

COPYRIGHT NOTICE / THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2025 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2025-06-06

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2025-06-06



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

Một số chú ý

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học
Khoa Toán-Cơ-Tin học
Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội
`hoanganhduc@hus.edu.vn`

Đề 001:

- Câu 48 chọn A, B, hoặc C đều đúng.
- Lỗi đánh máy ở câu 10 dẫn tới có chỗ $n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) và có chỗ $n \geq 1$. Đúng ra là $n \geq 0$ và đáp án đúng là C. Tuy nhiên sinh viên chọn A cũng được chấp nhận.

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 001

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 50 câu/11 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 60% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{"Tàu đến muộn."}$
 $q = \text{"Giám đốc đến đúng giờ."}$
 $r = \text{"Tuần đến công ty trước giám đốc."}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc."

- ☐ (A) $(p \wedge q) \vee q$ ☐ (B) $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ☐ (C) $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ ☐ (D) $(p \wedge q) \rightarrow q$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền \mathcal{D} . Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ (A) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$ ☐ (B) $(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ (C) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ ☐ (D) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \neq (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền \mathcal{D} nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ (B) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
☐ (C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ (D) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Câu 04. Cho hàm $f : A \rightarrow B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) f là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi $a, b \in A$, nếu $f(a) \neq f(b)$ thì $a \neq b$
☐ (B) f là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi $a, b \in A$, nếu $a \neq b$ thì $f(a) \neq f(b)$
☐ (C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ (D) f là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi $a, b \in A$, nếu $a = b$ thì $f(a) = f(b)$

Câu 05. Có bao nhiêu tập hợp hữu hạn có số tập con là một số lẻ?

- ☐ (A) 1 ☐ (B) 2 ☐ (C) 0 ☐ (D) Vô số

Câu 06. Cho các hàm $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ định nghĩa bởi $f(x) = 2x$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh ☐ (B) f không là đơn ánh và không là toàn ánh
☐ (C) f là đơn ánh nhưng không là toàn ánh ☐ (D) f không là đơn ánh nhưng là toàn ánh

Câu 07. Phát biểu nào sau đây là đúng với mọi tập hợp A và B ?

- ☐ (A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ (B) Nếu tập hợp A là tập con của tập hợp B và B có ít nhất một phần tử thì A cũng có ít nhất một phần tử
☐ (C) Nếu tập hợp A là tập con của tập hợp B thì B không phải là tập con của A
☐ (D) Nếu tập hợp A là tập con của tập hợp B thì $|A| < |B|$

Câu 08. Nhiều ngôn ngữ lập trình cung cấp tính năng biểu diễn số thực x được *cắt ngắn* (truncated) đến k chữ số sau dấu thập phân, tức là loại bỏ các chữ số từ vị trí thứ $(k + 1)$ trở đi. Ví dụ, 3.1415926 khi cắt ngắn đến 3 chữ số sau dấu thập phân sẽ thành 3.141, và khi cắt ngắn đến 4 chữ số sau dấu thập phân sẽ thành 3.1415.

Trong các ngôn ngữ như C, Java, Python, lệnh `printf("%.3f", 3.1415926)` sẽ in ra 3.141 – giá trị của 3.1415926 với chỉ 3 chữ số sau dấu thập phân. (Chữ “f” trong “printf” là viết tắt của formatted; chữ “f” trong “%.3f” là viết tắt của float.)

Hãy chọn biểu thức chính xác để biểu diễn một số thực x được cắt ngắn đến k chữ số sau dấu thập phân, tức là bỏ đi chữ số thứ $(k + 1)$ trở đi.

- (A) $\lfloor x \rfloor / 10^k$ (B) $\lceil x \cdot 10^k \rceil / 10^k$ (C) $\lceil x \cdot 10^k \rceil - \lfloor x \cdot 10^k \rfloor$ (D) $\lfloor x \cdot 10^k \rfloor / 10^k$

Câu 09. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 7 (B) 10 (C) 8 (D) 11

Câu 10. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k + 1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k - 1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (1)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (2)$$

$$= 0. \quad (3)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
 (B) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
 (C) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
 (D) Chứng minh này sai vì đẳng thức (1) ở bước quy nạp không chính xác

Câu 11. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự \diamond và \blacklozenge bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh \blacklozenge đúng.”

- (A) \diamond là 4, \blacklozenge là $P(j + 1)$ (B) \diamond là 8, \blacklozenge là $P(j + 1)$ (C) \diamond là 8, \blacklozenge là $P(k + 1)$ (D) \diamond là 4, \blacklozenge là $P(k + 1)$

Câu 12. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
- (B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- (C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- (D) Con ngựa cuối cùng có màu trắng

Câu 13. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) 6071
- (B) -6071
- (C) -6067
- (D) 6067

Câu 14. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- (A) $f(n) = O(n)$
- (B) $f(n) = O(n \log n)$
- (C) $f(n) = O(-10n/11)$
- (D) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

Câu 15. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 2T(n/3) + O(1)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O -lớn.

- (A) $O(n^{\log_3 2})$
- (B) $O(n)$
- (C) $O(1)$
- (D) $O(\log n)$

Câu 16. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    a := a + 1
for j := 2 to m do
    b := b + 2

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(m)$
- (B) $O(n)$
- (C) $O(m \cdot n)$
- (D) $O(m + n)$

Câu 17. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- (B) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- (C) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$
- (D) $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

Câu 18. Hàm COMPUTESUM sau có đầu vào là một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của $\sum_{i=1}^n (i+2)i^2$.

```

COMPUTESUM(n):
    if n = 1 then
        return 3
    y := COMPUTESUM(n - 1)
    return ◇

```

Cần thay \diamond bằng biểu thức nào để $\text{COMPUTESUM}(n)$ trả lại kết quả mong muốn?

- (A) $y + n$ (B) $y + (n + 2)n^2$ (C) y (D) $(y + 2)y^2$

Câu 19. Biểu diễn thập phân của $(A70)_{16}$ là?

- (A) 2560 (B) 2567 (C) 2672 (D) 167

Câu 20. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $3^{3n+1} + 2^{n+1}$ luôn chia hết cho?

- (A) 3
(B) 4
(C) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(D) 5

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = (a_{n-1} + 2a_{n-2}) \bmod 11 & (n > 1) \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) 10 (B) 4 (C) 8 (D) 5

Câu 22. Cho hệ phương trình sau.

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 5 \pmod{6} \end{cases}$$

Giá trị của $x \bmod 24$ là bao nhiêu? Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) 12
(B) 23
(C) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(D) 15

Câu 23. Nghịch đảo của 23 theo môđun 96 là?

- (A) 25 (B) 71 (C) Không tồn tại (D) 6

Câu 24. Nghịch đảo của 32 theo môđun 96 là?

- (A) 71 (B) 25 (C) 6 (D) Không tồn tại

Câu 25. Giả sử x là nghịch đảo của 19 theo môđun 141. Số dư phép chia x cho 141 là?

- (A) -89 (B) Không tồn tại (C) 52 (D) -52

Câu 26. Giả sử x là nghịch đảo của 47 theo môđun 141. Số dư phép chia x cho 141 là?

- (A) 52 (B) 89 (C) -89 (D) Không tồn tại

Câu 27. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Thuật toán Euclid mở rộng (EXTEUCLID) có đầu vào là hai số nguyên dương a, b và đầu ra là bộ (d, s, t) trong đó $d = \gcd(a, b)$ và s, t là các số nguyên thỏa mãn $d = sa + tb$.

```
EXTEUCLID( $a, b$ ):  
  if  $b = 0$  then  
    return  $(a, 1, 0)$   
   $(d_1, s_1, t_1) := \text{EXTEUCLID}(b, a \bmod b)$   
   $d := d_1$   
   $s := t_1$   
   $t := s_1 - (a \text{ div } b) \cdot t_1$   
  return  $(d, s, t)$ 
```

Với mọi $n \geq 1$, EXT-EUCLID(f_{n+1}, f_n) có thể trả lại kết quả nào? (Gợi ý: Chú ý rằng $f_{n-1}f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n$ với mọi $n \geq 1$.)

