ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
————-

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II
NĂM HỌC 2023-2024
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **2**

Lớp học phần: **MAT3500 1, MAT3500 2** Ngành học: **KHDL**

Thời gian làm bài: **120 phút** (không kể thời gian phát đề)

Chú ý: Đề gồm 5 câu/2 trang. Không sử dụng tài liệu. Điểm bài kiểm tra này chiếm 70% tổng số điểm của môn học. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1. (1 điểm) Một tập $\mathcal{C}$ các toán tử lôgic được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi mệnh đề phức hợp tương đương với một mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử trong $\mathcal{C}$. Ví dụ, $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee\}$ là một tập các toán tử lôgic đầy đủ.

Với các mệnh đề lôgic p và q, *toán tử lôgic* NAND được định nghĩa như sau: $p \,\mathsf{NAND}\, q$ sai khi cả p và q đều đúng, và đúng trong tất cả các trường hợp còn lại. Để thấy rằng tập $\mathcal{D} = \{\mathsf{NAND}\}$ là một tập các toán tử lôgic đầy đủ, hãy chứng minh các tương đương lôgic sau.

(a) $\neg p \equiv p \,\mathsf{NAND}\, p$

(b) $p \wedge q \equiv \neg(p \,\mathsf{NAND}\, q)$

(c) $p \wedge q \equiv (p \,\mathsf{NAND}\, q) \,\mathsf{NAND}\, (p \,\mathsf{NAND}\, q)$

(d) $p \vee q \equiv (p \,\mathsf{NAND}\, p) \,\mathsf{NAND}\, (q \,\mathsf{NAND}\, q)$

Câu 2. (1 điểm) Cho các tập hợp A, B, và C. Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho đẳng thức

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C \tag{1}$$

Câu 3. (2 điểm) Cho n là số nguyên không âm. Để chứng minh $n^7 - n$ chia hết cho 21, hãy chứng minh các phát biểu sau với mọi số nguyên không âm n.

(a) $n^7 - n$ chia hết cho 3.

(b) $n^7 - n$ chia hết cho 7.

Câu 4. (3 điểm) Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 \tag{2}$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn điều kiện $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ và

(a) $x_1 \geq 8$, $x_2 \geq 5$, và $x_3 \geq 2$.

(b) $x_1 \geq 10$ và $x_3 \leq 7$.

(c) $x_1 \leq 6$ và $x_2 \leq 12$.

Câu 5. (3 điểm)

(a) Cho G là một đơn đồ thị phẳng có k thành phần liên thông. Giả sử G có n đỉnh, m cạnh, và một biểu diễn phẳng của G chia mặt phẳng ra thành r miền. Chứng minh rằng $n - m + r = k + 1$.

(b) *Sắc số* của một đơn đồ thị vô hướng G, ký hiệu $\chi(G)$, là số màu nhỏ nhất có thể dùng để tô màu các đỉnh của G sao cho hai đỉnh kề nhau luôn có màu khác nhau. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 3$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ 3 & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases} \tag{3}$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II, NĂM HỌC 2023-2024
Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **2**
Lớp học phần: **MAT3500 1, MAT3500 2** Ngành học: **KHDL**

Lời giải 1. [**1** điểm]

<table>
<tr><td>

(a) Dùng bảng chân trị. Hai mệnh đề tương đương lôgic khi các giá trị của chúng ở các hàng tương ứng trong bảng chân trị là giống nhau.

p	$\neg p$	p NAND p
T	F	F
F	T	T

</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>

(b) Dùng bảng chân trị. Hai mệnh đề tương đương lôgic khi các giá trị của chúng ở các hàng tương ứng trong bảng chân trị là giống nhau.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	p NAND q
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>

(c)

$$\begin{aligned} p \wedge q &\equiv \neg(p \text{ NAND } q) && \text{Câu (b)} \\ &\equiv (p \text{ NAND } q) \text{ NAND } (p \text{ NAND } q) && \text{Câu (a)} \end{aligned}$$

