VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Lý thuyết đồ thị I

Giới thiệu, Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu, Tính liên thông

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Giới thiệu
- Một số ví dụ
- Định nghĩa và khái niệm
- Đồ thị mới từ đồ thị cũ
- Một số đơn đồ thị đặc biệt
- Đồ thị hai phần

Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu
- Danh sách kề
- Ma trận kề
- Ma trận liên thuộc
- Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

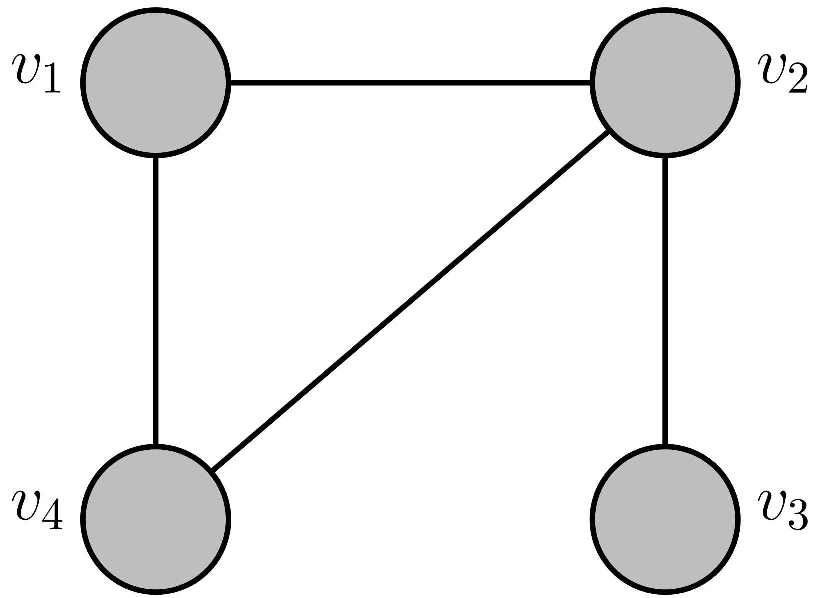
Tính liên thông trong đồ thị
- Đường đi
- Liên thông trong đồ thị vô hướng
- Liên thông trong đồ thị có hướng
- Đường đi và sự đẳng cấu
- Đếm số đường đi giữa các đỉnh

- Một *đồ thị (graph)* G bao gồm một tập các *đỉnh (vertex)* hoặc *nút (node)* V và một tập cách cạnh E nối các (cặp) đỉnh với nhau
- Có nhiều loại đồ thị khác nhau (vô hướng, có hướng, đồ thị đơn giản, đa đồ thị, v.v...), mỗi loại có cách định nghĩa cụ thể khác nhau, tùy thuộc vào việc các loại cạnh nào cần được xét
- Điều này dẫn tới việc tồn tại nhiều thuật ngữ khác nhau (và thường không thống nhất)
- Trước khi đi vào định nghĩa đồ thị một cách cụ thể, chúng ta xét một số ví dụ

Ví dụ 1 (Đơn đồ thị vô hướng (simple undirected graph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$$

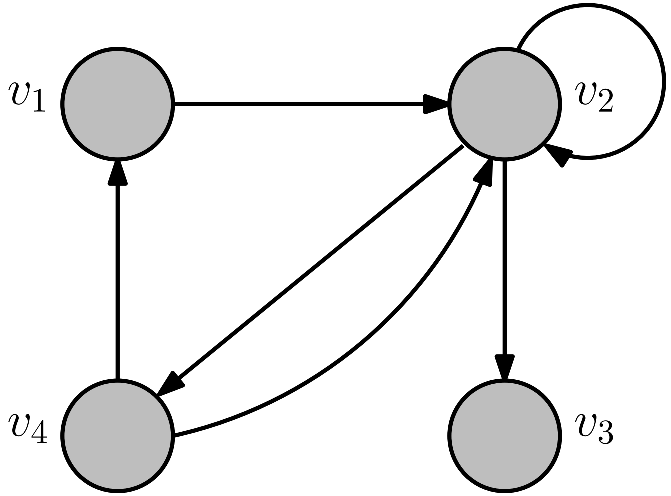


Hình: Chỉ có các cạnh *vô hướng*; có *nhiều nhất một cạnh* nối hai đỉnh phân biệt bất kỳ; và không có *khuyên (loop)*—cạnh nối giữa một đỉnh và chính nó

Ví dụ 2 (Đồ thị có hướng (và có khuyên) (directed graph (with loops)))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$

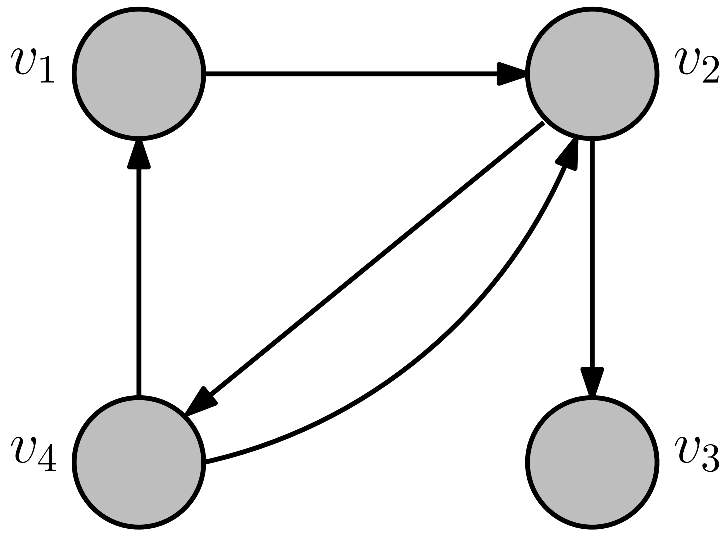


Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có *nhiều nhất một cạnh có hướng* nối từ một đỉnh bất kỳ sang một đỉnh khác bất kỳ; và *có khuyên*

Ví dụ 3 (Đơn đồ thị có hướng (simple directed graph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

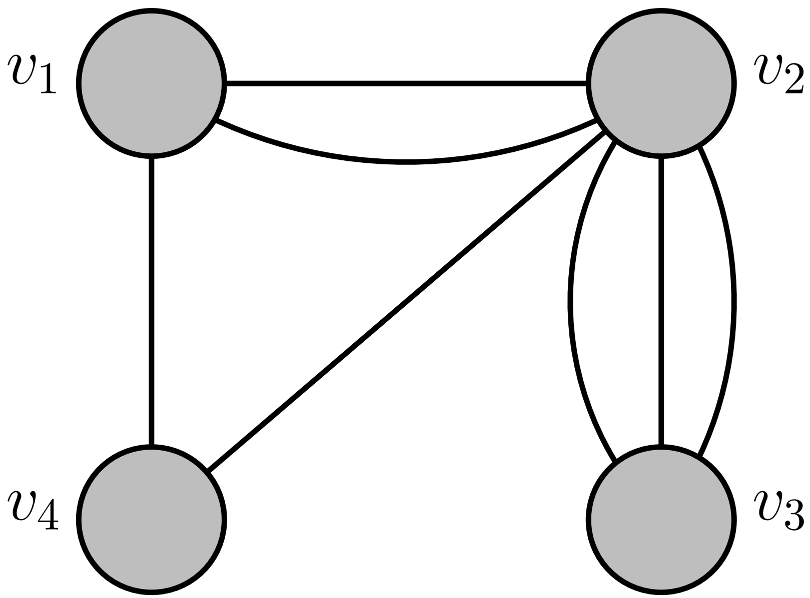
$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$



Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có *nhiều nhất một cạnh có hướng* nối từ một đỉnh bất kỳ sang một đỉnh khác bất kỳ; và *không có khuyên*

Ví dụ 4 (Đa đồ thị vô hướng (undirected multigraph))

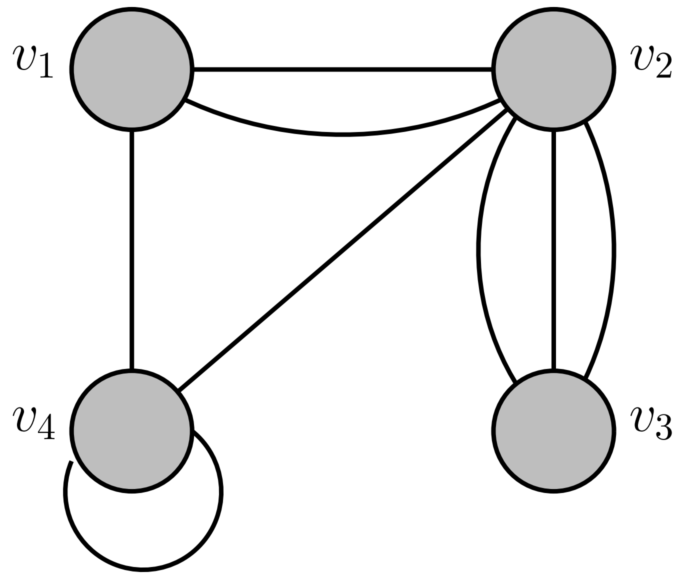
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$$
$$m(v_1v_2) = 2,\ m(v_2v_3) = 3$$
$$m(v_1v_4) = m(v_2v_4) = 1$$



Hình: Chỉ có các cạnh *vô hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *không có khuyên*

Ví dụ 5 (Đa đồ thị vô hướng có khuyên (undirected pseudograph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_4\}$$
$$m(v_1v_2) = 2,\ m(v_2v_3) = 3$$
$$m(v_1v_4) = m(v_2v_4) = m(v_4, v_4) = 1$$

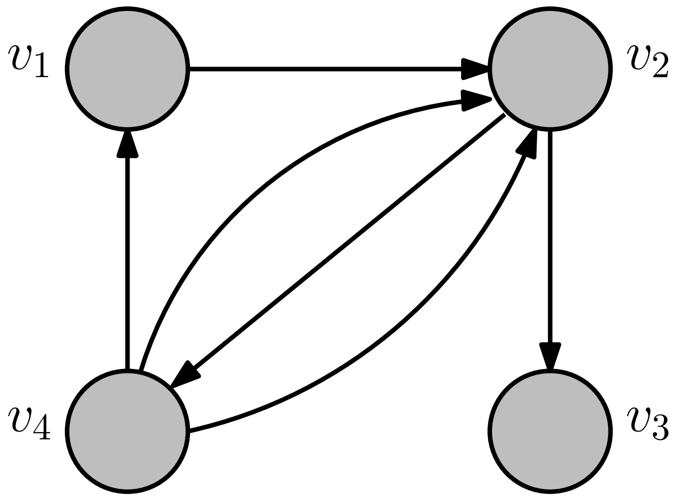


Hình: Chỉ có các cạnh *vô hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *có khuyên* (có thể có nhiều khuyên tại một đỉnh)

Ví dụ 6 (Đa đồ thị có hướng (directed multigraph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$
$$m(v_1, v_2) = m(v_2, v_3) = m(v_2, v_4) = m(v_4, v_1) = 1$$
$$m(v_4, v_2) = 2$$



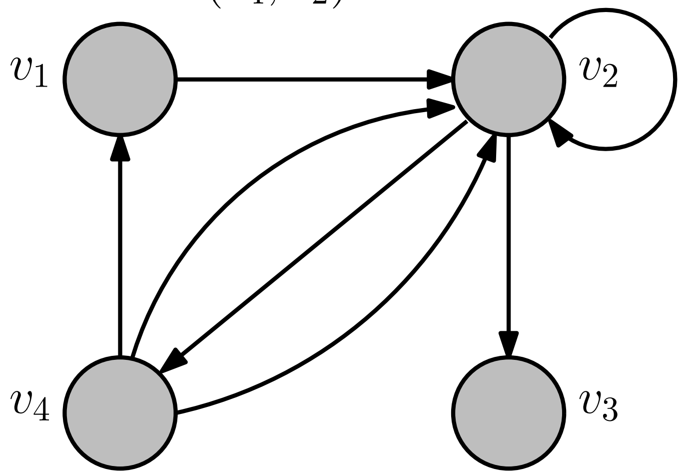
Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *không có khuyên* (khác với định nghĩa trong sách của Rosen)

Ví dụ 7 (Đa đồ thị có hướng và có khuyên (directed pseudograph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$

$$m(v_1, v_2) = m(v_2, v_2) = m(v_2, v_3) = m(v_2, v_4) = m(v_4, v_1) = 1$$
$$m(v_4, v_2) = 2$$



Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *có khuyên* (có thể có nhiều khuyên tại một đỉnh)