- ☐ (A) $(1, f_n(-1)^n, f_{n+1}(-1)^{n+1})$
- ☐ (B) $(1, f_{n-1}(-1)^n, f_n(-1)^n)$
- ☐ (C) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
- ☐ (D) $(1, f_{n-1}(-1)^n, f_n(-1)^{n+1})$

Câu 28. Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn $\gcd(a, b) = 10$ và $\text{lcm}(a, b) = 400$. Nếu $a = 50$ thì giá trị của b là bao nhiêu?

- ☐ (A) 100
- ☐ (B) 80
- ☐ (C) 40
- ☐ (D) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng

Câu 29. Giả sử có 25 quả bóng trong một túi, gồm 12 quả màu đỏ, 8 quả màu xanh lam và 5 quả màu xanh lục. Số quả bóng tối thiểu mà một người cần phải lấy ra từ túi (không bỏ lại vào túi) để đảm bảo rằng người đó có ít nhất hai quả bóng cùng màu là bao nhiêu?

- ☐ (A) 4
- ☐ (B) 6
- ☐ (C) 5
- ☐ (D) 3

Câu 30. Có bao nhiêu chuỗi ký tự được xây dựng từ 9 ký tự đầu tiên của bảng chữ cái $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ thỏa mãn điều kiện không có ký tự nào lặp lại và chuỗi bắt đầu hoặc kết thúc với một nguyên âm (A hoặc E hoặc I).

- ☐ (A) $3 \cdot 8! + 3 \cdot 8! - 6 \cdot 7!$
- ☐ (B) $3 \cdot 2! + 6 \cdot 7!$
- ☐ (C) $8! + 8! - 7!$
- ☐ (D) $9! - 7!$

Câu 31. Có bao nhiêu cách chọn ra 8 quân bài từ một bộ bài 52 quân thông thường sao cho trong số các quân bài đã chọn có ít nhất một quân là J, Q, hoặc K?

- ☐ (A) $C_{12}^1 \cdot C_{40}^7$
- ☐ (B) $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{40}^5$
- ☐ (C) $C_{52}^8 - C_{40}^8$
- ☐ (D) $C_{12}^3 \cdot C_{40}^5$

Câu 32. Có bao nhiêu cách để đặt 12 quả bóng khác nhau vào 9 hộp khác nhau? Giả sử mỗi hộp có thể chứa bất kỳ số quả bóng nào.

- ☐ (A) C_{12}^9
- ☐ (B) 12^9
- ☐ (C) C_{20}^8
- ☐ (D) 9^{12}

Câu 33. Một khách hàng muốn lắp ráp một hệ thống máy tính và có thể chọn một trong 8 loại màn hình (từ 24 đến 32 inch), một trong 6 loại bàn phím (cơ, membrane, hoặc không dây), một trong 5 loại CPU (Intel hoặc AMD với các mức hiệu năng khác nhau) và một trong 4 loại card đồ họa. Xác định số hệ thống có thể mà khách hàng có thể lựa chọn.

- ☐ (A) $23 \cdot 4$
- ☐ (B) $8 \cdot 6 + 5 \cdot 4$
- ☐ (C) $8 + 6 + 5 + 4$
- ☐ (D) $8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

Câu 34. Giả sử số lượng vi khuẩn trong một quần thể tăng gấp đôi mỗi giờ. Nếu quần thể ban đầu có 5 vi khuẩn, thì sau n giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn trong quần thể đó, với $n \in \mathbb{N}$?

- ☐ (A) $5 \cdot 2^n$
- ☐ (B) $5 \cdot n^2$
- ☐ (C) $5 + 2n$
- ☐ (D) $5n \cdot 2$

Câu 35. Trong một lớp học có 12 bạn nữ và 10 bạn nam. Có bao nhiêu cách để chọn ra một nhóm 6 bạn trong đó số bạn nữ luôn nhiều hơn số bạn nam?

- ☐ (A) $C_{22}^6 - (C_{10}^6 \cdot C_{12}^0 + C_{10}^5 \cdot C_{12}^1 + C_{10}^4 \cdot C_{12}^2)$
- ☐ (B) $(C_{12}^4 \cdot C_{10}^2) + (C_{12}^5 \cdot C_{10}^1) + (C_{12}^6 \cdot C_{10}^0)$
- ☐ (C) $(C_{12}^3 \cdot C_{10}^3) + (C_{12}^4 \cdot C_{10}^2) + (C_{12}^5 \cdot C_{10}^1) + (C_{12}^6 \cdot C_{10}^0)$
- ☐ (D) $(C_{12}^4 \cdot C_{10}^2) \cdot (C_{12}^5 \cdot C_{10}^1) \cdot (C_{12}^6 \cdot C_{10}^0)$

Câu 36. Cần ít nhất bao nhiêu cặp số nguyên (a, b) để đảm bảo rằng có hai cặp (a_1, b_1) và (a_2, b_2) thỏa mãn $a_1 \equiv a_2 \pmod{7}$ và $b_1 \equiv b_2 \pmod{7}$?

- ☐ (A) 48
- ☐ (B) 50
- ☐ (C) 14
- ☐ (D) 49

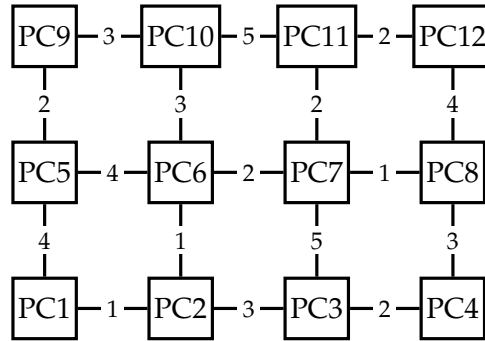
Câu 37. Có bao nhiêu cách để đặt 12 quả bóng giống nhau vào 9 hộp khác nhau? Giả sử mỗi hộp có thể chứa bất kỳ số quả bóng nào.

- ☐ (A) C_{12}^9
- ☐ (B) 9^{12}
- ☐ (C) 12^9
- ☐ (D) C_{20}^8

Câu 38. Giả sử một đơn vị có 12 nữ và 13 nam. Có bao nhiêu cách để thành lập một ủy ban gồm 7 thành viên nếu số nữ phải nhiều hơn số nam?

- (A) $C_{25}^7 - (C_{12}^3 \cdot C_{13}^4 + C_{12}^2 \cdot C_{13}^5 + C_{12}^1 \cdot C_{13}^6 + C_{12}^0 \cdot C_{13}^7)$
 (B) C_{25}^7
 (C) $C_{12}^4 \cdot C_{13}^3$
 (D) $C_{12}^4 \cdot C_{13}^3 + C_{12}^5 \cdot C_{13}^2 + C_{12}^6 \cdot C_{13}^1$

Câu 39. Trong Hình 1, các đỉnh biểu diễn các máy tính trong một phòng máy và các cạnh nối hai máy tính biểu diễn khoảng cách giữa chúng.



Hình 1: Đồ thị biểu diễn khoảng cách giữa các máy tính trong phòng máy. Các đỉnh vuông biểu diễn các máy tính. Số trên cạnh biểu diễn khoảng cách (đơn vị mét) giữa các máy tính tương ứng.

Với thông tin ở đồ thị ở Hình 1, tổng độ dài dây cáp tối thiểu cần thiết để kết nối tất cả các máy tính là bao nhiêu mét?

- (A) 24 (B) 21 (C) 22 (D) 20

Câu 40. Cho G là một đơn đồ thị vô hướng có 24 đỉnh. Giả sử G có chu trình Hamilton C và cây bao trùm T . Kết luận nào sau đây về C và T là đúng?

- (A) Không có phát biểu nào trong số ba phát biểu khác là đúng
 (B) C có 23 cạnh và T có 24 cạnh
 (C) C có 24 cạnh và T có 23 cạnh
 (D) C có 12 cạnh và T có 12 cạnh

Câu 41. Cho ma trận kề A của một đồ thị vô hướng G :

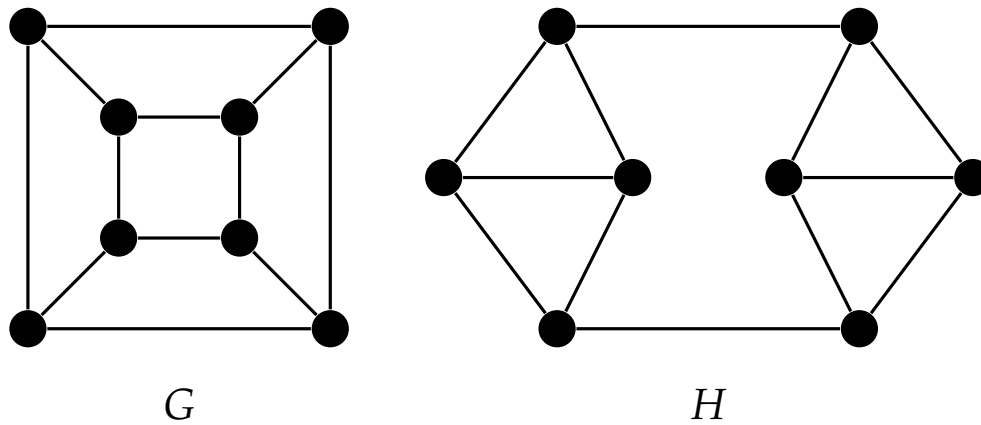
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chọn phát biểu đúng về đồ thị G .