</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>

(d)

$$\begin{aligned} p \vee q &\equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) && \text{Luật De Morgan} \\ &\equiv \neg p \text{ NAND } \neg q && \text{Câu (b)} \\ &\equiv (p \text{ NAND } p) \text{ NAND } (q \text{ NAND } q) && \text{Câu (a)} \end{aligned}$$

</td><td>0.25</td></tr>
</table>

Lời giải 2. [**1** điểm]

Ta chỉ ra một phản ví dụ cho đẳng thức $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$. Chọn $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2\}$, và $C = \{1\}$. Ta có $$\begin{aligned} A \setminus (B \setminus C) &= \{1,2,3\} \setminus (\{1,2\} \setminus \{1\}) \\ &= \{1,2,3\} \setminus \{2\} \\ &= \{1,3\} \end{aligned}$$ và $$\begin{aligned} (A \setminus B) \setminus C &= (\{1,2,3\} \setminus \{1,2\}) \setminus \{1\} \\ &= \{3\} \setminus \{1\} \\ &= \{3\}. \end{aligned}$$ Do đó, $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$.	**1**

Lời giải 3. **[2 điểm]**

(a) Nếu n chia hết cho 3 thì hiển nhiên $n^7 - n$ cũng thế. Ta xét trường hợp n không chia hết cho 3. Theo Định lý Fermat nhỏ, $n^2 \equiv 1 \pmod 3$. Do đó, $n^7 = (n^2)^3 n \equiv n \pmod 3$. Suy ra $n^7 - n$ chia hết cho 3.	**1**
(b) Theo Định lý Fermat nhỏ, $n^7 \equiv n \pmod 7$. Suy ra $n^7 - n$ chia hết cho 7.	**1**

Lời giải 4. Chú ý rằng mỗi nghiệm của (2) là một bộ các số nguyên không âm (x_1, x_2, x_3, x_4). **[3 điểm]**

(a) Đặt $x'_1 = x_1 - 8 \geq 0$, $x'_2 = x_2 - 5 \geq 0$, và $x'_3 = x_3 - 2 \geq 0$. Phương trình (2) tương đương với $$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x_4 = 25 - 8 - 5 - 2 = 10 \qquad (4)$$ trong đó x'_1, x'_2, x'_3, và x_4 là các số nguyên không âm. Do đó, số nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 8$, $x_2 \geq 5$, $x_3 \geq 2$, và $x_4 \geq 0$ bằng với số nghiệm của (4) thỏa mãn $x'_1 \geq 0$, $x'_2 \geq 0$, $x'_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$, và bằng $C^{4-1}_{10+4-1} = C^3_{13} = 286$.	**1**
(b) Gọi U là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$. Gọi A là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 0$, $0 \leq x_3 \leq 7$, và $x_4 \geq 0$. Ta cần tính $\|A\|$. Chú ý rằng $\overline{A} = U \setminus A$ là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 8$, và $x_4 \geq 0$. Thêm vào đó, $\|A\| = \|U\| - \|\overline{A}\|$. Đặt $x'_1 = x_1 - 10 \geq 0$. Tương tự như câu (a), $\|U\|$ chính là số nghiệm của phương trình $x'_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 - 10 = 15$ thỏa mãn $x'_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$. Do đó, $\|U\| = C^{4-1}_{15+4-1} = C^3_{18} = 816$. Đặt $x'_3 = x_3 - 8 \geq 0$. Tương tự như câu (a), $\|\overline{A}\|$ chính là số nghiệm của phương trình $x'_1 + x_2 + x'_3 + x_4 = 25 - 10 - 8 = 7$ thỏa mãn $x'_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x'_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$. Do đó, $\|\overline{A}\| = C^{4-1}_{7+4-1} = C^3_{10} = 120$. Do đó, $\|A\| = \|U\| - \|\overline{A}\| = 816 - 120 = 696$.	**1**

(c) 1

Cách 1: Gọi U là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1,2,3,4\}$. Gọi A là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 6$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{2,3,4\}$. Gọi B là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $0 \leq x_2 \leq 12$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1,3,4\}$. Ta cần tính $|A \cap B|$.

