

# COPYRIGHT NOTICE

## THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

### COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-07-09

### BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-07-09



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

# VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

## Quy nạp và Hệ quy

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học  
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội  
[hoanganhduc@hus.edu.vn](mailto:hoanganhduc@hus.edu.vn)



# Nội dung



## Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

### Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

### Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

### References

## Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

## Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

# Quy nạp toán học

Giới thiệu



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

2

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

- *Quy nạp toán học (mathematical induction)* là một kỹ thuật chứng minh cực kỳ quan trọng
- Quy nạp toán học được sử dụng để chứng minh các kết quả về những đối tượng rời rạc khác nhau
  - độ phức tạp của thuật toán
  - tính đúng đắn của một số chương trình máy tính
  - các định lý về đồ thị và cây
- Ta sẽ giới thiệu một số dạng quy nạp toán học
  - *Quy nạp toán học yếu (Weak Mathematical Induction)*, hay còn gọi là *Nguyên lý Thứ nhất của Quy nạp toán học (The First Principle of Mathematical Induction)*
  - *Quy nạp toán học mạnh (Strong Mathematical Induction)* hay còn gọi là *Nguyên lý Thứ hai của Quy nạp toán học (The Second Principle of Mathematical Induction)*
- Tính đúng đắn của phương pháp quy nạp bắt nguồn từ

**Tiên đề 1: Tính chất sắp thứ tự tốt**

*Mọi tập con khác rỗng của tập các số nguyên dương có một phần tử nhỏ nhất*

# Quy nạp toán học

## Quy nạp yếu



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

3

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

## Nguyên lý quy nạp yếu

Để *chứng minh*  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ , chúng ta thực hiện hai bước

- *Bước cơ sở (basis step)*: Chỉ ra mệnh đề  $P(1)$  đúng
- *Bước quy nạp (inductive step)*: Chứng minh mệnh đề  $P(k) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi số nguyên dương  $k$ 
  - Giả thiết  $P(k)$  đúng, chứng minh  $P(k+1)$  đúng
  - Giả thiết  $P(k)$  đúng được gọi là *giả thiết quy nạp (inductive hypothesis hoặc induction hypothesis)*

Theo ngôn ngữ logic,

$$(P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (P(k) \rightarrow P(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$$

- Chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$  bằng phương pháp quy nạp
  - (1) **Bước cơ sở:** Chứng minh  $P(1)$  đúng
  - (2) **Bước quy nạp:** Chứng minh  $P(k) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Theo định nghĩa của toán tử logic “ $\rightarrow$ ”, ta cần chứng minh rằng  **$P(k+1)$  không thể sai khi  $P(k)$  đúng**. Điều này có thể được thực hiện bằng cách **giả thiết là  $P(k)$  đúng và chứng minh rằng với giả thiết đó  $P(k+1)$  cũng đúng**.
    - Chú ý rằng ở đây **ta không giả thiết  $P(k)$  đúng với mọi  $k \in \mathbb{Z}^+$** .
- Sau khi hoàn thành bước cơ sở và bước quy nạp:
  - Từ bước cơ sở, ta biết rằng  $P(1)$  đúng
  - Từ bước quy nạp và  $P(1)$  đúng, ta biết rằng  $P(2)$  đúng
  - Từ bước quy nạp và  $P(2)$  đúng, ta biết rằng  $P(3)$  đúng
  - ...
  - Từ bước quy nạp và  $P(n-1)$  đúng, ta biết rằng  $P(n)$  đúng (với bất kỳ số nguyên dương  $n$ )



## Chứng minh (Quy nạp yếu là đúng).

- Giả sử  $P(1)$  đúng và với mọi  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $P(k) \rightarrow P(k+1)$  đúng. Ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$  bằng phản chứng
- Giả sử tồn tại  $n \in \mathbb{Z}^+$  sao cho  $P(n)$  sai. Do đó, tập  $S = \{n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } P(n) \text{ sai}\} \subseteq \mathbb{Z}^+$  là tập khác rỗng.
- Theo Tiên đề 1,  $S$  có một phần tử nhỏ nhất  $m$ . Do  $P(1)$  đúng,  $m \neq 1$  và do đó  $m > 1$ , suy ra  $m - 1 \in \mathbb{Z}^+$
- Do  $m - 1 < m$ ,  $m - 1 \notin S$ , và do đó  $P(m - 1)$  đúng
- Do  $P(k - 1) \rightarrow P(k)$  đúng với mọi  $k \in \mathbb{Z}^+$ , ta có  $P(m - 1) \rightarrow P(m)$  đúng.
- Kết hợp với  $P(m - 1)$  đúng, ta có  $P(m)$  đúng. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của  $m$ . Do đó  $P(n)$  đúng với mọi số nguyên dương  $n$



# Quy nạp toán học

Chọn bước cơ sở



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

6

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

Khi sử dụng quy nạp toán học, không nhất thiết cần bắt đầu với  $P(1)$  ở bước cơ sở

