

COPYRIGHT NOTICE

THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-03-15

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-03-15



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Thuật toán I

Giới thiệu, một số thuật toán tìm kiếm và sắp xếp, độ tăng của hàm

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn



Nội dung



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm
Một số quy tắc viết mã giả
Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm
Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu
Một số ký hiệu quan trọng

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm
Một số quy tắc viết mã giả
Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm
Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu
Một số ký hiệu quan trọng

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

2

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

- Một **thuật toán (algorithm)** là một tập hữu hạn các hướng dẫn cụ thể để thực hiện một nhiệm vụ nào đó
 - cộng hai số tự nhiên biểu diễn dưới dạng số thập phân
 - đăng ký môn học trực tuyến
 - đi từ nhà đến trường
 - Một **chương trình máy tính (computer program)** là
 - một mô tả của thuật toán nào đó
 - sử dụng một ngôn ngữ đủ chuẩn xác để máy tính có thể hiểu
 - cùng với các phép toán mà máy tính đã biết cách thực hiện
- Ta nói rằng thuật toán được **cài đặt (implement)** cụ thể bằng chương trình máy tính
- Khi mở một phần mềm trong máy tính, ta nói rằng **chương trình hoặc thuật toán của nó được chạy hoặc được thực hiện bởi máy tính**
 - Khi có mô tả của một thuật toán, bạn cũng **có thể thực hiện từng bước của thuật toán với giấy và bút**

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

3

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Một số tính chất của một thuật toán

Đầu vào (Input) Một thuật toán có các giá trị đầu vào từ một tập đã được xác định trước

Đầu ra (Output) Từ mỗi một tập các giá trị đầu vào, một thuật toán sinh ra các giá trị đầu ra. Các giá trị này chính là lời giải cho bài toán

Tính xác định (Definiteness) Các bước của một thuật toán cần phải được xác định một cách chính xác

Tính đúng đắn (Correctness) Với mỗi tập giá trị đầu vào, một thuật toán cần cho ra kết quả đầu ra đúng

Tính hữu hạn (Finiteness) Với mỗi tập giá trị đầu vào, một thuật toán cần cho ra các giá trị đầu ra mong muốn sau một số hữu hạn (có thể là rất lớn) các bước

Tính hiệu quả (Effectiveness) Mỗi bước của thuật toán cần được thực hiện một cách chính xác và trong thời gian hữu hạn

Tính tổng quát (Generality) Thuật toán phải áp dụng được cho mọi bài toán mong muốn, chứ không phải chỉ với một tập các giá trị đầu vào đặc biệt

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

4

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

- Một *thuật toán* cũng có thể được *mô tả bằng một ngôn ngữ máy tính* (C, Python, Java, v.v...). Tuy nhiên, những mô tả này cần tuân theo các chỉ dẫn cụ thể trong ngôn ngữ máy tính tương ứng. Điều này dẫn đến việc các mô tả theo phương pháp này thường phức tạp và khó hiểu
- Thay vì dùng một ngôn ngữ máy tính cụ thể để mô tả thuật toán, ta sử dụng *ngôn ngữ thông thường*, *giả mã (pseudocode)*, hoặc *sơ đồ khối (flowchart)*
- Một mô tả đầy đủ của một thuật toán bao gồm ba phần
 - (1) *Thuật toán (algorithm)*
 - Mô tả một cách rõ ràng và chính xác nhất có thể
 - Thường kèm theo mô tả ngắn gọn về ý tưởng của thuật toán
 - (2) Một chứng minh về *tính đúng đắn (correctness)* của thuật toán
 - Với mọi tập đầu vào, thuật toán cần cho kết quả đầu ra đúng
 - (3) Một phân tích về *thời gian chạy (running time)* của thuật toán

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

5

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Sau đây, ta sẽ trình bày

- Ví dụ về một số *cách mô tả một thuật toán*
 - Ngôn ngữ thông thường
 - Sơ đồ khối
 - Mã giả
- Ví dụ về một *phương pháp chứng minh tính đúng đắn của một thuật toán*: phương pháp sử dụng *bất biến vòng lặp (loop invariant)*. Ta sẽ minh họa phương pháp này bằng cách giới thiệu ý tưởng chứng minh tính đúng đắn của các thuật toán sẽ được mô tả



Ví dụ 1 (Mô tả thuật toán bằng ngôn ngữ thông thường)

■ Bài toán:

■ **Input:** a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số nguyên

■ **Output:** Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

■ Tìm giá trị của phần tử lớn nhất:

- (1) Gán giá trị của một biến tạm thời v (phần tử lớn nhất đến thời điểm hiện tại) bằng a_1
- (2) Xét phần tử ngay tiếp theo trong dãy
- (3) Nếu phần tử đó lớn hơn v thì gán giá trị của v bằng giá trị của phần tử
- (4) Lặp lại (2) và (3) cho đến khi không còn phần tử nào để xét
- (5) Trả lại giá trị của v

Thuật toán

6

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

7

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Ví dụ 2 (Thực hiện thuật toán)

- **Input:** Dãy $a_1 = 7, a_2 = 12, a_3 = 5, a_4 = 16, a_5 = 9$
- **Output:** Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
<div><div>7</div></div>	<div><div>12</div></div>	<div><div>5</div></div>	<div><div>16</div></div>	<div><div>9</div></div>
	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$v = 7$	$v = 12$	$v = 12$	$v = 16$	$v = 16$

