

Bài tập tuần 1

11/09/2025

GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Chú ý

- (1) Danh sách bài tập mỗi tuần có ở <https://hoanganhduc.github.io/teaching/VNU-HUS/2025/winter/MAT3302/>.
- (2) Tham gia Google Classroom (<https://classroom.google.com/c/ODAwMzIxNzA3OTEy?cjc=j1jzv5ov>) để biết cách tính điểm thường xuyên qua việc lên bảng và điểm danh.
- (3) Các bài tập đánh dấu sao (★) có thể cần thời gian suy nghĩ lâu hơn.

Bài tập 1. Cho các mệnh đề p , q và r với:

p : Bạn được điểm A trong kỳ thi cuối kỳ.

q : Bạn làm mọi bài tập trong cuốn sách này.

r : Bạn được điểm A trong lớp này.

Viết các mệnh đề sau sử dụng p , q và r và các toán tử logic (bao gồm cả toán tử phủ định).

- (a) Bạn được điểm A trong lớp này, nhưng bạn không làm mọi bài tập trong cuốn sách này.
- (b) Bạn được điểm A trong kỳ thi cuối kỳ, bạn làm mọi bài tập trong cuốn sách này, và bạn được điểm A trong lớp này.
- (c) Để được điểm A trong lớp này, cần thiết là bạn phải được điểm A trong kỳ thi cuối kỳ.
- (d) Bạn được điểm A trong kỳ thi cuối kỳ, nhưng bạn không làm mọi bài tập trong cuốn sách này; tuy nhiên, bạn vẫn được điểm A trong lớp này.
- (e) Việc được điểm A trong kỳ thi cuối kỳ và làm mọi bài tập trong cuốn sách này là điều đủ để được điểm A trong lớp này.
- (f) Bạn sẽ được điểm A trong lớp này khi và chỉ khi bạn hoặc làm mọi bài tập trong cuốn sách này hoặc được điểm A trong kỳ thi cuối kỳ.

Bài tập 2. Một *bảng chân trị* (hay *bảng giá trị chân lý* (*truth table*)) của một mệnh đề phức hợp là một bảng liệt kê tất cả các giá trị chân lý có thể có của các biến mệnh đề trong mệnh đề phức hợp, cùng với giá trị chân lý tương ứng của mệnh đề phức hợp.

Dựng bảng chân trị cho mỗi mệnh đề phức hợp sau.

- | | |
|---|--|
| (a) $p \wedge \neg p$ | (g) $p \rightarrow \neg p$ |
| (b) $p \vee \neg p$ | (h) $p \leftrightarrow \neg p$ |
| (c) $(p \vee \neg q) \rightarrow q$ | (i) $p \oplus (p \vee q)$ |
| (d) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ | (j) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ |
| (e) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ | (k) $(q \rightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ |
| (f) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ | (l) $(p \leftrightarrow q) \oplus (p \leftrightarrow \neg q)$ |

Bài tập 3. Dựng bảng chân trị cho mỗi mệnh đề phức hợp sau.

- | | |
|---|---|
| (a) $p \oplus p$ | (g) $p \rightarrow \neg q$ |
| (b) $p \oplus \neg p$ | (h) $\neg p \leftrightarrow q$ |
| (c) $p \oplus \neg q$ | (i) $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow q)$ |
| (d) $\neg p \oplus \neg q$ | (j) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$ |
| (e) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$ | (k) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$ |
| (f) $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$ | (l) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ |

Bài tập 4 (*). Giải thích các phát biểu sau mà *không* sử dụng bảng chân trị

- (a) $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ đúng khi p, q , và r có cùng giá trị chân trị và sai trong các trường hợp khác.
- (b) $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ đúng khi ít nhất một trong p, q , và r đúng và ít nhất một sai, nhưng sai khi cả ba biến có cùng giá trị chân trị.

Bài tập 5. Giá trị của x sau mỗi câu lệnh sau trong một chương trình máy tính là bao nhiêu, nếu $x = 1$ trước khi thực hiện câu lệnh?

- (a) **if** $x + 2 = 3$ **then** $x := x + 1$.
- (b) **if** $(x + 1 = 3)$ **OR** $(2x + 2 = 3)$ **then** $x := x + 1$.

- (c) **if** $(2x + 3 = 5)$ **AND** $(3x + 4 = 7)$ **then** $x := x + 1$.
- (d) **if** $(x + 1 = 2)$ **XOR** $(x + 2 = 3)$ **then** $x := x + 1$.
- (e) **if** $x < 2$ **then** $x := x + 1$.

Bài tập 6. Dịch các phát biểu sau thành các mệnh đề logic sử dụng các mệnh đề đã cho.

- (a) Bạn không thể chỉnh sửa một mục Wikipedia được bảo vệ trừ khi bạn là quản trị viên. Biểu diễn bằng e : “Bạn có thể chỉnh sửa một mục Wikipedia được bảo vệ” và a : “Bạn là quản trị viên.”
- (b) Bạn chỉ có thể xem bộ phim nếu bạn trên 18 tuổi hoặc bạn có sự cho phép của phụ huynh. Biểu diễn bằng m : “Bạn có thể xem bộ phim,” e : “Bạn trên 18 tuổi,” và p : “Bạn có sự cho phép của phụ huynh.”
- (c) Bạn chỉ có thể tốt nghiệp nếu bạn đã hoàn thành các yêu cầu của chuyên ngành, bạn không nợ tiền trường, và bạn không có sách nào đã quá hạn trả thư viện. Biểu diễn bằng g : “Bạn có thể tốt nghiệp,” m : “Bạn nợ tiền trường,” r : “Bạn đã hoàn thành các yêu cầu của chuyên ngành,” và b : “Bạn có sách đã quá hạn trả thư viện.”
- (d) Để sử dụng mạng không dây trong sân bay, bạn phải trả phí hàng ngày trừ khi bạn là người đăng ký dịch vụ. Biểu diễn bằng w : “Bạn có thể sử dụng mạng không dây trong sân bay,” d : “Bạn trả phí hàng ngày,” và s : “Bạn là người đăng ký dịch vụ.”
- (e) Bạn đủ điều kiện để trở thành Tổng thống Hoa Kỳ chỉ khi bạn ít nhất 35 tuổi, sinh ra ở Hoa Kỳ hoặc tại thời điểm sinh ra cả cha và mẹ của bạn đều là công dân, và bạn đã sống ít nhất 14 năm ở Hoa Kỳ. Biểu diễn bằng e : “Bạn đủ điều kiện để trở thành Tổng thống Hoa Kỳ,” a : “Bạn ít nhất 35 tuổi,” b : “Bạn sinh ra ở Hoa Kỳ,” p : “Tại thời điểm sinh ra, cả cha và mẹ của bạn đều là công dân,” và r : “Bạn đã sống ít nhất 14 năm ở Hoa Kỳ.”
- (f) Bạn chỉ có thể nâng cấp hệ điều hành của mình nếu bạn có bộ xử lý 32-bit chạy ở tốc độ 1 GHz hoặc nhanh hơn, ít nhất 1 GB RAM, và 16 GB dung lượng đĩa cứng trống, hoặc bộ xử lý 64-bit chạy ở tốc độ 2 GHz hoặc nhanh hơn, ít nhất 2 GB RAM, và ít nhất 32 GB dung lượng đĩa cứng trống. Biểu diễn bằng u : “Bạn có thể nâng cấp hệ điều hành của mình,” b_{32} : “Bạn có bộ xử lý 32-bit,” b_{64} : “Bạn có bộ xử lý 64-bit,” g_1 : “Bộ xử lý của bạn chạy ở tốc độ 1 GHz hoặc nhanh hơn,” g_2 : “Bộ xử lý của bạn chạy ở tốc độ 2 GHz hoặc nhanh hơn,” r_1 : “Bộ xử lý của bạn có ít nhất 1 GB RAM,” r_2 : “Bộ xử lý của bạn có ít nhất 2 GB RAM,” h_{16} : “Bạn có ít nhất 16 GB dung lượng đĩa cứng trống,” và h_{32} : “Bạn có ít nhất 32 GB dung lượng đĩa cứng trống.”

Bài tập 7. Biểu diễn các đặc tả hệ thống sau bằng các mệnh đề

p : Người dùng nhập mật khẩu hợp lệ.

q : Quyền truy cập được cấp.

r : Người dùng đã thanh toán phí đăng ký.

cùng các toán tử logic (bao gồm cả toán tử phủ định).

- (a) “Người dùng đã thanh toán phí đăng ký, nhưng không nhập mật khẩu hợp lệ.”
- (b) “Quyền truy cập được cấp bất cứ khi nào người dùng đã thanh toán phí đăng ký và nhập mật khẩu hợp lệ.”
- (c) “Quyền truy cập bị từ chối nếu người dùng chưa thanh toán phí đăng ký.”
- (d) “Nếu người dùng không nhập mật khẩu hợp lệ nhưng đã thanh toán phí đăng ký, thì quyền truy cập được cấp.”

Bài tập 8. Các đặc tả hệ thống sau có nhất quán không?

- (a) “Hệ thống ở trạng thái đa người dùng (multiuser state) khi và chỉ khi nó hoạt động bình thường. Nếu hệ thống hoạt động bình thường, thì nhân (kernel) hệ điều hành đang hoạt động. Nhân hệ điều hành không hoạt động hoặc hệ thống ở chế độ ngắt (interrupt mode). Nếu hệ thống không ở trạng thái đa người dùng, thì nó ở chế độ ngắt. Hệ thống không ở chế độ ngắt.”
- (b) “Bất cứ khi nào phần mềm hệ thống (system software) đang được nâng cấp, người dùng không thể truy cập hệ thống tệp (file system). Nếu người dùng có thể truy cập hệ thống tệp, thì họ có thể lưu tệp mới. Nếu người dùng không thể lưu tệp mới, thì phần mềm hệ thống không được nâng cấp.”
- (c) “Bộ định tuyến (router) có thể gửi gói tin đến hệ thống biên (edge system) chỉ khi nó hỗ trợ không gian địa chỉ mới (new address space). Để bộ định tuyến hỗ trợ không gian địa chỉ mới, cần thiết phải cài đặt phiên bản phần mềm mới nhất. Bộ định tuyến có thể gửi gói tin đến hệ thống biên nếu phiên bản phần mềm mới nhất được cài đặt. Bộ định tuyến không hỗ trợ không gian địa chỉ mới.”
- (d) “Nếu hệ thống tệp không bị khóa, thì các tin nhắn mới sẽ được xếp hàng (queued). Nếu hệ thống tệp không bị khóa, thì hệ thống đang hoạt động bình thường, và ngược lại. Nếu các tin nhắn mới không được xếp hàng, thì chúng sẽ được gửi đến bộ đệm tin nhắn (message buffer). Nếu hệ thống tệp không bị khóa, thì các tin nhắn mới sẽ được gửi đến bộ đệm tin nhắn. Các tin nhắn mới sẽ không được gửi đến bộ đệm tin nhắn.”

Bài tập 9. Google là một công cụ tìm kiếm phổ biến trên Internet. Khi bạn nhập một từ khóa, Google sẽ trả về các trang web có chứa từ khóa đó. Bạn cũng có thể sử dụng các toán

tử logic như AND, OR, và NOT để kết hợp các từ khóa nhằm thu hẹp hoặc mở rộng phạm vi tìm kiếm.

Hãy mô tả ví dụ về cách bạn tìm kiếm với Google bằng từ khóa và các toán tử logic khi bạn muốn

- (a) tìm các trang web liên quan đến các nhà hàng Ethiopia ở New York hoặc New Jersey;
- (b) tìm các trang web liên quan đến giày hoặc ủng cho nam không được thiết kế để làm việc.

