## COPYRIGHT NOTICE THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

### © 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

## COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-10-28

# BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liêu này không được cấp nhất và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-10-28

### ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI KHOA TOÁN-CƠ-TIN (Đề gồm 4 câu/4 trang)

Môn: Toán rời rạc (MAT3500 2, Học kỳ 1, 2024-2025)

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ

Thời gian: 50 phút

- Điền các thông tin về Họ Tên, Mã Sinh Viên, Lớp trước khi bắt đầu làm bài.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.
- $\bullet$  Điểm bài kiểm tra này chiếm 20% tổng số điểm của môn học.

Họ và Tên:		
Mã Sinh Viên:	Lớp:	

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	2	3	3	2	10
Điểm:					

- 1. (a) (1 điểm) Cho các mệnh đề p, q, và r. Hai mệnh đề  $p \to (\neg q \to r)$  và  $p \to (\neg q \land r)$  có tương đương lôgic không? Vì sao?
  - (b) (1 điểm) Cho các tập hợp A, B, và C. Các tập hợp  $A-(B\cap C)$  và  $(A-B)\cup (A-C)$  có bằng nhau hay không? Vì sao?

#### Lời giải:

(a) Hai mệnh đề đã cho không tương đương lôgic. Ví dụ, với  $p=q=r=\mathsf{T}$ , ta có:

$$\begin{aligned} p \to (\neg q \to r) &= \mathsf{T} \to (\neg \mathsf{T} \to \mathsf{T}) = \mathsf{T} \to \mathsf{T} = \mathsf{T} \\ p \to (\neg q \land r) &= \mathsf{T} \to (\neg \mathsf{T} \land \mathsf{T}) = \mathsf{F} \end{aligned}$$

(b) Hai tập hợp  $A-(B\cap C)$  và  $(A-B)\cup (A-C)$  bằng nhau. Có thể chứng minh bằng cách sử dụng bảng tính thuộc như sau.

A	B	C	$B \cap C$	$A - (B \cap C)$	A-B	A-C	$(A-B) \cup (A-C)$
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Do các giá trị tương ứng ở mỗi hàng của các cột  $A-(B\cap C)$  và  $(A-B)\cup (A-C)$  trong bảng đều bằng nhau, suy ra hai tập hợp cũng bằng nhau.

2. (3 điểm) Cho dãy  $\{a_n\}$  được định nghĩa một cách đệ quy như sau:  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 9$ ,  $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$   $(n \ge 3)$ . Sử dụng nguyên lý quy nạp mạnh, hãy chứng minh  $a_n \le 3^n$  với mọi số nguyên  $n \ge 1$ .

**Lời giải:** Gọi P(n) là phát biểu  $a_n \leq 3^n$ . Ta chứng minh P(n) đúng với mọi số nguyên  $n \geq 1$  bằng quy nạp mạnh.

• Bước cơ sở: Ta chứng minh P(1) và P(2) đúng. Thật vậy,

$$a_1 = 2 \le 3^1 = 3$$
  $P(1)$  đúng  $a_2 = 9 \le 3^2 = 9$   $P(2)$  đúng

• Bước quy nạp: Giả sử P(j) đúng với mọi j thỏa mãn  $1 \le j \le k$ , trong đó  $k \ge 2$  là một số nguyên dương nào đó. Nghĩa là, với  $1 \le j \le k$ , ta có  $a_j \le 3^j$ . Ta chứng minh P(k+1) đúng, nghĩa là chứng minh  $a_{k+1} \le 3^{k+1}$ . Thật vậy, ta có

$$a_{k+1}=2a_k+3a_{k-1}$$
 Do  $k+1\geq 3$  
$$\leq 2\cdot 3^k+3\cdot 3^{k-1}$$
 Do  $k\geq 2$ , giả thiết quy nạp cho ta  $P(k)$  và  $P(k-1)$  đúng 
$$=3^{k+1}$$

Theo nguyên lý quy nạp mạnh, ta có điều phải chứng minh.

- 3. (3 diểm) Cho S là tập các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa bằng đệ quy như sau
  - Bước cơ sở:  $(0,0) \in S$
  - Bước đệ quy: Nếu  $(a,b) \in S$ , thì  $(a+2,b+3) \in S$  và  $(a+3,b+2) \in S$

Sử dụng quy nạp theo cấu trúc để chứng minh a+b chia hết cho 5 với mọi  $(a,b) \in S$ .

**Lời giải:** Gọi P là tính chất sau: a+b chia hết cho 5. Ta chứng minh P đúng với mọi  $(a,b) \in S$  bằng quy nạp theo cấu trúc.

- Bước cơ sở: Ta chứng minh (0,0) thỏa mãn tính chất P. Thật vậy, ta có 0+0=0 luôn chia hết cho 5.
- Bước quy nạp: Giả sử  $(a,b) \in S$  thỏa mãn tính chất P, nghĩa là a+b chia hết cho 5. Ta chứng minh (a+2,b+3) và (a+3,b+2) cũng thỏa mãn tính chất P. Thật vậy, với cặp (a+2,b+3), ta có (a+2)+(b+3)=(a+b)+5. Do a+b chia hết cho 5, ta có (a+b)+5 cũng chia hết cho 5, và do đó cặp (a+2,b+3) thỏa mãn tính chất P. Tương tự, cặp (a+3,b+2) cũng thỏa mãn tính chất P.

Theo nguyên lý quy nạp theo cấu trúc, ta có điều phải chứng minh.

4. (2 điểm) Chứng minh rằng phương trình  $x^4+y^4=100$  không có nghiệm nguyên dương, nghĩa là, không tồn tại cặp  $(x,y)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$  thỏa mãn  $x^4+y^4=100$ .

**Lời giải:** Từ  $x^4 \le 100$ , ta có  $x^2 \le 10$ , suy ra  $x \le \sqrt{10} \approx 3.16$ . Do  $x \in \mathbb{Z}^+$ , ta có  $1 \le x \le 3$ . Tương tự, ta cũng có  $1 \le y \le 3$ . Xét tất cả các trường hợp có thể xảy ra:

$\boldsymbol{x}$	y	$x^4 + y^4$
1	1	2
1	$\frac{1}{2}$	17
1	3	82
2	1	17
2	2 3	32
2 2 3	3	97
3	1	82
3	2 3	97
3	3	162

Từ bảng trên, ta thấy không có trường hợp nào thỏa mãn  $x^4+y^4=100.$  Do đó, ta có điều phải chứng minh.