COPYRIGHT NOTICE
THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

COPYRIGHT (English):

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-10-09

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-10-09

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Thuật toán I

Mô tả, chứng minh, đánh giá thuật toán; Tìm kiếm và sắp xếp

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán
- Quy tắc viết giả mã
- Ví dụ

Chứng minh thuật toán
- Bất biến vòng lặp
- Ví dụ

Độ phức tạp tính toán
- Độ tăng của các hàm
- Định nghĩa và khái niệm
- Độ phức tạp tính toán theo thời gian
- Ví dụ

Tìm kiếm và Sắp xếp
- Một số thuật toán tìm kiếm
- Một số thuật toán sắp xếp

Định nghĩa và một số khái niệm

- Một *thuật toán (algorithm)* là một tập hữu hạn các hướng dẫn cụ thể để thực hiện một nhiệm vụ nào đó
  - cộng hai số tự nhiên biểu diễn dưới dạng số thập phân
  - đăng ký môn học trực tuyến
  - đi từ nhà đến trường
- Một *chương trình máy tính (computer program)* là
  - một mô tả của thuật toán nào đó
  - sử dụng một ngôn ngữ đủ chuẩn xác để máy tính có thể hiểu
  - cùng với các phép toán mà máy tính đã biết cách thực hiện

  Ta nói rằng thuật toán được *cài đặt (implement)* cụ thể bằng chương trình máy tính
- Khi mở một phần mềm trong máy tính, ta nói rằng *chương trình hoặc thuật toán của nó được chạy hoặc được thực hiện bởi máy tính*
- Khi có mô tả của một thuật toán, bạn cũng *có thể thực hiện từng bước của thuật toán với giấy và bút*

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số tính chất của một thuật toán

Đầu vào (Input) Một thuật toán có các giá trị đầu vào từ một tập đã được xác định trước

Đầu ra (Output) Từ mỗi một tập các giá trị đầu vào, một thuật toán sinh ra các giá trị đầu ra. Các giá trị này chính là lời giải cho bài toán

Tính xác định (Definiteness) Các bước của một thuật toán cần phải được xác định một cách chính xác

Tính đúng đắn (Correctness) Với mỗi tập giá trị đầu vào, một thuật toán cần cho ra kết quả đầu ra đúng

Tính hữu hạn (Finiteness) Với mỗi tập giá trị đầu vào, một thuật toán cần cho ra các giá trị đầu ra mong muốn sau một số hữu hạn (có thể là rất lớn) các bước

Tính hiệu quả (Effectiveness) Mỗi bước của thuật toán cần được thực hiện một cách chính xác và trong thời gian hữu hạn

Tính tổng quát (Generality) Thuật toán phải áp dụng được cho mọi bài toán mong muốn, chứ không phải chỉ với một tập các giá trị đầu vào đặc biệt

Định nghĩa và một số khái niệm

- Một *thuật toán* cũng có thể được *mô tả bằng một ngôn ngữ máy tính* (C, Python, Java, v.v...). Tuy nhiên, những mô tả này cần tuân theo các chỉ dẫn cụ thể trong ngôn ngữ máy tính tương ứng. Điều này dẫn đến việc các mô tả theo phương pháp này thường phức tạp và khó hiểu
- Thay vì dùng một ngôn ngữ máy tính cụ thể để mô tả thuật toán, ta sử dụng *ngôn ngữ thông thường*, *giả mã (pseudocode)*, hoặc *sơ đồ khối (flowchart)*
- Một mô tả đầy đủ của một thuật toán bao gồm ba phần
  (1) *Thuật toán (algorithm)*
    - Mô tả một cách rõ ràng và chính xác nhất có thể
    - Thường kèm theo mô tả ngắn gọn về ý tưởng của thuật toán
  (2) Một chứng minh về *tính đúng đắn (correctness)* của thuật toán
    - Với mọi tập đầu vào, thuật toán cần cho kết quả đầu ra đúng
  (3) Một phân tích về *thời gian chạy (running time)* của thuật toán

Mô tả thuật toán

Một số quy tắc viết giả mã

- *Giả mã (pseudocode)* là một dạng hỗn hợp giữa ngôn ngữ thông thường và ngôn ngữ lập trình
- Một *biến (variable)* được sử dụng để biểu diễn vị trí trong bộ nhớ máy tính để lưu trữ một giá trị. Khi ta nói đến một biến X nào đó, trên thực tế, chúng ta muốn sử dụng giá trị lưu tại một vị trí nào đó trong bộ nhớ ứng với X
- Một *phép gán (assignment)* thường có dạng *variable* $:=$ *expression*, trong đó biểu thức expression ở vế phải sẽ được tính toán và kết quả tính toán được lưu trữ ở vị trí trong bộ nhớ tương ứng với biến variable
- Trong *cấu trúc điều kiện (conditional statement)* ***if*** *condition* ***then*** S_1 ***else*** S_2, biểu thức condition được tính toán và sẽ cho ra giá trị cuối cùng là `True` (đúng) hoặc `False` (sai). Nếu `True` thì đoạn mã S_1 sẽ được thực hiện, còn ngược lại thì S_2 sẽ được thực hiện. Sau khi S_1 hoặc S_2 được thực hiện, các lệnh ngay tiếp sau cấu trúc điều kiện sẽ được thực hiện

Mô tả thuật toán

Một số quy tắc viết giả mã

- Trong *vòng lặp* ***for*** *(****for*** *loop)* ***for*** $i = 1$ ***to*** n ***do*** S, giá trị ban đầu của biến i được gán bằng 1. Nếu giá trị của i nhỏ hơn hoặc bằng n, đoạn mã S sẽ được thực hiện. Đoạn mã S có thể sử dụng biến i hoặc không. Sau mỗi lần thực hiện S (*lần lặp (iteration)*), biến i được tăng thêm 1 và được kiểm tra xem giá trị sau khi tăng của i có phải vẫn nhỏ hơn hoặc bằng n hay không. Nếu kết quả là `True` thì vòng lặp được thực hiện thêm một lần nữa với giá trị mới của i. Ngược lại, các lệnh tiếp theo ngay sau vòng **for** được thực hiện
- Trong *vòng lặp* ***while*** *(****while*** *loop)* ***while*** *condition* ***do*** S, đoạn mã S được thực hiện bất kể khi nào giá trị của biểu thức condition còn đúng (`True`). Nếu condition sai ngay khi bắt đầu vòng lặp **while** thì S không bao giờ được thực hiện
- Mọi thứ nằm sau các dấu `//` hoặc nằm giữa `/*` và `*/` là các nhận xét hoặc chú thích mà chương trình sẽ bỏ qua

Ví dụ 1 (Mô tả thuật toán bằng ngôn ngữ thông thường)