Ta có $\overline{A} = U \setminus A$, $\overline{B} = U \setminus B$, và $\overline{A \cap B} = U \setminus (A \cap B)$. Theo luật De Morgan, ta cũng có $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Theo quy tắc bù trừ, $|\overline{A} \cup \overline{B}| = |\overline{A}| + |\overline{B}| - |\overline{A} \cap \overline{B}|$. Do đó, ta cũng có $|A \cap B| = |U| - |\overline{A \cap B}| = |U| - |\overline{A} \cup \overline{B}| = |U| - |\overline{A}| - |\overline{B}| + |\overline{A} \cap \overline{B}|$.

Ta có $|U| = C^{4-1}_{25+4-1} = C^3_{28} = 3276$.

Chú ý rằng $\overline{A}$ là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 7$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{2,3,4\}$. Đặt $x'_1 = x_1 - 7 \geq 0$. Tương tự câu (a), $|\overline{A}|$ bằng số nghiệm của phương trình $x'_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 - 7 = 18$ thỏa mãn $x'_1 \geq 0$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{2,3,4\}$. Do đó, $|\overline{A}| = C^{4-1}_{18+4-1} = C^3_{21} = 1330$.

Chú ý rằng $\overline{B}$ là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_2 \geq 13$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1,3,4\}$. Đặt $x'_2 = x_2 - 13 \geq 0$. Tương tự câu (a), $|\overline{B}|$ bằng số nghiệm của phương trình $x_1 + x'_2 + x_3 + x_4 = 25 - 13 = 12$ thỏa mãn $x'_2 \geq 0$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1,3,4\}$. Do đó, $|\overline{B}| = C^{4-1}_{12+4-1} = C^3_{15} = 455$.

Chú ý rằng $\overline{A} \cap \overline{B}$ là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 7$, $x_2 \geq 13$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{3,4\}$. Đặt $x'_1 = x_1 - 7 \geq 0$ và $x'_2 = x_2 - 13 \geq 0$. Tương tự câu (a), $|\overline{A} \cap \overline{B}|$ bằng số nghiệm của phương trình $x'_1 + x'_2 + x_3 + x_4 = 25 - 13 - 7 = 5$ thỏa mãn $x'_1 \geq 0$, $x'_2 \geq 0$, và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{3,4\}$. Do đó, $|\overline{A} \cap \overline{B}| = C^{4-1}_{5+4-1} = 56$.

Do đó, $|A \cap B| = |U| - |\overline{A}| - |\overline{B}| + |\overline{A} \cap \overline{B}| = 3276 - 1330 - 455 + 56 = 1547$.

Cách 2: Số nghiệm của (2) thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 6$, $0 \leq x_2 \leq 12$, $x_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$ là hệ số của x^{25} trong hàm sinh

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^0 + x^1 + \cdots + x^6)(x^0 + x^1 + \cdots + x^{12})(x^0 + x^1 + \cdots + x^{25})^2 \\ &= (1 - x^7 - x^{13} + x^{20})(1 - 2x^{26} + x^{52})(1-x)^{-4} \end{aligned}$$

Chú ý rằng hệ số của x^r trong khai triển của $(1-x)^{-4}$ là $(-1)^r C^r_{-4} = (-1)^r((-1)^r C^r_{4+r-1}) = C^r_{r+3}$. Để có x^{25} trong khai triển của $G(x)$ ta có thể

(i) Nhân x^0 trong $1 - x^7 - x^{13} + x^{20}$ với x^0 trong $1 - 2x^{26} + x^{52}$ và với x^{25} trong khai triển của $(1-x)^{-4}$. Hệ số $c_{(i)}$ của x^{25} ở đây là hệ số của x^{25} trong khai triển của $(1-x)^{-4}$.

(ii) Nhân x^7 trong $1 - x^7 - x^{13} + x^{20}$ với x^0 trong $1 - 2x^{26} + x^{52}$ và với x^{18} trong khai triển của $(1-x)^{-4}$. Hệ số $c_{(ii)}$ của x^{25} ở đây là hệ số của x^{18} trong khai triển của $(1-x)^{-4}$.

