

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Thuật toán I

Mô tả, chứng minh, đánh giá thuật toán; Tìm kiếm và sắp xếp

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn



Nội dung



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Định nghĩa và một số khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

2

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- Một **thuật toán (algorithm)** là một tập hữu hạn các hướng dẫn cụ thể để thực hiện một nhiệm vụ nào đó

- cộng hai số tự nhiên biểu diễn dưới dạng số thập phân
- đăng ký môn học trực tuyến
- đi từ nhà đến trường

- Một **chương trình máy tính (computer program)** là

- một mô tả của thuật toán nào đó
- sử dụng một ngôn ngữ đủ chuẩn xác để máy tính có thể hiểu

- cùng với các phép toán mà máy tính đã biết cách thực hiện

Ta nói rằng thuật toán được **cài đặt (implement)** cụ thể bằng chương trình máy tính

- Khi mở một phần mềm trong máy tính, ta nói rằng **chương trình hoặc thuật toán của nó được chạy hoặc được thực hiện bởi máy tính**

- Khi có mô tả của một thuật toán, bạn cũng **có thể thực hiện từng bước của thuật toán với giấy và bút**

Định nghĩa và một số khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Một số tính chất của một thuật toán

Đầu vào (Input) Một thuật toán có các giá trị đầu vào từ một tập đã được xác định trước

Đầu ra (Output) Từ mỗi một tập các giá trị đầu vào, một thuật toán sinh ra các giá trị đầu ra. Các giá trị này chính là lời giải cho bài toán

Tính xác định (Definiteness) Các bước của một thuật toán cần phải được xác định một cách chính xác

Tính đúng đắn (Correctness) Với mỗi tập giá trị đầu vào, một thuật toán cần cho ra kết quả đầu ra đúng

Tính hữu hạn (Finiteness) Với mỗi tập giá trị đầu vào, một thuật toán cần cho ra các giá trị đầu ra mong muốn sau một số hữu hạn (có thể là rất lớn) các bước

Tính hiệu quả (Effectiveness) Mỗi bước của thuật toán cần được thực hiện một cách chính xác và trong thời gian hữu hạn

Tính tổng quát (Generality) Thuật toán phải áp dụng được cho mọi bài toán mong muốn, chứ không phải chỉ với một tập các giá trị đầu vào đặc biệt

3

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Định nghĩa và một số khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Một *mô tả đầy đủ của một thuật toán* bao gồm ba phần

(1) *Thuật toán (algorithm)*

- Mô tả một cách rõ ràng và chính xác nhất có thể
 - Một *thuật toán* có thể được *mô tả bằng một ngôn ngữ máy tính* (C, Python, Java, v.v...). Tuy nhiên, những mô tả này cần tuân theo các chỉ dẫn cụ thể trong ngôn ngữ máy tính tương ứng. Điều này dẫn đến việc các mô tả theo phương pháp này thường phức tạp và khó hiểu
 - Thay vì dùng một ngôn ngữ máy tính cụ thể để mô tả thuật toán, ta sử dụng *ngôn ngữ thông thường (natural language)*, *giả mã (pseudocode)*, hoặc *sơ đồ khối (flowchart)*
- Thường kèm theo mô tả ngắn gọn về ý tưởng của thuật toán

(2) Một chứng minh về *tính đúng đắn (correctness)* của thuật toán

- Với mọi tập đầu vào hợp lệ, thuật toán cần cho kết quả đầu ra đúng

(3) Một phân tích về *hiệu năng (performance)* của thuật toán

- Thời gian thực thi, không gian bộ nhớ, v.v...

4

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Sử dụng *ngôn ngữ thông thường (natural language)* để mô tả từng bước thực hiện thuật toán

Bước 1 Thực hiện việc X **Bước 3** Lặp lại Z

Bước 2 Tính Y **Bước 4** ...

Ví dụ 1 (Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường)

■ Bài toán:

- **Input:** Dãy số nguyên a_1, a_2, \dots, a_n
- **Output:** Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

■ Tìm giá trị của phần tử lớn nhất:

Bước 1 Gán biến v (lưu giá trị lớn nhất hiện tại) bằng a_1

Bước 2 Lần lượt xét các phần tử a_2, a_3, \dots, a_n :

- Nếu phần tử đang xét lớn hơn v , cập nhật v bằng giá trị của phần tử đó
- Ngược lại, giữ nguyên giá trị của v

Bước 3 Sau khi xét hết tất cả các phần tử, trả về giá trị của v (chính là phần tử lớn nhất trong dãy)

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

5

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

6

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Ví dụ 2 (Thực hiện thuật toán)

■ **Input:** Dãy $a_1 = 7, a_2 = 12, a_3 = 5, a_4 = 16, a_5 = 9$

■ **Output:** Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
<div>7</div>	<div>12</div>	<div>5</div>	<div>16</div>	<div>9</div>
	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$v = 7$	$v = 12$	$v = 12$	$v = 16$	$v = 16$

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng giả mã



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- **Giả mã (pseudocode)** là một dạng *hỗn hợp giữa ngôn ngữ thông thường và ngôn ngữ lập trình*
- Một **biến (variable)** được sử dụng để biểu diễn vị trí trong bộ nhớ máy tính để lưu trữ một giá trị. Khi ta nói đến một biến X nào đó, trên thực tế, chúng ta muốn sử dụng giá trị lưu tại một vị trí nào đó trong bộ nhớ ứng với X

Phép gán (assignment)

`variable := expression`

- Tính toán **expression**
- Lưu kết quả vào (vị trí trong bộ nhớ ứng với) biến **variable**
- Chú ý rằng $=$ và $:=$ khác nhau. Do đó, trong nhiều tài liệu, ký hiệu \leftarrow được sử dụng thay thế cho $:=$.

7

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng giả mã



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Cấu trúc điều kiện (conditional statement)

if condition then

S_1

else

S_2

- Tính **condition**; trả lại True hoặc False
- Nếu True, thực hiện S_1 ; nếu False, thực hiện S_2
- Sau đó tiếp tục với các lệnh tiếp theo sau cấu trúc điều kiện

8

74

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng giả mã



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt buộc vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Vòng lặp **for** (**for loop**)

```
for variable := initial_value to final_value do  
    S
```

- Khởi tạo **variable** với giá trị **initial_value**
- Nếu **variable** \leq **final_value**, thực hiện đoạn mã **S**
- Sau mỗi lần lặp, tăng **variable** thêm 1
- Kiểm tra lại điều kiện; nếu vẫn thỏa mãn, tiếp tục lặp
- Khi **variable** $>$ **final_value**, thoát vòng lặp, thực hiện các lệnh tiếp theo ngay sau vòng **for**

9

74

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng giả mã



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Vòng lặp **while** (*while loop*)

```
while condition do  
    S
```

- Kiểm tra giá trị của **condition**
- Nếu **condition** là **True**, thực hiện đoạn mã **S**
- Sau khi thực hiện **S**, kiểm tra lại **condition**
- Nếu vẫn **True**, thực hiện **S** lần nữa
- Khi **condition** trở thành **False**, thoát khỏi vòng lặp và thực hiện các lệnh tiếp theo ngay sau vòng **while**

10

74

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng giả mã



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Vòng lặp **do-while** (**do-while** loop)

```
do
    S
while condition
```

- Thực hiện đoạn mã S trước
- Sau đó, kiểm tra giá trị của **condition**
- Nếu **condition** là True, thực hiện S lần nữa
- Tiếp tục lặp lại quá trình cho đến khi **condition** trở thành False
- Khác với vòng lặp **while**, vòng lặp **do-while** luôn thực hiện S ít nhất một lần
- Một số giáo trình đề cập cấu trúc **repeat...until** tương tự, với **until** sử dụng điều kiện ngược lại để dừng lặp

11

74

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng giả mã



Lệnh trả về (*return statement*)

return expression

- Trả về giá trị của **expression** làm kết quả đầu ra của thuật toán
- Khi gặp lệnh **return**, thuật toán sẽ kết thúc ngay lập tức
- Nếu **return** nằm trong một hàm, nó sẽ trả về giá trị cho nơi gọi hàm và kết thúc việc thực thi hàm

Nhận xét và chú thích (*comments*)

- Nhận xét là văn bản giải thích mà chương trình sẽ bỏ qua khi thực thi
- Được sử dụng để làm rõ code hoặc giải thích logic
- Các dạng phổ biến:
 - `// Nhận xét một dòng`
 - `/* Nhận xét nhiều dòng */`
 - `⟪ Nhận xét ⟫`

Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

12

74

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng giả mã



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Ví dụ 3 (Mô tả thuật toán bằng giả mã)

Thuật toán 1: Tìm giá trị của phần tử lớn nhất

Input: a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số nguyên

Output: Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

```
1  $v := a_1$  // phần tử lớn nhất đến hiện tại
2 for  $i := 2$  to  $n$  do // lần lượt xét  $a_2, \dots, a_n$ 
3     if  $a_i > v$  then //  $a_i >$  phần tử lớn nhất hiện tại?
4          $v := a_i$  // bây giờ  $v$  lớn nhất trong
             $a_1, \dots, a_i$ 
5 return  $v$ 
```