Giới thiệu
Một số ví dụ

	Loại	Cạnh	Có cạnh song song?	Có khuyên?
1	Đơn đồ thị vô hướng	Vô hướng	Không	Không
2	Đa đồ thị vô hướng	Vô hướng	Có	Không
3	Đa đồ thị vô hướng có khuyên	Vô hướng	Có	Có
4	Đồ thị có hướng	Có hướng	Không	Có
5	Đơn đồ thị có hướng	Có hướng	Không	Không
6	Đa đồ thị có hướng	Có hướng	Có	*Không*[1]
7	Đa đồ thị có hướng và có khuyên	Có hướng	Có	Có
8	Đồ thị hỗn hợp	Cả hai	Có	Có

- Định nghĩa đa đồ thị có hướng khác với định nghĩa trong sách của Rosen
- Các đồ thị sẽ được đề cập trong bài giảng
  - đơn đồ thị vô hướng ((simple, undirected) graph)
  - đồ thị có hướng (directed graph hoặc digraph)

[1] Khác với sách của Rosen

Đồ thị có hướng

Một *đồ thị có hướng (directed graph hoặc digraph)* $G = (V, E)$ bao gồm một tập khác rỗng V gồm các *đỉnh (vertex)* (hoặc *nút (node)*) và một tập $E \subseteq V \times V$ gồm các *cạnh có hướng (directed edge)* (hoặc *cung (arc)*). Mỗi cạnh có hướng $(u, v) \in E$ có một *đỉnh đầu (start vertex hoặc tail vertex)* u và *một đỉnh cuối (end vertex hoặc head vertex)* v

- Một đồ thị có hướng $G = (V, E)$ đơn giản là một tập hợp V cùng với một *quan hệ nhị phân (binary relation)* E trên V

- Với một tập V, gọi $[V]^k$ là *tập hợp tất cả các tập con k phần tử của V*. (Nói cách khác, $[V]^k$ là tập hợp tất cả các tổ hợp chập k của V)

Đồ thị vô hướng

Một *đơn đồ thị vô hướng (simple, undirected graph)* $G = (V, E)$ bao gồm một tập khác rỗng V gồm các *đỉnh (vertex)* (hoặc *nút (node)*), và một tập $E \subseteq [V]^2$ gồm cách *cạnh vô hướng (undirected edge)*. Mỗi cạnh $e = uv \in E$ (hoặc $e = \{u, v\} \in E$) có hai đỉnh phân biệt $u \neq v$ là các *đầu mút (endpoint)* của e. Ta nói các đỉnh u, v là *liền kề (adjacent)* trong đồ thị G, và cạnh e gọi là cạnh *liên thuộc (incident)* với các đỉnh u, v

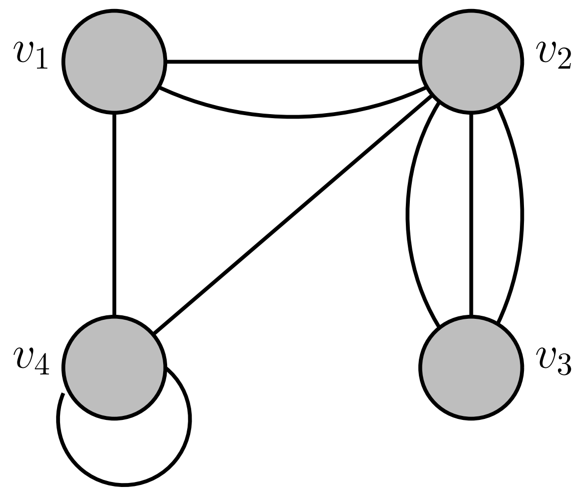
- Định nghĩa trên có thể áp dụng cho cả trường hợp V là tập có vô hạn phần tử (và đồ thị tương ứng được gọi là *đồ thị vô hạn (infinite graph)*). Tuy nhiên, trong bài giảng, chúng ta chỉ đề cập đến các *đồ thị hữu hạn (finite graph)*.

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng

- Tập hợp các đỉnh kề với đỉnh v của G, ký hiệu $N(v)$ hay $N_G(v)$, được gọi là *tập láng giềng (neighborhood)* của v.
- Với một tập các đỉnh $A \subseteq V$, ta ký hiệu $N(A)$ hoặc $N_G(A)$ để chỉ tập các đỉnh liền kề với ít nhất một đỉnh trong A. Nói cách khác, $N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$
- *Bậc (degree)* của một đỉnh v, ký hiệu $\deg(v)$, là số cạnh của G liên thuộc với đỉnh đó. Một khuyên tại đỉnh v (một cạnh nối v với chính nó) đóng góp 2 vào bậc của v

Ví dụ 8

- $N(v_1) = \{v_2, v_4\}$, $N(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}$, $N(v_3) = \{v_2\}$, $N(v_4) = \{v_1, v_2, v_4\}$
- $\deg(v_1) = \deg(v_3) = 3$, $\deg(v_2) = 6$, $\deg(v_4) = 4$



- Một đỉnh bậc 0 được gọi là một *đỉnh cô lập (isolated vertex)*
- Một đỉnh bậc 1 được gọi là một *đỉnh treo (pendant vertex)*

Định lý 1: Định lý bắt tay (Handshaking Lemma)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có m cạnh. Ta có

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Chứng minh.

- Với mỗi cạnh $e = uv \in E$, e được đếm chính xác hai lần trong $\sum_{v \in V} \deg(v)$: một lần trong $\deg(u)$ và một lần trong $\deg(v)$
- Do đó, cả hai vế của đẳng thức trên đều bằng hai lần số cạnh của G

□

Định lý 2

Một đồ thị vô hướng có một số chẵn các đỉnh có bậc lẻ

Chứng minh.

- Gọi V_1 là tập các đỉnh bậc chẵn và V_2 là tập các đỉnh bậc lẻ trong đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có m cạnh
- Ta có

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

  - $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ là một số chẵn, vì V_1 là tập tất cả các đỉnh có bậc chẵn
  - Do đó, $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ là một số chẵn, do $2m$ và $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ đều là số chẵn
  - Do V_2 là tập các đỉnh bậc lẻ, để $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ chẵn, cần phải có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ

Ví dụ 9

Có bao nhiêu cạnh trong một đồ thị vô hướng có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc 6?

- Tổng bậc của các đỉnh trong đồ thị là $6 \cdot 10 = 60$
- Theo Định lý bắt tay, nếu m là số cạnh của đồ thị thì $2m = 60$, và do đó $m = 30$

Ví dụ 10

Nếu một đồ thị vô hướng có 5 đỉnh thì liệu mỗi đỉnh có thể có bậc 3 hay không?

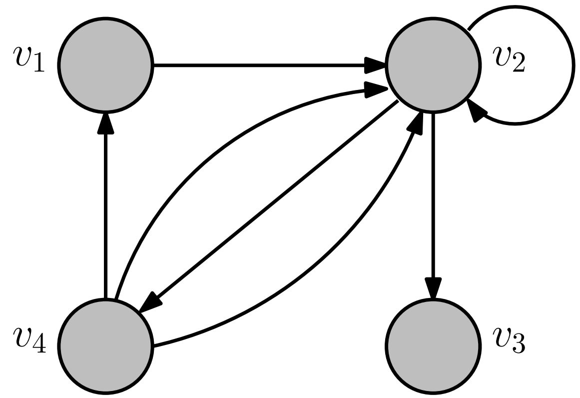
- Không. Vì nếu mỗi đỉnh có bậc 3 thì tổng bậc của các đỉnh là $3 \cdot 5 = 15$. Điều này mâu thuẫn với Định lý bắt tay: tổng bậc của các đỉnh phải là một số chẵn

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng

- *Bậc vào (in-degree)* của một đỉnh v, ký hiệu $\deg^-(v)$ là số các cạnh có đỉnh cuối (tail vertex) là v
- *Bậc ra (out-degree)* của một đỉnh v, ký hiệu $\deg^+(v)$ là số các cạnh có đỉnh đầu (head vertex) là v
- Một khuyên ở đỉnh v đóng góp 1 vào bậc vào và 1 vào bậc ra của v

Ví dụ 11

- $\deg^-(v_1) = \deg^-(v_3) = \deg^-(v_4) = 1$, $\deg^-(v_2) = 4$
- $\deg^+(v_1) = 1$, $\deg^+(v_2) = \deg^+(v_4) = 3$, $\deg^+(v_3) = 0$



Định lý 3

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Ta có

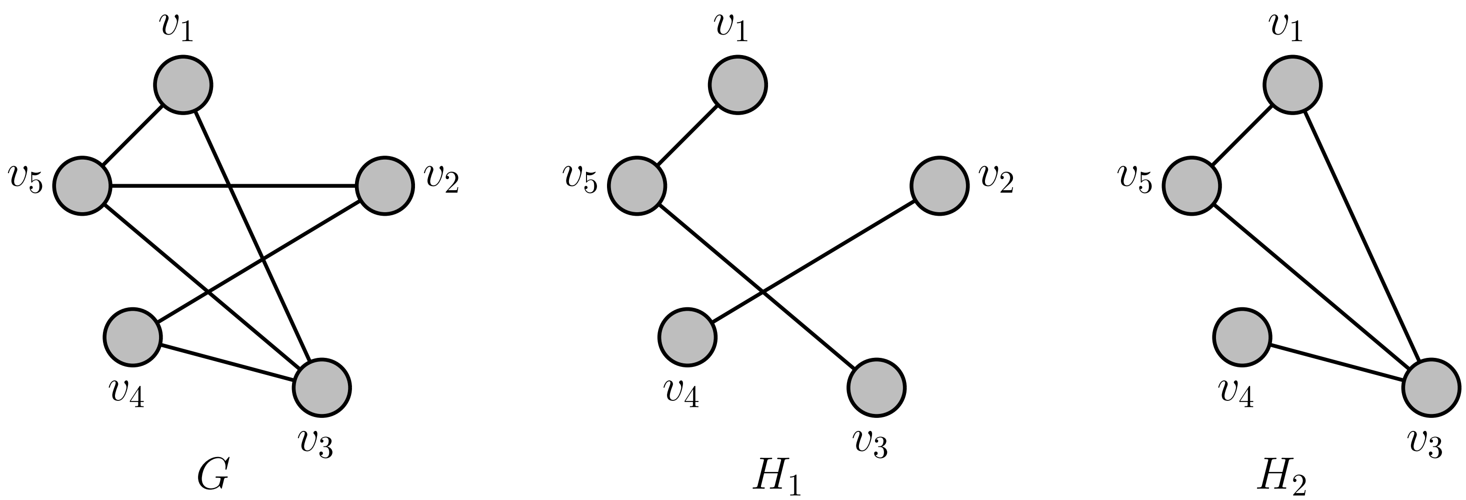
$$|E| = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v)$$

Chứng minh.