Thuật toán

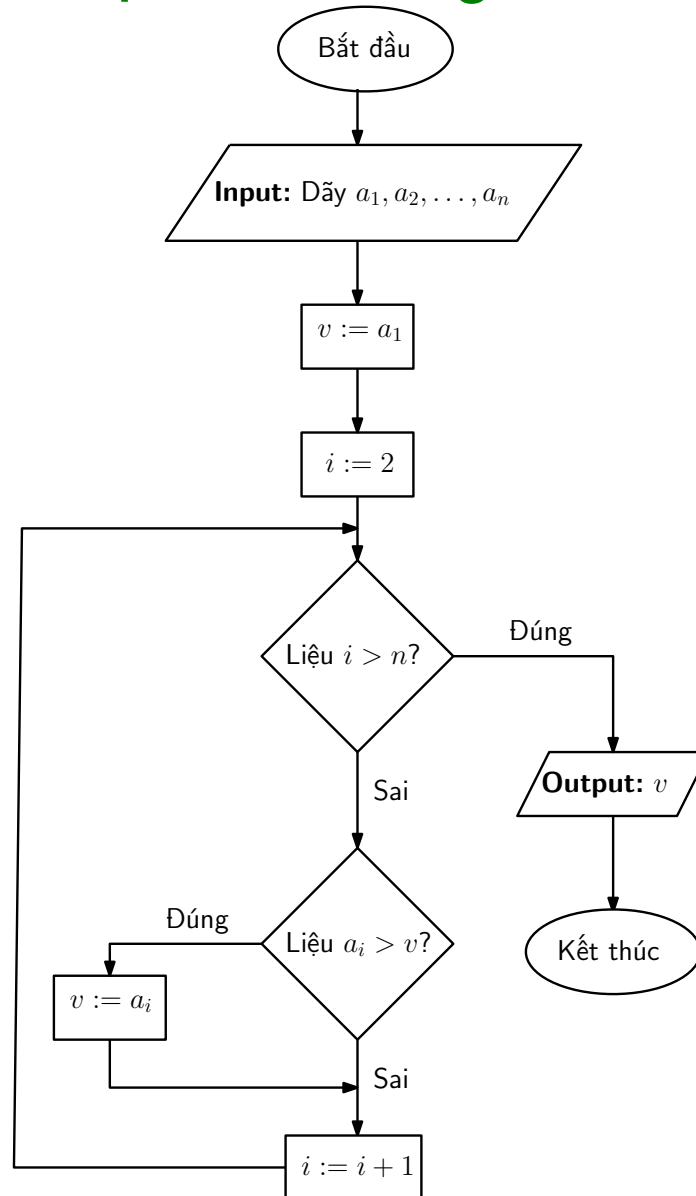
Định nghĩa và một số khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Ví dụ 3 (Mô tả thuật toán bằng sơ đồ khối)



Thuật toán

8

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bắt đầu vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng



Ví dụ 4 (Mô tả thuật toán bằng giả mã)

Thuật toán 1: Tìm giá trị của phần tử lớn nhất

Input: a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số nguyên

Output: Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

```
1  $v := a_1$  // phần tử lớn nhất đến hiện tại
2 for  $i := 2$  to  $n$  do // lần lượt xét  $a_2, \dots, a_n$ 
3     if  $a_i > v$  then //  $a_i >$  phần tử lớn nhất hiện tại?
4          $v := a_i$  // bây giờ  $v$  lớn nhất trong
             $a_1, \dots, a_i$ 
5 return  $v$ 
```

Thuật toán

9 Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Thuật toán

Một số quy tắc viết giả mã



Thuật toán I
Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

10

Một số quy tắc viết giả mã
Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm
Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu
Một số ký hiệu quan trọng

- **Giả mã (pseudocode)** là một dạng hỗn hợp giữa ngôn ngữ thông thường và ngôn ngữ lập trình
- Một **biến (variable)** được sử dụng để biểu diễn vị trí trong bộ nhớ máy tính để lưu trữ một giá trị. Khi ta nói đến một biến X nào đó, trên thực tế, chúng ta muốn sử dụng giá trị lưu tại một vị trí nào đó trong bộ nhớ ứng với X
- Một **phép gán (assignment)** thường có dạng $variable := expression$, trong đó biểu thức $expression$ ở vế phải sẽ được tính toán và kết quả tính toán được lưu trữ ở vị trí trong bộ nhớ tương ứng với biến $variable$
- Trong **cấu trúc điều kiện (conditional statement) if condition then S_1 else S_2** , biểu thức $condition$ được tính toán và sẽ cho ra giá trị cuối cùng là True (đúng) hoặc False (sai). Nếu True thì đoạn mã S_1 sẽ được thực hiện, còn ngược lại thì S_2 sẽ được thực hiện. Sau khi S_1 hoặc S_2 được thực hiện, các lệnh ngay tiếp sau cấu trúc điều kiện sẽ được thực hiện

Thuật toán

Một số quy tắc viết giả mã



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

11

Một số quy tắc viết giả mã

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

- Trong **vòng lặp for (for loop)** **for** $i = 1$ **to** n **do** S , giá trị ban đầu của biến i được gán bằng 1. Nếu giá trị của i nhỏ hơn hoặc bằng n , đoạn mã S sẽ được thực hiện. Đoạn mã S có thể sử dụng biến i hoặc không. Sau mỗi lần thực hiện S (**lần lặp (iteration)**), biến i được tăng thêm 1 và được kiểm tra xem giá trị sau khi tăng của i có phải vẫn nhỏ hơn hoặc bằng n hay không. Nếu kết quả là True thì vòng lặp được thực hiện thêm một lần nữa với giá trị mới của i . Ngược lại, các lệnh tiếp theo ngay sau vòng **for** được thực hiện
- Trong **vòng lặp while (while loop)** **while** $condition$ **do** S , đoạn mã S được thực hiện bất kể khi nào giá trị của biểu thức $condition$ còn đúng (True). Nếu $condition$ sai ngay khi bắt đầu vòng lặp **while** thì S không bao giờ được thực hiện
- Mọi thứ nằm sau các dấu $//$ hoặc nằm giữa $/*$ và $*/$ là các nhận xét hoặc chú thích mà chương trình sẽ bỏ qua