## Nguyên lý quy nạp yếu (tổng quát)

Để *chứng minh*  $\forall n \geq b P(n)$  với  $n \in \mathbb{Z}$  và  $b$  là số nguyên cho trước, chúng ta thực hiện hai bước

- *Bước cơ sở (basis step)*: Chỉ ra mệnh đề  $P(b)$  đúng
- *Bước quy nạp (inductive step)*: Chứng minh mệnh đề  $P(k) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi số nguyên  $k \geq b$

Theo ngôn ngữ logic,

$$(P(b) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq b} (P(k) \rightarrow P(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq b} P(n),$$

trong đó  $\mathbb{Z}^{\geq b} = \{m \mid m \in \mathbb{Z} \text{ và } m \geq b\}$  (chú ý là  $\mathbb{Z}^{\geq 1} = \mathbb{Z}^+$ )



# Quy nạp toán học

## Mẫu trình bày chứng minh quy nạp



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

### Quy nạp toán học

Giới thiệu

7

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

### Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

### References

- (1) Mô tả điều cần chứng minh dưới dạng “với mọi  $n \geq b$ ,  $P(n)$ ” với  $b$  là số nguyên cố định nào đó
  - “ $P(n)$  với mọi số nguyên dương  $n$ ”  $\Rightarrow$  chọn  $b = 1$
  - “ $P(n)$  với mọi số nguyên không âm  $n$ ”  $\Rightarrow$  chọn  $b = 0$
  - Với một số phát biểu, cần xác định giá trị phù hợp của  $b$  bằng cách kiểm tra giá trị chân lý của  $P(n)$  với một số giá trị nhỏ của  $n$
- (2) Viết cụm từ “Bước cơ sở.” Sau đó chỉ ra  $P(b)$  là đúng. Hãy cẩn thận chọn đúng giá trị của  $b$
- (3) Viết cụm từ “Bước quy nạp.” và phát biểu một cách rõ ràng giả thiết quy nạp dưới dạng “Giả sử rằng  $P(k)$  đúng với một số nguyên cố định  $k \geq b$  nào đó”
- (4) Phát biểu điều cần chứng minh với giả thiết  $P(k)$  đúng, nghĩa là, phát biểu cụ thể  $P(k+1)$
- (5) Chứng minh  $P(k+1)$  đúng sử dụng giả thiết  $P(k)$  đúng
- (6) Xác định rõ ràng phần kết của bước quy nạp, ví dụ như bằng cách viết “Bước quy nạp đến đây là hoàn tất.”
- (7) Sau khi hoàn thành bước cơ sở và bước quy nạp, phát biểu kết luận “Bằng phương pháp quy nạp, ta đã chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi số nguyên  $n$  thỏa mãn  $n \geq b$ .”

# Quy nạp toán học

## Chú ý



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

8

- Quy nạp toán học có thể được sử dụng để chứng minh một giả thuyết khi giả thuyết này đã được thành lập (và đúng). Tuy nhiên, quy nạp toán học *không cung cấp ý tưởng giải thích tại sao các định lý lại đúng*
- Việc *kiểm tra phát biểu cần chứng minh với một số giá trị nhỏ của  $n$*  trước khi đi vào chứng minh có thể rất hữu ích. Thông thường, các ví dụ nhỏ có thể giúp ta nhận ra các khía cạnh dễ nhầm lẫn của phát biểu hoặc nhận ra tại sao phát biểu lại đúng trong trường hợp tổng quát
- Thông thường, bước chứng minh  $P(k+1)$  với giả thiết  $P(k)$  là bước khó nhất trong toàn bộ chứng minh quy nạp. Hãy *chắc chắn rằng chứng minh của bạn đúng với mọi  $k \geq b$* , nhất là với các giá trị nhỏ của  $k$ , thậm chí là cả  $k = b$
- Nếu bạn *không sử dụng giả thiết  $P(k)$  trong chứng minh  $P(k+1)$* , thì có thể có điều gì đó sai, hoặc ít nhất chứng minh của bạn không thực sự là chứng minh quy nạp

# Quy nạp toán học

Ví dụ



## Ví dụ 1

Ta chứng minh vị từ  $P(n)$  sau đúng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **Bước cơ sở.**  $P(1)$  đúng, do vế trái bằng 1 và vế phải bằng  $\frac{1(1+1)}{2} = 1$
- **Bước quy nạp.** Giả sử  $P(k)$  đúng với một số nguyên cố định  $k \geq 1$  nào đó, nghĩa là  $\sum_{i=1}^k i = k(k+1)/2$ . Ta chứng minh  $P(k+1)$  đúng, nghĩa là chứng minh  $\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1)(k+2)/2$ . Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^k i + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1)(k+2)/2\end{aligned}$$

tách tổng

giả thiết quy nạp

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

9

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm đệ nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp đệ nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

# Quy nạp toán học

Ví dụ



## Ví dụ 2

Ta chứng minh vị từ  $P(n)$  sau đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \text{ với số thực } r \neq 1 \text{ bất kỳ cho trước}$$