- Mỗi cạnh có hướng $e = (u, v) \in E$ đóng góp 1 vào $\deg^-(v)$ và 1 vào $\deg^+(u)$, với $u, v \in V$
- Do đó, $|E|$ = tổng các bậc vào = tổng các bậc ra

$\square$

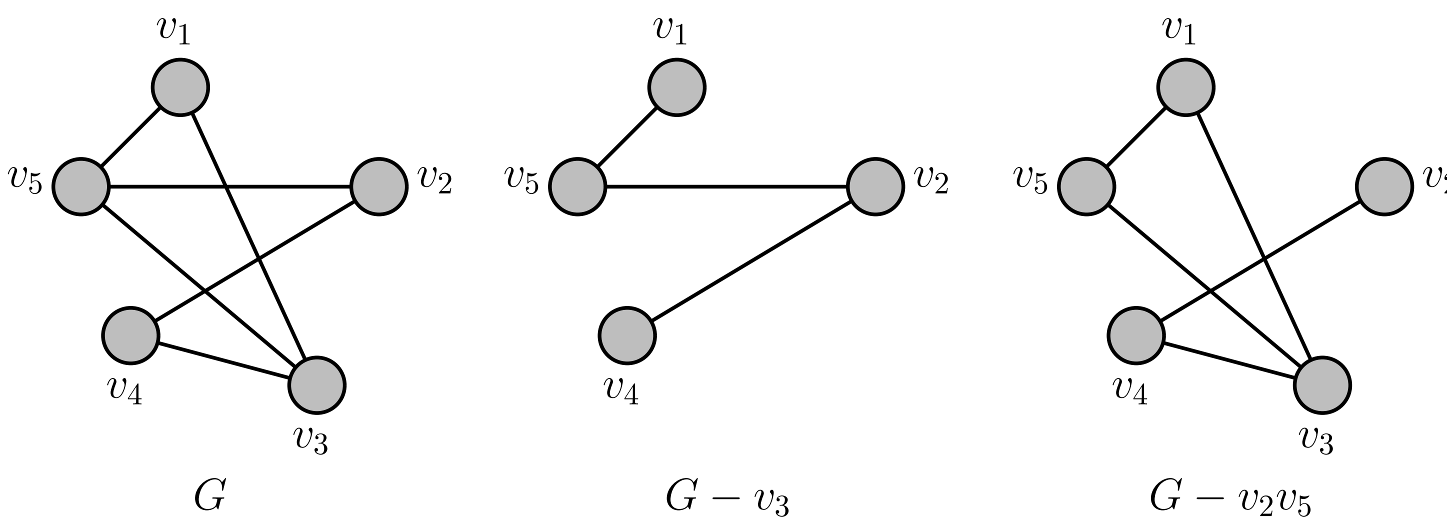
- Một *đồ thị con (subgraph)* của một đồ thị $G = (V, E)$ là một đồ thị $H = (W, F)$ trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$
- $H = (W, F)$ là một *đồ thị con thực sự (proper subgraph)* của $G = (V, E)$ nếu H là đồ thị con của G và $H \neq G$
- $H = (W, F)$ là một *đồ thị con cảm sinh (induced subgraph)* của $G = (V, E)$ nếu H là đồ thị con của G và với mọi cặp đỉnh $u, v \in W$, $uv \in F$ khi và chỉ khi $uv \in E$. Ta cũng nói *H là đồ thị con của G cảm sinh bởi W* và viết $H = G[W]$



Hình: H_1 là đồ thị con thực sự của G nhưng không phải đồ thị con cảm sinh. H_2 là đồ thị con cảm sinh của G

Cho đơn đồ thị $G = (V, E)$ vô hướng và các tập $V' \subseteq V$ $E' \subseteq E$

- Đồ thị $G - V'$ là đồ thị thu được bằng cách *xóa các đỉnh trong V' và các cạnh liên thuộc với chúng*. Với một đỉnh $v \in V'$, ta viết $G - v$ thay vì $G - \{v\}$
- Đồ thị $G - E'$ là đồ thị thu được bằng cách *xóa các cạnh trong E'*. Với một cạnh $e \in E'$, ta viết $G - e$ thay vì $G - \{e\}$

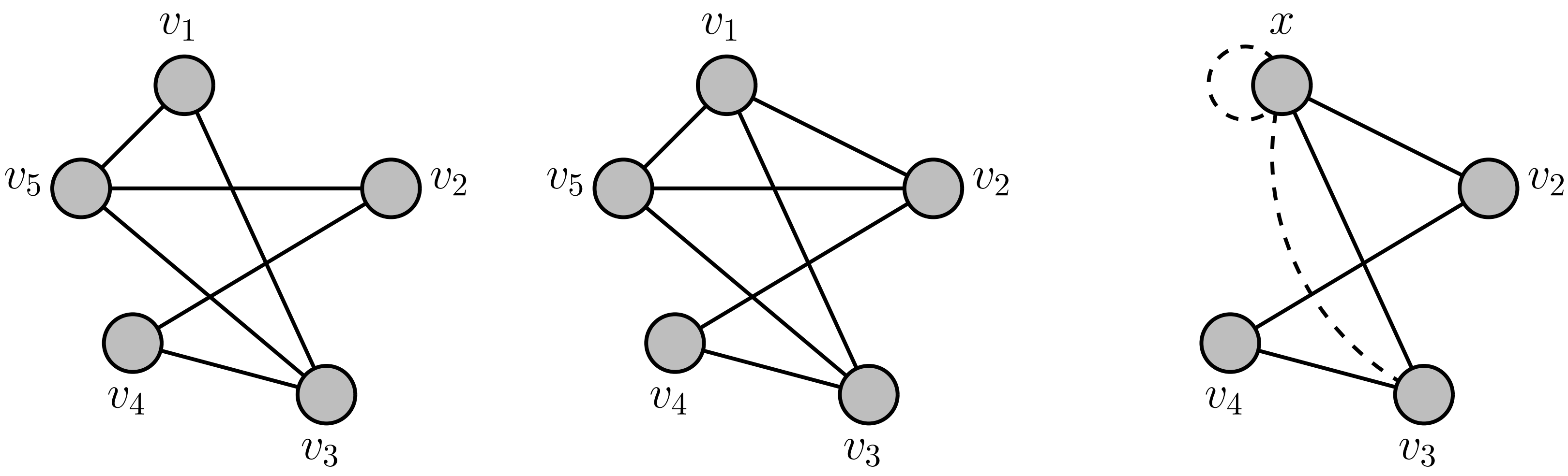


Giới thiệu

Đồ thị mới từ đồ thị cũ

Cho đơn đồ thị $G = (V, E)$ vô hướng với tập $E' \subseteq [V]^2 - E$

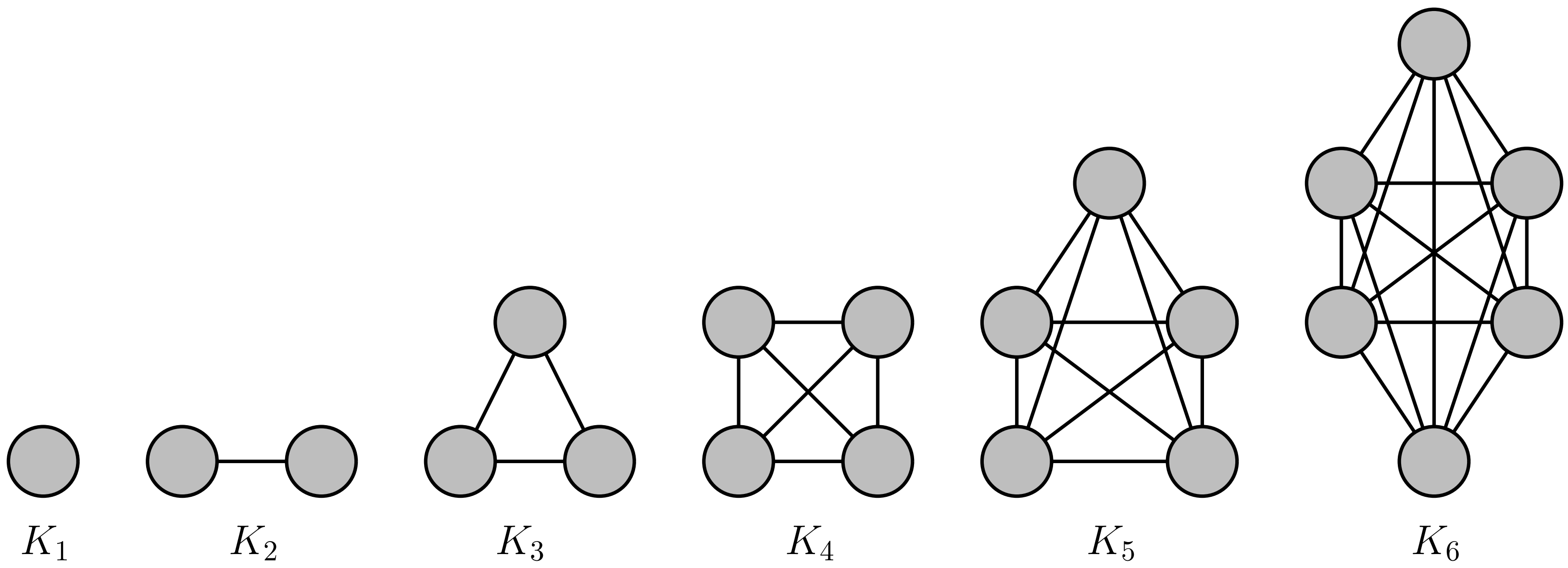
- Đồ thị $G + E'$ là đồ thị thu được bằng cách *thêm các cạnh trong E'*. Với $f \in E'$, ta viết $G + f$ thay vì $G + \{f\}$
- Đồ thị G/e là đồ thị thu được bằng *phép co (contraction) cạnh $e = uv \in E$*
  - gộp hai đỉnh u, v thành một đỉnh mới x, các cạnh kề với u và kề với v chuyển thành cạnh kề với x
  - xóa các khuyên tạo thành sau phép gộp
  - giữ lại một cạnh duy nhất trong số các cạnh song song



G $\qquad$ $G + v_1v_2$ $\qquad$ G/v_1v_5

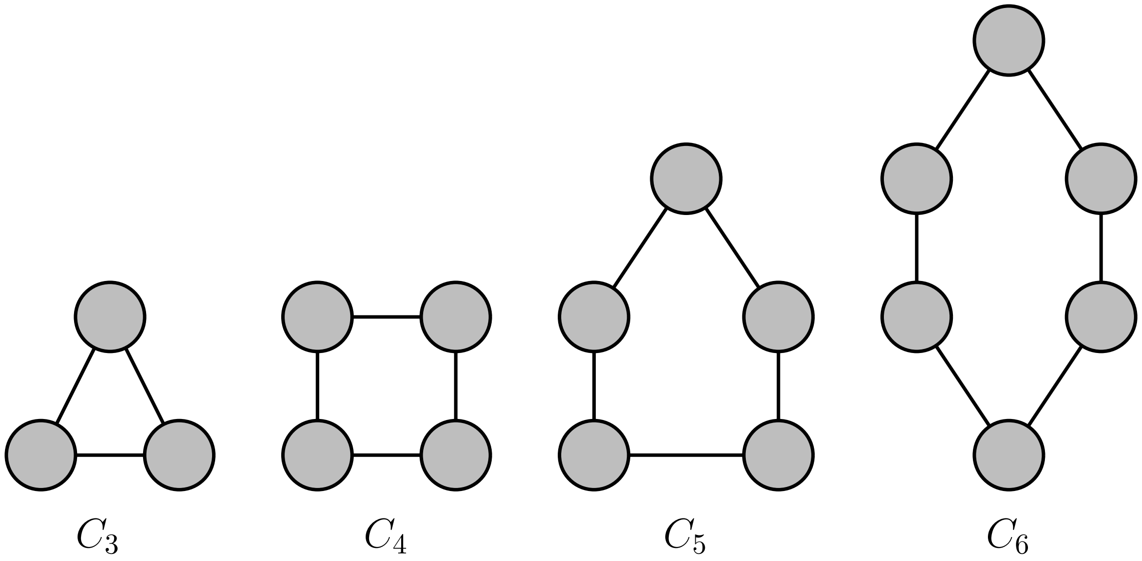
Đồ thị đầy đủ

Đồ thị đầy đủ (complete graph) n đỉnh, ký hiệu K_n, là một đơn đồ thị chứa đúng một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt



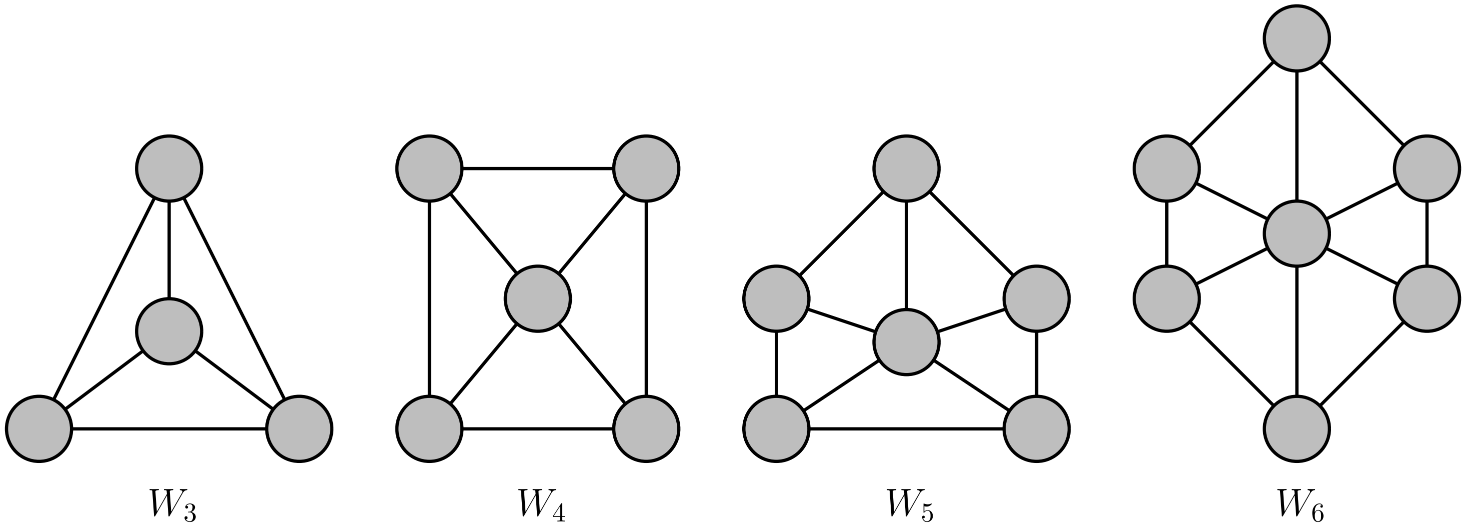
Chu trình

Một *chu trình (cycle)* n đỉnh với $n \geq 3$, ký hiệu C_n, là một đồ thị với các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ và các cạnh $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$, và v_nv_1



