

# VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

## Quy nạp và Định quy

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học  
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội  
hoanganhduc@hus.edu.vn



# Nội dung



## Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

## Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

## Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

## Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

### Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy  
nap sai

### Đệ quy

Định nghĩa và một số khái  
niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ  
quy

Tập hợp định nghĩa bằng  
đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

### Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy  
hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Quy nạp toán học

Giới thiệu



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

2

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy  
nap sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái  
niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ  
quy

Tập hợp định nghĩa bằng  
đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy  
hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

- *Quy nạp toán học (mathematical induction)* là một kỹ thuật chứng minh cực kỳ quan trọng
- Quy nạp toán học được sử dụng để *chứng minh các kết quả về những đối tượng rời rạc khác nhau*
- Ta sẽ giới thiệu một số dạng quy nạp toán học
  - *Quy nạp toán học yếu (Weak Mathematical Induction)*, hay còn gọi là *Nguyên lý Thứ nhất của Quy nạp toán học (The First Principle of Mathematical Induction)*
  - *Quy nạp toán học mạnh (Strong Mathematical Induction)* hay còn gọi là *Nguyên lý Thứ hai của Quy nạp toán học (The Second Principle of Mathematical Induction)*
- Tính đúng đắn của phương pháp quy nạp bắt nguồn từ

## Tiên đề 1: Tính chất sắp thứ tự tốt

*Mọi tập con khác rỗng của tập các số nguyên dương có một phần tử nhỏ nhất*

# Quy nạp toán học

## Quy nạp yếu



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

### Nguyên lý quy nạp yếu

Để *chứng minh*  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ , chúng ta thực hiện hai bước

- *Bước cơ sở (basis step)*: Chỉ ra mệnh đề  $P(1)$  đúng
- *Bước quy nạp (inductive step)*: Chứng minh mệnh đề  $P(k) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi số nguyên dương  $k$ 
  - Giả thiết  $P(k)$  đúng, chứng minh  $P(k+1)$  đúng
  - Giả thiết  $P(k)$  đúng được gọi là *giả thiết quy nạp (inductive hypothesis hoặc induction hypothesis)*

Theo ngôn ngữ logic,

$$(P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (P(k) \rightarrow P(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$$

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh



## ■ Chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng phương pháp quy nạp

(1) **Bước cơ sở:** Chứng minh  $P(1)$  đúng

(2) **Bước quy nạp:** Chứng minh  $P(k) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Theo định nghĩa của toán tử logic " $\rightarrow$ ", ta cần chứng minh rằng  **$P(k+1)$  không thể sai khi  $P(k)$  đúng.** Điều này có thể được thực hiện bằng cách **giả thiết là  $P(k)$  đúng và chứng minh rằng với giả thiết đó  $P(k+1)$  cũng đúng**

■ Chú ý rằng ở đây **ta không giả thiết  $P(k)$  đúng với mọi  $k \in \mathbb{Z}^+$**

## ■ Sau khi hoàn thành bước cơ sở và bước quy nạp:

■ Từ bước cơ sở, ta biết rằng  $P(1)$  đúng

■ Từ bước quy nạp và  $P(1)$  đúng, ta biết rằng  $P(2)$  đúng

■ Từ bước quy nạp và  $P(2)$  đúng, ta biết rằng  $P(3)$  đúng

■ ...

■ Từ bước quy nạp và  $P(n-1)$  đúng, ta biết rằng  $P(n)$  đúng (với bất kỳ số nguyên dương  $n$ )



## Chứng minh (Quy nạp yếu là đúng).

- Giả sử  $P(1)$  đúng và với mọi  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $P(k) \rightarrow P(k+1)$  đúng. Ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$  bằng phản chứng
- Giả sử tồn tại  $n \in \mathbb{Z}^+$  sao cho  $P(n)$  sai. Do đó, tập  $S = \{n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } P(n) \text{ sai}\} \subseteq \mathbb{Z}^+$  là tập khác rỗng.
- Theo Tiên đề 1,  $S$  có một phần tử nhỏ nhất  $m$ . Do  $P(1)$  đúng,  $m \neq 1$  và do đó  $m > 1$ , suy ra  $m - 1 \in \mathbb{Z}^+$
- Do  $m - 1 < m$ ,  $m - 1 \notin S$ , và do đó  $P(m - 1)$  đúng
- Do  $P(k - 1) \rightarrow P(k)$  đúng với mọi  $k \in \mathbb{Z}^+$ , ta có  $P(m - 1) \rightarrow P(m)$  đúng.
- Kết hợp với  $P(m - 1)$  đúng, ta có  $P(m)$  đúng. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của  $m$ . Do đó  $P(n)$  đúng với mọi số nguyên dương  $n$



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Quy nạp toán học

Chọn bước cơ sở



Khi sử dụng quy nạp toán học, không nhất thiết cần bắt đầu với  $P(1)$  ở bước cơ sở

## Nguyên lý quy nạp yếu (tổng quát)

Để *chứng minh*  $\forall n \geq b P(n)$  với  $n \in \mathbb{Z}$  và  $b$  là số nguyên cho trước, chúng ta thực hiện hai bước

- **Bước cơ sở (basis step):** Chỉ ra mệnh đề  $P(b)$  đúng
- **Bước quy nạp (inductive step):** Chứng minh mệnh đề  $P(k) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi số nguyên  $k \geq b$

Theo ngôn ngữ logic,

$$(P(b) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq b} (P(k) \rightarrow P(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq b} P(n),$$

trong đó  $\mathbb{Z}^{\geq b} = \{m \mid m \in \mathbb{Z} \text{ và } m \geq b\}$  (chú ý là  $\mathbb{Z}^{\geq 1} = \mathbb{Z}^+$ )

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

6

73

# Quy nạp toán học

## Mẫu trình bày chứng minh quy nạp



- (1) Mô tả điều cần chứng minh dưới dạng “với mọi  $n \geq b$ ,  $P(n)$ ” với  $b$  là số nguyên cố định nào đó
  - “ $P(n)$  với mọi số nguyên dương  $n$ ”  $\Rightarrow$  chọn  $b = 1$
  - “ $P(n)$  với mọi số nguyên không âm  $n$ ”  $\Rightarrow$  chọn  $b = 0$
  - Với một số phát biểu, cần xác định giá trị phù hợp của  $b$  bằng cách kiểm tra giá trị chân lý của  $P(n)$  với một số giá trị nhỏ của  $n$
- (2) Viết cụm từ “Bước cơ sở.” Sau đó chỉ ra  $P(b)$  là đúng. Hãy cẩn thận chọn đúng giá trị của  $b$
- (3) Viết cụm từ “Bước quy nạp.” và phát biểu một cách rõ ràng giả thiết quy nạp dưới dạng “Giả sử rằng  $P(k)$  đúng với một số nguyên cố định  $k \geq b$  nào đó”
- (4) Phát biểu điều cần chứng minh với giả thiết  $P(k)$  đúng, nghĩa là, phát biểu cụ thể  $P(k+1)$
- (5) Chứng minh  $P(k+1)$  đúng sử dụng giả thiết  $P(k)$  đúng
- (6) Xác định rõ ràng phần kết của bước quy nạp, ví dụ như bằng cách viết “Bước quy nạp đến đây là hoàn tất.”
- (7) Sau khi hoàn thành bước cơ sở và bước quy nạp, phát biểu kết luận “Bằng phương pháp quy nạp, ta đã chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi số nguyên  $n$  thỏa mãn  $n \geq b$ .”

### Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

### Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

### Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

### Giải hệ thức truy hồi

Đầy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

7

73





- Quy nạp toán học có thể được sử dụng để chứng minh một giả thuyết khi giả thuyết này đã được thành lập (và đúng). Tuy nhiên, quy nạp toán học *không cung cấp ý tưởng giải thích tại sao các định lý lại đúng*
- Việc *kiểm tra phát biểu cần chứng minh với một số giá trị nhỏ của  $n$*  trước khi đi vào chứng minh có thể rất hữu ích. Thông thường, các ví dụ nhỏ có thể giúp ta nhận ra các khía cạnh dễ nhầm lẫn của phát biểu hoặc nhận ra tại sao phát biểu lại đúng trong trường hợp tổng quát
- Thông thường, bước chứng minh  $P(k+1)$  với giả thiết  $P(k)$  là bước khó nhất trong toàn bộ chứng minh quy nạp. Hãy *chắc chắn rằng chứng minh của bạn đúng với mọi  $k \geq b$* , nhất là với các giá trị nhỏ của  $k$ , thậm chí là cả  $k = b$
- Nếu bạn *không sử dụng giả thiết  $P(k)$  trong chứng minh  $P(k+1)$* , thì có thể có điều gì đó sai, hoặc ít nhất chứng minh của bạn không thực sự là chứng minh quy nạp

# Quy nạp toán học

Ví dụ



## Ví dụ 1

Gọi  $P(n)$  là vị từ  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ . Ta chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$

- **Bước cơ sở.**  $P(1)$  đúng, do vế trái bằng 1 và vế phải bằng  $1(1+1)/2 = 1$
- **Bước quy nạp.** Giả sử  $P(k)$  đúng với một số nguyên cố định

$k \geq 1$  nào đó, nghĩa là  $\sum_{i=1}^k i = k(k+1)/2$ . Ta chứng minh

$P(k+1)$  đúng, nghĩa là chứng minh  $\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1)(k+2)/2$ .

Thật vậy, ta có

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^k i + (k+1) \quad \text{tách tổng}$$

$$= k(k+1)/2 + (k+1) \quad \text{giả thiết quy nạp}$$

$$= (k+1)(k+2)/2$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp yếu,  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

9

73

# Quy nạp toán học

Ví dụ



## Ví dụ 2

Gọi  $P(n)$  là vị từ  $\sum_{i=0}^n r^i = (r^{n+1} - 1)/(r - 1)$  với  $r \neq 1$  là số thực bất kỳ cho trước. Ta chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}$

- **Bước cơ sở.**  $P(0)$  đúng, do vế trái bằng 1 và vế phải bằng  $(r^1 - 1)/(r - 1) = 1$
- **Bước quy nạp.** Giả sử  $P(k)$  đúng với một số nguyên cố định

$k \geq 0$  nào đó, nghĩa là  $\sum_{i=0}^k r^i = (r^{k+1} - 1)/(r - 1)$ . Ta chứng

minh  $P(k + 1)$  đúng, nghĩa là chứng minh

$\sum_{i=0}^{k+1} r^i = (r^{k+2} - 1)/(r - 1)$ . Thật vậy, ta có

$$\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \sum_{i=0}^k r^i + r^{k+1}$$

tách tổng

$$= (r^{k+1} - 1)/(r - 1) + r^{k+1}$$

giả thiết quy nạp

$$= (r^{k+2} - 1)/(r - 1)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp yếu,  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

10

73

# Quy nạp toán học

Ví dụ



## Ví dụ 3

Gọi  $P(n)$  là vị từ

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ 0 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Ta chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi số nguyên  $n \geq 0$ .

- **Bước cơ sở:**  $P(0)$  đúng, do vế trái  $\sum_{i=0}^0 (-1)^i = (-1)^0 = 1$  và vế phải bằng 1 (vì 0 là số chẵn)
- **Bước quy nạp:** Giả sử  $P(k)$  đúng với một số nguyên cố định  $k \geq 0$  nào đó, nghĩa là

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ 0 & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$$

Ta chứng minh  $P(k+1)$  đúng, nghĩa là chứng minh

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k+1 \text{ chẵn} \\ 0 & \text{nếu } k+1 \text{ lẻ} \end{cases}$$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

11

73

# Quy nạp toán học

Ví dụ



Thật vậy, ta có

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i = \sum_{i=0}^k (-1)^i + (-1)^{k+1}$$

$$= \begin{cases} 1 + (-1)^{k+1} & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ 0 + (-1)^{k+1} & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 + (-1)^{k+1} & \text{nếu } k+1 \text{ lẻ} \\ 0 + (-1)^{k+1} & \text{nếu } k+1 \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 + (-1) & \text{nếu } k+1 \text{ lẻ} \\ 0 + 1 & \text{nếu } k+1 \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{nếu } k+1 \text{ lẻ} \\ 1 & \text{nếu } k+1 \text{ chẵn} \end{cases}$$

tách tổng

giả thiết quy nạp

$k$  chẵn  $\Leftrightarrow k+1$  lẻ

Do đó, theo nguyên lý quy nạp yếu,  $P(n)$  đúng với mọi số nguyên  $n \geq 0$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm đệ quy nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đặt cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

12

73

# Quy nạp toán học

## Bài tập



### Bài tập 1

Cho  $P(n)$  là phát biểu  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(a) Để chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$

(1) Ở bước cơ sở, ta cần chứng minh điều gì?

(2) Ở bước quy nạp, giả thiết quy nạp là gì? Ta cần chứng minh điều gì?

(b) Hãy chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$  bằng phương pháp quy nạp theo các bước bạn đã trả lời ở phần (a)

### Bài tập 2

Chứng minh các mệnh đề sau bằng phương pháp quy nạp

(a)  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$  với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$

(b)  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$

(c)  $3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \dots + 3 \cdot 5^n = \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4}$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đặt cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

13

73



## Bài tập 3

- (a) Chứng minh  $3^n < n!$  với mọi số nguyên  $n > 6$  bằng quy nạp
- (b) Tồn tại số nguyên  $b$  sao cho  $2n + 3 \leq 2^n$  với mọi  $n \geq b$ .  
(Gợi ý: Tìm  $b$  và chứng minh  $2n + 3 \leq 2^n$  với mọi  $n \geq b$  bằng phương pháp quy nạp)
- (c) Chứng minh rằng  $n^3 + 2n$  chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương  $n$  bằng phương pháp quy nạp

# Quy nạp toán học

## Bài tập



Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để giải các bài tập sau

### Bài tập 4

Chứng minh với mọi số nguyên  $n \geq 0$ ,

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

### Bài tập 5

Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n \geq 4$ , ta có  $2^n \geq n^2$

### Bài tập 6

Tìm một số nguyên  $b$  thỏa mãn điều kiện với mọi  $n \geq b$ ,  $2^n \geq n^3$ . Chứng minh rằng số  $b$  bạn tìm được thực sự thỏa mãn điều kiện đề ra

### Bài tập 7

Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n \geq 2$ , các tập  $A_1, A_2, \dots, A_n$  thỏa mãn  $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm đệ quy nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp đệ quy nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

15

73



# Quy nạp toán học

## Bài tập



Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để giải các bài tập sau

## Bài tập 8

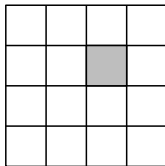
Chứng minh rằng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$ , ta có thể phủ kín bàn cờ không hoàn chỉnh kích thước  $2^n \times 2^n$  với một ô vuông bị loại bỏ bằng các khối hình chữ L như trong hình dưới đây sao cho không có hai khối nào chồng lên nhau<sup>1</sup>



(a)



(b)



(c)

**Hình:** Phủ kín các bàn cờ, ví dụ như (b) hoặc (c), bằng các khối hình chữ L như ở (a)

<sup>1</sup> Bạn có thể thử phủ kín bàn cờ  $8 \times 8$  ở

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

16

73

# Quy nạp toán học

## Bài tập



Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để giải các bài tập sau

### Bài tập 9

Với các tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_n$  và  $B$ , hãy chứng minh các phát biểu sau đúng với mọi số nguyên  $n \geq 2$

$$(a) (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \dots \cap (A_n \cup B)$$

$$(b) (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$$

$$(c) (A_1 - B) \cap (A_2 - B) \cap \dots \cap (A_n - B) = (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) - B$$

$$(d) (A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \dots \cup (A_n - B) = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) - B$$

### Bài tập 10

Chứng minh rằng một tập có  $n$  phần tử có  $n(n-1)/2$  tập con chứa chính xác hai phần tử, với mọi số nguyên  $n \geq 2$

### Bài tập 11

Chứng minh rằng  $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge \neg p_n$  với mọi  $n \geq 2$ , trong đó  $p_1, \dots, p_n$  là các mệnh đề logic

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh



## Nguyên lý quy nạp mạnh

Để **chứng minh**  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ , chúng ta thực hiện hai bước

- **Bước cơ sở (basis step):** Chỉ ra mệnh đề  $P(1)$  đúng
- **Bước quy nạp (inductive step):** Chứng minh mệnh đề  $(P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi số nguyên dương  $k$ 
  - Giả thiết  $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$  đúng, chứng minh  $P(k+1)$  đúng
  - Giả thiết  $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$  đúng được gọi là **giả thiết quy nạp**

Theo ngôn ngữ logic,

$$(P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (\bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow P(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n),$$

trong đó  $\bigwedge_{j=1}^k P(j) = P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

18

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Quy nạp toán học

## Quy nạp mạnh



Tương tự như với quy nạp yếu, ở bước cơ sở ta không nhất thiết cần bắt đầu từ  $P(1)$

### Nguyên lý quy nạp mạnh (tổng quát)

Để *chứng minh*  $\forall n \geq b P(n)$  với  $n \in \mathbb{Z}$  và  $b$  là số nguyên cho trước, chúng ta thực hiện hai bước

- **Bước cơ sở (basis step):** Chỉ ra mệnh đề  $P(b)$  đúng
- **Bước quy nạp (inductive step):** Chứng minh mệnh đề  $(P(b) \wedge P(b+1) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi số nguyên  $k \geq b$

Theo ngôn ngữ logic,

$$(P(b) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq b} (\bigwedge_{j=b}^k P(j) \rightarrow P(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq b} P(n)$$

## Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

### Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

### Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

### Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

19

73

# Quy nạp toán học

## Quy nạp mạnh



Thêm vào đó, thay vì chỉ chứng minh  $P(b)$  đúng, ta có thể làm nhiều hơn ở bước cơ sở

### Nguyên lý quy nạp mạnh (tổng quát)

Để **chứng minh**  $\forall n \geq b P(n)$  với  $n \in \mathbb{Z}$  và  $b$  là số nguyên cho trước, chúng ta thực hiện hai bước

- **Bước cơ sở (basis step):** Chỉ ra các mệnh đề  $P(b)$ ,  $P(b+1)$ ,  $\dots$ ,  $P(b+j)$  đúng, với  $j$  là một số nguyên dương cố định nào đó
- **Bước quy nạp (inductive step):** Chứng minh mệnh đề  $(P(b) \wedge P(b+1) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi số nguyên  $k \geq b+j$

Theo ngôn ngữ logic,

$$\left( \bigwedge_{i=0}^j P(b+i) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq b+j} \left( \bigwedge_{i=b}^k P(i) \rightarrow P(k+1) \right) \right) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq b} P(n)$$

### Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

### Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

### Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

### Giải hệ thức truy hồi

Đặt cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

20

73



- Về mặt hình thức, quy nạp mạnh và quy nạp yếu **khác nhau ở giả thiết quy nạp**: ở quy nạp yếu ta chỉ giả thiết  $P(k)$  đúng, còn ở quy nạp mạnh ta giả thiết tất cả các mệnh đề  $P(1), P(2), \dots, P(k)$  đều đúng
- **Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương về mặt lôgic**, nghĩa là, quy nạp yếu đúng khi và chỉ khi quy nạp mạnh cũng đúng
- Nếu bạn có thể trực tiếp chứng minh  $P(k+1)$  với giả thiết  $P(k)$  đúng, **ên dùng quy nạp yếu**
- Ngược lại, nếu bạn có thể chứng minh  $P(k+1)$  từ giả thiết  $P(j)$  đúng với mọi  $j \leq k$ , nhưng không rõ làm sao để trực tiếp chứng minh  $P(k) \rightarrow P(k+1)$ , **ên dùng quy nạp mạnh**



## Ví dụ 4

Cho vị từ  $P(n)$ :

*$n$  viết được dưới dạng tích của một hoặc nhiều số nguyên tố*

Ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 2} P(n)$  bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở.**  $P(2)$  đúng, vì 2 có thể được biểu diễn dưới dạng tích của một số nguyên tố—chính nó
- **Bước quy nạp.** Giả sử  $P(j)$  đúng với mọi số nguyên  $j$  thỏa mãn  $2 \leq j \leq k$ , trong đó  $k \geq 2$  là số nguyên cố định nào đó. Ta chứng minh  $P(k+1)$  đúng. Thật vậy,
  - Nếu  $k+1$  là số nguyên tố,  $P(k+1)$  đúng do  $k+1$  có thể được biểu diễn dưới dạng tích của một số nguyên tố—chính nó
  - Nếu  $k+1$  là hợp số, ta có thể biểu diễn  $k+1 = ab$  với  $a, b$  là các số nguyên dương thỏa mãn  $2 \leq a \leq b < k+1$ . Theo giả thiết quy nạp, cả  $a$  và  $b$  đều có thể được biểu diễn dưới dạng tích của các số nguyên tố, và do đó  $k+1$  cũng thế

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

22

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Quy nạp toán học

Ví dụ



## Ví dụ 5

Cho vị từ  $P(n)$ :

$$n = 4a + 5b \text{ với } a, b \in \mathbb{Z}$$

Ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 12} P(n)$  bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở.** Ta chứng minh  $P(12), P(13), P(14), P(15)$  đều đúng. Thật vậy,  $12 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0$ ,  $13 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1$ ,  $14 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2$ , và  $15 = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3$
- **Bước quy nạp.** Giả sử với số nguyên cố định  $k \geq 15$  bất kỳ,  $P(m)$  đúng với mọi số nguyên  $m$  thỏa mãn  $12 \leq m \leq k$ . (Hay  $P(12) \wedge \dots \wedge P(k)$  đúng với số nguyên cố định  $k \geq 15$ .) Ta chứng minh  $P(k+1)$  đúng. Thật vậy, do  $k \geq k-3 \geq 12$ , theo giả thiết quy nạp, ta có  $P(k-3)$  đúng, nghĩa là tồn tại  $a, b \in \mathbb{Z}$  sao cho  $k-3 = 4a + 5b$ . Suy ra  $k+1 = (k-3) + 4 = 4(a+1) + 5b$

## Bài tập 12

Chứng minh ví dụ trên bằng quy nạp yếu

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

23

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh



# Quy nạp toán học

Quy nạp mạnh



Sử dụng phương pháp quy nạp để giải các bài tập sau

## Bài tập 13

Cho vị từ  $P(n)$  = “tồn tại  $a, b \in \mathbb{Z}$  thỏa mãn  $n = 3a + 5b$ ”. Bài tập này mô tả cách chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi số nguyên  $n \geq 8$

- (a) Để hoàn thành bước cơ sở, hãy chứng minh rằng các mệnh đề  $P(8)$ ,  $P(9)$ , và  $P(10)$  là đúng
- (b) Trong bước quy nạp, Giả thiết quy nạp là gì và bạn cần chứng minh điều gì?
- (c) Hãy hoàn thành bước quy nạp cho  $n \geq 10$

## Bài tập 14

Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n \geq 12$ , tồn tại các số nguyên không âm  $a$  và  $b$  sao cho  $n = 3a + 7b$

## Bài tập 15

Chứng minh rằng mọi số nguyên dương đều có thể được viết dưới dạng  $2^b \cdot c$  trong đó  $b$  là một số nguyên không âm và  $c$  là một số lẻ

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

24 Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Quy nạp toán học

Một số chứng minh quy nạp sai



## Ví dụ 6 ([Gunderson and Rosen 2010])

Cho  $P(n)$  là  $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{2}$ . Ta chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi

$n \in \mathbb{Z}^+$  bằng phương pháp quy nạp

- **Bước cơ sở.**  $P(1)$  đúng do  $\frac{(1 + \frac{1}{2})^2}{2} = 1$
- **Bước quy nạp.** Giả sử  $P(k)$  đúng với một số nguyên cố định  $k \geq 1$  nào đó. Ta chứng minh  $P(k + 1)$  đúng. Thật vậy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \left( \sum_{i=1}^k i \right) + (k + 1) \\ &= \frac{(k + \frac{1}{2})^2}{2} + (k + 1) \\ &= \frac{(k + \frac{1}{2})^2 + 2(k + \frac{1}{2}) + 1}{2} \\ &= \frac{(k + 1 + \frac{1}{2})^2}{2}\end{aligned}$$

tách tổng

giả thiết quy nạp

### Câu hỏi

Chứng minh này sai ở đâu?

Do đó, theo nguyên lý quy nạp yếu,  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

25

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đầy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Quy nạp toán học

Một số chứng minh quy nạp sai



## Ví dụ 7 ([Gunderson and Rosen 2010])

Cho vị từ  $P(n)$

**Nếu**  $n = \max\{a, b\}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  **thì**  $a = b$

Ta chứng minh  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$  bằng quy nạp

■ **Bước cơ sở.** Với  $n = 1$ , giả sử  $1 = \max\{a, b\}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ . Do đó  $a = b = 1$ . Suy ra  $P(1)$  đúng

■ **Bước quy nạp.** Giả sử  $P(k)$  đúng với một số nguyên cố định  $k \geq 1$  nào đó, nghĩa là nếu  $k = \max\{a, b\}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  thì  $a = b$

Ta chứng minh  $P(k+1)$  đúng, nghĩa là chứng minh nếu  $k+1 = \max\{c, d\}$  với  $c, d \in \mathbb{Z}^+$  thì  $c = d$ . Thật vậy, giả sử hai số  $c, d \in \mathbb{Z}^+$  thỏa mãn  $k+1 = \max\{c, d\}$ . Do đó,  $\max\{c-1, d-1\} = k$ . Theo giả thiết quy nạp,  $c-1 = d-1$ , và do đó  $c = d$ . Theo nguyên lý quy nạp yếu,  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$

### Câu hỏi

Chứng minh này sai ở đâu?

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

26

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đầy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Quy nạp toán học

Một số chứng minh quy nạp sai



## Ví dụ 8 (Tất cả ngựa đều cùng màu)

$P(n) :=$  “*Bất kỳ  $n$  con ngựa nào đều có cùng màu sắc*”

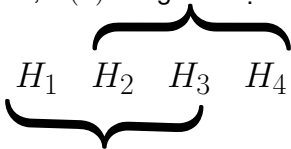
Thật vậy, ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$  bằng phương pháp quy nạp

- **Bước cơ sở.**  $P(1)$  hiển nhiên đúng.
- **Bước quy nạp.** Giả sử  $P(k)$  đúng với số nguyên  $k \geq 1$  cố định nào đó. Ta chứng minh  $P(k+1)$  cũng đúng. Giả sử có  $k+1$  con ngựa  $H_1, H_2, \dots, H_k, H_{k+1}$ . Theo giả thiết quy nạp,  $H_1, H_2, \dots, H_k$  đều có cùng màu sắc. Cũng theo giả thiết quy nạp,  $H_2, \dots, H_k, H_{k+1}$  đều có cùng màu sắc. Do đó,  $H_1, H_2, \dots, H_k, H_{k+1}$  đều có cùng màu sắc

Do đó, theo nguyên lý quy nạp yếu,  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$

### Câu hỏi

Chứng minh này sai ở đâu?



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

27

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đầy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Quy nạp toán học

Một số chứng minh quy nạp sai



## Ví dụ 9

### Câu hỏi

Chứng minh này sai ở đâu?

$$P(n) := "5n = 0"$$

Ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$  bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở:**  $P(0)$  đúng, do  $5 \cdot 0 = 0$
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên  $k \geq 0$  cố định nào đó,  $5j = 0$  với mọi số nguyên không âm  $j$  thỏa mãn  $0 \leq j \leq k$ . Ta chứng minh  $5(k+1) = 0$ . Thật vậy, ta có thể viết  $k+1 = i+j$ , với  $i, j \in \mathbb{N}$  và  $i, j$  nhỏ hơn  $k+1$ . Theo giả thiết quy nạp,  $5(k+1) = 5(i+j) = 5i + 5j = 0 + 0 = 0$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh,  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

28

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Đệ quy

## Định nghĩa và một số khái niệm



### Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

#### Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

#### Đệ quy

29 Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

#### Giải hệ thức truy hồi

Đầy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

- Trong **quy nạp**, ta chứng minh mọi phần tử của một tập vô hạn thỏa mãn vị từ  $P$  nào đó bằng cách
  - chứng minh tính đúng đắn của  $P$  cho các phần tử lớn hơn trong tập hợp dựa vào tính đúng đắn của các phần tử nhỏ hơn
- Trong các **định nghĩa đệ quy (recursive definition)**, tương tự, ta định nghĩa một cấu trúc (hàm, vị từ, tập hợp, hay một cấu trúc nào đó phức tạp hơn) trên một miền vô hạn nào đó (miền xác định) bằng cách
  - định nghĩa cấu trúc của các phần tử lớn hơn dựa vào cấu trúc của các phần tử nhỏ hơn

# Đệ quy

## Hàm định nghĩa bằng đệ quy



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

30

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

### ■ Hàm định nghĩa bằng đệ quy (recursive function)

$f: \mathbb{N} \rightarrow A$  với tập  $A$  bất kỳ

- **Bước cơ sở (basis step):** Định nghĩa một số giá trị ban đầu  $f(0), f(1), \dots, f(b)$  với số nguyên cố định  $b \geq 0$  nào đó
- **Bước đệ quy (recursive step):** Định nghĩa một quy luật để tìm giá trị của  $f(n)$  từ các giá trị  $f(n-1), f(n-2), \dots, f(n-b), f(n-b-1)$  với mọi  $n > b$

## Ví dụ 10

Định nghĩa một dãy bằng hệ thức truy hồi

### ■ Dãy Fibonacci $\{f_n\}$

- **Bước cơ sở:**  $f_0 = 0, f_1 = 1$
- **Bước đệ quy:**  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ (n \geq 2)$

### ■ Dãy giai thừa $\{g_n\}$

- **Bước cơ sở:**  $g_0 = 1$
- **Bước đệ quy:**  $g_n = ng_{n-1} \ (n \geq 1)$

# Đệ quy

## Hàm định nghĩa bằng đệ quy



### Ví dụ 11 (Chứng minh tính chất của hàm sử dụng định nghĩa đệ quy)

Cho dãy Fibonacci  $\{f_n\}$ . Ta chứng minh  $f_n < 2^n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$  bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở:**  $f_0 = 0 < 2^0 = 1$  và  $f_1 = 1 < 2^1 = 2$  (sử dụng các định nghĩa ở bước cơ sở của định nghĩa đệ quy)
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên  $k \geq 0$  cố định nào đó,  $f_i < 2^i$  với mọi  $i$  thỏa mãn  $1 \leq i \leq k$ . Ta chứng minh  $f_{k+1} < 2^{k+1}$ . Thật vậy,

$$\begin{aligned}f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \\&< 2^k + 2^{k-1} \\&< 2^k + 2^k = 2^{k+1}\end{aligned}$$

định nghĩa đệ quy của  $\{f_n\}$   
giả thiết quy nạp

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh,  $f_n < 2^n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$

#### Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

#### Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

#### Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

31 Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

#### Giải hệ thức truy hồi

Đầy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh



# Đệ quy

## Hàm định nghĩa bằng đệ quy



### Ví dụ 12 (Chứng minh tính chất của hàm sử dụng định nghĩa đệ quy)

Cho dãy Fibonacci  $\{f_n\}$ . Ta chứng minh  $f_n > \alpha^{n-2}$  với mọi số tự

nhiên  $n \geq 3$  và  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$  bằng quy nạp mạnh

■ **Bước cơ sở:** Với  $n = 3$ , ta có  $f_3 = 2 > \alpha^{3-2} = \alpha$ . Với  $n = 4$ , ta

có  $f_4 = 3 > \alpha^{4-2} = \alpha^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \alpha + 1 \approx 2.61803$

■ **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên  $k \geq 3$  cố định nào đó,  $3 \leq i \leq k$  với mọi  $i$  thỏa mãn  $f_i > \alpha^{i-2}$ . Ta chứng minh  $f_{k+1} > \alpha^{k-1}$ . Thật vậy,

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$$

$$> \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3}$$

$$= \alpha^{k-3}(\alpha + 1)$$

$$= \alpha^{k-3}\alpha^2 = \alpha^{k-1}$$

định nghĩa đệ quy của  $\{f_n\}$

giả thiết quy nạp

do  $\alpha^2 = \alpha + 1$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh,  $f_n > \alpha^{n-2}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 3$

#### Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

#### Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

#### Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

32

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

#### Giải hệ thức truy hồi

Đầy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Đệ quy

## Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy  
nap sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái  
niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ  
quy

33

Tập hợp định nghĩa bằng  
đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy  
hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

- **Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy (recursive set)**
  - **Bước cơ sở (basis step):** Định nghĩa một tập con các phần tử ban đầu
  - **Bước đệ quy (recursive step):** Định nghĩa một quy luật để tìm phần tử mới trong tập từ các phần tử đã biết là thuộc tập đó
- Thông thường, với các tập định nghĩa bằng đệ quy, **quy tắc ngoại trừ (exclusion rule)** sau luôn được áp dụng: tập hợp cần định nghĩa chỉ chứa các phần tử liệt kê ở bước cơ sở và các phần tử thu được bằng cách áp dụng quy tắc ở bước đệ quy.

# Đệ quy

## Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy



### Ví dụ 13

- Tập  $S$  các số nguyên dương chia hết cho 3
  - **Bước cơ sở:**  $3 \in S$
  - **Bước đệ quy:** Nếu  $x \in S$  và  $y \in S$  thì  $x + y \in S$
  - Đầu tiên,  $3 \in S$ , sau đó là  $3 + 3 = 6$ ,  $3 + 6 = 9$ , v.v...
- Tập số tự nhiên  $\mathbb{N}$ 
  - **Bước cơ sở:**  $0 \in \mathbb{N}$
  - **Bước đệ quy:** Nếu  $n \in \mathbb{N}$  thì  $n + 1 \in \mathbb{N}$
- Tập các chuỗi ký tự  $\Sigma^*$  sinh bởi bảng chữ cái  $\Sigma$ 
  - **Bước cơ sở:**  $\lambda \in \Sigma^*$  ( $\lambda$  là chuỗi rỗng không chứa bất kỳ ký tự nào)
  - **Bước đệ quy:** Nếu  $w \in \Sigma^*$  và  $x \in \Sigma$  thì  $wx \in \Sigma^*$
  - Ví dụ nếu  $\Sigma = \{0, 1\}$  thì
    - $\lambda \in \Sigma^*$  (bước cơ sở)
    - $\{0, 1\} \subseteq \Sigma^*$  (lần đầu áp dụng bước quy nạp)
    - $\{00, 01, 10, 11\} \subseteq \Sigma$  (lần thứ hai áp dụng bước quy nạp)
    - v.v...
    - Do đó  $\Sigma^*$  là tập tất cả các chuỗi nhị phân

#### Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

#### Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

#### Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

34

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

#### Giải hệ thức truy hồi

Đặt cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Đệ quy

## Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

35

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

## Ví dụ 14

- Tập *các công thức được tạo đúng quy tắc (well-formed formulae)* trong logic mệnh đề
  - **Bước cơ sở:**  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{F}$ , và mệnh đề nguyên tử  $s$  là các công thức được tạo đúng quy tắc
  - **Bước đệ quy:** Nếu  $A$  và  $B$  là các công thức được tạo đúng quy tắc, thì  $(\neg A)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ , và  $(A \leftrightarrow B)$  cũng thế
  - Ví dụ, với các mệnh đề nguyên tử  $p, q$ ,  $((p \vee q) \rightarrow (q \wedge \mathbf{F}))$  và  $(p \wedge q)$  là các công thức được tạo đúng quy tắc, còn  $\wedge pq$ ,  $pq\wedge$ , và  $p \wedge q$  thì không phải (**Tại sao?**)

# Đệ quy

## Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

36

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

## Bài tập 16

Hãy tìm một định nghĩa đệ quy của

- (a) Dãy  $\{a_n\}$  với  $a_n = 4n - 2$  và  $n = 1, 2, \dots$
- (b) Dãy  $\{b_n\}$  với  $b_n = n(n + 1)$  và  $n = 1, 2, \dots$
- (c) Tập hợp các số nguyên dương lẻ
- (d) Tập hợp các số nguyên dương là lũy thừa của 3
- (e) Tập hợp các số nguyên dương chia hết cho 5
- (f) Tập hợp các số nguyên dương không chia hết cho 5

# Đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy  
nap sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái  
niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ  
quy

Tập hợp định nghĩa bằng  
đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đặt cho bởi hệ thức truy  
hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

Để chứng minh một tính chất  $P$  của các phần tử của một tập hợp định nghĩa theo đệ quy, ta sử dụng *quy nạp theo cấu trúc* (*structural induction*)

## Nguyên lý quy nạp theo cấu trúc

- **Bước cơ sở:** Chứng minh rằng mọi phần tử định nghĩa trong bước cơ sở của định nghĩa đệ quy đều thỏa mãn  $P$
- **Bước quy nạp:** Chứng minh rằng nếu các phần tử được sử dụng để xây dựng phần tử mới của tập hợp trong bước đệ quy đều thỏa mãn  $P$ , thì phần tử mới cũng thỏa mãn  $P$

37

73

# Đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc



## Ví dụ 15

Cho  $S$  là tập định nghĩa theo đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:**  $3 \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu  $x \in S$  và  $y \in S$  thì  $x + y \in S$

Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấu trúc rằng *mọi phần tử của  $S$  đều chia hết cho 3*

- **Bước cơ sở:** 3 chia hết cho 3
- **Bước quy nạp:** Giả sử với  $x \in S$  và  $y \in S$ , cả  $x$  và  $y$  đều chia hết cho 3. Ta chứng minh  $n = x + y$  cũng chia hết cho 3. Thật vậy, do  $x$  chia hết cho 3, ta có  $x = 3k$  với số nguyên  $k$  nào đó. Tương tự,  $y = 3j$  với số nguyên  $j$  nào đó. Suy ra  $n = x + y = 3(k + j)$ , và do đó  $n$  cũng chia hết cho 3

Do đó, theo nguyên lý quy nạp theo cấu trúc, mọi phần tử của  $S$  đều chia hết cho 3

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

38

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc



## Ví dụ 16

Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấu trúc rằng *mọi công thức được tạo đúng quy tắc trong logic mệnh đề có số dấu ngoặc đơn trái "(" bằng số dấu ngoặc đơn phải ")"*

- **Bước cơ sở:** Các mệnh đề **T**, **F**, và mọi mệnh đề nguyên tử  $s$  đều không có các dấu ngoặc đơn trái và phải
- **Bước quy nạp:** Với công thức  $A$ , gọi  $l_A$  và  $r_A$  lần lượt là số ngoặc đơn trái và ngoặc đơn phải của  $A$ . Giả sử với các công thức  $A, B$ ,  $l_A = r_A$  và  $l_B = r_B$ . Ta chứng minh rằng điều này cũng đúng với các công thức  $(\neg A)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ , và  $(A \leftrightarrow B)$ . Thật vậy, công thức đầu tiên có  $l_A + 1$  ngoặc trái và  $r_A + 1$  ngoặc phải, và các công thức sau đó có  $l_A + l_B + 1$  ngoặc trái và  $r_A + r_B + 1$  ngoặc phải

Do đó, theo nguyên lý quy nạp theo cấu trúc, mọi công thức được tạo đúng quy tắc trong logic mệnh đề có số dấu ngoặc đơn trái bằng số dấu ngoặc đơn phải

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

39

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh



# Đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc



## Bài tập 17

Cho dãy Fibonacci  $\{f_n\}$ . Chứng minh rằng  $f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$  với mọi số nguyên dương  $n$

## Bài tập 18

Chứng minh rằng tập  $S$  định nghĩa bởi  $1 \in S$  và  $s + t \in S$  nếu  $s \in S$  và  $t \in S$  là tập các số nguyên dương  $\mathbb{Z}^+$ . (**Gợi ý:** Chứng minh  $S \subseteq \mathbb{Z}^+$  và  $\mathbb{Z}^+ \subseteq S$ )

## Bài tập 19

Cho  $S$  là tập các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa bằng đệ quy như sau

- **Bước cơ sở:**  $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu  $(a, b) \in S$ , thì  $(a + 2, b + 3) \in S$  và  $(a + 3, b + 2) \in S$
- (a) Sử dụng quy nạp mạnh với số lần áp dụng bước đệ quy trong định nghĩa của  $S$  ở trên, hãy chứng minh  $a + b$  chia hết cho 5 với mọi  $(a, b) \in S$
- (b) Sử dụng quy nạp theo cấu trúc để chứng minh  $a + b$  chia hết cho 5 với mọi  $(a, b) \in S$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

40

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

41

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

- Một **hệ thức truy hồi (recurrence relation)** cho dãy  $\{a_n\}$  là một **phương trình biểu diễn  $a_n$  thông qua một hoặc nhiều số hạng trước đó của dãy** với mọi số nguyên  $n$  thỏa mãn  $n \geq n_0$  với  $n_0$  là một số nguyên không âm.
  - Với dãy  $\{a_n\} = 0, 1, 4, 9, 16 \dots (n \geq 0)$ ,  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  với  $n \geq 1$  là một hệ thức truy hồi cho  $\{a_n\}$  (ở đây  $n_0 = 1$ )
- Để **định nghĩa một dãy  $\{a_n\}$  thông qua hệ thức truy hồi**, ta cần thêm **các điều kiện ban đầu (initial conditions)** bằng cách định nghĩa các phần tử trước  $a_{n_0}$  trong dãy
  - Để **định nghĩa  $\{a_n\}$  qua hệ thức  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  ( $n \geq 1$ )**, ta cần thêm **điều kiện ban đầu  $a_0 = 0$**
- Một dãy được gọi là một **ng nghiệm (solution)** của một hệ thức truy hồi nếu **các số hạng của dãy thỏa mãn hệ thức đó**
- **Giải hệ thức truy hồi với các điều kiện ban đầu** nghĩa là **tìm một công thức tường minh cho các số hạng của dãy**
  - Một công thức tường minh cho dãy  $\{a_n\}$  định nghĩa bởi  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  với  $n \geq 1$  và điều kiện ban đầu  $a_0 = 0$  là  $a_n = n^2$  ( $n \geq 0$ )

# Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi



## Ví dụ 17

- **Dãy  $\{b_n\}$  thỏa mãn hệ thức truy hồi  $b_n = -b_{n-1}$  với  $n \geq 1$  và điều kiện ban đầu  $b_0 = 1$** 
  - $\{b_n\} = 1, -1, 1, -1, \dots$
- **Dãy  $\{s_n\}$  thỏa mãn hệ thức truy hồi  $s_n = s_{n-1} - s_{n-2}$  với  $n \geq 2$  và điều kiện ban đầu  $s_0 = 3$  và  $s_1 = 5$** 
  - $\{s_n\} = 3, 5, 2, -3, -5, \dots$
- ***Dãy Fibonacci (Fibonacci sequence)*  $\{f_n\}$  ( $n \geq 0$ ) được định nghĩa bởi điều kiện ban đầu  $f_0 = 0, f_1 = 1$  và hệ thức truy hồi  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  với mọi số nguyên  $n \geq 2$** 
  - $\{f_n\} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$
- ***Dãy giai thừa (factorial sequence)*  $\{g_n\}$  được định nghĩa bởi điều kiện ban đầu  $g_0 = 1$  và hệ thức truy hồi  $g_n = ng_{n-1}$  với mọi số nguyên  $n \geq 1$** 
  - $\{g_n\} = 1, 1, 2, 6, 24, \dots$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

42

73

# Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy  
nap sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái  
niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ  
quy

Tập hợp định nghĩa bằng  
đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

43 **Dãy cho bởi hệ thức truy  
hồi**

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

- Một số phương pháp giải hệ thức truy hồi
  - (1) Đoán nghiệm (và chứng minh bằng phương pháp quy nạp)
  - (2) Sử dụng đa thức đặc trưng
  - (3) Sử dụng hàm sinh

# Giải hệ thức truy hồi

## Đoán nghiệm



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

44

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

- **Đoán nghiệm (Guessing and verifying)** là phương pháp giải hệ thức truy hồi bằng cách:
  - (1) Tính một số giá trị đầu tiên của dãy từ hệ thức truy hồi
  - (2) Quan sát các giá trị này để **đoán** một công thức tường minh
  - (3) Chứng minh công thức đoán được là đúng bằng **phương pháp quy nạp toán học**
- Kỹ thuật đoán nghiệm thường dựa vào:
  - Thay lặp đi lặp lại hệ thức truy hồi cho các số hạng đứng trước
  - Nhận ra quy luật xuất hiện trong quá trình thay thế
  - Tổng quát hóa quy luật này thành một công thức

# Giải hệ thức truy hồi

## Đoán nghiệm



### Ví dụ 18

Giải hệ thức truy hồi  $d_n = d_{n-1} + 4$  ( $n \geq 1$ ) với điều kiện ban đầu  $d_0 = -1$

#### Hướng suy luận

- (1) Từ hệ thức truy hồi, ta cũng có  $d_{n-1} = d_{n-2} + 4$
- (2) Thay (2) vào hệ thức ban đầu  
$$d_n = (d_{n-2} + 4) + 4 = d_{n-2} + 2 \cdot 4$$
- (3) Từ hệ thức truy hồi, ta cũng có  $d_{n-2} = d_{n-3} + 4$
- (4) Thay (4) vào (3), ta thu được  $d_n = d_{n-3} + 3 \cdot 4$
- (5) Lặp lại quá trình trên, ta “đoán”  $d_n = d_{n-r} + r \cdot 4$
- (6) Để có một công thức tường minh cho  $d_n$ , ta cần  $n - r = 0$ , tức là  $r = n$ . Khi đó  $d_n$  được biểu diễn qua  $d_0$  đã cho trước và  $n = r$ .
- (7) Tóm lại, ta có  $d_n = -1 + 4n$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

45

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Giải hệ thức truy hồi

## Đoán nghiệm



### Ví dụ 19

Giải hệ thức truy hồi  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  ( $n \geq 1$ ) với điều kiện ban đầu  $a_0 = 0$

(1) Từ hệ thức truy hồi, ta có  $a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-1) - 1$

(2) Thay vào hệ thức ban đầu,

$$a_n = (a_{n-2} + 2(n-1) - 1) + 2n - 1 = a_{n-2} + 4n - 4$$

(3) Từ hệ thức truy hồi, ta có  $a_{n-2} = a_{n-3} + 2(n-2) - 1$

(4) Thay vào (2),

$$a_n = (a_{n-3} + 2(n-2) - 1) + 4n - 4 = a_{n-3} + 6n - 9$$

(5) Từ hệ thức truy hồi, ta có  $a_{n-3} = a_{n-4} + 2(n-3) - 1$

(6) Thay vào (4),

$$a_n = (a_{n-4} + 2(n-3) - 1) + 6n - 9 = a_{n-4} + 8n - 16$$

(7) Lập lại quá trình trên, ta “đoán”  $a_n =$

(8) Để có một công thức tường minh cho  $a_n$ , ta cần  $n - r = 0$ , tức là  $r = n$ . Khi đó  $a_n$  được biểu diễn qua  $a_0$  đã cho trước và  $n = r$

(9) Tóm lại  $a_n =$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

46

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Giải hệ thức truy hồi

## Đoán nghiệm



## Bài tập 20

Giải các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau bằng phương pháp đoán nghiệm và chứng minh công thức bạn đoán được là đúng bằng quy nạp

(a)  $a_n = -a_{n-1}, a_0 = 5$

(e)  $a_n = 2a_{n-1} - 3, a_0 = -1$

(b)  $a_n = a_{n-1} + 3, a_0 = 1$

(f)  $a_n = (n+1)a_{n-1}, a_0 = 2$

(c)  $a_n = a_{n-1} - n, a_0 = 4$

(g)  $a_n = 2na_{n-1}, a_0 = 3$

(d)  $a_n = 5a_{n-1}, a_0 = 1$

(h)  $a_n = -a_{n-1} + n - 1, a_0 = 7$

## Bài tập 21

Giả thiết dân số thế giới năm 2023 là 8 tỷ người và tăng theo tỷ lệ 0.8%/năm. Với  $n \geq 1$ ,

(a) Xây dựng hệ thức truy hồi để tính dân số thế giới  $n$  năm sau 2023

(b) Tìm công thức tường minh để tính dân số thế giới  $n$  năm sau 2023

(c) Dân số thế giới năm 2057 sẽ là bao nhiêu?

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

47

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh



# Giải hệ thức truy hồi

## Đa thức đặc trưng



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

- **Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc  $k$  với hệ số hằng (Linear homogeneous recurrence relation of degree  $k$  with constant coefficients)** là hệ thức có dạng

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

trong đó  $c_1, c_2, \dots, c_k$  là các số thực,  $c_k \neq 0$ , và  $n \geq k$

- Một dãy  $\{a_n\}$  ( $n \geq 0$ ) thỏa mãn hệ thức truy hồi trên được **xác định một cách duy nhất** bởi **hệ thức này** và  **$k$  điều kiện ban đầu**  $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \dots, a_{k-1} = C_{k-1}$

- Hệ thức truy hồi  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  là một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai với hệ số hằng. Dãy Fibonacci  $\{f_n\}$  được xác định bởi hệ thức trên và điều kiện ban đầu  $f_0 = 0, f_1 = 1$
- Các hệ thức  $g_n = n g_{n-1}$ ,  $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}^2$  không là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

48

73

# Giải hệ thức truy hồi

## Đa thức đặc trưng



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

- Hệ thức  $a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$  ( $c_k \neq 0$ ) có hai tính chất quan trọng

- Nghiệm của hệ thức có dạng  $a_n = r^n$  với  $r \neq 0$  là một hằng số nào đó. Từ đó,  $r^n = c_1 r^{n-1} + \cdots + c_k r^{n-k}$ . Chia hai vế cho  $r^{n-k}$  và chuyển vế, ta có

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

Đa thức cuối cùng gọi là **đa thức đặc trưng (characteristic polynomial)** của hệ thức, và nghiệm của nó gọi là **nghiệm đặc trưng (characteristic root)** của hệ thức

- Nếu  $s_n$  và  $t_n$  thỏa mãn hệ thức truy hồi, thì **mọi tổ hợp tuyến tính của  $s_n$  và  $t_n$** , nghĩa là mọi biểu thức có dạng  $b_1 s_n + b_2 t_n$  với  $b_1, b_2$  là các số thực nào đó, cũng thỏa mãn hệ thức truy hồi

49



## Định lý 2

Cho các số thực  $c_1, c_2, \dots, c_k$ . Giả sử  $r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_{k-1} r - c_k$  có  $t$  nghiệm phân biệt  $r_1, r_2, \dots, r_t$  với các bội tương ứng  $m_1, m_2, \dots, m_t$  thỏa mãn  $m_i \geq 1$  với  $1 \leq i \leq t$  và  $m_1 + \dots + m_t = k$  (nghĩa là, có  $m_i$  nghiệm có giá trị  $r_i$ ). Dãy  $\{a_n\}$  là nghiệm của hệ thức truy hồi  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$  ( $n \geq k$ ) với điều kiện ban đầu  $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \dots, a_{k-1} = C_{k-1}$  khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} a_n = & (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \dots + \alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1})r_1^n \\ & + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n + \dots + \alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1})r_2^n \\ & + \dots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1}n + \dots + \alpha_{t,m_t-1}n^{m_t-1})r_t^n \end{aligned}$$

với  $n \geq 0$ , trong đó  $\alpha_{i,j}$  là các hằng số với  $1 \leq i \leq t$  và  $0 \leq j \leq m_i - 1$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

50

73

# Giải hệ thức truy hồi

## Đa thức đặc trưng



### Các bước giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc $k$ với hệ số hằng

- (1) Xác định đa thức đặc trưng:  $r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_{k-1} r - c_k$
- (2) Tìm các nghiệm  $r_1, r_2, \dots, r_t$  của đa thức đặc trưng và bội tương ứng  $m_1, m_2, \dots, m_t$
- (3) Viết dạng tổng quát của nghiệm:

$$\begin{aligned} a_n = & (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \dots + \alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1})r_1^n \\ & + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n + \dots + \alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1})r_2^n \\ & + \dots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1}n + \dots + \alpha_{t,m_t-1}n^{m_t-1})r_t^n \end{aligned}$$

- (4) Thay các điều kiện ban đầu  $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \dots, a_{k-1} = C_{k-1}$  vào dạng tổng quát để thiết lập hệ phương trình
- (5) Giải hệ phương trình để xác định các hệ số  $\alpha_{i,j}$  với  $1 \leq i \leq t$  và  $0 \leq j \leq m_i - 1$
- (6) Thay các hệ số vào biểu thức tổng quát để có nghiệm cuối cùng

#### Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

#### Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

#### Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

#### Giải hệ thức truy hồi

Đầy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

51

73

# Giải hệ thức truy hồi

## Đa thức đặc trưng



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

### Định lý 3: (Định lý 2 với $k = 2$ )

Cho hệ thức truy hồi  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ) với đa thức đặc trưng  $r^2 - c_1 r - c_2$ . Với điều kiện ban đầu  $a_0 = C_0$ ,  $a_1 = C_1$ , dãy  $\{a_n\}$  là nghiệm của hệ thức khi và chỉ khi:

(1) Khi đa thức đặc trưng có hai nghiệm phân biệt  $r_1, r_2$ :

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

(2) Khi đa thức đặc trưng có một nghiệm bội 2 là  $r_1$ :

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n) r_1^n$$

với  $\alpha_1, \alpha_2$  là các hằng số.

# Giải hệ thức truy hồi

## Đa thức đặc trưng



### Ví dụ 20

Giải hệ thức truy hồi  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ) với điều kiện ban đầu  $f_0 = 0$  và  $f_1 = 1$

- Đa thức đặc trưng của hệ thức truy hồi là  $r^2 - r - 1$
- Đa thức đặc trưng có hai nghiệm phân biệt  $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  và  $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
- Do đó, nếu dãy  $\{f_n\}$  là nghiệm của hệ thức truy hồi thì  $f_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  với các hằng số  $\alpha_1, \alpha_2$  nào đó
- $\{f_n\}$  cần thỏa mãn điều kiện ban đầu  $f_0 = 0$  và  $f_1 = 1$ . Thay vào dạng tổng quát của  $f_n$ , ta có hệ phương trình

$$f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$f_1 = \alpha_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

Từ đó  $\alpha_1 = 1/\sqrt{5}$  và  $\alpha_2 = -1/\sqrt{5}$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

53

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Giải hệ thức truy hồi

## Đa thức đặc trưng



### Ví dụ 21

Giải hệ thức truy hồi  $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$  với các điều kiện ban đầu  $a_0 = 1$  và  $a_1 = 6$

- Đa thức đặc trưng của hệ thức truy hồi là  $r^2 - 6r + 9$
- Đa thức đặc trưng có một nghiệm  $r_1 = 3$  với bội 2
- Do đó, nếu dãy  $\{a_n\}$  là nghiệm của hệ thức truy hồi thì  $a_n = \alpha_{1,0}r_1^n + \alpha_{1,1}nr_1^n = \alpha_{1,0}3^n + \alpha_{1,1}n3^n$  với các hằng số  $\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}$  nào đó
- Dãy  $\{a_n\}$  cũng cần thỏa mãn điều kiện ban đầu  $a_0 = 1$  và  $a_1 = 6$ . Thay vào dạng tổng quát của  $a_n$ , ta có hệ phương trình

$$a_0 = \alpha_{1,0} = 1$$

$$a_1 = \alpha_{1,0} \cdot 3 + \alpha_{1,1} \cdot 3 = 6$$

Do đó, ta có  $\alpha_{1,0} = 1$  và  $\alpha_{1,1} = 1$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

54

73

# Giải hệ thức truy hồi

## Đa thức đặc trưng



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

### Định lý 4: (Định lý 2 với $k = 3$ )

Cho hệ thức truy hồi  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3}$  ( $n \geq 3$ ) với đa thức đặc trưng  $r^3 - c_1 r^2 - c_2 r - c_3$ . Với điều kiện ban đầu  $a_0 = C_0$ ,  $a_1 = C_1$ ,  $a_2 = C_2$ , dãy  $\{a_n\}$  là nghiệm của hệ thức khi và chỉ khi:

(1) Khi đa thức đặc trưng có ba nghiệm phân biệt  $r_1, r_2, r_3$ :

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n$$

(2) Khi đa thức đặc trưng có hai nghiệm phân biệt  $r_1$  (bội 2) và  $r_2$  (bội 1):  $a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n) r_1^n + \alpha_3 r_2^n$

(3) Khi đa thức đặc trưng có một nghiệm duy nhất  $r_1$  (bội 3):

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2) r_1^n$$

trong đó  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  là các hằng số.

55



# Giải hệ thức truy hồi

## Đa thức đặc trưng



### Ví dụ 22

Giải hệ thức truy hồi  $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$  với các điều kiện ban đầu  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -2$ , và  $a_2 = -1$

- Đa thức đặc trưng của hệ thức là  $r^3 + 3r^2 + 3r + 1$
- Đa thức đặc trưng có một nghiệm  $r_1 = -1$  với bội 3
- Do đó, nếu  $\{a_n\}$  là nghiệm của hệ thức truy hồi thì  $a_n = \alpha_{1,0}r_1^n + \alpha_{1,1}nr_1^n + \alpha_{1,2}n^2r_1^n$
- Dãy  $\{a_n\}$  cũng cần thỏa mãn điều kiện ban đầu  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -2$ , và  $a_2 = -1$ . Thay vào dạng tổng quát của  $a_n$ , ta có hệ phương trình

$$a_0 = \alpha_{1,0} = 1$$

$$a_1 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2} = -2$$

$$a_2 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2} = -1$$

Do đó ta có  $\alpha_{1,0} = 1$ ,  $\alpha_{1,1} = 3$ , và  $\alpha_{1,2} = -2$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

56

73



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy  
nap sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái  
niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ  
quy

Tập hợp định nghĩa bằng  
đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy  
hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

## Bài tập 22

Giải các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau

(a)  $a_n = 2a_{n-1}$  với  $n \geq 1$ ,  $a_0 = 3$

(b)  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$  với  $n \geq 2$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$

(c)  $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$  với  $n \geq 2$ ,  $a_0 = 6$ ,  $a_1 = 8$

(d)  $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$  với  $n \geq 3$ ,  $a_0 = 5$ ,  $a_1 = -9$ ,  
 $a_2 = 15$

(e)  $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ),  $a_0 = 4$ ,  $a_1 = 10$

(f)  $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$  ( $n \geq 3$ ),  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 6$ ,  $a_2 = 0$

(g) (\*)  $\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-2}}$  ( $n \geq 2$ ),  $a_0 = a_1 = 1$

57

# Giải hệ thức truy hồi

Đa thức đặc trưng



- **Hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất bậc  $k$  với hệ số hằng (Linear nonhomogeneous recurrence relation of degree  $k$  with constant coefficients)** là hệ thức có dạng

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

trong đó  $c_1, c_2, \dots, c_k$  là các số thực,  $c_k \neq 0$ ,  $F(n)$  là một hàm chỉ phụ thuộc vào  $n$  và không phải luôn bằng 0, và  $n \geq k$

- Hệ thức  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$  được gọi là **hệ thức truy hồi thuần nhất tương ứng (associated homogeneous recurrence relation)** của hệ thức trên

## Định lý 5

Nếu  $\{a_n^{(p)}\}$  là một nghiệm riêng nào đó của hệ thức  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$  thì mọi nghiệm của hệ thức đó có dạng  $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ , trong đó  $a_n^{(h)}$  là nghiệm của hệ thức thuần nhất tương ứng  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

58

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

# Giải hệ thức truy hồi

## Đa thức đặc trưng



Với một số dạng  $F(n)$ , nghiệm riêng có dạng đặc biệt

### Định lý 6

*Giả sử  $\{a_n\}$  thỏa mãn hệ thức*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

*trong đó  $c_1, \dots, c_k$  là các số thực, và*

$$F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0) s^n,$$

*trong đó  $b_0, \dots, b_t$  và  $s$  là các số thực. Khi  $s$  không phải là nghiệm của đa thức đặc trưng của hệ thức thuần nhất tương ứng, tồn tại một nghiệm riêng có dạng  $(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$ . Khi  $s$  là một nghiệm với bội  $m$  của đa thức đặc trưng của hệ thức thuần nhất tương ứng, tồn tại một nghiệm riêng có dạng  $n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$ .*

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

59

73

# Giải hệ thức truy hồi

## Đa thức đặc trưng



### Các bước giải hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất bậc $k$ với hệ số hằng

Cho hệ thức truy hồi:  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + F(n)$  với  $F(n) = (b_t n^t + \dots + b_1 n + b_0) s^n$

#### (1) Tìm nghiệm thuần nhất $a_n^{(h)}$ :

- Xác định đa thức đặc trưng:  $r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_{k-1} r - c_k$
- Tìm nghiệm và bội tương ứng của đa thức đặc trưng
- Viết dạng tổng quát của nghiệm thuần nhất theo Định lý 2

#### (2) Tìm nghiệm riêng $a_n^{(p)}$ :

- Kiểm tra xem  $s$  có phải là nghiệm đặc trưng của hệ thức thuần nhất hay không
- Nếu  $s$  không phải nghiệm đặc trưng: đặt  $a_n^{(p)} = (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \dots + p_1 n + p_0) s^n$
- Nếu  $s$  là nghiệm đặc trưng với bội  $m$ : đặt  $a_n^{(p)} = n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \dots + p_1 n + p_0) s^n$
- Thay  $a_n^{(p)}$  vào hệ thức ban đầu để thiết lập hệ phương trình tìm  $p_0, p_1, \dots, p_t$

#### (3) Tìm nghiệm tổng quát: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

#### (4) Áp dụng điều kiện ban đầu để tìm các hằng số trong nghiệm thuần nhất

#### Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

#### Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

#### Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

#### Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

60

73

# Giải hệ thức truy hồi

## Đa thức đặc trưng



### Ví dụ 23

Giải hệ thức truy hồi  $a_n = a_{n-1} + n$  ( $n \geq 2$ ) với điều kiện ban đầu  $a_1 = 1$

- Hệ thức thuần nhất tương ứng là  $a_n = a_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ). Hệ thức này có nghiệm đặc trưng  $r = 1$  và dãy  $\{a_n^{(h)}\}$  với  $a_n^{(h)} = c \cdot (1)^n$  là một dãy thỏa mãn hệ thức, trong đó  $c$  là hằng số nào đó
- Ta có  $F(n) = n = (1 \cdot n + 0) \cdot 1^n$ . Vì  $s = 1$  là nghiệm đặc trưng của hệ thức thuần nhất tương ứng với bội 1, một nghiệm riêng của hệ thức không thuần nhất đã cho có dạng  $a_n^{(p)} = n(p_1 n + p_0)1^n = p_1 n^2 + p_0 n$
- Thay dạng của nghiệm riêng vào hệ thức đã cho, ta có  $n(2p_1 - 1) + (p_0 - p_1) = 0$ , nghĩa là  $2p_1 - 1 = 0$  và  $p_0 - p_1 = 0$ , do đó  $p_0 = p_1 = 1/2$
- Cuối cùng, hệ thức ban đầu có nghiệm dạng  $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = n(n+1)/2 + c$ . Thay vào điều kiện ban đầu  $a_1 = 1$  ta được  $c = 0$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

61

73

# Giải hệ thức truy hồi

## Đa thức đặc trưng



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

## Bài tập 23

Giải các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau

(1)  $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$  với  $n \geq 1$ ,  $a_0 = 1$

(2)  $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$  với  $n \geq 2$ ,  $a_1 = 5$

(3)  $a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42 \cdot 4^n$  ( $n \geq 3$ ),  $a_1 = 56$ ,  $a_2 = 278$

(4)  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$  (**Gợi ý:** Tìm nghiệm riêng có dạng  $qn2^n + p_1n + p_2$ , trong đó  $q, p_1, p_2$  là các hằng số)

62

73

# Giải hệ thức truy hồi

## Hàm sinh



### Hàm sinh

**Hàm sinh (generating function)**  $G_a(x)$  của một dãy vô hạn  $\{a_n\}$  ( $n \geq 0$ ) được định nghĩa như sau

$$G_a(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots$$

Nói cách khác,  $a_n$  là hệ số của  $x^n$  trong  $G_a(x)$

$$G_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots)$$
$$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \dots$$

Công thức tường minh

$$G_a(x) = h(x)$$

Khái triển  $h(x)$

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{x^n}$$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

63

73





### Định lý 7

Cho  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  và  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ . Ta có

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

**Chú ý:** Định lý trên chỉ đúng cho các chuỗi lũy thừa hội tụ trong một khoảng nào đó, và tất cả các chuỗi chúng ta sẽ xét trong bài giảng này đều thỏa mãn điều kiện đó. Tuy nhiên, ngay cả khi các chuỗi không hội tụ, *định lý trên có thể được sử dụng như là định nghĩa cho các phép cộng và nhân các hàm sinh*

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

64

73

# Giải hệ thức truy hồi

## Hàm sinh



### Các bước giải hệ thức truy hồi bằng hàm sinh

(1) **Định nghĩa hàm sinh:**  $G_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(2) **Xây dựng phương trình cho  $G_a(x)$ :**

- Sử dụng hệ thức truy hồi, điều kiện ban đầu, và các phép biến đổi đại số để thu được phương trình đại số cho  $G_a(x)$

(3) **Giải phương trình để tìm biểu thức tường minh  $h(x)$  của  $G_a(x)$**

(4) **Phân tích  $h(x)$ :**

- Khai triển  $h(x)$  thành chuỗi lũy thừa sử dụng phân tích thành phân số riêng hoặc các công thức chuỗi cơ bản
- Áp dụng các đẳng thức đã biết để đưa về dạng chuỗi lũy thừa

(5) **Trích xuất hệ số:** So sánh với định nghĩa ban đầu

$$G_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ để xác định } a_n$$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

65

73

# Giải hệ thức truy hồi

## Hàm sinh



### Ví dụ 24

Giải hệ thức truy hồi  $a_n = 3a_{n-1}$  ( $n \geq 1$ ) với điều kiện ban đầu  $a_0 = 2$

$$\begin{aligned}G_a(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (3a_{n-1}) x^n \\&= 2 + 3x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = 2 + 3x \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \\&= 2 + 3x G_a(x) \\G_a(x) &= \frac{2}{1-3x}\end{aligned}$$

Nhắc lại rằng  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  với  $-1 < x < 1$ . Suy ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n x^n = \frac{1}{1-cx} \text{ với } -1 < cx < 1 \text{ trong đó } c \neq 0 \text{ là hằng số nào đó}$$

Sử dụng đẳng thức trên, ta có thể viết

$$G_a(x) = \frac{2}{1-3x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2 \cdot 3^n) x^n$$

Suy ra  $a_n = 2 \cdot 3^n$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đây cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

66

73

# Giải hệ thức truy hồi

## Hàm sinh



Một phương pháp khác để tìm công thức tường minh cho  $G_a(x)$  trong Ví dụ 24. Chú ý rằng  $a_n = 3a_{n-1}$  ( $n \geq 1$ ) và  $a_0 = 2$

$$G_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$-3xG_a(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} [3a_n]x^{n+1}$$

$$G_a(x) - 3xG_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} [3a_n]x^{n+1}$$

$$= a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} [3a_n]x^{n+1}$$

$$= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} [3a_{n-1}]x^n$$

$$= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n - 3a_{n-1}]x^n$$

$$= 2$$

Định nghĩa hàm sinh

Nhân hai vế với  $-3x$

Cộng hai đẳng thức

Đổi chỉ số

$$a_n = 3a_{n-1}$$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

67

# Giải hệ thức truy hồi

## Hàm sinh



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy  
nap sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái  
niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ  
quy

Tập hợp định nghĩa bằng  
đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy  
hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

Một số đẳng thức hữu ích

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$$

$$\frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{kn}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

# Giải hệ thức truy hồi

## Hàm sinh



### Ví dụ 25

Dãy Fibonacci  $\{f_n\}$  cho bởi hệ thức  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ) và điều kiện ban đầu  $f_0 = 0$  và  $f_1 = 1$

$$G_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) x^n$$

$$= x + x \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^{n-2}$$

$$= x + x \sum_{m=1}^{\infty} f_m x^m + x^2 \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m$$

$$= x + x \left[ \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m - f_0 x^0 \right] + x^2 \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m$$

$$= x + x G_f(x) + x^2 G_f(x)$$

$$G_f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

đổi biến

$$f_0 x^0 = 0$$

Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đề quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đặt cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

69

73

# Giải hệ thức truy hồi

## Hàm sinh



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy  
nap sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái  
niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ  
quy

Tập hợp định nghĩa bằng  
đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy  
hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

Một phương pháp khác để tìm công thức tường minh cho  $G_f(x)$  trong ví dụ dãy Fibonacci. Chú ý rằng  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ) và  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$

$$G_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

Định nghĩa hàm sinh

$$-xG_f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+1}$$

Nhân với  $-x$

$$-x^2G_f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2}$$

Nhân với  $-x^2$

# Giải hệ thức truy hồi

## Hàm sinh



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

$$\begin{aligned} & G_f(x) - xG_f(x) - x^2G_f(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2} \end{aligned}$$

$$= f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n$$

$$= 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty} [f_n - f_{n-1} - f_{n-2}] x^n$$

$$= x + 0$$

$$= x$$

Cộng ba đẳng thức

Đổi chỉ số

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Do đó,  $G_f(x)(1 - x - x^2) = x$ , và suy ra  $G_f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$

71

73



# Giải hệ thức truy hồi

## Hàm sinh



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy  
nap sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái  
niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ  
quy

Tập hợp định nghĩa bằng  
đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Đẩy cho bởi hệ thức truy  
hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

Nhắc lại rằng  $\sum_{n=0}^{\infty} c^n x^n = \frac{1}{1-cx}$  với  $-1 < cx < 1$  trong đó  $c \neq 0$   
là hằng số nào đó

## Bài tập 24

- Viết  $G_f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-Ax} + \frac{b}{1-Bx}$  với các hằng số  $a, b, A, B$  nào đó
- Áp dụng công thức trên để đưa  $G_f(x)$  về dạng  $a \sum_{n=0}^{\infty} A^n x^n + b \sum_{n=0}^{\infty} B^n x^n$  với  $-1 < Ax < 1$  và  $-1 < Bx < 1$  ( $\equiv$  Khai triển  $G_f(x)$  thành chuỗi lũy thừa)
- Từ định nghĩa hàm sinh, suy ra công thức cho dãy  $\{f_n\}$

72

73

# Giải hệ thức truy hồi

## Hàm sinh



Chú ý rằng từ  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  với  $-1 < x < 1$ , bằng cách lấy đạo hàm hai vế và đổi chỉ số lấy tổng, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)x^m = \frac{1}{(1-x)^2}$$

## Bài tập 25

Sử dụng hàm sinh để giải các hệ thức truy hồi sau

- (a)  $a_n = 7a_{n-1} \ (n \geq 1), a_0 = 5$
- (b)  $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \ (n \geq 2), a_0 = 1, a_1 = 1$
- (c)  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \ (n \geq 2), a_0 = 6, a_1 = 30$
- (d)  $(\star) a_n = 3a_{n-1} + n \ (n \geq 1), a_0 = 1$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Giới thiệu

Quy nạp yếu

Quy nạp mạnh

Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

Định nghĩa và một số khái niệm

Hàm định nghĩa bằng đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi

Đoán nghiệm

Đa thức đặc trưng

Hàm sinh

73

73

Part I

Phụ lục

# Nội dung



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy  
nap mạnh

Quy nạp mạnh và quy nạp  
yếu là tương đương

Một số lỗi thường gặp

Tài liệu tham khảo

## Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy nạp mạnh

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương

## Một số lỗi thường gặp

# Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy nạp mạnh



## Chứng minh (Quy nạp mạnh là đúng).

- Giả sử  $P(1)$  đúng và với mọi  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $(P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$  đúng. Ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$  bằng phản chứng
- Giả sử tồn tại  $n \in \mathbb{Z}^+$  sao cho  $P(n)$  sai. Do đó, tập  $S = \{n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } P(n) \text{ sai}\} \subseteq \mathbb{Z}^+$  là tập khác rỗng.
- Theo Tiên đề 1,  $S$  có một phần tử nhỏ nhất  $m$ . Do  $P(1)$  đúng và  $m \in \mathbb{Z}^+$ , ta có  $m > 1$ , suy ra  $m - 1 \in \mathbb{Z}^+$
- Theo định nghĩa của  $m$ , với mọi số nguyên dương  $j \leq m - 1$ , ta có  $P(j)$  đúng (nếu không thì  $j < m$  và  $P(j)$  sai; điều này mâu thuẫn với định nghĩa của  $m$ ). Do đó  $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(m - 1)$  đúng
- Do  $(P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$  đúng với mọi  $k \in \mathbb{Z}^+$ , ta có  $(P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(m - 1)) \rightarrow P(m)$  đúng
- Kết hợp với  $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(m - 1)$  đúng, ta có  $P(m)$  đúng. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của  $m$ . Do đó  $P(n)$  đúng với mọi số nguyên dương  $n$

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

2

Tính đúng đắn của Quy nạp mạnh

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương

Một số lỗi thường gặp

Tài liệu tham khảo

# Quy nạp toán học

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương



## Quy nạp yếu $\Rightarrow$ Quy nạp mạnh.

- (1) Giả sử với mọi  $R(n)$ , ta có  
 $(R(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (R(k) \rightarrow R(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ R(n)$   
đúng, nghĩa là, quy nạp yếu đúng
- (2) Giả sử với vị từ  $P(n)$  ta có  
 $P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ \bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow P(k+1)$  đúng, nghĩa là,  
bước cơ sở và bước quy nạp của quy nạp mạnh là đúng.  
Ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$  đúng
- (3) Ta định nghĩa  $Q(n) = \bigwedge_{j=1}^n P(j)$  với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$
- (4) Từ (1), ta có  
 $(Q(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (Q(k) \rightarrow Q(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ Q(n)$  đúng
- (5) Từ (3), ta có  $Q(1) \equiv P(1)$  và  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ Q(n) \equiv \forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$
- (6) Chú ý rằng với các mệnh đề  $p, q$  bất kỳ  $p \rightarrow q \equiv p \rightarrow p \wedge q$   
(Tại sao?).
- (7) Do đó  $Q(k) \rightarrow Q(k+1) \equiv \bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^{k+1} P(j) \equiv$   
 $\bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^k P(j) \wedge P(k+1) \equiv \bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow P(k+1)$
- (8) Thay (5) và (7) vào (4), ta có điều phải chứng minh

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy  
nap mạnh

3

Quy nạp mạnh và quy nạp  
yếu là tương đương

Một số lỗi thường gặp

Tài liệu tham khảo

# Quy nạp toán học

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương



## Quy nạp mạnh $\Rightarrow$ Quy nạp yếu.

- (1) Giả sử với mọi  $R(n)$  ta có  
 $(R(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (\bigwedge_{j=1}^k R(j) \rightarrow R(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ R(n)$   
đúng, nghĩa là, quy nạp mạnh đúng
- (2) Giả sử với vị từ  $P(n)$  ta có  
 $P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (P(k) \rightarrow P(k+1))$  đúng, nghĩa là, bước cơ sở và bước quy nạp của quy nạp yếu đúng. Ta chứng minh  
 $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$  đúng
- (3) Chú ý rằng với các mệnh đề  $p, q, r$  bất kỳ, nếu  $p \rightarrow q$  đúng thì  $p \wedge r \rightarrow q$  cũng đúng (Tại sao?)
- (4) Áp dụng (1) với  $P(n)$ , ta có  
 $(P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (\bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow P(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$   
đúng.
- (5) Từ (2), ta có  $P(1)$  đúng và  $\forall k \in \mathbb{Z}^+ (P(k) \rightarrow P(k+1))$  đúng. Kết hợp với (3), ta có  
 $\forall k \in \mathbb{Z}^+ (\bigwedge_{j=1}^k P(j) \rightarrow P(k+1))$  đúng
- (6) Từ (4) và (5) ta có điều phải chứng minh

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy  
nap mạnh

4

Quy nạp mạnh và quy nạp  
yếu là tương đương

Một số lỗi thường gặp

Tài liệu tham khảo

# Một số lỗi thường gặp



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy nạp mạnh

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương

5 Một số lỗi thường gặp

Tài liệu tham khảo

## Chú ý

Tham khảo từ tài liệu “Common Mistakes in Discrete Mathematics” ([https://highered.mheducation.com/sites/dl/free/125967651x/1106131/Common\\_Mistakes\\_in\\_Discrete\\_Math.pdf](https://highered.mheducation.com/sites/dl/free/125967651x/1106131/Common_Mistakes_in_Discrete_Math.pdf))

### (a) Quên thực hiện bước cơ sở trong chứng minh bằng quy nạp toán học

- Bước quy nạp có thể thực hiện tốt, ví dụ, khi chúng ta cố gắng chứng minh rằng  $n = n + 1$  với mọi số nguyên dương  $n$ , nhưng mệnh đề này rõ ràng là không đúng. Vấn đề là ở bước cơ sở (khi  $n = 1$ ) không thỏa mãn, vì  $1 \neq 1 + 1$

### (b) Không thực hiện nhiều hơn một trường hợp trong bước cơ sở của chứng minh bằng quy nạp



# Một số lỗi thường gặp (tiếp)



Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy nạp mạnh

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương

6

Một số lỗi thường gặp

Tài liệu tham khảo

- Trong một số tình huống, chẳng hạn như khi bước quy nạp cần hai hoặc nhiều điều kiện trước đó, cần phải kiểm tra nhiều trường hợp cơ sở
- Ví dụ, khi chứng minh các phát biểu về dãy Fibonacci, thường cần phải kiểm tra hai trường hợp cơ sở đầu tiên (giả sử  $n = 1$  và  $n = 2$ ), vì bước quy nạp dựa vào phương trình  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

## (c) Nhầm lẫn giữa tổng và vị từ $P(n)$ trong chứng minh quy nạp

- Ví dụ, khi cố gắng chứng minh  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  bằng quy nạp,  $P(n)$  là toàn bộ phương trình này, không phải chỉ là vế trái của nó

## (d) Viết $P(k+1)$ không chính xác trong chứng minh bằng quy nạp toán học

- Khi  $P(n)$  đã được xác định đúng, việc viết  $P(k+1)$  thường có thể được thực hiện một cách máy móc bằng cách thay  $k+1$  vào  $n$

# Một số lỗi thường gặp (tiếp)



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy  
nap mạnh

Quy nạp mạnh và quy nạp  
yếu là tương đương

7

Một số lỗi thường gặp

Tài liệu tham khảo

- Ví dụ, nếu  $P(n)$  là mệnh đề  $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ , thì  $P(k + 1)$  là  $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 2)$

## (e) Rơi vào “bẫy quy nạp (induction trap)” trong chứng minh bằng quy nạp toán học

- Đây là thuật ngữ được Douglas West (Đại học Illinois) đặt ra để chỉ lỗi khi bắt đầu từ tính đúng đắn của  $P(k)$  và chứng minh tính đúng đắn của  $P(k + 1)$  chỉ trong một số trường hợp đặc biệt, thay vì chứng minh tổng quát

## (f) Mắc lỗi khi thực hiện các biến đổi đại số cơ bản khi chứng minh bằng quy nạp toán học

- Có thể xảy ra trong khi thực hiện các biến đổi đại số cơ bản, đặc biệt là trong việc đơn giản hóa biểu thức
- Ví dụ, bạn có thể cần sử dụng đẳng thức  $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ , hoặc cần đơn giản hóa  $(n + 1)^3 + 5(n + 1)^2$ , điều này tốt nhất nên được thực hiện bằng cách phân tích thừa số, không phải bằng cách khai triển từng số hạng

# Một số lỗi thường gặp (tiếp)



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy  
nap mạnh

Quy nạp mạnh và quy nạp  
yếu là tương đương

8

Một số lỗi thường gặp

Tài liệu tham khảo

- Kiểm tra kỹ các thao tác biến đổi đại số của bạn khi bạn gặp khó khăn với bước quy nạp của một chứng minh như vậy

## (g) Thiểu tổ chức khi viết định nghĩa đệ quy

- Một lời khuyên là nên suy nghĩ về cách xây dựng từng bước một các đối tượng đang xét
- Các quy tắc ở bước đệ quy của định nghĩa cần được xây dựng để cho phép từng bước như vậy, và các trường hợp cơ sở là cần thiết để bắt đầu quá trình xây dựng đối tượng
- Những lỗi phổ biến bao gồm:
  - Không đưa đủ các trường hợp cơ sở (ví dụ, định nghĩa đệ quy của dãy Fibonacci yêu cầu hai trường hợp cơ sở)
  - Có các trường hợp xung đột (ví dụ, có một trường hợp cho  $n$  chia hết cho 2 và một trường hợp khác cho  $n$  chia hết cho 3, dẫn đến không có định nghĩa duy nhất cho các trường hợp  $n$  chia hết cho 6)
  - Có giá trị hàm tại  $n$  phụ thuộc vào giá trị hàm tại đầu vào lớn hơn  $n$  (ví dụ,  $f(n) = f(3n + 1) - 2$ )

# Một số lỗi thường gặp (tiếp)



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy nạp mạnh

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương

9

Một số lỗi thường gặp

Tài liệu tham khảo

## (h) Dễ dàng từ bỏ khi cố gắng viết một quan hệ truy hồi để mô hình hóa một bài toán

- Hãy tự hỏi bản thân làm thế nào để có thể nhận được một trường hợp của bài toán kích thước  $n$  từ các trường hợp kích thước  $n - 1$  (hoặc đôi khi là các trường hợp nhỏ hơn)
- Đảm bảo xem xét tất cả các khả năng, và nhớ bao gồm đủ các điều kiện ban đầu
- Ví dụ, nếu  $a_n$  là số cách để leo  $n$  bậc thang nếu chúng ta được phép leo mỗi lần một bậc hoặc ba bậc, thì rõ ràng  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ , và  $a_3 = 2$ , và sau đó  $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$  với  $n \geq 4$ , vì bước đầu tiên có thể là một bước đơn hoặc ba bước

## (i) Áp dụng sai thuật toán giải quan hệ truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng khi phương trình đặc trưng có nghiệm lặp

- Trong trường hợp này, cần phải nhân với lũy thừa của  $n$

# Một số lỗi thường gặp (tiếp)



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy nạp mạnh

Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương

10 Một số lỗi thường gặp

Tài liệu tham khảo

- Ví dụ, nếu phương trình đặc trưng là  $r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0$ , thì nghiệm tổng quát là  $a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot n \cdot 3^n$

## (j) Tìm nghiệm riêng không chính xác của quan hệ truy hồi tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

- Luôn nên kiểm tra lại các nghiệm bạn tìm được. Ví dụ, nếu bạn tính được rằng  $a_n = 2^n$  là nghiệm riêng của  $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$ , thì khi thế vào, bạn sẽ thấy mình đã mắc lỗi, vì không đúng rằng  $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} + 2^n$

## (k) Quên quan tâm đến vài số hạng đầu tiên của chuỗi lũy thừa

- Khi giải quan hệ truy hồi bằng cách sử dụng hàm sinh, quan hệ truy hồi thường chỉ áp dụng được cho  $k \geq 1$  hoặc  $k \geq 2$ ; do đó một hoặc hai số hạng đầu tiên phải được xử lý riêng biệt

## (l) Quên đổi biến trong chuỗi lũy thừa khi cần thiết

# Một số lỗi thường gặp (tiếp)



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy  
nap mạnh

Quy nạp mạnh và quy nạp  
yếu là tương đương

11 Một số lỗi thường gặp

Tài liệu tham khảo

- Ví dụ, nếu chuỗi lũy thừa có  $x^{k-1}$  và bạn cần chuyển nó thành  $x^k$ , bạn có thể thay  $k$  bằng  $k+1$  trong toàn bộ tổng (bao gồm cả các giới hạn) và đơn giản hóa về mặt đại số:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k+1=1}^{\infty} (k+1)x^{(k+1)-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$



Quy nạp và Đề quy

Hoàng Anh Đức

Quy nạp toán học

Tính đúng đắn của Quy  
nap mạnh

Quy nạp mạnh và quy nạp  
yếu là tương đương

Một số lỗi thường gặp

12

Tài liệu tham khảo



Gunderson, David S. and Kenneth H. Rosen (2010).  
*Handbook of Mathematical Induction: Theory and  
Applications*. Chapman and Hall/CRC. DOI:  
10.1201/b16005.