ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
——————-

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ HÈ
NĂM HỌC 2023-2024
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **1**
Lớp học phần: **MAT3500** Ngành học: **KHDL**
Thời gian làm bài: **120 phút** (không kể thời gian phát đề)

Chú ý: Đề gồm 5 câu/2 trang. Không sử dụng tài liệu. Điểm bài kiểm tra này chiếm 60% tổng số điểm của môn học. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1. (2 điểm)

(a) Cho các mệnh đề p, q, và r. Các mệnh đề $p \to (q \wedge r)$ và $(p \to q) \wedge (p \to r)$ có tương đương lôgic không? Tại sao?

(b) Giả sử $x_3x_2x_1x_0$ ($x_i \in \{0,1\}$ với $i \in \{0,1,2,3\}$) là một biểu diễn nhị phân của một số tự nhiên $x \in \mathbb{N}$. (Nghĩa là, $x = (x_3x_2x_1x_0)_2$.) Nếu như ta coi 0 là F và 1 là T, ta có thể biểu diễn một tính chất của x thông qua mệnh đề lôgic với $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ và các toán tử lôgic đã biết. Phương thức tương tự được sử dụng trong quá trình thiết kế các mạch lôgic trong máy tính để thực hiện các phép toán số học một cách nhanh chóng.

Ví dụ, để biểu diễn tính chất "$x = 0$" (chú ý là $0 = (0000)_2$), ta sẽ tìm một mệnh đề phức hợp A của $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ thỏa mãn điều kiện: A đúng khi và chỉ khi $x_3 = x_2 = x_1 = x_0 = 0\,(= \mathsf{F})$. Một mệnh đề thỏa mãn điều kiện trên là $A = \neg x_3 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_0$.

Hãy tìm mệnh đề phức hợp của $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ biểu diễn tính chất "$x \geq 10$".

Câu 2. (2 điểm) Cho số nguyên dương n. Với những giá trị nào của n thì luôn tồn tại các số nguyên không âm a, b thỏa mãn $n = 2a + 11b$? Chứng minh phỏng đoán của bạn bằng phương pháp quy nạp mạnh.

Câu 3. (2 điểm)

(a) Sử dụng Định lý Fermat nhỏ để tính $a_1 = 9^{2024} \bmod 7$, $a_2 = 9^{2024} \bmod 13$, và $a_3 = 9^{2024} \bmod 23$.

(b) Giải hệ phương trình đồng dư

$$x \equiv a_1 \pmod{7} \quad (1)$$
$$x \equiv a_2 \pmod{13} \quad (2)$$
$$x \equiv a_3 \pmod{23} \quad (3)$$

trong đó a_1, a_2, a_3 là các số được tính ở phần (a). Sử dụng kết quả trên và Định lý phần dư Trung Hoa để tính $9^{2024} \bmod 2093$. (Chú ý rằng $2093 = 7 \times 13 \times 23$.)

Câu 4. (2 điểm)

(a) Có bao nhiêu số có ba chữ số chia hết cho 5 hoặc chia hết cho 8?

(b) Có bao nhiêu số có ba chữ số có tổng các chữ số bằng 13?

Câu 5. (2 điểm)

(a) Mỗi phát biểu sau đây là đúng hay sai? Nếu đúng, hãy chứng minh phát biểu đó. Nếu sai, hãy đưa ra một phản ví dụ cụ thể.

- (P1) Mọi đồ thị hai phần đều là đồ thị phẳng.
- (P2) Mọi đồ thị hai phần G có sắc số $\chi(G)$ bằng hai.
- (P3) Mọi đồ thị đầy đủ K_n ($n \geq 1$) có đường đi Euler.
- (P4) Một đồ thị G là đồ thị hai phần khi và chỉ khi tổng bậc của tất cả các đỉnh trong đồ thị là một số chẵn.
- (P5) Nếu một đồ thị G là đồ thị phẳng thì G có đường đi Euler.