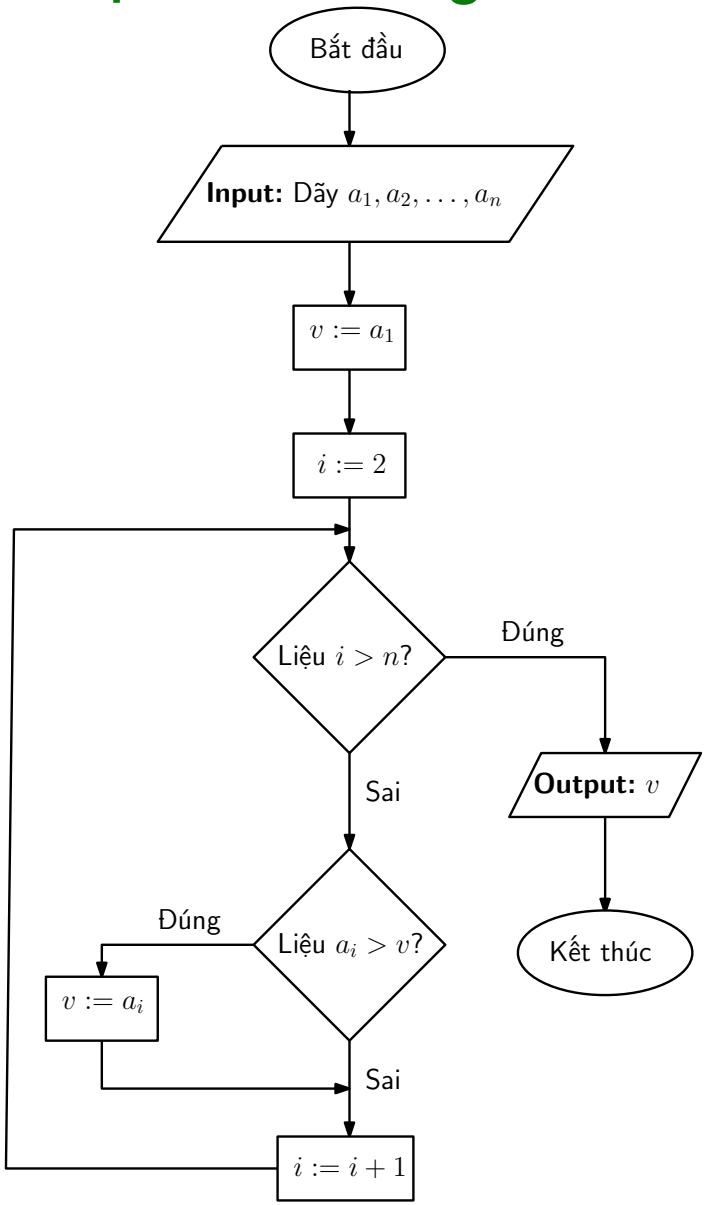
- **Bài toán:**
  - **Input:** $a_1, a_2, \ldots, a_n$: dãy số nguyên
  - **Output:** Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy
- **Tìm giá trị của phần tử lớn nhất:**
  (1) Gán giá trị của một biến tạm thời v (phần tử lớn nhất đến thời điểm hiện tại) bằng a_1
  (2) Xét phần tử ngay tiếp theo trong dãy
  (3) Nếu phần tử đó lớn hơn v thì gán giá trị của v bằng giá trị của phần tử
  (4) Lặp lại (2) và (3) cho đến khi không còn phần tử nào để xét
  (5) Trả lại giá trị của v

Ví dụ 2 (Thực hiện thuật toán)

- **Input:** Dãy $a_1 = 7, a_2 = 12, a_3 = 5, a_4 = 16, a_5 = 9$
- **Output:** Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$\boxed{7}$	$\boxed{12}$	$\boxed{5}$	$\boxed{16}$	$\boxed{9}$
	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$v = 7$	$v = 12$	$v = 12$	$v = 16$	$v = 16$

Ví dụ 3 (Mô tả thuật toán bằng sơ đồ khối)



Ví dụ 4 (Mô tả thuật toán bằng giả mã)

Thuật toán 1: Tìm giá trị của phần tử lớn nhất

Input: $a_1, a_2, \ldots, a_n$: dãy số nguyên
Output: Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

```
1 v := a_1                          // phần tử lớn nhất đến hiện tại
2 for i := 2 to n do                // lần lượt xét a_2, ..., a_n
3     if a_i > v then               // a_i > phần tử lớn nhất hiện tại?
4         v := a_i                  // bây giờ v lớn nhất trong
              a_1, ..., a_i
5 return v
```

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

- Có rất nhiều phương pháp khác nhau để *chứng minh tính đúng đắn của một thuật toán*
- Một trong số đó là sử dụng *bất biến vòng lặp (loop invariant)*—một phương pháp được xây dựng dựa trên phương pháp quy nạp toán học
  - *Vòng lặp (loop):* **for**, **while**, v.v...
  - Một *bất biến vòng lặp* là *một phát biểu luôn đúng trước và sau mỗi lần lặp (iteration) của một vòng lặp (loop)*

Chứng minh thuật toán

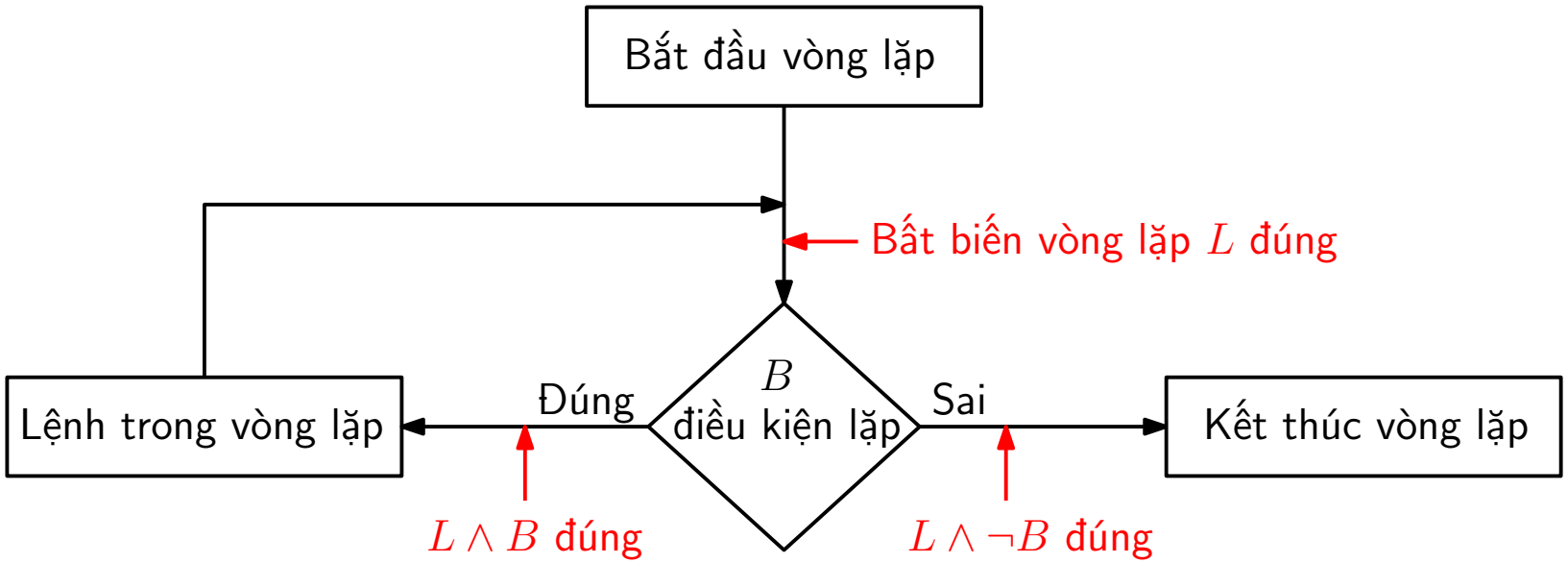
Bất biến vòng lặp

Ta cần chỉ ra ba điều về một bất biến vòng lặp L

Khởi động (Initialization) L đúng trước lần lặp đầu tiên của vòng lặp

Duy trì (Maintainance) Nếu L đúng trước một lần lặp của vòng lặp thì nó cũng đúng trước lần lặp tiếp theo

Dừng (Termination) Khi vòng lặp dừng, bất biến vòng lặp cho ta một tính chất hữu ích để chứng minh thuật toán đúng



Hình: Bất biến vòng lặp

Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên $a_1, \ldots, a_n$

$$L := \textit{Ở trước lần lặp với biến } i,\ v = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$$

Gọi v_i là giá trị của v trước lần lặp với biến i

- **Khởi động ($i = 2$):** Ta cần chỉ ra rằng trước vòng **for**, $v_2 = \max\{a_1\} = a_1$, và điều này hiển nhiên đúng do Thuật toán 1 gán v bằng a_1 ở Dòng 1
- **Duy trì:** Giả sử L đúng ở trước lần lặp với $i = k$ nào đó, nghĩa là $v_k = \max\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$. Ta chứng minh L đúng ở trước lần lặp với $i = k + 1$, nghĩa là $v_{k+1} = \max\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$. Ta xét các trường hợp dựa trên điều kiện ở Dòng 3
  - Nếu $a_k > v = v_k$ sai, giá trị của v không thay đổi, và do đó $v_{k+1} = v_k$. Ta có $\max\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k\} = \max\{v_k, a_k\} = v_k$. Suy ra $v_{k+1} = \max\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$
  - Nếu $a_k > v = v_k$ đúng, giá trị của v được gán bằng a_k, và do đó $v_{k+1} = a_k$. Ta cũng có $\max\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k\} = \max\{v_k, a_k\} = a_k$. Suy ra $v_{k+1} = \max\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$
- **Dừng:** Sau khi kết thúc lần lặp $i = n$ (hoặc, trước khi bắt đầu lần lặp $i = n + 1$ mà sẽ không bao giờ được thực hiện), $v = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$ và do đó là giá trị lớn nhất của các phần tử trong dãy đầu vào

Bài tập 1

Một thuật toán tính x^n với $x \in \mathbb{R}^+$ và $n \in \mathbb{N}$ được mô tả như sau

Thuật toán 2: Tính x^n.