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt buộc vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng sơ đồ khối



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

14 Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

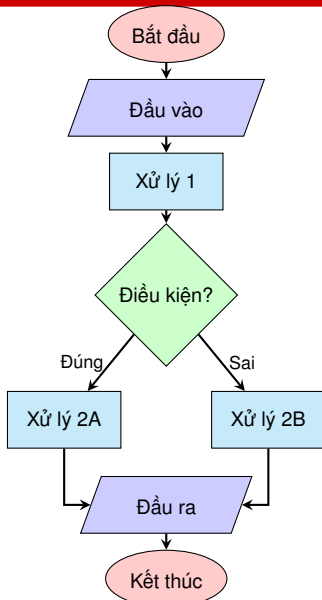
Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- **Sơ đồ khối (flowchart)** là một loại biểu đồ biểu diễn một luồng công việc hoặc quy trình
- Hiển thị các bước dưới dạng các hộp hình dạng khác nhau
- Thứ tự thực hiện được kết nối bằng các mũi tên
- Các thành phần chính:
 - **Bắt đầu/Kết thúc** (hình elip)
 - **Xử lý** (hình chữ nhật)
 - **Điều kiện** (hình thoi)
 - **Đầu vào/Đầu ra** (hình thang)



Mô tả thuật toán

Mô tả bằng sơ đồ khối



Ví dụ 4 (Mô tả thuật toán bằng sơ đồ khối)

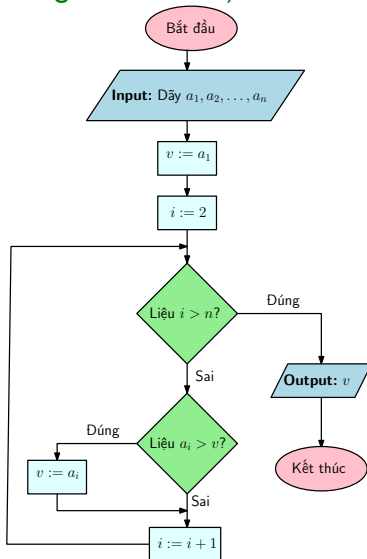
Bài toán:

- **Input:** Dãy số nguyên

a_1, a_2, \dots, a_n

- **Output:** Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

Ý tưởng: Duyệt qua từng phần tử của dãy, lưu giữ giá trị lớn nhất đã tìm thấy cho đến hiện tại.



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

15 Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt buộc vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

16 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- Có rất nhiều phương pháp khác nhau để *chứng minh tính đúng đắn của một thuật toán*
- Một trong số đó là sử dụng *bất biến vòng lặp (loop invariant)*—một phương pháp được xây dựng dựa trên phương pháp quy nạp toán học
 - *Vòng lặp (loop): for, while, v.v...*
 - Một *bất biến vòng lặp* là *một phát biểu luôn đúng trước và sau mỗi lần lặp (iteration) của một vòng lặp (loop)*

What can I learn right now in just 10 minutes that could improve my algorithmic thinking?

All related (92) ▾

Sort

Recommended ▾



Thomas Cormen

The C in CLRS · Featured on ForbesUpvoted by Vaibhav Krishan, Ph. D. student Computer Science & Computational Complexity Theory, Indian Institute of Technology, Bombay (20... and Wei-Cheng Lin, M.S. Computer Science, National Taiwan University (2016)Author has **842** answers and **40.7M** answer views · 10y

Originally Answered: What can I learn right now in just 10 minutes that could improve my algorithmic thinking ?

It's pretty hard to answer that question without knowing what you already know. If I had to give just one thing, that thing would be loop invariants. Understand that when you write a loop, you either implicitly or explicitly use a loop invariant.

Chứng minh thuật toán

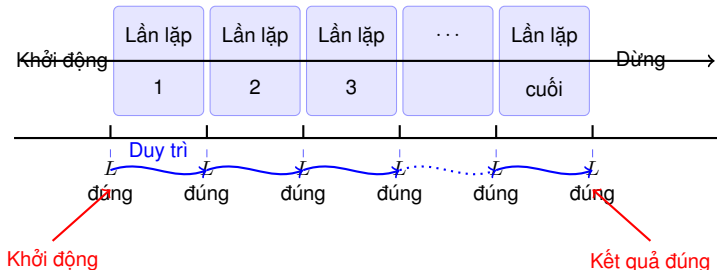
Bất biến vòng lặp

Một bất biến vòng lặp L thỏa mãn ba tính chất:

Khởi động (Initialization) L đúng trước lần lặp đầu tiên của vòng lặp

Duy trì (Maintenance) Nếu L đúng trước một lần lặp của vòng lặp thì nó cũng đúng trước lần lặp tiếp theo

Dừng (Termination) Khi vòng lặp dừng, bất biến vòng lặp cho ta một tính chất hữu ích để chứng minh thuật toán đúng



Hình: Bất biến vòng lặp



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

17

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

74

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

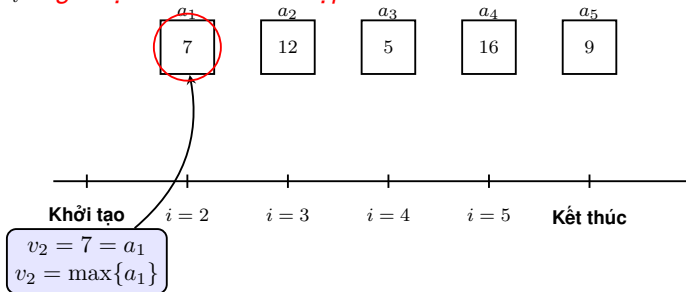


Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên a_1, \dots, a_n

$L =$ “*Ở trước lần lặp với biến i , $v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}$* ”

Gọi v_i là *giá trị của v trước lần lặp với biến i*



Khởi động: $v_2 = a_1 = \max\{a_1\}$

Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

18 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

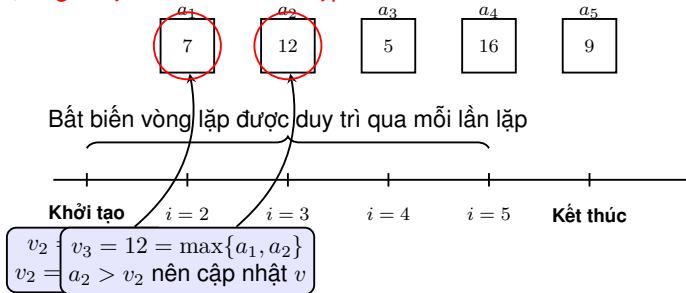


Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên a_1, \dots, a_n

$L =$ “*Ở trước lần lặp với biến i , $v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}$* ”

Gọi v_i là *giá trị của v trước lần lặp với biến i*



Khởi động: $v_2 = a_1 = \max\{a_1\}$

Duy trì: Trước $i = k$: $v_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$

Trước $i = k + 1$: $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$

Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

18 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

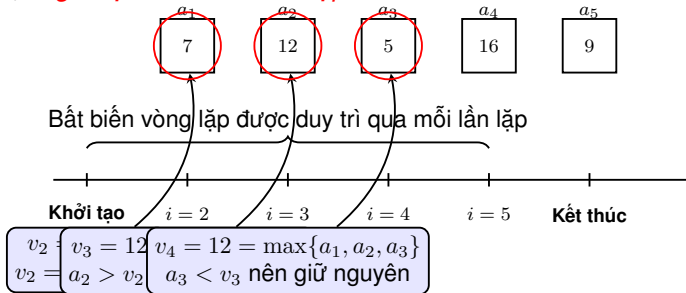


Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên a_1, \dots, a_n

$L =$ “*Ở trước lần lặp với biến i , $v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}$* ”

Gọi v_i là *giá trị của v trước lần lặp với biến i*



Khởi động: $v_2 = a_1 = \max\{a_1\}$

Duy trì: Trước $i = k$: $v_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$

Trước $i = k + 1$: $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$

Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

18 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

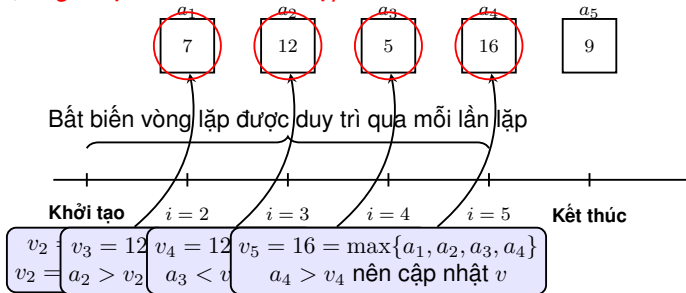


Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên a_1, \dots, a_n

$L =$ “*Ở trước lần lặp với biến i , $v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}$* ”

Gọi v_i là *giá trị của v trước lần lặp với biến i*



Khởi động: $v_2 = a_1 = \max\{a_1\}$

Trước $i = k$: $v_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$

Duy trì: Trước $i = k + 1$: $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$

Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

18 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

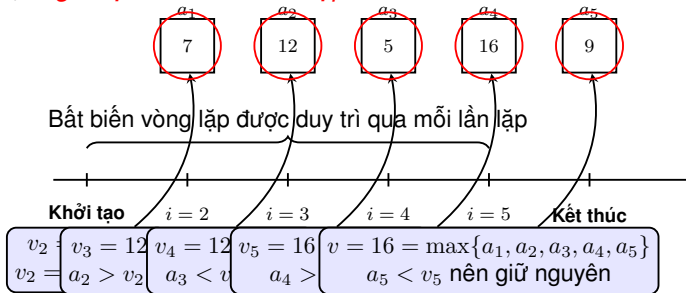


Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên a_1, \dots, a_n

$L =$ “*Ở trước lần lặp với biến i , $v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}$* ”

Gọi v_i là *giá trị của v trước lần lặp với biến i*



Khởi động: $v_2 = a_1 = \max\{a_1\}$

Duy trì: Trước $i = k$: $v_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$

Trước $i = k + 1$: $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$

Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

18 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

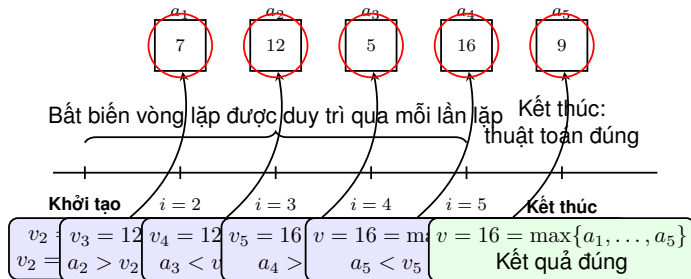


Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên a_1, \dots, a_n

$L =$ “*Ở trước lần lặp với biến i , $v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}$* ”

Gọi v_i là *giá trị của v trước lần lặp với biến i*



Khởi động: $v_2 = a_1 = \max\{a_1\}$

Trước $i = k$: $v_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$

Duy trì: Trước $i = k + 1$: $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$

Dừng: $v = \max\{a_1, \dots, a_n\}$

Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

18 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

19 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Chứng minh tính chất của bất biến vòng lặp.

$L = \text{"Ở trước lần lặp với biến } i, v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}"$

Gọi v_i là giá trị của v trước lần lặp với biến i

■ **Khởi động** ($i = 2$): Ta cần chỉ ra rằng trước vòng **for**, $v_2 = \max\{a_1\} = a_1$, và điều này hiển nhiên đúng do Thuật toán 1 gán v bằng a_1 ở Dòng 1

■ **Duy trì**: Giả sử L đúng ở trước lần lặp với $i = k$ nào đó, nghĩa là $v_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$. Ta chứng minh L đúng ở trước lần lặp với $i = k + 1$, nghĩa là $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$. Ta xét các trường hợp dựa trên điều kiện ở Dòng 3

■ Nếu $a_k > v = v_k$ sai, giá trị của v không thay đổi, và do đó $v_{k+1} = v_k$. Ta có $\max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\} = \max\{v_k, a_k\} = v_k$. Suy ra

$$v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$$

■ Nếu $a_k > v = v_k$ đúng, giá trị của v được gán bằng a_k , và do đó $v_{k+1} = a_k$. Ta cũng có $\max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\} = \max\{v_k, a_k\} = a_k$. Suy ra $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$

■ **Dừng**: Sau khi kết thúc lần lặp $i = n$ (hoặc, trước khi bắt đầu lần lặp $i = n + 1$ mà sẽ không bao giờ được thực hiện), $v = \max\{a_1, \dots, a_n\}$ và do đó là giá trị lớn nhất của các phần tử trong dãy đầu vào



Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Bài tập 1

Một thuật toán tính x^n với $x \in \mathbb{R}^+$ và $n \in \mathbb{N}$ được mô tả như sau

Thuật toán 2: Tính x^n .

Input: x : số thực dương, n : số tự nhiên

Output: Giá trị của x^n

```
1 answer := 1
2 m := n
3 while m > 0 do
4   answer := answer · x
5   m := m - 1
6 return answer
```

Hãy chứng minh phát biểu L sau là một bất biến vòng lặp cho vòng **while**

$L =$ “Ở trước lần lặp với biến m , $answer = x^{n-m}$ ”

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

20 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- **Phân tích thuật toán (algorithm analysis)** nghiên cứu cách đánh giá **hiệu quả** của thuật toán bằng cách ước lượng lượng **thời gian (time)** và **bộ nhớ (space)** cần thiết
- **Độ phức tạp (complexity)** của thuật toán là thước đo định lượng về tài nguyên (thời gian/bộ nhớ) mà thuật toán tiêu tốn
 - Thường được biểu diễn dưới dạng các hàm của **kích thước đầu vào (input size)**
 - Giúp ta so sánh và lựa chọn thuật toán hiệu quả nhất cho bài toán
- Với các hàm độ phức tạp $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hoặc $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, ta cần hiểu rõ tốc độ tăng trưởng của chúng
 - Ta nói f **tăng nhanh hơn** g nếu với mọi giá trị x đủ lớn, $f(x) > g(x)$
 - Giúp ta đánh giá hiệu quả tương đối giữa các thuật toán khi kích thước đầu vào tăng lên
 - Là nền tảng để phân loại các thuật toán theo hiệu quả tiệm cận
- Để đánh giá và so sánh độ phức tạp một cách chính xác, ta sử dụng **ký hiệu O-lớn (big-O notation)** và các ký hiệu tiệm cận khác
 - Cho phép ta mô tả **tốc độ tăng trưởng (growth rate)** của các hàm độ phức tạp
 - Tập trung vào các thành phần chính ảnh hưởng đến tốc độ tăng trưởng, bỏ qua các yếu tố không quan trọng khi kích thước đầu vào lớn

21

74

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Ký hiệu O -lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ta nói rằng f là $O(g)$ (đọc là “ f là O -lớn của g ” hoặc “ f thuộc lớp $O(g)$ ”) nếu tồn tại các hằng số C và k sao cho $|f(x)| \leq C|g(x)|$ với mọi $x > k$

Ký hiệu O -lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với $x \in \mathbb{R}$ đủ lớn. Ta nói rằng f là $O(g)$ (đọc là “ f là O -lớn của g ” hoặc “ f thuộc lớp $O(g)$ ”) nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ là hữu hạn

- f là $O(g)$ nếu từ sau điểm k nào đó, giá trị của hàm f không vượt quá giá trị của một hằng số nhân với giá trị của hàm g . Ta cũng nói “ f bị chặn trên bởi g ”
- Các hằng số C và k được gọi là các **bằng chứng (witness)** cho mối liên hệ giữa f và g . Để xác định f là $O(g)$, chỉ cần một cặp bằng chứng là đủ

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

22

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

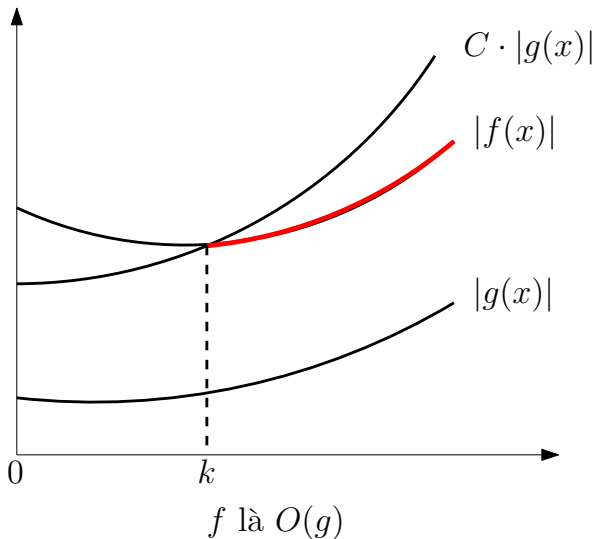
Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



23

74

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

24

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Ví dụ 6

Ta chứng minh hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = x^2 + 2x + 1$ là $O(g)$ với $g(x) = x^2$ (Ta cũng viết $x^2 + 2x + 1$ là $O(x^2)$)

Cách 1:

- Chú ý rằng khi $x > 1$, ta có $x < x^2$ và $1 < x^2$
- Do đó với mọi $x > 1$, ta có

$$|f(x)| = |x^2 + 2x + 1| \leq |x^2 + 2x^2 + x^2| = 4|x^2|$$

- Ta chọn $C = 4$ và $k = 1$

Cách 2: Do $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 + 2x + 1|}{|x^2|} = 1$, ta có $f = O(g)$

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Chú ý về quy tắc chia (division law of limit)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

chỉ đúng khi $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ đều tồn tại^a và $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

^aNghĩa là các giới hạn này là các số hữu hạn

Nhắc lại: Quy tắc L'Hospital (L'Hospital's rule)

Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ và $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, thì $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, trong đó $f'(x)$ và $g'(x)$ lần lượt là đạo hàm của $f(x)$ và $g(x)$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