- (A) Đồ thị G có chu trình Euler (B) Mọi đỉnh trong đồ thị G đều có cùng bậc
 (C) Đồ thị G là đồ thị hai phần (D) Đồ thị G có chu trình Hamilton

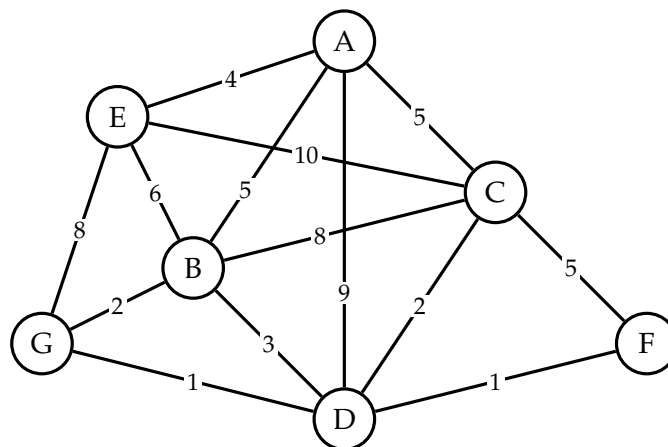
Câu 42. Hãy chọn phát biểu đúng về các đồ thị G và H trong Hình 2.

- (A) Các đỉnh của G có thể được tô màu bằng 3 màu sao cho hai đỉnh kề nhau có màu khác nhau
 (B) H là đồ thị hai phần
 (C) H có chu trình Euler
 (D) G và H là hai đồ thị đẳng cấu



Hình 2: Các đồ thị G và H .

Câu 43. Anh Minh là một tài xế chở hàng cứu trợ cho đồng bào vùng lũ lụt. Anh cần đi từ thành phố A, nơi tập kết hàng cứu trợ, đến thành phố F, nơi có người dân đang bị cô lập bởi nước lũ. Công ty vận chuyển của anh có kinh phí hạn chế và muốn tối ưu chi phí xăng dầu. Đồ thị trong Hình 3 thể hiện mạng lưới đường giao thông giữa các thành phố và chi phí (tính bằng triệu VNĐ) để di chuyển giữa chúng. (Các số liệu trong đồ thị chỉ mang tính chất minh họa và không phản ánh thực tế.)



Hình 3: Đồ thị biểu diễn mạng lưới đường giao thông giữa các thành phố. Các đỉnh biểu diễn các thành phố và các cạnh biểu diễn đường giao thông giữa các thành phố tương ứng. Số trên cạnh biểu diễn chi phí (tính bằng triệu VNĐ) để di chuyển giữa hai thành phố. (Các số liệu trong đồ thị chỉ mang tính chất minh họa và không phản ánh thực tế.)

Anh Minh cần tìm tuyến đường có tổng chi phí thấp nhất để đi từ thành phố A đến thành phố F. Chi phí thấp nhất để thực hiện chuyến đi này là bao nhiêu?

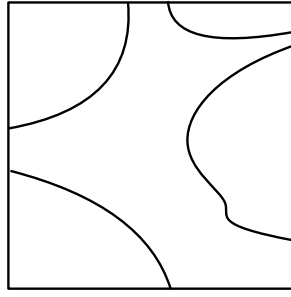
- Ⓐ 9 triệu đồng Ⓑ 8 triệu đồng Ⓒ 7 triệu đồng Ⓓ 10 triệu đồng

Câu 44. Xét bốn bản đồ trong Hình 4. Giả sử rằng hai vùng có đường biên giới chung phải được tô bằng hai màu khác nhau. Bản đồ nào có thể được tô màu bằng hai màu khác nhau?

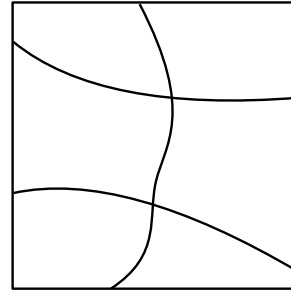
- Ⓐ Bản đồ 2 và Bản đồ 3 Ⓑ Bản đồ 4 và Bản đồ 1
Ⓒ Bản đồ 3 và Bản đồ 4 Ⓓ Bản đồ 1 và Bản đồ 2

Câu 45. Cho đơn đồ thị vô hướng G có $n \geq 3$ đỉnh. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

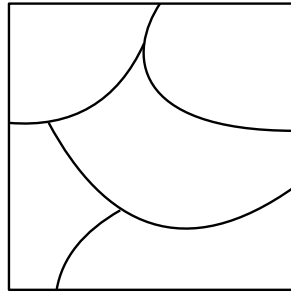
- Ⓐ Nếu G là một rừng thì G có tối đa $n - 1$ cạnh
Ⓑ Nếu G là một cây thì G có $n - 1$ cạnh
Ⓒ Nếu G có $n - 1$ cạnh thì G là một rừng
Ⓓ Nếu G là một cây thì G có một đỉnh bậc lớn hơn hoặc bằng 2



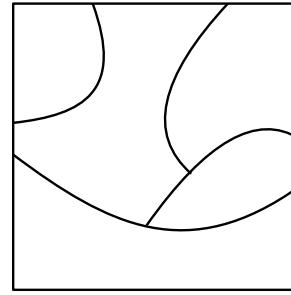
Bản đồ 1



Bản đồ 2



Bản đồ 3



Bản đồ 4

Hình 4: Bốn bản đồ cần tô màu.

Câu 46. Giả sử G là một đơn đồ thị vô hướng không liên thông với n đỉnh. Tính theo n , số cạnh *lớn nhất* có thể có trong đồ thị G là bao nhiêu?

- ☐ A $\frac{n(n-1)}{2}$
☐ B $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$
☐ C $\frac{n^2-n-2}{2}$
☒ D $(n-1)(n-2)$

Câu 47. Cho ma trận kề A của một đồ thị có hướng G :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