Input: *x: số thực dương, n: số tự nhiên*
Output: *Giá trị của x^n*

```
1 answer := 1
2 m := n
3 while m > 0 do
4     answer := answer × x
5     m := m − 1
6 return answer
```

*Hãy chứng minh phát biểu L sau là một bất biến vòng lặp cho vòng **while***

Ở trước lần lặp với biến m, answer $= x^{n-m}$

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

- Việc *phân tích (analysis) một thuật toán* yêu cầu cung cấp một xấp xỉ về *thời gian (time)* và *bộ nhớ (space)* cần thiết để thực hiện một thuật toán
- *Độ phức tạp (complexity)* của một thuật toán là lượng thời gian và bộ nhớ cần để thực hiện một thuật toán
  - Thường được thể hiện thông qua các hàm của *kích thước của đầu vào (input size)*
- Để đánh giá và so sánh độ phức tạp của các thuật toán khác nhau, ta giới thiệu *ký hiệu O-lớn (big-O notation)* và mô tả cách xấp xỉ độ tăng của các hàm thông qua ký hiệu này và từ đó xấp xỉ độ phức tạp của các thuật toán
- Với các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hoặc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, trong nhiều trường hợp ta cần tìm hiểu xem chúng tăng nhanh đến mức nào
  - So sánh các hàm: Nếu f *tăng nhanh hơn* g thì $f(x) \geq g(x)$ với "giá trị x đủ lớn"
  - So sánh tính hiệu quả của các thuật toán khác nhau cùng giải quyết một bài toán

Ký hiệu O-lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ta nói rằng f *là* $O(g)$ (đọc là "f là O-lớn của g" hoặc "f thuộc lớp $O(g)$") nếu *tồn tại các hằng số* C *và* k *sao cho* $|f(x)| \leq C|g(x)|$ *với mọi* $x > k$

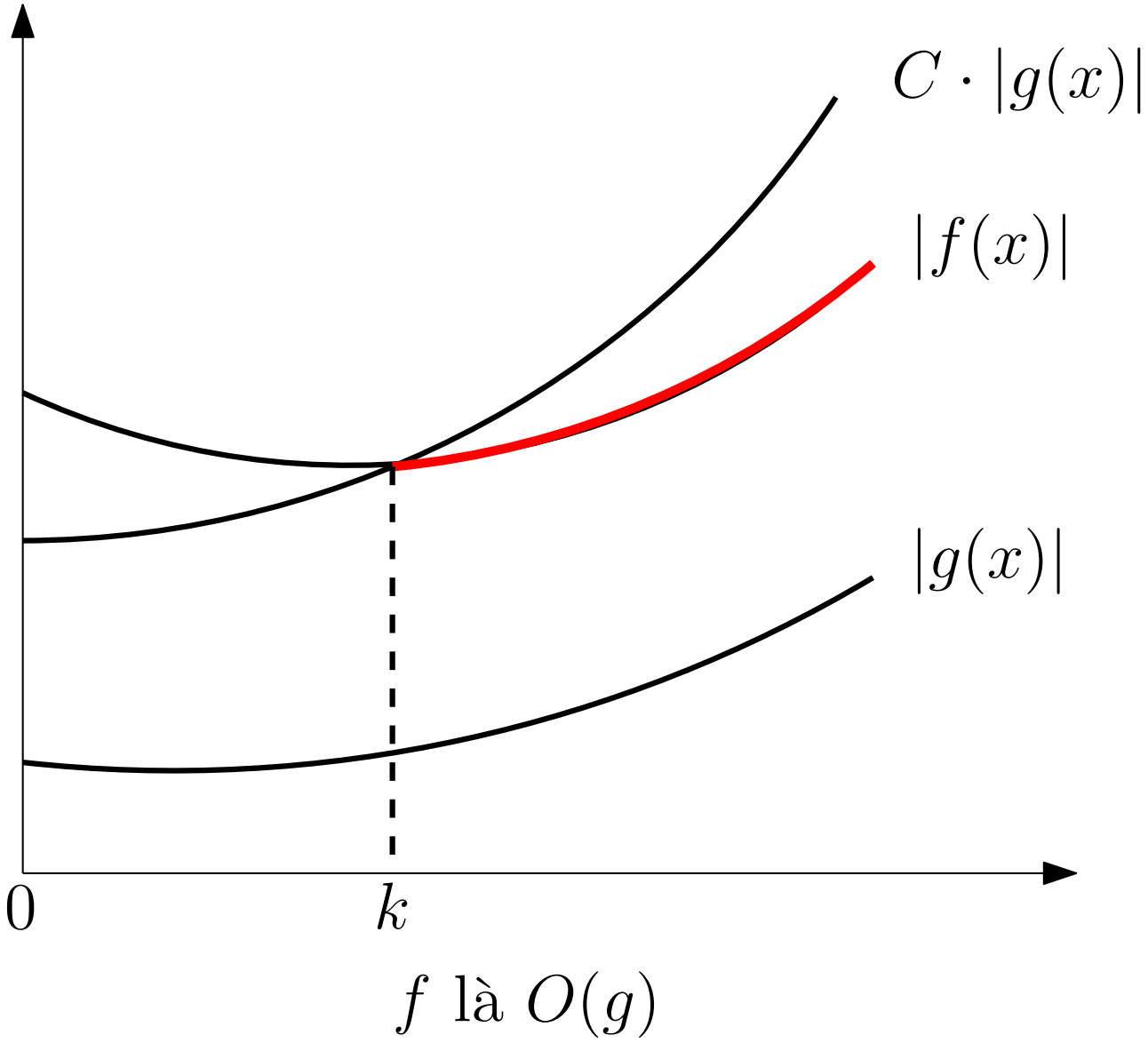
Ký hiệu O-lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với $x \in \mathbb{R}$ đủ lớn. Ta nói rằng f *là* $O(g)$ (đọc là "f là O-lớn của g" hoặc "f thuộc lớp $O(g)$") nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ *là hữu hạn*

- f là $O(g)$ nếu từ sau điểm k nào đó, giá trị của hàm f không vượt quá giá trị của một hằng số nhân với giá trị của hàm g. Ta cũng nói "f bị chặn trên bởi g"
- Các hằng số C và k được gọi là các *bằng chứng (witness)* cho mối liên hệ giữa f và g. *Để xác định f là $O(g)$, chỉ cần một cặp bằng chứng là đủ*

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Ví dụ 6

Ta chứng minh hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = x^2 + 2x + 1$ là $O(g)$ với $g(x) = x^2$ (Ta cũng viết $x^2 + 2x + 1$ là $O(x^2)$)

Cách 1:

- Chú ý rằng khi $x > 1$, ta có $x < x^2$ và $1 < x^2$
- Do đó với mọi $x > 1$, ta có

$$|f(x)| = |x^2 + 2x + 1| \leq |x^2 + 2x^2 + x^2| = 4|x^2|$$

- Ta chọn $C = 4$ và $k = 1$

Cách 2: Do $\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x^2 + 2x + 1|}{|x^2|} = 1$, ta có $f = O(g)$

Nhắc lại: Quy tắc L'Hospital (L'Hospital's rule)

Nếu $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ và $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$, thì $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$, trong đó $f'(n)$ và $g'(n)$ lần lượt là đạo hàm của $f(n)$ và $g(n)$

Ví dụ 7

Ta chứng minh x^2 là $O(2^x)$ bằng cách sử dụng định nghĩa O-lớn theo giới hạn. Ta có

