

COPYRIGHT NOTICE

THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-07-19

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-07-19



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 1

Lớp học phần: MAT3500 1, MAT3500 2

Ngành học: KHDL

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Chú ý: Đề gồm 5 câu/1 trang. Không sử dụng tài liệu. Điểm bài kiểm tra này chiếm 70% tổng số điểm của môn học. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1. (1 điểm) Cho tập $\Sigma = \{T, F\}$ và số nguyên $n \geq 1$. Gọi Σ^n là tích Descartes của n tập Σ . Một *toán tử logic n -ngôi* là một hàm $f : \Sigma^n \rightarrow \Sigma$. Ví dụ, toán tử \neg là một toán tử 1-ngôi. Cụ thể, hàm $\neg : \Sigma \rightarrow \Sigma$ định nghĩa bởi $\neg(T) = F$ và $\neg(F) = T$. (Chú ý là $\Sigma^1 = \Sigma$.) Tương tự, các toán tử $\wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow$ là các toán tử 2-ngôi.

Có bao nhiêu toán tử logic n -ngôi khác nhau?

Câu 2. (1 điểm) Cho các tập hợp A, B , và C . Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho đẳng thức

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B \quad (1)$$

Câu 3. (2 điểm) Cho n là số nguyên không âm. Để chứng minh $n^9 - n$ chia hết cho 15, hãy chứng minh các phát biểu sau với mọi số nguyên không âm n .

(a) $n^9 - n$ chia hết cho 3.

(b) $n^9 - n$ chia hết cho 5.

Câu 4. (3 điểm) Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 \quad (2)$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn điều kiện $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ và

(a) $x_1 \geq 8, x_2 \geq 5$, và $x_3 \geq 2$.

(b) $x_1 \geq 10$ và $x_3 \leq 7$.

(c) $x_1 \leq 6$ và $x_2 \leq 12$.

Câu 5. (3 điểm)

(a) Cho G là một đơn đồ thị phẳng có k thành phần liên thông. Giả sử G có n đỉnh, m cạnh, và một biểu diễn phẳng của G chia mặt phẳng ra thành r miền. Chứng minh rằng $n - m + r = k + 1$.

(b) Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng. Đặt $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg(v)$. Chứng minh rằng tồn tại một đường đi đơn trong G có độ dài $\delta(G)$ nếu $\delta(G) \geq 2$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II, NĂM HỌC 2023-2024
Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **1**
Lớp học phần: **MAT3500 1, MAT3500 2** Ngành học: **KHDL**

Lời giải 1. [1 điểm]

Để định nghĩa một hàm $f : \Sigma^n \rightarrow \Sigma$, ta cần lần lượt định nghĩa giá trị cho mỗi bộ $(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma^n$, trong đó $x_i \in \Sigma$ với $1 \leq i \leq n$. Có tất cả 2^n bộ. Có 2 lựa chọn cho giá trị của mỗi bộ: T hoặc F.	0.5
Do đó, theo quy tắc nhân, có 2^{2^n} cách định nghĩa một toán tử logic n -ngôi f . Nói cách khác, có 2^{2^n} toán tử logic n -ngôi khác nhau.	0.5

Lời giải 2. [1 điểm]

$\begin{aligned}(A \setminus B) \setminus C &= \{x \mid x \in (A \setminus B) \setminus C\} \\ &= \{x \mid x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C\} \\ &= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C\} \\ &= \{x \mid (x \notin B \wedge x \in A) \wedge x \notin C\} \\ &= \{x \mid x \notin B \wedge (x \in A \wedge x \notin C)\} \\ &= \{x \mid x \notin B \wedge x \in (A \setminus C)\} \\ &= \{x \mid x \in (A \setminus C) \setminus B\} \\ &= (A \setminus C) \setminus B\end{aligned}$	<p style="text-align: right;">Định nghĩa tập hợp Định nghĩa hiệu hai tập hợp Định nghĩa hiệu hai tập hợp Giao hoán trong logic Kết hợp trong logic Định nghĩa hiệu hai tập hợp Định nghĩa hiệu hai tập hợp Định nghĩa tập hợp</p>	1
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------

Lời giải 3. [2 điểm]

(a) Nếu n chia hết cho 3 thì hiển nhiên $n^9 - n$ cũng thế. Ta xét trường hợp n không chia hết cho 3. Theo Định lý Fermat nhỏ, $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Do đó, $n^9 = (n^2)^4 n \equiv n \pmod{3}$. Suy ra $n^9 - n$ chia hết cho 3.	1
(b) Nếu n chia hết cho 5 thì hiển nhiên $n^9 - n$ cũng thế. Ta xét trường hợp n không chia hết cho 5. Theo Định lý Fermat nhỏ, $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$. Do đó, $n^9 = (n^4)^2 n \equiv n \pmod{5}$. Suy ra $n^9 - n$ chia hết cho 5.	1