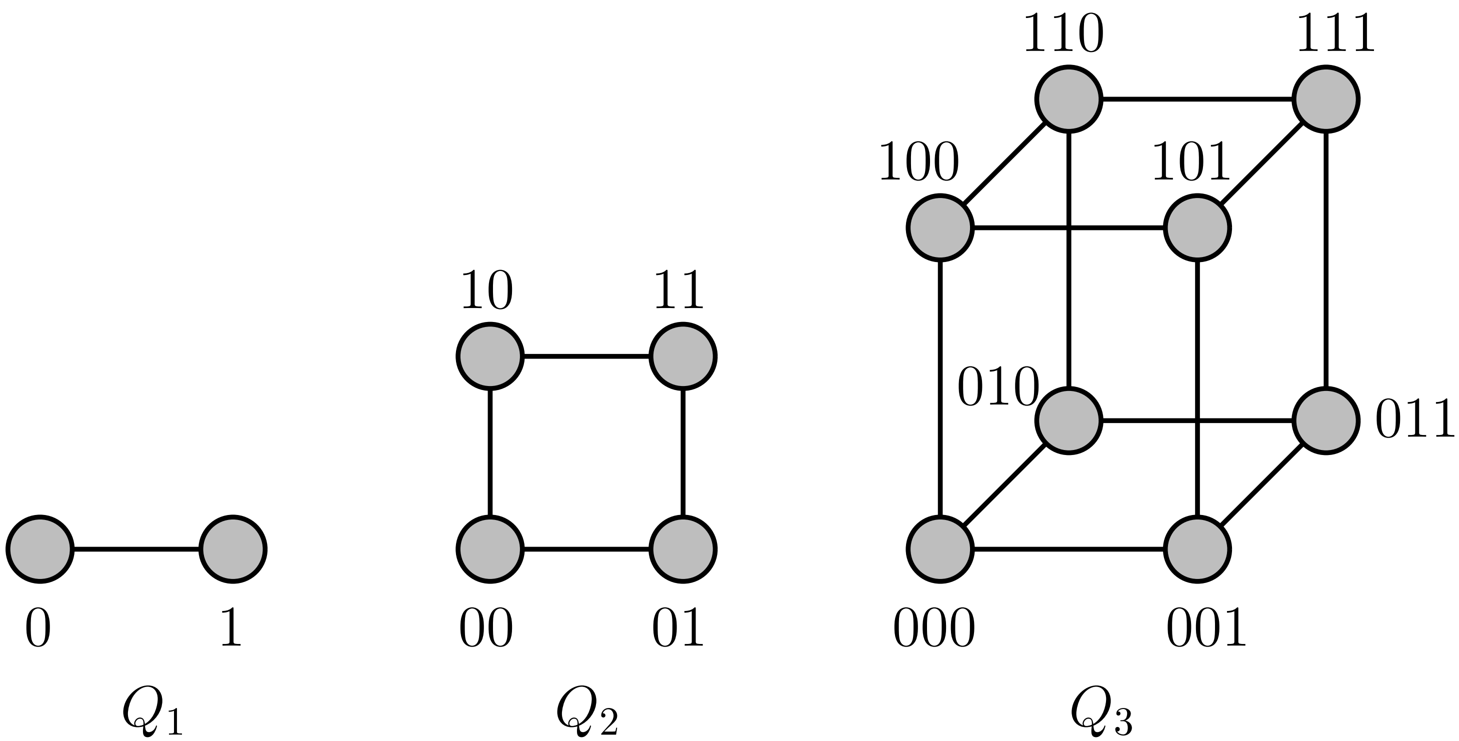
Đồ thị bánh xe

Một *đồ thị bánh xe (wheel)* gồm $n+1$ đỉnh với $n \geq 3$, ký hiệu W_n, là một đồ thị thu được bằng cách thêm một đỉnh mới vào C_n và nối đỉnh đó với mọi đỉnh của C_n bằng các cạnh mới



Các khối n chiều

Một *khối n chiều (n-dimensional cube)*, ký hiệu Q_n, là một đồ thị có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng một chuỗi nhị phân độ dài n, và hai đỉnh là liền kề khi và chỉ khi các xâu nhị phân biểu diễn chúng khác nhau đúng một bit

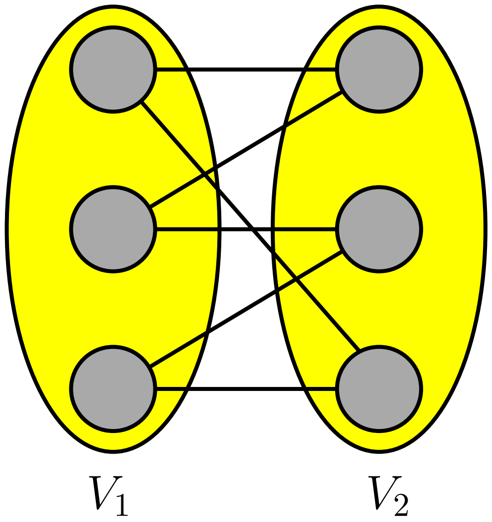


Đồ thị hai phần

Một đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được gọi là một *đồ thị hai phần (bipartite graph)* nếu tồn tại các tập $V_1 \subseteq V$ và $V_2 \subseteq V$ thỏa mãn $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, và mỗi cạnh của G nối một đỉnh thuộc V_1 và một đỉnh thuộc V_2. Ta cũng ký hiệu $G = (V_1 \cup V_2, E)$

Ví dụ 12

C_6 là một đồ thị hai phần



Bài tập 1

*Chứng minh K_n không là đồ thị hai phần với mọi $n \geq 3$. (**Gợi ý:** Sử dụng phương pháp phản chứng)*

Bài tập 2

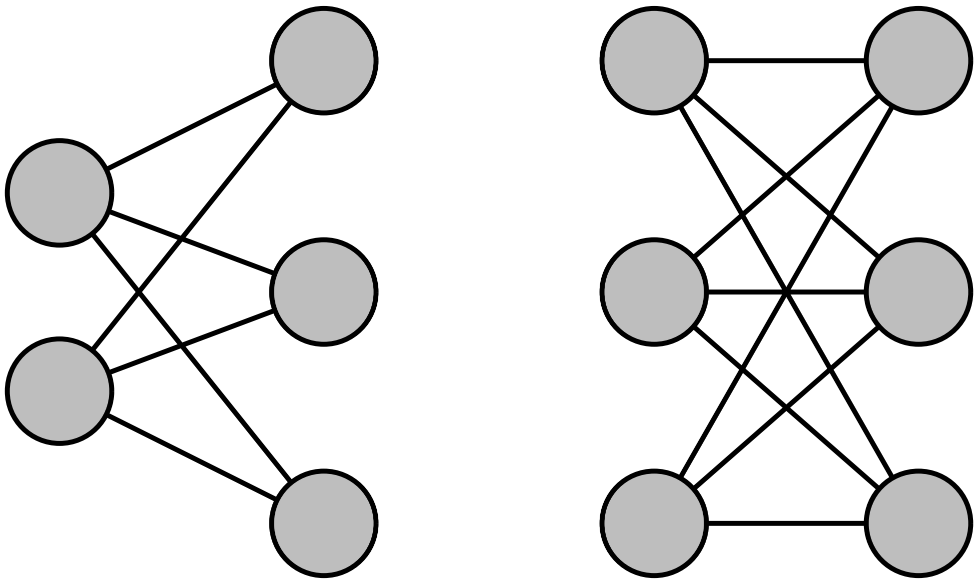
Cho đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có $n \geq 3$ đỉnh. Gọi $H = (W, F)$ là một đồ thị con của G có ít nhất hai đỉnh. Chứng minh rằng nếu G là đồ thị hai phần thì H cũng là đồ thị hai phần.

Bài tập 3

*Chứng minh W_n không là đồ thị hai phần với mọi $n \geq 3$. (**Gợi ý:** Sử dụng Bài tập 2 và kết quả K_3 không là đồ thị hai phần từ Bài tập 1)*

Đồ thị hai phần đầy đủ

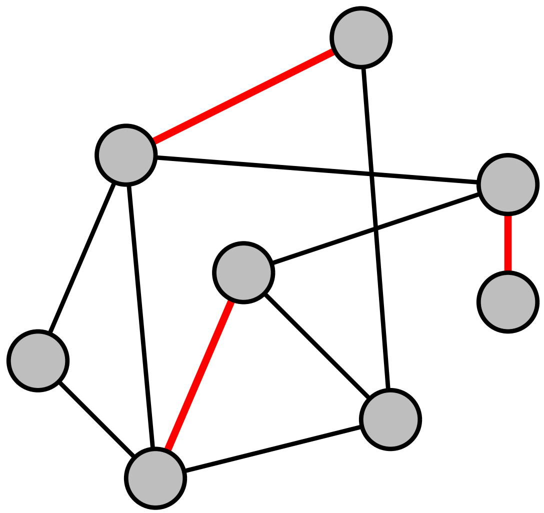
Một *đồ thị hai phần đầy đủ (complete bipartite graph)* là một đồ thị hai phần $G = (V_1 \cup V_2, E)$ thỏa mãn điều kiện với mọi $v_1 \in V_1$ và $v_2 \in V_2$ ta có $v_1 v_2 \in E$. Nếu $|V_1| = m$ và $|V_2| = n$, ta ký hiệu đồ thị G bằng $K_{m,n}$.



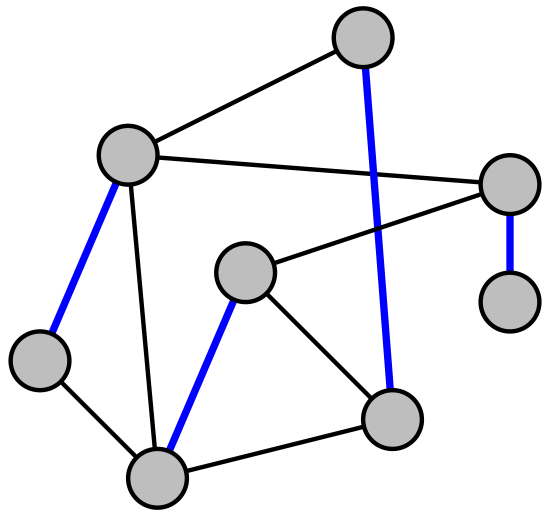
$K_{2,3}$ $K_{3,3}$

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng

- Một *ghép cặp (matching)* M trong G là một tập con của E thỏa mãn điều kiện không có hai cạnh nào trong M có cùng một đỉnh liên thuộc. Nói cách khác, nếu $uv, st \in M \subseteq E$ thì $\{u, v\} = \{s, t\}$ hoặc $\{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset$
- Một *ghép cặp cực đại (maximum matching)* trong G là một ghép cặp có số cạnh lớn nhất có thể