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|x^2|}{|2^x|} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x \cdot \ln 2} \qquad \text{Quy tắc L'Hospital}$$

$$= \frac{2}{\ln 2} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^x}$$

$$= \frac{2}{\ln 2} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x \cdot \ln 2} \qquad \text{Quy tắc L'Hospital}$$

$$= 0.$$

Do đó, $x^2 = O(2^x)$

Chú ý

Nếu không đề cập gì thêm thì $\log(n) = \log_2(n)$

Bài tập 2

Chứng minh

(a) $7x$ *là* $O(x^3)$

(b) x^3 *không là* $O(x^2)$

(c) $1 + 2 + \cdots + n$ *là* $O(n^2)$

(d) $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ *là* $O(n^n)$

(e) $\log(n!)$ *là* $O(n \log n)$

(f) n^3 *là* $O(2^n)$

(g) $\log n$ *là* $O(n)$

(h) *Với các hằng số* $b > 1$ *và* $k > 0$, $\log_b(n^k)$ *là* $O(\log n)$

Bài tập 3

Hãy giải thích một hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là* $O(1)$ *nghĩa là gì*

Bài tập 4

Chứng minh rằng

(a) x^3 *là* $O(x^4)$ *nhưng* x^4 *không là* $O(x^3)$

(b) $3x^4 + 1$ *là* $O(x^4/2)$ *và* $x^4/2$ *là* $O(3x^4 + 1)$

(c) $x \log x$ *là* $O(x^2)$ *nhưng* x^2 *không là* $O(x \log x)$

(d) 2^n *là* $O(3^n)$ *nhưng* 3^n *không là* $O(2^n)$

Bài tập 5

Chứng minh rằng nếu $f(x)$ *là* $O(x)$ *thì* $f(x)$ *cũng là* $O(x^2)$

Bài tập 6

Chứng minh rằng nếu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *với* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *là các số thực (nghĩa là,* $f(x)$ *là một đa thức bậc* n*) thì* f *là* $O(x^n)$

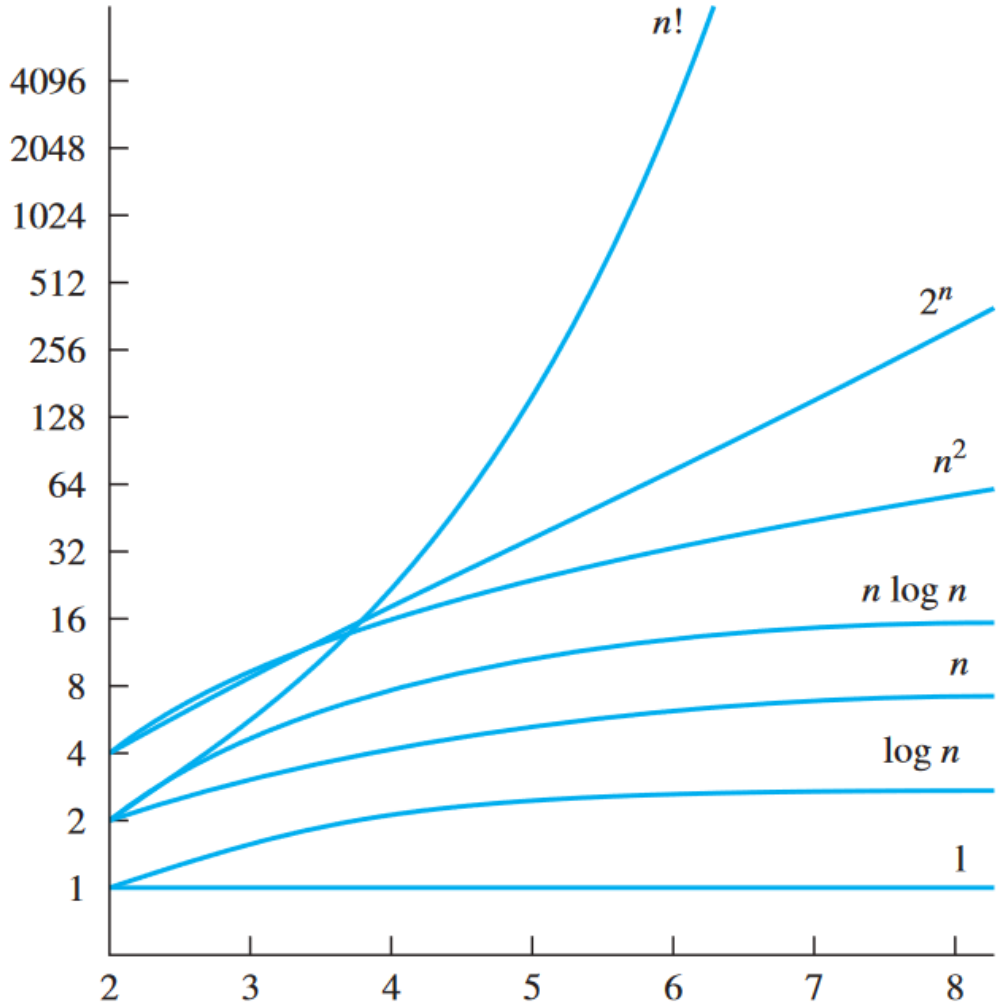
Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

- Ký hiệu $f(n) = O(g(n))$ thường được sử dụng để chỉ $f(n)$ là $O(g(n))$
  - Ký hiệu này không hoàn toàn chặt chẽ về mặt toán học, do $f(n)$ là một hàm còn $O(g(n))$ *là một tập hợp các hàm*
  - $f(n) = O(g(n))$ trên thực tế nghĩa là $f(n) \in O(g(n))$, do đó có thể viết $n = O(n^2)$ nhưng *không nên viết* $O(n^2) = n$
- Bạn có thể gặp biểu thức dạng "$f(n) + O(g(n)) = O(h(n))$"
  - Dấu "$=$" ở đây nghĩa là "$\subseteq$". Cụ thể, biểu thức trên cần được hiểu là tập hợp S gồm các hàm $f(n) + g_1(n)$ với $g_1(n) \in O(g(n))$ là tập con của tập $O(h(n))$
- Bạn có thể gặp biểu thức dạng "$f(n) \leq g(n) + O(h(n))$ với mọi $n \geq 0$" hoặc tương tự
  - Nghĩa là tồn tại $e(n)$ sao cho (a) $f(n) \leq g(n) + e(n)$ với mọi $n \geq 0$ và (b) $e(n) \in O(h(n))$
- Một số tác giả định nghĩa O-lớn bằng cách thay điều kiện $|f(x)| \leq C|g(x)|$ bằng $0 \leq f(x) \leq C(g(x))$. (Làm việc với giá trị tuyệt đối và khả năng các hàm $f(x)$ và $g(x)$ có thể nhận giá trị âm thường khó hơn là chỉ làm việc với các hàm nhân giá trị dương.) Định nghĩa theo cách này không hoàn toàn chặt chẽ. Ví dụ như hàm $\log x$ có thể nhận giá trị âm với x nhỏ

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Hình: Độ tăng của một số hàm thường dùng khi đánh giá với ký hiệu O-lớn [Rosen 2012]

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Một số xấp xỉ hữu ích

(1) Nếu $d > c > 1$, thì n^c là $O(n^d)$, nhưng n^d không là $O(n^c)$

(2) Nếu $b > 1$ và c, d là các số dương, thì $(\log_b n)^c$ là $O(n^d)$ nhưng n^d không là $O((\log_b n)^c)$

(3) Nếu $b > 1$ và d là số dương, thì n^d là $O(b^n)$ nhưng b^n không là $O(n^d)$

(4) Nếu $c > b > 1$, thì b^n là $O(c^n)$ nhưng c^n không là $O(b^n)$

Một số tính chất quan trọng

(a) Nếu $f_1(x) = O(g_1(x))$ và $f_2(x) = O(g_2(x))$ thì $(f_1 + f_2)(x) = O(g(x))$ trong đó $g(x) = \max\{|g_1(x)|, |g_2(x)|\}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

(b) Nếu $f_1(x) = O(g_1(x))$ và $f_2(x) = O(g_2(x))$ thì $(f_1 f_2)(x) = O(g_1(x) g_2(x))$