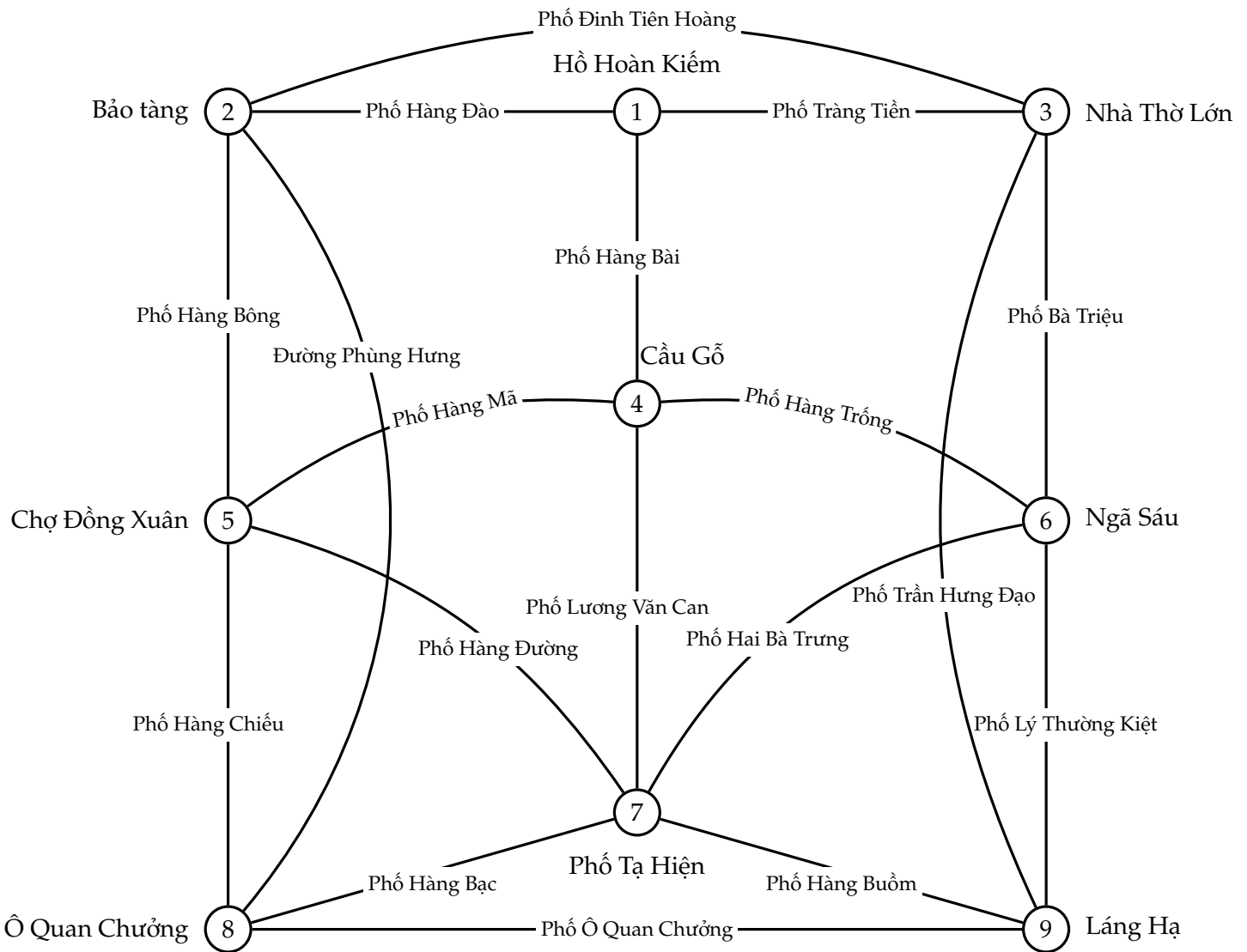
Chọn phát biểu đúng về đồ thị G .

- ☐ A G có chu trình đơn độ dài 5
 ☐ B G không phải là đồ thị liên thông mạnh
 ☐ C G có đúng hai thành phần liên thông mạnh
 ☒ D Mọi đỉnh trong G đều có bậc vào bằng bậc ra

Câu 48. Một nhóm sinh viên đang lập kế hoạch khám phá *Phố cổ Hà Nội (Hanoi's Old Quarter)*. Họ muốn đi qua mỗi con phố chính xác một lần. Bản đồ các con phố được biểu diễn trong Hình 5, với các đỉnh biểu diễn các giao lộ và các cạnh biểu diễn các con phố nối các giao lộ. (Các số liệu trong bản đồ chỉ mang tính chất minh họa và không phản ánh thực tế.)

Dưới đây là các phát biểu về việc đi qua mỗi con phố ở Phố cổ Hà Nội chính xác một lần. Phát biểu nào là đúng?

- ☐ A Có thể đi qua mỗi con phố chính xác một lần nhưng không trở về điểm xuất phát, vì có đúng hai giao lộ với số con phố lẻ
 ☐ B Có thể đi qua mỗi con phố chính xác một lần nhưng không trở về điểm xuất phát, vì có đúng hai giao lộ với số con phố lẻ
 ☐ C Không thể đi qua mỗi con phố chính xác một lần và trở về điểm xuất phát, vì có giao lộ với số con phố lẻ
 ☒ D Không thể đi qua mỗi con phố chính xác một lần, dù có trở về điểm xuất phát hay không



Hình 5: Bản đồ các con phố chính ở khu vực trung tâm Hà Nội. Các đỉnh biểu diễn các giao lộ quan trọng và các cạnh biểu diễn các con phố. (Các số liệu trong bản đồ chỉ mang tính chất minh họa và không phản ánh thực tế.)

Câu 49. Trong đại số Boole, xét biểu thức $F(x, y, z) = (x + \overline{y})z$.

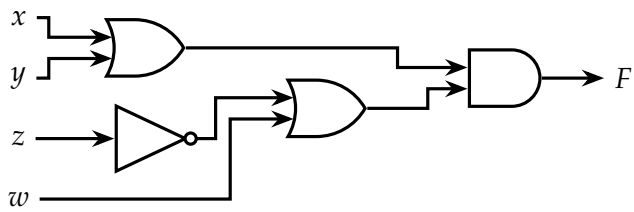
Biểu thức nào sau đây tương đương với $F(x, y, z)$?

- ☐ A $\overline{x + \overline{y} + z}$
☐ B $x + \overline{y} + \overline{z}$
☐ C $\overline{x + \overline{y} + \overline{z}}$
☐ D $\overline{\overline{x + \overline{y} + \overline{z}}}$

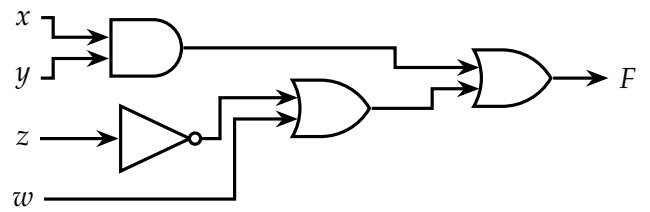
Câu 50. Cho biểu thức đại số Boole $F(x, y, z, w) = (x + y) \cdot (\overline{z} + w)$.

Hãy chọn mạch logic trong Hình 6 thể hiện đúng biểu thức $F(x, y, z, w)$.

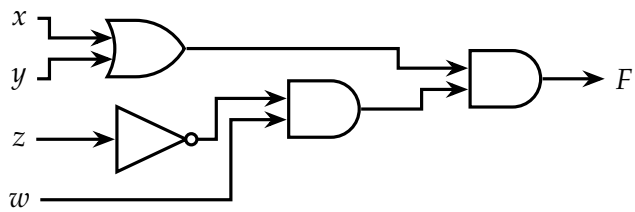
- ☐ A Mạch A
 ☐ B Mạch C
 ☐ C Mạch D
 ☐ D Mạch B



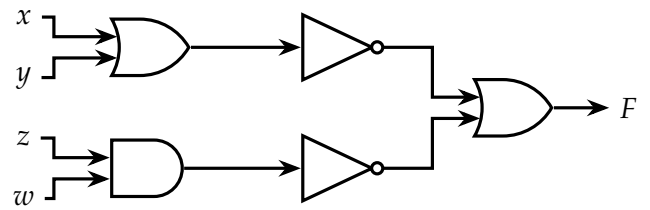
Mạch A



Mạch B



Mạch C



Mạch D

Hình 6: Các mạch logic

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 001

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. C	09. D	17. C	25. C	33. D	40. C	48. B
02. B	10. C	18. B	26. D	34. A	41. D	49. D
03. B	11. C	19. C	27. D	35. B	42. A	50. A
04. B	12. C	20. D	28. B	36. B	43. B	
05. A	13. B	21. A	29. A	37. D	44. D	
06. C	14. B	22. B	30. A	38. A	45. C	
07. A	15. A	23. B	31. C	39. C	46. B	
08. D	16. D	24. D	32. D		47. A	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 002

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 50 câu/12 trang.

- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 60% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☒ A $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$ ☐ B $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$
☐ C $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$ ☐ D $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$

Câu 02. Cho các mệnh đề p, q , và r . Các phương án chứng minh $(p \vee q) \rightarrow r$ nào sau đây là đúng?

- ☒ A Không có phương án nào đúng
☐ B Giả sử p đúng và q đúng, chứng minh r đúng
☐ C Giả sử $\neg r$ đúng, chứng minh $\neg p$ đúng và $\neg q$ đúng
☐ D Giả sử p đúng, chứng minh r đúng. Giả sử q đúng, chứng minh r đúng

Câu 03. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ A Cả Alice và Peter đều nói dối ☐ B Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ C Alice nói thật và Peter nói dối ☐ D Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 04. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n(n+1)}$$

- ☒ A $\frac{100}{101}$ ☐ B $\frac{99}{100}$ ☐ C $\frac{101}{100}$ ☐ D $\frac{99}{101}$

Câu 05. Cho các tập hợp X và Y bất kỳ và hàm $f : X \rightarrow Y$. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu dưới đây.

