Đại học Quốc gia Hà Nội
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên
Khoa Toán-Cơ-Tin học

ĐỀ THI GIỮA KỲ

Môn: Toán rời rạc (MAT3302)

Thời gian: 90 phút **Số tín chỉ:** 4

Hướng dẫn chung:

- Đề thi gồm hai phần độc lập: **PHẦN A (MÃ: MAT3302 1 TN)** và **PHẦN B (MÃ: MAT3302 2)**. Sinh viên chỉ làm **một** phần tương ứng với mã lớp học phần của mình.
- Không sử dụng tài liệu, thiết bị điện tử, đồng hồ thông minh, v.v. Sinh viên tự chuẩn bị giấy trắng A4 để làm bài và nháp. Cần ghi đầy đủ các thông tin về họ tên, mã sinh viên, mã lớp học phần ở mọi trang của bài làm và giấy nháp. Đánh số thứ tự các trang trong bài làm.
- Không trao đổi, thảo luận (về bất kỳ vấn đề gì) trong suốt thời gian làm bài thi. Sinh viên vi phạm sẽ nhận điểm 0 cho bài thi này. (Ví dụ, việc mượn giấy, bút, máy tính, ... từ các bạn khác, v.v. trong thời gian làm bài thi cũng coi là vi phạm.)
- Trình bày rõ ràng các bước giải. Các phần bài làm khó hiểu hoặc khó đọc (do chữ viết xấu, do gạch xóa nhiều, do giải thích không rõ ràng, v.v.) sẽ không được chấm điểm.
- Điểm bài thi chiếm 20% tổng điểm của môn học. Tổng điểm của bài thi sẽ quy về thang 10: điểm nhỏ hơn hoặc bằng 10 thì giữ nguyên, điểm lớn hơn 10 thì tính là 10 điểm.

PHẦN A – DÀNH CHO MÃ: MAT3302 1 TN

Câu 1. (2 điểm)

Cảnh sát nghi ngờ rằng một trong bốn người đã xâm nhập vào hệ thống máy tính của trường đại học. Bốn người này đã đưa ra các tuyên bố sau với cảnh sát:

- Linh: "Phương đã xâm nhập vào hệ thống."
- Phương: "Toàn đã xâm nhập vào hệ thống."
- Tuấn: "Tôi không xâm nhập vào hệ thống."
- Toàn: "Phương đã nói dối khi anh ấy nói rằng tôi đã xâm nhập vào hệ thống."

(a) Giả sử cảnh sát biết rằng chính xác một người nói dối, ai đã xâm nhập vào hệ thống?

(b) Giả sử cảnh sát biết rằng chính xác một người nói thật, ai đã xâm nhập vào hệ thống?

Gợi ý giải: Phân tích từng trường hợp dựa trên việc xét ai là người nói dối ở phần (a) và ai là người nói thật ở phần (b). Hoặc cũng có thể xét trường hợp dựa trên việc ai là người xâm nhập hệ thống và so sánh số lượng người nói dối ở phần (a) và số lượng người nói thật ở phần (b).

(a) Phương.

(b) Tuấn.

Câu 2. (3 điểm)

Một chuỗi tam phân là một chuỗi ký tự chỉ gồm các số 0, 1, và 2. Có bao nhiêu chuỗi tam phân độ dài $n \geq 1$ không chứa 11?

Gợi ý giải: Gọi a_n là số chuỗi tam phân độ dài n không chứa 11.

- $a_1 = 3$ và $a_2 = 8$.
- Với $n \geq 3$,
  - Nếu ký tự đầu tiên là 0 hoặc 2, thì phần còn lại là một chuỗi tam phân độ dài $n-1$ không chứa 11. Có $2a_{n-1}$ chuỗi như vậy.
  - Nếu ký tự đầu tiên là 1, thì ký tự tiếp theo phải là 0 hoặc 2, và phần còn lại là một chuỗi tam phân độ dài $n-2$ không chứa 11. Có $2a_{n-2}$ chuỗi như vậy.

  Do đó, $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ với $n \geq 3$.

Giải hệ truy hồi với điều kiện ban đầu trên để có công thức tường minh của a_n với mọi $n \geq 1$:

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1+\sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1-\sqrt{3})^n.$$

Câu 3. (2 điểm)

Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu hình chữ nhật có cạnh theo chiều ngang dài hơn cạnh theo chiều dọc trong một bàn cờ kích thước $n \times n$?