M là một ghép cặp

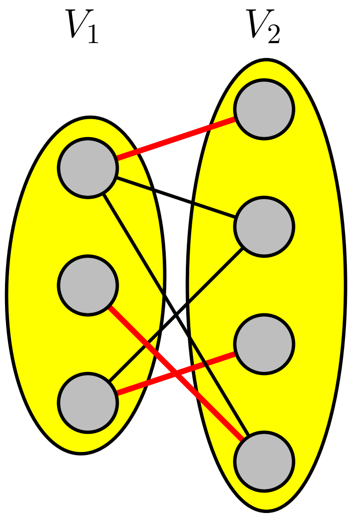


M là một ghép cặp cực đại

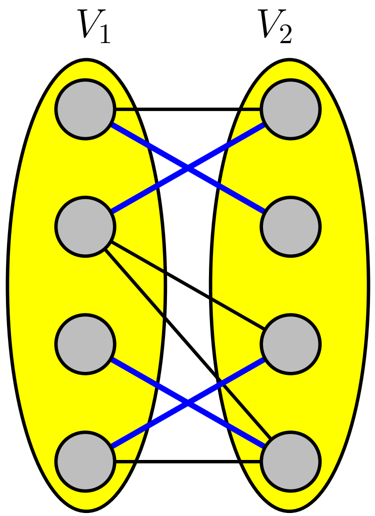
Giới thiệu
Đồ thị hai phần

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng

- Ta nói rằng một tập cạnh $W \subseteq E$ *bao phủ (cover)* một tập đỉnh $A \subseteq V$ nếu với mọi đỉnh $u \in A$, tồn tại một cạnh $e \in W$ sao cho e liên thuộc với u, nghĩa là $e = uv$ với đỉnh $v \in V$ nào đó
- Trong một đồ thị hai phần $G = (V_1 \cup V_2, E)$, một *ghép cặp đầy đủ (complete matching)* ứng với V_1 là một ghép cặp $M' \subseteq E$ bao phủ V_1, và một *ghép cặp hoàn hảo (perfect matching)* là một ghép cặp $M^\star \subseteq E$ bao phủ $V = V_1 \cup V_2$



M là một ghép cặp bao phủ V_1



M là một ghép cặp bao phủ V

Định lý 4: Định lý Hall (Hall's Marriage Theorem)

Cho $G = (V_1 \cup V_2, E)$ là một đồ thị hai phần. Tồn tại một ghép cặp $M \subseteq E$ bao phủ V_1 khi và chỉ khi với mọi $S \subseteq V_1$, $|S| \leq |N_G(S)|$

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử tồn tại một ghép cặp M bao phủ V_1. Do đó, M cũng bao phủ mọi tập con S của V_1. Do đó, với mỗi $v \in S$, tồn tại $w_v \in N_G(v)$ sao cho $vw_v \in M$. Do M là một ghép cặp, với hai đỉnh v, v' phân biệt thuộc $S \subseteq V_1$, ta có $\{v, w_v\} \cap \{v', w_{v'}\} = \emptyset$. Do đó, $\bigcup_{v \in S}\{w_v\} \subseteq \bigcup_{v \in S} N_G(v) = N_G(S)$. Suy ra

$$|N_G(S)| \geq |\bigcup_{v \in S}\{w_v\}| = |\bigcup_{v \in S}\{v\}| = |S|$$

$\square$

Chứng minh (tiếp).

($\Leftarrow$) Ta chứng minh phát biểu $P(m)$ sau đúng với mọi $m \geq 1$ bằng quy nạp mạnh

Cho $|V_1| = m$. Nếu với mọi $S \subseteq V_1$, $|S| \leq |N_G(S)|$ thì tồn tại một ghép cặp $M \subseteq E$ bao phủ V_1

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, do $m = 1$, ta có thể giả sử $V_1 = \{u\}$. Theo giả thiết, $|N_G(u)| \geq |\{u\}| = |V_1| = 1$. Do đó, tồn tại, $v \in N_G(u) \subseteq V_2$, nghĩa là $M = \{uv\}$ là một ghép cặp bao phủ V_1
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(j)$ đúng với mọi $1 \leq j \leq k$, trong đó $k \geq 1$ là số nguyên nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Ta xét hai trường hợp
  (1) **Với mọi tập con thực sự $S \neq \emptyset$ của V_1, $|N_G(S)| > |S|$**
  (2) **Tồn tại một tập con thực sự $T \neq \emptyset$ của V_1, $|N_G(T)| = |T|$**

$\square$

Chứng minh (tiếp).

(1) **Với mọi tập con thực sự $S \neq \emptyset$ của V_1, $|N_G(S)| > |S|$**

- Lấy một cạnh bất kỳ $e = uv \in E$ với $u \in V_1$ và $v \in V_2$
- Gọi $G' = G - \{u, v\}$. Áp dụng giả thiết quy nạp, tồn tại một ghép cặp M' trong G' bao phủ V_1'. (Tại sao?) Do đó, $M = M' \cup \{uv\}$ là một ghép cặp trong G bao phủ $V_1 = V_1' \cup \{u\}$

(2) **Tồn tại một tập con thực sự $T \neq \emptyset$ của V_1, $|N_G(T)| = |T|$**

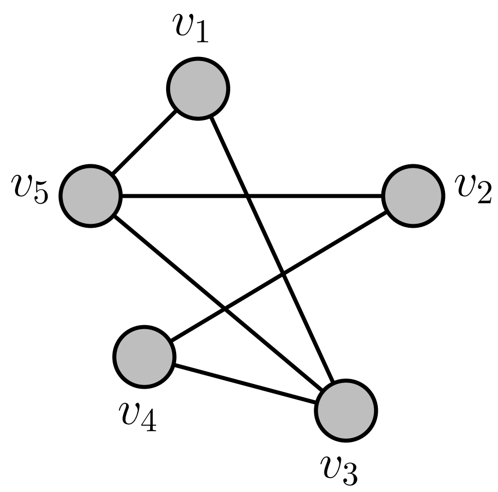
- Xét các đồ thị hai phần $H = G[T \cup N_G(T)]$ và $K = G[V_1 - T, V_2 - N_G(T)]$
- Áp dụng giả thiết quy nạp với H và K (Tại sao?), tồn tại một ghép cặp M_1 trong H bao phủ T và một ghép cặp M_2 trong K bao phủ $V_1 - T$. Do đó, $M = M_1 \cup M_2$ là một ghép cặp bao phủ $V_1 = T \cup (V_1 - T)$

$\square$

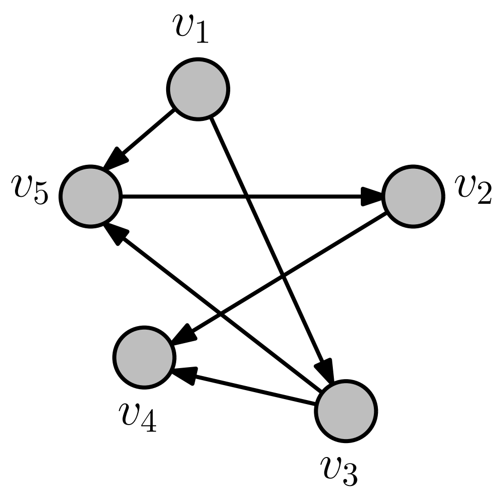
Chú ý:

- Chứng minh trên không cho ta một thuật toán (hiệu quả) để xây dựng một ghép cặp cực đại
- Một chứng minh khác của Định lý Hall (mà chúng ta không thảo luận ở đây) cho ta một thuật toán hiệu quả (trong thời gian đa thức) để tìm một ghép cặp cực đại

Một *danh sách kề (adjacency list)* biểu diễn một đồ thị không có cạnh song song bằng cách liệt kê các đỉnh liền kề với mỗi đỉnh trong đồ thị



Đỉnh	Các đỉnh liền kề
v_1	v_3, v_5
v_2	v_4, v_5
v_3	v_1, v_4, v_5
v_4	v_2, v_3
v_5	v_1, v_2, v_3

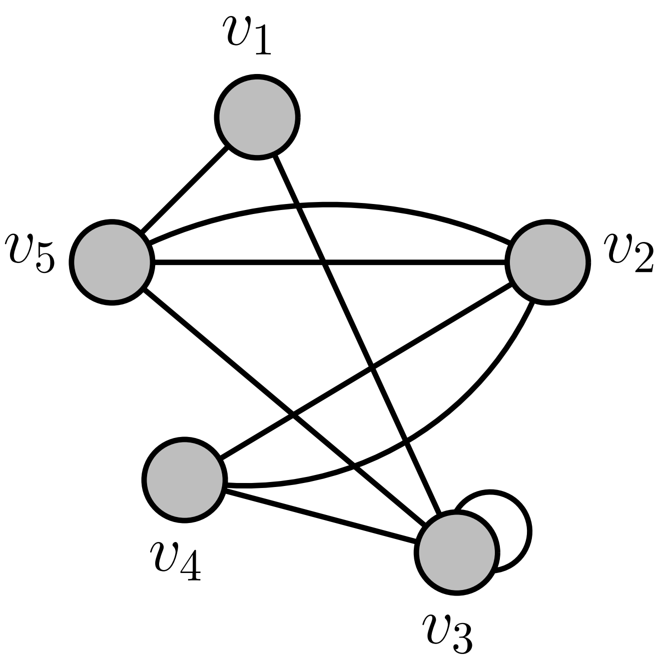


Đỉnh bắt đầu	Đỉnh kết thúc
v_1	v_3, v_5
v_2	v_4
v_3	v_4, v_5
v_4	
v_5	v_2

Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu
Ma trận kề

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$. *Ma trận kề (adjacency matrix)* A của G ứng với thứ tự các đỉnh như trên là một ma trận kích thước $n \times n$ trong đó mỗi phần tử a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ được định nghĩa như sau

$$a_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{nếu có } m_{ij} \text{ cạnh } v_iv_j \\ 0 & \text{nếu } v_iv_j \notin E \end{cases}$$



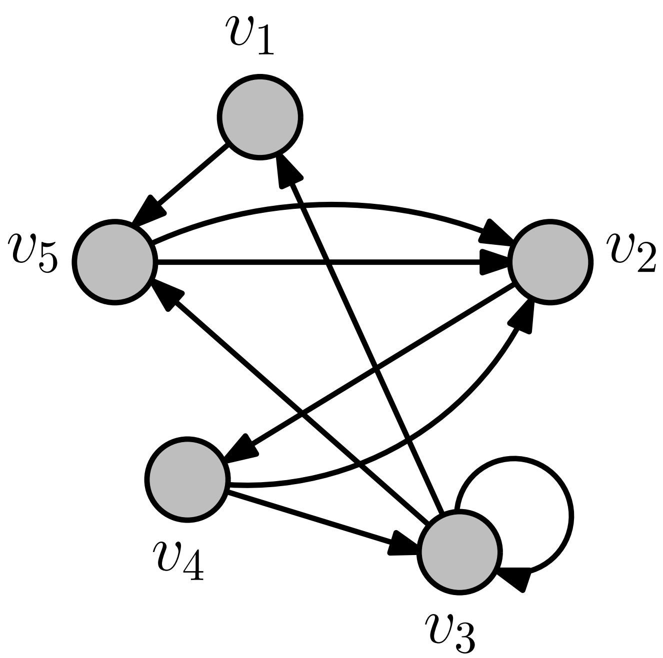
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu

Ma trận kề

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng có n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$. *Ma trận kề (adjacency matrix)* A của G ứng với thứ tự các đỉnh như trên là một ma trận kích thước $n \times n$ trong đó mỗi phần tử a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ được định nghĩa như sau

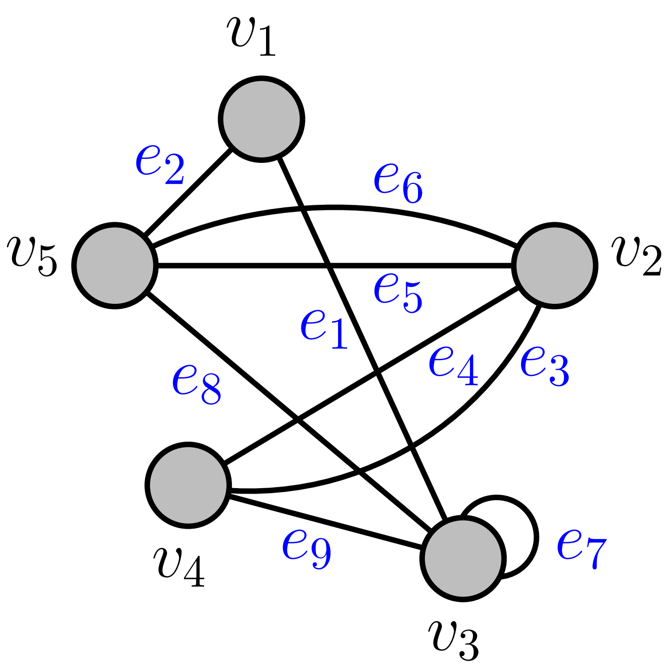
$$a_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{nếu có } m_{ij} \text{ cạnh } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{nếu } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ và m cạnh $e_1, e_2, \dots, e_m$. *Ma trận liên thuộc (incidence matrix)* A của G tương ứng với thứ tự các đỉnh và cạnh như trên là một ma trận kích thước $n \times m$ trong đó các phần tử a_{ij} ($1 \leq i \leq n$ và $1 \leq j \leq m$) được định nghĩa như sau

