Chương 1

KHÔNG GIAN HILBERT VÀ BÀI TOÁN YẾU

1.1. Không gian vectơ

1.1.1. Định nghĩa. Không gian vectơ V trên trường vô hướng K là một tập các đối tượng , mỗi đối tượng gọi là một vectơ, trong đó có xác định hai phép toán:

1/ phép cộng: ứng mỗi cặp phần tử x và y thuộc V có cách xác định một phần tử thuộc V, viết là $x + y$;

2/ phép nhân với vô hướng: ứng mỗi phần tử $x \in V$ và mỗi số $k \in K$ có cách xác định một phần tử thuộc V, viết là kx (hay xk);
sao cho 8 tính chất sau được thỏa mãn:

1/ $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$
2/ $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V$
3/ Tồn tại $\theta \in V$ sao cho $\theta + x = x + \theta = x, \quad \forall x \in V$
Phần tử θ gọi là phần tử "trung hòa" hay phần tử "không" của V
4/ Với mỗi $x \in V$ tồn tại $-x \in V$ sao cho $x + (-x) = -x + x = \theta$
Phần tử $-x$ gọi là phần tử "đối" của x
5/ $k(x + y) = ky + kx, \quad \forall x, y \in V, \quad \forall k \in K$
6/ $(k + l)x = kx + lx, \quad \forall x \in V, \quad \forall k, l \in K$
7/ $k(lx) = (kl)x, \quad \forall x \in V, \quad \forall k, l \in K$
8/ $1x = x, \quad \forall x \in V$
Tám tính chất trên gọi là 8 tiên đề của không gian vectơ.

1.1.2. Chú ý. Sau này thường ta chỉ xét trường hợp K là trường số thực R.

1.2. Không gian chuẩn

1.2.1. Định nghĩa. Không gian chuẩn, còn gọi là không gian định chuẩn, là một không gian vectơ V trong đó ứng mỗi phần tử $x \in V$ có cách xác định một số thực ký hiệu là $\|x\|$ và gọi là chuẩn của x, thỏa mãn ba tính chất:

1/ $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in V; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
2/ $\|kx\| = |k|.\|x\|, \quad \forall x \in V, \quad \forall k \in K$
3/ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V$

Ba tính chất trên gọi là 3 tiên đề của chuẩn vectơ hay của không gian chuẩn .

Tập các phần tử của không gian vectơ V gọi là *tập nền* của không gian chuẩn V.

1.2.2. Sự hội tụ.

Trong không gian chuẩn V xét dãy phần tử $\{x_n\}$. Nói dãy x_n *hội tụ tới* $x \in V$ (hay có giới hạn là $x \in V$) nếu dãy số $\|x_n - x\| \to 0$ khi $n \to \infty$, tức là

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : n > N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Khi đó ta viết $x_n \to x$ khi $n \to \infty$ hay đơn giản là $x_n \to x$.

Nói *dãy* x_n *hội tụ trong* V hay *dãy* x_n *hội tụ* nếu tồn tại $x \in V$ để $x_n \to x$.

1.2.3. Sự trù mật.

V là một không gian chuẩn. Cho $S \subset T \subset V$. Nói S trù mật trong T nếu với mỗi phần tử $y \in T$ đều tồn tại một dãy $\{y_n \in S\}$ để $y_n \to y$.

Khi $T = V$ ta nói S trù mật trong V.

1.2.4. Chuẩn tương đương.

Trong một không gian vectơ V làm nền có thể có nhiều cách định nghĩa chuẩn cho cùng một vectơ $x \in V$. Khi đó để phân biệt các chuẩn khác nhau của cùng một vectơ thường người ta kèm theo ký hiệu chuẩn một chỉ số, thí dụ như $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, vân vân. Như vậy ta có thể có nhiều không gian chuẩn khác nhau trên cùng một không gian nền.

Ta nói hai chuẩn khác nhau $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ là *tương đương* nếu tồn tại hai hằng số dương M_1 gvà M_2 sao cho

$$M_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M_2\|x\|_1 \qquad \forall x \in V.$$

Ý nghĩa của khái niệm chuẩn tương đương là: nếu một dãy đã hội tụ theo chuẩn thứ nhất thì dãy đó cũng hội tụ theo chuẩn thứ hai và ngược lại, nghĩa là có

$$\|x_n - x\|_1 \to 0 \Leftrightarrow \|x_n - x\|_2 \to 0.$$

1.3. Không gian Banach

1.3.1. Dãy Cauchy.

V là một không gian chuẩn. Xét dãy $\{x_n \in V\}$.

Nói dãy x_n là *dãy Cauchy* nếu với bất kỳ số $\varepsilon > 0$ cho trước nào cũng tồn tại số nguyên dương N tương ứng để

$$n, m > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Mọi dãy Cauchy có không quá một giới hạn.

Thực vậy, giả sử dãy $\{x_n \in V\}$ có hai giới hạn là a và b với $a \neq b$, nghĩa là $\|b-a\| > 0$. Khi đó với $\varepsilon = \|b-a\|/4$ sẽ tồn tại số nguyên $N > 0$ sao cho khi $n > N$ thì

$$\|x_n - a\| < \frac{\|b-a\|}{4}, \qquad \|x_n - b\| < \frac{\|b-a\|}{4}.$$

Từ đó và vì $b - a = (x_n - a) - (x_n - b)$ ta suy ra

$$\|b-a\| < \|x_n - a\| + \|x_n - b\| < \frac{\|b-a\|}{4} + \frac{\|b-a\|}{4} = \frac{\|b-a\|}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\|b-a\|}{2} < 0 \Rightarrow \|b-a\| < 0$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\|b-a\| > 0$. Vậy không thể có $b \neq a$, nghĩa là một dãy Cauchy chỉ có thể có một giới hạn.

Trong không gian chuẩn V mọi dãy hội tụ là dãy Cauchy.

Thực vậy, giả sử $x_n \to x \in V$ thì

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : n > N \Rightarrow \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do đó

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : n, m > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Nhưng *không phải dãy Cauchy nào cũng hội tụ.*

1.3.2. Định nghĩa không gian Banach.
Một không gian chuẩn V trong đó mọi dãy Cauchy đều hội tụ là một không gian đầy. Không gian chuẩn đầy gọi là *không gian Banach.*

1.4. Không gian có tích vô hướng

1.4.1. Tích vô hướng. Trong không gian vectơ V trên trường số thực R nếu tồn tại một ánh xạ: $V \times V \to R$, tức là ứng mỗi cặp $(u, v) \in V \times V$ có cách xác định một số thực ký hiệu là $(u, v)_V$ sao cho năm tính chất sau được thỏa mãn:
(i) $(u, v)_V = (v, u)_V \quad \forall u, v \in V$
(ii) $(u + w, v)_V = (u, v)_V + (w, v)_V \quad \forall u, v, w \in V$
(iii) $(ku, v)_V = k(u, v)_V \quad \forall u, v \in V, \quad \forall k \in R$
(iv) $(u, u)_V \geq 0 \quad \forall u \in V$
(v) $(u, u)_V = 0 \Leftrightarrow u = \theta$
thì đại lượng $(u, v)_V$ gọi là một tích vô hướng trong không gian vectơ V, và V gọi là *không gian có tích vô hướng.*
Năm tính chất trên gọi là năm tiên đề của tích vô hướng.

1.4.2. Chú ý. Thường khi không sợ hiểu lầm, người ta bỏ chỉ số V và chỉ viết (u, v) thay cho $(u, v)_V$ cho gọn.

1.4.3. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz- Bunhiacowski (C-S-B).
Trong không gian có tích vô hướng có bất đẳng thức sau, gọi là *bất đẳng thức Cauchy-Schwarz- Bunhiacowski* , viết tắt là C-S-B:

$$|(u, v)_V| \leq (u, u)_V.(v, v)_V \qquad \text{hay} \qquad |(u, v)| \leq (u, u).(v, v). \qquad (C - S - B)$$

Chứng minh. Theo tính chất (iv) của tích vô hướng ta có

$$(u + tv, u + tv) \geq 0 \qquad \forall t \in R.$$

Do đó

$$(u,u) + (u,tv) + (tv,u) + tv,tv) = (u,u) + 2t(u,v) + t^2(v,v) \geq 0 \quad \forall t \in R.$$

Ta gặp một tam thức bậc hai đối với t, $\geq 0 \quad \forall t \in R \Rightarrow$ nó có biệt số $(u,v)^2 - (u,u)(v,v) \leq 0 \Rightarrow$ bất đẳng thức C-S-B.

Không gian Hilbert

1.5.1. Không gian tiền Hilbert và không gian Hilbert.

Trong không gian có tích vô hướng V ta xét đại lượng

$$\sqrt{(u,u)} \qquad \forall u \in V.$$

Theo tính chất của tích vô hướng, đại lượng này thỏa mãn ba tiên đề của chuẩn vectơ. Không gian vectơ V với chuẩn $\|u\|_V := \sqrt{(u,u)}$ là một không gian chuẩn. Không gian chuẩn này gọi là *không gian tiền Hilbert.*

Nếu không gian tiền Hilbert là một không gian đầy thì nó được gọi là *không gian Hilbert.* Không gian Hilbert là không gian Banach.

Trong không gian Hilbert V

$$\text{nếu} \quad (u,v) = 0 \quad \forall v \in V \quad \text{thì} \quad u = \theta.$$

Thực vậy, thay $v = u$ ta suy ra (u,u)=0. Vậy theo tính chất (v) của tích vô hướng thì $u = \theta$ (phần tử không).

1.5.2. Chú ý. Trong không gian Hilbert V bất đẳng thức C-S-B có dạng

$$|(u,v)| \leq \|u\|.\|v\|.$$

1.6. Một số thí dụ về không gian hàm

1.6.1. Mở đầu.

R^n là tập các điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i \in R$, nói chung n là một số nguyên dương, nhưng trong tài liệu này ta chỉ tập trung quan tâm đến trường hợp $n \leq 3$. Xét điểm $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$. Đại lượng

$$d(x,y) := \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$$

gọi là khoảng cách từ y đến x.

δ là một số dương, tập

$$\omega(x,\delta) := \{y \in R^n : d(x,y) < \delta\}$$

gọi là một δ-lân cận của x

$\Omega \subset R^n, \quad x \in R^n$. Nói x là một *điểm trong* của Ω nếu $x \in \Omega$ và tồn tại một δ-lân cận của x nằm hoàn toàn trong Ω. Nói Ω là một tập mở nếu Ω chỉ gồm những điểm trong. Nói x là một điểm biên của Ω nếu mọi δ-lân cận của x đều chứa cả những điểm thuộc Ω và những điểm không thuộc Ω. Tập hợp gồm tất cả các điểm biên của Ω gọi là *biên* của Ω, thường ký hiệu là Γ. Ta viết $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$. Nói Ω là một tập *đóng* nếu Ω chứa tất cả các điểm biên của nó. Chẳng hạn $\overline{\Omega}$ là tập đóng. Nói Ω *liên thông* nếu hai điểm bất kỳ của Ω đều có thể nối với nhau bằng một đường thuộc Ω. Nói Ω *bị vhặn* nếu tồn tại một điểm $x_0 \in R^n$ và một số thực ρ sao cho $d(x_0, x) \leq \rho \quad \forall x \in \Omega$.

Tập con Ω của R^n, không rỗng, mở, liên thông gọi là một *miền*; nếu Ω bị chặn nữa thì đó là một *miền bị chặn*.

Đường γ trong mặt phẳng tọa độ (x, y) có phương trình $f(x, y) = 0$, điểm $(x, y) \in \gamma$ nếu (x, y) thỏa mãn $f(x, y) = 0$. Nói γ là *đường trơn* nếu các đạo hàm riêng f'_x, f'_y tồn tại, không đồng thời bằng 0 và liên tục tại mọi điểm trên γ. Nói γ *trơn từng khúc* nếu nó trơn trừ tại một số hữu hạn điểm trên γ ở đó các đạo hàm f'_x, f'_y có gián đoạn loại một.

Mặt S trong không gian tọa độ (x, y, z) có phương trình $F(x, y, z) = 0$, điểm $(x, y, z) \in S$ nếu (x, y, z) thỏa mãn $F(x, y, z) = 0$. Nói S là *mặt trơn* nếu các đạo hàm riêng F'_x, F'_y, F'_z tồn tại, không đồng thời bằng 0 và liên tục tại mọi điểm trên S. Nói S *trơn từng mảnh* nếu nó trơn trừ tại một số hữu hạn đường trên S. tại mỗi điểm của chúng các đạo hàm F'_x, F'_y, F'_z có gián đoạn loại một.

Nói $x_0 \in \Omega$ là một *điểm sao* của Ω nếu mỗi tia xuất phát từ x_0 chỉ gặp biên Γ của Ω tại một điểm.

Nói Ω có *tính sao* nếu trong Ω tồn tại ít nhất một điểm sao.

Nói $\Omega \subset R^n$, $n = 2, 3$, có *tính sao cầu* nếu trong Ω tồn tại một hình "cầu" (tức là hình tròn nếu $n = 2$, hình cầu nếu $n = 3$), bán kính dương, gồm toàn các điểm sao.

Nói Ω có *tính sao cầu từng phần* nếu Ω có thể chia thành một số hữu hạn miền con có tính cầu sao bằng những đường trơn từng khúc khi $n = 2$ và bằng những mặt trơn từng mảnh khi $n = 3$.

1.6.2. Thí dụ về không gian Banach.

Xét các không gian hàm thực sau:

Ω là một miền bị chặn trong R^n.
$C(\overline{\Omega})$ là tập các hàm $u(x)$ liên tục trong $\overline{\Omega}$ với

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \max_{x \in \overline{\Omega}} \{|u(x)|\}.$$

Khi đó đại lượng $\|u\|_{C\overline{\Omega})}$ thỏa mãn ba tiên đề của chuẩn vectơ và $C(\overline{\Omega})$ với chuẩn vectơ định nghĩa như vậy trở thành một không gian Banach, vẫn giữ ký hiệu $C(\overline{\Omega})$.

Sau đây ta sẽ dùng các ký hiệu: Cho α_i nguyên $\geq 0, i = 1, 2, ..., n$. Khi đó

$$\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \qquad |\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n.$$

$$D^\alpha u := (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial x_2})^{\alpha_2}...(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}.$$

m là một số nguyên ≥ 0. Xét tập

$$C^m(\overline{\Omega}) := \{u|D^\alpha u(x) \in C(\overline{\Omega}),\ |\alpha| \leq m\}$$

với chuẩn

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\leq m} \max_{x\in\overline{\Omega}}\{|D^\alpha u(x)|\}.$$

$C^m(\overline{\Omega})$ là một không gian Banach.

Trường hợp $m = 0$ thì $C^0(\overline{\Omega})$ trùng với $C(\overline{\Omega})$.

1.6.3. Thí dụ về không gian Hilbert.

$L_2(\Omega)$ là tập các hàm số $u(x)$ có bình phương khả tích trong Ω:

$$\int_\Omega [u(x)]^2 dx < \infty, \quad dx = dx_1 dx_2...dx_n.$$

Tích phân ở đây hiểu theo nghĩa Lebesgue. Tích phân trình bầy trong sách ([1],II,III) là tích phân Riemann. Tích phân Lebesgue là một dạng mở rộng của tích phân Riemann. Một hàm số đã khả tích Riemann thì cũng khả tích Lebesgue và lúc đó hai tích phân này bằng nhau. Nhưng có hàm số khả tích Lebesgue mà không khả tích Riemann.

Trong $L_2(\Omega)$ người ta xét đại lượng

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} := \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Theo tính chất của tích phân, đại lượng này thỏa mãn 5 tính chất của tích vô hướng, nên nó là một tích vô hướng trong $L_2(\Omega$. Sau đó ta định nghĩa chuẩn vectơ:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} := \sqrt{(u,u)_{L_2(\Omega)}} = \sqrt{\int_\Omega [u(x)]^2 dx}.$$

Khi đó $L_2(\Omega)$ là một không gian đầy và do đó trở thành một không gian Hilbert. Nếu tích phân hiểu theo nghĩa Riemann thì $L_2(\Omega)$ không đầy và do đó nó không phải là không gian Hilbert.

Bây giờ đạo hàm hiểu theo nghĩa đạo hàm suy rộng. Khái niệm đạo hàm trình bầy trong sách ([1],II,III) là đạo hàm thường. Đạo hàm suy rộng là một dạng mở rộng của đạo hàm thường. Một hàm số có đạo hàm thường thì cũng có đạo hàm suy rộng và lúc đó hai đạo hàm này bằng nhau. Nhưng có hàm số có đạo hàm suy rộng mà không có đạo hàm thường.

Ta định nghĩa thêm: giả sử m là một số nguyên ≥ 0 và Ω là một miền bị chặn. Xét tập

$$W^m(\Omega) := \{u|D^\alpha u \in L_2(\Omega), \quad |\alpha| \leq m\}.$$

Trong $W^m(\Omega)$ người ta đưa vào tích vô hướng

$$(u,v)_{W^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)}$$

và chuẩn

$$\|u\|_{W^m(\Omega)} := \sqrt{(u,u)_{W^m(\Omega)}}.$$

Khi đó $W^m(\Omega)$ trở thành một không gian Hilbert.

Trường hợp $m = 0$ thì $W^0(\Omega)$ trùng với $L_2(\Omega)$.

1.6.4. Giá đỡ của một hàm số.

Cho hàm số $u(x)$ xác định trong một tập nào đó. Ta gọi tập hợp

$$\mathrm{supp(u)} := \overline{\{\mathrm{x|u(x)} \neq 0\}}$$

là *giá đỡ* của hàm u.

Thí dụ. Cho số dương r. Xét biến $y \in R$. Hàm

$$u(y) = \begin{cases} e^{-r^2/(r^2-y^2)} \quad \text{khi} \quad |\mathrm{y}| < \mathrm{r}, \\ 0 \quad \text{khi} \quad |\mathrm{y}| \ge \mathrm{r} \end{cases}$$

là hàm số xác định trên R, có đạo hàm mọi cấp trên R và có giá đỡ là khoảng $[-r, r]$.

Nếu r nhỏ thì hàm $u(y)$ ở trên có giá đỡ nhỏ. Sau này ta đặc biệt chú ý các hàm số có giá đỡ nhỏ.

1.6.5. Tập $D(\Omega)$. Ta gọi $D(\Omega)$ là tập các hàm số có đạo hàm mọi cấp trên Ω và có "giá đỡ compắc trong Ω" (có thể hiểu cụm từ "giá đỡ compắc trong Ω" như sau: mọi dãy vô hạn các phần tử của giá đỡ chứa ít nhất một dãy con hội tụ trong Ω). Thí dụ ở mục 1.6.4 chứng tỏ $D(\Omega) \neq \emptyset$.

Định nghĩa tương tự cho $D(\overline{\Omega})$.

1.6.6. Không gian $W_0^m(\Omega)$.

Gọi $\overline{D(\Omega)}|_m$ là bao đóng của $D(\Omega)$ trong $W^m(\Omega)$, tức là tập các phần tử giới hạn của $D(\Omega)$ theo chuẩn của $W^m(\Omega)$.

Người ta ký hiệu $W_0^m(\Omega) := \overline{D(\Omega)}|_m$ và chứng minh được rằng $W_0^m(\Omega)$ cũng là một không gian Hilbert với tích vô hướng và chuẩn đã xác định trong $W^m(\Omega)$, đó là một không gian con thực sự của $W^m(\Omega)$.

1.6.7. Một số kết quả không chứng minh.

Ω là một miền bị chặn.

1/ $D(\Omega)$ trù mật trong $L_2(\Omega)$;
2/ $D(\Omega)$ trù mật trong $W_0^1(\Omega)$;
3/ $D(\overline{\Omega})$ trù mật trong $W^1(\Omega)$;

4/ Nếu Ω có tính sao thì $C^m(\overline{\Omega})$ trù mật trong $W^m(\Omega)$;

5/ Một số trường hợp riêng của các định lý nhúng Sobolev (xem [2],[3],[4]).

Trước hết xét X và Y là hai không gian chuẩn, f là một ánh xạ tuyến tính từ X tới Y.

Nói f liên tục (hay bị chặn) nếu tồn tại hằng số dương M sao cho

$$\|f(v)\|_Y \leq M\|v\|_X, \quad \forall v \in X$$

Nói f compắc nếu khi A là một tập con bị chặn trong X thì $f(A)$ chứa ít nhất một dãy Cauchy trong Y.

Mệnh đề 1.6.1. Mỗi hàm $u(x) \in W^1(a,b)$ là một hàm thuộc $C[a,b]$, (tức là $W^1(a,b) \subset C[a,b]$), đồng thời ánh xạ nhúng $W^1(a,b)$ vào $C[a,b]$, tức là ánh xạ : $u \in W^1(a,b) \mapsto u \in C[a,b]$, là ánh xạ liên tục và compắc.

Mệnh đề 1.6.2. Ω là một miền bị chặn trong R^n, $n = 2,\ 3$, có biên trơn từng khúc nếu $n = 2$, trơn từng mảnh nếu $n = 3$ và có tính cầu sao từng phần. Khi đó nếu hàm $u(x) \in W^1(\Omega)$ thì trên biên Γ của Ω nó là một hàm thuộc $L_2(\Gamma)$, đồng thời ánh xạ nhúng $W^1(\Omega)$ vào $L_2(\Gamma)$, tức là ánh xạ : $u \in W^1(\Omega) \mapsto u \in L_2(\Gamma)$, là ánh xạ liên tục và compắc.

Mệnh đề 1.6.3. Ω là một miền bị chặn trong R^n, $n = 1,\ 2,\ 3$. Khi đó mỗi hàm $u(x) \in W^1(\Omega)$ là một hàm thuộc $L_2(\Omega)$, đồng thời ánh xạ nhúng $W^1(\Omega)$ vào $L_2(\Omega)$, tức là ánh xạ : $u \in W^1(\Omega) \mapsto u \in L_2(\Omega)$, là ánh xạ liên tục và compắc.

Mệnh đề 1.6.4: Công thức Friedrich.

(i) $\Omega \subset R^2$ có biên Γ trơn từng khúc, $u \in W^1(\Omega)$ thì có

$$\int\int_\Omega u^2 dxdy \leq C\{\int\int_\Omega [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]dxdy + \oint_\Gamma u^2 ds, \quad C = const > 0\} \qquad (1.6.1a)$$

Do đó nếu $u \in W_0^1(\Omega)$ thì

$$\int\int_\Omega u^2 dxdy \leq C\{\int\int_\Omega [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]dxdy\} \qquad (1.6.1b)$$

(ii) $\Omega \subset R^3$ có biên S trơn từng mảnh, $u \in W^1(\Omega)$ thì có

$$\int\int\int_\Omega u^2 dxdydz \leq C\{\int\int\int_\Omega [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2]dxdydz + \int\int_S u^2 dS\} \quad (1.6.2a)$$

trong đó $\quad C = const > 0$.

Do đó nếu $u \in W_0^1(\Omega)$ thì

$$\int\int\int_\Omega u^2 dxdydz \leq C\{\int\int\int_\Omega [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2]dxdydz \qquad (1.6.2b)$$

1.7. Phiếm hàm trong không gian Hilbert

1.7.1. Phiếm hàm và phiếm hàm tuyến tính.

V là một không gian Hilbert. Nói F là một phiếm hàm trên V nếu F là một ánh xạ từ V tới R.

Thí dụ. Các biểu thức

$$\int_a^b v(x)dx \tag{1.7.1}$$

$$L(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx, \qquad f \in L_2(a,b) \quad \text{cho trước} \tag{1.7.2}$$

$$\int_a^b f(x)[v(x)]^2dx, \qquad f \in L_2(a,b) \quad \text{cho trước} \tag{1.7.3}$$

là những phiếm hàm trên $L_2(a,b)$.

Nói phiếm hàm $F(v)$ *tuyến tính* nếu

$$F(pu+qv) = pF(u) + qF(v), \qquad \forall p,q \in R, \quad \forall u,v \in V. \tag{1.7.4}$$

Thí dụ.
Các phiếm hàm (1.7.1),(1.7.2) là tuyến tính.
Phiếm hàm (1.7.3) không tuyến tính.

Nói phiếm hàm tuyến tính $F(v)$ *liên tục* hay *bị chặn* trên V nếu tồn tại hằng số dương K sao cho

$$|F(v)| \leq K\|v\|_V, \qquad \forall v \in V \tag{1.7.5}$$

Thí dụ. Xét phiếm hàm tuyến tính (1.7.2). Theo bất đẳng thức C-S-B ta có

$$|L(v)| = |\int_a^b f(x)v(x)dx| \leq \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2dx}.\sqrt{\int_a^b [v(x)]^2dx}$$

Do đó

$$|L(v)| \leq K\|v\|_{L_2(a,b)}, \qquad K = \|f\|_{L_2(a,b)} \tag{1.7.6}$$

Vậy phiếm hàm tuyến tính (1.7.2) liên tục hay bị chặn trên $L_2(a,b)$.

1.7.2. Dạng song tuyến.

V là một không gian Hilbert. Nói $\alpha(u,v)$là một *dạng song tuyến* trên V (hay trên $V \times V$) nếu nó là một ánh xạ từ $V \times V$ tới R, tuyến tính theo u nếu giữ v cố định và tuyến tính theo v nếu giữ u cố định, nghĩa là $\forall u,v,w \in V, \quad \forall h,k \in R$ ta có

$$\alpha(ku+hw,v) = k\alpha(u,v) + h\alpha(w,v), \qquad \alpha(u,kv+hw) = k\alpha(u,v) + h\alpha(u,w) \tag{1.7.7}$$

Thí dụ. Biểu thức

$$\beta(u,v) := \int_a^b u'(x)v'(x)dx, \qquad u,v \in W_0^1(a,b) \tag{1.7.8}$$

là một dạng song tuyến trên $V = W_0^1(a,b)$.

Nói dạng song tuyến $\alpha(u,v)$ *đối xứng* trên V nếu

$$\alpha(u,v) = \alpha(v,u), \qquad \forall u, v \in V. \tag{1.7.9}$$

Thí dụ. Rõ ràng dạng song tuyến $\beta(u,v)$ ở (1.7.8) đối xứng trên $V = W_0^1(a,b)$.

Chú ý. Khi dạng song tuyến $\alpha(u,v)$ đối xứng trên V thì ta nói $\alpha(u,u)$ là *dạng toàn phương* trên V.

Nói dạng song tuyến $\alpha(u,v)$ *liên tục* hay *bị chặn* trên V nếu tồn tại hằng số dương M sao cho

$$|\alpha(u,v)| \le M\|u\|_V.\|v\|_V, \qquad \forall u, v \in V \tag{1.7.10}$$

Thí dụ. Xét dạng song tuyến (1.7.8). Áp dụng bất đẳng thức C-S-B ta suy ra

$$|\int_a^b u'(x)v'(x)dx| \le \sqrt{\int_a^b [u'(x)]^2 dx}.\sqrt{\int_a^b [v'(x)]^2 dx} \le \|u\|_{W_0^1(a,b)}\|u\|_{W_0^1(a,b)}.$$

Do đó

$$|\beta(u,v)| \le \|u\|_{W_0^1(a,b)}\|u\|_{W_0^1(a,b)}. \tag{1.7.11}$$

Vậy dạng song tuyến $\beta(u,v)$ ở (1.7.8) liên tục hay bị chặn trên $W_0^1(a,b)$.

Nói dạng song tuyến $\alpha(u,v)$ *có tính V-eliptic* nếu tồn tại hằng số dương γ sao cho

$$\alpha(u,u) \ge \gamma\|u\|_V^2, \qquad \forall u \in V \tag{1.7.12}$$

Thí dụ. Từ (1.7.8) ta suy ra

$$\beta(u,u) = \int_a^b [u'(x)]^2 dx. \tag{1.7.13}$$

Mặt khác nếu xét $u \in D(a,b)$ thì $u(a) = 0$ nên

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)dt = \int_a^x u'(t)dt.$$

Do đó tại $x \in [a,b]$ ta có

$$|u(x)| = |\int_a^x u'(t)dt| \le \int_a^x |u'(t)|dt \le \int_a^b |u'(t)|dt$$

$$|u(x)|^2 \le \int_a^b |u'(t)|^2 dt \int_a^b 1^2 dt = (b-a)\int_a^b |u'(t)|^2 dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b |u(x)|^2 dx \le (b-a)\int_a^b (\int_a^b |u'(t)|^2 dt)dx = (b-a)^2 \int_a^b |u'(t)|^2 dt = (b-a)^2 \beta(u,u)$$

theo (1.7.13). Với (1.7.13) lần nữa ta suy ra: tồn tại hằng số dương c để có

$$\int_a^b |u'(x)|^2 dx + \int_a^b |u(x)|^2 dx \leq c\beta(u,u), \qquad c = 1 + (b-a)^2, \qquad \forall u \in D(a,b) \quad (1.7.14)$$

Vì $D(a,b)$ trù mật trong $W_0^1(a,b)$ nên từ (1.7.14) ta có

$$\beta(u,u) \geq \frac{1}{c}\|u\|_{W_0^1(a,b)}. \qquad \forall u \in W_0^1(a,b)$$

Vậy dạng song tuyến $\beta(u,v)$ ở (1.7.8) có tính $W_0^1(a,b)$-eliptic.

1.7.3. Định lý Riesz. Cho không gian Hilbert V. Người ta chứng minh được định lý Riesz:

Nếu phiếm hàm tuyến tính $F(v)$ liên tục trên V thì tồn tại một phần tử duy nhất $w \in V$ sao cho

$$F(v) = (w,v), \qquad \forall v \in V,$$

nghĩa là $F(v)$ có thể biểu diễn ở dạng một tích vô hướng.

1.8. Bài toán yếu trong không gian Hilbert

1.8.1. Bài toán yếu. Xét không gian Hilbert V. Cho $\alpha(u,v)$ là một dạng song tuyến trên V. Cho $L(v)$ là một phiếm hàm tuyến tính trên V.

Bài toán:

Tìm $u \in V$ thỏa mãn

$$\alpha(u,v) = L(v), \qquad \forall v \in V \qquad (1.8.1)$$

gọi là *bài toán yếu trong không gian Hilbert V*.

1.8.2. Dạng biến phân của bài toán yếu.

Mệnh đề. Nếu dạng song tuyến $\alpha(u,v)$ đối xứng, liên tục trên V và V-eliptic, đồng thời phiếm hàm tuyến tính L(v) liên tục trên V thì bài toán yếu (1.8.1) *tương đương* với bài toán

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v) \qquad (1.8.2)$$

trong đó

$$J(v) := \alpha(v.v) - 2L(v), \qquad \forall v \in V.$$

Bài toán (1.8.2) gọi là dạng biến phân của bài toán (1.8.1).

Chứng minh. Trước hết, với giả thiết $\alpha(u,v)$ đối xứng ta có

$$t \in R: \qquad J(u+tv) = \alpha(u+tv, u+tv) - 2L(u+tv)$$

$$= \alpha(u,u) + 2t\alpha(u,v) + t^2\alpha(v,v) - 2L(u) - 2tL(v)$$

$$\Rightarrow J(u+tv) - J(u) = 2t[\alpha(u,v) - L(v)] + t^2\alpha(v,v). \qquad (1.8.3)$$

Nếu u là nghiệm của bài toán biến phân (1.8.2) thì (1.8.3) chứng tỏ

$$2t[\alpha(u,v) - L(v)] + t^2\alpha(v,v) \geq 0,\ \forall t \in R \Rightarrow [\alpha(u,v) - L(v)]^2 \leq 0,$$

$$\Rightarrow \alpha(u,v) - L(v) = 0, \qquad \forall v \in V$$

Vậy u là nghiệm của bài toán yếu (1.8.1).

Ngược lại, nếu u là nghiệm của bài toán yếu (1.8.1) thì (1.8.3) khi $t = 1$ chứng tỏ

$$J(u+v) - J(u) \geq 0, \quad \forall v \in V \Rightarrow J(u+v) \geq J(u), \quad \forall v \in V.$$

Vậy u là nghiệm của bài toán biến phân (1.8.2).

1.8.3. Sự tồn tại nghiệm của bài toán yếu.Trường hợp $\alpha(u,v)$ đối xứng.

Định lý 1.8.1.

Nếu dạng song tuyến $\alpha(u,v)$ đối xứng, liên tục trên V và V-eliptic, đồng thời phiếm hàm tuyến tính $L(v)$ liên tục trên V thì bài toán (1.8.1) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh. Theo giả thiết, dạng song tuyến $\alpha(u,v)$ đối xứng và V-eliptic nên ta có thể xem nó là một tích vô hướng *mới* trong V, ký hiệu là $(u,v)_\alpha := \alpha(u,v)$. Tập V với tích vô hướng mới ấy và chuẩn

$$\|u\|_\alpha := \sqrt{(u,u)_\alpha} = \sqrt{\alpha(u.u)}, \qquad \forall u \in V \tag{1.8.4}$$

trở thành một không gian Hilbert *mới*, ký hiệu là V_a.

V và V_α là hai không gian Hilbert khác nhau trên cùng một tập nền là không gian vectơ V. Vì $\alpha(u,v)$ còn liên tục trên V nên theo (1.7.10) và (1.7.12) ta có

$$\sqrt{\gamma}\|u\|_V \leq \|u\|_\alpha \leq \sqrt{M}|u\|_V \tag{1.8.5}$$

nghĩa là chuẩn mới tương đương với chuẩn cũ của V.

Bây giờ vì $L(v)$ liên tục trên V, nên theo (1.7.5) ta có hằng số dương K để

$$|L(v)| \leq K\|v\|_V \tag{1.8.6}$$

Kết hợp với (1.8.5) ta suy ra

$$|L(v)| \leq \frac{K}{\sqrt{\gamma}}\|v\|_\alpha \tag{1.8.7}$$

nghĩa là $L(v)$ cũng liên tục trên V_α.

Vậy theo định lý Riesz thì tồn tại u_0 duy nhất thuộc V_α để

$$L(v) = (u_0,v)_\alpha = \alpha(u_0,v), \qquad \forall v \in V_\alpha$$

tức là tồn tại $u_0 \in V$ duy nhất thỏa mãn

$$\alpha(u_0,v) = L(v), \qquad \forall v \in V \tag{1.8.8}$$

. Vậy u_0 là nghiệm duy nhất của (1.8.1).

1.8.4. Trường hợp $\alpha(u,v)$ không đối xứng.

Định lý 1.8.2. (Bổ đề Lax-Milgram(L-M)). Nếu

(i) $\alpha(u,v)$ là một dạng song tuyến liên tục trên V và V-eliptic, (không có giả thiết "đối xứng"),

(ii) L là một phiếm hàm tuyến tính, liên tục trên V,

thì bài toán yếu (1.8.1) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh. Theo giả thiết (ii) L là một phiếm hàm tuyến tính, liên tục trên V, vậy theo định lý Riesz tồn tại $g \in V$ duy nhất sao cho

$$L(v) = (g,v)_V, \qquad \forall v \in V \tag{1.8.9}$$

Theo giả thiết (i) $\alpha(u,v)$ liên tục trên V, vậy tồn tại $M = const > 0$ sao cho

$$|\alpha(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V, \qquad \forall u \in V \quad \forall v \in V.$$

Vậy tại mỗi u xác định thuộc V ta thấy $\alpha(u,v)$ cũng là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên V, nên cũng tồn tại $w \in V$ duy nhất sao cho

$$\alpha(u,v) = (w,v)_V, \qquad \forall v \in V \qquad 1.8.10)$$

Phép tương ứng $u \mapsto w$ xác định một ánh xạ từ V tới V, ký hiệu bởi A. Ta có $Au = w$ và (1.8.10) viết

$$\alpha(u,v) = (Au,v)_V, \qquad \forall v \in V \tag{1.8.11}$$

Dễ thấy A là một ánh xạ tuyến tính và hơn nữa còn liên tục vì thay $v = Au$ trong (1.8.11) ta có

$$\|Au\|_V^2 = |\alpha(u,Au)| \leq M\|u\|_V\|Au\|_V \Rightarrow \|Au\|_V \leq M\|u\|_V. \tag{1.8.11'}$$

Từ (1.8.11) và (1.8.9) ta suy ra: bài toán yếu (1.8.11) tương đương với bài toán:

Tìm $u \in V$ sao cho

$$Au = g.$$

Vậy muốn hoàn thành chứng minh ta chứng minh A là một song ánh từ V lên V.

Trước hết, do giả thiết (i) tồn tại $\gamma > 0$ sao cho

$$\forall v \in V, \quad \gamma\|v\|_V^2 \leq \alpha(v,v) = (Av,v)_V \leq \|Av\|_V\|v\|_V$$

$$\Rightarrow \forall v \in V, \quad \|Av\|_V \geq \gamma\|v\|_V \tag{1.8.12}$$

Cho nên nếu $Av = \theta$ thì $v = \theta$. Vậy A là đơn ánh.

Ta chứng minh tiếp A là toàn ánh. Muốn thế ta chứng minh tập AV đóng và $(AV)^\perp = \emptyset$, trong đó $(AV)^\perp$ là ký kiệu của phần bù trực giao của AV.

Muốn chứng minh AV đóng ta giả sử $v_m \in V$ sao cho dãy $\{w_m = Av_m\} \subset AV$ là một dãy trong V hội tụ đến $w \in V$. Ta phải chứng minh $w \in AV$. Thực vậy, ta có

$$\|w_m - w_n\|_V = \|Av_m - Av_n\|_V = \|A(v_m - v_n)\|_V \geq \gamma\|v_m - v_n\|_V$$

theo (1.8.12). Vậy

$$\|v_m - v_n\|_V \leq \frac{1}{\gamma}\|w_m - w_n\|_V$$

Do đó vì dãy $\{w_m\}$ hội tụ trong V nên nó là một dãy Cauchy trong V, ta suy ra: dãy $\{v_m\}$ cũng là một dãy Cauchy trong V. Vậy $v_m \to v \in V$. Theo (1.8.11')

$$\|Av_m - Av\|_V = \|A(v_m - v)\|_V \leq M\|v_m - v\|_V \to 0 \Rightarrow Av_m \to Av.$$

Do đó $Av = w$. Vậy $w \in AV$ và AV là một tập đóng.

Bây giờ giả sử $v_0 \in (AV)^\perp$. Ta có

$$\gamma\|v_0\|_V^2 \leq \alpha(v_0, v_0) = (Av_0, v_0)_V = 0 \Rightarrow v_0 = \theta$$

Do đó $(AV)^\perp = \emptyset$ và A là một toàn ánh.

Vậy A vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh, nên nó là song ánh từ V lên V. $\Rightarrow$ xong chứng minh bổ đề L-M.

1.8.5. Thí dụ.

Thí dụ 1. Trong không gian Hilbert $V = W_0^1(a, b)$ xét bài toán yếu trên $W_0^1(a, b)$:

$$\beta(u, v) = L(v), \qquad \forall v \in W_0^1(a, b). \tag{1.8.13}$$

trong đó $\beta(u, v)$ là dạng song tuyến ở (1.7.8) và $L(v)$ là phiếm hàm tuyến tính ở (1.7.2).

Ta đã chứng minh được ở mục 1.7.2 rằng $\beta(u, v)$ là dạng song tuyến đối xứng, liên tục trên $W_0^1(a, b)$ và $W_0^1(a, b)$-eliptic và ở mục 1.7.1 rằng phiếm hàm tuyến tính (1.7.2) liên tục trên $W_0^1(a, b)$. Áp dụng định lý 1.8.1 ta suy ra: bài toán (1.8.13), tức là bài toán

$$\int_a^b u'v'dx = \int_a^b fvdx, \qquad \forall v \in W_0^1(a, b) \tag{1.8.14}$$

có nghiệm duy nhất $u \in W_0^1(a, b)$.

Thí dụ 2.