Gợi ý giải: Gọi R là tập hợp tất cả các hình chữ nhật trong bàn cờ $n \times n$. Gọi S là tập hợp tất cả các hình vuông trong bàn cờ $n \times n$.

- Mỗi hình chữ nhật được xác định bởi hai đường kẻ ngang và hai đường kẻ dọc. Bàn cờ $n \times n$ có $n+1$ đường kẻ ngang và $n+1$ đường kẻ dọc, nên ta có $|R| = \binom{n+1}{2}^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

- Để đếm số hình vuông, chú ý rằng có n^2 hình vuông kích thước 1×1, $(n-1)^2$ hình vuông kích thước 2×2, ..., và 1^2 hình vuông kích thước $n \times n$. Do đó, ta có

$$|S| = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Do đối xứng, số hình chữ nhật có cạnh theo chiều ngang dài hơn cạnh theo chiều dọc trong bàn cờ $n \times n$ bằng với số hình chữ nhật có cạnh theo chiều dọc dài hơn cạnh theo chiều ngang, và bằng

$$\frac{1}{2}(|R| - |S|) = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}.$$

Câu 4. (3 điểm)

Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} \cdot 2^{n-2k} = n+1.$$

(**Gợi ý:** Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài n không chứa 01?)

Gợi ý giải: Sử dụng phương pháp đếm hai lần (double counting).

Hiển nhiên vế phải đếm số chuỗi nhị phân độ dài n không chứa 01: có n chuỗi có dạng $11\ldots100\ldots0$ (với k chữ số 1 và $n-k$ chữ số 0, trong đó $k = 0, 1, \ldots, n$) và 1 chuỗi có dạng $00\ldots0$ (toàn chữ số 0).

Ta sẽ chứng minh vế trái cũng đếm số chuỗi nhị phân độ dài n không chứa 01 bằng nguyên lý bù trừ. Gọi S là tập hợp tất cả các chuỗi nhị phân độ dài n. Gọi A_i là tập hợp các chuỗi trong S có 0 ở vị trí i và 1 ở vị trí $i+1$, với $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ta cần tính số phần tử của tập hợp

$$S - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}).$$

Áp dụng nguyên lý bù trừ, ta có

$$\begin{aligned}
|S - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1})| &= |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| \\
&= |S| - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n-1} (-1)^{k-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|
\end{aligned}$$

Chú ý rằng trong trường hợp này $1 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor$ vì mỗi cặp 01 chiếm hai vị trí liên tiếp.

Ta chứng minh

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}.$$

Thật vậy, vế trái $\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$ chính là số chuỗi nhị phân độ dài n có chính xác k cặp 01. Để tạo thành một chuỗi như vậy, ta thực hiện các bước sau:

- Chọn k vị trí $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ để đặt các cặp 01. Có $\binom{n-k}{k}$ cách chọn (bởi vì mỗi cặp 01 chiếm hai vị trí liên tiếp).

- Gán giá trị 0 hoặc 1 cho mỗi vị trí trong $n-2k$ vị trí còn lại (không thuộc các vị trí có cặp 01). Có 2^{n-2k} cách gán.

Do đó, vế phải $\binom{n-k}{k}2^{n-2k}$ cũng đếm số chuỗi nhị phân độ dài n có chính xác k cặp 01.

Do đó, ta có,

$$\begin{aligned}
|S-(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})| &= |S| - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n-1}(-1)^{k-1}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}| \\
&= |S| - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n-1}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}| \\
&= |S| + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^{k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k} \\
&= 2^n + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^{k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^{k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k}.
\end{aligned}$$

Câu 5. (2 điểm)

Cho $X=\{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d},\ldots,\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z}\}$, là tập hợp các chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh. Ta nói rằng một hoán vị của X chứa một chuỗi nếu các chữ cái của chuỗi đó xuất hiện liên tiếp và theo đúng thứ tự trong hoán vị.

Ví dụ, hoán vị `abcdefghijklmnopqrstuvwxyz` chứa chuỗi `abc`, nhưng không chứa chuỗi `acb`.

Hỏi có bao nhiêu hoán vị của X không chứa bất kỳ chuỗi nào trong các chuỗi `fish`, `mouse`, hoặc `cat`?