- ☒ A Với mọi $A \subseteq X$ và $B \subseteq X$, $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$
☐ B Với mọi $A \subseteq X$ và $B \subseteq X$, $f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$
☐ C Với mọi $A \subseteq X$ và $B \subseteq X$, $f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B)$
☐ D Với mọi $A \subseteq X$ và $B \subseteq X$, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Câu 06. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- ☒ A $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ ☐ B $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$
☐ C $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$ ☐ D $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

Câu 07. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- (A) Hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ cho bởi $f(x) = \lceil x^2 + 3x + 0.1 \rceil$ là toàn ánh
- (B) Nếu hàm $f: A \rightarrow B$ có hàm ngược thì f là đơn ánh
- (C) Hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = x^2 + 3x + 1$ là đơn ánh
- (D) Với các hàm $f: A \rightarrow B$ và $g: B \rightarrow C$, nếu $f \circ g$ là song ánh thì f cũng là song ánh

Câu 08. Cho hàm $f: A \rightarrow B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) f là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi $a, b \in A$, nếu $a = b$ thì $f(a) = f(b)$
- (B) f là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi $a, b \in A$, nếu $f(a) \neq f(b)$ thì $a \neq b$
- (C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
- (D) f là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi $a, b \in A$, nếu $a \neq b$ thì $f(a) \neq f(b)$

Câu 09. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
- (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
- (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 10. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 832
- (B) 340
- (C) 398
- (D) 468

Câu 11. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (1)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (2)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Không có gì sai trong chứng minh này
- (B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- (C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
- (D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 12. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 11 (B) 8 (C) 7 (D) 10

Câu 13. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (3)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (4)$$

$$= 0. \quad (5)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì đẳng thức (3) ở bước quy nạp không chính xác
 (B) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
 (C) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
 (D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai

Câu 14. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```
FIBMERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
     $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$ , với  $n = f_\ell \rangle\rangle$ 
    if  $n > 1$ 
         $m := f_{\ell-1}$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
        FIBMERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
        FIBMERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
        MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
```

```
MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
     $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n] \rangle\rangle$ 
     $i := 1; j := m+1$ 
    for  $k := 1$  to  $n$  do
        if  $j > n$  then
             $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
        else if  $i > m$  then
             $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
        else if  $A[i] < A[j]$  then
             $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
        else
             $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    for  $k := 1$  to  $n$  do
         $A[k] := B[k]$ 
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(\ell \log \ell)$ (B) $O(\ell^2)$ (C) $O(f_\ell \log \ell)$ (D) $O(\ell f_\ell)$

Câu 15. Chọn hàm có độ tăng (theo ký hiệu O -lớn) chậm nhất trong số các hàm sau.

- (A) $f(n) = \log n$ (B) $f(n) = n^2$ (C) $f(n) = n \log n$ (D) $f(n) = 7n$

Câu 16. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- (A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (C) $f(x)$ là $O(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 17. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1, c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

- (A) b^k (B) $\log_b n$ (C) $\log_a n$ (D) a^k

Câu 18. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

MERGESORT($A[1 \dots n]$):

$\langle\langle$ Sắp xếp trộn dãy $A[1 \dots n]\rangle\rangle$

 if $n > 1$

$m := \lfloor n/2 \rfloor$ $\langle\langle$ Tách thành hai mảng con $\rangle\rangle$

 MERGESORT($A[1 \dots m]$) $\langle\langle$ Đệ quy $\rangle\rangle$

 MERGESORT($A[m+1 \dots n]$) $\langle\langle$ Đệ quy $\rangle\rangle$

 MERGE($A[1 \dots n], m$) $\langle\langle$ Trộn hai mảng con $\rangle\rangle$

MERGE($A[1 \dots n], m$):

$\langle\langle$ Trộn hai mảng $A[1 \dots m]$ và $A[m+1 \dots n]\rangle\rangle$

$i := 1; j := m+1$

 for $k := 1$ to n do

 if $j > n$ then

$B[k] := A[i]; i := i+1$

 else if $i > m$ then

$B[k] := A[j]; j := j+1$

 else if $A[i] < A[j]$ then

$B[k] := A[i]; i := i+1$

 else

$B[k] := A[j]; j := j+1$

 for $k := 1$ to n do

$A[k] := B[k]$

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(n \log n)$ (B) $O(\log n)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n)$

Câu 19. Cho hệ phương trình sau.

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 5 \pmod{6} \end{cases}$$

Giá trị của $x \bmod 24$ là bao nhiêu? Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(B) 12
(C) 15
(D) 23

Câu 20. Giả sử x là nghịch đảo của 19 theo môđun 141. Số dư phép chia x cho 141 là?

- (A) Không tồn tại (B) -89 (C) -52 (D) 52

Câu 21. Nghịch đảo của 32 theo môđun 96 là?

- (A) Không tồn tại (B) 6 (C) 25 (D) 71

Câu 22. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $3^{3n+1} + 2^{n+1}$ luôn chia hết cho?

- (A) 5
(B) 3
(C) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(D) 4

Câu 23. Thuật toán RSA là một thuật toán mã hóa khóa công khai, được đặt theo tên của ba nhà phát minh là Rivest, Shamir, và Adleman. Thuật toán hoạt động như sau:

(a) **Sinh khóa:**

- i. Chọn hai số nguyên tố lớn phân biệt p, q

- ii. Đặt $n = pq$ và $k = (p - 1)(q - 1)$
- iii. Chọn số nguyên e thỏa mãn $1 < e < k$ và $\gcd(e, k) = 1$
- iv. Tính nghịch đảo d của e theo môđun k , nghĩa là $de \equiv 1 \pmod{k}$
- v. **Khóa công khai:** (n, e) (khóa công khai có thể được công bố cho mọi người)
- vi. **Khóa bí mật:** (p, q, d) (khóa bí mật chỉ được giữ bí mật bởi người sở hữu khóa)

(b) **Mã hóa:**

- Chuyển thông điệp M cần mã hóa thành số nguyên m , $0 \leq m < n$
- Thông điệp mã hóa c được tính bằng $c = m^e \pmod{n}$

(c) **Giải mã:**

- Tính $m = c^d \pmod{n}$
- Chuyển m từ số nguyên sang thông điệp M ban đầu

Trong thuật toán RSA, cho $p = 43$, $q = 59$, và $e = 13$. Alice muốn gửi cho Bob thông điệp (đã chuyển sang dạng số nguyên) $m = 5$. Thông điệp mã hóa c mà Alice sẽ gửi cho Bob là gì?

- ☒ (A) 1357
- ☐ (B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
- ☐ (C) 625
- ☐ (D) 698

Câu 24. Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn $\gcd(a, b) = 10$ và $\text{lcm}(a, b) = 400$. Nếu $a = 50$ thì giá trị của b là bao nhiêu?

- ☒ (A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
- ☐ (B) 40
- ☐ (C) 80
- ☐ (D) 100

Câu 25. Giá trị của $(2^{2021} + 3^{2021} + 4^{2021}) \pmod{11}$ là?

- ☒ (A) 5
- ☐ (B) 8
- ☐ (C) 9
- ☐ (D) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng

Câu 26. Nghịch đảo của 23 theo môđun 96 là?

- ☒ (A) 71
- ☐ (B) 6
- ☐ (C) 25
- ☐ (D) Không tồn tại

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = (a_{n-1} + 2a_{n-2}) \pmod{11} & (n > 1) \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- ☒ (A) 10
- ☐ (B) 8
- ☐ (C) 5
- ☐ (D) 4

Câu 28. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Thuật toán Euclid mở rộng (EXTEUCLID) có đầu vào là hai số nguyên dương a, b và đầu ra là bộ (d, s, t) trong đó $d = \gcd(a, b)$ và s, t là các số nguyên thỏa mãn $d = sa + tb$.

```

EXTEUCLID( $a, b$ ):
    if  $b = 0$  then
        return  $(a, 1, 0)$ 
     $(d_1, s_1, t_1) := \text{EXTEUCLID}(b, a \bmod b)$ 
     $d := d_1$ 
     $s := t_1$ 
     $t := s_1 - (a \text{ div } b) \cdot t_1$ 
    return  $(d, s, t)$ 

```

Với mọi $n \geq 1$, EXT-EUCLID(f_{n+1}, f_n) có thể trả lại kết quả nào? (Gợi ý: Chú ý rằng $f_{n-1}f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n$ với mọi $n \geq 1$.)