25 Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

26

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Ví dụ 7

Ta chứng minh x^2 là $O(2^x)$ bằng cách sử dụng định nghĩa O -lớn theo giới hạn. Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2|}{|2^x|} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2^x \cdot \ln 2} \\&= \frac{2}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^x} \\&= \frac{2}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x \cdot \ln 2} \\&= 0.\end{aligned}$$

Quy tắc L'Hospital

Quy tắc L'Hospital

Do đó, $x^2 = O(2^x)$

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Chú ý

Nếu không đề cập gì thêm thì $\log(n) = \log_2(n)$

Bài tập 2

Chứng minh

- (a) $7x$ là $O(x^3)$
- (b) x^3 không là $O(x^2)$
- (c) $1 + 2 + \dots + n$ là $O(n^2)$
- (d) $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ là $O(n^n)$
- (e) $\log(n!)$ là $O(n \log n)$
- (f) n^3 là $O(2^n)$
- (g) $\log n$ là $O(n)$
- (h) Với các hằng số $b > 1$ và $k > 0$, $\log_b(n^k)$ là $O(\log n)$

Bài tập 3

Hãy giải thích một hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là $O(1)$ nghĩa là gì

Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

27

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

74

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Bài tập 4

Chứng minh rằng

- (a) x^3 là $O(x^4)$ nhưng x^4 không là $O(x^3)$
- (b) $3x^4 + 1$ là $O(x^4/2)$ và $x^4/2$ là $O(3x^4 + 1)$
- (c) $x \log x$ là $O(x^2)$ nhưng x^2 không là $O(x \log x)$
- (d) 2^n là $O(3^n)$ nhưng 3^n không là $O(2^n)$

Bài tập 5

Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là $O(x)$ thì $f(x)$ cũng là $O(x^2)$

Bài tập 6

Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho phát biểu: Nếu $f(x)$ là $O(g_1(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$ thì $f_1(x) - f_2(x)$ là $O(g_1(x) - g_2(x))$

Bài tập 7

Chứng minh rằng nếu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với a_0, a_1, \dots, a_n là các số thực (nghĩa là, $f(x)$ là một đa thức bậc n) thì f là $O(x^n)$

Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

28

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

29

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- Ký hiệu $f(n) = O(g(n))$ thường được sử dụng để chỉ $f(n)$ là $O(g(n))$
 - Ký hiệu này không hoàn toàn chặt chẽ về mặt toán học, do $f(n)$ là một hàm còn $O(g(n))$ là một tập hợp các hàm
 - $f(n) = O(g(n))$ trên thực tế nghĩa là $f(n) \in O(g(n))$, do đó có thể viết $n = O(n^2)$ nhưng **không nên viết** $O(n^2) = n$
- Bạn có thể gặp biểu thức dạng “ $f(n) + O(g(n)) = O(h(n))$ ”
 - Dấu “=” ở đây nghĩa là “ \subseteq ”. Cụ thể, biểu thức trên cần được hiểu là tập hợp S gồm các hàm $f(n) + g_1(n)$ với $g_1(n) \in O(g(n))$ là tập con của tập $O(h(n))$
- Bạn có thể gặp biểu thức dạng “ $f(n) \leq g(n) + O(h(n))$ với mọi $n \geq 0$ ” hoặc tương tự
 - Nghĩa là tồn tại $e(n)$ sao cho (a) $f(n) \leq g(n) + e(n)$ với mọi $n \geq 0$ và (b) $e(n) \in O(h(n))$
- Một số tác giả định nghĩa O -lớn bằng cách thay điều kiện $|f(x)| \leq C|g(x)|$ bằng $0 \leq f(x) \leq C(g(x))$. (Làm việc với giá trị tuyệt đối và khả năng các hàm $f(x)$ và $g(x)$ có thể nhận giá trị âm thường khó hơn là chỉ làm việc với các hàm nhận giá trị dương.) Định nghĩa theo cách này không hoàn toàn chặt chẽ. Ví dụ như hàm $\log x$ có thể nhận giá trị âm với x nhỏ

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

30

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

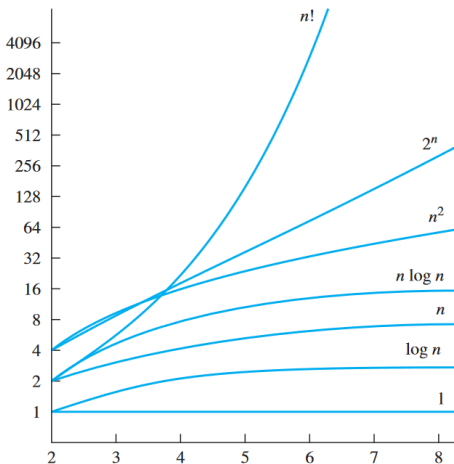
Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



Hình: Độ tăng của một số hàm thường dùng khi đánh giá với ký hiệu O -lớn [Rosen 2012]

74

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

31

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Một số xấp xỉ hữu ích

(1) Nếu $d > c > 1$, thì n^c là $O(n^d)$, nhưng n^d không là $O(n^c)$

(2) Nếu $b > 1$ và c, d là các số dương, thì $(\log_b n)^c$ là $O(n^d)$ nhưng n^d không là $O((\log_b n)^c)$

(3) Nếu $b > 1$ và d là số dương, thì n^d là $O(b^n)$ nhưng b^n không là $O(n^d)$

(4) Nếu $c > b > 1$, thì b^n là $O(c^n)$ nhưng c^n không là $O(b^n)$

Một số tính chất quan trọng

(a) Nếu $f_1(x) = O(g_1(x))$ và $f_2(x) = O(g_2(x))$ thì $(f_1 + f_2)(x) = O(g(x))$ trong đó $g(x) = \max\{|g_1(x)|, |g_2(x)|\}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

(b) Nếu $f_1(x) = O(g_1(x))$ và $f_2(x) = O(g_2(x))$ thì $(f_1 f_2)(x) = O(g_1(x)g_2(x))$

Bài tập 8

Ước lượng theo O -lớn hàm $f(n) = 3n \log n! + (n^2 + 3) \log n$

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

32

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Bài tập 9

Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo

- (a) \sqrt{n} , $1000 \log n$, $n \log n$, $2n!$, 2^n , 3^n , và $\frac{n^2}{1000000}$
- (b) $(1.5)^n$, n^{100} , $(\log n)^3$, $\sqrt{n} \log n$, 10^n , $(n!)^2$, và $n^{99} + n^{98}$

Bài tập 10

Giả sử bạn có hai thuật toán khác nhau để giải một bài toán. Để giải một bài toán có kích thước n ,

- (1) thuật toán thứ nhất sử dụng đúng $n(\log n)$ phép toán và thuật toán thứ hai sử dụng đúng $n^{3/2}$ phép toán;
- (2) thuật toán thứ nhất sử dụng đúng $n^2 2^n$ phép toán và thuật toán thứ hai sử dụng đúng $n!$ phép toán.

Khi n tăng, trong mỗi trường hợp trên, thuật toán nào sử dụng ít phép toán hơn?

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Bài tập 11

Hãy đưa ra ước lượng O -lớn chính xác nhất có thể cho mỗi hàm sau

- (a) $(n^2 + 8)(n + 1)$
- (b) $(n \log n + n^2)(n^3 + 2)$
- (c) $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2 + 1))$
- (d) $(n^3 + n^2 \log n)(\log n + 1) + (17 \log n + 19)(n^3 + 2)$
- (e) $(2n + n^2)(n^3 + 3n)$
- (f) $(n^n + n2^n + 5^n)(n! + 5n)$
- (g) $n \log(n^2 + 1) + n^2 \log n$
- (h) $(n \log n + 1)^2 + (\log n + 1)(n^2 + 1)$
- (i) $n^{2^n} + n^{n^2}$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

33

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Ký hiệu Ω -lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ta nói rằng f là $\Omega(g)$ nếu tồn tại các hằng số $C > 0$ và k sao cho $|f(x)| \geq C|g(x)|$ với mọi $x > k$

Ký hiệu Ω -lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với $x \in \mathbb{R}$ đủ lớn. Ta nói rằng f là $\Omega(g)$ nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ khác 0

Bài tập 12

Chứng minh rằng f là $\Omega(g)$ khi và chỉ khi g là $O(f)$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

34 Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Chú ý

f là $O(g)$ theo nghĩa nào đó là “độ tăng của $f \leq$ độ tăng của g ”. Tuy nhiên, bạn cần cẩn thận! Với hai số thực $a, b \in \mathbb{R}$, các bất đẳng thức $a \leq b$ và $b \leq a$ không thể cùng sai. Nhưng tồn tại hàm f sao cho $f = O(g)$ và $f = \Omega(g)$ cùng sai

Bài tập 13 (★)

Tìm các ví dụ của các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện (a) – (d) tương ứng

	$f(n)$ là $O(n^3)$	$f(n)$ không là $O(n^3)$
$f(n)$ là $\Omega(n^3)$	(a)	(b)
$f(n)$ không là $\Omega(n^3)$	(c)	(d)

Cụ thể, ở (a), bạn cần tìm ví dụ về một hàm $f(n)$ đồng thời là $O(n^3)$ và $\Omega(n^3)$ và chứng minh ví dụ bạn tìm ra là đúng. Tương tự cho các phần (b), (c), và (d)