- **Bước cơ sở.**  $P(0)$  đúng, do vế trái bằng 1 và vế phải bằng  $(r^1 - 1)/(r - 1) = 1$
- **Bước quy nạp.** Giả sử  $P(k)$  đúng với một số nguyên cố định  $k \geq 0$  nào đó, nghĩa là  $\sum_{i=0}^k r^i = (r^{k+1} - 1)/(r - 1)$ . Ta chứng minh  $P(k + 1)$  đúng, nghĩa là chứng minh

$$\sum_{i=0}^{k+1} r^i = (r^{k+2} - 1)/(r - 1)$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \sum_{i=0}^k r^i + r^{k+1}$$

tách tổng

$$= \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} + r^{k+1}$$

giả thiết quy nạp

$$= (r^{k+2} - 1)/(r - 1)$$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

10

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

## Ví dụ 3

Ta chứng minh với mọi số nguyên  $n \geq 0$ , vị từ  $P(n)$  sau đúng

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ 0 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

- **Bước cơ sở:**  $P(0)$  đúng, do vế trái  $\sum_{i=0}^0 (-1)^i = (-1)^0 = 1$  và vế phải bằng 1 (vì 0 là số chẵn)
- **Bước quy nạp:** Giả sử  $P(k)$  đúng với một số nguyên cố định  $k \geq 0$  nào đó, nghĩa là

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ 0 & \text{nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Ta chứng minh  $P(k+1)$  đúng, nghĩa là chứng minh

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k+1 \text{ chẵn} \\ 0 & \text{nếu } k+1 \text{ lẻ} \end{cases}$$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

11

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

# Quy nạp toán học

Ví dụ



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i &= \sum_{i=0}^k (-1)^i + (-1)^{k+1} \\ &= \begin{cases} 1 + (-1)^{k+1} & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ 0 + (-1)^{k+1} & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 + (-1)^{k+1} & \text{nếu } k+1 \text{ lẻ} \\ 0 + (-1)^{k+1} & \text{nếu } k+1 \text{ chẵn} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 + (-1) & \text{nếu } k+1 \text{ lẻ} \\ 0 + 1 & \text{nếu } k+1 \text{ chẵn} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } k+1 \text{ lẻ} \\ 1 & \text{nếu } k+1 \text{ chẵn} \end{cases}\end{aligned}$$

tách tổng

giả thiết quy nạp

$k$  chẵn  $\Leftrightarrow k+1$  lẻ

12

# Quy nạp toán học

Ví dụ



Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để giải các bài tập sau

## Bài tập 1

Chứng minh với mọi số nguyên  $n \geq 0$ ,

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

## Bài tập 2

Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n \geq 4$ , ta có  $2^n \geq n^2$

## Bài tập 3

Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  “đủ lớn”, ta có  $2^n \geq n^3$   
(**Gợi ý:** Với bài tập này, trước tiên bạn cần tìm được một số nguyên  $b$  và chứng minh bất đẳng thức đã cho đúng với mọi  $n \geq b$ )

## Bài tập 4

Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n \geq 2$ , các tập  $A_1, A_2, \dots, A_n$  thỏa mãn  $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

13

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

# Quy nạp toán học

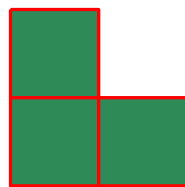
Ví dụ



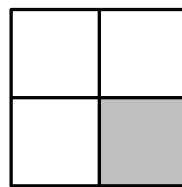
Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để giải các bài tập sau

## Bài tập 5

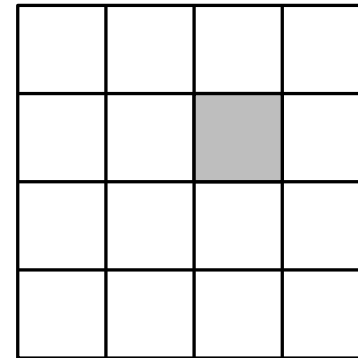
Chứng minh rằng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$ , ta có thể phủ kín bàn cờ không hoàn chỉnh kích thước  $2^n \times 2^n$  với một ô vuông bị loại bỏ bằng các khối hình chữ **L** như trong hình dưới đây sao cho không có hai khối nào chồng lên nhau<sup>1</sup>



(a)



(b)



(c)

**Hình:** Phủ kín các bàn cờ, ví dụ như (b) hoặc (c), bằng các khối hình chữ **L** như ở (a)

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

14

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

<sup>1</sup> Bạn có thể thử phủ kín bàn cờ  $8 \times 8$  ở



## Nguyên lý quy nạp mạnh

Để *chứng minh*  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ , chúng ta thực hiện hai bước

- **Bước cơ sở (basis step):** Chỉ ra mệnh đề  $P(1)$  đúng
- **Bước quy nạp (inductive step):** Chứng minh mệnh đề  $(P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi số nguyên dương  $k$ 
  - Giả thiết  $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$  đúng, chứng minh  $P(k+1)$  đúng
  - Giả thiết  $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$  đúng được gọi là *giả thiết quy nạp*

Theo ngôn ngữ logic,

$$(P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (\bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow P(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n),$$

trong đó  $\bigwedge_{j=1}^k P(j) = P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$