Bài tập 7

Ước lượng theo O-lớn hàm $f(n) = 3n \log n! + (n^2 + 3) \log n$

Ký hiệu Ω-lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ta nói rằng f *là* $\Omega(g)$ nếu *tồn tại các hằng số* $C > 0$ *và* k *sao cho* $|f(x)| \geq C|g(x)|$ *với mọi* $x > k$

Ký hiệu Ω-lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với $x \in \mathbb{R}$ đủ lớn. Ta nói rằng f *là* $\Omega(g)$ nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ *khác* 0

Bài tập 8

Chứng minh rằng f *là* $\Omega(g)$ *khi và chỉ khi* g *là* $O(f)$

Chú ý

f *là* $O(g)$ theo nghĩa nào đó là *"độ tăng của* $f \leq$ *độ tăng của* g*"*. Tuy nhiên, bạn cần cẩn thận! *Với hai số thực* $a, b \in \mathbb{R}$*, các bất đẳng thức* $a \leq b$ *và* $b \leq a$ *không thể cùng sai. Nhưng tồn tại hàm* f *sao cho* $f = O(g)$ *và* $f = \Omega(g)$ *cùng sai*

Bài tập 9 ($\star$)

Tìm các ví dụ của các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn các điều kiện (a) – (d) tương ứng*

	$f(n)$ *là* $O(n^3)$	$f(n)$ *không là* $O(n^3)$
$f(n)$ *là* $\Omega(n^3)$	*(a)*	*(b)*
$f(n)$ *không là* $\Omega(n^3)$	*(c)*	*(d)*

Cụ thể, ở (a), bạn cần tìm ví dụ về một hàm $f(n)$ *đồng thời là* $O(n^3)$ *và* $\Omega(n^3)$ *và chứng minh ví dụ bạn tìm ra là đúng. Tương tự cho các phần (b), (c), và (d)*

Ký hiệu Θ-lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ta nói rằng f *là* $\Theta(g)$ nếu f *là* $O(g)$ *và* f *là* $\Omega(g)$

Ký hiệu Θ-lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với $x \in \mathbb{R}$ đủ lớn. Ta nói rằng f *là* $\Theta(g)$ nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ *là hữu hạn và khác* 0

Bài tập 10

Chứng minh rằng $1 + 2 + \cdots + n$ *là* $\Theta(n^2)$

Bài tập 11

Chứng minh rằng với các hàm f, g *từ* $\mathbb{R}$ *đến* $\mathbb{R}$, f *là* $\Theta(g)$ *khi và chỉ khi tồn tại các hằng số dương* C_1, C_2, *và* k *sao cho* $C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$ *với mọi* $x > k$

Độ phức tạp tính toán
Độ tăng của các hàm

Ký hiệu o-nhỏ

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ta nói rằng f *là* $o(g)$ nếu *với mọi* $C > 0$ *tồn tại* k *sao cho* $|f(x)| < C|g(x)|$ *với mọi* $x > k$

Ký hiệu o-nhỏ

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với $x \in \mathbb{R}$ đủ lớn. Ta nói rằng f *là* $o(g)$ nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ *bằng* 0

Ký hiệu o-nhỏ

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ta nói rằng f *là* $o(g)$ nếu f *là* $O(g)$ *nhưng* f *không là* $\Omega(g)$

Độ phức tạp tính toán
Độ tăng của các hàm

Ký hiệu ω-nhỏ

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ta nói rằng f *là* $\omega(g)$ nếu *với mọi* $C > 0$ *tồn tại* k *sao cho* $|f(x)| > C|g(x)|$ *với mọi* $x > k$

Ký hiệu ω-nhỏ

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với $x \in \mathbb{R}$ đủ lớn. Ta nói rằng f *là* $\omega(g)$ nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ *bằng* ∞

Ký hiệu ω-nhỏ

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với $x \in \mathbb{R}$ đủ lớn. Ta nói rằng f *là* $\omega(g)$ nếu f *là* $\Omega(g)$ *nhưng* f *không là* $O(g)$

Độ phức tạp tính toán
Độ tăng của các hàm

Tóm lại, với các hàm f và g từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$

- f là $O(g)$ "f tăng không nhanh hơn g" tương tự "$\leq$"

$$\exists C, k \; \forall x > k \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$$

- f là $\Omega(g)$ "f tăng ít nhất nhanh như g" tương tự "$\geq$"

$$\exists C > 0, k \; \forall x > k \quad |f(x)| \geq C|g(x)|$$

- f là $\Theta(g)$ "f tăng nhanh như g" tương tự "$=$"

$$\exists C_1 > 0, C_2 > 0, k \; \forall x > k \quad C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$$

- f là $o(g)$ "f tăng chậm hơn g" tương tự "$<$"

$$\forall C > 0 \; \exists k \; \forall x > k \quad |f(x)| < C|g(x)|$$

- f là $\omega(g)$ "f tăng nhanh hơn g" tương tự "$>$"

$$\forall C > 0 \; \exists k \; \forall x > k \quad |f(x)| > C|g(x)|$$

Độ phức tạp tính toán
Định nghĩa và khái niệm

- Một thuật toán cần *luôn xuất ra kết quả đúng* và tốt nhất là *có hiệu suất cao*
- *Độ phức tạp (complexity)* của một tính toán là một cách đo độ "khó" của việc thực hiện tính toán đó
  - *Độ phức tạp theo thời gian (time complexity):* Số các toán tử hoặc số bước cần thiết
  - *Độ phức tạp theo bộ nhớ (space complexity):* Số các bit trong bộ nhớ cần thiết
- Phần lớn các thuật toán có độ phức tạp khác nhau đối với các đầu vào có kích thước khác nhau
  - Tìm kiếm trong một dãy dài thường tốn nhiều thời gian hơn tìm kiếm trong một dãy ngắn
- Do đó, độ phức tạp tính toán thường được biểu diễn dưới dạng một *hàm (function) của kích thước đầu vào (input size)*

Độ phức tạp tính toán
Độ phức tạp tính toán theo thời gian

- Khi xét độ phức tạp của một thuật toán, ta không quan tâm đến số lượng chính xác các toán tử/bit cần thiết mà chỉ cần một *đánh giá tiệm cận (asymptotic estimate)*
- Một công cụ hữu ích cho việc đánh giá độ phức tạp tính toán là các ký hiệu O-lớn, Ω-lớn, và Θ-lớn
- Chúng ta sẽ tập trung vào *độ phức tạp tính toán theo thời gian (time complexity)* (chủ yếu là *trong trường hợp xấu nhất*)
  - *Độ phức tạp trong trường hợp xấu nhất (worst-case complexity):* xấp xỉ thời gian nhiều nhất cần để giải quyết các trường hợp đầu vào với mỗi kích thước đầu vào
  - *Độ phức tạp trong trường hợp trung gian (average-case complexity):* xấp xỉ thời gian trung bình cần để giải quyết các trường hợp đầu vào với mỗi kích thước đầu vào
  - *Độ phức tạp trong trường hợp tốt nhất (best-case complexity):* xấp xỉ thời gian ít nhất cần để giải quyết các trường hợp đầu vào với mỗi kích thước đầu vào

Độ phức tạp tính toán
Độ phức tạp tính toán theo thời gian

- *Để đơn giản, ta thường mô tả thời gian chạy của thuật toán theo O-lớn*. Chú ý rằng với nhiều thuật toán, ta có thể thu được đánh giá tốt hơn với xấp xỉ theo Θ-lớn. Tuy nhiên không phải lúc nào ta cũng làm được điều này
- Nhiều tác giả viết "$f(x)$ là $O(g(x))$" trong khi điều họ thực sự muốn thể hiện là "$f(x)$ là $\Theta(g(x))$"

Độ phức tạp tính toán
Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Một số quy tắc tính độ phức tạp thuật toán theo thời gian