(b) Chứng minh rằng trong một đơn đồ thị vô hướng G bất kỳ gồm $n \geq 2$ đỉnh, luôn tìm được hai đỉnh có cùng bậc.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ HÈ, NĂM HỌC 2023-2024
Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **1**
Lớp học phần: **MAT3500** Ngành học: **KHDL**

Lời giải 1. [**2** điểm]

(a) $p \to (q \wedge r)$ và $(p \to q) \wedge (p \to r)$ tương đương lôgic. Cụ thể $$\begin{aligned} p \to (q \wedge r) &\equiv \neg p \vee (q \wedge r) && p \to q \equiv \neg p \vee q \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) && \text{Luật phân phối} \\ &\equiv (p \to q) \wedge (p \to r) && p \to q \equiv \neg p \vee q \end{aligned}$$	**1**
(b) Với mọi số $x \geq 10$, trong biểu diễn nhị phân $x_3x_2x_1x_0$ của x, ta cần $x_3 = 1$ và $x_1 = 1$ hoặc $x_3 = 1$ và $x_2 = 1$. (Khi đó, trong trường hợp thứ nhất, $x = x_3 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 \geq 2^3 + 2^1 = 10$. Trong trường hợp thứ hai, $x = x_3 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 \geq 2^3 + 2^2 = 12 > 10$.) Do đó, ta cần tìm một biểu thức B thỏa mãn điều kiện: B đúng khi và chỉ khi $x_3 = x_1 = 1$ $(= \mathsf{T})$ hoặc $x_3 = x_2 = 1$ $(= \mathsf{T})$. Một mệnh đề thỏa mãn điều kiện trên là $B = x_3 \wedge (x_2 \vee x_1)$.	**1**

Lời giải 2. [**2** điểm]

Ta chứng minh bằng quy nạp mạnh rằng phát biểu $P(n) =$ "Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $n = 2a + 11b$" đúng với mọi $n \geq 10$.	**0.5**
Bước cơ sở: Ta chứng minh $P(10)$, $P(11)$, $P(12)$, và $P(13)$ đúng. Thật vậy, ta có $$\begin{aligned} 10 &= 2 \cdot 5 + 11 \cdot 0, \\ 11 &= 2 \cdot 0 + 11 \cdot 1, \\ 12 &= 2 \cdot 6 + 11 \cdot 0, \\ 13 &= 2 \cdot 1 + 11 \cdot 1. \end{aligned}$$	**0.5**
Bước quy nạp: Giả sử với số nguyên cố định $k \geq 13$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{10, \dots, k\}$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh tồn tại $c, d \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $k + 1 = 2c + 11d$. Thật vậy, ta có $k + 1 = (k-3) + 2 \cdot 2$. Do $k \geq 13$, ta có $10 \leq k - 3 \leq k$. Theo giả thiết quy nạp, $P(k-3)$ đúng, nghĩa là tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $k - 3 = 2a + 11b$. Do đó, $k + 1 = (k-3) + 2 \cdot 2 = 2(a+2) + 11b$. Chọn $c = a + 2 \in \mathbb{N}$ và $d = b \in \mathbb{N}$, ta có $P(k+1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp mạnh, ta có điều phải chứng minh.	**1**

Lời giải 3. [**2** điểm]

<table>
<tr><td>

(a) Theo định lý Fermat nhỏ, với p là số nguyên tố và a là số nguyên không chia hết cho p, ta có $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Áp dụng định lý Fermat nhỏ, ta có $9^6 \equiv 1 \pmod 7$, $9^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, và $9^{22} \equiv 1 \pmod{23}$. Do đó,

$a_1 = 9^{2024} \bmod 7 = [(9^6)^{337} \cdot 9^2] \bmod 7 = 9^2 \bmod 7 = (9 \bmod 7)^2 \bmod 7 = 2^2 \bmod 7 = 4 \bmod 7 = 4,$
$a_2 = 9^{2024} \bmod 13 = [(9^{12})^{168} \cdot 9^8] \bmod 13 = 9^8 \bmod 13 = (9^2 \bmod 13)^4 \bmod 13 = 3^4 \bmod 13 = 3,$
$a_3 = 9^{2024} \bmod 23 = (9^{22})^{92} \bmod 23 = 1.$