35

74

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Ký hiệu Θ -lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ta nói rằng f là $\Theta(g)$ nếu f là $O(g)$ và f là $\Omega(g)$

Ký hiệu Θ -lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với $x \in \mathbb{R}$ đủ lớn. Ta nói rằng f là $\Theta(g)$ nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ là hữu hạn và khác 0

Bài tập 14

Chứng minh rằng $1 + 2 + \dots + n$ là $\Theta(n^2)$

Bài tập 15

Chứng minh rằng với các hàm f, g từ \mathbb{R} đến \mathbb{R} , f là $\Theta(g)$ khi và chỉ khi tồn tại các hằng số dương C_1, C_2 , và k sao cho $C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$ với mọi $x > k$

36

74

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Ký hiệu o -nhỏ

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ta nói rằng f là $o(g)$ nếu với mọi $C > 0$ tồn tại k sao cho $|f(x)| < C|g(x)|$ với mọi $x > k$

Ký hiệu o -nhỏ

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với $x \in \mathbb{R}$ đủ lớn. Ta nói rằng f là $o(g)$ nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$

Ký hiệu o -nhỏ

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ta nói rằng f là $o(g)$ nếu f là $O(g)$ nhưng f không là $\Omega(g)$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

37

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Ký hiệu ω -nhỏ

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ta nói rằng f là $\omega(g)$ nếu với mọi $C > 0$ tồn tại k sao cho $|f(x)| > C|g(x)|$ với mọi $x > k$

Ký hiệu ω -nhỏ

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với $x \in \mathbb{R}$ đủ lớn. Ta nói rằng f là $\omega(g)$ nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \infty$

Ký hiệu ω -nhỏ

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với $x \in \mathbb{R}$ đủ lớn. Ta nói rằng f là $\omega(g)$ nếu f là $\Omega(g)$ nhưng f không là $O(g)$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

38

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

39

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Tóm lại, với các hàm f và g từ \mathbb{R} đến \mathbb{R}

■ f là $O(g)$ “ f tăng không nhanh hơn g ” tương tự “ \leq ”

$$\exists C, k \forall x > k \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$$

■ f là $\Omega(g)$ “ f tăng ít nhất nhanh như g ” tương tự “ \geq ”

$$\exists C > 0, k \forall x > k \quad |f(x)| \geq C|g(x)|$$

■ f là $\Theta(g)$ “ f tăng nhanh như g ” tương tự “ $=$ ”

$$\exists C_1 > 0, C_2 > 0, k \forall x > k \quad C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$$

■ f là $o(g)$ “ f tăng chậm hơn g ” tương tự “ $<$ ”

$$\forall C > 0 \exists k \forall x > k \quad |f(x)| < C|g(x)|$$

■ f là $\omega(g)$ “ f tăng nhanh hơn g ” tương tự “ $>$ ”

$$\forall C > 0 \exists k \forall x > k \quad |f(x)| > C|g(x)|$$

Độ phức tạp tính toán

Định nghĩa và khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- Một thuật toán tốt phải *luôn đúng về mặt kết quả* và *hiệu quả về mặt tài nguyên*
- **Độ phức tạp (complexity)** đo lường mức độ khó khăn của một tính toán dựa trên tài nguyên cần thiết:
 - **Độ phức tạp theo thời gian (time complexity):** Số lượng các phép toán cơ bản hoặc số bước thực hiện
 - **Độ phức tạp theo không gian (space complexity):** Lượng bộ nhớ (số bit) cần thiết để thực hiện tính toán
- Độ phức tạp của thuật toán thay đổi theo **kích thước đầu vào (input size)**
 - Ví dụ: Tìm kiếm một phần tử trong dãy có 100000 phần tử sẽ tốn nhiều tài nguyên hơn so với dãy có chỉ vài phần tử
- Do đó, độ phức tạp thường được biểu diễn dưới dạng một **hàm số $f(n)$** với n là kích thước đầu vào
 - Hàm này giúp ta dự đoán tài nguyên cần thiết khi kích thước đầu vào tăng lên
- Khi phân tích thuật toán, chúng ta không quan tâm đến chính xác số lượng phép toán, mà chỉ cần **đánh giá tiệm cận (asymptotic estimate)** về mức độ tài nguyên tiêu thụ khi kích thước đầu vào tăng lên

40

74

Độ phức tạp tính toán

Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

41

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- Các ký hiệu tiệm cận là những công cụ toán học thiết yếu để đặc trưng hóa và so sánh độ phức tạp các thuật toán
- Trong phân tích *độ phức tạp tính toán theo thời gian (time complexity)*, ta xem xét ba loại trường hợp:
 - *Độ phức tạp trường hợp xấu nhất (worst-case complexity)*: Thời gian tối đa mà thuật toán có thể tiêu tốn với bất kỳ đầu vào nào có kích thước cụ thể—**thường được sử dụng phổ biến nhất trong phân tích thuật toán**
 - *Độ phức tạp trường hợp trung bình (average-case complexity)*: Thời gian trung bình khi xét tất cả các đầu vào có khả năng xuất hiện với cùng kích thước—**thường khó xác định**
 - *Độ phức tạp trường hợp tốt nhất (best-case complexity)*: Thời gian tối thiểu với đầu vào thuận lợi nhất có kích thước cụ thể—**ít có giá trị thực tiễn trong đánh giá thuật toán**
- Trong thực hành, ta thường mô tả thời gian chạy của thuật toán theo *ký hiệu O-lớn* để đơn giản hóa việc phân tích. *Ký hiệu Θ -lớn* cung cấp đánh giá chính xác hơn về độ phức tạp thực sự nhưng đôi khi khó xác định
- Cần lưu ý rằng nhiều tài liệu sử dụng biểu thức “ $f(n)$ là $O(g(n))$ ” khi thực chất họ đang muốn biểu diễn “ $f(n)$ là $\Theta(g(n))$ ”

Độ phức tạp tính toán

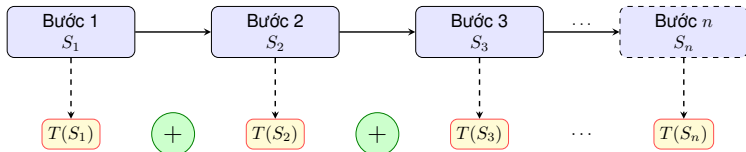
Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Độ phức tạp của một chuỗi tuần tự các bước là tổng của độ phức tạp của từng bước



$$\text{Tổng độ phức tạp} = T(S_1) + T(S_2) + T(S_3) + \dots + T(S_n)$$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

42

74

Độ phức tạp tính toán

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

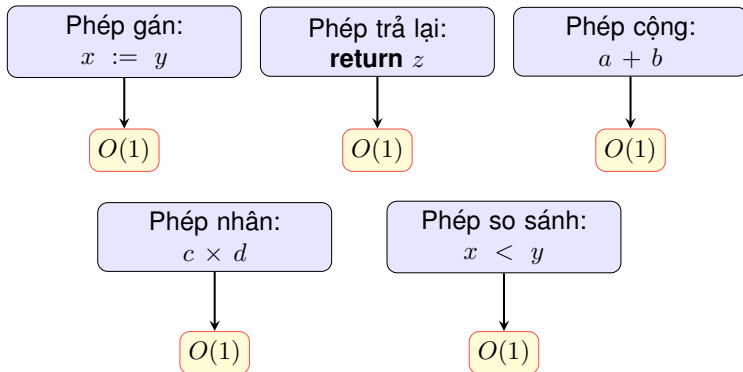


Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thời gian thực hiện các lệnh gán ($:=$), trả lại (**return**) là $O(1)$, và giả sử thời gian thực hiện các phép toán cơ bản (cộng, trừ, nhân, chia, so sánh, v.v...) cũng là $O(1)$

- Trong thực tế, việc cộng hai số nguyên độ dài n bit biểu diễn dưới dạng số nhị phân có độ phức tạp $O(n)$ chứ không phải $O(1)$



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

43

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

74

Độ phức tạp tính toán

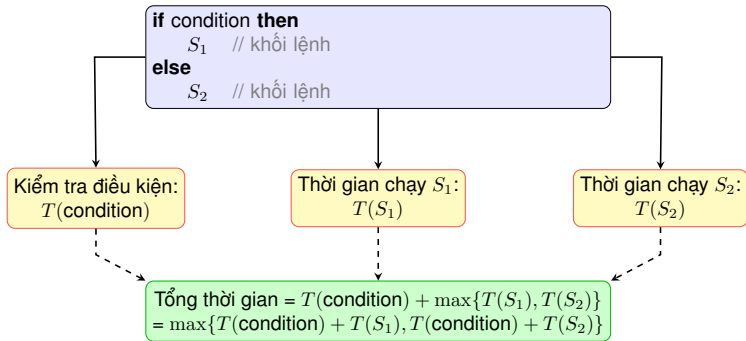
Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thời gian thực hiện cấu trúc **if...then...else** là thời gian lớn nhất thực hiện các lệnh sau **then** hoặc sau **else** cộng với thời gian kiểm tra điều kiện