Gợi ý giải: Gọi S là tập hợp tất cả các hoán vị của X. Gọi $S_{\mathtt{fish}}$, $S_{\mathtt{mouse}}$, và $S_{\mathtt{cat}}$ lần lượt là các tập hợp các hoán vị của X chứa chuỗi `fish`, `mouse`, và `cat`. Ta cần tính số phần tử của tập hợp

$$S-(S_{\mathtt{fish}}\cup S_{\mathtt{mouse}}\cup S_{\mathtt{cat}}).$$

Áp dụng nguyên lý bù trừ cho ba tập hợp, ta có

$$\begin{aligned}
|S-(S_{\mathtt{fish}}\cup S_{\mathtt{mouse}}\cup S_{\mathtt{cat}})| &= |S|-|S_{\mathtt{fish}}|-|S_{\mathtt{mouse}}|-|S_{\mathtt{cat}}| \\
&\quad +|S_{\mathtt{fish}}\cap S_{\mathtt{mouse}}|+|S_{\mathtt{fish}}\cap S_{\mathtt{cat}}|+|S_{\mathtt{mouse}}\cap S_{\mathtt{cat}}| \\
&\quad -|S_{\mathtt{fish}}\cap S_{\mathtt{mouse}}\cap S_{\mathtt{cat}}|.
\end{aligned}$$

- Ta có $|S|=26!$.
- Để tính $S_{\mathtt{fish}}$, ta coi chuỗi `fish` như một chữ cái duy nhất. Khi đó, ta có $26-4+1=23$ chữ cái để hoán vị, nên có 23! hoán vị chứa chuỗi `fish`. Tương tự, ta có $|S_{\mathtt{mouse}}|=22!$ và $|S_{\mathtt{cat}}|=24!$.
- Để tính $|S_{\mathtt{fish}}\cap S_{\mathtt{cat}}|$, ta coi chuỗi `fish` và `cat` như hai chữ cái duy nhất. Khi đó, ta có $26-4-3+2=21$ chữ cái để hoán vị, nên có 21! hoán vị chứa cả hai chuỗi `fish` và `cat`. Tương tự, ta có $|S_{\mathtt{cat}}\cap S_{\mathtt{mouse}}|=20!$. Chú ý là $S_{\mathtt{fish}}\cap S_{\mathtt{mouse}}=\emptyset$ vì không thể vừa có chuỗi `fish` vừa có chuỗi `mouse` trong cùng một hoán vị (chữ cái `s` không thể vừa đứng ngay trước `h` vừa đứng ngay trước `e`).

- Tương tự, ta có $S_{\texttt{fish}} \cap S_{\texttt{mouse}} \cap S_{\texttt{cat}} = \emptyset$.

Do đó, số hoán vị của X không chứa bất kỳ chuỗi nào trong các chuỗi `fish`, `mouse`, hoặc `cat` là

$$26! - 23! - 22! - 24! + 21! + 20!.$$

PHẦN B – DÀNH CHO MÃ: MAT3302 2

Câu 1. (2 điểm)

Chứng minh $\neg(p \leftrightarrow q)$ và $\neg p \leftrightarrow q$ là tương đương logic, trong đó p, q là các mệnh đề nào đó.

> **Gợi ý giải:** Sử dụng bảng chân trị.

Câu 2. (3 điểm)

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn điều kiện $x_1 \geq 6$ và $x_2 \leq 12$?

> **Gợi ý giải:** Đặt $y_1 = x_1 - 6$. Khi đó, ta cần đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình
>
> $$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 - 6 = 19$$
>
> thỏa mãn điều kiện $x_2 \leq 12$. Để giải bài toán này, ta sẽ đếm số nghiệm không âm của phương trình $y_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ rồi trừ đi số nghiệm không âm thỏa mãn $x_2 \geq 13$.
>
> - Số nghiệm không âm của phương trình $y_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ là $\binom{19+4-1}{4-1} = \binom{22}{3} = 1540$.
> - Đặt $z_2 = x_2 - 13$. Khi đó, số nghiệm không âm của phương trình $y_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ thỏa mãn $x_2 \geq 13$ bằng số nghiệm không âm của phương trình $y_1 + z_2 + x_3 + x_4 = 6$, và là $\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = 84$.
> - Vậy, kết quả cần tìm là $1540 - 84 = 1456$.

