_2 \int_0^1 |u|.|v|dx$$

$$= C_1(|u'|,|v'|)_{L_2(0,1)} + C_2(|u|,|v|)_{L_2(0,1)}$$

Áp dụng bất đẳng thức C-S-B ta suy ra

$$|\alpha(u,v)| \leq C_1\|u'\|_{L_2(0,1)}\|v'\|_{L_2(0,1)} + C_2\|u\|_{L_2(0,1)}\|v\|_{L_2(0,1)}$$

Ta có *nhận xét:*

$$\|u'\|_{L_2(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 |u'|^2 dx} \leq \sqrt{\int_0^1 [|u'|^2 + |u|^2]dx} \Rightarrow \|u'\|_{L_2(0,1)} \leq \|u\|_{W_0^1(0,1)} \qquad (2.2.6a)$$

$$\|u\|_{L_2(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 |u|^2 dx} \leq \sqrt{\int_0^1 [|u|^2 + |u'|^2]dx} \Rightarrow \|u\|_{L_2(0,1)} \leq \|u\|_{W_0^1(0,1)} \qquad (2.2.6b)$$

Do đó

$$|\alpha(u,v)| \leq C_3\|u\|_{W_0^1(0,1)}\|v\|_{W_0^1(0,1)}, \qquad u,v \in W_0^1(0,1), \qquad C_3 = C_1 + C_2$$

Vậy $\alpha(u,v)$ liên tục trên $W_0^1(0,1)$.

(2). Từ (2.2.3) ta lại có

$$\alpha(u,u) = \int_0^1 [p(u')^2 + qu^2]dx \geq C_0 \int_0^1 (u')^2 dx \Rightarrow \int_0^1 (u')^2 dx \leq \frac{1}{C_0}\alpha(u,u) \qquad (2.2.7)$$

Xét $u \in D(0,1)$. Khi đó $u(0) = 0$,

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)dt = \int_0^x u'(t)dt \Rightarrow |u(x)|^2 \le (\int_0^1 |u'(t)|dt)^2$$

Do đó , áp dụng bất đẳng thức C-S-B ta có

$$|u(x)|^2 \le (\int_0^1 |u'(t)|dt)^2 \le \int_0^1 (u'(t))^2 dt \int_0^1 (1)^2 dt = \int_0^1 (u'(t))^2 dt$$

Kết hợp với (2.2.7) ta có

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx \le \int_0^1 (\int_0^1 |u'(t)|^2 dt)dx = \int_0^1 |u'(t)|^2 dt \le \frac{1}{C_0}\int_0^1 p|u|^2 dt \le \frac{1}{C_0}\alpha(u,u) \tag{2.2.8}$$

Vậy (2.2.7) và (2.2.8) cho

$$\|u\|^2_{W_0^1(0,1)} = \int_0^1 [(u')^2 + u^2]dx \le \frac{1}{C_0}\alpha(u,u) + \frac{1}{C_0}\alpha(u,u) = \frac{2}{C_0}\alpha(u,u)$$

$$\Rightarrow \alpha(u,u) \ge C_4\|u\|^2_{W^1(0,1)}, \quad C_4 = \frac{C_0}{2}, \qquad \forall u \in D(0,1) \tag{2.2.9}$$

Vì $D(0,1)$ trù mật trong $W_0^1(0,1)$ nên từ (2.2.9) ta suy ra

$$\alpha(u,u) \ge C_4\|u\|^2_{W^1(0,1)}, \qquad \forall u \in W_0^1(0,1) \tag{2.2.10}$$

Vậy $\alpha(u,v)$ $W_0^1(0,1)$-eliptic.

Bây giờ ta chứng minh *tính liên tục của* $L(v)$ xác định bởi (2.2.4). Rõ ràng $L(v)$ là một phiếm hàm tuyến tính trên $W_0^1(0,1)$. Ta có

$$|L(v)| = |\int_0^1 fvdx| \le \sqrt{\int_0^1 f^2 dx}\sqrt{\int_0^1 v^2 dx} \le \|f\|_{L_2(0,1)}\sqrt{\int_0^1 [(v')^2 + v^2]dx}$$

$$\Rightarrow |L(v)| \le \|f\|_{L_2(0,1)}\|v\|_{W^1(0,1)}, \qquad \forall v \in W_0^1(0,1)$$

Do đó $L(v)$ liên tục trên $W_0^1(0,1)$.

Vậy theo định lý 1.8.1 chương 1 thì bài toán (2.2.5) có nghiệm duy nhất $u \in W_0^1(0,1)$

Sau đây ta tìm cách tính gần đúng nghiệm của bài toán (2.2.5) bằng *phương pháp phần tử hữu hạn.*

2.3. Phương pháp phần tử hữu hạn giải bài toán yếu (2.2.5)

2.3.1. Mở đầu. Để xây dựng nghiệm gần đúng của bài toán yếu (2.2.5) tức là (2.2.2), theo tinh thần của tiết 1.9 chương 1 ta thay không gian $W_0^1(0,1)$ bằng một không gian con hữu hạn chiều V_N mà ở đây ta gọi là H_N, của nó. Ta sẽ làm việc đó theo phương pháp phần tử hữu hạn.

Ý tưởng đầu tiên của phương pháp phần tử hữu hạn là do các nhà kỹ thuật nghĩ ra. Để tìm một đại lượng dưới dạng một hàm số trong một miền nào đó người ta chia nhỏ miền đó thành nhiều phần có hình thù đơn giản như những đoạn thẳng trong môi trường một chiều và những tam giác trong môi trường hai chiều. Mỗi phần nhỏ đó được gọi là một phần tử hữu hạn. Sau đó người ta xem ẩn hàm là những hàm tuyến tính trong mỗi phần nhỏ và được lắp ráp lại tại các biên giới của các phần nhỏ theo yêu cầu của bài toán phải giải quyết, chẳng hạn thành một hàm liên tục.

Chú ý rằng cách làm ở đây rất khác cách làm của phương pháp sai phân.

2.3.2. Xây dựng không gian $H_N \subset W_0^1(0,1)$

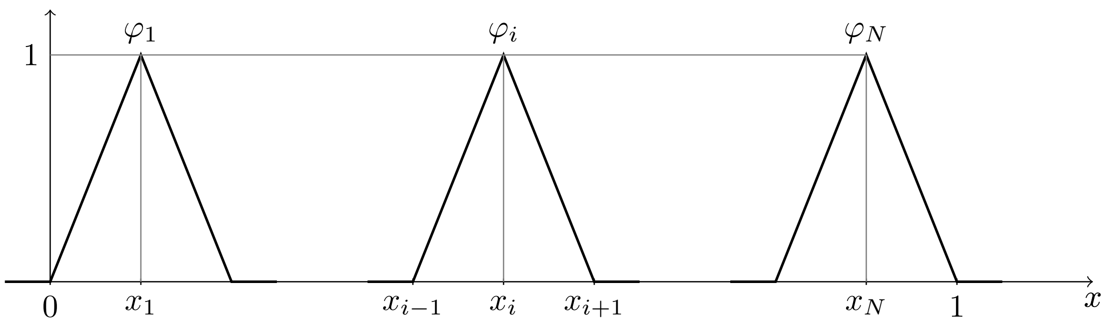
Ta chia miền xác định [0,1] của ẩn hàm $u(x)$ thành N+1 đoạn con bởi các điểm $x_i \in [0,1]$:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < ... < x_N < x_{N+1} = 1 \qquad (2.3.1)$$

$$x_i - x_{i-1} = h_i, \quad h := \max_i \{h_i\}$$

Mỗi đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ gọi là một *phần tử hữu hạn* (phần tử hữu hạn một chiều).

Tập các điểm x_i lập thành một *phân hoạch* của đoạn $[0,1]$.



H.2.3.1

Sau đó ta xây dựng N hàm $\varphi_i(x)$ bằng cách đặt

$$\varphi_i = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i \quad \text{nếu} \quad x_{i-1} < x \le x_i \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} \quad \text{nếu} \quad x_i \le x < x_{i+1} \\ 0 \quad \text{khi} \quad x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases} \qquad (2.3.2)$$

$$i = 1, 2, ..., N$$

Các hàm φ_i *chỉ khác* 0 *tại* $x \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. Nói cách khác φ_i là hàm số có giá đỡ nhỏ.

Đồ thị của các hàm φ_i có dạng mái nhà (H.2.3.1) nên người ta gọi chúng là hàm mái nhà. Hàm φ_i liên tục, có đạo hàm liên tục từng phần:

$$\varphi_i' = \begin{cases} 1/h_i \text{ nếu } x_{i-1} < x < x_i \\ -1/h_{i+1} \text{ nếu } x_i < x < x_{i+1} \\ 0 \text{ nếu } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \tag{2.3.3}$$

và thỏa mãn điều kiện biên (2.1.2) vì:

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(x_0) = 0, \quad \varphi_i(1) = \varphi_i(x_{N+1}) = 0.$$

Vậy $\varphi_i \in W_0^1(0,1)$.

Các hàm $\varphi_i,\ i = 1, ..., N$ độc lập tuyến tính vì nếu

$$\sum_1^N c_j \varphi_j(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

thì thay $x = x_j$ ta thu được $c_j = 0,\ j = 1, 2, ..., N$.

Vậy họ

$$S_N = \{\varphi_i,\ i = 1, 2, ..., N\}$$

sinh ra không gian con V_N của $W_0^1(0,1)$, không gian con này ở đây ta ký hiệu là H_N, nó có N chiều và nhận họ S_N là một cơ sở.

Sau đó ta xét bài toán (2.2.5) trên H_N.

2.3.3. Bài toán (2.2.5) trên H_N

Tìm $w_N \in H_N$ sao cho

$$\alpha(w_N, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_N \tag{2.3.4}$$

Hàm $w_N \in H_N$ có dạng

$$w_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(x) \in H_N \tag{2.3.5}$$

trong đó c_j cần được xác định sao cho (2.3.4) thỏa mãn với mọi $v \in H_N$. Vì họ S_N là một cơ sở của H_N nên chỉ cần (2.3.4) thỏa mãn với $v = \varphi_i,\ i = 1, 2, ..., N$ (xem nhận xét ở chương 1, mục 1.9.3), nghĩa là

$$\alpha(w_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, ..., N$$

Vậy các c_j ở (2.3.5) được xác định sao cho

$$\alpha(\sum_{j=1}^{N} c_j\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, ..., N$$

hay là

$$\sum_{j=1}^{N} c_j\alpha(\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, ..., N$$

Do đó c_j là nghiệm của hệ đại số tuyến tính có N phương trình đối với N ẩn :

$$Bc = F \tag{2.3.6}$$

trong đó theo (2.2.3) và (2.2.4) ma trận hệ số $B = (B_{ij})$ và vế phải F xác định bởi:

$$B_{ij} = \alpha(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^1 [p(x)\varphi_j'(x)\varphi_i'(x) + q(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)]dx = \alpha(\varphi_i, \varphi_j) \tag{2.3.7}$$

$$F_i = (f, \varphi_i) = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx \tag{2.3.8}$$

Ma trận B gọi là *ma trận cứng*. Các hàm φ_i, là cơ sở của không gian H_N, còn được gọi là các *hàm tọa độ*.

