

## Bài tập tuần 6

20/11/2025

GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

## Chú ý

- (1) Danh sách bài tập mỗi tuần có ở <https://hoanganhduc.github.io/teaching/VNU-HUS/2025/winter/MAT3302/>.
- (2) Tham gia Google Classroom (<https://classroom.google.com/c/0DAwMzkxNzA30TEy?cjc=y6rexh5>) để biết cách tính điểm thường xuyên qua việc lên bảng và điểm danh.
- (3) Các bài tập đánh dấu sao (\*) có thể cần thời gian suy nghĩ lâu hơn.

**Bài tập 1.** (1) *Đồ thi giao (intersection graph)* của một họ các tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là đồ thị có một đỉnh cho mỗi tập hợp này và có một cạnh nối hai đỉnh biểu diễn hai tập hợp nếu hai tập hợp này có giao khác rỗng. Hãy xây dựng đồ thị giao của các họ tập hợp sau.

- (a)  $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$
- (b)  $A_1 = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$ ,  $A_2 = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ,  $A_3 = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ ,  $A_4 = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ ,  $A_5 = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$
- (c)  $A_1 = \{x \mid x < 0\}$ ,  $A_2 = \{x \mid -1 < x < 0\}$ ,  $A_3 = \{x \mid 0 < x < 1\}$ ,  $A_4 = \{x \mid -1 < x < 1\}$ ,  $A_5 = \{x \mid x > -1\}$ ,  $A_6 = \mathbb{R}$
- (2) Xây dựng đồ thị ảnh hưởng cho các thành viên hội đồng quản trị của một công ty nếu Chủ tịch có thể ảnh hưởng đến Giám đốc Nghiên cứu và Phát triển, Giám đốc Marketing, và Giám đốc Vận hành; Giám đốc Nghiên cứu và Phát triển có thể ảnh hưởng đến Giám đốc Vận hành; Giám đốc Marketing có thể ảnh hưởng đến Giám đốc Vận hành; và không ai có thể ảnh hưởng đến, hoặc bị ảnh hưởng bởi, Giám đốc Tài chính.
- (3) Giải thích cách sử dụng đồ thị để mô hình hóa các thông điệp thư điện tử (electronic mail messages) trong một mạng. Các cạnh nên là có hướng hay vô hướng? Có nên cho phép cạnh bội không? Có nên cho phép khuyên không?
- (4) Mô tả một mô hình đồ thị biểu diễn việc mỗi người tại một bữa tiệc có biết tên của mỗi người khác tại bữa tiệc hay không. Các cạnh nên là có hướng hay vô hướng? Có nên cho phép cạnh bội không? Có nên cho phép khuyên không?

- (5) Mô tả một mô hình đồ thị biểu diễn hệ thống tàu điện ngầm trong một thành phố lớn. Các cạnh nên là có hướng hay vô hướng? Có nên cho phép cạnh bội không? Có nên cho phép khuyên không?
- (6) Với mỗi môn học tại một trường đại học, có thể có một hoặc nhiều môn học khác là các môn học tiên quyết của nó. Làm thế nào có thể sử dụng đồ thị để mô hình hóa các môn học này và môn học nào là môn học tiên quyết của môn học nào? Các cạnh nên là có hướng hay vô hướng? Nhìn vào mô hình đồ thị, làm thế nào chúng ta có thể tìm các môn học không có bất kỳ môn học tiên quyết nào và làm thế nào chúng ta có thể tìm các môn học không phải là môn học tiên quyết của bất kỳ môn học nào khác?

**Bài tập 2.** Chứng minh rằng tổng số người mà mỗi người đã bắt tay, lấy tổng trên tất cả mọi người tại một bữa tiệc, là một số chẵn. Giả sử rằng không ai bắt tay chính mình.