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt buộc vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

44

74

Độ phức tạp tính toán

Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

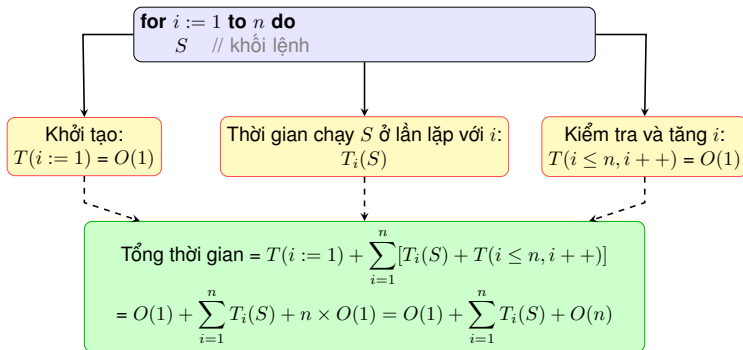
Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Thời gian thực hiện vòng lặp là tổng thời gian thực hiện các lần lặp và thời gian kiểm tra điều kiện lặp. Nếu thời gian thực hiện mỗi lần lặp là giống nhau, thì tổng thời gian thực hiện các lần lặp là tích của số lần lặp và thời gian thực hiện mỗi lần lặp



45

74

Độ phức tạp tính toán

Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường
Mô tả bằng giả mã
Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

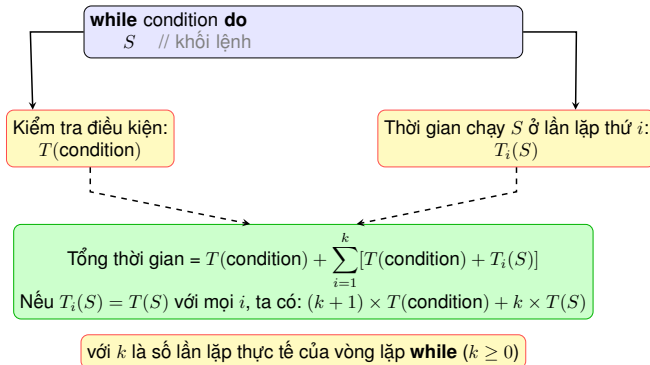
Độ tăng của các hàm
Định nghĩa và khái niệm

46 Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm
Tìm kiếm tuyến tính
Tìm kiếm nhị phân
Một số thuật toán sắp xếp
Sắp xếp nổi bọt
Sắp xếp chèn

Thời gian thực hiện vòng lặp là tổng thời gian thực hiện các lần lặp và thời gian kiểm tra điều kiện lặp. Nếu thời gian thực hiện mỗi lần lặp là giống nhau, thì tổng thời gian thực hiện các lần lặp là tích của số lần lặp và thời gian thực hiện mỗi lần lặp



Chú ý: Nếu điều kiện sai ngay từ đầu ($k = 0$), khối lệnh S không được thực hiện lần nào

Độ phức tạp tính toán

Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

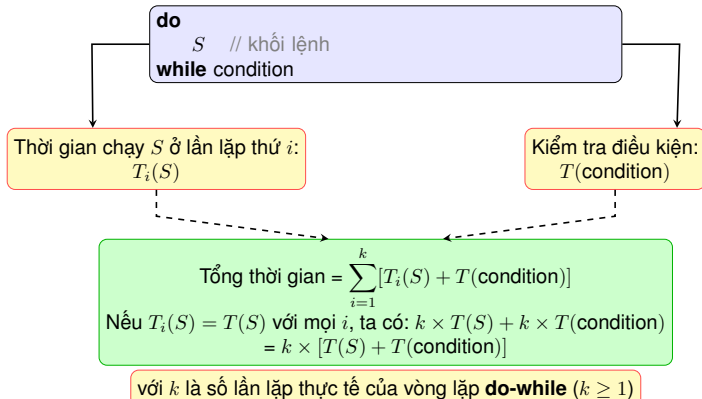
Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Thời gian thực hiện vòng lặp là tổng thời gian thực hiện các lần lặp và thời gian kiểm tra điều kiện lặp. Nếu thời gian thực hiện mỗi lần lặp là giống nhau, thì tổng thời gian thực hiện các lần lặp là tích của số lần lặp và thời gian thực hiện mỗi lần lặp



Chú ý: Khác vòng lặp while, vòng lặp do-while luôn thực hiện S ít nhất một lần

Độ phức tạp tính toán

Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Bảng: Một số thuật ngữ thường dùng

Độ phức tạp	Thuật ngữ
$O(1)$	Độ phức tạp hằng số (constant complexity)
$O(\log n)$	Độ phức tạp lôgarit (logarithmic complexity)
$O(n)$	Độ phức tạp tuyến tính (linear complexity)
$O(n \log n)$	Độ phức tạp $n \log n$ (linearithmic complexity)
$O(n^b)$	Độ phức tạp đa thức (polynomial complexity)
$O(b^n)$, với $b > 1$	Độ phức tạp hàm mũ (exponential complexity)
$O(n!)$	Độ phức tạp giai thừa (factorial complexity)

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

48

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Độ phức tạp tính toán

Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt buộc vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

49

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

74

Thuật toán 1: Tìm giá trị của phần tử lớn nhất

Input: a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số nguyên

Output: Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

```
1  $v := a_1$   $t_1$ 
2 for  $i := 2$  to  $n$  do
3   if  $a_i > v$  then  $t_2$ 
4      $v := a_i$ 
5 return  $v$   $t_3$ 
```

Thuật toán 1: Tìm giá trị của phần tử lớn nhất

$T(n)$ là $O(n)$

$T(n)$ là $O(n)$

Input: a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số nguyên (tốt nhất)

Output: Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

```
1  $v := a_1$   $t_1$ 
2 for  $i := 2$  to  $n$  do
3   if  $a_i > v$  then  $t_2$ 
4      $v := a_i$   $t_4^i$ 
```

Thuật toán

Một số bài tập



Bài tập 16

- (a) Thiết kế thuật toán để tính tổng của tất cả các số hạng trong một dãy số nguyên a_1, a_2, \dots, a_n cho trước
- (b) Chứng minh thuật toán bạn thiết kế là đúng
- (c) Đánh giá thời gian chạy của thuật toán bạn thiết kế

Bài tập 17

Một chuỗi ký tự được gọi là **chuỗi đối xứng (palindrome)** khi viết từ trái qua phải và viết từ phải qua trái thì chuỗi không thay đổi. Một ví dụ là chuỗi *madam*.

- (a) Thiết kế thuật toán để kiểm tra xem một chuỗi ký tự có phải là chuỗi đối xứng hay không
- (b) Đánh giá thời gian chạy của thuật toán bạn thiết kế

Bài tập 18

Cho $f : A \rightarrow B$ là một hàm với các tập A, B là các tập con hữu hạn của \mathbb{Z} . Hãy thiết kế một thuật toán để kiểm tra xem

- (a) liệu f có là đơn ánh không;
- (b) liệu f có là toàn ánh không.

Trong mỗi trường hợp, hãy đánh giá thời gian chạy của thuật toán bạn thiết kế

Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt đầu vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

50

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Thuật toán

Một số thuật toán tìm kiếm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

51 Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Bài toán tìm kiếm

Cho một dãy n phần tử a_1, a_2, \dots, a_n và một phần tử x . Tìm x trong dãy đã cho hoặc kết luận rằng x không có trong dãy

- Tìm kiếm tuyến tính (Linear Search)
- Tìm kiếm nhị phân (Binary Search)



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

52

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

74

■ Bài toán:

- **Input:** a_1, \dots, a_n : dãy số nguyên, x : số nguyên
- **Output:** Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

■ Tìm kiếm tuyến tính:

- (1) Bắt đầu từ phần tử đầu tiên của dãy (a_1)
- (2) So sánh phần tử hiện tại (a_i) với giá trị cần tìm x
- (3) Nếu $a_i = x$, trả về vị trí i và kết thúc thuật toán
- (4) Nếu $a_i \neq x$, chuyển sang phần tử tiếp theo (a_{i+1})
- (5) Lặp lại bước (2) đến (4) cho đến khi tìm thấy x hoặc đã duyệt hết dãy
- (6) Nếu đã duyệt hết dãy mà không tìm thấy x , trả về giá trị 0



Ví dụ 8 (Tìm kiếm tuyến tính)

- **Input:** Dãy $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 12$ và $x = 8$
- **Output:** Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
<div>2</div>	<div>5</div>	<div>6</div>	<div>8</div>	12
$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	
$\neq x$	$\neq x$	$\neq x$	$= x$	

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

53

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



Thuật toán 3: Tìm kiếm tuyến tính (Linear Search)

Input: a_1, \dots, a_n : dãy số nguyên, x : số nguyên

Output: Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

```
1   $i := 1$                                 // Bắt đầu từ đầu dãy
2  while  $i \leq n$  và  $x \neq a_i$  do // Chưa xong và chưa tìm thấy
3  |    $i := i + 1$     // Đi tới vị trí tiếp theo trong dãy
4  if  $i \leq n$  then
5  |    $location := i$                         // Tìm thấy  $x$  trong dãy
6  else
7  |    $location := 0$                         // Không tìm thấy  $x$  trong dãy
8  return  $location$ 
```