Lời giải 4. Chú ý rằng mỗi nghiệm của (2) là một bộ các số nguyên không âm (x_1, x_2, x_3, x_4) . [3 điểm]

<p>(a) Đặt $x'_1 = x_1 - 8 \geq 0$, $x'_2 = x_2 - 5 \geq 0$, và $x'_3 = x_3 - 2 \geq 0$. Phương trình (2) tương đương với</p> $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x_4 = 25 - 8 - 5 - 2 = 10 \quad (3)$ <p>trong đó x'_1, x'_2, x'_3, và x_4 là các số nguyên không âm. Do đó, số nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 8, x_2 \geq 5, x_3 \geq 2$, và $x_4 \geq 0$ bằng với số nghiệm của (3) thỏa mãn $x'_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x'_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$, và bằng $C_{10+4-1}^{4-1} = C_{13}^3 = 286$.</p>	1
<p>(b) Gọi U là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 10, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$. Gọi A là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 10, x_2 \geq 0, 0 \leq x_3 \leq 7$, và $x_4 \geq 0$. Ta cần tính A. Chú ý rằng $\bar{A} = U \setminus A$ là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 10, x_2 \geq 0, x_3 \geq 8$, và $x_4 \geq 0$. Thêm vào đó, $A = U - \bar{A}$. Đặt $x'_1 = x_1 - 10 \geq 0$. Tương tự như câu (a), U chính là số nghiệm của phương trình $x'_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 - 10 = 15$ thỏa mãn $x'_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$. Do đó, $U = C_{15+4-1}^{4-1} = C_{18}^3 = 816$. Đặt $x'_3 = x_3 - 8 \geq 0$. Tương tự như câu (a), \bar{A} chính là số nghiệm của phương trình $x'_1 + x_2 + x'_3 + x_4 = 25 - 10 - 8 = 7$ thỏa mãn $x'_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x'_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$. Do đó, $\bar{A} = C_{7+4-1}^{4-1} = C_{10}^3 = 120$. Do đó, $A = U - \bar{A} = 816 - 120 = 696$.</p>	1

(c)

Cách 1: Gọi U là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Gọi A là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 6$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{2, 3, 4\}$. Gọi B là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $0 \leq x_2 \leq 12$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 3, 4\}$. Ta cần tính $|A \cap B|$.

Ta có $\bar{A} = U \setminus A$, $\bar{B} = U \setminus B$, và $\overline{A \cap B} = U \setminus (A \cap B)$. Theo luật De Morgan, ta cũng có $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Theo quy tắc bù trừ, $|\bar{A} \cup \bar{B}| = |\bar{A}| + |\bar{B}| - |\bar{A} \cap \bar{B}|$. Do đó, ta cũng có $|A \cap B| = |U| - |\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - |\bar{A} \cup \bar{B}| = |U| - |\bar{A}| - |\bar{B}| + |\bar{A} \cap \bar{B}|$.

Ta có $|U| = C_{25+4-1}^{4-1} = C_{28}^3 = 3276$.

Chú ý rằng \bar{A} là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 7$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{2, 3, 4\}$. Đặt $x'_1 = x_1 - 7 \geq 0$. Tương tự câu (a), $|\bar{A}|$ bằng số nghiệm của phương trình $x'_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 - 7 = 18$ thỏa mãn $x'_1 \geq 0$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{2, 3, 4\}$. Do đó, $|\bar{A}| = C_{18+4-1}^{4-1} = C_{21}^3 = 1330$.

Chú ý rằng \bar{B} là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_2 \geq 13$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 3, 4\}$. Đặt $x'_2 = x_2 - 13 \geq 0$. Tương tự câu (a), $|\bar{B}|$ bằng số nghiệm của phương trình $x_1 + x'_2 + x_3 + x_4 = 25 - 13 = 12$ thỏa mãn $x'_2 \geq 0$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 3, 4\}$. Do đó, $|\bar{B}| = C_{12+4-1}^{4-1} = C_{15}^3 = 455$.

Chú ý rằng $\bar{A} \cap \bar{B}$ là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 7$, $x_2 \geq 13$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{3, 4\}$. Đặt $x'_1 = x_1 - 7 \geq 0$ và $x'_2 = x_2 - 13 \geq 0$. Tương tự câu (a), $|\bar{A} \cap \bar{B}|$ bằng số nghiệm của phương trình $x'_1 + x'_2 + x_3 + x_4 = 25 - 13 - 7 = 5$ thỏa mãn $x'_1 \geq 0$, $x'_2 \geq 0$, và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{3, 4\}$. Do đó, $|\bar{A} \cap \bar{B}| = C_{5+4-1}^{4-1} = 56$.

Do đó, $|A \cap B| = |U| - |\bar{A}| - |\bar{B}| + |\bar{A} \cap \bar{B}| = 3276 - 1330 - 455 + 56 = 1547$.