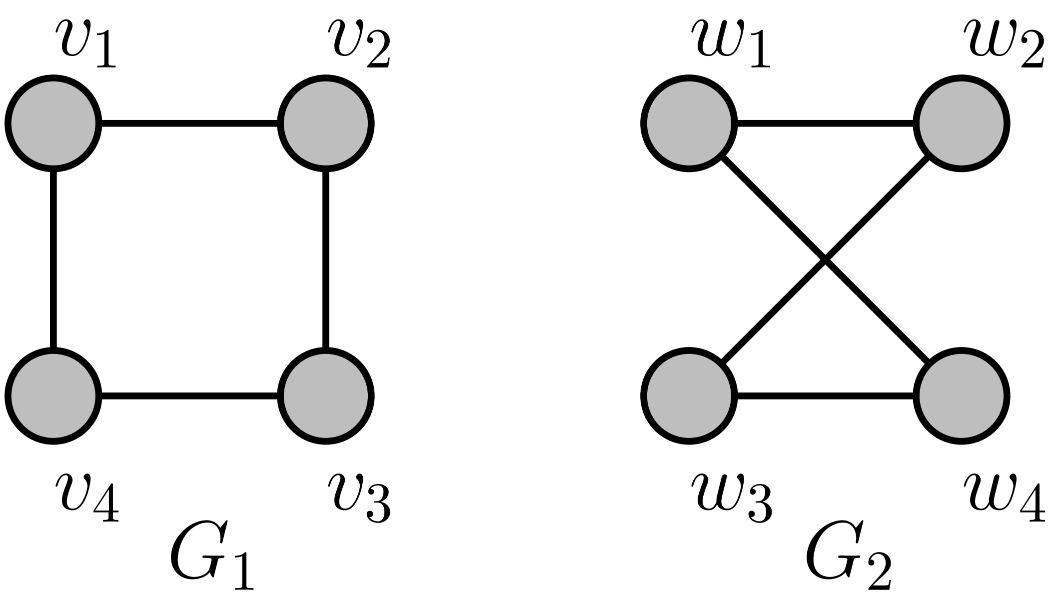
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ liên thuộc với đỉnh } v_i \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sự đẳng cấu

Hai đồ thị vô hướng $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là *đẳng cấu (isomorphic)*, ký hiệu $G_1 \simeq G_2$, nếu tồn tại một song ánh $f : V_1 \to V_2$ thỏa mãn điều kiện: với mọi đỉnh $u, v \in V_1$, $uv \in E_1$ khi và chỉ khi $f(u)f(v) \in E_2$

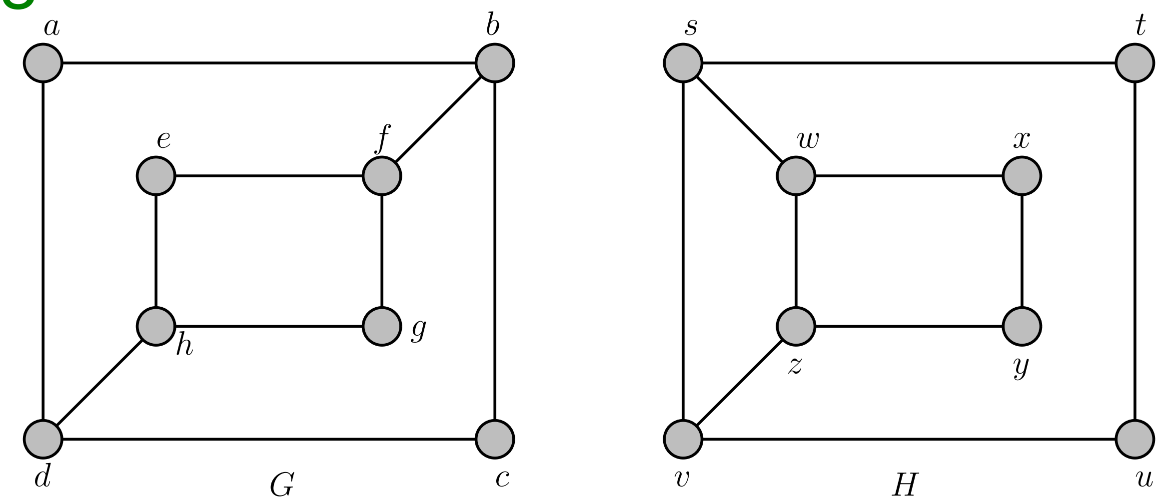


Hình: $G_1 \simeq G_2$ do tồn tại song ánh $f : V_1 \to V_2$ định nghĩa bởi $f(v_i) = w_i$ $(1 \le i \le 4)$ thỏa mãn điều kiện đề ra

- Một số tính chất hiển nhiên mà các đồ thị đẳng cấu $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ cần có
  - $|V_1| = |V_2|$
  - $|E_1| = |E_2|$
  - Với mỗi d, số đỉnh bậc d trong G_1 bằng số đỉnh bậc d trong G_2
  - v.v...
- Thông thường, việc kiểm tra tất cả các song ánh có thể giữa hai tập đỉnh của hai đồ thị G_1, G_2 để xác định xem chúng có đẳng cấu hay không là rất khó khăn: có $n!$ song ánh giữa hai đồ thị n đỉnh
  - Đến hiện tại, *chưa biết* có hay không một *thuật toán trong thời gian đa thức* để kiểm tra xem hai đồ thị là đẳng cấu hay không

- Để chứng minh hai đồ thị là *không đẳng cấu*, chúng ta thường tìm một tính chất mà chỉ một trong hai đồ thị có. Một tính chất như thế được gọi là một *bất biến đồ thị (graph invariant)* (ví dụ như số các đỉnh có bậc cho trước nào đó, danh sách bậc các đỉnh của đồ thị, v.v...)

Ví dụ 13



G và H không đẳng cấu

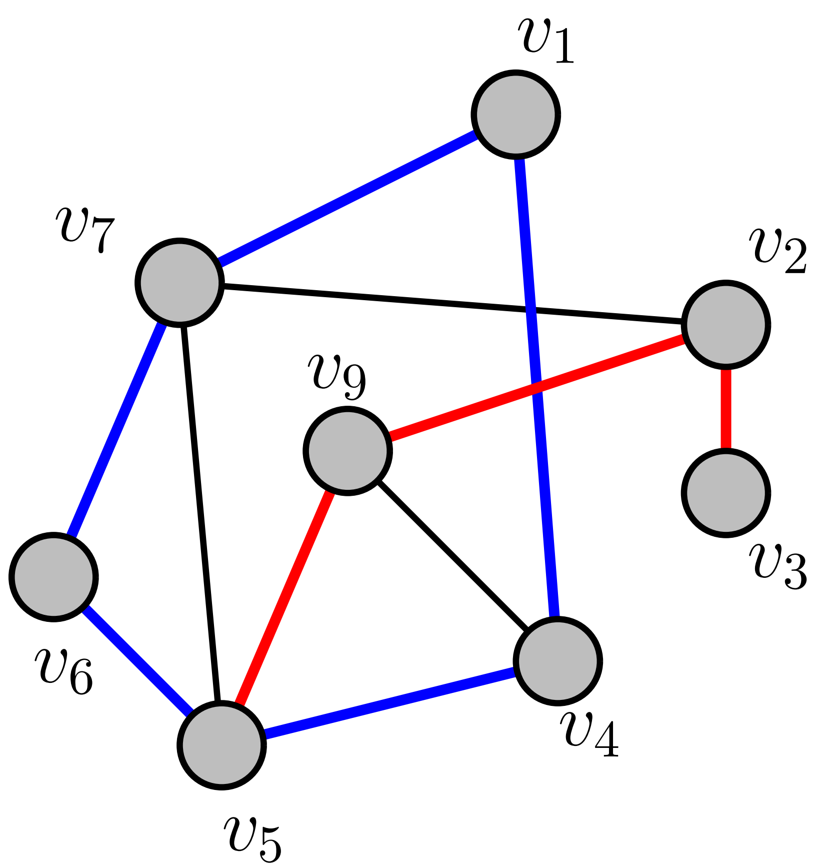
- Do $\deg(a) = 2$, nếu tồn tại một đẳng cấu giữa G và H, a phải tương ứng với một trong bốn đỉnh bậc 2 của H: t, u, x, hoặc y
- Tuy nhiên, mỗi đỉnh trong bốn đỉnh t, u, x, y đều liền kề với một đỉnh bậc hai, trong khi a không thỏa mãn tính chất này trong G

Đường đi (vô hướng)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng và n là một số nguyên dương. *Đường đi (path)* độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trong G là một dãy các cạnh $e_1, e_2, \dots, e_n$ của đồ thị thỏa mãn điều kiện tồn tại một dãy các đỉnh $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ sao cho $v_0 = u$, $v_n = v$, và e_i có các đầu mút v_{i-1} và v_i, với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

- Ta nói rằng đường đi bắt đầu với u và kết thúc với v
- Một đường đi độ dài $n \geq 1$ được gọi là một *chu trình (circuit hoặc cycle)* nếu nó bắt đầu và kết thúc ở cùng một đỉnh
- Khi G không có các cạnh song song, mỗi đường đi có thể được xác định một cách duy nhất thông qua các đỉnh của nó, và do đó ta có thể ký hiệu một đường đi bằng dãy các đỉnh của nó $v_0, v_1, \dots, v_n$

Ví dụ 14



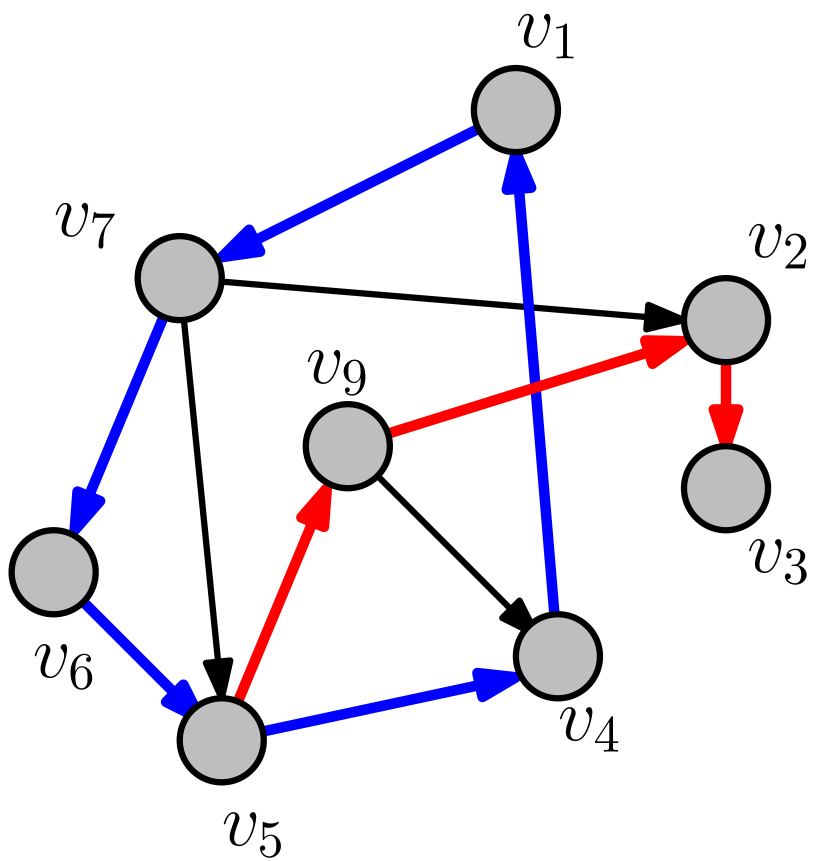
Hình: v_5, v_9, v_2, v_3 là một đường đi độ dài 3 và $v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1$ là một chu trình độ dài 5

Đường đi (có hướng)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng và n là một số nguyên dương. *Đường đi (path)* độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trong G là một dãy các cung $e_1, e_2, \dots, e_n$ của đồ thị thỏa mãn điều kiện tồn tại một dãy các đỉnh $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ sao cho $v_0 = u$, $v_n = v$, và e_i có đỉnh đầu v_{i-1} và đỉnh cuối v_i, với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

- Ta nói rằng đường đi bắt đầu với u và kết thúc với v
- Một đường đi độ dài $n \geq 1$ được gọi là một *chu trình (circuit hoặc cycle)* nếu nó bắt đầu và kết thúc ở cùng một đỉnh
- Khi G không có các cạnh song song, mỗi đường đi có thể được xác định một cách duy nhất thông qua các đỉnh của nó, và do đó ta có thể ký hiệu một đường đi bằng dãy các đỉnh của nó $v_0, v_1, \dots, v_n$