Bài tập 10 (★). Mỗi cư dân của một ngôi làng hẻo lánh luôn nói thật hoặc luôn nói dối. Một người dân làng chỉ trả lời “Có” hoặc “Không” cho một câu hỏi mà một du khách hỏi. Giả sử bạn là một du khách đến thăm khu vực này và đến một ngã ba đường. Một nhánh dẫn đến di tích mà bạn muốn tham quan; nhánh còn lại dẫn sâu vào rừng rậm. Một người dân làng đang đứng ở ngã ba đường. Bạn có thể hỏi người dân làng *một* câu hỏi nào để xác định nhánh nào cần đi?

Bài tập 11 (★). Khi ba giáo sư ngồi trong một nhà hàng, người phục vụ hỏi họ: “Mọi người có muốn uống cà phê không?” Giáo sư thứ nhất nói: “Tôi không biết.” Giáo sư thứ hai sau đó nói: “Tôi không biết.” Cuối cùng, giáo sư thứ ba nói: “Không, không phải ai cũng muốn uống cà phê.” Người phục vụ quay lại và mang cà phê cho những giáo sư muốn uống. Làm thế nào mà người phục vụ biết được ai muốn uống cà phê?

Bài tập 12 (★). Cảnh sát có ba nghi phạm trong vụ án mạng của ông Cooper: ông Smith, ông Jones, và ông Williams. Smith, Jones, và Williams đều tuyên bố rằng họ không giết Cooper. Smith cũng nói rằng Cooper là bạn của Jones và rằng Williams không thích ông ấy. Jones cũng nói rằng anh ta không biết Cooper và rằng anh ta đã ra khỏi thị trấn vào ngày Cooper bị giết. Williams cũng nói rằng anh ta đã nhìn thấy cả Smith và Jones với Cooper vào ngày xảy ra vụ giết người và rằng Smith hoặc Jones phải là người đã giết ông ấy.

Bạn có thể xác định ai là kẻ giết người nếu một trong ba người đàn ông là có tội, hai người vô tội đang nói sự thật, nhưng các tuyên bố của người có tội có thể đúng hoặc sai? (Gợi ý: dịch các phát biểu thành các biểu thức logic và suy luận từ các biểu thức này bằng cách sử dụng bảng chân trị.)

Bài tập 13. Sử dụng bảng chân trị để kiểm chứng các tương đương logic sau:

(a) $p \wedge \mathbf{T} \equiv p$

(e) $p \vee p \equiv p$

(b) $p \vee \mathbf{F} \equiv p$

(f) $p \wedge p \equiv p$

(c) $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$

(g) $\neg(\neg p) \equiv p$

(d) $p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$

(h) $p \vee q \equiv q \vee p$

$$(i) p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$(l) p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$(j) (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(k) (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(m) \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Ở đây, **T** và **F** lần lượt là các mệnh đề luôn đúng (hằng đúng, tautology) và luôn sai (mâu thuẫn, contradiction).

Bài tập 14. Chứng minh rằng mỗi mệnh đề điều kiện sau là một hằng đúng (tautology) bằng cách sử dụng bảng chân trị.

$$(a) (p \wedge q) \rightarrow p$$

$$(f) \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$$

$$(b) p \rightarrow (p \vee q)$$

$$(g) [\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

$$(c) \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$(h) [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$(d) (p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$(i) [p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

$$(e) \neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$$

$$(j) [(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$$

Bài tập 15. Xác định xem các mệnh đề sau có phải là hằng đúng (tautology) hay không:

$$(a) (\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q$$

$$(b) (\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$$

Bài tập 16. Hai mệnh đề phức hợp p và q được gọi là *tương đương logic* (*logical equivalence*), ký hiệu là $p \equiv q$, khi và chỉ khi mệnh đề $p \leftrightarrow q$ là một hằng đúng (tautology). Nói cách khác, hai mệnh đề phức hợp p và q là tương đương logic nếu chúng có cùng giá trị chân lý trong mọi trường hợp.

Chứng minh rằng các cặp mệnh đề sau là tương đương logic.

$$(a) p \leftrightarrow q \text{ và } (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

$$(h) (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \text{ và } (p \vee q) \rightarrow r.$$

$$(b) \neg(p \leftrightarrow q) \text{ và } p \leftrightarrow \neg q.$$

$$(i) (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \text{ và } p \rightarrow (q \vee r).$$

$$(c) p \rightarrow q \text{ và } \neg q \rightarrow \neg p.$$

$$(j) (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \text{ và } (p \wedge q) \rightarrow r.$$

$$(d) \neg p \leftrightarrow q \text{ và } p \leftrightarrow \neg q.$$

$$(k) \neg p \rightarrow (q \rightarrow r) \text{ và } q \rightarrow (p \vee r).$$

$$(e) \neg(p \oplus q) \text{ và } p \leftrightarrow q.$$

$$(l) p \leftrightarrow q \text{ và } (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

$$(f) \neg(p \leftrightarrow q) \text{ và } \neg p \leftrightarrow q.$$

$$(g) (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \text{ và } p \rightarrow (q \wedge r).$$

$$(m) p \leftrightarrow q \text{ và } \neg p \leftrightarrow \neg q.$$

Bài tập 17. Giả sử một bảng chân trị với n biến mệnh đề được cho trước. Một mệnh đề phức hợp với bảng chân trị này có thể được tạo thành bằng cách lấy tuyển (disjunction) của các hội (conjunction) của các biến hoặc phủ định của chúng, với một hội được bao gồm cho mỗi tổ hợp giá trị mà tại đó mệnh đề phức hợp là đúng. Mệnh đề phức hợp thu được được gọi là *dạng tuyển chuẩn tắc (disjunctive normal form)*.

Xây dựng dạng tuyển chuẩn tắc cho các mệnh đề phức hợp sau:

(a) $p \oplus q$

(b) $p \leftrightarrow q$

(c) $p \rightarrow \neg q$

Bài tập 18. Cho p, q, r là các mệnh đề nguyên tử. Hãy sử dụng các mệnh đề trên và các toán tử logic \neg, \wedge, \vee để biểu diễn mệnh đề sau:

“Ít nhất hai trong ba mệnh đề p, q, r là đúng”

Bài tập 19. Một tập hợp các toán tử logic được gọi là *đầy đủ (functionally complete)* nếu mọi mệnh đề phức hợp đều tương đương logic với một mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử logic này. Ví dụ, tập hợp $\{\neg, \wedge, \vee\}$ là đầy đủ vì mọi mệnh đề phức hợp đều tương đương logic với một mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử phủ định, hội và tuyển.

Chứng minh rằng các tập hợp toán tử logic sau là đầy đủ:

(a) $\{\neg, \wedge\}$

(b) $\{\neg, \vee\}$

Bài tập 20 (*). Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý `True` và `False` được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà `True` và `False` tương ứng lần lượt với 1 và 0. (Nghĩa là, giá trị của `x`, `y`, và `z` là 0 hoặc 1.) Mỗi đoạn mã sau đây bao gồm một điều kiện dựa trên `x`, `y`, `z`, và các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia). Hãy viết lại các điều kiện này sử dụng ngôn ngữ của logic mệnh đề.

(a) `if x * y ...`

(d) `if x * (1 - y) ...`

(b) `if x + y ...`

(e) `if x * (1 - y) + (1 - x) * y ...`

(c) `if 2 - x - y ...`

(f) `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`

Tài liệu

- [1] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 8th edition, McGraw-Hill, 2018.
- [2] Liben-Nowell, David, *Connecting Discrete Mathematics and Computer Science*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2022.