- (A) $(1, f_n(-1)^n, f_{n+1}(-1)^{n+1})$
- (B) $(1, f_{n-1}(-1)^n, f_n(-1)^{n+1})$
- (C) $(1, f_{n-1}(-1)^n, f_n(-1)^n)$
- (D) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng

Câu 29. Có bao nhiêu cách để đặt 12 quả bóng giống nhau vào 9 hộp giống nhau, mỗi hộp chứa ít nhất một quả bóng? Giả sử mỗi hộp có thể chứa bất kỳ số quả bóng nào lớn hơn 0.

- (A) C_{12}^3
- (B) 6
- (C) 9
- (D) 3

Câu 30. Giả sử $n \in \mathbb{N}$. Có bao nhiêu toàn ánh $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$?

- (A) $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$
- (B) $3^n - 3 \cdot 2^n$
- (C) 3^n
- (D) 3^{n-1}

Câu 31. Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái của từ REAPING sao cho các nguyên âm luôn đứng cạnh nhau? (Chú ý: Nguyên âm trong từ REAPING là các chữ cái A, E, I.)

- (A) $7!/3!$
- (B) $4! \cdot 3!$
- (C) $3! \cdot 5!$
- (D) $7!/(3! \cdot 4!)$

Câu 32. Có bao nhiêu chuỗi ký tự độ dài 14 tạo thành từ các ký tự trong tập hợp $\{a, b, c, d\}$ và có đúng ba ký tự a hoặc đúng ba ký tự b hoặc cả hai?

- (A) $2C_{14}^3 \cdot 4^{11} - C_{14}^6 \cdot 2^8$
- (B) $2C_{14}^3 \cdot 3^{11} - C_{14}^3 \cdot C_{11}^3 \cdot 3^8$
- (C) $2C_{14}^3 \cdot 3^{11} - C_{14}^3 \cdot C_{11}^3 \cdot 2^8$
- (D) $2C_{14}^3 \cdot 3^{11} - C_{14}^6 \cdot 3^8$

Câu 33. Có bao nhiêu bộ các số nguyên dương (x_1, x_2, \dots, x_8) thỏa mãn bất phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_8 \leq 78$?

- (A) C_{70+8-1}^{8-1}
- (B) C_{78+9-1}^{9-1}
- (C) C_{78+8-1}^{8-1}
- (D) C_{70+9-1}^{9-1}

Câu 34. Giả sử một đơn vị có 12 nữ và 13 nam. Có bao nhiêu cách để thành lập một ủy ban gồm 7 thành viên nếu số nữ phải nhiều hơn số nam?

- (A) $C_{12}^4 \cdot C_{13}^3 + C_{12}^5 \cdot C_{13}^2 + C_{12}^6 \cdot C_{13}^1$
- (B) $C_{25}^7 - (C_{12}^3 \cdot C_{13}^4 + C_{12}^2 \cdot C_{13}^5 + C_{12}^1 \cdot C_{13}^6 + C_{12}^0 \cdot C_{13}^7)$
- (C) C_{25}^7
- (D) $C_{12}^4 \cdot C_{13}^3$

Câu 35. Giả sử rằng số lượng sợi tóc trên đầu một người tối đa là 200 000 và dân số của Hà Nội lớn hơn 2 000 000. Khi đó, ta có thể chắc chắn rằng có một nhóm gồm k người ở Hà Nội có chính xác cùng số lượng sợi tóc trên đầu họ. Giá trị lớn nhất có thể của k là bao nhiêu?

- (A) 11
- (B) 10
- (C) 8
- (D) 9

Câu 36. Trong một lớp học có 12 bạn nữ và 10 bạn nam. Có bao nhiêu cách để chọn ra một nhóm 6 bạn trong đó số bạn nữ luôn nhiều hơn số bạn nam?

- (A) $(C_{12}^3 \cdot C_{10}^3) + (C_{12}^4 \cdot C_{10}^2) + (C_{12}^5 \cdot C_{10}^1) + (C_{12}^6 \cdot C_{10}^0)$
- (B) $(C_{12}^4 \cdot C_{10}^2) + (C_{12}^5 \cdot C_{10}^1) + (C_{12}^6 \cdot C_{10}^0)$
- (C) $(C_{12}^4 \cdot C_{10}^2) \cdot (C_{12}^5 \cdot C_{10}^1) \cdot (C_{12}^6 \cdot C_{10}^0)$
- (D) $C_{22}^6 - (C_{10}^6 \cdot C_{12}^0 + C_{10}^5 \cdot C_{12}^1 + C_{10}^4 \cdot C_{12}^2)$

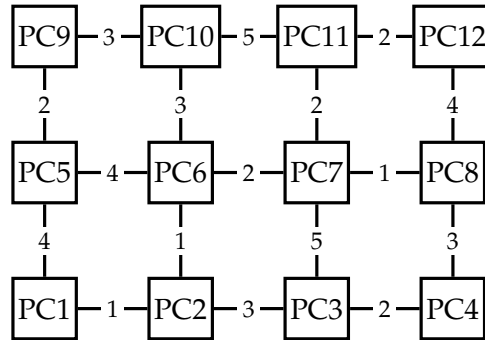
Câu 37. Giả sử có 25 quả bóng trong một túi, gồm 12 quả màu đỏ, 8 quả màu xanh lam và 5 quả màu xanh lục. Số quả bóng tối thiểu mà một người cần phải lấy ra từ túi (không bỏ lại vào túi) để đảm bảo rằng người đó có ít nhất hai quả bóng cùng màu là bao nhiêu?

- (A) 5
- (B) 3
- (C) 6
- (D) 4

Câu 38. Khi trò chuyện với một giáo sư X, bạn biết được rằng ông ấy đã giảng dạy tại Đại học Z trong 20 năm, mỗi học kỳ dạy 2 môn học khác nhau. Bạn cũng được biết rằng Đại học Z chỉ có hai học kỳ mỗi năm và Giáo sư X chỉ dạy tổng cộng 9 môn học khác nhau trong suốt thời gian giảng dạy ở Đại học Z. Một người bạn của bạn ngay lập tức kết luận rằng chắc chắn có ít nhất hai học kỳ mà giáo sư dạy cùng một cặp môn học. Nhận định của bạn bạn có đúng không? Hãy chọn đánh giá chính xác nhất có thể.

- (A) Sai, vì giáo sư có thể đã dạy mỗi cặp môn học đúng một lần
 (B) Đúng, vì 9 môn học không đủ để dạy trong 20 năm
 (C) Sai, vì cần biết thêm thông tin về việc luân chuyển môn học theo học kỳ
 (D) Đúng, vì có tối đa $C_9^2 = 36$ cặp môn học khác nhau có thể, trong khi đó có $2 \cdot 20 = 40$ học kỳ

Câu 39. Trong Hình 1, các đỉnh biểu diễn các máy tính trong một phòng máy và các cạnh nối hai máy tính biểu diễn khoảng cách giữa chúng.



Hình 1: Đồ thị biểu diễn khoảng cách giữa các máy tính trong phòng máy. Các đỉnh vuông biểu diễn các máy tính. Số trên cạnh biểu diễn khoảng cách (đơn vị mét) giữa các máy tính tương ứng.

Với thông tin ở đồ thị ở Hình 1, tổng độ dài dây cáp tối thiểu cần thiết để kết nối tất cả các máy tính là bao nhiêu mét?

- (A) 24 (B) 21 (C) 22 (D) 20

Câu 40. Xét đồ thị hai phần $G = (L \cup R, E)$ thỏa mãn $|L| = |R|$. Hãy chọn phát biểu sai về đồ thị G trong số các phát biểu sau.

- (A) Tổng số đỉnh thuộc $L \cup R$ là một số chẵn
 (B) Tổng bậc của các đỉnh thuộc R bằng với tổng bậc của các đỉnh thuộc L
 (C) Tổng bậc của các đỉnh thuộc L là một số chẵn
 (D) Tổng bậc của các đỉnh thuộc $L \cup R$ là một số chẵn

Câu 41. Thuyền trưởng Jack Sparrow và thủy thủ đoàn của tàu Black Pearl đang lên kế hoạch chặn đứng mạng lưới buôn bán của Công ty Đông Ấn (East India Trading Company). Trong Hình 2, mỗi đỉnh biểu diễn một cảng thương mại bí mật của Công ty Đông Ấn. Hai cảng có cạnh nối với nhau nếu chúng có tuyến đường vận chuyển hàng hóa trực tiếp.