Thuật toán

Bất biến vòng lặp



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

12 Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

- Có rất nhiều phương pháp khác nhau để chứng minh tính đúng đắn của một thuật toán
- Một trong số đó là sử dụng *bất biến vòng lặp (loop invariant)*—một phương pháp được xây dựng dựa trên phương pháp quy nạp toán học
 - *Vòng lặp (loop): for, while, v.v...*
 - Một *bất biến vòng lặp* là *một phát biểu luôn đúng trước và sau mỗi lần lặp (iteration) của một vòng lặp (loop)*

Thuật toán

Bất biến vòng lặp



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

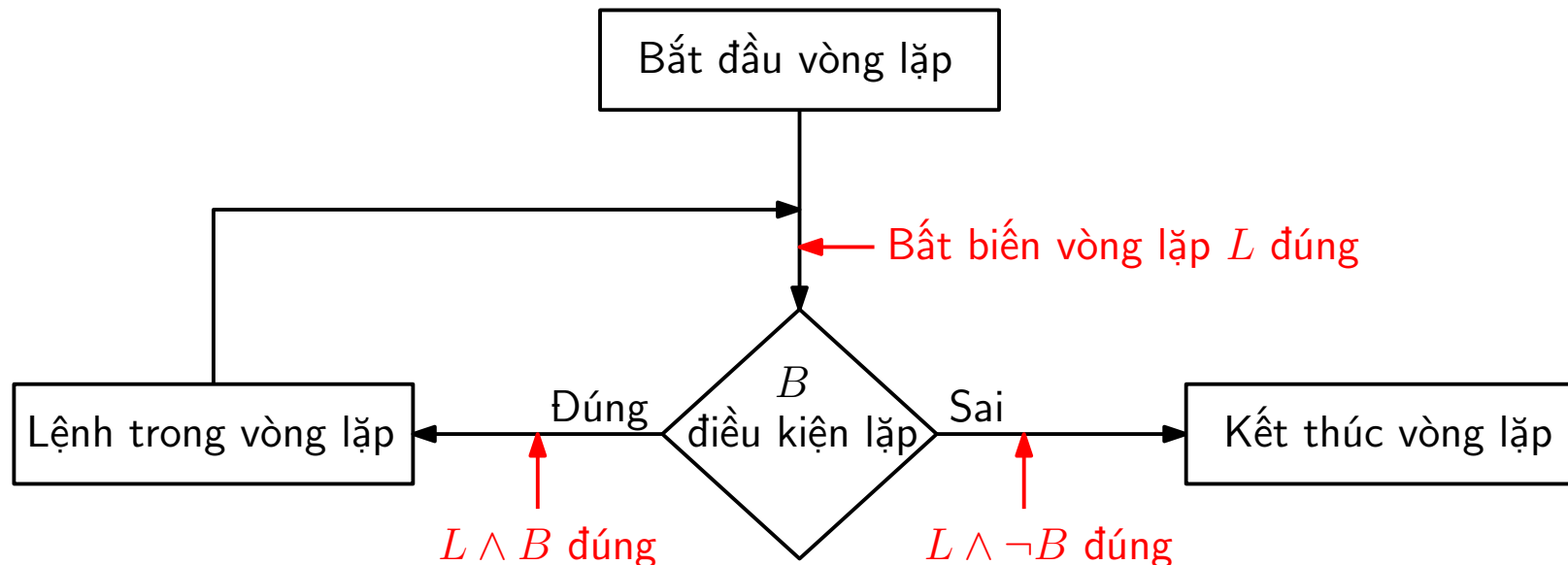
Một số ký hiệu quan trọng

Ta cần chỉ ra ba điều về một bất biến vòng lặp L

Khởi động (Initialization) L đúng trước lần lặp đầu tiên của vòng lặp

Duy trì (Maintenance) Nếu L đúng trước một lần lặp của vòng lặp thì nó cũng đúng trước lần lặp tiếp theo

Dừng (Termination) Khi vòng lặp dừng, bất biến vòng lặp cho ta một tính chất hữu ích để chứng minh thuật toán đúng



Hình: Bất biến vòng lặp

13

42

Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên a_1, \dots, a_n

$$L := \text{Ở trước lần lặp với biến } i, v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}$$

Gọi v_i là giá trị của v trước lần lặp với biến i

- **Khởi động** ($i = 2$): Ta cần chỉ ra rằng trước vòng **for**, $v_2 = \max\{a_1\} = a_1$, và điều này hiển nhiên đúng do Thuật toán 1 gán v bằng a_1 ở Dòng 1
- **Duy trì**: Giả sử L đúng ở trước lần lặp với $i = k$ nào đó, nghĩa là $v_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$. Ta chứng minh L đúng ở trước lần lặp với $i = k + 1$, nghĩa là $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$. Ta xét các trường hợp dựa trên điều kiện ở Dòng 3
 - Nếu $a_k > v = v_k$ sai, giá trị của v không thay đổi, và do đó $v_{k+1} = v_k$. Ta có $\max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\} = \max\{v_k, a_k\} = v_k$. Suy ra $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$
 - Nếu $a_k > v = v_k$ đúng, giá trị của v được gán bằng a_k , và do đó $v_{k+1} = a_k$. Ta cũng có $\max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\} = \max\{v_k, a_k\} = a_k$. Suy ra $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$
- **Dừng**: Sau khi kết thúc lần lặp $i = n$ (hoặc, trước khi bắt đầu lần lặp $i = n + 1$ mà sẽ không bao giờ được thực hiện), $v = \max\{a_1, \dots, a_n\}$ và do đó là giá trị lớn nhất của các phần tử trong dãy đầu vào

