

# **COPYRIGHT NOTICE**

## **THÔNG BÁO BẢN QUYỀN**

© 2023 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

### **COPYRIGHT (English):**

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2023-03-31

### **BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):**

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2023-03-31



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

# Nhận xét Bài kiểm tra giữa kỳ

## Toán rời rạc (MAT3500 2, 2022-2023)

Hoàng Anh Đức  
BMTH, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội  
hoanganhduc@hus.edu.vn

Ngày 31 tháng 3 năm 2023

- Với bài số 1,
  - Một số bạn vẫn sai khi lập bảng chân trị ở phần (a).
  - Một số bạn ở phần (b) chỉ đưa ra mệnh đề logic mà không giải thích gì thêm là tại sao bạn có mệnh đề đó.
  - Một số bạn sử dụng các dấu  $+$  và  $-$  trong bảng chân trị thay vì T và F. Mình đề nghị các bạn dùng T và F.
  - Một số bạn viết  $p \oplus \neg q$  và  $p \rightarrow q$  dưới dạng các biểu thức chỉ sử dụng  $\neg, \wedge, \vee$  và sau đó lấy  $\wedge$  của hai biểu thức. Ý tưởng này không có vấn đề gì. Tuy nhiên, một số bạn viết  $p \oplus \neg q \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p)$ , và điều này là không chính xác (lấy  $p = F$  và  $q = F$  thì vế trái là T và vế phải là F, do đó chúng không tương đương logic).
- Với bài số 2,
  - Một số bạn viết “Với  $n = 4$ ,  $\exists(a, b) = (0, 2)$  sao cho  $n = 2a + 5b$ ”. Chú ý rằng nếu bạn viết như trên thì  $a = 0$  và  $b = 2$ , và do đó  $n = 2 \times 0 + 5 \times 2 = 10$  chứ không phải 4.
  - Một số bạn vẫn không nắm được cách chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Các bạn nên xem lại vì đây là kiến thức cơ bản.
  - Một số bạn viết giả thiết quy nạp là  $k = 2x + 5y$  với  $x \geq 2$ . Tại sao các bạn có thể giả thiết như vậy? Cần xem lại phương pháp quy nạp.
  - Một số bạn chứng minh bằng cách xét  $n$  chẵn và  $n$  lẻ ( $n \geq 4$ ). Nếu  $n$  chẵn thì chọn  $b = 0$  và theo định nghĩa của  $n$  luôn tồn tại  $a$  sao cho  $n = 2a$ . Nếu  $n$  lẻ thì chọn  $b = 1$  và luôn tồn tại  $a$  sao cho  $n = 2a + 5 = 2(a + 2) + 1$  với mọi  $n \geq 4$ . Một số bạn trong trường hợp  $n$  lẻ viết  $n = 2k + 1$  với  $k \geq 2$  mà không giải thích tại sao có  $k \geq 2$ ? Về mặt ý tưởng giải bài, các bạn có thể làm như trên, nhưng cần cẩn thận khi lý luận và xét các trường hợp.
  - Một số bạn chứng minh bằng quy nạp và ở bước quy nạp giả thiết  $P(k)$  đúng và chứng minh  $P(k+1)$  đúng bằng cách xét các trường hợp  $k$  chẵn và  $k$  lẻ. Nếu  $k = 2a + 5b$  lẻ thì  $b$  lẻ và do đó tồn tại  $v$  sao cho  $b = 2v + 1$ . Suy ra  $k + 1 = (2a + 5b) + 1 = 2a + 5(2v + 1) + 1 = 2a + 10v + 6 = 2(a + 3) + 5(2v)$ , và do đó  $P(k + 1)$  đúng. Nếu  $k = 2a + 5b$  chẵn thì  $b$  chẵn và do đó  $b = 2i$  với  $i \geq 1$ , suy ra  $k + 1 = 2a + 6 + 5i - 5 = 2(a + 3) + 5(i - 1)$ , và do đó  $P(k + 1)$  đúng. Ở bước này, tại sao khi  $b$  chẵn các bạn có thể giả thiết  $i \geq 1$ ? Nếu  $i = 0$  thì có được không? Về mặt ý tưởng giải bài, các bạn có thể làm như trên, nhưng cần cẩn thận khi lý luận và xét các trường hợp.
  - Một số bạn chứng minh bằng quy nạp mạnh và ở bước quy nạp giả thiết  $P(j)$  đúng với  $4 \leq j \leq k$  và chứng minh  $P(k + 1)$  đúng bằng cách xét các trường hợp  $k + 1$  chẵn và  $k + 1$  lẻ. Với  $k + 1$  chẵn thì  $k + 1 = 2i$  với số nguyên  $i$  nào đó thỏa mãn  $4 \leq i \leq k$ . Theo giả thiết quy nạp  $i = 2a + 5b$  với các số nguyên không âm  $a, b$  nào đó, và do đó  $k + 1 = 2i = 2(2a + 5b) = 2(2a) + 5(2b)$ . Với  $k + 1$  lẻ

thì  $k + 1 = i + j$  với  $i$  chẵn,  $j$  lẻ, và  $4 \leq i \leq k$  và  $4 \leq j \leq k$ . Theo giả thiết quy nạp,  $i = 2a_1 + 5b_1$  và  $j = 2a_2 + 5b_2$  với các số nguyên không âm  $a_1, a_2, b_1, b_2$  và do đó  $k + 1 = 2(a_1 + b_1) + 5(a_2 + b_2)$ . Tuy nhiên, lý luận của bạn liệu có đúng với  $k = 4$ ? Nếu  $k = 4$  thì  $k + 1 = 5$  và theo lý luận trên,  $5 = k + 1 = i + j$  với  $4 \leq i \leq 5$  và  $4 \leq j \leq 5$ . Điều này có đúng không?

- Một số bạn lý luận rằng với mọi  $n \geq 4$  và  $a, b \geq 0$ , nếu  $n$  lẻ thì (\*)  $n - 5b$  với  $b$  là số lẻ luôn là một số chẵn và nếu  $n$  chẵn thì (\*\*)  $n - 5b$  với  $b$  là số chẵn luôn là một số chẵn. Liệu (\*) và (\*\*) có đúng khi  $n < 5b$ ? (Chú ý rằng ở đây các bạn không chỉ ra cách lựa chọn  $b$  như thế nào, nghĩa là tôi có thể chọn  $b$  sao cho  $n < 5b$  thỏa mãn. Lúc này  $2a = n - 5b < 0$  và do đó  $a < 0$ , trái với giả thiết của các bạn rằng  $a \geq 0$ .) Về mặt ý tưởng giải bài, các bạn có thể làm như trên, nhưng cần cẩn thận khi lý luận và xét các trường hợp.
- Một số bạn chứng minh bằng quy nạp yếu, ở bước cơ sở kiểm tra cho  $P(4), \dots, P(7)$  và ở bước quy nạp giả thiết  $k = 2a + 5b$  và chứng minh  $k + 1 = 2a_1 + 5b_1$  như sau. Với  $b \geq 1$  và  $a \geq 0$ , chọn  $a_1 = a + 3$  và  $b_1 = b - 1$ . Với  $b \geq 0$  và  $a \geq 2$ , chọn  $a_1 = a - 2$  và  $b_1 = b + 1$ . Các bạn chú ý rằng ở bước quy nạp cần giả thiết  $k \geq 7$ . Thêm vào đó, cần xét trường hợp  $b = 0, a = 1$  và  $b = 0, a = 0$ , mặc dù các trường hợp này không thỏa mãn giả thiết  $k \geq 7$  nhưng bạn cần chỉ rõ điều này để thấy là tất cả các trường hợp đều được xét.
- Một số bạn ở bước quy nạp giả sử  $k = 2a + 5b$  và viết  $k + 1 = 2(a - 2) + 5(b + 1)$  nhưng không xét điều kiện  $a - 2 \geq 0$ .

• Với bài số 3,

- Phần lớn các bạn đều làm được câu (a).
- Ở câu (b), một số bạn “đoán” công thức tổng quát là  $a_n = 3^n - (-2)^n$  và chứng minh công thức đúng bằng quy nạp. Làm sao các bạn đoán được?

• Với bài số 4,

- Nhiều bạn chỉ viết “chọn  $C = \dots, k = \dots$ ”. Ở đây  $C, k$  là gì? Các bạn cần viết rõ ràng ra. Một số bạn viết là chọn  $C$  và  $k$  nhưng hoàn toàn không hiểu các hằng số này là gì. Nhiều bạn viết là chọn  $C$  và  $k$  sau đó viết ra bất đẳng thức và không nói gì thêm. Làm sao với  $C$  và  $k$  các bạn đã chọn mà các bạn có bất đẳng thức như vậy? Các bạn cần chứng minh.
- Ở câu (b), một số bạn viết  $(3n)! = 3!n!$ . Điều này không chính xác.
- Ở các câu (b) và (c), một số bạn chỉ viết “Ta thấy  $(3n)! > 6^n \forall n > 3$ ” và “Ta thấy  $\forall n > 3$  thì  $\frac{2n^3 + 6n^2 + 4n}{6} < n^3$ ” và không giải thích gì thêm? Những điều này không hoàn toàn hiển nhiên. Các bạn làm sao để “thấy” được?
- Ở câu (b), một số bạn viết  $(3n)! = 1(2 \cdot 3) \dots ((3n - 2) \cdot (3n - 1))(3n)$  và nói rằng tích này có  $\frac{3n-2}{2}$  cặp và do đó  $(3n)! \geq 6^{\frac{3n-2}{2}} \geq 6n$  với  $n \geq 6$  do  $\frac{3n-2}{2} \geq n$  với  $n \geq 6$ . Trước tiên, nếu  $n$  lẻ,  $\frac{3n-2}{2}$  không là số nguyên, do đó số “cặp” các bạn đề cập đến là không chính xác. Thêm nữa, ta cần chứng minh với  $6^n$  chứ không phải  $6n$ . Cuối cùng, đánh giá của các bạn có chính xác không? Một số bạn viết ra được  $(3n)! \geq 6^{\frac{3n-2}{2}}$  nhưng không lý luận được tiếp.
- Ở câu (b), một số bạn chứng minh  $(3n)! \geq 6^n$  bằng cách xét hai trường hợp  $n$  chẵn và  $n$  lẻ. Với  $n$  chẵn,  $(3n)! = 1 \cdot (2 \cdot 3) \dots ((3n - 2) \cdot (3n - 1)) \cdot 3n$  và lý luận rằng có  $(3n - 2)/2$  tích  $(2 \cdot 3), \dots, ((3n - 2) \cdot (3n - 1))$ , suy ra  $(3n)! \geq 6^{\frac{3n-2}{2}} > 6^n$  với mọi  $n > 5$ . Với  $n$  lẻ,  $(3n)! = 1 \cdot (2 \cdot 3) \dots ((3n - 1) \cdot (3n))$  và lý luận rằng có  $(3n - 1)/2$  tích  $(2 \cdot 3), \dots, ((3n - 1) \cdot (3n))$ , suy ra  $(3n)! \geq 6^{\frac{3n-1}{2}} > 6^n$  với mọi  $n > 5$ .
- Một số bạn chứng minh  $(3n)! \geq 6^n$  ở câu (b) bằng quy nạp.