Ví dụ 15



Hình: v_5, v_9, v_2, v_3 là một đường đi độ dài 3 và $v_1, v_7, v_6, v_5, v_4, v_1$ là một chu trình độ dài 5

- *Độ dài (length)* của một đường đi là số cạnh của đường đi đó
- Một đường đi gọi là *đơn (simple)* nếu nó không chứa cùng một cạnh (cung) nhiều hơn một lần

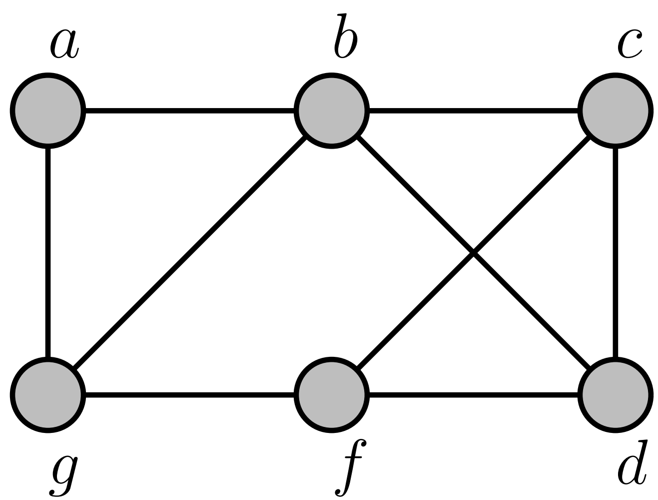
Bài tập 4

Hãy tìm trong đồ thị ở hình bên

(a) *Một đường đi có độ dài* n *với* $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$

(b) *Một đường đi đơn có độ dài* n *với* $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$

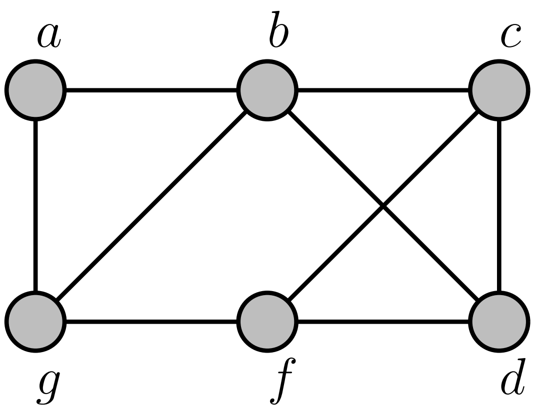
(c) *Một chu trình có độ dài* n *với* $n \in \{3, \ldots, 7\}$



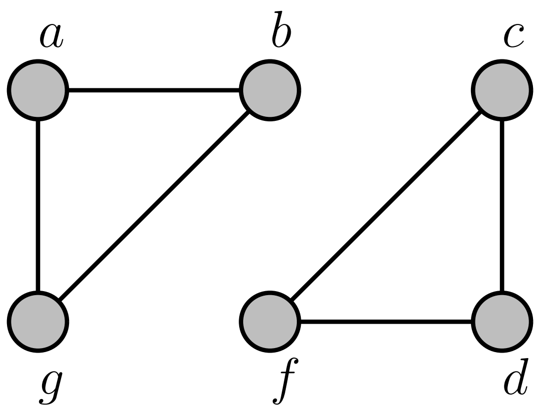
Tính liên thông trong đồ thị

Liên thông trong đồ thị vô hướng

- Một đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được gọi là *liên thông (connected)* nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của G. Ngược lại, nếu không tồn tại đường đi giữa một cặp đỉnh phân biệt nào đó trong G, ta gọi G là đồ thị *không liên thông (disconnected)*



G là đồ thị liên thông



G là đồ thị không liên thông

Tính liên thông trong đồ thị

Liên thông trong đồ thị vô hướng

- *Hợp (union)* của hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đồ thị $G = (V, E)$ có tập đỉnh $V = V_1 \cup V_2$ và tập cạnh $E = E_1 \cup E_2$. Ta cũng viết $G = G_1 \cup G_2$
- Một đồ thị không liên thông G có thể được xem như là hợp của hai hay nhiều đồ thị con liên thông trong đó không có đỉnh chung nào giữa mỗi cặp đồ thị con này. Ta gọi các đồ thị con này là các *thành phần liên thông (connected component)* của G
- Cụ thể, một *thành phần liên thông (connected component)* $H = (V', E')$ của G là một đồ thị con liên thông cực đại của G, nghĩa là, H là một đồ thị con liên thông của G và với mọi đồ thị con liên thông K của G, H không là đồ thị con thực sự của K
- G là đồ thị liên thông khi và chỉ khi G có chính xác một thành phần liên thông

Mệnh đề 5

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng liên thông có ít nhất hai đỉnh. Với hai đỉnh bất kỳ $u, v \in V$ của G, tồn tại một đường đi đơn giữa u và v

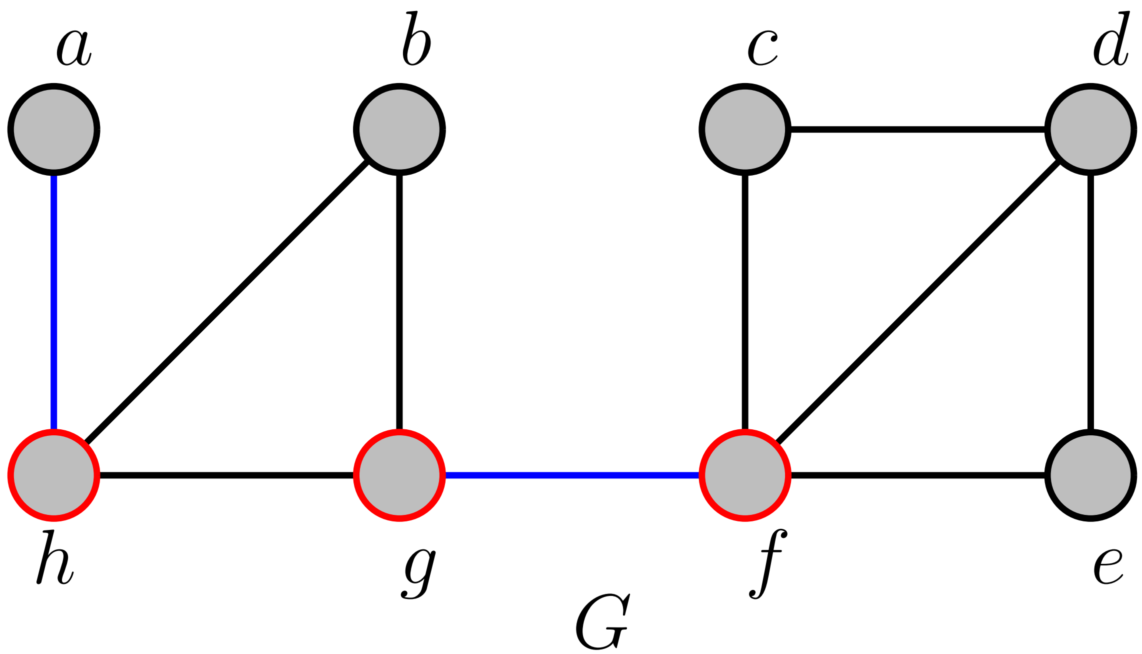
Chứng minh.

- Do G liên thông, luôn tồn tại một đường đi giữa hai đỉnh u, v. Gọi $P = e_1, e_2, \dots, e_k$ là một đường đi có độ dài nhỏ nhất trong số tất cả các đường đi giữa u và v. Ta chứng minh P là một đường đi đơn
- Giả sử P không phải đường đi đơn. Suy ra, tồn tại i, j thỏa mãn $0 \leq i < j \leq k$ và $e_i = e_j$. Do đó, $P' = e_1, e_2, \dots, e_i, e_{j+1}, \dots, e_k$ là một đường đi giữa u và v và P' có độ dài nhỏ hơn độ dài k của P. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của P

□

Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$

- Một đỉnh $v \in V$ được gọi là *đỉnh cắt (cut vertex)* hoặc *điểm khớp (articulation point)* nếu $G - v$ có nhiều thành phần liên thông hơn G
- Một cạnh $e \in E$ được gọi là *cạnh cắt (cut edge)* hoặc *cầu (bridge)* nếu $G - e$ có nhiều thành phần liên thông hơn G



Hình: Các đỉnh cắt của G là f, g, h. Các cạnh cắt của G là ah, gf

- Một đồ thị không có đỉnh cắt nào được gọi là *đồ thị không thể tách rời (nonseparable graph)*

Bài tập 5

Chứng minh rằng nếu G là đơn đồ thị vô hướng có chính xác hai đỉnh bậc lẻ u, v thì các đỉnh này phải thuộc cùng một thành phần liên thông của G

Bài tập 6

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng liên thông gồm $n \geq 1$ đỉnh và $G \not\cong K_n$. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập các đỉnh V' sao cho $G - V'$ là đồ thị không liên thông

- Tập đỉnh V' của một đơn đồ thị vô hướng liên thông G thỏa mãn điều kiện ở Bài tập 6 được gọi là một *tập phân tách (separating set (of vertices))* của G

Tính liên thông trong đồ thị

Liên thông trong đồ thị vô hướng

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng

- *Số liên thông đỉnh (vertex connectivity)* của G, ký hiệu $\kappa(G)$, là số đỉnh nhỏ nhất cần bỏ đi từ G để thu được một đồ thị con G' *không liên thông* hoặc *chỉ có một đỉnh*.
  - $\kappa(G) = 0$ nếu G không liên thông hoặc chỉ có một đỉnh
  - $\kappa(K_n) = n - 1$
  - $\kappa(G)$ là số phần tử nhỏ nhất trong một tập phân tách (nếu có) của G
- G là *k-liên thông (k-connected)* nếu $\kappa(G) \geq k$
  - Nếu G là k-liên thông thì cũng là j-liên thông với mọi $0 \leq j \leq k$
  - G là 1-liên thông nếu G là liên thông và có nhiều hơn một đỉnh
  - G là 2-liên thông nếu G không có đỉnh cắt và có ít nhất 3 đỉnh
  - Nếu *xóa đi tối đa $k - 1$ đỉnh bất kỳ* từ G thì đồ thị thu được luôn là đồ thị liên thông

Bài tập 7

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng liên thông gồm $n \geq 2$ đỉnh. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập cạnh E' sao cho $G - E'$ là một đồ thị không liên thông

- Tập cạnh E' của một đơn đồ thị vô hướng liên thông G thỏa mãn điều kiện ở Bài tập 7 được gọi là một *tập cạnh phân tách (separating set of edges)* của G
- *Số liên thông cạnh (edge connectivity)* của G, ký hiệu $\lambda(G)$, là số cạnh nhỏ nhất cần bỏ đi từ G để thu được một đồ thị con G' *không liên thông* hoặc *chỉ có một đỉnh*
- G được gọi là *k-liên thông cạnh (k-edge connected)* nếu $\lambda(G) \geq k$.
  - $\lambda(G) = 0$ nếu G không liên thông hoặc chỉ có một đỉnh
  - $\lambda(K_n) = n - 1$
  - Nếu G là k-liên thông cạnh thì cũng là j-liên thông cạnh với mọi $0 \leq j \leq k$
  - Nếu *xóa đi tối đa $k - 1$ cạnh bất kỳ* từ G, đồ thị thu được luôn là đồ thị liên thông

Bài tập 8

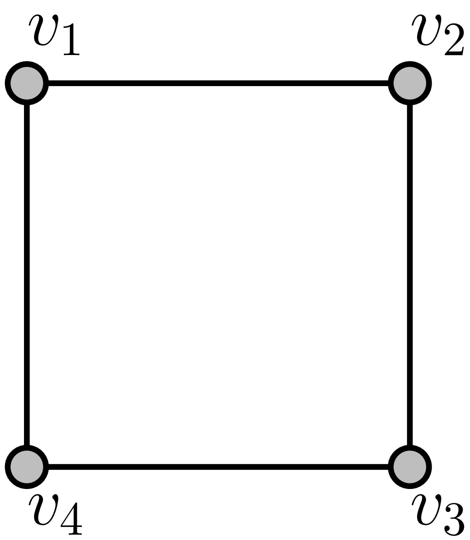
Chứng minh rằng với mọi đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$

$$\kappa(G) \leq \min_{v \in V} \deg_G(v) \qquad (1)$$

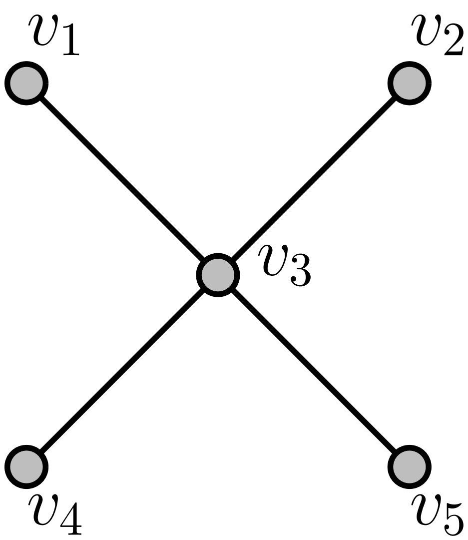
$$\lambda(G) \leq \min_{v \in V} \deg_G(v) \qquad (2)$$