Thuật toán

Một số thuật toán tìm kiếm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Bài toán tìm kiếm

Cho một dãy n phần tử a_1, a_2, \dots, a_n và một phần tử x . Tìm x trong dãy đã cho hoặc kết luận rằng x không có trong dãy

- Tìm kiếm tuyến tính (Linear Search)
- Tìm kiếm nhị phân (Binary Search)

15

42



Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

16

■ Bài toán:

■ **Input:** a_1, \dots, a_n : dãy số nguyên, x : số nguyên

■ **Output:** Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

■ **Tìm kiếm tuyến tính:** Lần lượt xét các phần tử trong dãy cho đến khi tìm được x hoặc không còn phần tử nào để xét



Ví dụ 6 (Tìm kiếm tuyến tính)

- **Input:** Dãy $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 12$ và $x = 8$
- **Output:** Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
<div>2</div>	<div>5</div>	<div>6</div>	<div>8</div>	12
$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	
$\neq x$	$\neq x$	$\neq x$	$= x$	



Thuật toán 2: Tìm kiếm tuyến tính (Linear Search)

Input: a_1, \dots, a_n : dãy số nguyên, x : số nguyên

Output: Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

```
1   $i := 1$                                 // Bắt đầu từ đầu dãy
2  while  $i \leq n$  và  $x \neq a_i$  do // Chưa xong và chưa tìm thấy
3     $i := i + 1$     // Đi tới vị trí tiếp theo trong dãy
4  if  $i \leq n$  then
5     $location := i$                 // Tìm thấy  $x$  trong dãy
6  else
7     $location := 0$                 // Không tìm thấy  $x$  trong dãy
8  return  $location$ 
```

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 2 (vòng **while** ở Dòng 2–3) tìm kiếm tuyến tính số nguyên x trong dãy a_1, \dots, a_n

$L :=$ *Ở trước lần lặp với biến i , $x \notin \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$*

- **Khởi động** ($i = 1$): Do $i - 1 = 0$, tập $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ là tập rỗng, và do đó $x \notin \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$, nghĩa là L đúng
- **Duy trì**: Giả sử L đúng ở trước lần lặp với $i = k$ nào đó, nghĩa là $x \notin \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$. Ta chứng minh L đúng ở trước lần lặp với $i = k + 1$, nghĩa là $x \notin \{a_1, \dots, a_k\}$. Thật vậy, để thực hiện lần lặp $i = k$, điều kiện ở vòng **while** cần được thỏa mãn, nghĩa là $k \leq n$ và $x \neq a_k$. Kết hợp với giả thiết, ta có điều cần chứng minh
- **Dừng**: Vòng lặp **while** kết thúc khi $i = n + 1$ hoặc $x = a_i$ với $1 \leq i \leq n$. Với trường hợp đầu tiên, bất biến vòng lặp L cho ta $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ và do đó kết luận không tìm được x . Với trường hợp thứ hai, x hiển nhiên thuộc dãy đã cho



■ Bài toán:

- **Input:** a_1, \dots, a_n : dãy số nguyên *thực sự tăng*, x : số nguyên
- **Output:** Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

■ Tìm kiếm nhị phân: (Một ví dụ về kỹ thuật *chia để trị* (*divide and conquer*) trong thiết kế thuật toán)

- (1) Tính $m = \lfloor (1 + n)/2 \rfloor$. Phần tử ở giữa của dãy là a_m
- (2) Chia dãy a_1, \dots, a_n thành hai dãy con (a) a_1, \dots, a_m và (b) a_{m+1}, \dots, a_n . Nếu $x > a_m$ thì ta chỉ tìm x trong dãy con (b), còn ngược lại thì ta chỉ tìm x trong dãy con (a)
- (3) Làm tương tự cho đến khi không gian tìm kiếm chỉ còn một phần tử a_i . Nếu $x = a_i$ thì trả lại vị trí i của x , còn ngược lại thì trả lại 0

Ví dụ 7 (Tìm kiếm nhị phân)

- **Input:** Dãy $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 12$ và $x = 8$
- **Output:** Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	5	6	8	12
i		m		j

$< x$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	5	6	8	12
		$i = m$	j	

$= x$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	5	6	8	12
		$i = j$		

$= x$

Thuật toán

Tìm kiếm nhị phân



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Thuật toán 3: Tìm kiếm nhị phân (Binary Search)

Input: a_1, \dots, a_n : dãy số nguyên *thực sự tăng*, x : số nguyên

Output: Chỉ số i thỏa mãn $x = a_i$ hoặc 0 nếu x không có trong dãy

```
1   $i := 1$                                 // Chỉ số bắt đầu khoảng tìm kiếm
2   $j := n$                                 // Chỉ số kết thúc khoảng tìm kiếm
3  while  $i < j$  do                        // Khi khoảng tìm kiếm có  $> 1$  phần tử
4       $m := \lfloor (i + j) / 2 \rfloor$            // Chỉ số của phần tử ở giữa
5      if  $x > a_m$  then
6           $i := m + 1$ 
7      else
8           $j := m$ 
9  if  $x = a_i$  then
10      $location := i$ 
11 else
12      $location := 0$ 
13 return  $location$ 
```