</td><td>

0.5

</td></tr>
<tr><td>

(b) Ta giải hệ phương trình sau

$$x \equiv 4 \pmod 7 \quad (1)$$
$$x \equiv 3 \pmod{13} \quad (2)$$
$$x \equiv 1 \pmod{23} \quad (3)$$

Cách 1: Sử dụng chứng minh của Định lý phần dư Trung Hoa.
Đặt $m_1 = 7$, $m_2 = 13$, $m_3 = 23$, và $m = m_1 m_2 m_3 = 7 \times 13 \times 23 = 2093$. Ta có

- $M_1 = m/m_1 = 13 \times 23 = 299$ và $y_1 = 17$ là một nghịch đảo của M_1 theo môđun $m_1 = 7$.
- $M_2 = m/m_2 = 7 \times 23 = 161$ và $y_2 = -5$ là một nghịch đảo của M_2 theo môđun $m_2 = 13$.
- $M_3 = m/m_3 = 7 \times 13 = 91$ và $y_3 = -1$ là một nghịch đảo của M_3 theo môđun $m_3 = 23$.

Nghiệm của hệ phương trình là mọi số nguyên x thỏa mãn

$$\begin{aligned} x &\equiv \sum_{i=1}^{3} a_i y_i M_i \pmod{2093} \\ &\equiv 4 \cdot 17 \cdot 299 + 3 \cdot (-5) \cdot 161 + 1 \cdot (-1) \cdot 91 \pmod{2093} \\ &\equiv 17826 \pmod{2093} \\ &\equiv 1082 \pmod{2093}. \end{aligned}$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp thay ngược.
Từ (1), tồn tại $t \in \mathbb{Z}$ sao cho $x = 7t + 4$. Thay vào (2), ta có $7t + 4 \equiv 3 \pmod{13}$, suy ra $t \equiv -2 \pmod{13}$. Do đó, tồn tại $u \in \mathbb{Z}$ sao cho $t = 13u - 2$. Suy ra $x = 7t + 4 = 7(13u - 2) + 4 = 91u - 10$.
Thay vào (3), ta có $91u - 10 \equiv 1 \pmod{23}$, suy ra $u \equiv 12 \pmod{23}$. Do đó, tồn tại $v \in \mathbb{Z}$ sao cho $u = 23v + 12$. Suy ra $x = 91u - 10 = 91(23v + 12) - 10 = 2093v + 1082$.
Do đó, nghiệm của hệ phương trình có dạng $x = 2093v + 1082$ với $v \in \mathbb{Z}$, hay nghiệm của hệ phương trình là các số nguyên x thỏa mãn $x \equiv 1082 \pmod{2093}$.

</td><td>

1

</td></tr>
</table>

Theo phần (a), 9^{2024} cũng là một nghiệm của hệ phương trình đã cho. Do đó, theo Định lý phần dư Trung Hoa, $9^{2024} \equiv 1082 \pmod{2093}$, hay $9^{2024} \bmod 2093 = 1082$.	**0.5**

Lời giải 4. **[2 điểm]**

(a) Do x là số có ba chữ số, ta có $100 \leq x \leq 999$. Gọi $A = \{x \mid (x \in \mathbb{N}) \land (100 \leq x \leq 999) \land (x \text{ chia hết cho } 5)\}$ và $B = \{x \mid (x \in \mathbb{N}) \land (100 \leq x \leq 999) \land (x \text{ chia hết cho } 8)\}$. Ta cần tính $\lvert A \cup B \rvert$. Theo nguyên lý bù trừ, $\lvert A \cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A \cap B\rvert$. Ta có $$\begin{aligned} \lvert A\rvert &= \lvert\{x \mid (x \in \mathbb{N}) \land (100 \leq x \leq 999) \land (x \text{ chia hết cho } 5)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \land (100 \leq 5k \leq 999)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \land (\lceil 100/5 \rceil \leq k \leq \lfloor 999/5 \rfloor)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \land (20 \leq k \leq 199)\}\rvert \\ &= 180. \\ \lvert B\rvert &= \lvert\{x \mid (x \in \mathbb{N}) \land (100 \leq x \leq 999) \land (x \text{ chia hết cho } 8)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \land (100 \leq 8k \leq 999)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \land (\lceil 100/8 \rceil \leq k \leq \lfloor 999/8 \rfloor)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \land (13 \leq k \leq 124)\}\rvert \\ &= 112. \\ \lvert A \cap B\rvert &= \lvert\{x \mid (x \in \mathbb{N}) \land (100 \leq x \leq 999) \land (x \text{ chia hết cho cả 5 và 8})\}\rvert \\ &= \lvert\{x \mid (x \in \mathbb{N}) \land (100 \leq x \leq 999) \land (x \text{ chia hết cho } 40)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \land (100 \leq 40k \leq 999)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \land (\lceil 100/40 \rceil \leq k \leq \lfloor 999/40 \rfloor)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \land (3 \leq k \leq 24)\}\rvert \\ &= 22. \end{aligned}$$ Do đó, $\lvert A \cup B\rvert = 180 + 112 - 22 = 270$.	**1**