Câu 3. (2 điểm)

Có bao nhiêu số nguyên không âm nhỏ hơn hoặc bằng 1000 và chia hết cho 5, 7, hoặc 12?

> **Gợi ý giải:** Gọi A_5, A_7, và A_{12} lần lượt là các tập hợp các số nguyên không âm nhỏ hơn hoặc bằng 1000 và chia hết cho 5, 7, và 12. Ta cần tính số phần tử của tập hợp $A_5 \cup A_7 \cup A_{12}$. Áp dụng nguyên lý bù trừ cho ba tập hợp, ta có
>
> $$\begin{aligned} |A_5 \cup A_7 \cup A_{12}| &= |A_5| + |A_7| + |A_{12}| \\ &\quad - |A_5 \cap A_7| - |A_5 \cap A_{12}| - |A_7 \cap A_{12}| \\ &\quad + |A_5 \cap A_7 \cap A_{12}|. \end{aligned}$$
>
> - Ta có $A_5 = \{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq 5k \leq 1000\} = \{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq k \leq \lfloor 1000/5 \rfloor\}$. Do đó, $|A_5| = 201$. Tương tự, ta có $|A_7| = 143$ và $|A_{12}| = 84$.
> - Ta có $A_5 \cap A_7 = \{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq \operatorname{lcm}(5,7) \cdot k \leq 1000\} = \{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq 35k \leq 1000\}$, trong đó $\operatorname{lcm}(a, b)$ là bội chung nhỏ nhất của hai số a, b. Do đó, $|A_5 \cap A_7| = 29$. Tương tự, ta có $|A_5 \cap A_{12}| = 17$ và $|A_7 \cap A_{12}| = 12$.
> - Tương tự, $A_5 \cap A_7 \cap A_{12} = \{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq \operatorname{lcm}(5,7,12) \cdot k \leq 1000\} = \{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq 420k \leq 1000\}$. Do đó, $|A_5 \cap A_7 \cap A_{12}| = 3$.
> - Cuối cùng, ta có $|A_5 \cup A_7 \cup A_{12}| = 201 + 143 + 84 - 29 - 17 - 12 + 3 = 373$.

Câu 4. (3 điểm)

Giả sử 25 người được sắp xếp thành một hàng ngang. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 người trong số họ sao cho không có hai người nào trong số ba người được chọn đứng cạnh nhau?

Gợi ý giải: Theo thứ tự từ trái sang phải, gọi x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là số người đứng trước người thứ nhất được chọn, giữa người thứ nhất và người thứ hai được chọn, giữa người thứ hai và người thứ ba được chọn, và sau người thứ ba được chọn. Khi đó, ta cần đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22$$

với điều kiện $x_2 \geq 1$ và $x_3 \geq 1$ (bởi vì không có hai người được chọn nào đứng cạnh nhau). Đặt $y_2 = x_2 - 1 \geq 0$ và $y_3 = x_3 - 1 \geq 0$, ta có

$$x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 20.$$

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình này là

$$\binom{20+4-1}{4-1} = \binom{23}{3} = 1771.$$

Câu 5. (2 điểm)

Một nhiếp ảnh gia tại một đám cưới có thể sắp xếp 6 người (bao gồm cô dâu và chú rể) thành một hàng như thế nào, nếu:

(a) cô dâu đứng cạnh chú rể?

(b) chú rể đứng ở chỗ nào đó bên trái cô dâu?

Gợi ý giải:

(a) Xem cô dâu và chú rể như một khối. Khi đó, ta có 5 khối để sắp xếp, nên có $5! = 120$ cách sắp xếp. Bên trong khối, cô dâu và chú rể có thể đổi chỗ cho nhau, nên có 2 cách sắp xếp. Vậy tổng cộng có $5! \cdot 2 = 240$ cách sắp xếp.

(b) Chú ý rằng với mỗi cách sắp xếp đúng thì ta có một cách sắp xếp sai bằng cách xếp tất cả mọi người theo thứ tự ngược lại. Tương tự, với mỗi cách sắp xếp sai, ta cũng có một cách sắp xếp đúng bằng cách xếp tất cả mọi người theo thứ tự ngược lại. Do đó, trong tất cả các cách sắp xếp 6 người, có đúng một nửa số cách mà chú rể đứng bên trái cô dâu. Do đó, số cách sắp xếp là $\dfrac{6!}{2} = 360$.