22

42

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 3 (vòng **while** ở Dòng 3–8) tìm kiếm nhị phân số nguyên x trong dãy thực sự tăng a_1, \dots, a_n

$L :=$ Ở trước mỗi lần lặp với các biến i, j , nếu $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$ thì
 $x \in \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_j\}$

- **Khởi động** ($i = 1, j = n$): L hiển nhiên đúng
- **Duy trì**: Giả sử ở trước lần lặp với các biến k, ℓ , nếu $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$ thì $x \in \{a_k, a_{k+1}, \dots, a_\ell\}$. Ta chứng minh rằng ở trước lần lặp kế tiếp với các biến (a) $k, \lfloor (k + \ell)/2 \rfloor$ hoặc (b) $\lfloor (k + \ell)/2 \rfloor + 1, \ell$, nếu $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$ thì tương ứng (a') $x \in \{a_k, \dots, a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor}\}$ hoặc (b') $x \in \{a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor + 1}, \dots, a_\ell\}$. Với (a), điều kiện ở Dòng 7 cần được thỏa mãn, nghĩa là $x \leq a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor}$. Do đó, nếu $x \in \{a_k, a_{k+1}, \dots, a_\ell\}$ thì (a') đúng. Với (b), điều kiện ở Dòng 5 cần được thỏa mãn, nghĩa là $x > a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor}$. Do đó, nếu $x \in \{a_k, a_{k+1}, \dots, a_\ell\}$ thì (b') đúng
- **Dừng**: Vòng lặp **while** dừng khi $i = j$, và từ L , ta có nếu $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$ thì $x \in \{a_i\}$. Do đó Thuật toán 3 trả lại vị trí chính xác của x hoặc kết luận không tìm được x (Dòng 9–13)

Thuật toán

Một số thuật toán sắp xếp



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

24

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Bài toán sắp xếp

Cho một dãy n phần tử và một cách so sánh hai phần tử bất kỳ trong dãy. Hãy sắp xếp dãy theo thứ tự tăng dần

- Sắp xếp nổi bọt (Bubble Sort)
- Sắp xếp chèn (Insertion Sort)



Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

25

42

■ Bài toán:

■ **Input:** a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số thực ($n \geq 2$)

■ **Output:** Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

■ Sắp xếp nổi bọt:

- (1) So sánh các phần tử liên tiếp, bắt đầu với cặp (a_1, a_2)
- (2) Nếu $a_1 > a_2$, hoán đổi giá trị của chúng
- (3) Lặp lại (1) và (2) với các cặp $(a_2, a_3), (a_3, a_4), \dots, (a_{n-1}, a_n)$. Lúc này, a_n là phần tử lớn nhất trong dãy
- (4) Lặp lại (1) – (3) với dãy a_1, \dots, a_{n-1} , và sau đó với dãy a_1, \dots, a_{n-2} , dãy $a_1, \dots, a_{n-3}, \dots$, cho đến dãy a_1, a_2



Ví dụ 8

- **Input:** Dãy $a_1 = 34, a_2 = 13, a_3 = 21, a_4 = 3, a_5 = 89$
- **Output:** Dãy sắp xếp theo thứ tự tăng dần

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	34	13	21	3	89
$i = 1$	13	21	3	34	89
$i = 2$	13	3	21	34	
$i = 3$	3	13	21		
$i = 4$	3	13			
	3	13	21	34	89

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

26

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

27 Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Thuật toán 4: Sắp xếp nổi bọt (Bubble Sort)

Input: a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số thực ($n \geq 2$)

Output: Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

```
1 for  $i := 1$  to  $n - 1$  do // Lặp lại  $n - 1$  lần
2   for  $j := 1$  to  $n - i$  do
3     if  $a_j > a_{j+1}$  then
4       Hoán đổi giá trị của  $a_j$  và  $a_{j+1}$ 
5   //  $a_{n-i+1}, \dots, a_n$  đã được sắp xếp
6 //  $a_1, \dots, a_n$  đã được sắp xếp
```

Thuật toán

Sắp xếp nổi bọt



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Thuật toán 4 có hai vòng lặp **for**: vòng lặp trong ở Dòng 2–4 và vòng lặp ngoài (chứa vòng lặp trong) ở Dòng 1–4

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp ngoài là

Ở trước lần lặp i , dãy a_{n-i+1}, \dots, a_n là dãy tăng chứa các phần tử lớn hơn hoặc bằng mọi phần tử trong a_1, \dots, a_{n-i}

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp trong là

Ở trước lần lặp j , $a_j = \max\{a_1, \dots, a_j\}$

Sơ đồ chứng minh:

- Chứng minh bước **Khởi động** cho bất biến vòng lặp ngoài
- Ở bước **Duy trì** cho vòng lặp ngoài
 - Chứng minh bất biến vòng lặp trong (**Khởi động**, **Duy trì**, **Dừng**)
 - Sử dụng bất biến vòng lặp trong để chứng minh cho vòng lặp ngoài
- Chứng minh bước **Dừng** cho bất biến vòng lặp ngoài

28

42

■ Bài toán:

- **Input:** a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số thực ($n \geq 2$)
- **Output:** Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

■ Sắp xếp chèn:

- (1) Xét a_2 . Tìm vị trí trong dãy 1 phần tử a_1 để chèn a_2 bằng cách duyệt toàn bộ các phần tử trong dãy từ phải sang trái và đẩy mọi phần tử lớn hơn a_2 sang phải một bước. Chèn a_2 vào ngay sau phần tử đầu tiên nhỏ hơn hoặc bằng a_2 khi duyệt dãy ở trên. Đến đây dãy a_1, a_2 đã được sắp xếp theo đúng thứ tự
- (2) Xét a_3 . Tìm vị trí trong dãy 2 phần tử a_1, a_2 để chèn a_3 bằng cách duyệt toàn bộ các phần tử trong dãy từ phải sang trái và đẩy mọi phần tử lớn hơn a_3 sang phải một bước. Chèn a_3 vào ngay sau phần tử đầu tiên nhỏ hơn hoặc bằng a_3 khi duyệt dãy ở trên. Đến đây dãy a_1, a_2, a_3 đã được sắp xếp theo đúng thứ tự
- (3) Tiếp tục với a_4, a_5, \dots, a_n . Cuối cùng ta thu được dãy a_1, \dots, a_n đã được sắp xếp theo đúng thứ tự

Thuật toán

Sắp xếp chèn



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

30

42

- **Input:** Dãy $a_1 = 34, a_2 = 13, a_3 = 21, a_4 = 3, a_5 = 89$
- **Output:** Dãy sắp xếp theo thứ tự tăng dần

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	34	13	21	3	89
$i = 2$	13	34	21	3	89
$i = 3$	13	21	34	3	89
$i = 4$	3	13	21	34	89
$i = 5$	3	13	21	34	89

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

31 Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Thuật toán 5: Sắp xếp chèn (Insertion Sort)

Input: a_1, a_2, \dots, a_n : dãy số thực ($n \geq 2$)

Output: Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

```
1 for  $i = 2$  to  $n$  do
2      $m := a_i$  //  $m$  sắp được chèn vào dãy  $a_1, \dots, a_{i-1}$ 
3      $j := i - 1$ 
4     while  $j \geq 1$  và  $m < a_j$  do // Nếu  $m < a_j$ , đẩy  $a_j$ 
        sang phải để có chỗ chèn  $m$ 
5          $a_{j+1} := a_j$ 
6          $j := j - 1$ 
7      $a_{j+1} := m$  // Chèn  $m$ 
8     // Dãy  $a_1, \dots, a_i$  đã được sắp thứ tự
```



Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Thuật toán 5 có hai vòng lặp: vòng lặp trong **while** ở Dòng 4–6 và vòng lặp ngoài **for** (chứa vòng lặp trong) ở Dòng 1–7

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp ngoài là

Ở trước lần lặp i , dãy a_1, \dots, a_{i-1} là dãy tăng

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp trong là

Ở trước lần lặp j , $m \leq \min\{a_{j+1}, \dots, a_i\}$

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

33

- Việc *phân tích (analysis) một thuật toán* yêu cầu cung cấp một xấp xỉ về *thời gian (time)* và *bộ nhớ (space)* cần thiết để thực hiện một thuật toán
- *Độ phức tạp (complexity)* của một thuật toán là lượng thời gian và bộ nhớ cần để thực hiện một thuật toán
 - Thường được thể hiện thông qua các hàm của *kích thước của đầu vào (input size)*
- Để đánh giá và so sánh độ phức tạp của các thuật toán khác nhau, ta giới thiệu *ký hiệu O-lớn (big-O notation)* và mô tả cách xấp xỉ độ tăng của các hàm thông qua ký hiệu này và từ đó xấp xỉ độ phức tạp của các thuật toán
- Với các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hoặc $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, trong nhiều trường hợp ta cần tìm hiểu xem chúng tăng nhanh đến mức nào
 - So sánh các hàm: Nếu f *tăng nhanh hơn* g thì $f(x) \geq g(x)$ với “giá trị x đủ lớn”
 - So sánh tính hiệu quả của các thuật toán khác nhau cùng giải quyết một bài toán

42

Độ tăng của các hàm

Ký hiệu O -lớn



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Ký hiệu O -lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ta nói rằng f là $O(g)$ (đọc là “ f là O -lớn của g ” hoặc “ f thuộc lớp $O(g)$ ”) nếu tồn tại các hằng số C và k sao cho $|f(x)| \leq C|g(x)|$ với mọi $x > k$

- $\exists C, k \forall x > k (|f(x)| \leq C|g(x)|)$
- f là $O(g)$ nếu từ sau điểm k nào đó, giá trị của hàm f không vượt quá giá trị của một hằng số nhân với giá trị của hàm g . Ta cũng nói “ f bị chặn trên bởi g ”
- Các hằng số C và k được gọi là các **bằng chứng (witness)** cho mối liên hệ giữa f và g . Để xác định liệu f có là $O(g)$ hay không, chỉ cần một cặp bằng chứng là đủ