2.3.4. Tính trực tiếp các B_{ij} và F_i. Trước hết ta có một chú ý mở đầu.

Chú ý 2.3.1. Vì các hàm φ_i cho bởi (2.3.2), đạo hàm của chúng cho bởi (2.3.3) nên $\varphi_i = 0$ khi $x \notin (x_{i-1}, x_{i+1})$ và $\varphi_i' = 0$ khi $x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$, do đó $B_{ij} = 0$ khi $|i - j| \geq 2$. Vậy B là một *ma trận thưa.* Cụ thể như ta sẽ thấy ở dưới: B là một ma trận ba đường chéo và hệ (2.3.6) là một hệ ba đường chéo, giải bằng phương pháp truy đuổi rất ổn định.

Bây giờ theo (2.3.7) ta có

$$B_{ii} = \int_0^1 [p(\varphi_i')^2 + q\varphi_i^2]dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [p(\varphi_i')^2 + q\varphi_i^2]dx =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} [p(x)(\frac{1}{h_i})^2 + q(x)(\frac{x - x_{i-1}}{h_i})^2]dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [p(x)(\frac{1}{h_{i+1}})^2 + q(x)(\frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}})^2]dx \tag{2.3.9}$$

$$B_{ii+1} = B_{i+1i} = \int_0^1 [p\varphi_i'\varphi_{i+1}' + q\varphi_i\varphi_{i+1}]dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [p\varphi_i'\varphi_{i+1}' + q\varphi_i\varphi_{i+1}]dx =$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} [p(x)(-\frac{1}{h_{i+1}})(\frac{1}{h_{i+1}}) + q(x)(\frac{x_{i+1} - x)}{h_{i+1}}(\frac{x - x_i)}{h_{i+1}}]dx \tag{2.3.10}$$

Để tính các tích phân xác định (2.3.9)(2.3.10) ta có thể tính trực tiếp, cũng có thể áp dụng một công thức tích phân gần đúng nào đó , chẳng hạn như công thức hình chữ nhật:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x)g(x)dx \approx p(\frac{x_{k-1}+x_k}{2})\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx \tag{2.3.11}$$

trong đó tích phân $\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx$ đến lượt nó lại có thể tính trực tiếp, cũng có thể áp dụng một công thức tích phân gần đúng.

Chú ý. *Tuy công thức là " $\approx$ " (gần bằng), nhưng trong thực tế ta sẽ viết là " $=$ " (bằng)* cho tiện. Khi đó

$$B_{ii} = \frac{p_{i-1/2}}{h_i} + \frac{p_{i+1/2}}{h_{i+1}} + \frac{q_{i-1/2}h_i}{3} + \frac{q_{i+1/2}h_{i+1}}{3} \tag{2.3.12}$$

$$B_{ii+1} = B_{i+1i} = -p_{i+1/2}\frac{1}{h_{i+1}} + (q_{i+1/2})\frac{h_{i+1}}{6} \tag{2.3.13}$$

trong đó

$$p_{i-1/2} = p(x_i - \frac{h_i}{2}), \quad p_{i+1/2} = p(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}), \quad q_{i-1/2} = q(x_i - \frac{h_i}{2}), \quad q_{i+1/2} = q(x_i + \frac{h_{i+1}}{2})$$

Vậy

$$B = \begin{pmatrix} (p_{1/2}/h_1 + p_{3/2}/h_2) & -p_{3/2}/h_2 & & \\ -p_{3/2}/h_2 & (p_{3/2}/h_2 + p_{5/2}/h_3) & -p_{5/2}/h_3 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ \dots & -p_{N-1/2}/h_N & (p_{N-1/2}/h_N + p_{N+1/2}/h_{N+1}) & \end{pmatrix} +$$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2q_{1/2}h_1 + 2q_{3/2}h_2 & q_{3/2}h_2 & & \\ q_{3/2}h_2 & 2q_{3/2}h_2 + 2q_{5/2}h_3) & q_{5/2}h_3 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \dots & q_{N-1/2}h_N & 2q_{N-1/2}h_N + 2q_{N+1/2}h_{N+1}) \end{pmatrix} \tag{2.3.14}$$

Bây giờ ta tính vế phải F_i:

$$F_i = \int_0^1 f\varphi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\varphi_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\varphi_i dx =$$

$$= \frac{1}{2}[f_{i-1/2}h_i + f_{i+1/2}h_{i+1}], \quad i = 1, 2, ..., N \tag{2.3.15}$$

Vậy

$$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_{1/2}h_1 + f_{3/2}h_2 \\ f_{3/2}h_2 + f_{5/2}h_3 \\ \vdots \\ f_{N-1/2}h_N + f_{N+1/2}h_{N+1} \end{pmatrix} \tag{2.3.16}$$

2.3.5. Công thức tích lũy

Từ phân hoạch (2.3.1) ta suy ra

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{N+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [p(x)\varphi_j'(x)\varphi_i'(x) + q(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)]dx \tag{2.3.17}$$

$$F_i = \sum_{k=1}^{N+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\varphi_i(x)dx \tag{2.3.18}$$

Vậy nếu đặt

$$B_{ij}^k := \int_{x_{k-1}}^{x_k} [p(x)\varphi_j'(x)\varphi_i'(x) + q(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)]dx, \quad F_i^k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\varphi_i(x)dx \tag{2.3.19}$$

thì có công thức *tích lũy*:

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{N+1} B_{ij}^k, \quad F_i = \sum_{k=1}^{N+1} F_i^k \tag{2.3.20}$$

Ta có thể xem B_{ij}^k là đóng góp của phần tử hữu hạn thứ k, $[x_{k-1}, x_k]$ vào B_{ij} và F_i^k là đóng góp của phần tử hữu hạn $[x_{k-1}, x_k]$ vào F_i.

Vì có (2.3.2) và (2.3.3) nên (2.3.20) cho:

$$B_{ij} = 0,\ |i-j| \geq 2; \quad B_{ii} = B_{ii}^i + B_{ii}^{i+1}, \quad B_{ii+1} = B_{i+1i} = B_{ii+1}^{i+1}, \qquad F_i = F_i^i + F_i^{i+1} \tag{2.3.21}$$

Tính xong B_{ij}^k, F_i^k ở (2.3.19) rồi, các công thức (2.3.20) hay (2.3.21) sẽ cho B_{ij} và F_i.

2.3.6. Tính B_{ij}^k và F_i^k bằng phép đổi biến

Các tích phân xác định (2.3.19) chỉ thực hiện trên một phần tử hữu hạn $[x_{k-1}, x_k]$. Muốn tính chúng ta có thể dùng *phép đổi biến* $x = x(\xi)$ xác định bởi

$$x = (x_k - x_{k-1})\xi + x_{k-1} \tag{2.3.22}$$

để đưa đoạn $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ về đoạn $0 \leq \xi \leq 1$

Qua phép đổi biến (2.3.22) ta có :

$$\frac{dx}{d\xi} = x_k - x_{k-1} = h_k, \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{h_k}$$

$$\varphi_k(x)|_{x=x(\xi)} = \xi, \quad \varphi_{k-1}(x)|_{x=x(\xi)} = 1 - \xi$$

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = \frac{1}{h_k}, \quad \frac{d\varphi_{k-1}}{dx} = -\frac{1}{h_k}$$

Đặt thêm

$$\overline{p}(\xi) := p(x)|_{x=x(\xi)}, \quad \overline{q}(\xi) := q(x)|_{x=x(\xi)} \tag{2.3.23}$$

Khi đó

$$B^k_{kk} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{p(x)(\frac{d\varphi_k}{dx})^2 + q(x)\varphi_k^2\}dx = \int_0^1 \{\overline{p}(\xi)(\frac{1}{h_k})^2 + \overline{q}(\xi)\xi^2\}h_k d\xi \tag{2.3.24}$$

$$B^k_{k-1k-1} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{p(x)(\frac{d\varphi_{k-1}}{dx})^2 + q(x)\varphi_{k-1}^2\}dx = \int_0^1 \{\overline{p}(\xi)(-\frac{1}{h_k})^2 + \overline{q}(\xi)(1-\xi)^2\}h_k d\xi \tag{2.3.25}$$

$$B^k_{k-1k} = B^k_{kk-1} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{p(x)\frac{d\varphi_{k-1}}{dx}\frac{d\varphi_k}{dx} + q(x)\varphi_{k-1}\varphi_k\}dx =$$

$$= \int_0^1 \{\overline{p}(\xi)(-\frac{1}{h_k})(\frac{1}{h_k}) + \overline{q}(\xi)(1-\xi)\xi\}h_k d\xi \tag{2.3.26}$$

$$F^k_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\varphi_k(x)dx = \int_0^1 \overline{f}(\xi)\xi h_k d\xi \tag{2.3.27}$$

$$F^k_{k-1} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\varphi_{k-1}(x)dx = \int_0^1 \overline{f}(\xi)(1-\xi)h_k d\xi \tag{2.3.28}$$

Để tính các tích phân xác định (2.3.24)-(2.3.28) ta có thể tính trực tiếp một cách chính xác nếu có thể làm được, cũng có thể áp dụng một công thức tích phân gần đúng nào đó, chẳng hạn như công thức (2.3.11).

2.3.7. Đánh giá sai số.

Giả sử $u \in W_0^1(0,1)$ là nghiệm của bài toán (2.2.5) (trên $W_0^1(0,1)$), và $w_N \in H_N$ là nghiệm gần đúng bằng phương pháp phần tử hữu hạn, tức là nghiệm cũng của bài toán (2.2.5) nhưng trên không gian con của $W_0^1(0,1)$ là $H_N := \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_N\}$, trong đó φ_i là hàm mái nhà (2.3.2).

Ta có

Định lý 2.3.1. Giả sử $u \in W^2(0,1) \cap W_0^1(0,1)$. Khi đó

$$\|u' - w'_N\|_{L_2(0,1)} \le C_5 h \|f\|_{L_2(0,1)} \tag{2.3.29}$$

$$\|u - w_N\|_{L_2(0,1)} \leq C_6 h^2 \|f\|_{L_2(0,1)} \tag{2.3.30}$$

trong đó C_5 và C_6 là các hằng số.