Bài tập 9

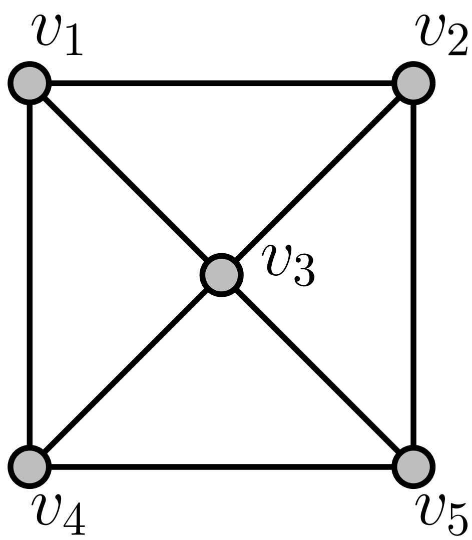
Xác định $\kappa(G_i)$ và $\lambda(G_i)$ trong các đồ thị G_i với $i = 1, 2, 3$ sau



G_1



G_2

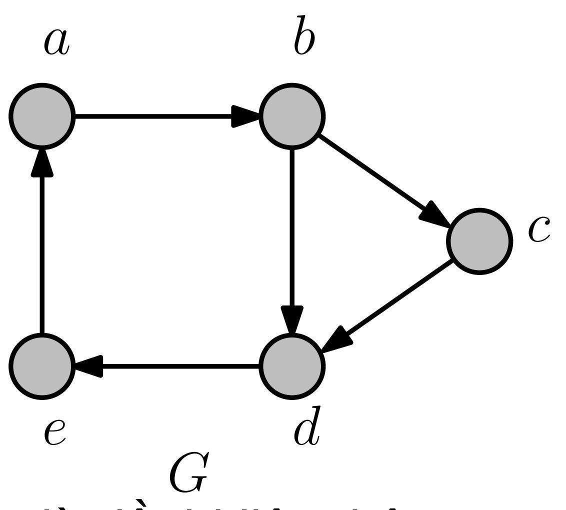


G_3

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng

- G được gọi là *liên thông mạnh (strongly connected)* nếu với mỗi cặp đỉnh $u, v \in V$, tồn tại một đường đi có hướng từ u đến v và một đường đi có hướng từ v đến u
- G được gọi là *liên thông yếu (weakly connected)* nếu đồ thị vô hướng thu được bằng cách bỏ qua hướng của các cung của G là một đồ thị liên thông

Ví dụ 16



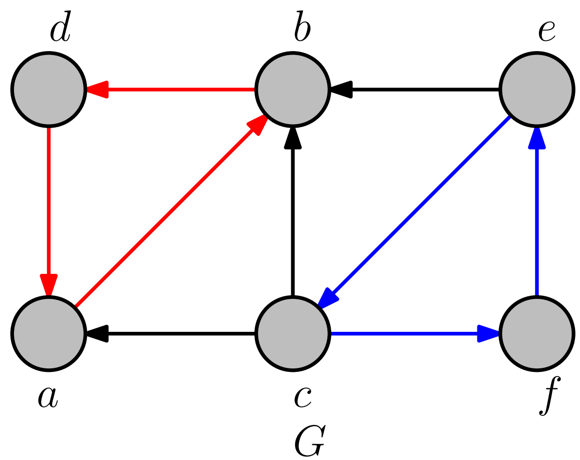
Hình: G là đồ thị liên thông mạnh. H không là đồ thị liên thông mạnh nhưng là đồ thị liên thông yếu

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng

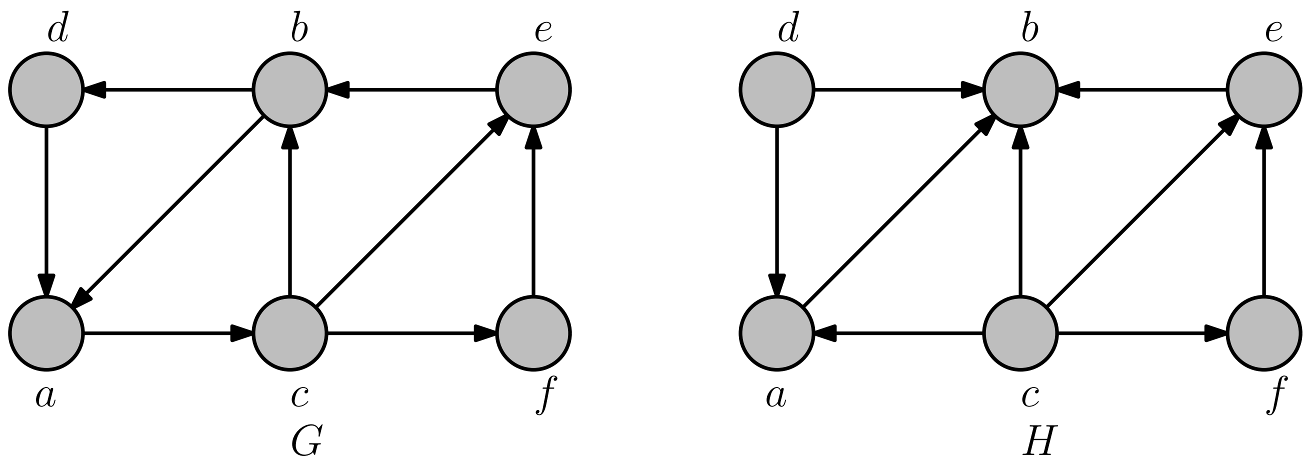
- Một *thành phần liên thông mạnh (strongly connected component)* của G là một đồ thị con liên thông mạnh cực đại H của G, nghĩa là, H là một đồ thị con liên thông mạnh của G và không là đồ thị con thực sự của bất kỳ đồ thị con liên thông mạnh nào khác

Ví dụ 17

- G không là đồ thị liên thông mạnh
- Đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ với $V_1 = \{a, b, d\}$ và $E_1 = \{(a, b), (b, d), (d, a)\}$ là một thành phần liên thông mạnh của G
- Đồ thị $G_2 = (V_2, E_2)$ với $V_2 = \{c, e, f\}$ và $E_2 = \{(c, f), (f, e), (e, c)\}$ là một thành phần liên thông mạnh của G



- Một *đồ thị có hướng không có chu trình (directed acyclic graph – DAG)* là một đồ thị có hướng không chứa khuyên hoặc chu trình có hướng.

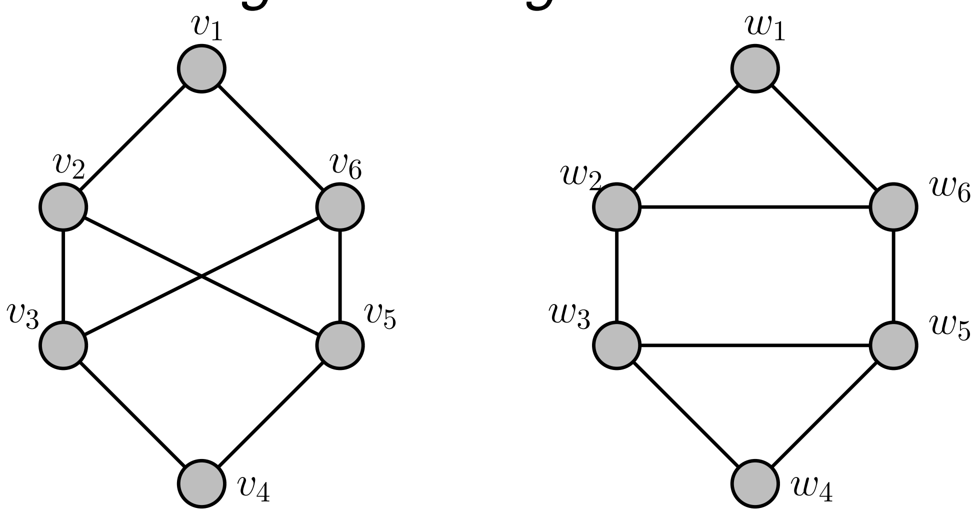


Hình: G là một đồ thị có hướng và có chu trình. H là một đồ thị có hướng và không có chu trình

- **Nhắc lại:** Để chứng minh hai đồ thị là *không đẳng cấu*, chúng ta thường tìm một tính chất mà chỉ một trong hai đồ thị có. Một tính chất như thế được gọi là một *bất biến đồ thị (graph invariant)*
  - số các đỉnh có bậc cho trước nào đó
  - danh sách bậc các đỉnh của đồ thị
- Một bất biến đồ thị hữu ích là *sự tồn tại của các chu trình đơn với độ dài* $k \geq 3$

Bài tập 10

Các đồ thị sau có đẳng cấu không? Vì sao?

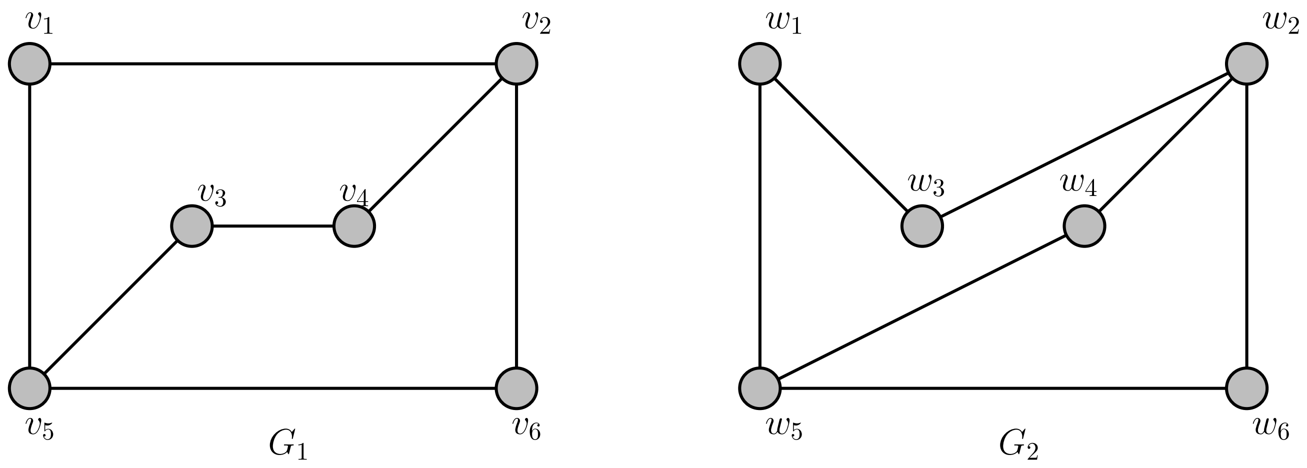


G_1 G_2

- Chúng ta cũng có thể sử dụng đường đi để tìm các ánh xạ giữa hai đồ thị đẳng cấu

Bài tập 11

Các đồ thị sau có đẳng cấu không? Vì sao?



Định lý 6

Cho G là một đồ thị với ma trận kề A tương ứng với thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$. Số các đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_j, trong đó r là một số nguyên dương, bằng giá trị của phần tử (i, j) của ma trận A^r.

Chứng minh.

Ta chứng minh Định lý bằng quy nạp theo r

- **Bước cơ sở:** Theo định nghĩa ma trận kề, Định lý 6 đúng với $r = 1$
- **Bước quy nạp:** Giả sử Định lý 6 đúng với mọi $1 \leq r \leq k$. Ta chứng minh Định lý 6 đúng với $r = k + 1$, tức là, số các đường đi khác nhau độ dài $k + 1$ từ v_i tới v_j bằng giá trị của phần tử (i, j) của A^{k+1}.
  - Một đường đi độ dài $k + 1$ từ v_i đến v_j được tạo thành bởi một đường đi độ dài k từ v_i đến v_ℓ nào đó, và cạnh $\{v_\ell, v_j\}$.