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

54

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 3 (vòng **while** ở Dòng 2–3) tìm kiếm tuyến tính số nguyên x trong dãy a_1, \dots, a_n

$L = \text{“Ở trước lần lặp với biến } i, x \notin \{a_1, \dots, a_{i-1}\}”$

- **Khởi động** ($i = 1$): Do $i - 1 = 0$, tập $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ là tập rỗng, và do đó $x \notin \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$, nghĩa là L đúng
- **Duy trì**: Giả sử L đúng ở trước lần lặp với $i = k$ nào đó, nghĩa là $x \notin \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$. Ta chứng minh L đúng ở trước lần lặp với $i = k + 1$, nghĩa là $x \notin \{a_1, \dots, a_k\}$. Thật vậy, để thực hiện lần lặp $i = k$, điều kiện ở vòng **while** cần được thỏa mãn, nghĩa là $k \leq n$ và $x \neq a_k$. Kết hợp với giả thiết, ta có điều cần chứng minh
- **Dừng**: Vòng lặp **while** kết thúc khi $i = n + 1$ hoặc $x = a_i$ với $1 \leq i \leq n$. Với trường hợp đầu tiên, bất biến vòng lặp L cho ta $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ và do đó kết luận không tìm được x . Với trường hợp thứ hai, x hiển nhiên thuộc dãy đã cho

Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Thuật toán

Tìm kiếm tuyến tính



Thuật toán 3: Tìm kiếm tuyến tính (Linear Search)

Input: a_1, \dots, a_n : dãy số nguyên, x : số nguyên

Output: Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

```
1  $i := 1$  _____  $t_1$ 
2 while  $i \leq n$  và  $x \neq a_i$  do
3    $i := i + 1$  _____  $t_5^i$  _____  $t_2$ 
4 if  $i \leq n$  then
5    $location := i$  _____  $t_6$ 
6 else
7    $location := 0$  _____  $t_7$ 
8 return  $location$  _____  $t_4$ 
```

$$T(n) = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

$$t_1, t_4 \text{ là } O(1)$$

$$T(n) \text{ là } O(n)$$

(xấu nhất)

$$T(n) \text{ là } O(1)$$

(tốt nhất)

$$t_3 = \max\{t_6, t_7\} + (\text{thời gian kiểm tra } i \leq n) = O(1)$$

$$t_2 = \sum_{\{i | i \leq n \wedge x \neq a_i\}} \left[t_5^i + (\text{t.g. kiểm tra } i \leq n \text{ và } x \neq a_i) \right]$$

Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

56

74



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

■ Bài toán:

- **Input:** a_1, \dots, a_n : dãy số nguyên *thực sự tăng*, x : số nguyên
- **Output:** Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

■ Tìm kiếm nhị phân: (Một ví dụ về kỹ thuật *chia để trị* (*divide and conquer*) trong thiết kế thuật toán)

- (1) Tính $m = \lfloor (1 + n)/2 \rfloor$. Phần tử ở giữa của dãy là a_m
- (2) Chia dãy a_1, \dots, a_n thành hai dãy con (a) a_1, \dots, a_m và (b) a_{m+1}, \dots, a_n . Nếu $x > a_m$ thì ta chỉ tìm x trong dãy con (b), còn ngược lại thì ta chỉ tìm x trong dãy con (a)
- (3) Làm tương tự cho đến khi không gian tìm kiếm chỉ còn một phần tử a_i . Nếu $x = a_i$ thì trả lại vị trí i của x , còn ngược lại thì trả lại 0



Ví dụ 9 (Tìm kiếm nhị phân)

- Input:** Dãy $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 12$ và $x = 8$
- Output:** Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	5	6	8	12
i		m		j

$< x$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	5	6	8	12
		$i = m$	j	
		$= x$		

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	5	6	8	12
		$i = j$		
		$= x$		

Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



Thuật toán 4: Tìm kiếm nhị phân (Binary Search)

Input: a_1, \dots, a_n : dãy số nguyên *thực sự tăng*, x : số nguyên

Output: Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

```
1   $i := 1$                                 // Chỉ số bắt đầu khoảng tìm kiếm
2   $j := n$                                 // Chỉ số kết thúc khoảng tìm kiếm
3  while  $i < j$  do                        // Khi khoảng tìm kiếm có  $> 1$  phần tử
4       $m := \lfloor (i + j) / 2 \rfloor$            // Chỉ số của phần tử ở giữa
5      if  $x > a_m$  then
6           $i := m + 1$ 
7      else
8           $j := m$ 
9  if  $x = a_i$  then
10      $location := i$ 
11 else
12      $location := 0$ 
13 return  $location$ 
```

Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 4 (vòng **while** ở Dòng 3–8) tìm kiếm nhị phân số nguyên x trong dãy thực sự tăng a_1, \dots, a_n

$L :=$ Ở trước mỗi lần lặp với các biến i, j , nếu $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$ thì
 $x \in \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_j\}$

- **Khởi động** ($i = 1, j = n$): L hiển nhiên đúng
- **Duy trì**: Giả sử ở trước lần lặp với các biến k, ℓ , nếu $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$ thì $x \in \{a_k, a_{k+1}, \dots, a_\ell\}$. Ta chứng minh rằng ở trước lần lặp kế tiếp với các biến (a) $k, \lfloor (k + \ell)/2 \rfloor$ hoặc (b) $\lfloor (k + \ell)/2 \rfloor + 1, \ell$, nếu $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$ thì tương ứng (a') $x \in \{a_k, \dots, a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor}\}$ hoặc (b') $x \in \{a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor + 1}, \dots, a_\ell\}$. Với (a), điều kiện ở Dòng 7 cần được thỏa mãn, nghĩa là $x \leq a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor}$. Do đó, nếu $x \in \{a_k, a_{k+1}, \dots, a_\ell\}$ thì (a') đúng. Với (b), điều kiện ở Dòng 5 cần được thỏa mãn, nghĩa là $x > a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor}$. Do đó, nếu $x \in \{a_k, a_{k+1}, \dots, a_\ell\}$ thì (b') đúng
- **Dừng**: Vòng lặp **while** dừng khi $i = j$, và từ L , ta có nếu $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$ thì $x \in \{a_i\}$. Do đó Thuật toán 4 trả lại vị trí chính xác của x hoặc kết luận không tìm được x (Dòng 9–13)

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Độ phức tạp tính toán

Tìm kiếm nhị phân



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt buộc vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Thuật toán 4: Tìm kiếm nhị phân (Binary Search)

Input: a_1, \dots, a_n : dãy số nguyên thực sự tăng, x : số nguyên

Output: Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

```
1  $i := 1$ 
2  $j := n$ 
3 while  $i < j$  do
4    $m := \lfloor (i + j) / 2 \rfloor$ 
5   if  $x > a_m$  then
6      $i := m + 1$ 
7   else
8      $j := m$ 
9 if  $x = a_i$  then
10   $location := i$ 
11 else
12   $location := 0$ 
13 return  $location$ 
```

Diagram illustrating the execution flow and time complexity markers for the Binary Search algorithm:

- t_1 is associated with the initial assignment of i and j (lines 1-2).
- t_2 is associated with the **while** loop body (lines 4-8).
- t_3 is associated with the **if** statement and the $location$ assignment (lines 9-12).
- t_4 is associated with the **return** statement (line 13).
- Internal markers within the loop:
 - $t_5^{i,j}$ is associated with the calculation of m (line 4).
 - $t_6^{i,j}$ is associated with the **if** condition (line 5).
 - t_7 is associated with the **then** branch (line 6).
 - t_8 is associated with the **else** branch (line 8).