Đó là sự hội tụ và đánh giá sai số.

Chứng minh.: Xem phần phụ lục ở mục 2.3.9.

2.3.8. Thí dụ.

Chú ý mở đầu. Thường ta gặp bài toán trên đoạn $[a, b]$:

$$-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + q(x)u = f(x), \qquad a < x < b. \quad u(a) = 0, \quad u(b) = 0 \tag{2.3.31a}$$

chứ không phải trên đoạn $[0, 1]$ như ta đã làm. Trong trường hợp đó, lẽ ra trước khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn ta phải đổi biến để đưa bài toán đã cho về bài toán trên đoạn $[0, 1]$. Nhưng như sẽ thấy ở dưới, việc đổi biến hay không đổi biến không ảnh hưởng đến kết quả.

Nếu không đổi biến thì ta giải bài toán (2.3.31a). Bài toán yếu tương ứng là

$$\alpha(u, v) = L(v), \ \forall v \in V$$

với

$$V = W_0^1(a, b), \qquad \alpha(u, v) = \int_a^b \{p(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + q(x)uv\}dx \qquad \text{Ł}(v) = \int_a^b f(x)vdx$$

Ta tạo ra cho $[a, b]$ một phân hoạch $P: \ x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < x_{N+1} = b$. Bước đi thứ k là $h_k = x_k - x_{k-1}$. Hàm cơ sở tương ứng là φ_i cho bởi (2.3.2). Hệ đại số cần giải là $Bc = F$ với

$$B_{ij} = \alpha(\varphi_i, \varphi_j), \quad F_i = L(\varphi_i)$$

Nếu đổi biến thì ta đưa đoạn $[a, b]$ về đoạn $[0, 1]$ bằng công thức $x = (b - a)t + a$. Khi đó nếu cho $g(x)$ thì $\bar{g}(t) := g(x)|_{x=(b-a)t+a}$.

Bài toán sau đổi biến là

$$-\frac{1}{(b-a)^2}(\bar{p}(t)\frac{d}{dt}(\frac{d\bar{u}}{dt}) + \bar{q}(t)\bar{u} = \bar{f}(t), \qquad \bar{u}(0) = 0, \ \bar{u}(1) = 0 \tag{2.3.31b}$$

Bài toán yếu tương ứng là

$$\bar{\alpha}(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{L}(\bar{v}), \qquad \forall \bar{v} \in \bar{V}$$

trong đó

$$\bar{V} = W_0^1(0, 1), \quad \bar{\alpha}(\bar{u}.\bar{v}) = \int_0^1 [\frac{1}{(b-a)^2}\bar{p}(t)\frac{d\bar{u}}{dt}\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{q}(t)\bar{u}\bar{v}]dt, \quad \bar{L}(\bar{v}) = \int_0^1 \bar{f}(t)\bar{v}dt$$

Ta tao ra trên $[0,1]$ phân hoạch $\bar{P}: \ t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < t_{N+1} = 1$. Bước đi thứ k là $\tau_k = t_k - t_{k-1}$. Hệ đại số cần giải là

$$\bar{B}\bar{c} = \bar{F} \quad \text{với} \quad \bar{B}_{ij} = \bar{\alpha}(\bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_j), \quad \bar{F}_i = \bar{L}(\bar{\varphi}_i)$$

Ta nhận thấy với phép đổi biến $x = (b-a)t + a$ đã chọn thì

$$\varphi_i(x)|_{x=(b-a)t+a} = \bar{\varphi}_i(t)$$

Bây giờ từ các công thức khi không đổi biến

$$B_{ij} = \alpha(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \{p(x)\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} + q(x)uv\}dx, \qquad F_i = L(\varphi_i) = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx$$

ta áp dụng công thức tính tích phân bằng phép đổi biến $x = (b-a)t + a$ ta có

$$B_{ij} = \int_0^1 \{\frac{1}{(b-a)^2}\bar{p}(t)\frac{d\bar{\varphi}_i}{dt}\frac{d\bar{\varphi}_j}{dt} + \bar{q}(t)\bar{\varphi}_i\bar{\varphi}_j\}(b-a)dt = \bar{B}_{ij}(b-a)$$

$$F_i = \int_0^1 \bar{f}(t)\bar{\varphi}_i)b-a)dt = \bar{F}_i(b-a)$$

Vậy hệ đại số khi có đổi biến viết $\bar{B}\bar{c} = \bar{F}_i$ còn hệ đại số khi không đổi biến viết $Bc = F$ viết $(b-a)\bar{B}c = (b-a)\bar{F}$. Do đó $\bar{c} = c$. Ta chú ý rằng nghiệm của bài toán khi không đổi biến là $w_N = \sum_{i=1}^N c_i\varphi_i(x)$ còn nghiệm của bài toán sau đổi biến là $\bar{w}_N = \sum_{i=1}^N \bar{c}_i\bar{\varphi}_i(t)$. Cho nên có $w_N(x)|_{x=(b-a)t+a} = \bar{w}_N(t)$.

Vậy việc đổi biến hay không đổi biến không ảnh hưởng đến kết quả.

Thí dụ 1. Xét bài toán truyền nhiệt dừng:

$$-u'' = f(x), 0 < x < L, \qquad u(0) = 0, u(L) = 0 \tag{2.3.32}$$

trong đó

$$L = 10cm, \quad f(x) = 10$$

Giải. Bài toán này có dạng (2.1.1)(2.1.2) với $p = 1, \ q = 0, \ f = 10$. Bài toán yếu (2.2.2) tương ứng là

$$\int_0^L u'v'dx = \int_0^L fvdx, \qquad \forall v \in W_0^1(0, L)$$

Ta chia đoạn $[0, L]$ thành $N + 1 = 4$ phần bằng nhau. Khi đó

$$h = \frac{L}{N+1} = \frac{10}{4} = 2,5, \ x_0 = 0, \ x_1 = 2,5, \ x_2 = 5, \ x_3 = 7,5, \ x_4 = 10$$

Ta nhận thấy ở đây bước đi $h = 2,5 > 1$

Theo (2.3.24)-(2.3.28) ta có

$$B_{kk}^k = h\int_0^1 (\frac{1}{h})^2 dx = \frac{1}{h} = 0,4,$$

$$B_{k-1k-1}^k = h\int_0^1 (\frac{1}{h})^2 dx = \frac{1}{h} = 0,4,$$

$$B_{k-1k}^k = B_{kk-1}^k = h\int_0^1 -\frac{1}{h}\frac{1}{h} d\xi = -\frac{1}{h} = -0,4$$

$$F_k^k = h\int_0^1 10\xi d\xi = 10\frac{h}{2} = 12,5$$

$$F_{k-1}^k = h\int_0^1 10(1-\xi) d\xi = 10\frac{h}{2} = 12,5$$

Vậy tích lũy lại theo công thức (2.3.21) ta được

$$B = \begin{pmatrix} 0,4+0,4 & -0,4 & 0 \\ -0,4 & 0,4+0,4 & -0,4 \\ 0 & -0,4 & 0,4+0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 & 0 \\ -0,4 & 0,8 & -0,4 \\ 0 & -0,4 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 12,5+12,5 \\ 12,5+12,5 \\ 12,5+12,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Do đó hệ cứng (2.3.6) viết

$$\begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 & 0 \\ -0,4 & 0,8 & -0,4 \\ 0 & -0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix}$$

hay

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62,5 \\ 62,5 \\ 62,5 \end{pmatrix}$$

Giải hệ này ta được $c_1,\ c_2,\ c_3$.

Thí dụ 2. Xét bài toán truyền nhiệt dừng

$$-u'' + u = f(x), 0 < x < 1, \qquad u(0) = 0, u(1) = 0 \tag{2.3.33}$$

trong đó $f(x) = x + 2$.

Giải. Bài toán này có dạng (2.1.1)(2.1.2) với $p = 1,\ q = 1,\ f = x + 2$. Bài toán yếu (2.2.2) tương ứng là

$$\int_0^1 [u'v' + uv]dx = \int_0^1 fvdx, \qquad \forall v \in W_0^1(0,1)$$

Ta chia đoạn $[0, 1]$ thành N+1=4 phần bằng nhau. Khi đó

$$h = \frac{1}{N+1} = \frac{1}{4} = 0,25,\ x_0 = 0,\ x_1 = 0,25,\ x_2 = 0,5,\ x_3 = 0,75,\ x_4 = 1$$

Ta có

$$B_{kk}^k = h\int_0^1 [(\frac{1}{h})^2 + \xi^2]d\xi = \frac{1}{h} + \frac{h}{3} = 4 + \frac{0,25}{3} = \frac{12,25}{3}$$

$$B_{k-1k}^k = h\int_0^1 [-(\frac{1}{h})^2 + (1-\xi)\xi]d\xi = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} = -4 + \frac{0,25}{6} = -\frac{23,75}{6}$$

$$B_{k-1k-1}^k = h\int_0^1 [(-\frac{1}{h})^2 + (1-\xi)^2]d\xi = \frac{1}{h} + \frac{h}{3} = 4 + \frac{0,25}{3} = \frac{12,25}{3}$$

$$F_k^k = h\int_0^1 (h\xi + x_{k-1} + 2)\xi d\xi = h[\frac{h}{3} + \frac{x_{k-1}}{2} + 1]$$

$$F_{k-1}^k = h\int_0^1 (h\xi + x_{k-1} + 2)(1-\xi) d\xi = h[\frac{h}{6} + \frac{x_{k-1}}{2} + 1]$$

Do đó

$$F_1 = F_1^1 + F_1^2 = h[\frac{h}{3} + \frac{x_0}{2} + 1 + \frac{h}{6} + \frac{x_1}{2} + 1] = 0,25[\frac{0,25}{3} + \frac{0,25}{6} + \frac{0,25}{2} + 2] = 0,5625$$

$$F_2 = F_2^2 + F_2^3 = h[\frac{h}{3} + \frac{x_1}{2} + 1 + \frac{h}{6} + \frac{x_2}{2} + 1] = 0,25[\frac{0,25}{3} + \frac{0,75}{2} + \frac{0,25}{6} + 2] = 0,6250$$

$$F_3 = F_3^3 + F_3^4 = h[\frac{h}{3} + \frac{x_2}{2} + 1 + \frac{h}{6} + \frac{x_3}{2} + 1] = 0,25[\frac{0,25}{3} + \frac{1,25}{2} + 2] = 0,6875$$

Vậy hệ cứng (2.3.5) viết:

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2(12,25+12,25) & -23,75 & 0 \\ -23,75 & 2(12,25+12,25) & -23,75 \\ 0 & -23,75 & 2(12,25+12,25) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5625 \\ 0,6250 \\ 0,6875 \end{pmatrix}$$

tức là

$$\begin{pmatrix} 50 & -23,75 & 0 \\ -23,75 & 50 & -23,75 \\ 0 & -23,75 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,375 \\ 3,750 \\ 4,125 \end{pmatrix}$$

Giải hệ này ta được $c_1,\ c_2,\ c_3$.