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

34

Độ tăng của các hàm

Ký hiệu O -lớn



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

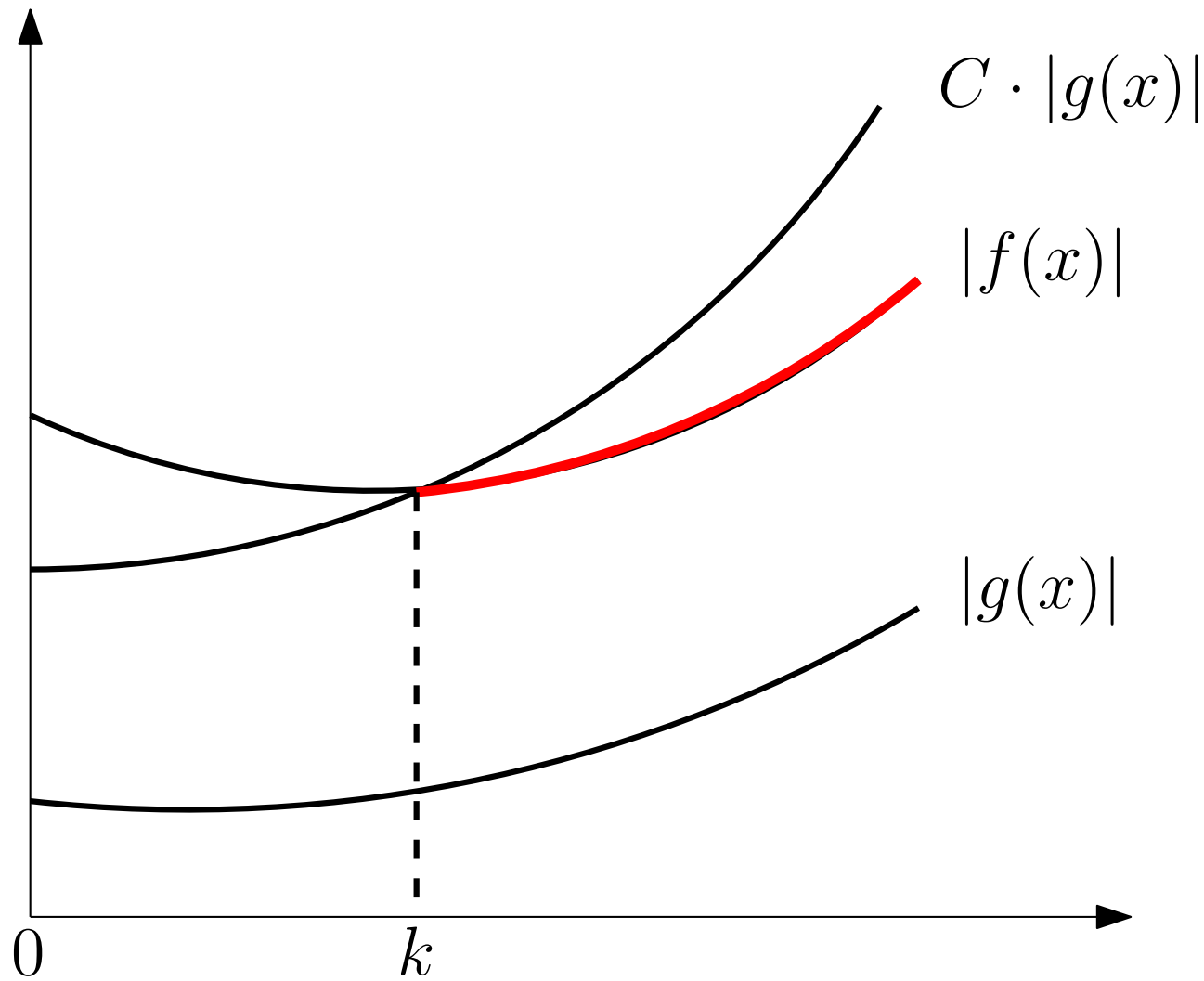
Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng



35

42

Độ tăng của các hàm

Ký hiệu O -lớn



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Ví dụ 9

Ta chứng minh hàm f cho bởi $f(x) = x^2 + 2x + 1$ là $O(g)$ với $g(x) = x^2$ (Ta cũng viết $x^2 + 2x + 1$ là $O(x^2)$)

Cách 1:

- Chú ý rằng khi $x > 1$, ta có $x < x^2$ và $1 < x^2$
- Do đó với mọi $x > 1$, ta có

$$|f(x)| = |x^2 + 2x + 1| \leq |x^2 + 2x^2 + x^2| = 4|x^2|$$

- Ta chọn $C = 4$ và $k = 1$

Cách 2:

- Chú ý rằng khi $x > 2$, ta có $2x \leq x^2$ và $1 \leq x^2$
- Do đó với mọi $x > 1$, ta có

$$f(x) = |x^2 + 2x + 1| \leq |x^2 + x^2 + x^2| = 3|x^2|$$

- Ta chọn $C = 3$ và $k = 2$

36

42

Độ tăng của các hàm

Ký hiệu O -lớn



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

37

Bài tập 1

Chứng minh

(a) $7x$ là $O(x^3)$

(b) x^3 không là $O(x^2)$

(c) $1 + 2 + \dots + n$ là $O(n^2)$

(d) $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ là $O(n^n)$

(e) $\log(n!)$ là $O(n \log n)$ (Nếu không đề cập gì thêm thì $\log n = \log_2 n$)

(f) n^2 là $O(2^n)$

(g) $\log n$ là $O(n)$

(h) Với các hằng số $b > 1$ và $k > 0$, $\log_b(n^k)$ là $O(\log n)$

Bài tập 2

Chứng minh rằng nếu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với a_0, a_1, \dots, a_n là các số thực (nghĩa là, $f(x)$ là một đa thức bậc n) thì f là $O(x^n)$