(b) Gọi $x = x_1x_2x_3$ là một số có ba chữ số, trong đó $x_i \in \{0, \dots, 9\}$ $(i = 1, 2, 3)$ và $x_1 \neq 0$. Ta cần tính $|A|$ với **1**

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1 + x_2 + x_3 = 13) \wedge (1 \leq x_1 \leq 9) \wedge (x_2 \leq 9) \wedge (x_3 \leq 9)\}.$$

Cách 1: Sử dụng nguyên lý bù trừ.
Đặt $x_1' = x_1 - 1$. Do $1 \leq x_1 \leq 9$, ta có $0 \leq x_1' \leq 8$. Ta cũng có $|A| = |A'|$ với

$$A' = \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 12) \wedge (x_1' \leq 8) \wedge (x_2 \leq 9) \wedge (x_3 \leq 9)\}.$$

Đặt

$$\begin{aligned}
U &= \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 12)\},\\
A_1' &= \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 12) \wedge (x_1' \leq 8)\},\\
A_2' &= \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 12) \wedge (x_2 \leq 9)\},\\
A_3' &= \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 12) \wedge (x_3 \leq 9)\}.
\end{aligned}$$

Ta có $A' = A_1' \cap A_2' \cap A_3'$. Thêm vào đó, ta cũng có A_1', A_2', A_3' là các tập con của U và

$$\begin{aligned}
\overline{A_1'} &= U \setminus A_1' = \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 12) \wedge (x_1' \geq 9)\},\\
\overline{A_2'} &= U \setminus A_2' = \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 12) \wedge (x_2 \geq 10)\},\\
\overline{A_3'} &= U \setminus A_3' = \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 12) \wedge (x_3 \geq 10)\}.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng $|A'| = |U| - |\overline{A'}| = |U| - |\overline{A_1' \cap A_2' \cap A_3'}| = |U| - |\overline{A_1'} \cup \overline{A_2'} \cup \overline{A_3'}|$. (Luật De Morgan cho ba tập hợp.) Do tổng của hai số lớn hơn hoặc bằng 9 bất kỳ luôn lớn hơn 13, ta có $\overline{A_i'} \cap \overline{A_j'} = \emptyset$ với $1 \leq i < j \leq 3$. Do đó, $|\overline{A_1'} \cup \overline{A_2'} \cup \overline{A_3'}| = |\overline{A_1'}| + |\overline{A_2'}| + |\overline{A_3'}|$. Suy ra $|A'| = |U| - (|\overline{A_1'}| + |\overline{A_2'}| + |\overline{A_3'}|) = C_{12+3-1}^{3-1} - (C_{3+3-1}^{3-1} + C_{2+3-1}^{3-1} + C_{2+3-1}^{3-1}) = 69$.