Tương tự như với quy nạp yếu, ở bước cơ sở ta không nhất thiết cần bắt đầu từ  $P(1)$

## Nguyên lý quy nạp mạnh (tổng quát)

Để *chứng minh*  $\forall n \geq b P(n)$  với  $n \in \mathbb{Z}$  và  $b$  là số nguyên cho trước, chúng ta thực hiện hai bước

- **Bước cơ sở (basis step):** Chỉ ra mệnh đề  $P(b)$  đúng
- **Bước quy nạp (inductive step):** Chứng minh mệnh đề  $(P(b) \wedge P(b+1) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi số nguyên  $k \geq b$

Theo ngôn ngữ logic,

$$(P(b) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq b} (\bigwedge_{j=b}^k P(j) \rightarrow P(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq b} P(n)$$

Thêm vào đó, thay vì chỉ chứng minh  $P(b)$  đúng, ta có thể làm nhiều hơn ở bước cơ sở

## Nguyên lý quy nạp mạnh (tổng quát)

Để *chứng minh*  $\forall n \geq b P(n)$  với  $n \in \mathbb{Z}$  và  $b$  là số nguyên cho trước, chúng ta thực hiện hai bước

- **Bước cơ sở (basis step):** Chỉ ra các mệnh đề  $P(b)$ ,  $P(b+1), \dots, P(b+j)$  đúng, với  $j$  là một số nguyên dương cố định nào đó
- **Bước quy nạp (inductive step):** Chứng minh mệnh đề  $(P(b) \wedge P(b+1) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi số nguyên  $k \geq b+j$

Theo ngôn ngữ logic,

$$\left( \bigwedge_{i=0}^j P(b+i) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq b+j} \left( \bigwedge_{i=b}^k P(i) \rightarrow P(k+1) \right) \right) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq b} P(n)$$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

17

35



- Về mặt hình thức, quy nạp mạnh và quy nạp yếu *khác nhau ở giả thiết quy nạp*: ở quy nạp yếu ta chỉ giả thiết  $P(k)$  đúng, còn ở quy nạp mạnh ta giả thiết tất cả các mệnh đề  $P(1), P(2), \dots, P(k)$  đều đúng
- *Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương về mặt lôgic*, nghĩa là, quy nạp yếu đúng khi và chỉ khi quy nạp mạnh cũng đúng
- Nếu bạn có thể trực tiếp chứng minh  $P(k+1)$  với giả thiết  $P(k)$  đúng, *không nên dùng quy nạp yếu*
- Ngược lại, nếu bạn có thể chứng minh  $P(k+1)$  từ giả thiết  $P(j)$  đúng với mọi  $j \leq k$ , nhưng không rõ làm sao để trực tiếp chứng minh  $P(k) \rightarrow P(k+1)$ , *không nên dùng quy nạp mạnh*



## Ví dụ 4

Cho vị từ  $P(n)$ :

*$n$  viết được dưới dạng tích của một hoặc nhiều số nguyên tố*

Ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 2} P(n)$  bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở.**  $P(2)$  đúng, vì 2 có thể được biểu diễn dưới dạng tích của một số nguyên tố—chính nó
- **Bước quy nạp.** Giả sử  $P(j)$  đúng với mọi số nguyên  $j$  thỏa mãn  $2 \leq j \leq k$  với  $k \geq 2$  là số nguyên cố định nào đó. Ta chứng minh  $P(k+1)$  đúng. Thật vậy,
  - Nếu  $k+1$  là số nguyên tố,  $P(k+1)$  đúng do  $k+1$  có thể được biểu diễn dưới dạng tích của một số nguyên tố—chính nó
  - Nếu  $k+1$  là hợp số, ta có thể biểu diễn  $k+1 = ab$  với  $a, b$  là các số nguyên dương thỏa mãn  $2 \leq a \leq b < k+1$ . Theo giả thiết quy nạp, cả  $a$  và  $b$  đều có thể được biểu diễn dưới dạng tích của các số nguyên tố, và do đó  $k+1$  cũng thế

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

19

## Ví dụ 5

Cho vị từ  $P(n)$ :

$$n = 4a + 5b \text{ với } a, b \in \mathbb{Z}$$

Ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 12} P(n)$  bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở.** Ta chứng minh  $P(12), P(13), P(14), P(15)$  đều đúng. Thật vậy,  $12 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0$ ,  $13 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1$ ,  $14 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2$ , và  $15 = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3$
- **Bước quy nạp.** Giả sử với số nguyên cố định  $k \geq 15$  bất kỳ,  $P(m)$  đúng với mọi số nguyên  $m$  thỏa mãn  $12 \leq m \leq k$ . (Hay  $P(12) \wedge \dots \wedge P(k)$  đúng với số nguyên cố định  $k \geq 15$ .) Ta chứng minh  $P(k+1)$  đúng. Thật vậy, do  $k \geq k-3 \geq 12$ , theo giả thiết quy nạp, ta có  $P(k-3)$  đúng, nghĩa là tồn tại  $a, b \in \mathbb{Z}$  sao cho  $k-3 = 4a + 5b$ . Suy ra  $k+1 = (k-3) + 4 = 4(a+1) + 5b$

## Bài tập 6

Chứng minh ví dụ trên bằng quy nạp yếu

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

20

35



## Bài tập 7

Gọi  $P(n)$  là vị từ  $n = 3a + 5b$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Bài tập này mô tả cách chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi số nguyên  $n \geq 8$  bằng phương pháp quy nạp mạnh

- (a) Để hoàn thành bước cơ sở, hãy chứng minh rằng các mệnh đề  $P(8)$ ,  $P(9)$ , và  $P(10)$  là đúng
- (b) Giả thiết quy nạp là gì?
- (c) Trong bước quy nạp, bạn cần chứng minh điều gì?
- (d) Hãy hoàn thành bước quy nạp cho  $n \geq 10$

# Quy nạp toán học

Một số chứng minh quy nạp sai



## Ví dụ 6 ([Gunderson and Rosen 2010])

Cho  $P(n)$  là  $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{2}$ . Ta chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$  bằng phương pháp quy nạp

■ **Bước cơ sở.**  $P(1)$  đúng do  $\frac{(1 + \frac{1}{2})^2}{2} = 1$

■ **Bước quy nạp.** Giả sử  $P(k)$  đúng với một số nguyên cố định  $k \geq 1$  nào đó. Ta chứng minh  $P(k+1)$  đúng. Thật vậy

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \left( \sum_{i=1}^k i \right) + (k+1)$$

tách tổng

$$= \frac{(k + \frac{1}{2})^2}{2} + (k+1)$$

giả thiết quy nạp

$$= \frac{(k + \frac{1}{2})^2 + 2(k + \frac{1}{2}) + 1}{2}$$

$$= \frac{(k + 1 + \frac{1}{2})^2}{2}$$

**Câu hỏi**

Chứng minh này sai ở đâu?

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

22 Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References



# Quy nạp toán học

Một số chứng minh quy nạp sai



## Ví dụ 7 ([Gunderson and Rosen 2010])

Cho vị từ  $P(n)$

*Nếu  $n = \max\{a, b\}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  thì  $a = b$*

Ta chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$  bằng quy nạp

■ **Bước cơ sở.** Với  $n = 1$ , giả sử  $1 = \max\{a, b\}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ . Do đó  $a = b = 1$ . Suy ra  $P(1)$  đúng

■ **Bước quy nạp.** Giả sử  $P(k)$  đúng với một số nguyên cố định  $k \geq 1$  nào đó, nghĩa là nếu  $k = \max\{a, b\}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  thì  $a = b$

### Câu hỏi

Chứng minh này sai ở đâu?

Ta chứng minh  $P(k+1)$  đúng, nghĩa là chứng minh nếu  $k+1 = \max\{c, d\}$  với  $c, d \in \mathbb{Z}^+$  thì  $c = d$ . Thật vậy, giả sử hai số  $c, d \in \mathbb{Z}^+$  thỏa mãn  $k+1 = \max\{c, d\}$ . Do đó,  $\max\{c-1, d-1\} = k$ . Theo giả thiết quy nạp,  $c-1 = d-1$ , và do đó  $c = d$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

23

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

# Quy nạp toán học

Một số chứng minh quy nạp sai



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

24

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

## Ví dụ 8 (Tất cả ngựa đều cùng màu)

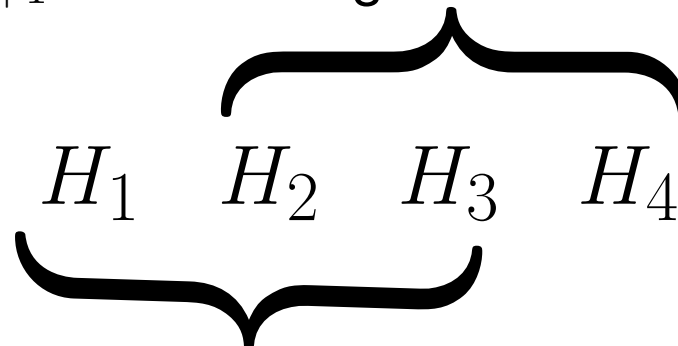
$P(n) :=$  “*Bất kỳ  $n$  con ngựa nào đều có cùng màu sắc*”

Thật vậy, ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$  bằng phương pháp quy nạp

- **Bước cơ sở.**  $P(1)$  hiển nhiên đúng.
- **Bước quy nạp.** Giả sử  $P(k)$  đúng với số nguyên  $k \geq 1$  cố định nào đó. Ta chứng minh  $P(k+1)$  cũng đúng. Giả sử có  $k+1$  con ngựa  $H_1, H_2, \dots, H_k, H_{k+1}$ . Theo giả thiết quy nạp,  $H_1, H_2, \dots, H_k$  đều có cùng màu sắc. Cũng theo giả thiết quy nạp,  $H_2, \dots, H_k, H_{k+1}$  đều có cùng màu sắc. Do đó,  $H_1, H_2, \dots, H_k, H_{k+1}$  đều có cùng màu sắc

### Câu hỏi

Chứng minh này sai ở đâu?