42

Độ tăng của các hàm

Ký hiệu O -lớn



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

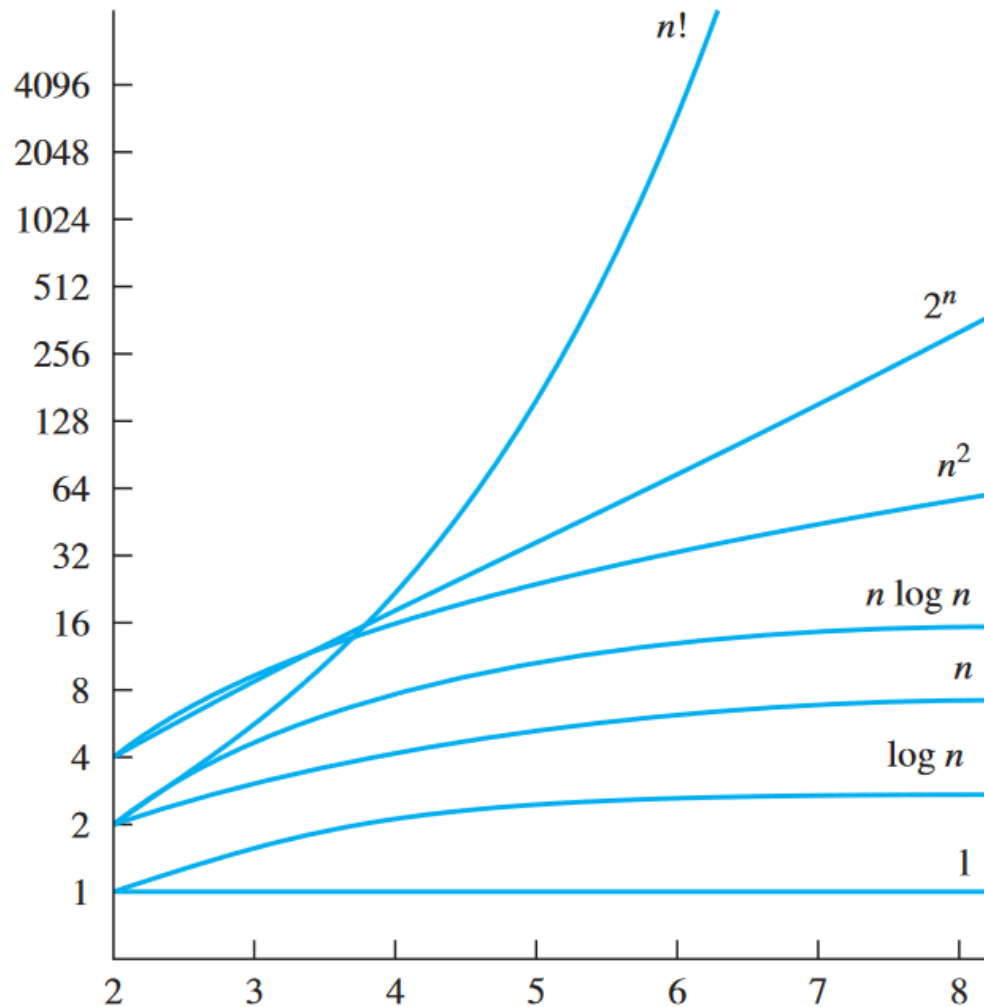
Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

38

Một số ký hiệu quan trọng



Hình: Độ tăng của một số hàm thường dùng khi đánh giá với ký hiệu O -lớn [Rosen 2012]

Độ tăng của các hàm

Ký hiệu O -lớn



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Một số xấp xỉ hữu ích

- Nếu $d > c > 1$, thì n^c là $O(n^d)$, nhưng n^d không là $O(n^c)$
- Nếu $b > 1$ và c, d là các số dương, thì $(\log_b n)^c$ là $O(n^d)$ nhưng n^d không là $O((\log_b n)^c)$
- Nếu $b > 1$ và d là số dương, thì n^d là $O(b^n)$ nhưng b^n không là $O(n^d)$
- Nếu $c > b > 1$, thì b^n là $O(c^n)$ nhưng c^n không là $O(b^n)$
- Nếu $f_1(x)$ là $O(g_1(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$ thì $(f_1 + f_2)(x)$ là $O(\max(|g_1(x)|, |g_2(x)|))$
- Nếu f_1 là $O(g_1)$ và f_2 là $O(g_2)$ thì $f_1 \circ f_2$ là $O(g_1 \circ g_2)$

39

42

Độ tăng của các hàm

Ký hiệu Ω -lớn



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Ký hiệu Ω -lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ta nói rằng f là $\Omega(g)$ nếu tồn tại các hằng số $C > 0$ và k sao cho $|f(x)| \geq C|g(x)|$ với mọi $x > k$

Bài tập 3

Chứng minh rằng f là $\Omega(g)$ khi và chỉ khi g là $O(f)$

40

42

Độ tăng của các hàm

Ký hiệu Θ -lớn



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Ký hiệu Θ -lớn

Cho f và g là các hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ta nói rằng f là $\Theta(g)$ nếu f là $O(g)$ và f là $\Omega(g)$

Bài tập 4

Chứng minh rằng $1 + 2 + \dots + n$ là $\Theta(n^2)$

41

42

Độ tăng của các hàm

Tổng kết



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thuật toán

Định nghĩa và một số khái niệm

Một số quy tắc viết mã giả

Bất biến vòng lặp

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Một số thuật toán sắp xếp

Độ tăng của các hàm

Giới thiệu

Một số ký hiệu quan trọng

Với các hàm f và g từ \mathbb{R} đến \mathbb{R}

■ f là $O(g)$

tương tự “ \leq ”

$$\exists C, k \forall x > k \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$$

■ f là $\Omega(g)$

tương tự “ \geq ”

$$\exists C > 0, k \forall x > k \quad |f(x)| \geq C|g(x)|$$

■ f là $\Theta(g)$

tương tự “ $=$ ”

$$\exists C_1, C_2, k \forall x > k \quad C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$$