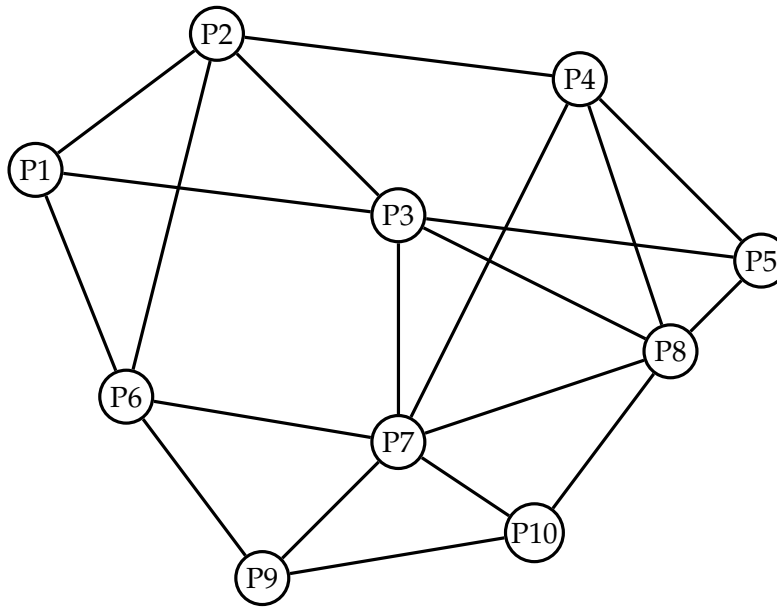
“Con cần biết điều này, cưng à,” Thuyền trưởng Teague nói với Jack Sparrow qua một tấm bản đồ cũ, “đó là xác định số lượng tuyến đường vận chuyển tối thiểu cần phá hủy để chia cắt mạng lưới thương mại của Công ty Đông Ấn, khiến ít nhất hai cảng không thể vận chuyển hàng hóa cho nhau dù trực tiếp hay gián tiếp. Savvy?” Jack và thủy thủ đoàn của anh cần phải phá hủy *ít nhất* bao nhiêu tuyến đường vận chuyển?

- (A) 2 (B) 5 (C) 4 (D) 3

Câu 42. Cho G là một đơn đồ thị vô hướng có 24 đỉnh. Giả sử G có chu trình Hamilton C và cây bao trùm T . Kết luận nào sau đây về C và T là đúng?

- (A) C có 24 cạnh và T có 23 cạnh
 (B) C có 23 cạnh và T có 24 cạnh
 (C) Không có phát biểu nào trong số ba phát biểu khác là đúng
 (D) C có 12 cạnh và T có 12 cạnh

Câu 43. Cho ma trận kề A của một đồ thị có hướng G :



Hình 2: Đồ thị biểu diễn mạng lưới thương mại của Công ty Đông Án. Mỗi đỉnh biểu diễn một cảng thương mại bí mật và có cạnh nối giữa hai cảng nếu chúng có tuyến đường vận chuyển hàng hóa trực tiếp.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chọn phát biểu đúng về đồ thị G .

- ☐ A Mọi đỉnh trong G đều có bậc vào bằng bậc ra
☐ B G có chu trình đơn độ dài 5
☐ C G có đúng hai thành phần liên thông mạnh
☐ D G không phải là đồ thị liên thông mạnh

Câu 44. Gọi T là một cây có n đỉnh và ℓ đỉnh lá (đỉnh bậc 1). Giả sử T có chính xác hai đỉnh bậc 3. Kết luận nào sau đây về ℓ là đúng?

- ☐ A $\ell \geq 5$
☐ B $\ell \geq 6$
☐ C $\ell \geq n/2$
☐ D $\ell \geq 4$

Câu 45. Anh Minh là một tài xế chở hàng cứu trợ cho đồng bào vùng lũ lụt. Anh cần đi từ thành phố A, nơi tập kết hàng cứu trợ, đến thành phố F, nơi có người dân đang bị cô lập bởi nước lũ. Công ty vận chuyển của anh có kinh phí hạn chế và muốn tối ưu chi phí xăng dầu. Đồ thị trong Hình 3 thể hiện mạng lưới đường giao thông giữa các thành phố và chi phí (tính bằng triệu VNĐ) để di chuyển giữa chúng. (Các số liệu trong đồ thị chỉ mang tính chất minh họa và không phản ánh thực tế.)

Anh Minh cần tìm tuyến đường có tổng chi phí thấp nhất để đi từ thành phố A đến thành phố F. Chi phí thấp nhất để thực hiện chuyến đi này là bao nhiêu?

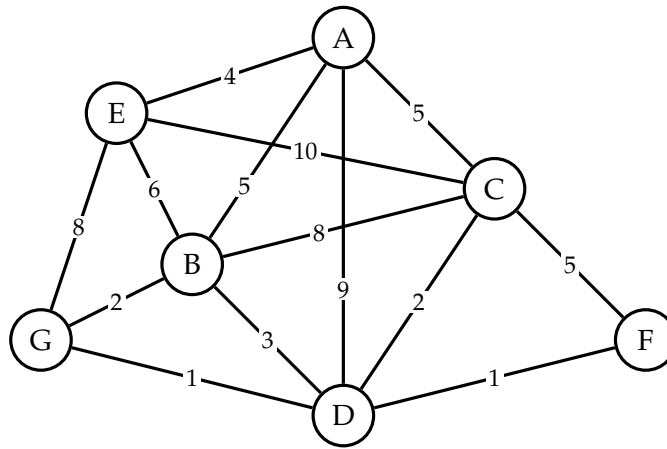
- ☐ A 7 triệu đồng
☐ B 10 triệu đồng
☐ C 8 triệu đồng
☐ D 9 triệu đồng

Câu 46. Xét bốn bản đồ trong Hình 4. Giả sử rằng hai vùng có đường biên giới chung phải được tô bằng hai màu khác nhau. Bản đồ nào có thể được tô màu bằng hai màu khác nhau?

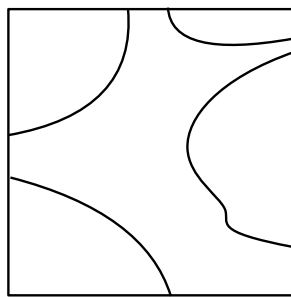
- ☐ A Bản đồ 2 và Bản đồ 3
☐ B Bản đồ 1 và Bản đồ 2
☐ C Bản đồ 3 và Bản đồ 4
☐ D Bản đồ 4 và Bản đồ 1

Câu 47. Một nhóm sinh viên đang lập kế hoạch khám phá Phố cổ Hà Nội (Hanoi's Old Quarter). Họ muốn đi qua mỗi con phố chính xác một lần. Bản đồ các con phố được biểu diễn trong Hình 5, với các đỉnh biểu diễn các giao lộ và các cạnh biểu diễn các con phố nối các giao lộ. (Các số liệu trong bản đồ chỉ mang tính chất minh họa và không phản ánh thực tế.)

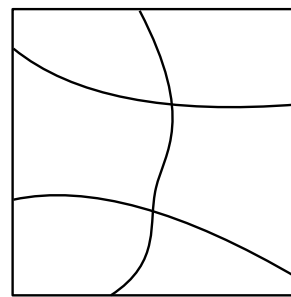
Dưới đây là các phát biểu về việc đi qua mỗi con phố ở Phố cổ Hà Nội chính xác một lần. Phát biểu nào là đúng?



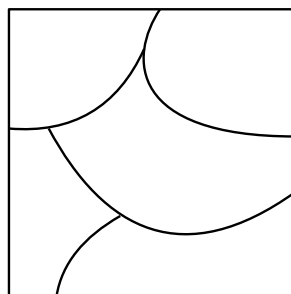
Hình 3: Đồ thị biểu diễn mạng lưới đường giao thông giữa các thành phố. Các đỉnh biểu diễn các thành phố và các cạnh biểu diễn đường giao thông giữa các thành phố tương ứng. Số trên cạnh biểu diễn chi phí (tính bằng triệu VNĐ) để di chuyển giữa hai thành phố. (Các số liệu trong đồ thị chỉ mang tính chất minh họa và không phản ánh thực tế.)