Độ phức tạp tính toán

Tìm kiếm nhị phân



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

$$T(n) = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

$t_1, t_4, t_5^{i,j}, t_7, \dots, t_{10}$ là $O(1)$

$$t_2 = \sum_{\text{lần lặp while với cặp } i, j} \left[(t_5^{i,j} + t_6^{i,j}) + \right. \\ \left. + (\text{thời gian kiểm tra } i < j) \right]$$

$$t_6^{i,j} = \max\{t_7, t_8\} \\ + (\text{thời gian kiểm tra } x > a_m)$$

$$t_3 = \max\{t_9, t_{10}\} \\ + (\text{thời gian kiểm tra } x = a_i)$$

cặp i, j trong vòng **while** là $O(\log n)$

$$T(n) \text{ là } O(\log n)$$

(xấu nhất)

$$T(n) \text{ là } O(\log n)$$

(tốt nhất)

62

74

Độ phức tạp tính toán

Tìm kiếm nhị phân



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

*Tại sao # cặp i, j trong vòng lặp **while** là $O(\log n)$?*

- Lần lặp 0: dãy a_i, \dots, a_j có độ dài $\leq \lceil n/2^0 \rceil$
- Lần lặp 1: dãy a_i, \dots, a_j có độ dài $\leq \lceil n/2^1 \rceil$
- ...
- Lần lặp h (cuối cùng): dãy a_i, \dots, a_j có độ dài $\leq \lceil n/2^h \rceil$
- # cặp i, j trong vòng lặp **while** là $h + 1$
- Vòng **while** kết thúc khi $i = j$, nghĩa là khi dãy a_i, \dots, a_j có độ dài 1
- Vì h là lần lặp cuối cùng, h phải là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $\lceil n/2^h \rceil \leq 1$ (Nếu có số $h' < h$ thỏa mãn $\lceil n/2^{h'} \rceil \leq 1$ thì không thể có lần lặp nào sau h' , trái với giả thiết h là lần lặp cuối cùng)
- Từ $\lceil n/2^h \rceil \leq 1$, suy ra $n/2^h \leq 1$, nghĩa là $h \geq \log n$. Giá trị nhỏ nhất của h là $\lceil \log n \rceil$. Do đó, # cặp i, j trong vòng lặp **while** là $h + 1 = \lceil \log n \rceil + 1 = O(\log n)$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Thuật toán

Một số thuật toán sắp xếp



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

64

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Bài toán sắp xếp

Cho một dãy n phần tử và một cách so sánh hai phần tử bất kỳ trong dãy. Hãy sắp xếp dãy theo thứ tự tăng dần

- Sắp xếp nổi bọt (Bubble Sort)
- Sắp xếp chèn (Insertion Sort)



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

■ Bài toán:

- **Input:** a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số thực ($n \geq 2$)
- **Output:** Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

■ Sắp xếp nổi bọt:

- (1) So sánh các phần tử liên tiếp, bắt đầu với cặp (a_1, a_2)
- (2) Nếu $a_1 > a_2$, hoán đổi giá trị của chúng
- (3) Lặp lại (1) và (2) với các cặp $(a_2, a_3), (a_3, a_4), \dots, (a_{n-1}, a_n)$. Lúc này, a_n là phần tử lớn nhất trong dãy
- (4) Lặp lại (1) – (3) với dãy a_1, \dots, a_{n-1} , và sau đó với dãy a_1, \dots, a_{n-2} , dãy $a_1, \dots, a_{n-3}, \dots$, cho đến dãy a_1, a_2



Ví dụ 10

- **Input:** Dãy $a_1 = 34, a_2 = 13, a_3 = 21, a_4 = 3, a_5 = 89$
- **Output:** Dãy sắp xếp theo thứ tự tăng dần

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	34	13	21	3	89
$i = 1$	13	21	3	34	89
$i = 2$	13	3	21	34	
$i = 3$	3	13	21		
$i = 4$	3	13			
	3	13	21	34	89

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



Thuật toán 5: Sắp xếp nổi bọt (Bubble Sort)

Input: a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số thực ($n \geq 2$)

Output: Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

```
1 for  $i := 1$  to  $n - 1$  do // Lặp lại  $n - 1$  lần
2   for  $j := 1$  to  $n - i$  do
3     if  $a_j > a_{j+1}$  then
4       Hoán đổi giá trị của  $a_j$  và  $a_{j+1}$ 
5   //  $a_{n-i+1}, \dots, a_n$  đã được sắp xếp
6 //  $a_1, \dots, a_n$  đã được sắp xếp
```

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Thuật toán

Sắp xếp nổi bọt



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Thuật toán 5 có hai vòng lặp **for**: vòng lặp trong ở Dòng 2–4 và vòng lặp ngoài (chứa vòng lặp trong) ở Dòng 1–4

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp ngoài là

Ở trước lần lặp i , dãy a_{n-i+1}, \dots, a_n là dãy tăng chứa các phần tử lớn hơn hoặc bằng mọi phần tử trong a_1, \dots, a_{n-i}

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp trong là

Ở trước lần lặp j , $a_j = \max\{a_1, \dots, a_j\}$

Sơ đồ chứng minh:

- Chứng minh bước **Khởi động** cho bất biến vòng lặp ngoài
- Ở bước **Duy trì** cho vòng lặp ngoài
 - Chứng minh bất biến vòng lặp trong (**Khởi động**, **Duy trì**, **Dừng**)
 - Sử dụng bất biến vòng lặp trong để chứng minh cho vòng lặp ngoài
- Chứng minh bước **Dừng** cho bất biến vòng lặp ngoài

Thuật toán

Sắp xếp nổi bọt



Thuật toán 5: Sắp xếp nổi bọt (Bubble Sort)

Input: a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số thực ($n \geq 2$)

Output: Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

```
1 for i := 1 to n - 1 do
2   for j := 1 to n - i do
3     if  $a_j > a_{j+1}$  then
4       Hoán đổi giá trị của  $a_j$  và  $a_{j+1}$  —  $t_4$  —  $t_3^j$  —  $t_2^i$  —  $t_1$ 
```

$$T(n) = t_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \left[t_2^i + (\text{t.g. tăng } i \text{ và kiểm tra } i \leq n-1) \right]$$

$$t_2^i = \sum_{j=1}^{n-i} \left[t_3^j + (\text{t.g. tăng } j \text{ và kiểm tra } j \leq n-i) \right]$$

t_4 là $O(1)$ ($v := a_j, a_j := a_{j+1}, a_{j+1} := v$)

$t_3^j = t_4 + (\text{thời gian kiểm tra } a_j > a_{j+1})$

$T(n)$ là $O(n^2)$

(xấu nhất)

$T(n)$ là $O(n^2)$

(tốt nhất)

Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

69

74



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

■ Bài toán:

- **Input:** a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số thực ($n \geq 2$)
- **Output:** Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

■ Sắp xếp chèn:

- (1) Ban đầu, ta xem a_1 như một dãy đã được sắp xếp
- (2) Để xử lý phần tử a_i ($i = 2, 3, \dots, n$):
 - Lưu giá trị a_i vào một biến tạm m
 - Duyệt các phần tử $a_{i-1}, a_{i-2}, \dots, a_1$ từ phải sang trái
 - Đẩy mỗi phần tử lớn hơn m sang phải một vị trí
 - Chèn m vào vị trí thích hợp (ngay sau phần tử đầu tiên nhỏ hơn hoặc bằng m)
- (3) Sau mỗi bước, dãy a_1, a_2, \dots, a_i đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần
- (4) Lặp lại quá trình cho đến khi xử lý xong a_n



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

■ **Input:** Dãy $a_1 = 34, a_2 = 13, a_3 = 21, a_4 = 3, a_5 = 89$

■ **Output:** Dãy sắp xếp theo thứ tự tăng dần

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	34	13	21	3	89
$i = 2$	13	34	21	3	89
$i = 3$	13	21	34	3	89
$i = 4$	3	13	21	34	89
$i = 5$	3	13	21	34	89



Thuật toán 6: Sắp xếp chèn (Insertion Sort)

Input: a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số thực ($n \geq 2$)

Output: Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

```
1 for  $i = 2$  to  $n$  do
2      $m := a_i$  //  $m$  sắp được chèn vào dãy  $a_1, \dots, a_{i-1}$ 
3      $j := i - 1$ 
4     while  $j \geq 1$  và  $m < a_j$  do // Nếu  $m < a_j$ , đẩy  $a_j$ 
        sang phải để có chỗ chèn  $m$ 
5          $a_{j+1} := a_j$ 
6          $j := j - 1$ 
7      $a_{j+1} := m$  // Chèn  $m$ 
8     // Dãy  $a_1, \dots, a_i$  đã được sắp thứ tự
```

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Thuật toán 6 có hai vòng lặp: vòng lặp trong **while** ở Dòng 4–6 và vòng lặp ngoài **for** (chứa vòng lặp trong) ở Dòng 1–7

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp ngoài là

Ở trước lần lặp i , dãy a_1, \dots, a_{i-1} là dãy tăng

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp trong là

Ở trước lần lặp j , $m \leq \min\{a_{j+1}, \dots, a_i\}$

Thuật toán

Sắp xếp chèn



Thuật toán 6: Sắp xếp chèn (Insertion Sort)

Input: a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số thực ($n \geq 2$)

Output: Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

1 **for** $i = 2$ **to** n **do**

2 $m := a_i$ t_2

3 $j := i - 1$ t_3

4 **while** $j \geq 1$ và $m < a_j$ **do**

5 $a_{j+1} := a_j$ t_4

6 $j := j - 1$ $t_6^{i,j}$

7 $a_{j+1} := m$ t_5

t_1

$$T(n) = t_1 = \sum_{i=2}^n \left[\sum_{k=2}^5 t_k^i + (\text{t.g. tăng } i \text{ và kiểm tra } i \leq n) \right]$$

$t_2^i, t_3^i, t_5^i, t_6^{i,j}$ là $O(1)$

$$t_4^i = \sum_{1 \leq j \leq i-1 \text{ và } m < a_j} [t_6^{i,j} + (\text{t.g. kiểm tra } j \geq 1 \text{ và } m < a_j)]$$

$T(n)$ là $O(n^2)$

(xấu nhất)

$T(n)$ là $O(n)$

(tốt nhất)

Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

74

74