Chú ý. Cách tính tích phân bằng đổi biến trong trường hợp một chiều không hấp dẫn vì nó cũng dài; nhưng nó giúp ta dễ hiểu cách làm trong trường hợp nhiều chiều sau này, và trong trường hợp nhiều chiều thì phương pháp đổi biến tỏ ra hiệu quả hơn nhiều so với phương pháp tính tích phân một cách trực tiếp.

2.3.9. Phụ lục 1. Chứng minh định lý 2.3.1.

Giả sử bài toán (2.2.5) có nghiệm $u \in W_0^1(0,1)$.
Đặt

$$u_I(x) := \sum_{i=1}^{N} u(x_i)\varphi_i(x) \tag{2.3.34}$$

Vì $u_I \in H_N$ nên áp dụng định lý 1.10.2 chương 1, công thức (1.10.6) ta có

Bổ đề 2.3.1.

$$\|u - w_N\|_{W^1(0,1)} \le \sqrt{\frac{C_3}{C_4}}\|u - u_I\|_{W^1(0,1)} \tag{2.3.35}$$

trong đó C_3 và C_4 xác định ở (2.2.6) và (2.2.10).

Bây giờ xét vế phải của (2.3.35).

Bổ đề 2.3.2. Giả sử $u \in W^2(0,1)$. Khi đó

$$\|u - u_I\|_{L_2(0,1)} \le h^2\|u''\|_{L_2(0,1)} \tag{2.3.36}$$

$$\|u' - u_I'\|_{L_2(0,1)} \le h\|u''\|_{L_2(0,1)} \tag{2.3.37}$$

trong đó

$$h := \max_i\{h_i\}$$

Chứng minh. Vì $C^2[0,1]$ trù mật trong $W^2(0,1)$ và $u \in W^2(0,1)$ nên tồn tại dẫy $\{u_n \in C^2[0,1]\}$ hội tụ về u trong $W^2(0,1)$. Theo cách đặt (2.3.34) ta có

$$u_{n,I}(x) = \sum_{i=1}^{N} u_n(x_i)\varphi_i(x)$$

Xét $x \in (x_{i-1}, x_i)$ ta có

$$u_n(x) - u_{n,I}(x) = \int_{t=x_{i-1}}^{t=x} [u_n'(t) - u_{n,I}'(t)]dt =$$

$$= \int_{t=x_{i-1}}^{t=x} [u_n'(t) - \frac{u_n(x_i) - u_n(x_{i-1})}{h_i}]dt = \int_{t=x_{i-1}}^{t=x} [u_n'(t) - \frac{1}{h_i}\int_{s=x_{i-1}}^{s=x_i} u_n'(s)ds]dt =$$

$$\frac{1}{h_i}\int_{t=x_{i-1}}^{t=x} dt \int_{s=x_{i-1}}^{s=x_i} [u_n'(t)-u_n'(s)]ds = \frac{1}{h_i}\int_{t=x_{i-1}}^{t=x} dt \int_{s=x_{i-1}}^{s=x_i} ds \int_{\xi=s}^{\xi=t} u_n''(\xi)d\xi$$

Vậy có

$$u_n(x)-u_{n,I}(x) = \frac{1}{h_i}\int_{t=x_{i-1}}^{t=x} dt \int_{s=x_{i-1}}^{s=x_i} ds \int_{\xi=s}^{\xi=t} u_n''(\xi)d\xi \tag{2.3.38}$$

Từ (2.3.38) ta suy ra

$$|u_n(x)-u_{n,I}(x)| \le \frac{1}{h_i}\int_{t=x_{i-1}}^{t=x} dt \int_{s=x_{i-1}}^{s=x_i} ds \int_{\xi=x_{i-1}}^{\xi=x_i} |u_n''(\xi)|d\xi \le$$

$$\le h^{3/2}\sqrt{\int_{\xi=x_{i-1}}^{\xi=x_i} |u_n''(\xi)|^2 d\xi}, \quad x\in(x_{i-1},x_i)$$

Do đó

$$\int_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} [u_n(x)-u_{n,I}(x)]^2 dx \le h^3 \int_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} dx \int_{\xi=x_{i-1}}^{\xi=x_i} [u_n''(\xi)]^2 d\xi \le h^4 \int_{\xi=x_{i-1}}^{\xi=x_i} [u_n''(\xi)]^2 d\xi$$

Vậy

$$\sum_{i=1}^{N+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} [u_n(x)-u_{n,I}(x)]^2 dx \le h^4 \sum_{i=1}^{N+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} [u_n''(\xi)]^2 d\xi$$

hay

$$\|u_n-u_{n,I}\|^2_{L_2(a,b)} \le h^4 \|u_n''\|^2_{L_2(a,b)}$$

Cho $n\to\infty$ ta được (2.3.36).

Bây giờ lấy đạo hàm (2.3.38) đối với x:

$$u_n'(x)-u_{n,I}'(x) = \frac{1}{h_i}\int_{s=x_{i-1}}^{s=x_i} ds \int_{\xi=s}^{\xi=x} u''(\xi)d\xi \tag{2.3.39}$$

Do đó

$$|u_n'(x)-u_{n,I}'(x)| \le \frac{1}{h_i}\int_{s=x_{i-1}}^{s=x_i} ds \int_{\xi=x_{i-1}}^{\xi=x_i} |u''(\xi)|d\xi$$

$$|u_n'(x)-u_{n,I}'(x)| \le \int_{\xi=x_{i-1}}^{\xi=x_i} |u''(\xi)|d\xi \le \sqrt{h}\sqrt{\int_{\xi=x_{i-1}}^{\xi=x_i} |u''(\xi)|^2 d\xi}$$

$$\int_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} |u_n'(x)-u_{n,I}'(x)|^2 dx \le h\int_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} dx \int_{\xi=x_{i-1}}^{\xi=x_i} |u''(\xi)|^2 d\xi \le h^2 \int_{\xi=x_{i-1}}^{\xi=x_i} |u''(\xi)|^2 d\xi =$$

Vậy

$$\sum_{i=1}^{N+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} [u_n'(x)-u_{n,I}'(x)]^2 dx \le h^2 \sum_{i=1}^{N+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} [u_n''(\xi)]^2 d\xi$$

hay

$$\|u_n' - u_{n,I}'\|^2_{L_2(a,b)} \leq h^2 \|u_n''\|^2_{L_2(a,b)}$$

Cho $n \to \infty$ ta được (2.3.37).

Bổ đề 2.3.3. Giả sử $u \in W^2(0,1)$. Khi đó tồn tại hằng số dương C_7 để

$$\|u''\|_{L_2(0,1)} \leq C_7 \|f\|_{L_2(0,1)} \tag{2.3.40}$$

Chứng minh. Từ tính $W_0^1(0,1)-$elliptic của $\alpha(u,v)$ (xem (2.2.10)) ta suy ra

$$\|u\|^2_{W^1(0,1)} \leq \frac{1}{C_4}\alpha(u,u) = \frac{1}{C_4}(f,u)_{L_2(0,1)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{C_4}\|f\|_{L_2(0,1)}\|u\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{C_4}\|f\|_{L_2(0,1)}\|u\|_{W^1(0,1)}$$

Vậy có

$$\|u\|_{W^1(0,1)} \leq \frac{1}{C_4}\|f\|_{L_2(0,1)} \tag{2.3.41}$$

Bây giờ lấy đạo hàm (2.1.1) ta thu được

$$pu'' = -p'u' + qu - f \tag{2.3.42}$$

$$\Rightarrow |p|.|u''| \leq |p'|.|u'| + |q|.|u| + |f|$$

Từ đó và điều kiện (2.1.4) ta suy ra

$$|u''| \leq \frac{1}{C_0}\{C_1|u'| + C_2|u| + |f|\}$$

$$\Rightarrow \|u''\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{C_0}\{C_1\|u'\|_{L_2(0,1)} + C_2\|u\|_{L_2(0,1)} + \|f\|_{L_2(0,1)}\}$$

$$\leq \frac{1}{C_0}\{C_1\|u\|_{W^1(0,1)} + C_2\|u\|_{W^1(0,1)} + \|f\|_{L_2(0,1)}\}$$

Áp dụng (2.3.41)

$$\|u''\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{C_0}\{(C_1 + C_2)\frac{1}{C_4}\|f\|_{L_2(0,1)} + \|f\|_{L_2(0,1)}\}$$

$\Rightarrow$ (2.3.40) với

$$C_7 = \frac{1}{C_0}\{(C_1 + C_2)\frac{1}{C_4} + 1\} = \frac{1}{C_0}\{(C_1 + C_2)\frac{2}{C_0} + 1\} = (C_1 + C_2)\frac{2 + C_0}{C_0^2}$$

Bổ đề 2.3.4. Giả sử bài toán (2.1.1)-(2.1.2) có nghiệm $u \in W^2(0,1)$. Khi đó tồn tại hằng số dương C_8 để

$$\|u' - w_N'\|_{L_2(0,1)} \leq C_8 h \|f\|_{L_2(0,1)} \tag{2.3.43}$$

$$\|u - w_N\|_{L_2(0,1)} \leq C_8 h \|f\|_{L_2(0,1)} \tag{2.3.44}$$

Chứng minh. Từ các bổ đề 2.3.1,2,3 ta suy ra

$$\|u - w_N\|_{W^1(0,1)} \leq \sqrt{\frac{C_3}{C_4}} \|u - u_I\|_{W^1(0,1)} \leq (h+1)\sqrt{\frac{C_3}{C_4}} C_7 h \|f\|_{L_2(0,1)}$$

Đó là (2.3.43),(2.3.44) với $C_8 = 2\sqrt{\frac{C_3}{C_4}} C_7$.