Cách 2: Số nghiệm của (2) thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 6$, $0 \leq x_2 \leq 12$, $x_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$ là hệ số của x^{25} trong hàm sinh

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^0 + x^1 + \cdots + x^6)(x^0 + x^1 + \cdots + x^{12})(x^0 + x^1 + \cdots + x^{25})^2 \\ &= (1 - x^7 - x^{13} + x^{20})(1 - 2x^{26} + x^{52})(1 - x)^{-4} \end{aligned}$$

Chú ý rằng hệ số của x^r trong khai triển của $(1 - x)^{-4}$ là $(-1)^r C_{-4}^r = (-1)^r ((-1)^r C_{4+r-1}^r) = C_{r+3}^r$. Để có x^{25} trong khai triển của $G(x)$ ta có thể

- (i) Nhân x^0 trong $1 - x^7 - x^{13} + x^{20}$ với x^0 trong $1 - 2x^{26} + x^{52}$ và với x^{25} trong khai triển của $(1 - x)^{-4}$. Hệ số $c_{(i)}$ của x^{25} ở đây là hệ số của x^{25} trong khai triển của $(1 - x)^{-4}$.
- (ii) Nhân x^7 trong $1 - x^7 - x^{13} + x^{20}$ với x^0 trong $1 - 2x^{26} + x^{52}$ và với x^{18} trong khai triển của $(1 - x)^{-4}$. Hệ số $c_{(ii)}$ của x^{25} ở đây là hệ số của x^{18} trong khai triển của $(1 - x)^{-4}$.
- (iii) Nhân x^{13} trong $1 - x^7 - x^{13} + x^{20}$ với x^0 trong $1 - 2x^{26} + x^{52}$ và với x^{12} trong khai triển của $(1 - x)^{-4}$. Hệ số $c_{(iii)}$ của x^{25} ở đây là hệ số của x^{12} trong khai triển của $(1 - x)^{-4}$.
- (iv) Nhân x^{20} trong $1 - x^7 - x^{13} + x^{20}$ với x^0 trong $1 - 2x^{26} + x^{52}$ và với x^5 trong khai triển của $(1 - x)^{-4}$. Hệ số $c_{(iv)}$ của x^{25} ở đây là hệ số của x^5 trong khai triển của $(1 - x)^{-4}$.

Hệ số của x^{25} trong khai triển của $G(x)$ là $c_{(i)} - c_{(ii)} - c_{(iii)} + c_{(iv)} = C_{28}^{25} - C_{21}^{18} - C_{15}^{12} + C_8^5 = 1547$.

Lời giải 5.

[3 điểm]

<p>(a) Gọi $G_i, 1 \leq i \leq k$, là các thành phần liên thông của G. Giả sử G_i có n_i đỉnh, m_i cạnh, và một biểu diễn phẳng của G_i chia mặt phẳng thành r_i miền, với $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Theo công thức Euler, với $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $n_i - m_i + r_i = 2$. Thêm vào đó, ta cũng có $n = \sum_{i=1}^k n_i$, $m = \sum_{i=1}^k m_i$, và $r = \sum_{i=1}^k r_i - k + 1$ (do các biểu diễn phẳng của G_i ($1 \leq i \leq k$) có chung miền vô hạn). Do đó,</p> $\begin{aligned}n - m + r &= \sum_{i=1}^k n_i - \sum_{i=1}^k m_i + \left(\sum_{i=1}^k r_i - k + 1\right) \\&= \sum_{i=1}^k (n_i - m_i + r_i) - k + 1 \\&= 2k - k + 1 \\&= k + 1.\end{aligned}$	1.5
<p>(b) Gọi $P = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ là đường đi đơn dài nhất trong G. Do $\delta(G) \geq 2$, ta cũng có $\deg_G(v_0) \geq \delta(G) \geq 2$. Xét đỉnh $w \in N_G(v_0)$ bất kỳ. Ta chứng minh $w \in V(P)$. Thật vậy, giả sử $w \notin V(P)$. Đường đi $P' = w, v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ là đường đi đơn trong G có độ dài lớn hơn P, mâu thuẫn với định nghĩa của P. Do đó, $w \in V(P)$. Ta đã chứng minh với mọi $w \in N_G(v_0)$, $w \in V(P)$. Do đó, $N_G(v_0) \cup \{v_0\} \subseteq V(P)$, suy ra $\delta(G) + 1 \leq N_G(v_0) \cup \{v_0\} \leq V(P)$. Do đó, P là một đường đi đơn có độ dài tối thiểu là $\delta(G)$, và ta luôn chọn được một đường đi con của P có độ dài chính xác $\delta(G)$ thỏa mãn yêu cầu đề ra.</p>	1.5

Hà Nội, ngày 20 tháng 05 năm 2024
NGƯỜI LÀM ĐÁP ÁN
(ký và ghi rõ họ tên)

Hoàng Anh Đức