- Thời gian thực hiện các lệnh gán ($:=$), trả lại (**return**) là $O(1)$, và giả sử thời gian thực hiện các phép toán cơ bản (cộng, trừ, nhân, chia, so sánh, v.v...) cũng là $O(1)$
  - Chú ý rằng với phần cứng hữu hạn (64-bit CPU chỉ biểu diễn được tối đa các số nguyên có giá trị nhỏ hơn 2^{64} dưới dạng số nhị phân), việc cộng hai số nguyên độ dài n bit biểu diễn dưới dạng số nhị phân có độ phức tạp $O(n)$
- Độ phức tạp của một chuỗi tuần tự các bước là tổng của độ phức tạp của từng bước
- Thời gian thực hiện cấu trúc **if...then...else** là thời gian lớn nhất thực hiện các lệnh sau **then** hoặc sau **else** và thời gian kiểm tra điều kiện
- Thời gian thực hiện vòng lặp là tổng thời gian thực hiện các lần lặp và thời gian kiểm tra điều kiện lặp. Nếu thời gian thực hiện mỗi lần lặp là giống nhau, thì tổng thời gian thực hiện các lần lặp là tích của số lần lặp và thời gian thực hiện mỗi lần lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Bảng: Một số thuật ngữ thường dùng

Độ phức tạp	Thuật ngữ
$O(1)$	Độ phức tạp hằng số (constant complexity)
$O(\log n)$	Độ phức tạp lôgarit (logarithmic complexity)
$O(n)$	Độ phức tạp tuyến tính (linear complexity)
$O(n \log n)$	Độ phức tạp $n \log n$ (linearithmic complexity)
$O(n^b)$	Độ phức tạp đa thức (polynomial complexity)
$O(b^n)$, với $b > 1$	Độ phức tạp hàm mũ (exponential complexity)
$O(n!)$	Độ phức tạp giai thừa (factorial complexity)

Độ phức tạp tính toán
Ví dụ

Thuật toán 1: Tìm giá trị của phần tử lớn nhất

Input: $a_1, a_2, \ldots, a_n$: dãy số nguyên
Output: Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

```
1 v := a_1                                   t_1
2 for i := 2 to n do                         t_2
3     if a_i > v then                        t_4^i
4         v := a_i                           t_5
5 return v                                   t_3
```

$$T(n) = t_1 + t_2 + t_3$$

t_1, t_3, t_5 là $O(1)$

$T(n)$ là $O(n)$ (xấu nhất)

$T(n)$ là $O(n)$ (tốt nhất)

$$t_2 = \sum_{i=2}^{n} \left[t_4^i + (\text{t.g. tăng } i \text{ và kiểm tra } i \le n) \right]$$

$$t_4^i = t_5 + (\text{t.g. kiểm tra } a_i > v) = O(1)$$

Bài tập 12

(a) *Thiết kế thuật toán để tính tổng của tất cả các số hạng trong một dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cho trước*
(b) *Chứng minh thuật toán bạn thiết kế là đúng*
(c) *Đánh giá thời gian chạy của thuật toán bạn thiết kế*

Bài tập 13

Một chuỗi ký tự được gọi là chuỗi đối xứng (palindrome) khi viết từ trái qua phải và viết từ phải qua trái thì chuỗi không thay đổi. Một ví dụ là chuỗi `madam`.

(a) *Thiết kế thuật toán để kiểm tra xem một chuỗi ký tự có phải là chuỗi đối xứng hay không*
(b) *Đánh giá thời gian chạy của thuật toán bạn thiết kế*

Bài tập 14

Cho $f : A \to B$ là một hàm với các tập A, B là các tập con hữu hạn của $\mathbb{Z}$. Hãy thiết kế một thuật toán để kiểm tra xem

(a) *liệu f có là đơn ánh không;*
(b) *liệu f có là toàn ánh không.*

Trong mỗi trường hợp, hãy đánh giá thời gian chạy của thuật toán bạn thiết kế

Bài toán tìm kiếm

Cho một dãy n phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và một phần tử x. Tìm x trong dãy đã cho hoặc kết luận rằng x không có trong dãy

- Tìm kiếm tuyến tính (Linear Search)
- Tìm kiếm nhị phân (Binary Search)

Thuật toán
Tìm kiếm tuyến tính

- **Bài toán:**
  - **Input:** $a_1, \ldots, a_n$: dãy số nguyên, x: số nguyên
  - **Output:** Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy
- **Tìm kiếm tuyến tính:** Lần lượt xét các phần tử trong dãy cho đến khi tìm được x hoặc không còn phần tử nào để xét

Ví dụ 8 (Tìm kiếm tuyến tính)

- **Input:** Dãy $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 12$ và $x = 8$
- **Output:** Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	12
$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	
$\neq x$	$\neq x$	$\neq x$	$= x$	

Thuật toán 3: Tìm kiếm tuyến tính (Linear Search)

Input: $a_1, \ldots, a_n$: dãy số nguyên, x: số nguyên
Output: Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

```
1 i := 1                                          // Bắt đầu từ đầu dãy
2 while i ≤ n và x ≠ a_i do // Chưa xong và chưa tìm thấy
3 |   i := i + 1   // Đi tới vị trí tiếp theo trong dãy
4 if i ≤ n then
5 |   location := i                              // Tìm thấy x trong dãy
6 else
7 |   location := 0                    // Không tìm thấy x trong dãy
8 return location
```

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 3 (vòng **while** ở Dòng 2–3) tìm kiếm tuyến tính số nguyên x trong dãy $a_1, \ldots, a_n$

$$L := \textit{Ở trước lần lặp với biến } i, x \notin \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$$

- **Khởi động ($i = 1$):** Do $i - 1 = 0$, tập $\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ là tập rỗng, và do đó $x \notin \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$, nghĩa là L đúng
- **Duy trì:** Giả sử L đúng ở trước lần lặp với $i = k$ nào đó, nghĩa là $x \notin \{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$. Ta chứng minh L đúng ở trước lần lặp với $i = k + 1$, nghĩa là $x \notin \{a_1, \ldots, a_k\}$. Thật vậy, để thực hiện lần lặp $i = k$, điều kiện ở vòng **while** cần được thỏa mãn, nghĩa là $k \leq n$ và $x \neq a_k$. Kết hợp với giả thiết, ta có điều cần chứng minh
- **Dừng:** Vòng lặp **while** kết thúc khi $i = n + 1$ hoặc $x = a_i$ với $1 \leq i \leq n$. Với trường hợp đầu tiên, bất biến vòng lặp L cho ta $x \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$ và do đó kết luận không tìm được x. Với trường hợp thứ hai, x hiển nhiên thuộc dãy đã cho

Thuật toán
Tìm kiếm nhị phân

- **Bài toán:**
  - **Input:** $a_1, \ldots, a_n$: dãy số nguyên *thực sự tăng*, x: số nguyên
  - **Output:** Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy
- **Tìm kiếm nhị phân:** (Một ví dụ về kỹ thuật *chia để trị (divide and conquer)* trong thiết kế thuật toán)
  (1) Tính $m = \lfloor (1+n)/2 \rfloor$. Phần tử ở giữa của dãy là a_m
  (2) Chia dãy $a_1, \ldots, a_n$ thành hai dãy con (a) $a_1, \ldots, a_m$ và (b) $a_{m+1}, \ldots, a_n$. Nếu $x > a_m$ thì ta chỉ tìm x trong dãy con (b), còn ngược lại thì ta chỉ tìm x trong dãy con (a)
  (3) Làm tương tự cho đến khi không gian tìm kiếm chỉ còn một phần tử a_i. Nếu $x = a_i$ thì trả lại vị trí i của x, còn ngược lại thì trả lại 0

Thuật toán
Tìm kiếm nhị phân

Thuật toán 2: Tìm kiếm tuyến tính (Linear Search)

Input: $a_1, \ldots, a_n$: dãy số nguyên, x: số nguyên
Output: Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

```
1 i := 1                                              t1
2 while i ≤ n và x ≠ a_i do                           t2
3     i := i + 1                                      t5^i
4 if i ≤ n then                                       t3
5     location := i                                   t6
6 else                                                t3
7     location := 0                                   t7
8 return location                                     t4
```

$$T(n) = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

$T(n)$ là $O(n)$ (xấu nhất)

$T(n)$ là $O(1)$ (tốt nhất)

$t_1, t_4, t_5^i, t_6, t_7$ là $O(1)$

$$t_2 = \sum_{\{i \mid i \le n \wedge x \ne a_i\}} \left[t_5^i + (\text{t.g. kiểm tra } i \le n \text{ và } x \ne a_i) \right]$$

$$t_3 = \max\{t_6, t_7\} + (\text{thời gian kiểm tra } i \le n)$$

Ví dụ 9 (Tìm kiếm nhị phân)