Cho $f = f(x) \in L_2(0, 1)$. Xét bài toán vi phân

$$-u'' + \frac{1}{2}u' = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 0,\ u(1) = 0$$

Nhân vô hướng trong $L_2(0, 1)$ hai vế của phương trình vi phân với $v \in D(0, 1)$ ta được

$$\int_0^1 (-u'' + \frac{1}{2}u')vdx = \int_0^1 fvdx$$

Lấy tích phân từng phần được

$$\int_0^1 (u'v' + \frac{1}{2}u'v)dx = \int_0^1 fvdx, \qquad v \in D(0, 1)$$

Vì D(0,1) trù mật trong $W_0^1(0,1)$ nên có bài toán yếu

$$\int_0^1 (u'v' + \frac{1}{2}u'v)dx = \int_0^1 fvdx, \qquad \forall v \in W_0^1(0,1) \tag{1.8.15}$$

Đặt

$$\alpha(u,v) := \int_0^1 (u'v' + \frac{1}{2}u'v)dx, \qquad L(v) := \int_0^1 fvdx$$

thì bài toán yếu phát biểu

$$\alpha(u,v) = L(v), \qquad \forall v \in W_0^1(0,1)$$

Có thể chứng minh được (xem mục 1.7.1) rằng $L(v)$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $W_0^1(0,1)$, còn α là một dạng song tuyến không đối xứng vì nói chung $u'v \neq v'u$,

$$\int_0^1 (u'v' + \frac{1}{2}u'v)dx \neq \int_0^1 (v'u' + \frac{1}{2}vu')dx$$

Nhưng nó liên tục trên $W_0^!(0,1)$ và $W_0^1(0,10$-eliptic. Thực vậy, ta có

$$|\alpha(u,v)| = |\int_0^1 (u'v' + \frac{1}{2}u'v)dx| \leq \|u'\|_{L_2(0,1)}\|v'\|_{L_2(0,1)} + \frac{1}{2}\|u'\|_{L_2(0,1)}\|v\|_{L_2(0,1)}$$

$$\Rightarrow |\alpha(u,v)| \leq M\|u\|_{W_0^1(0,1)}\|v\|_{W_0^1(0,1)}, \qquad M = const > 0$$

Vậy $\alpha(u,v)$ liên tục trên $W_0^1(0,1)$.

Bây giờ

$$\alpha(u,u) = \int_0^1 (u'^2 + \frac{1}{2}u'u)dx \geq \int_0^1 (u'^2 - \frac{1}{2}|u'u|)dx \geq= \int_0^1 (u'^2 - \frac{1}{4}(u'^2 + u^2))dx$$

$$\alpha(u,u) \geq \int_0^1 (\frac{3}{4}u'^2 - \frac{1}{4}u^2)dx.$$

Với $u \in D(0,1)$ thì $u(0) = 0$, nên khi $x \in [0,1]$ ta có

$$u(x) = \int_0^x u'(t)dt \Rightarrow |u(x)| = |\int_0^x u'(t)dt| \leq \int_0^x |u'(t)|dt \leq \int_0^1 |u'(t)|dt \leq \int_0^1 [u'(t)]^2 dt$$

$$\int_0^1 [u(x)]^2 dx \leq \int_0^1 (\int_0^1 [u'(t)]^2 dt)dx \leq \int_0^1 [u'(t)]^2 dt = \int_0^1 [u'(x)]^2 dx$$

$$\Rightarrow \alpha(u,u) \geq \frac{3}{4}\int_0^1 u^2 dx - \frac{1}{4}\int_0^1 u^2 dx \Rightarrow \alpha(u,u) \geq \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dx$$

$$\Rightarrow \alpha(u,u) \geq \gamma\|u\|^2_{W_0^1(0,1)}, \qquad \forall v \in D(0,1), \qquad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Vì $D(0,1)$ trù mật trong $W_0^1(0,1)$ nên ta suy ra

$$\alpha(u,u) \geq \gamma \|u\|^2_{W_0^1(0,1)}, \qquad \forall v \in W_0^1(0,1).$$

Vậy $\alpha(u,v)$ $W_0^1(0,1)$-eliptic.

Vì $\alpha(u,v)$ không đối xứng nên ta không thể áp dụng định lý 1.8.1, mà phải áp dụng định lý 1.8.2 tức là bổ đề L-M để suy ra kết luận: bài toán yếu (1.8.15) có nghiệm duy nhất.

1.9. Tính gần đúng nghiệm của bài toán yếu

1.9.1. Mở đầu.

Cách tìm nghiệm gần đúng của bài toán yếu (1.8.1) là thay không gian V bằng một không gian con hữu hạn chiều V_N của nó. Bằng cách đó ta sẽ thay một bài toán vô số chiều bằng một bài toán hữu hạn chiều, tức là bằng một bài toán đại số. Nếu không gian con V_N chọn khéo sao cho nó "xấp xỉ" được không gian V thì nghiệm của bài toán đại số vừa nói "xấp xỉ" được nghiệm của bài toán yếu (1.8.1).

1.9.2. Cách xây dựng không gian V_N.

Ta xây dựng N phần tử $\varphi_i,\ i = 1, 2, ..., N$, thuộc V và độc lập tuyến tính, rồi đặt

$$V_N := \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_\text{N}\}$$

Vì $\varphi_i \in V$ nên $V_N \subset V$ và là không gian con của V. Vì các phần tử φ_i độc lập tuyến tính nên V_N có N chiều và nhận họ các $\varphi_i,\ i = 1, 2, ..., N$ là một cơ sở.

Các phần tử φ_i gọi là các *phần tử cơ sở* hay các *phần tử tọa độ*.

1.9.3. Bài toán yếu trên V_N.

Sau khi có V_N ta thay bài toán yếu (1.8.1) trong V bởi cũng bài toán đó trong V_N. Đó là bài toán:

Tìm $w_N \in V_N$ thỏa mãn

$$\alpha(w_N, v) = L(v), \qquad \forall v \in V_N. \tag{1.9.1}$$

Vì V_N có các phần tử cơ sở là $\varphi_i,\ i = 1, 2, ..., N$ nên $v \in V_N$ có dạng $v = \sum_{i=1}^N c_i\varphi_i$, $c_i \in R$.

Do đó ta có một nhận xét:

Nhận xét: Bài toán (1.9.1) tương đương với bài toán:

Tìm $w_N \in V_N$ thỏa mãn

$$\alpha(w_N, \varphi_i) = L(\varphi_i), \qquad \forall \varphi_i, \quad i = 1, 2, ..., N \tag{1.9.2}$$

Chứng minh. 1/ Giả sử có (1.9.1). Vì $\varphi_i \in V_N$ nên (1.9.1) $\Rightarrow$ (1.9.2).

2/ Giả sử có (1.9.2). Vì $v \in V_N$ có dạng $v = \sum_{i=1}^N c_i\varphi_i, \quad c_i \in R$ nên

$$\alpha(w_N, v) = \alpha(w_N, \sum_{i=1}^N c_i\varphi_i) = \sum_{i=1}^N c_i\alpha(w_N, \varphi_i) = \sum_{i=1}^N c_i L(\varphi_i) = L(\sum_{i-1}^N c_i\varphi_i) = L(v)$$

Vậy (1.9.2) $\Rightarrow$ (1.9.1). Xong.

Nghiệm w_N tìm trong V_N nên có dạng

$$w_N = \sum_{j=1}^N c_j\varphi_j \tag{1.9.3}$$

trong đó các hệ số c_j cần xác định sao cho w_N thỏa mãn (1.9.2).

1.9.4. Bài toán đại số xác định c_j. Theo mục trên w_N có dạng (1.9.3) trong đó các c_j được xác định sao cho (1.9.2) thỏa mãn, tức là

$$\alpha(\sum_{j=1}^N c_j\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \qquad i = 1, 2, ..., N$$

hay

$$\sum_{j=1}^N c_j\alpha(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \qquad i = 1, 2, ..., N \tag{1.9.4}$$

Đó là một hệ đại số tuyến tính

$$Bc = F \tag{1.9.5}$$

trong đó ma trận hệ số $B = (B_{ij})$ và vectơ vế phải $F = F_i$ xác định bởi

$$B_{ij} := \alpha(\varphi_j, \varphi_i), \qquad F_i = L(\varphi_i) \tag{1.9.6}$$

còn vectơ ẩn là

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}.$$

Ta nhận thấy

$$\alpha(w_N, w_N) = \alpha(\sum_{j=1}^N c_j\varphi_j, \sum_{i=1}^N c_i\varphi_i) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1^N} c_jc_i\alpha(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N c_jc_iB_{ij} = c^tBc.$$

Do đó khi $Bc = 0$ thì $\alpha(w_N, w_N) = 0 \Rightarrow \|w_N\|_\alpha = 0$. Vì $\alpha(u, v)$ có tính V-eliptic nên từ đó ta suy ra $\|w_N\|_V = 0$. Vậy $w_N = 0, \Rightarrow c = (0, 0, ..., 0)$.

Do đó hệ thuần nhất $Bc = 0$ chỉ có nghiệm tầm thường. Cho nên *hệ đại số (1.9.5) có nghiệm duy nhất.*

Giải hệ (1.9.5) ta được các số c_j. Sau đó (1.9.3) cho nghiệm w_N của (1.9.1) trong không gian V_N. Ta sẽ xem $w_N \approx u$ và hi vọng rằng N càng lớn thì w_N càng "gần" u. Đó là vấn đề đánh giá sai số ta sẽ xét ở tiết sau.

1.10. Vấn đề đánh giá sai số

1.10.1. Kết quả thứ nhất

Giả sử $u \in V$ là nghiệm của bài toán yếu (1.8.1) và $w_N \in V_N$ là nghiệm của bài toán gần đúng (1.9.1), nghĩa là có

$$\alpha(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \qquad \alpha(w_N, v) = L(v), \quad \forall v \in V_N$$

Khi đó $u - w_N$ là sai số. Ta sẽ đánh giá sai số đó theo chuẩn trong V. Muốn thế trước hết ta đánh giá nó theo chuẩn trong V_α tức là đánh giá $\|u - w_N\|_\alpha = \sqrt{\alpha(u - w_N, u - w_N)}$. Sau đó áp dụng (1.8.5) ta suy ra đánh giá $\|u - w_N\|_V$.

Định lý 1.10.1. Giả sử $\alpha(u, v)$ là một dạng song tuyến đối xứng, liên tục trên V và V-eliptic. Khi đó

$$\alpha(u - w_N, u - w_N) \leq \alpha(u - y_N, u - y_N), \qquad \forall y_N \in V_N \tag{1.10.1}$$

Chứng minh. Xét phiếm hàm $\Phi(w)$ xác định tại $w \in V$:

$$\Phi(w) = \alpha(w, w) - 2L(w)$$

Thay trong (1.8.1) lần lượt $v = u \in V$ và $v = \eta \in V$ ta có

$$L(u) = \alpha(u, u), \qquad L(\eta) = \alpha(u, \eta)$$

Do đó

$$\Phi(\eta) - \Phi(u) = \alpha(\eta, \eta) - 2L(\eta) - \alpha(u, u) + 2L(u)$$
$$= \alpha(\eta, \eta) - 2\alpha(u, \eta) - \alpha(u, u) + 2\alpha(u, u) = \alpha(\eta, \eta) - 2\alpha(u, \eta) + \alpha(u, u).$$

Vì $\alpha(u, v)$ đối xứng nên

$$\Phi(\eta) - \Phi(u) = \alpha(\eta - u, \eta - u), \qquad \forall \eta \in V. \tag{1.10.2}$$

Một cách tương tự, ta có

$$\Phi(\eta_N) - \Phi(w_N) = \alpha(\eta_N - w_N, \eta_N - w_N), \qquad \forall \eta_N \in V_N. \tag{1.10.3}$$

Vì $\alpha(\eta_N - w_N, \eta_N - w_N) > 0$ nên (1.10.3) cho

$$\Phi(w_N) \leq \Phi(\eta_N), \qquad \forall \eta_N \in V_N. \tag{1.10.4}$$

Áp dụng lần lượt (1.10.2) trong đó thay $\eta = w_N$,(1.10.4), rồi (1.10.2) trong đó thay $\eta = \eta_N$ ta được

$$\alpha(w_N - u, w_N - u) = \Phi(w_N) - \Phi(u) \le \Phi(\eta_N) - \Phi(u) = \alpha(\eta_N - u, \eta_N - u), \quad \forall \eta_N \in V_N$$

Vậy có (1.10.1).

1.10.2. Kết quả thứ hai.

Định lý 1.10.2. Với giả thiết của định lý 1.10,1 và M, γ là những hằng số dương thỏa mãn

$$|\alpha(u,v)| \le M\|u\|_V\|v\|_V, \qquad \alpha(u,u) \ge \gamma\|u\|_V^2 \tag{1.10.5}$$

ta có

$$\|u - w_N\|_V \le \sqrt{\frac{M}{\gamma}}\|u - y_N\|_V, \qquad \forall y_N \in V_N. \tag{1.10.6}$$

và

$$\|u - w_N\|_V \le \sqrt{\frac{M}{\gamma}} \inf_{y_N \in V_N}\{\|u - y_N\|_V\}. \tag{1.10.7}$$

Chứng minh. Nhờ các công thức (1.10.1) và (1.8.5) ta có

$$\gamma\|u - w_N\|_V^2 \le \alpha(u - w_N, u - w_N) \le \alpha(u - y_N, u - y_N) \le M\|u - y_N\|_V^2, \quad \forall y_N \in V_N.$$

Do đó có (1.10.6), rồi từ đó là (1.10.7).

Vậy *chọn một y_N cụ thể thuộc V_N thì được một đánh giá sai số cụ thể.* Ta nhận thấy y_N có thể là bất kỳ một phần tử nào của V_N. Cho nên ta *nên chọn y_N sao cho $\|u - y_N\|_V$ càng bé càng tốt.*

1.10.3. Chú ý. Tong các chương 2,3,4,5,6 sau bao gồm nội dung chính của tài liệu, ta sẽ áp dụng các kết quả trên vào một số trường hợp cụ thể.