Bổ đề 2.3.5. Giả sử bài toán (2.1.1)-(2.1.2) có nghiệm $u \in W^2(0,1) \cap W_0^1(0,1)$. Khi đó tồn tại hằng số dương C_9 để

$$\|u - w_N\|_{L_2(0,1)} \leq C_9 h^2 \|f\|_{L_2(0,1)} \tag{2.3.45}$$

Chứng minh. Trước hết ta chú ý rằng

$$\alpha(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in W_0^1(0,1)$$

$$\alpha(w_N, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_N \subset W_0^1(0,1)$$

Bằng phép trừ ta suy ra

$$\alpha(u, v) - \alpha(w_N, v) = 0, \quad \forall v \in H_N$$

tức là

$$\alpha(u - w_N, v) = 0, \quad \forall v \in H_N \tag{2.3.46}$$

Bây giờ xét bài toán

$$-(p\Phi')' + q\Phi = F, \quad F = u - w_N \tag{2.3.47}$$

$$\Phi(0) = \Phi(1) = 0 \tag{2.3.48}$$

Ta được bài toán (2.1.1)-(2.1.4) với vế phải là $F = u - w_N \in L_2(0,1)$. Do đó hàm Φ thỏa mãn

$$\alpha(\Phi, v) = (F, v), \quad \forall v \in W_0^1(0,1)$$

Thay $v = u - w_N \in W_0^1(0,1)$ ta có

$$\alpha(\Phi, u - w_N) = (F, u - w_N) = (u - w_N, u - w_N)$$

tức là

$$(u - w_N, u - w_N) = \alpha(\Phi, u - w_N) \tag{2.3.49}$$

Với

$$\Phi_I := \sum_{i=1}^{N} \Phi(x_i)\varphi_i(x)$$

thì $\Phi_I \in H_N$ nên theo (2.3.46) ta có

$$\alpha(u - w_N, \Phi_I) = 0$$

Từ đó (2.3.49) viết

$$(u - w_N, u - w_N) = \alpha(\Phi, u - w_N) - \alpha(u - w_N, \Phi_I) = \alpha(\Phi - \Phi_I, u - w_N)$$

$$\Rightarrow \|u - w_N\|^2_{L_2(0,1)} \le C_3 \|\Phi - \Phi_I\|_{W^1(0,1)} \|u - w_N\|_{W^1(0,1)}$$

Theo bổ đề 2.3.4

$$\|u - w_N\|_{W^1(0,1)} \le C_8 h \|f\|_{L_2(0,1)} \tag{2.3.50}$$

Theo bổ đề 2.3.2 và 2.3.3

$$\|\Phi - \Phi_I\|_{W^1(0,1)} \le h\|\Phi''\|_{L_2(0,1)} \le hC_7 \|F\|_{L_2(0,1)} = C_7 h \|u - w_N\|_{L_2(0,1)}$$

$$\Rightarrow \|u - w_N\|^2_{L_2(0,1)} \le C_3 C_7 h \|u - w_N\|_{L_2(0,1)} C_8 h \|f\|_{L_2(0,1)}$$

$$\Rightarrow \|u - w_N\|_{L_2(0,1)} \le C_3 C_7 C_8 h^2 \|f\|_{L_2(0,1)}$$

Đó là (2.3.45) với $C_9 = C_3 C_7 C_8$.

Từ bổ đề 2.3.4 và bổ đề 2.3.5 ta suy ra định lý 2.3.1.

2.4. Bài toán biên loại ba

2.4.1. Phát biểu bài toán.

Cho khoảng số thực $[0,1]$. Xét phương trình vi phân cấp hai

$$Lu := -(pu')' + qu = f(x) \quad 0 < x < 1 \tag{2.4.1}$$

với điều kiện biên loại ba

$$-p(0)u'(0) + \sigma_a u(0) = g_a, \quad p(1)u'(1) + \sigma_b u(1) = g_b \tag{2.4.2}$$

trong đó p, q, f là các hàm số cho trước, $\sigma_a,\ \sigma_b,\ g_a,\ g_b$ là những số thực cho trước thỏa mãn

$$p,\ p',\ q,\ f \in L_2(0,1) \tag{2.4.3}$$

$$0 < C_0 \le p(x) \le C_1, \quad 0 \le q(x) \le C_2, \quad C_0, C_1, C_2 = const \tag{2.4.4}$$

$$\sigma_a \ge 0,\ \sigma_b \ge 0, \quad \sigma_a + \sigma_b > 0 \tag{2.4.5}$$

Bài toán vi phân (2.4.1)(2.4.2) gọi là bài toán biên loại ba đối với phương trình (2.4.1). Nó phát biểu:

Tìm hàm số $u \in W^2(0,1)$ thỏa mãn phương trình vi phân (2.4.1) cùng với các điều kiện biên (2.4.2).

Nghiệm của bài toán vi phân định nghĩa như vậy gọi là *nghiệm cổ điển* của nó.

Bài toán (2.4.1)(2.4.2) là mô hình toán học của bài toán truyền nhiệt dừng trong một thanh vật chất mà quan hệ giữa luồng nhiệt với nhiệt độ tại hai đầu mút của thanh đã được ấn định trước (bởi (2.4.2)).

2.4.2. Bài toán yếu

Giả sử bài toán (2.4.1)(2.4.2) có nghiệm cổ điển $u \in W^2(0,1)$. Khi đó Lu và $f \in L_2(0,1)$. Trong $L_2(0,1)$ nhân vô hướng hai vế của (2.4.1) với $v \in D([0,1])$, gọi là hàm thử, ta được

$$\int_0^1 [-(pu')' + qu]vdx = \int_0^1 fvdx, \qquad \forall v \in D([0,1]) \tag{2.4.6}$$

Khi đó ta có thể lấy tích phân từng phần vế trái của (2.4.6) ta thu được

$$\int_0^1 [-(pu')' + qu]vdx = -pu'v|_0^1 + \int_0^1 [pu'v' + quv]dx$$

$$= \int_0^1 [pu'v' + quv]dx - p(1)u'(1)v(1) + p(0)u'(0)v(0)$$

Chú ý đến điều kiện biên (2.4.2) thì có

$$\int_0^1 [-(pu')' + qu]vdx = \int_0^1 [pu'v' + quv]dx + [\sigma_b u(1) - g_b]v(1) + [\sigma_a u(0) - g_a]v(0)$$

Do đó (2.4.6) trở thành

$$\int_0^1 [pu'v' + quv]dx + \sigma_a u(0)v(0) + \sigma_b u(1)v(1) = \int_0^1 fvdx + g_a v(0) + g_b v(1), \qquad \forall v \in D([0,1])$$

Vì $D([0,1])$ trù mật trong $W^1(0,1)$ nên

$$\int_0^1 [pu'v' + quv]dx + \sigma_a u(0)v(0) + \sigma_b u(1)v(1) = \int_0^1 fvdx + g_a v(0) + g_b v(1), \qquad \forall v \in W^1(0,1) \tag{2.4.7}$$

Trong (2.4.7) không có đạo hàm cấp hai nữa.

Đặt

$$\alpha(u,v) = \int_0^1 [pu'v' + quv]dx + \sigma_a u(0)v(0) + \sigma_b u(1)v(1), \qquad u, v \in W^1(0,1) \tag{2.4.8}$$

$$L(v) = \int_0^1 fvdx + g_a v(0) + g_b v(1), \qquad v \in W^1(0,1) \tag{2.4.9}$$

Ta phát biểu bài toán mới:

Với $\alpha(u,v)$ và $L(v)$ xác định bởi (2.4.8) và (2.4.9) hãy tìm $u \in W^1(0,1)$ thỏa mãn

$$\alpha(u,v) = L(v), \qquad \forall v \in W^1(0,1) \tag{2.4.10}$$

Bài toán (2.4.10), gọi là *bài toán yếu* ứng với bài toán (2.4.1)(2.4.2).

2.4.3. Nghiệm suy rộng. Nghiệm của bài toán yếu (2.4.10) gọi là *nghiệm suy rộng* của bài toán (2.4.1)(2.4.2).

Theo lập luận ở mục 2.4.2 thì nghiệm cổ điển của bài toán (2.4.1)(2,4,2) cũng là nghiệm suy rộng của nó.

Có thể chứng minh được rằng nếu nghiệm suy rộng u lại thuộc $W^2(0,1)$ thì nó cũng là nghiệm cổ điển (chứng minh xem phụ lục 3, mục 2.4.10).

Vì không gian hàm thử $W^1(0,1) \subset L_2(0,1)$ và không gian chứa nghiệm $W^1(0,1) \supset W^2(0,1)$ nên nghiệm suy rộng dễ tìm hơn nghiệm cổ điển.

2.4.4. Sự tồn tại của nghiệm suy rộng.

Rõ ràng $\alpha(u,v)$ xác định bởi (2.4.8) là một dạng song tuyến đối xứng trên $W^1(0,1)$. Ta chứng minh tiếp rằng *nó liên tục trên $W^1(0,1)$ và $W_0^1(0,1)$-eliptic.*

Trước hết theo lập luận ở mục 2.2.3 ta có

$$|\int_0^1 [pu'v' + quv]dx| \le (C_1 + C_2)\|u\|_{W_0^1(0,1)}\|v\|_{W_0^1(0,1)}, \qquad u,v \in W_0^1(0,1) \tag{2.4.11}$$

Bây giờ với $u \in W^1(0,1)$ ta có

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)dt \Rightarrow u(0) = u(x) - \int_0^x u'(t)dt \Rightarrow |u(0)| \le |u(x)| + |\int_0^x u'(t)dt|$$

$$|u(0)|^2 \le 2\{|u(x)|^2 + (\int_0^1 |u'(t)|dt)^2\} \le 2|u(x)|^2 + 2\int_0^1 |u'(t)|^2 dt$$

$$\int |u(0)|^2 dx \le 2\int_0^1 |u(x)|^2 dx + 2\int_0^1 (\int_0^1 |u'(t)|^2 dt)dx \Rightarrow |u(0)|^2$$

$$\le 2\int_0^1 |u(x)|^2 dx + 2\int_0^1 |u'(t)|^2 dt \Rightarrow |u(0)| \le \|u\|_{W^1(0,1)} \qquad (2.4.12a$$

Một cách tương tự

$$|u(1)| \le \|u\|_{W^1(0,1)} \tag{2.4.12b}$$

Do đó tồn tại hằng số dương C_4 để

$$|\alpha(u,v)| \le C_4\|u\|_{W^1(0,1)}\|v\|_{W^1(0,1)}, \qquad \forall u,v \in W^1(0,1)$$

Vậy $\alpha(u,v)$ liên tục trên $W^1(0,1)$.