- **Input:** Dãy $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 12$ và $x = 8$
- **Output:** Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	5	6	8	12
i		m		j
		$< x$		

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	5	6	8	12
			$i = m$	j
			$= x$	

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	5	6	8	12
			$i = j$	
			$= x$	

Thuật toán
Tìm kiếm nhị phân

Thuật toán 4: Tìm kiếm nhị phân (Binary Search)

Input: $a_1, \ldots, a_n$: dãy số nguyên *thực sự tăng*, x: số nguyên
Output: Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

```
1  i := 1                                  // Chỉ số bắt đầu khoảng tìm kiếm
2  j := n                                  // Chỉ số kết thúc khoảng tìm kiếm
3  while i < j do                          // Khi khoảng tìm kiếm có > 1 phần tử
4      m := ⌊(i + j)/2⌋                    // Chỉ số của phần tử ở giữa
5      if x > a_m then
6          i := m + 1
7      else
8          j := m
9  if x = a_i then
10     location := i
11 else
12     location := 0
13 return location
```

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 4 (vòng **while** ở Dòng 3–8) tìm kiếm nhị phân số nguyên x trong dãy thực sự tăng $a_1, \ldots, a_n$

$$L := \textit{Ở trước mỗi lần lặp với các biến } i, j\textit{, nếu } x \in \{a_1, \ldots, a_n\} \textit{ thì } x \in \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j\}$$

- **Khởi động ($i = 1, j = n$):** L hiển nhiên đúng
- **Duy trì:** Giả sử ở trước lần lặp với các biến k, ℓ, nếu $x \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ thì $x \in \{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_\ell\}$. Ta chứng minh rằng ở trước lần lặp kế tiếp với các biến (a) $k, \lfloor (k+\ell)/2 \rfloor$ hoặc (b) $\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor + 1, \ell$, nếu $x \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ thì tương ứng (a') $x \in \{a_k, \ldots, a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor}\}$ hoặc (b') $x \in \{a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor + 1}, \ldots, a_\ell\}$. Với (a), điều kiện ở Dòng 7 cần được thỏa mãn, nghĩa là $x \leq a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor}$. Do đó, nếu $x \in \{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_\ell\}$ thì (a') đúng. Với (b), điều kiện ở Dòng 5 cần được thỏa mãn, nghĩa là $x > a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor}$. Do đó, nếu $x \in \{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_\ell\}$ thì (b') đúng
- **Dừng:** Vòng lặp **while** dừng khi $i = j$, và từ L, ta có nếu $x \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ thì $x \in \{a_i\}$. Do đó Thuật toán 4 trả lại vị trí chính xác của x hoặc kết luận không tìm được x (Dòng 9–13)

Độ phức tạp tính toán

Tìm kiếm nhị phân

Thuật toán 3: Tìm kiếm nhị phân (Binary Search)

Input: $a_1, \ldots, a_n$: dãy số nguyên thực sự tăng, x: số nguyên

Output: Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

```
1  i := 1                                                        t1
2  j := n                                                        t1
3  while i < j do                                                t2
4      m := ⌊(i + j)/2⌋                                          t5^{i,j}
5      if x > a_m then                                           t6^{i,j}
6          i := m + 1                                            t7
7      else
8          j := m                                                t8
9  if x = a_i then                                               t3
10     location := i                                             t9
11 else
12     location := 0                                             t10
13 return location                                               t4
```

Độ phức tạp tính toán

Tìm kiếm nhị phân

$$T(n) = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

$t_1, t_4, t_5^{i,j}, t_7, \ldots, t_{10}$ là $O(1)$

$$t_2 = \sum_{\text{lần lặp } \textbf{while} \text{ với cặp } i,j} \Big[(t_5^{i,j} + t_6^{i,j}) + (\text{thời gian kiểm tra } i < j) \Big]$$

$$t_6^{i,j} = \max\{t_7, t_8\} + (\text{thời gian kiểm tra } x > a_m)$$

$$t_3 = \max\{t_9, t_{10}\} + (\text{thời gian kiểm tra } x = a_i)$$

cặp i, j trong vòng **while** là $O(\log n)$

$T(n)$ là $O(\log n)$ (xấu nhất)

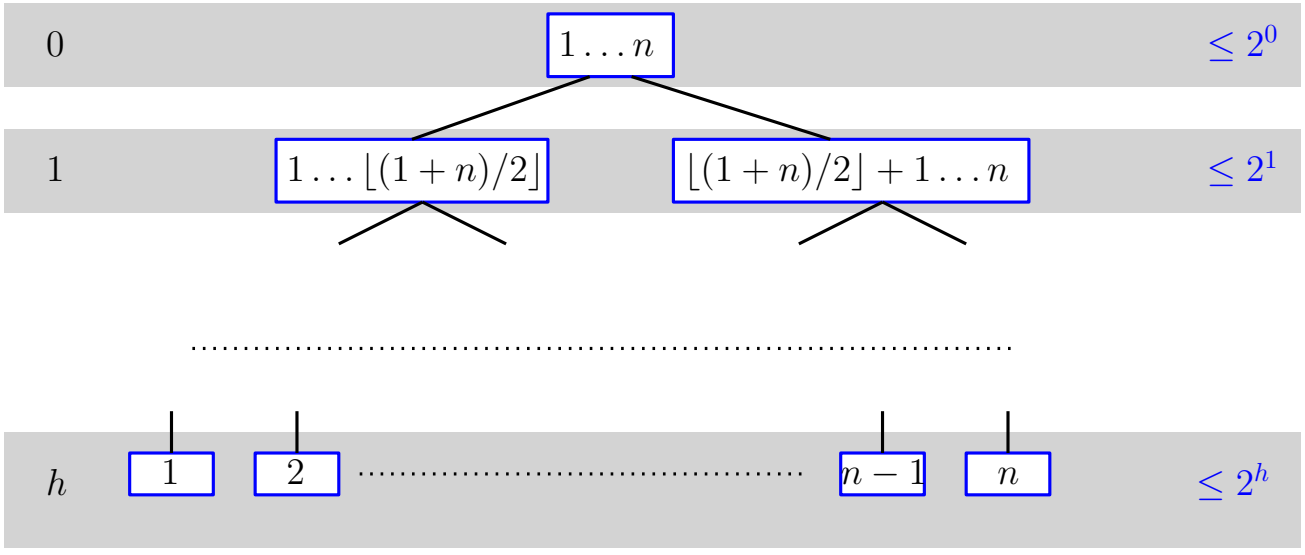
$T(n)$ là $O(\log n)$ (tốt nhất)

Độ phức tạp tính toán

Tìm kiếm nhị phân

*Tại sao # cặp i, j trong vòng lặp **while** là $O(\log n)$?*

- Đánh số các lần lặp **while** lần lượt bằng $0, 1, 2, \ldots, h$. Mỗi hàng $0, 1, 2, \ldots, h$ liệt kê các khoảng $i \ldots j$ có khả năng xuất hiện ở lần lặp đánh số tương ứng $\Rightarrow$ *# cặp $i, j \leq h + 1$*
- Vòng lặp **while** dừng ở lần lặp h khi mọi khoảng $i \ldots j$ chỉ có một phần tử $i = j$
- Ở mỗi hàng $k \in \{1, \ldots, h\}$, tổng số phần tử của tất cả các khoảng là n, và có $\leq 2^k$ khoảng
- Do đó, *h là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn $n \leq 2^h$*. Suy ra $h = \lceil \log n \rceil = O(\log n)$



Bài toán sắp xếp

Cho một dãy n phần tử và một cách so sánh hai phần tử bất kỳ trong dãy. Hãy sắp xếp dãy theo thứ tự tăng dần

- Sắp xếp nổi bọt (Bubble Sort)
- Sắp xếp chèn (Insertion Sort)