(iii) Nhân x^{13} trong $1 - x^7 - x^{13} + x^{20}$ với x^0 trong $1 - 2x^{26} + x^{52}$ và với x^{12} trong khai triển của $(1-x)^{-4}$. Hệ số $c_{(iii)}$ của x^{25} ở đây là hệ số của x^{12} trong khai triển của $(1-x)^{-4}$.

(iv) Nhân x^{20} trong $1 - x^7 - x^{13} + x^{20}$ với x^0 trong $1 - 2x^{26} + x^{52}$ và với x^5 trong khai triển của $(1-x)^{-4}$. Hệ số $c_{(iv)}$ của x^{25} ở đây là hệ số của x^5 trong khai triển của $(1-x)^{-4}$.

Hệ số của x^{25} trong khai triển của $G(x)$ là $c_{(i)} - c_{(ii)} - c_{(iii)} + c_{(iv)} = C^{25}_{28} - C^{18}_{21} - C^{12}_{15} + C^5_8 = 1547$.

Lời giải 5. **[3 điểm]**

(a) Gọi G_i, $1 \leq i \leq k$, là các thành phần liên thông của G. Giả sử G_i có n_i đỉnh, m_i cạnh, và một biểu diễn phẳng của G_i chia mặt phẳng thành r_i miền, với $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Theo công thức Euler, với $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $n_i - m_i + r_i = 2$. Thêm vào đó, ta cũng có $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$, và $r = \sum_{i=1}^{k} r_i - k + 1$ (do các biểu diễn phẳng của G_i ($1 \leq i \leq k$) có chung miền vô hạn). Do đó, $$\begin{aligned} n - m + r &= \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} m_i + (\sum_{i=1}^{k} r_i - k + 1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (n_i - m_i + r_i) - k + 1 \\ &= 2k - k + 1 \\ &= k + 1. \end{aligned}$$	**1.5**
(b) Giả sử $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ và $E(C_n) = \{v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. Ta chứng minh nếu n chẵn thì $\chi(C_n) = 2$. Thật vậy, $f : V(C_n) \to \{0, 1\}$ định nghĩa bởi $f(v_i) = 0$ nếu i chẵn và $f(v_i) = 1$ nếu i lẻ là một cách tô màu đồ thị C_n bằng hai màu 0 và 1. Thêm vào đó, do C_n có ít nhất một cạnh, ta không thể tô màu tất cả các đỉnh của C_n chỉ bằng một màu. Do đó, $\chi(C_n) = 2$. Ta chứng minh nếu n lẻ thì $\chi(C_n) = 3$. Thật vậy, $g : V(C_n) \to \{0, 1, 2\}$ định nghĩa bởi $g(v_i) = 0$ nếu i chẵn, $g(v_i) = 1$ nếu $i < n$ lẻ, và $g(v_n) = 2$ là một cách tô màu đồ thị C_n bằng ba màu 0, 1, và 2. Ta chứng minh rằng không thể tô màu các đỉnh của C_n chỉ bằng hai màu. Thật vậy, giả sử phản chứng rằng có một cách tô màu các đỉnh của đồ thị C_n bằng hai màu 0 và 1. Không mất tính tổng quát, giả sử v_1 có màu 1. Do v_2 kề với v_1, v_2 phải có màu 0. Do v_3 kề với v_2 và ta chỉ có hai màu 0 và 1, v_3 có màu 1. Áp dụng lý luận tương tự, ta suy ra được các đỉnh v_i với i lẻ phải có màu 1 và với i chẵn phải có màu 0, với $1 \leq i \leq n$. Do n lẻ, v_n cũng có màu 1. Đây là một mâu thuẫn vì v_1 cũng có màu 1 và $v_nv_1 \in E(C_n)$. Do đó, không thể tô màu các đỉnh của C_n chỉ bằng hai màu. Suy ra $\chi(C_n) = 3$.	**1.5**

Hà Nội, ngày 20 tháng 05 năm 2024
NGƯỜI LÀM ĐÁP ÁN
(ký và ghi rõ họ tên)

Hoàng Anh Đức