Bây giờ để định ý ta giả sử $\sigma_a > 0$. Khi đó ta lại có từ (2.4.8)

$$\alpha(u,u) \geq \int_0^1 p|u'|^2 dx + \sigma_a |u(0|^2 \geq \min\{C_0, \sigma_a\} \int_0^1 |u'|^2 dx + |u(0|^2 \qquad u \in W^1(0,1) \tag{2.4.13}$$

Mặt khác

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)dt = \int_0^x u'(t)dt \Rightarrow |u(x)| \leq |u(0)| + \int_0^1 |u'(t)|dt$$

$$|u(x)|^2 \leq 2|u(0)|^2 + 2(\int_0^1 |u'(t)|dt)^2$$

Do đó , áp dụng bất đẳng thức C-S-B ta có

$$|u(x)|^2 \leq 2|u(0)|^2 + 2\int_0^1 |u'(t)|^2 dt \Rightarrow \int_0^1 |u(x)|^2 dx \leq 2|u(0)|^2 + 2\int_0^1 |u'(t)|^2 dt$$

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx + \int_0^1 |u'(x)|^2 dx \leq 2|u(0)|^2 + 3\int_0^1 |u'(t)|^2 dt \leq 3\{|u(0)|^2 + \int_0^1 |u'|^2 dx\}$$

Chú ý đến (2.4.13) ta có

$$\|u\|^2_{W^1(0,1)} \leq K\alpha(u,u), \qquad K = \frac{3}{\min\{C_0, \sigma_a\}}$$

Ta suy ra

$$\alpha(u,u) \geq \frac{1}{K}\|u\|^2_{W^1(0,1)}, \qquad \forall u \in W^1(0,1)$$

Vậy $\alpha(u,v)$ $W^1(0,1)$-eliptic.

Bây giờ ta chứng minh *tính liên tục của* $L(v)$ xác định bởi (2.4.9). Rõ ràng $L(v)$ là một phiếm hàm tuyến tính trên $W^1(0,1)$. Ta có

Ta có từ (2.4.9)

$$|L(v)| \leq |(f,v)_{L_2(0,1)} + |g_a|.|v(0)| + |g_b|.|v(1)|$$

Áp dụng bất đẳng thức C-S-B vào số hạng đầu và kết quả (2.4.13) vào $|v(0)|$ và $|v(1)|$ ta được

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L_2(0,1)}\|v\|_{L_2(0,1)} + |g_a|.\|v\|_{W^1(0,1)} + |g_b|.\|v\|_{W^1(0,1)}.$$

$$|L(v)| \leq \{\|f\|_{L_2(0,1)} + |g_a| + |g_b|\}\|v\|_{W^1(0,1)}.$$

Vậy bài toán (2.4.10) có nghiệm duy nhất, do đó bài toán (2.4.1)(2.4.2) có nghiệm suy rộng của duy nhất.

Chú ý. Các chứng minh ở mục 2.4.3 vừa rồi và ở mục 2.2.3 trước đây đều làm một cách sơ cấp.

2.4.5. Tính gần đúng nghiệm suy rộng bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

Để xây dựng nghiệm gần đúng của bài toán (2.4.10) ta thay không gian $W^1(0,1)$ bằng một không gian con hữu hạn chiều của nó. Ta sẽ làm việc đó theo phương pháp phần tử hữu hạn, giống như trong bài toán biên loại một ở tiết 2.3.

Ta chia miền xác định [0,1] của ẩn hàm $u(x)$ thành N đoạn con bởi các điểm $x_i \in [0,1]$:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < ... < x_N = 1 \tag{2.4.14}$$

$$x_i - x_{i-1} = h_i, \quad h := \max_i \{h_i\}$$

Mỗi đoạn con $e_i := [x_{i-1}, x_i]$ gọi là một *phần tử hữu hạn* (phần tử hữu hạn một chiều.)

Tập các điểm x_i lập thành một *phân hoạch* của đoạn $[0,1]$.

Sau đó theo cách làm ở chương 1 tiết 8 ta xây dựng $N+1$ hàm tọa độ $\varphi_i(x)$ bằng cách đặt

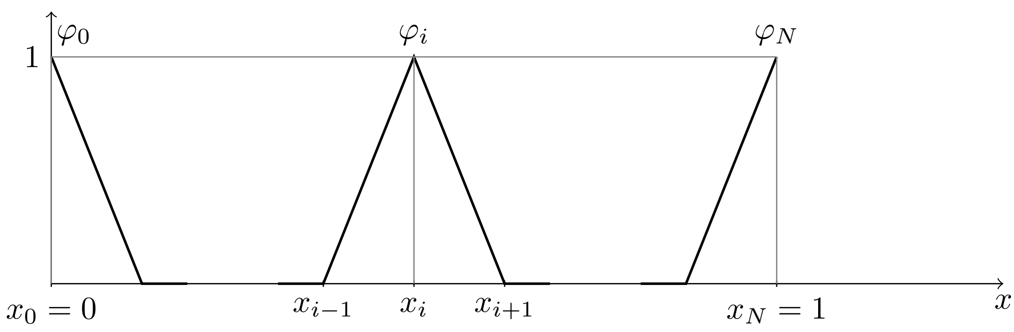
$$\varphi_i = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & \text{nếu} \quad x_{i-1} < x < x_i \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & \text{nếu} \quad x_i < x < x_{i+1} \\ 0 \quad \text{nếu} \quad x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \end{cases} \qquad i = 1, 2, ..., N-1 \tag{2.4.15}$$

$$\varphi_0 = \begin{cases} (x_1 - x)/h_1 & \text{nếu} \quad x_0 < x < x_1 \\ 0 \quad \text{nếu} \quad x \notin (x_0, x_1) \end{cases} \tag{2.4.16}$$

$$\varphi_N = \begin{cases} (x - x_{N-1})/h_N & \text{nếu} \quad x_{N-1} < x < x_N \\ 0 \quad \text{nếu} \quad x \notin (x_{N-1}, x_N) \end{cases} \tag{2.4.17}$$

Ở đây so với trường hợp điều kiện biên loại một có thêm hai hàm φ_0 và φ_N.

Như vậy các φ_i đều là các hàm số có giá đỡ nhỏ và có đồ thị dạng mái nhà.(H.2.4.1)



H.2.4.1

Các hàm $\varphi_i \in W^1(0,1)$ và độc lập tuyến tính. Họ

$$S_{N+1} = \{\varphi_i,\ i = 0, 1, 2, ..., N\}$$

sinh ra không gian con H_{N+1} có $N+1$ chiều của $W^1(0,1)$, nhận họ S_{N+1} là một cơ sở.

Sau đó ta xét bài toán (2.4.10) trên H_{N+1}:

Tìm $w_{N+1} \in H_{N+1}$ sao cho

$$\alpha(w_{N+1}, v) = L(v), \qquad \forall v \in H_{N+1} \tag{2.4.18}$$

Hàm $w_{N+1} \in H_{N+1}$ có dạng

$$w_{N+1}(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j \varphi_j(x) \in H_{N+1} \tag{2.4.19}$$

trong đó c_j được xác định sao cho (2.4.18) thỏa mãn với mọi $v \in H_{N+1}$. Vì S_{N+1} là một cơ sở của H_{N+1} nên chỉ cần buộc (2.4.18) thỏa mãn với $v = \varphi_i, i = 0, 1, ..., N$ (xem nhận xét ở chương 1, mục 1.9.3).

Vậy các c_j được xác định sao cho

$$\alpha(w_{N+1}, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 0, 1, 2, ..., N$$

Do đó

$$\alpha(\sum_{j=0}^{N} c_j \varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 0, 1, 2, ..., N$$

hay là

$$\sum_{j=0}^{N} c_j \alpha(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 0, 1, 2, ..., N \tag{2.4.20}$$

Do đó c_j là nghiệm của hệ đại số tuyến tính có N+1 phương trình đối với N+1 ẩn :

$$Bc = F \tag{2.4.21}$$

trong đó do có (2.4.8),(2.4.9) nên:

$$B_{ij} = \alpha(\varphi_j, \varphi_i) = \alpha(\varphi_i, \varphi_j), \qquad F_i = L(\varphi_i) \tag{2.4.22}$$

Với các tích phân (2.4.22) ta có thể tính trực tiếp, cũng có thể dùng phương pháp đổi biến như trình bầy ở dưới.

Chú ý. Tương tự chú ý 2.3.1 ở mục 2.3.4, B là một ma trận ba đường chéo và hệ (2.4.21) là một hệ ba đường chéo, giải bằng phương pháp truy đuổi rất ổn định.

2.4.6. Công thức tích lũy

Từ (2.4.22) (2.4.8)(2.4.9) và phân hoạch (2.4.14) ta suy ra

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [p(x)\varphi_j'(x)\varphi_i'(x) + q(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)]dx + \sigma_a\varphi_j(0)\varphi_i(0) + \sigma_b\varphi_j(1)\varphi_i(1) \tag{2.4.23}$$

$$F_i = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\varphi_i(x)dx + g_a\varphi_i(0) + g_b\varphi_i(1) \tag{2.4.24}$$

Nếu đặt

$$B_{ij}^k := \int_{x_{k-1}}^{x_k} [p(x)\varphi_j'(x)\varphi_i'(x) + q(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)]dx + \sigma_a\varphi_j(0)\varphi_i(0) + \sigma_b\varphi_j(1)\varphi_i(1) \tag{2.4.25}$$

$$F_i^k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\varphi_i(x)dx + g_a\varphi_i(0) + g_b\varphi_i(1) \tag{2.4.26}$$

thì (2.4.23)(2.4.24) viết thành công thức *tích lũy*:

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{N} B_{ij}^k, \quad F_i = \sum_{k=1}^{N} F_i^k \tag{2.4.27}$$

Theo (2.4.15)(2.4.16)(2.4.17) các hàm $\varphi_i(x)$ có giá đỡ nhỏ. Ta suy ra:

$$\begin{cases} B_{ii} = B_{ii}^i + B_{ii}^{i+1}, \quad B_{ii+1} = B_{i+1i} = B_{ii+1}^{i+1}, \qquad F_i = F_i^i + F_i^{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., N-1 \\ B_{00} = B_{00}^1, \ B_{01} = B_{10} = B_{01}^1, \qquad F_0 = F_0^1 \\ B_{N-1N} = B_{NN-1} = B_{N-1N}^N, \qquad B_{NN} = B_{NN}^N, \qquad F_N = F_N^N \end{cases} \tag{2.4.28}$$

Để tính các B_{ij} và F_j ta chỉ cần tính

$$B_{k-1k-1}^k, \ B_{kk}^k, \ B_{k-1k}^k, \ F_{k-1}^k, \ F_k^k. \ k = 1, 2, \ldots, N$$

với chú ý rằng đối với các φ_i liên quan đến điều kiện biên ta có

$$\varphi_0(0) = 1, \ \varphi_N(1) = 1, \ \varphi_i(0) = 0, \ i \neq 0, \ \varphi_j(1) = 0, \ j \neq N$$

Do đó theo (2.4.25)(2.4.26) ta có

$$B_{00}^1 := \int_{x_0}^{x_1} [p(x)\varphi_0'(x)\varphi_0'(x) + q(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)]dx + \sigma_a, \ F_0^1 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_0(x)dx + g_a \tag{2.4.29}$$

$$B_{NN}^N := \int_{x_{N-1}}^{x_N} [p(x)\varphi_N'(x)\varphi_N'(x) + q(x)\varphi_N(x)\varphi_N(x)]dx + \sigma_b, \ F_N^N = \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\varphi_N(x)dx + g_b \tag{2.4.30}$$

Với các B_{ij}^k và F_i^k còn lại thì

$$B_{ij}^k := \int_{x_{k-1}}^{x_k} [p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)]dx, \; F_i^k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\varphi_i(x)dx, \qquad (2.4.31)$$

Vậy có thể tính theo trình tự sau:
Thoạt đầu tính

$$B_{k-1k-1}^k, \; B_{kk}^k, \; B_{k-1k}^k, \; F_{k-1}^k, \; F_k^k, \; k = 1, 2, \ldots, N \quad \text{theo} \quad (2.4.31)$$

Sau đó theo (2.4.29) và (2.4.30) tính

$$B_{00}^1 := B_{00}^1 + \sigma_a; B_{NN}^N := B_{NN}^N + \sigma_b, F_0^1 := F_0^1 + g_a, \; F_{NN}^N := F_{NN}^N + g_b$$

2.4.7. Tính B_{ij} và F_i bằng phép đổi biến

Các tích phân xác định (2.4.25)(2.4.26), tức (2.4.29)-(2.4.31), chỉ thực hiện trên một phần tử hữu hạn $[x_{k-1}, x_k]$. Muốn tính chúng ta dùng phép đổi biến $x = x(\xi)$ xác định bởi

$$x = (x_k - x_{k-1})\xi + x_{k-1} \qquad (2.4.32$$

để đưa đoạn $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ về đoạn $0 \leq \xi \leq 1$

Qua phép đổi biến (2.4.32) ta có :

$$\frac{dx}{d\xi} = x_k - x_{k-1} = h_k, \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{h_k}$$

$$\varphi_k(x)|_{x=x(\xi)} = \xi, \quad \varphi_{k-1}(x)|_{x=x(\xi)} = 1 - \xi$$

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = \frac{1}{h_k}, \quad \frac{d\varphi_{k-1}}{dx} = -\frac{1}{h_k}$$

Đặt thêm

$$\overline{p}(\xi) := p(x)|_{x=x(\xi)}, \quad \overline{q}(\xi) := q(x)|_{x=x(\xi)} \qquad (2.4.33)$$

Khi đó căn cứ vào (2.4.25)(2.4.26), tức (2.4.29)-(2.4.31), ta có các công thức tính B_{ij}^k :

với $k = 1$,

$$B_{11}^1 = \int_{x_0}^{x_1} [p(x)\varphi_1'(x)\varphi_1'(x) + q(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)]dx \qquad (2.4.34)$$

$$B_{00}^1 = \int_{x_0}^{x_1} [p(x)\varphi_0'(x)\varphi_0'(x) + q(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)]dx + \sigma_a \qquad (2.4.35)$$

$$B_{10}^1 = B_{01}^1 := \int_{x_0}^{x_1} [p(x)\varphi_0'(x)\varphi_1'(x) + q(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)]dx \qquad (2.4.36)$$

với $k = N$,

$$B_{NN}^{N} = \int_{x_{N-1}}^{x_N} [p(x)\varphi_N'(x)\varphi_N'(x) + q(x)\varphi_N(x)\varphi_N(x)]dx + \sigma_b \tag{2.4.37}$$

$$B_{N-1N-1}^{N} = \int_{x_{N-1}}^{x_N} [p(x)\varphi_{N-1}'(x)\varphi_{N-1}'(x) + q(x)\varphi_{N-1}(x)\varphi_{N-1}(x)]dx \tag{2.4.38}$$

$$B_{N-1N}^{N} = B_{NN-1} = \int_{x_{N-1}}^{x_N} [p(x)\varphi_{N-1}'(x)\varphi_N'(x) + q(x)\varphi_{N-1}(x)\varphi_N(x)]dx \tag{2.4.39}$$

với $k = 2, 3, \ldots, N-1$,

$$B_{kk}^{k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{p(x)(\frac{d\varphi_k}{dx})^2 + q(x)\varphi_k^2\}dx = \int_0^1 \{\overline{p}(\xi)(\frac{1}{h_k})^2 + \overline{q}(\xi)\xi^2\}h_k d\xi \tag{2.4.40}$$

$$B_{k-1k-1}^{k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{p(x)(\frac{d\varphi_{k-1}}{dx})^2 + q(x)\varphi_{k-1}^2\}dx = \int_0^1 \{\overline{p}(\xi)(-\frac{1}{h_k})^2 + \overline{q}(\xi)(1-\xi)^2\}h_k d\xi \tag{2.4.41}$$

$$B_{k-1k}^{k} = B_{kk-1}^{k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{p(x)\frac{d\varphi_{k-1}}{dx}\frac{d\varphi_k}{dx} + q(x)\varphi_{k-1}\varphi_k\}dx$$

$$= \int_0^1 \{\overline{p}(\xi)(-\frac{1}{h_k})(\frac{1}{h_k}) + \overline{q}(\xi)(1-\xi)\xi\}h_k d\xi \tag{2.4.42}$$

Các công thức tính F_i^k:
với $k = 1$

$$F_1^1 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 \overline{f}(\xi)\xi h_k d\xi \qquad (2.4.43$$

$$F_0^1 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_0(x)dx + g_a = \int_0^1 \overline{f}(\xi)(1-\xi)h_k d\xi + g_a \tag{2.4.44}$$

với $k = N$

$$F_N^N = \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\varphi_N(x)dx + g_b = \int_0^1 \overline{f}(\xi)\xi h_k d\xi + g_b \tag{2.4.45}$$

$$F_{N-1}^N = \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\varphi_{N-1}(x)dx = \int_0^1 \overline{f}(\xi)(1-\xi)h_k d\xi \tag{2.4.46}$$

với $k = 2, 3, \ldots, N-1$

$$F_k^k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\varphi_k(x)dx = \int_0^1 \overline{f}(\xi)\xi h_k d\xi \tag{2.4.47}$$

$$F_{k-1}^k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\varphi_{k-1}(x)dx = \int_0^1 \overline{f}(\xi)(1-\xi)h_k d\xi \tag{2.4.48}$$

Chú ý. Để tính các tích phân xác định (2.4.34)-(2.4.48) ta có thể tính trực tiếp nếu có thể làm được, cũng có thể áp dụng một công thức tích phân gần đúng nào đó, chẳng hạn như công thức (2.3.11).

2.4.8. Đánh giá sai số. Giả sử $u \in W^1(0,1)$ là nghiệm của bài toán (2.4.10) (trên $W^1(0,1)$), và $w_{N+1} \in H_{N+1}$ là nghiệm gần đúng bằng phương pháp phần tử hữu hạn, tức cũng là nghiệm của bài toán (2.4.10) nhưng trên không gian con hữu hạn chiều H_{N+1} của $W^1(0,1)$ là

$$H_{N+1} := \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, ...\varphi_N\}$$

trong đó φ_i là hàm mái nhà (2.4.15)-(2.4.17).

Định lý 2.4.1. Nếu $u \in W^2(0,1)$ thì

$$\|u' - w'_{N+1}\|_{L_2(0,1)} \leq Kh[\|f\|_{L_2(0,1)} + |g_a| + |g_b|] \tag{2.4.49}$$

$$\|u - w_{N+1}\|_{L_2(0,1)} \leq Kh^2[\|f\|_{L_2(0,1)} + |g_a| + |g_b|] \tag{2.4.50}$$

trong đó K là một hằng số dương.

Từ đó suy ra sự hội tụ và đánh giá sai số.

2.4.9. Phụ lục 2. Chứng minh định lý 2.4.1.

Giả sử bài toán yếu (2.4.10) có nghiệm $u \in W^1(0,1)$. Đặt

$$u_I(x) := \sum_{i=0}^{N} u(x_i)\varphi_i(x) \tag{2.4.51}$$

Vì $u_I \in H_{N+1}$ nên áp dụng định lý 1.10.2 chương 1, công thức (1.10.6) ta có

Bổ đề 2.4.1.

$$\|u - w_{N+1}\|_{W^1(0,1)} \leq \sqrt{\frac{K_2}{K_3}}\|u - u_I\|_{W^1(0,1)} \tag{2.4.52}$$

trong đó K_2 và K_3 xác định ở (2.4.11) và (2.4.12).

Bây giờ xét vế phải của (2.4.52).

Bổ đề 2.4.2. Giả sử $u \in W^2(0,1)$. Khi đó

$$\|u - u_I\|_{L_2(0,1)} \leq h^2\|u''\|_{L_2(0,1)} \tag{2.4.53}$$

$$\|u' - u'_I\|_{L_2(0,1)} \leq h\|u''\|_{L_2(0,1)} \tag{2.4.54}$$

trong đó

$$h := \max_i\{h_i\}$$

Chứng minh. Lặp lại chứng minh bổ đề 2.3.2, mục 3.8.

Bổ đề 2.4.3. Giả sử $u \in W^2(0,1)$. Khi đó tồn tại hằng số dương K_5 để

$$\|u''\|_{L_2(0,1)} \leq K_5\{\|f\|_{L_2(0,1)} + |g_a| + |g_b|\} \tag{2.4.55}$$

Chứng minh. Từ tính $W^1(0,1)-$eliptic của $\alpha(u,v)$ ta suy ra:

$$\|u\|^2_{W^1(0,1)} \leq \frac{1}{K_3}\alpha(u,u) = \frac{1}{K_3}L(u) = \frac{1}{K_3}\{(f,u)_{L_2(0,1)} + |g_a|.|u(0)| + |g_b|.|u(1)|\}$$

Áp dụng bất đẳng thức C-S-B và định lý về vết (chương 1, mục 1.6.7) ta suy ra

$$\|u\|^2_{W^1(0,1)} \leq \frac{1}{K_3}\{\|f\|_{L_2(0,1)}\|u\|_{L_2(0,1)} + (|g_a| + |g_b|)\|u\|_{W^1(0,1)}\}$$

Vậy có

$$\|u\|_{W^1(0,1)} \leq \frac{1}{K_3}\{\|f\|_{L_2(0,1)} + |g_a| + |g_b|)\} \tag{2.4.56}$$

Bây giờ lấy đạo hàm (2.4.1) ta thu được

$$pu'' = -p'u' + qu - f$$

$$\Rightarrow |p|.|u''| \leq |p'|.|u'| + |q|.|u| + |f|$$

Từ đó và (2.4.4) ta suy ra

$$|u''| \leq \frac{1}{C_0}\{C_1|u'| + C_2|u| + |f|\} \Rightarrow$$

$$\|u''\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{C_0}\{C_1\|u'\|_{L_2(0,1)} + C_2\|u\|_{L_2(0,1)} + \|f\|_{L_2(0,1)}\}$$

$$\leq \frac{1}{C_0}\{C_1\|u\|_{W^1(0,1)} + C_2\|u\|_{W^1(0,1)} + \|f\|_{L_2(0,1)}\}$$

Áp dụng (2.4.56)

$$\|u''\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{C_0}\{(C_1 + C_2)\frac{1}{K_3}(\|f\|_{L_2(0,1)} + |g_a| + |g_b|) + \|f\|_{L_2(0,1)}\}$$

$\Rightarrow$ tồn tại $K_5 = const > 0$ để có (2.4.55).

Bổ đề 2.4.4. Giả sử bài toán (2.4.1)-(2.4.2) có nghiệm $u \in W^2(0,1)$. Khi đó tồn tại hằng số dương K_6 để

$$\|u' - w'_{N+1}\|_{L_2(0,1)} \leq K_6h\{\|f\|_{L_2(0,1)} + |g_a| + |g_b|\} \tag{2.4.57}$$

$$\|u - w_{N+1}\|_{L_2(0,1)} \leq K_6h\{\|f\|_{L_2(0,1)} + |g_a| + |g_b|\} \tag{2.4.58}$$

Chứng minh. Từ các bổ đề 2.4.1,2,3 ta suy ra

$$\|u - w_{N+1}\|_{W^1(0,1)} \le \|u - u_I\|_{W^1(0,1)} \le (h+1)K_5 h\{\|f\|_{L_2(0,1)} + |g_a| + |g_b|\}$$

Đó là (2.4.57),(2.4.58) với $K_6 = 2K_5$.

Bổ đề 2.4.5. Giả sử bài toán (2.4.1)(2.4.2) có nghiệm $u \in W^2(0,1)$. Khi đó tồn tại hằng số dương K_7 để

$$\|u - w_{N+1}\|_{L_2(0,1)} \le K_7 h^2\{\|f\|_{L_2(0,1)} + |g_a| + |g_b|\} \tag{2.4.59}$$

Chứng minh. Trước hết ta chú ý rằng

$$\alpha(u,v) = (f,v)_{L_2(0,1)} + g_a v(0) + g_b v(1), \quad \forall v \in W^1(0,1)$$

$$\alpha(w_{N+1},v) = (f,v)_{L_2(0,1)} + g_a v(0) + g_b v(1), \quad \forall v \in H_{N+1} \subset W^1(0,1)$$

Bằng phép trừ ta suy ra

$$\alpha(u,v) - \alpha(w_{N+1},v) = 0, \quad \forall v \in H_{N+1}$$

tức là

$$\alpha(u - w_{N+1}, v) = 0, \quad \forall v \in H_{N+1} \tag{2.4.60}$$

Bây giờ xét bài toán vi phân

$$-(p\Phi')' + q\Phi = F, \quad F = u - w_N \tag{2.4.61}$$

$$-p(0)\Phi'(0) + \sigma_a\Phi(0) = 0, \qquad p(1)\Phi'(1) + \sigma_b\Phi(1) = 0 \tag{2.4.62}$$

Ta được bài toán dạng (2.4.1)(2.4.4) với vế phải là $F = u - w_{N+1} \in L_2(0,1)$ và điều kiện biên loại ba thuần nhất. Do đó hàm Φ thỏa mãn

$$\alpha(\Phi, v) = (F, v)_{L_2(0,1)}, \quad \forall v \in W^1(0,1)$$

Thay $v = u - w_{N+1} \in W^1(0,1)$ ta có

$$\alpha(\Phi, u - w_{N+1}) = (F, u - w_{N+1})_{L_2(0,1)} = (u - w_{N+1}, u - w_{N+1})_{L_2(0,1)}$$

tức là

$$(u - w_{N+1}, u - w_{N+1})_{L_2(0,1)} = \alpha(\Phi, u - w_{N+1}) \tag{2.4.63}$$

Với

$$\Phi_I := \sum_{i=0}^{N} \Phi(x_i)\varphi_i(x)$$

thì $\Phi_I \in H_{N+1}$ nên theo (2.4.60) ta có

$$\alpha(u - w_{N+1}, \Phi_I) = 0$$

Từ đó (2.4.63) viết

$$\|u - w_{N+1}\|^2_{L_2(0,1)} = \alpha(\Phi, u - w_{N+1}) - \alpha(u - w_{N+1}, \Phi_I) = \alpha(\Phi - \Phi_I, u - w_{N+1})$$

$$\Rightarrow \|u - w_{N+1}\|^2_{L_2(0,1)} \leq K_2 \|\Phi - \Phi_I\|_{W^1(0,1)} \|u - w_{N+1}\|_{W^1(0,1)}$$

Theo bổ đề 2.4.4

$$\|u - w_{N+1}\|_{W^1(0,1)} \leq K_6 h\{\|f\|_{L_2(0,1)} + |g_a| + |g_b|\} \tag{2.4.64}$$

Theo bổ đề 2.4.2 và 2.4.3

$$\|\Phi - \Phi_I\|_{W^1(0,1)} \leq h\|\Phi''\|_{L_2(0,1)} \leq hK_5\|F\|_{L_2(0,1)}$$

$$\Rightarrow \|u - w_{N+1}\|^2_{L_2(0,1)} \leq K_2 K_5 h \|u - w_{N+1}\|_{L_2(0,1)} K_6 h\{\|f\|_{L_2(0,1)} + |g_a| + |g_b|\}$$

$$\Rightarrow \|u - w_{N+1}\|_{L_2(0,1)} \leq K_2 K_5 K_6 h^2\{\|f\|_{L_2(0,1)} + |g_a| + |g_b|\}$$

Đó là (2.4.59) với $K_7 = K_2 K_5 K_6$.

Từ bổ đề 2.4.4 và bổ đề 2.4.5 ta suy ra định lý 2.4.1.

2.4.10. Phụ lục 3. *Chứng minh nghiệm suy rộng của bài toán (2.4.1)(2.4.2) lại thuộc $W^2(0,1)$ thì cũng là nghiệm cổ điển của nó.*

Gọi u là nghiệm suy rộng của bài toán (2.4.1)(2.4.2). Khi đó có (2.4.7). Vì $D([0,1]) \subset W^1(0,1)$ nên từ (2.4.7) ta suy ra

$$\int_0^1 [pu'v' + quv]dx + \sigma_a u(0)v(0) + \sigma_b u(1)v(1) = \int_0^1 fvdx + g_a v(0) + g_b v(1), \qquad \forall v \in D([0,1]) \tag{2.4.65}$$

Lấy tích phân từng phần trong tích phân ở vế trái của (2.4.65) ta được

$$\int_0^1 [pu'v' + quv]dx = \int_0^1 [-(pu')' + qu]vdx + p(1)u'(1)v(1) - p(0)u'(0)v(0)$$

Do đó (2.4.65) trở thành

$$\int_0^1 [-(pu')' + qu]vdx + p(1)u'(1)v(1) - p(0)u'(0)v(0) + \sigma_a u(0)v(0) + \sigma_b u(1)v(1)$$

$$= \int_0^1 fvdx + g_a v(0) + g_b v(1), \qquad \forall v \in D([0,1])$$

Vậy có

$$\int_0^1 [-(pu')' + qu]vdx + [p(1)u'(1) + \sigma_b u(1) - g_b]v(1) - [p(0)u'(0) - \sigma_a u(0) - g_a]v(0)$$

$$= \int_0^1 fvdx, \qquad \forall v \in D([0,1]) \tag{2.4.66}$$

Rõ ràng $D(0,1) \subset D([0,1])$. Cho $v \in D(0,1)$, khi đó $v(0) = 0$ và $v(1) = 0$, nên (2.4.66) trở thành

$$\int_0^1 [-(pu')' + qu]vdx = \int_0^1 fvdx, \qquad \forall v \in D(0,1) \tag{2.4.67}$$

Vì $D(0,1)$ trù mật trong $L_2(0,1)$ nên (2.4.67) cho

$$\int_0^1 [-(pu')' + qu]vdx = \int_0^1 fvdx, \qquad \forall v \in L_2(0,1) \tag{2.4.8}$$

Do đó có

$$-(pu')' + qu = f \tag{2.4.69}$$

Đó là phương trình (2.4.1). Bây giờ (2.4.66) rút lại còn

$$[p(1)u'(1) + \sigma_b u(1) - g_b]v(1) - [p(0)u'(0) - \sigma_a u(0) - g_a]v(0) = 0, \qquad \forall v \in D([0,1]) \tag{2.4.70}$$

Xét $v = 1 - x$ là hàm số thuộc $D([0,1])$, có $v(1) = 0,\ v(0) = 1$. Khi đó (2.4.70) cho $[p(0)u'(0) - \sigma_b u(0) - g_a]v(0) = 0 \Rightarrow$

$$p(0)u'(0) - \sigma_a u(0) = g_a \tag{2.4.71}$$

Đó là điều kiện biên thứ nhất ở (2.4.2).

Xét $v = x \in D([0,1])$ có $v(0) = 0,\ v(1) = 1$. Khi đó (2.4.70) cho $[p(1)u'(1) + \sigma_b u(1) - g_b]v(1) = 0 \Rightarrow$

$$p(1)u'(1) + \sigma_b u(1) = g_b \tag{2.4.72}$$

Đó là điều kiện biên thứ hai ở (2.4.2).

Các kết quả (2.4.69),(2.4.71),(2.4.72) chứng tỏ u là nghiệm cổ điển của bài toán (2.4.1)(2.4.2).

BÀI TẬP.

1. Giải bài toán sau bằng phương pháp phần tử hữu hạn:

$$Lu := -((1 + x^2)u')' + u = (2 + x^2)\sin x, \quad 0 < x < \pi$$

$$u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0$$

Chia đều đoạn $[0, \pi]$ thành 5 đoạn con bằng nhau.

2. Trình bầy phương pháp phần tử hữu hạn giải bài toán sau:

$$Lu := -u'' + qu = f, \quad a < x < b$$

$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0$$

trong đó

$$q = q(x) \in C[a,b],\ f = f(x) \in C[a,b], \quad q(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b].$$

3. Trình bầy phương pháp phần tử hữu hạn giải bài toán sau:

$$Lu := -u'' + qu = f, \quad a < x < b$$

$$u'(a) = 0, \quad u(b) = 0$$

trong đó

$$q = q(x) \in C[a,b],\ f = f(x) \in C[a,b], \quad q(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b].$$

4. Trình bầy phương pháp phần tử hữu hạn giải bài toán sau:

$$Lu := -u'' + u = x, \quad 0 < x < 1$$

$$u'(0) = 1, \quad u'(1) = 1$$