**Bài tập 3.** Chứng minh rằng trong một đồ thị đơn có ít nhất hai đỉnh, luôn tồn tại hai đỉnh có cùng bậc.

**Bài tập 4.** Nếu  $G$  là một đồ thị có  $n$  đỉnh, thì số lượng cạnh tối đa trong  $G$  là bao nhiêu?

**Bài tập 5.** Vẽ các đồ thị sau.

- |               |           |
|---------------|-----------|
| (a) $K_7$     | (d) $C_7$ |
| (b) $K_{1,8}$ | (e) $W_7$ |
| (c) $K_{4,4}$ | (f) $Q_4$ |

**Bài tập 6.** Với giá trị nào của  $n$  thì các đồ thị sau là đồ thị hai phía (bipartite graph)?

- |           |           |
|-----------|-----------|
| (a) $K_n$ | (c) $W_n$ |
| (b) $C_n$ | (d) $Q_n$ |

**Bài tập 7.** Cho  $n$  là một số nguyên dương. Chứng minh rằng đồ thị con cảm sinh bởi một tập con khác rỗng của tập đỉnh của  $K_n$  là một đồ thị đầy đủ.

**Bài tập 8.** Các đồ thị sau có bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu cạnh?

- |           |               |
|-----------|---------------|
| (a) $K_n$ | (d) $K_{m,n}$ |
| (b) $C_n$ |               |
| (c) $W_n$ | (e) $Q_n$     |

**Bài tập 9.** Chuỗi bậc (degree sequence) của một đồ thị là chuỗi các bậc của các đỉnh của đồ thị theo thứ tự không tăng (non-increasing ordering).

- (a) Tìm chuỗi bậc của mỗi đồ thị sau đây.

- (1)  $K_4$   
 (2)  $C_4$   
 (3)  $W_4$   
 (4)  $K_{2,3}$   
 (5)  $Q_3$
- (b) Chuỗi bậc của đồ thị hai phía  $K_{m,n}$  là gì, trong đó  $m$  và  $n$  là các số nguyên dương? Giải thích câu trả lời của bạn.
- (c) Chuỗi bậc của  $K_n$ , trong đó  $n$  là một số nguyên dương, là gì? Giải thích câu trả lời của bạn.
- (d) Một đồ thị có bao nhiêu cạnh nếu chuỗi bậc của nó là  $4, 3, 3, 2, 2$ ? Vẽ một đồ thị như vậy.
- (e) Một đồ thị có bao nhiêu cạnh nếu chuỗi bậc của nó là  $5, 2, 2, 2, 2, 1$ ? Vẽ một đồ thị như vậy.

**Bài tập 10.** Một chuỗi  $d_1, d_2, \dots, d_n$  được gọi là *chuỗi đồ họa (graphic sequence)* nếu nó là chuỗi bậc của một đồ thị đơn.

- (a) Xác định xem mỗi chuỗi sau có phải là chuỗi đồ họa hay không. Với những chuỗi là chuỗi đồ họa, hãy vẽ một đồ thị có chuỗi bậc đã cho.
- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| (1) 5, 4, 3, 2, 1, 0 | (5) 3, 3, 2, 2, 2    |
| (2) 6, 5, 4, 3, 2, 1 | (6) 1, 1, 1, 1, 1    |
| (3) 2, 2, 2, 2, 2, 2 | (7) 5, 3, 3, 3, 3, 3 |
| (4) 3, 3, 3, 2, 2, 2 | (8) 5, 5, 4, 3, 2, 1 |
- (b) (\*) Giả sử rằng  $d_1, d_2, \dots, d_n$  là một chuỗi đồ họa. Chứng minh rằng tồn tại một đồ thị đơn với các đỉnh  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sao cho  $\deg(v_i) = d_i$  với  $i = 1, 2, \dots, n$  và  $v_1$  kề với  $v_2, \dots, v_{d_1+1}$ .
- (c) (\*) Chứng minh rằng một dãy  $d_1, d_2, \dots, d_n$  các số nguyên không âm được sắp theo thứ tự không tăng là một chuỗi đồ họa khi và chỉ khi dãy thu được bằng cách lấy

$$d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n,$$

rồi sắp xếp lại các phần tử theo thứ tự không tăng, cũng là một chuỗi đồ họa.

- (d) (\*) Sử dụng kết quả của phần (c) để thiết kế một thuật toán đệ quy (recursive algorithm) để kiểm tra xem một dãy có phải là chuỗi đồ họa hay không.

**Bài tập 11.** Các đồ thị sau có bao nhiêu đồ thị con (subgraph)?

- (a)  $K_2$
- (b) (\*)  $K_3$  (**Đáp án:** 17)
- (c) (\*)  $K_4$  (**Đáp án:** 112)

(**Gợi ý:** Có bao nhiêu đồ thị con có 1 đỉnh? 2 đỉnh? 3 đỉnh? v.v..)