# Đệ quy

## Định nghĩa và một số khái niệm



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

25

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

- Trong **quy nạp**, ta chứng minh mọi phần tử của một tập vô hạn thỏa mãn vị từ  $P$  nào đó bằng cách
  - chứng minh tính đúng đắn của  $P$  cho các phần tử lớn hơn trong tập hợp dựa vào tính đúng đắn của các phần tử nhỏ hơn
- Trong các **định nghĩa đệ quy (recursive definition)**, tương tự, ta định nghĩa một cấu trúc (hàm, vị từ, tập hợp, hay một cấu trúc nào đó phức tạp hơn) trên một miền vô hạn nào đó (miền xác định) bằng cách
  - định nghĩa cấu trúc của các phần tử lớn hơn dựa vào cấu trúc của các phần tử nhỏ hơn

# Đệ quy

Hàm định nghĩa bằng đệ quy



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

26

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

## ■ Hàm định nghĩa bằng đệ quy (recursive function)

$f : \mathbb{N} \rightarrow A$  với tập  $A$  bất kỳ

- **Bước cơ sở (basis step):** Định nghĩa một số giá trị ban đầu  $f(0), f(1), \dots, f(b)$  với số nguyên cố định  $b \geq 0$  nào đó
- **Bước đệ quy (recursive step):** Định nghĩa một quy luật để tìm giá trị của  $f(n)$  từ các giá trị  $f(n-1), f(n-2), \dots, f(n-b), f(n-b-1)$  với mọi  $n > b$

## Ví dụ 9

Định nghĩa một dãy bằng hệ thức truy hồi

### ■ Dãy Fibonacci $\{f_n\}$

- **Bước cơ sở:**  $f_0 = 0, f_1 = 1$
- **Bước đệ quy:**  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ (n \geq 2)$

### ■ Dãy giai thừa $\{g_n\}$

- **Bước cơ sở:**  $g_0 = 1$
- **Bước đệ quy:**  $g_n = ng_{n-1} \ (n \geq 1)$

# Đệ quy

Hàm định nghĩa bằng đệ quy



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

27

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

## Ví dụ 10 (Chứng minh tính chất của hàm sử dụng định nghĩa đệ quy)

Cho dãy Fibonacci  $\{f_n\}$ . Ta chứng minh  $f_n < 2^n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$  bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở:**  $f_0 = 0 < 2^0 = 1$  và  $f_1 = 1 < 2^1 = 2$  (sử dụng các định nghĩa ở bước cơ sở của định nghĩa đệ quy)
- **Bước quy nạp:** Giả sử với mọi  $i$  thỏa mãn  $1 \leq i \leq k$ , ta có  $f_i < 2^i$ . Ta chứng minh  $f_{k+1} < 2^{k+1}$ . Thật vậy,

$$\begin{aligned}f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \\&< 2^k + 2^{k-1} \\&< 2^k + 2^k = 2^{k+1}\end{aligned}$$

định nghĩa đệ quy của  $\{f_n\}$   
giả thiết quy nạp

# Đệ quy

Hàm định nghĩa bằng đệ quy



## Ví dụ 11 (Chứng minh tính chất của hàm sử dụng định nghĩa đệ quy)

Cho dãy Fibonacci  $\{f_n\}$ . Ta chứng minh  $f_n > \alpha^{n-2}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 3$  và  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$  bằng quy nạp mạnh

■ **Bước cơ sở:** Với  $n = 3$ , ta có  $f_3 = 2 > \alpha^{3-2} = \alpha$ . Với

$$n = 4, \text{ ta có } f_4 = 3 > \alpha^{4-2} = \alpha^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \alpha + 1 \approx 2.61803$$

■ **Bước quy nạp:** Giả sử với mọi  $i$  thỏa mãn  $3 \leq i \leq k$  ta có  $f_i > \alpha^{i-2}$ . Ta chứng minh  $f_{k+1} > \alpha^{k-1}$ . Thật vậy,

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \quad \text{định nghĩa đệ quy của } \{f_n\}$$

$$> \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3} \quad \text{giả thiết quy nạp}$$

$$= \alpha^{k-3}(\alpha + 1)$$

$$= \alpha^{k-3}\alpha^2 = \alpha^{k-1} \quad \text{do } \alpha^2 = \alpha + 1$$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

28

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

35

# Đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

29

35

- **Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy (recursive set)**
  - **Bước cơ sở (basis step):** Định nghĩa một tập con các phần tử ban đầu
  - **Bước đệ quy (recursive step):** Định nghĩa một quy luật để tìm phần tử mới trong tập từ các phần tử đã biết là thuộc tập đó
- Thông thường, với các tập định nghĩa bằng đệ quy, **quy tắc ngoại trừ (exclusion rule)** sau luôn được áp dụng: tập hợp cần định nghĩa chỉ chứa các phần tử liệt kê ở bước cơ sở và các phần tử thu được bằng cách áp dụng quy tắc ở bước đệ quy.

# Đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

## Ví dụ 12

- Tập  $S$  các số nguyên dương chia hết cho 3
  - **Bước cơ sở:**  $3 \in S$
  - **Bước đệ quy:** Nếu  $x \in S$  và  $y \in S$  thì  $x + y \in S$
  - Đầu tiên,  $3 \in S$ , sau đó là  $3 + 3 = 6$ ,  $3 + 6 = 9$ , v.v...
- Tập số tự nhiên  $\mathbb{N}$ 
  - **Bước cơ sở:**  $0 \in \mathbb{N}$
  - **Bước đệ quy:** Nếu  $n \in \mathbb{N}$  thì  $n + 1 \in \mathbb{N}$
- Tập các chuỗi ký tự  $\Sigma^*$  sinh bởi bảng chữ cái  $\Sigma$ 
  - **Bước cơ sở:**  $\lambda \in \Sigma^*$  ( $\lambda$  là chuỗi rỗng không chứa bất kỳ ký tự nào)
  - **Bước đệ quy:** Nếu  $w \in \Sigma^*$  và  $x \in \Sigma$  thì  $wx \in \Sigma^*$
  - Ví dụ nếu  $\Sigma = \{0, 1\}$  thì
    - $\lambda \in \Sigma^*$  (bước cơ sở)
    - $\{0, 1\} \subseteq \Sigma^*$  (lần đầu áp dụng bước quy nạp)
    - $\{00, 01, 10, 11\} \subseteq \Sigma^*$  (lần thứ hai áp dụng bước quy nạp)
    - v.v...
    - Do đó  $\Sigma^*$  là tập tất cả các chuỗi nhị phân

30

35



# Đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

31

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

## Ví dụ 13

- Tập *các công thức được tạo đúng quy tắc (well-formed formulae)* trong logic mệnh đề
  - **Bước cơ sở:** T, F, và mệnh đề nguyên tử  $s$  là các công thức được tạo đúng quy tắc
  - **Bước đệ quy:** Nếu  $A$  và  $B$  là các công thức được tạo đúng quy tắc, thì  $(\neg A)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ , và  $(A \leftrightarrow B)$  cũng thế
  - Ví dụ, với các mệnh đề nguyên tử  $p, q$ ,  $((p \vee q) \rightarrow (q \wedge \mathbf{F}))$  và  $(p \wedge q)$  là các công thức được tạo đúng quy tắc, còn  $\wedge pq$ ,  $pq\wedge$ , và  $p \wedge q$  thì không phải (**Tại sao?**)

# Đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

Để chứng minh một tính chất  $P$  của các phần tử của một tập hợp định nghĩa theo đệ quy, ta sử dụng **quy nạp theo cấu trúc** (*structural induction*)

## Nguyên lý quy nạp theo cấu trúc

- **Bước cơ sở:** Chứng minh rằng mọi phần tử định nghĩa trong bước cơ sở của định nghĩa đệ quy đều thỏa mãn  $P$
- **Bước quy nạp:** Chứng minh rằng nếu các phần tử được sử dụng để xây dựng phần tử mới của tập hợp trong bước đệ quy đều thỏa mãn  $P$ , thì phần tử mới cũng thỏa mãn  $P$

32

35

# Đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

References

## Ví dụ 14

Cho  $S$  là tập định nghĩa theo đệ quy như sau:

■ **Bước cơ sở:**  $3 \in S$

■ **Bước đệ quy:** Nếu  $x \in S$  và  $y \in S$  thì  $x + y \in S$

Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấu trúc rằng *mọi phần tử của  $S$  đều chia hết cho 3*

■ **Bước cơ sở:** 3 chia hết cho 3

■ **Bước quy nạp:** Giả sử với  $x \in S$  và  $y \in S$ , cả  $x$  và  $y$  đều chia hết cho 3. Ta chứng minh  $n = x + y$  cũng chia hết cho 3. Thật vậy, do  $x$  chia hết cho 3, ta có  $x = 3k$  với số nguyên  $k$  nào đó. Tương tự,  $y = 3j$  với số nguyên  $j$  nào đó. Suy ra  $n = x + y = 3(k + j)$ , và do đó  $n$  cũng chia hết cho 3

33

35



## Ví dụ 15

Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấu trúc rằng *mọi công thức được tạo đúng quy tắc trong logic mệnh đề có số dấu ngoặc đơn trái “(” bằng số dấu ngoặc đơn phải “)”*

- **Bước cơ sở:** Các mệnh đề  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{F}$ , và mọi mệnh đề nguyên tử  $s$  đều không có các dấu ngoặc đơn trái và phải
- **Bước quy nạp:** Với công thức  $A$ , gọi  $l_A$  và  $r_A$  lần lượt là số ngoặc đơn trái và ngoặc đơn phải của  $A$ . Giả sử với các công thức  $A, B$ ,  $l_A = r_A$  và  $l_B = r_B$ . Ta chứng minh rằng điều này cũng đúng với các công thức  $(\neg A)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ , và  $(A \leftrightarrow B)$ . Thật vậy, công thức đầu tiên có  $l_A + 1$  ngoặc trái và  $r_A + 1$  ngoặc phải, và các công thức sau đó có  $l_A + l_B + 1$  ngoặc trái và  $r_A + r_B + 1$  ngoặc phải



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy  
nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái  
niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ  
quy

Tập hợp định nghĩa bằng  
đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc



Gunderson, David S. and Kenneth H. Rosen (2010).  
*Handbook of Mathematical Induction: Theory and  
Applications*. Chapman and Hall/CRC. DOI:  
10.1201/b16005.

35

References

Part I

Phụ lục

# Nội dung



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy nạp mạnh

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy nạp mạnh

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương



## Chứng minh (Quy nạp mạnh là đúng).

- Giả sử  $P(1)$  đúng và với mọi  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $(P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$  đúng. Ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$  bằng phản chứng
- Giả sử tồn tại  $n \in \mathbb{Z}^+$  sao cho  $P(n)$  sai. Do đó, tập  $S = \{n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } P(n) \text{ sai}\} \subseteq \mathbb{Z}^+$  là tập khác rỗng.
- Theo Tiên đề 1,  $S$  có một phần tử nhỏ nhất  $m$ . Do  $P(1)$  đúng và  $m \in \mathbb{Z}^+$ , ta có  $m > 1$ , suy ra  $m - 1 \in \mathbb{Z}^+$
- Theo định nghĩa của  $m$ , với mọi số nguyên dương  $j \leq m - 1$ , ta có  $P(j)$  đúng (nếu không thì  $j < m$  và  $P(j)$  sai; điều này mâu thuẫn với định nghĩa của  $m$ ). Do đó  $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(m - 1)$  đúng
- Do  $(P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi  $k \in \mathbb{Z}^+$ , ta có  $(P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(m - 1)) \rightarrow P(m)$  đúng
- Kết hợp với  $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(m - 1)$  đúng, ta có  $P(m)$  đúng. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của  $m$ . Do đó  $P(n)$  đúng với mọi số nguyên dương  $n$



# Quy nạp toán học

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy nạp mạnh

3

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương

## Quy nạp yếu $\Rightarrow$ Quy nạp mạnh.

- (1) Giả sử với mọi  $R(n)$ , ta có  
 $(R(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (R(k) \rightarrow R(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ R(n)$   
đúng, nghĩa là, quy nạp yếu đúng
- (2) Giả sử với vị từ  $P(n)$  ta có  
 $P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ \bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow P(k+1)$  đúng, nghĩa là,  
bước cơ sở và bước quy nạp của quy nạp mạnh là đúng.  
Ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$  đúng
- (3) Ta định nghĩa  $Q(n) = \bigwedge_{j=1}^n P(j)$  với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$
- (4) Từ (1), ta có  
 $(Q(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (Q(k) \rightarrow Q(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ Q(n)$  đúng
- (5) Từ (3), ta có  $Q(1) \equiv P(1)$  và  
 $\forall n \in \mathbb{Z}^+ Q(n) \equiv \forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$
- (6) Chú ý rằng với các mệnh đề  $p, q$  bất kỳ  $p \rightarrow q \equiv p \rightarrow p \wedge q$   
(Tại sao?).
- (7) Do đó  $Q(k) \rightarrow Q(k+1) \equiv \bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^{k+1} P(j) \equiv$   
 $\bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^k P(j) \wedge P(k+1) \equiv \bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow P(k+1)$
- (8) Thay (5) và (7) vào (4), ta có điều phải chứng minh



# Quy nạp toán học

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy nạp mạnh

4

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương

## Quy nạp mạnh $\Rightarrow$ Quy nạp yếu.

- (1) Giả sử với mọi  $R(n)$  ta có  
 $(R(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (\bigwedge_{j=1}^k R(j) \rightarrow R(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ R(n)$   
đúng, nghĩa là, quy nạp mạnh đúng
- (2) Giả sử với vị từ  $P(n)$  ta có  
 $P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (P(k) \rightarrow P(k+1))$  đúng, nghĩa là, bước cơ sở và bước quy nạp của quy nạp yếu đúng. Ta chứng minh  
 $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$  đúng
- (3) Chú ý rằng với các mệnh đề  $p, q, r$  bất kỳ, nếu  $p \rightarrow q$  đúng thì  $p \wedge r \rightarrow q$  cũng đúng (**Tại sao?**)
- (4) Áp dụng (1) với  $P(n)$ , ta có  
 $(P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (\bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow P(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$   
đúng.
- (5) Từ (2), ta có  $P(1)$  đúng và  $\forall k \in \mathbb{Z}^+ (P(k) \rightarrow P(k+1))$  đúng. Kết hợp với (3), ta có  
 $\forall k \in \mathbb{Z}^+ (\bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow P(k+1))$  đúng
- (6) Từ (4) và (5) ta có điều phải chứng minh