Cách 2: Sử dụng hàm sinh. Ta định nghĩa $G(x) = (x + x^2 + \cdots + x^9)(1 + x + \cdots + x^9)^2$. Từ định nghĩa của A và $G(x)$, ta có $|A|$ chính là hệ số của x^{12} trong khai triển của $G(x)$. Ta có

$$\begin{aligned}
G(x) &= (x + x^2 + \cdots + x^9)(1 + x + \cdots + x^9)^2\\
&= x(1 + x + \cdots + x^8)(1 + x + \cdots + x^9)^2\\
&= x \cdot \frac{1 - x^9}{1 - x} \cdot \left(\frac{1 - x^{10}}{1 - x}\right)^2\\
&= x(1 - x^9)(1 - x^{10})^2(1 - x)^{-3}.
\end{aligned}$$

Ta có $(1 - x)^{-3} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{-3}^r (-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r C_{-3}^r x^r$. Do đó, hệ số của x^r $(r \geq 0)$ trong khai triển của $(1 - x)^{-3}$ là $(-1)^r C_{-3}^r = (-1)^r[(-1)^r C_{3+r-1}^r] = C_{r+2}^r$.
Chú ý rằng hệ số của x^{13} trong khai triển của $G(x)$ chính bằng hệ số của x^{12} trong khai triển của $(1 - x^9)(1 - x^{10})^2(1 - x)^{-3} = (1 - x^9 - 2x^{10} + 2x^{19} + x^{20} - x^{29})(1 - x)^{-3}$. Để tạo thành x^{12}, ta có thể nhân tương ứng x^0, x^9 hoặc x^{10} trong $(1 - x^9 - 2x^{10} + 2x^{19} + x^{20} - x^{29})$ với x^{12}, x^3, hoặc x^2 trong khai triển của $(1 - x)^{-3}$. Kết quả cuối cùng là $C_{14}^{12} - C_5^3 - 2C_4^2 = 69$.

Lời giải 5. **[2 điểm]**

(a) (P1) **Mọi đồ thị hai phần đều là đồ thị phẳng.** **Sai.** Ví dụ $K_{3,3}$ là đồ thị hai phần nhưng không là đồ thị phẳng. (P2) **Mọi đồ thị hai phần G có sắc số $\chi(G)$ bằng hai.** **Đúng.** Nếu $G = (V_1 \cup V_2, E)$ là đồ thị hai phần thì có thể sử dụng một màu để tô màu các đỉnh trong V_1 và một màu khác để tô màu các đỉnh trong V_2. Do đó, $\chi(G) \leq 2$. Thêm vào đó, với mọi đồ thị hai phần có ít nhất một cạnh, ta không thể tô màu đồ thị đó bằng một màu. Suy ra $\chi(G) = 2$ nếu G là đồ thị hai phần. (P3) **Mọi đồ thị đầy đủ K_n ($n \geq 1$) có đường đi Euler.** **Sai.** Ví dụ đồ thị K_4 có 4 đỉnh bậc lẻ và do đó không có đường đi Euler. (P4) **Một đồ thị G là đồ thị hai phần khi và chỉ khi tổng bậc của tất cả các đỉnh trong đồ thị là một số chẵn.** **Sai.** Ví dụ, đồ thị C_3 có tổng bậc của tất cả các đỉnh trong đồ thị là một số chẵn nhưng không là đồ thị hai phần. (Mọi đơn đồ thị vô hướng đều có tổng bậc của tất cả các đỉnh trong đồ thị là một số chẵn.) (P5) **Nếu một đồ thị G là đồ thị phẳng thì G có đường đi Euler.** **Sai.** Ví dụ, đồ thị K_4 là đồ thị phẳng nhưng không có đường đi Euler.	**1**
(b) Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại một đồ thị G gồm n đỉnh trong đó không có hai đỉnh nào có cùng bậc. Do G là đơn đồ thị có $n \geq 2$ đỉnh, bậc của mỗi đỉnh thuộc tập $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Do không có hai đỉnh nào cùng bậc, tồn tại các đỉnh u và v có bậc lần lượt là 0 và $n-1$. Do v có bậc $n-1$, v là đỉnh kề với tất cả các đỉnh khác trong G, nghĩa là v cũng phải kề với u. Tuy nhiên, do bậc của u bằng 0, u không kề với bất kỳ đỉnh nào khác trong G. Đây là một mâu thuẫn.	**1**

Hà Nội, ngày 26 tháng 07 năm 2024
NGƯỜI LÀM ĐÁP ÁN
(ký và ghi rõ họ tên)

Hoàng Anh Đức