Thuật toán
Sắp xếp nổi bọt

- **Bài toán:**
  - **Input:** $a_1, a_2, \ldots, a_n$: dãy số thực ($n \geq 2$)
  - **Output:** Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần
- **Sắp xếp nổi bọt:**
  (1) So sánh các phần tử liên tiếp, bắt đầu với cặp (a_1, a_2)
  (2) Nếu $a_1 > a_2$, hoán đổi giá trị của chúng
  (3) Lặp lại (1) và (2) với các cặp (a_2, a_3), (a_3, a_4), $\ldots$, (a_{n-1}, a_n). Lúc này, a_n là phần tử lớn nhất trong dãy
  (4) Lặp lại (1) – (3) với dãy $a_1, \ldots, a_{n-1}$, và sau đó với dãy $a_1, \ldots, a_{n-2}$, dãy $a_1, \ldots, a_{n-3}, \ldots$, cho đến dãy a_1, a_2

Ví dụ 10

- **Input:** Dãy $a_1 = 34, a_2 = 13, a_3 = 21, a_4 = 3, a_5 = 89$
- **Output:** Dãy sắp xếp theo thứ tự tăng dần

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	34	13	21	3	89
$i = 1$	13	21	3	34	89
$i = 2$	13	3	21	34	
$i = 3$	3	13	21		
$i = 4$	3	13			
	3	13	21	34	89

Thuật toán

Sắp xếp nổi bọt

Thuật toán 5: Sắp xếp nổi bọt (Bubble Sort)

Input: $a_1, a_2, \ldots, a_n$: dãy số thực ($n \geq 2$)
Output: Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

```
1 for i := 1 to n − 1 do                          // Lặp lại n − 1 lần
2     for j := 1 to n − i do
3         if a_j > a_{j+1} then
4             Hoán đổi giá trị của a_j và a_{j+1}
5     // a_{n−i+1}, ..., a_n đã được sắp xếp
6 // a_1, ..., a_n đã được sắp xếp
```

Thuật toán
Sắp xếp nổi bọt

Thuật toán 5 có hai vòng lặp **for**: vòng lặp trong ở Dòng 2–4 và vòng lặp ngoài (chứa vòng lặp trong) ở Dòng 1–4

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp ngoài là

  Ở trước lần lặp i, dãy $a_{n-i+1}, \ldots, a_n$ là dãy tăng chứa các phần tử lớn hơn hoặc bằng mọi phần tử trong $a_1, \ldots, a_{n-i}$

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp trong là

  Ở trước lần lặp j, $a_j = \max\{a_1, \ldots, a_j\}$

Sơ đồ chứng minh:

- Chứng minh bước **Khởi động** cho bất biến vòng lặp ngoài
- Ở bước **Duy trì** cho vòng lặp ngoài
  - Chứng minh bất biến vòng lặp trong (**Khởi động**, **Duy trì**, **Dừng**)
  - Sử dụng bất biến vòng lặp trong để chứng minh cho vòng lặp ngoài
- Chứng minh bước **Dừng** cho bất biến vòng lặp ngoài

Thuật toán
Sắp xếp nổi bọt

Thuật toán 4: Sắp xếp nổi bọt (Bubble Sort)

Input: $a_1, a_2, \ldots, a_n$: dãy số thực $(n \geq 2)$

Output: Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

```
1 for i := 1 to n − 1 do                                   — t_1
2     for j := 1 to n − i do                               — t_2^i
3         if a_j > a_{j+1} then                            — t_3^j
4             Hoán đổi giá trị của a_j và a_{j+1}          — t_4
```

$$T(n) = t_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \left[t_2^i + (\text{t.g. tăng } i \text{ và kiểm tra } i \leq n-1) \right]$$

$$t_2^i = \sum_{j=1}^{n-i} \left[t_3^j + (\text{t.g. tăng } j \text{ và kiểm tra } j \leq n-i) \right]$$

t_4 là $O(1)$ $(v := a_j,\ a_j := a_{j+1},\ a_{j+1} := v)$

$t_3^j = t_4 + (\text{thời gian kiểm tra } a_j > a_{j+1})$

$T(n)$ là $O(n^2)$

(xấu nhất)

$T(n)$ là $O(n^2)$

(tốt nhất)

Thuật toán
Sắp xếp chèn

- **Bài toán:**
  - **Input:** $a_1, a_2, \ldots, a_n$: dãy số thực ($n \geq 2$)
  - **Output:** Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần
- **Sắp xếp chèn:**
  (1) Xét a_2. Tìm vị trí trong dãy 1 phần tử a_1 để chèn a_2 bằng cách duyệt toàn bộ các phần tử trong dãy từ phải sang trái và đẩy mọi phần tử lớn hơn a_2 sang phải một bước. Chèn a_2 vào ngay sau phần tử đầu tiên nhỏ hơn hoặc bằng a_2 khi duyệt dãy ở trên. Đến đây dãy a_1, a_2 đã được sắp xếp theo đúng thứ tự

  (2) Xét a_3. Tìm vị trí trong dãy 2 phần tử a_1, a_2 để chèn a_3 bằng cách duyệt toàn bộ các phần tử trong dãy từ phải sang trái và đẩy mọi phần tử lớn hơn a_3 sang phải một bước. Chèn a_3 vào ngay sau phần tử đầu tiên nhỏ hơn hoặc bằng a_3 khi duyệt dãy ở trên. Đến đây dãy a_1, a_2, a_3 đã được sắp xếp theo đúng thứ tự

  (3) Tiếp tục với $a_4, a_5, \ldots, a_n$. Cuối cùng ta thu được dãy $a_1, \ldots, a_n$ đã được sắp xếp theo đúng thứ tự

Thuật toán
Sắp xếp chèn

- **Input:** Dãy $a_1 = 34, a_2 = 13, a_3 = 21, a_4 = 3, a_5 = 89$
- **Output:** Dãy sắp xếp theo thứ tự tăng dần

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	34	13	21	3	89
$i = 2$	13	34	21	3	89
$i = 3$	13	21	34	3	89
$i = 4$	3	13	21	34	89
$i = 5$	3	13	21	34	89

Thuật toán 6: Sắp xếp chèn (Insertion Sort)

Input: $a_1, a_2, \ldots, a_n$: dãy số thực ($n \geq 2$)
Output: Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

```
1 for i = 2 to n do
2     m := a_i    // m sắp được chèn vào dãy a_1, ..., a_{i-1}
3     j := i - 1
4     while j ≥ 1 và m < a_j do    // Nếu m < a_j, đẩy a_j
        sang phải để có chỗ chèn m
5         a_{j+1} := a_j
6         j := j - 1
7     a_{j+1} := m                 // Chèn m
8     // Dãy a_1, ..., a_i đã được sắp thứ tự
```

Thuật toán
Sắp xếp chèn

Thuật toán 6 có hai vòng lặp: vòng lặp trong **while** ở Dòng 4–6 và vòng lặp ngoài **for** (chứa vòng lặp trong) ở Dòng 1–7

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp ngoài là

  Ở trước lần lặp i, dãy $a_1, \ldots, a_{i-1}$ là dãy tăng

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp trong là

  Ở trước lần lặp j, $m \leq \min\{a_{j+1}, \ldots, a_i\}$

Thuật toán
Sắp xếp chèn

Thuật toán 5: Sắp xếp chèn (Insertion Sort)

Input: $a_1, a_2, \ldots, a_n$: dãy số thực $(n \geq 2)$

Output: Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

```
1 for i = 2 to n do                                   ── t_1
2     m := a_i                                        ── t_2^i
3     j := i − 1                                      ── t_3^i
4     while j ≥ 1 và m < a_j do                       ── t_4^i
5         a_{j+1} := a_j                              ── t_6^{i,j}
6         j := j − 1                                  ──
7     a_{j+1} := m                                    ── t_5^i
```

$$T(n) = t_1 = \sum_{i=2}^{n} \left[(t_2^i + t_3^i + t_4^i + t_5^i) + (\text{t.g. tăng } i \text{ và kiểm tra } i \leq n) \right]$$

$t_2^i, t_3^i, t_5^i, t_6^{i,j}$ là $O(1)$

$$t_4^i = \sum_{1 \leq j \leq i-1 \text{ và } m < a_j} \left[t_6^{i,j} + (\text{t.g. kiểm tra } j \geq 1 \text{ và } m < a_j) \right]$$

$T(n)$ là $O(n^2)$ (xấu nhất)

$T(n)$ là $O(n)$ (tốt nhất)