**Bài tập 12.** Cho  $G$  là một đồ thi với  $v$  đỉnh và  $e$  cạnh. Kí hiệu  $M$  là bậc lớn nhất của các đỉnh của  $G$ , và  $m$  là bậc nhỏ nhất của các đỉnh của  $G$ . Hãy chứng minh rằng

- (a)  $\frac{2e}{v} \geq m$ .
- (b)  $\frac{2e}{v} \leq M$ .

**Bài tập 13.** Một đồ thi đơn được gọi là *chính quy (regular)* nếu mọi đỉnh của đồ thi này có cùng bậc. Một đồ thi đều được gọi là *n-chính quy (n-regular)* nếu mọi đỉnh trong đồ thi này có bậc  $n$ .

(a) Với các giá trị nào của  $n$  thì các đồ thi này là đồ thi chính quy?

- (1)  $K_n$
- (2)  $C_n$
- (3)  $W_n$
- (4)  $Q_n$

(b) Với các giá trị nào của  $m$  và  $n$  thì  $K_{m,n}$  là chính quy?

(c) Một đồ thi chính quy có bậc bốn với 10 cạnh có bao nhiêu đỉnh?

**Bài tập 14.** *Đồ thi bù (complementary graph)*  $\overline{G}$  của một đồ thi đơn  $G$  có cùng các đỉnh như  $G$ . Hai đỉnh kề nhau trong  $\overline{G}$  khi và chỉ khi chúng không kề nhau trong  $G$ .

- (a) Nếu  $G$  là một đồ thi đơn với 15 cạnh và  $G$  có 13 cạnh,  $G$  có bao nhiêu đỉnh?
- (b) Nếu đồ thi đơn  $G$  có  $v$  đỉnh và  $e$  cạnh,  $\overline{G}$  có bao nhiêu cạnh?
- (c) Nếu chuỗi bậc của đồ thi đơn  $G$  là  $4, 3, 3, 2, 2$ , thì chuỗi bậc của  $\overline{G}$  là gì?
- (d) Nếu chuỗi bậc của đồ thi đơn  $G$  là  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , thì chuỗi bậc của  $\overline{G}$  là gì?

**Bài tập 15** (\*). Chứng minh rằng nếu  $G$  là một đồ thị đơn hai phia (bipartite graph) với  $v$  đỉnh và  $e$  cạnh, thì  $e \leq \frac{v^2}{4}$ .

**Bài tập 16.** Chứng minh rằng nếu  $G = (V, E)$  là một đồ thị hai phia  $n$ -chính quy với  $n$  là số nguyên dương và  $(V_1, V_2)$  là một phân hoạch hai phia của  $V$ , thì  $|V_1| = |V_2|$ . Nói cách khác, trong một đồ thị hai phia  $n$ -chính quy, hai tập đỉnh của phân hoạch phải có cùng số lượng đỉnh.

**Bài tập 17.** Xác định xem các cặp đồ thị cho trước trong Hình 1 sau có đẳng cấu (isomorphic) hay không. Nếu có, hãy chỉ ra một đẳng cấu (isomorphism) giữa các tập đỉnh của chúng. Ngược lại, hãy đưa ra một lập luận chặt chẽ rằng không có đẳng cấu nào tồn tại.

**Bài tập 18.** Chứng minh rằng quan hệ đẳng cấu của các đồ thị đơn là một quan hệ tương đương.

**Bài tập 19.** Giả sử rằng  $G$  và  $H$  là các đồ thị đơn đẳng cấu. Chứng minh rằng các đồ thị bù  $\overline{G}$  và  $\overline{H}$  của chúng cũng đẳng cấu.

**Bài tập 20.** Một đồ thị đơn  $G$  được gọi là *đồ thị tự bù* (*self-complementary graph*) nếu  $G$  và  $\overline{G}$  là đẳng cấu.

- (a) Tìm một đồ thị tự bù có 4 đỉnh.
- (b) Tìm một đồ thị tự bù có 5 đỉnh.
- (c) (\*) Chứng minh rằng nếu  $G$  là một đồ thị tự bù với  $n$  đỉnh, thì  $n \equiv 0 \pmod{4}$  hoặc  $n \equiv 1 \pmod{4}$ .

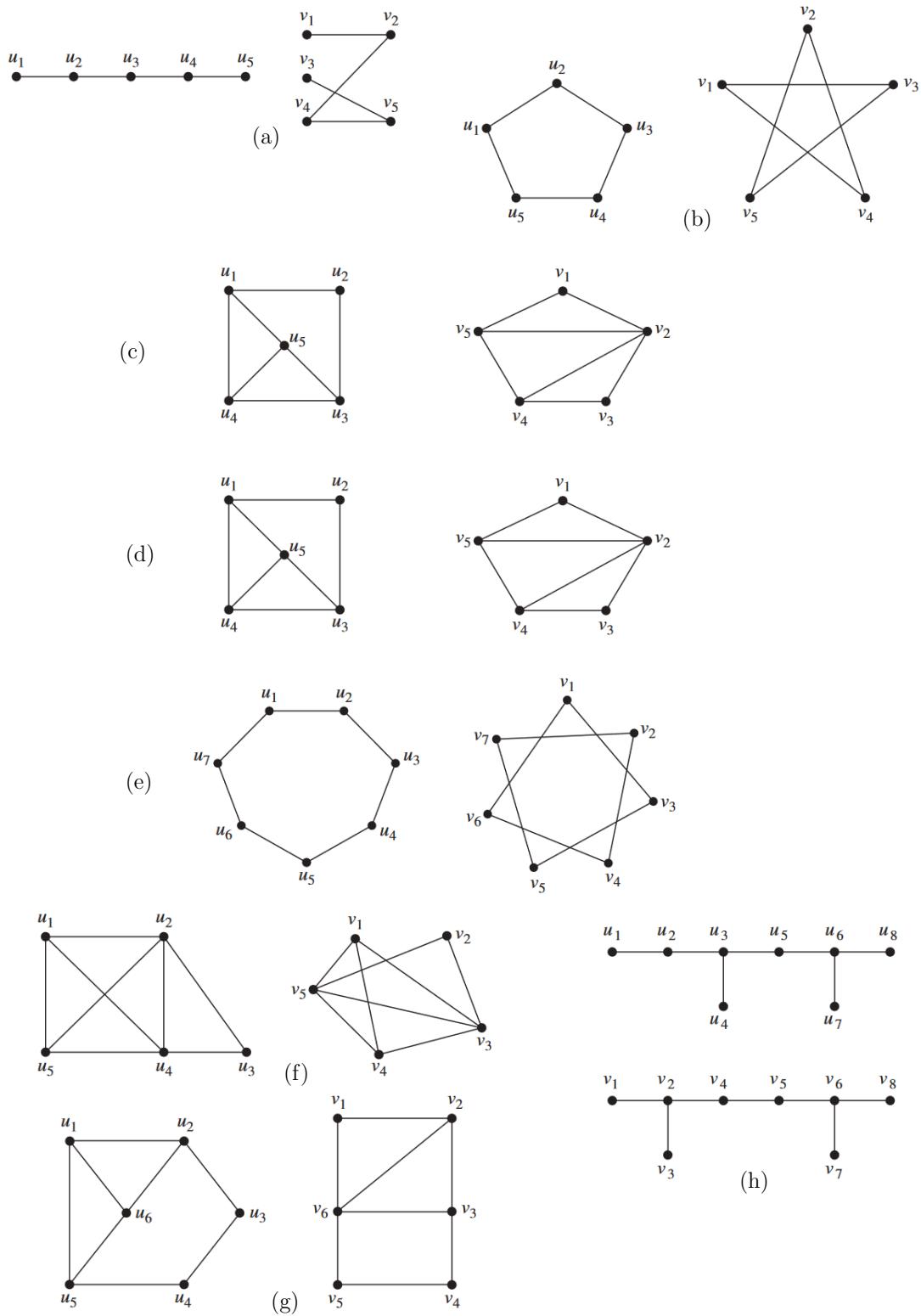
**Bài tập 21.** Với các số nguyên  $n$  nào thì  $C_n$  là đồ thị tự bù?

**Bài tập 22.** Có bao nhiêu đồ thị đơn không đẳng cấu với  $n$  đỉnh, khi  $n$  là

- (a) 2?
- (b) 3?
- (c) 4?

## Tài liệu

- [1] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 8th edition, McGraw-Hill, 2018.
- [2] Liben-Nowell, David, *Connecting Discrete Mathematics and Computer Science*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2022.



Hình 1: Minh họa Bài tập 17