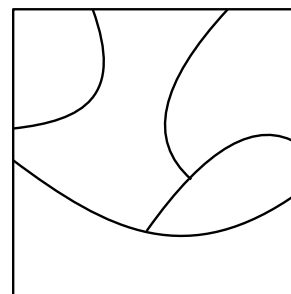
Bản đồ 1



Bản đồ 2



Bản đồ 3

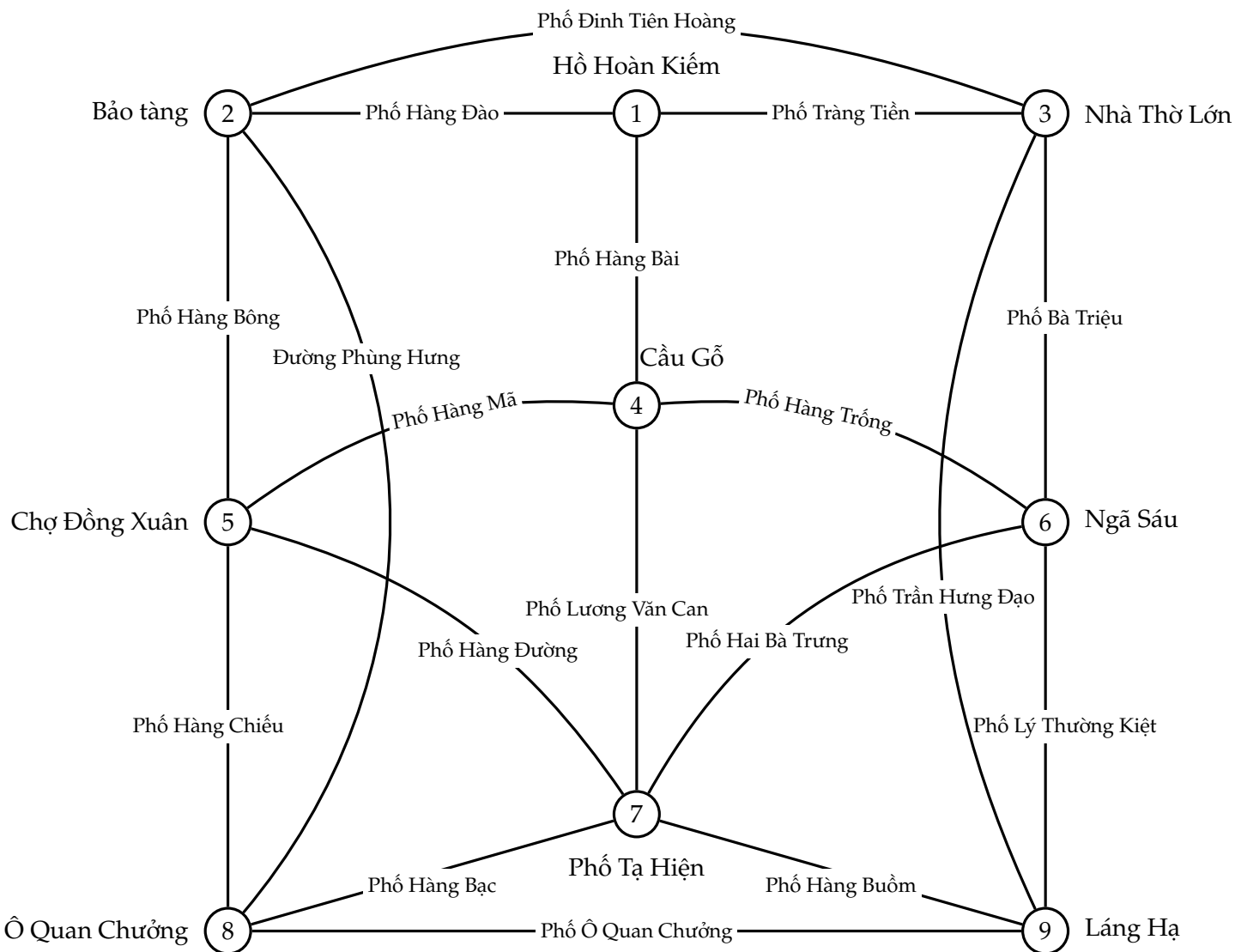


Bản đồ 4

Hình 4: Bốn bản đồ cần tô màu.

- Ⓐ Có thể đi qua mỗi con phố chính xác một lần nhưng không trở về điểm xuất phát, vì có đúng hai giao lộ với số con phố lẻ
- Ⓑ Không thể đi qua mỗi con phố chính xác một lần và trở về điểm xuất phát, vì có giao lộ với số con phố lẻ
- Ⓒ Không thể đi qua mỗi con phố chính xác một lần, dù có trở về điểm xuất phát hay không
- Ⓓ Có thể đi qua mỗi con phố chính xác một lần nhưng không trở về điểm xuất phát, vì có đúng hai giao lộ với số con phố lẻ

Câu 48. Cho ma trận kề A của một đồ thị vô hướng G :



Hình 5: Bản đồ các con phố chính ở khu vực trung tâm Hà Nội. Các đỉnh biểu diễn các giao lộ quan trọng và các cạnh biểu diễn các con phố. (Các số liệu trong bản đồ chỉ mang tính chất minh họa và không phản ánh thực tế.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chọn phát biểu đúng về đồ thị G .

- ☐ A Đồ thị G có chu trình Hamilton
☐ B Đồ thị G có chu trình Euler
☐ C Đồ thị G là đồ thị hai phần
☐ D Mọi đỉnh trong đồ thị G đều có cùng bậc

Câu 49. Trong đại số Boole, xét biểu thức $F(x, y, z) = (x + \bar{y})z$.

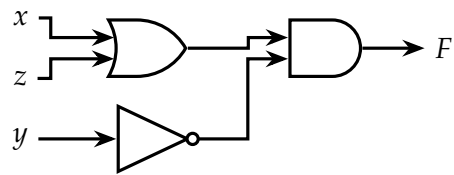
Biểu thức nào sau đây tương đương với $F(x, y, z)$?

- ☐ A $\overline{x + \bar{y} + z}$
☐ B $\overline{x + \bar{y} + \bar{z}}$
☐ C $\overline{x + \bar{y} + z}$
☐ D $\overline{x + \bar{y} + \bar{z}}$

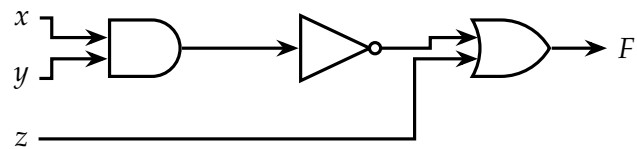
Câu 50. Cho bảng chân trị của hàm Boolean $F(x, y, z)$ như sau:

x	y	z	$F(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

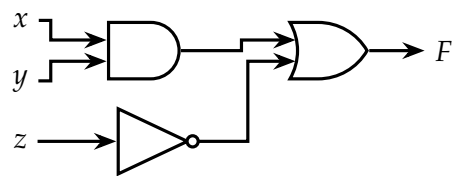
Hãy chọn mạch logic trong Hình 6 thể hiện đúng hàm $F(x, y, z)$.



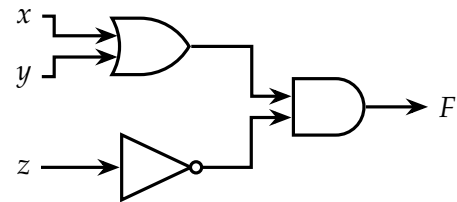
Mạch A



Mạch B



Mạch C



Mạch D

Hình 6: Các mạch logic

A Mạch A

B Mạch C

C Mạch D

D Mạch B

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 002

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. C	09. C	16. A	23. B	30. A	38. D	45. C
02. C	10. A	17. B	24. C	31. C	39. C	46. B
03. A	11. D	18. A	25. C	32. C	40. C	47. D
04. A	12. A	19. D	26. A	33. D	41. D	48. A
05. B	13. D	20. D	27. A	34. B	42. A	49. D
06. D	14. D	21. A	28. B	35. B	43. B	50. C
07. B	15. A	22. A	29. D	36. B	44. D	
08. D				37. D		

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức