VNU-HUS MAT3302: Toán rời rạc	GV: Phan Thị Hà Dương (lý thuyết)
Bài tập tuần 5	
03/11/2025	GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Chú ý

(1) Danh sách bài tập mỗi tuần có ở https://hoanganhduc.github.io/teaching/VNU-HUS/2025/winter/MAT3302/.

(2) Tham gia Google Classroom (https://classroom.google.com/c/ODAwMzkxNzA3OTEy?cjc=y6rexxh5) để biết cách tính điểm thường xuyên qua việc lên bảng và điểm danh.

(3) Các bài tập đánh dấu sao ($\star$) có thể cần thời gian suy nghĩ lâu hơn.

Bài tập 1. (a) Có bao nhiêu nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ với x_1, x_2, x_3 là các số nguyên không âm và $x_i < 6$?

(b) Tìm số nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$, với x_i là các số nguyên không âm sao cho $x_1 \leq 3,\ x_2 \leq 4,\ x_3 \leq 5,\ x_4 \leq 8$.

Bài tập 2. (a) Tìm công thức truy hồi cho số chuỗi bit độ dài n chứa hai chữ số 0 liên tiếp.

(b) Điều kiện ban đầu là gì?

(c) Có bao nhiêu chuỗi bit độ dài 7 chứa hai chữ số 0 liên tiếp?

Bài tập 3. (a) Tìm công thức truy hồi cho số chuỗi bit độ dài n chứa ba chữ số 0 liên tiếp.

(b) Điều kiện ban đầu là gì?

(c) Có bao nhiêu chuỗi bit độ dài 7 chứa ba chữ số 0 liên tiếp?

Bài tập 4. (a) Tìm công thức truy hồi cho số cách phủ kín hoàn toàn một bàn cờ $2 \times n$ bằng các viên domino 1×2. (**Gợi ý:** Xét riêng các phủ trong đó ô ở góc trên bên phải được phủ bởi một domino nằm ngang và các phủ trong đó ô đó được phủ bởi một domino nằm dọc.)

(b) Điều kiện ban đầu cho công thức truy hồi ở phần (a) là gì?

(c) Có bao nhiêu cách phủ kín hoàn toàn một bàn cờ 2×17 bằng domino 1×2?

Bài tập 5 ($\star$). (a) Tìm công thức truy hồi cho số chuỗi bit độ dài n chứa chuỗi 01.

(b) Điều kiện ban đầu là gì?

(c) Có bao nhiêu chuỗi bit độ dài 7 chứa chuỗi 01?

Bài tập 6. Giải các quan hệ truy hồi sau cùng với điều kiện ban đầu đã cho.

(a) $a_n = 2a_{n-1} \quad (n \geq 1),\ a_0 = 3.$

(b) $a_n = a_{n-1} \quad (n \geq 1),\ a_0 = 2.$

(c) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad (n \geq 2),\ a_0 = 1,\ a_1 = 0.$

(d) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad (n \geq 2),\ a_0 = 6,\ a_1 = 8.$

(e) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad (n \geq 2),\ a_0 = 0,\ a_1 = 1.$

(f) $a_n = 4a_{n-2} \quad (n \geq 2),\ a_0 = 0,\ a_1 = 4.$

(g) $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{4} \quad (n \geq 2),\ a_0 = 1,\ a_1 = 0.$

(h) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \quad (n \geq 2),\ a_0 = 3,\ a_1 = 6.$

(i) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} \quad (n \geq 2),\ a_0 = 2,\ a_1 = 1.$

(j) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} \quad (n \geq 2),\ a_0 = 4,\ a_1 = 10.$

(k) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 2),\ a_0 = 4,\ a_1 = 1.$

(l) $a_n = a_{n-2} \quad (n \geq 2),\ a_0 = 5,\ a_1 = -1.$

(m) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n \geq 2),\ a_0 = 3,\ a_1 = -3.$

(n) $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n \quad (n \geq 0),\ a_0 = 2,\ a_1 = 8.$

(o) $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} + 1 \quad (n \geq 3),\ a_0 = 2,\ a_1 = 4,\ a_2 = 8.$

(p) $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} \quad (n \geq 3),\ a_0 = 2,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4.$

Bài tập 7. Một mô hình cho số lượng tôm hùm bắt được mỗi năm dựa trên giả thiết rằng số tôm hùm bắt được trong một năm bằng trung bình cộng của số bắt được trong hai năm trước đó.

(a) Tìm công thức truy hồi cho dãy $\{L_n\}$, trong đó L_n là số tôm hùm bắt được ở năm n, theo giả thiết của mô hình này.

(b) Tìm L_n nếu năm 1 bắt được 100 000 con và năm 2 bắt được 300 000 con.

Bài tập 8. Một khoản tiền \$100 000 được gửi vào quỹ đầu tư vào đầu một năm. Vào ngày cuối cùng của mỗi năm có hai khoản cổ tức được trả. Khoản cổ tức thứ nhất bằng 20% số tiền có trong tài khoản trong năm đó. Khoản cổ tức thứ hai bằng 45% số tiền có trong tài khoản của năm trước.

(a) Tìm công thức truy hồi cho dãy $\{P_n\}$, trong đó P_n là số tiền trong tài khoản vào cuối n năm nếu không rút tiền bao giờ.

(b) Sau n năm, trong tài khoản có bao nhiêu tiền nếu không rút tiền?

Bài tập 9. Chứng minh rằng các số Fibonacci thỏa mãn công thức truy hồi

$$f_n = 5f_{n-4} + 3f_{n-5} \qquad (n = 5, 6, 7, \dots),$$

kèm điều kiện ban đầu $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3$. Sử dụng công thức truy hồi này để chứng minh rằng f_{5n} chia hết cho 5 với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$.

Bài tập 10 (⋆). Giải các quan hệ truy hồi sau:

(a) $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$ với $a_0 = 1,\ a_1 = 2$.

(b) $a_n = a_{n-1}^3 a_{n-2}^2$ với $a_0 = 2,\ a_1 = 2$.

Bài tập 11. (a) Một câu đố phổ biến vào cuối thế kỷ XIX do nhà toán học Pháp Édouard Lucas phát minh, gọi là Tháp Hà Nội (Towers of Hanoi Puzzle), gồm ba cọc gắn trên một bảng cùng với các đĩa có kích thước khác nhau. Ban đầu các đĩa này được đặt trên cọc thứ nhất theo thứ tự kích thước, đĩa lớn nhất ở đáy. Luật chơi cho phép di chuyển từng đĩa một từ cọc này sang cọc khác miễn là không bao giờ đặt một đĩa lên trên một đĩa nhỏ hơn. Mục tiêu là chuyển tất cả các đĩa sang cọc thứ hai theo thứ tự kích thước, đĩa lớn nhất ở đáy. Gọi H_n là số bước cần thiết để giải bài toán Tháp Hà Nội với n đĩa.

(1) Tìm công thức truy hồi cho H_n.

(2) Giải công thức truy hồi đó để tìm công thức tường minh cho H_n.

(b) (⋆) Giả sử trong bài toán Tháp Hà Nội, mục tiêu của chúng ta là chuyển tất cả n đĩa từ cọc 1 sang cọc 3, nhưng không được di chuyển đĩa trực tiếp giữa cọc 1 và cọc 3. Mỗi lần di chuyển một đĩa phải là một thao tác có liên quan đến cọc 2. Như thường lệ, không được đặt một đĩa lên trên một đĩa nhỏ hơn.

(1) Tìm công thức truy hồi cho số bước cần thiết để giải bài toán với n đĩa dưới ràng buộc này.

(2) Giải công thức truy hồi đó để tìm công thức tường minh cho số bước cần thiết với n đĩa.

(3) Có bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau của n đĩa trên ba cọc sao cho không có đĩa nào nằm trên đĩa nhỏ hơn?

Bài tập 12. (a) Tìm nghiệm của quan hệ truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$ với điều kiện ban đầu $a_1 = 4$.

(b) Tìm nghiệm của quan hệ truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + 3^n$ với điều kiện ban đầu $a_1 = 5$.

(c) Tìm nghiệm của quan hệ truy hồi $a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42 \cdot 4^n$ với $a_1 = 56$ và $a_2 = 278$.

(d) Tìm tất cả các nghiệm của quan hệ truy hồi

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3^n.$$

(Gợi ý: Tìm một nghiệm riêng dạng $qn2^n + p_1 n + p_2$, với q, p_1, p_2 là các hằng số.)

(e) Tìm nghiệm của quan hệ truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + 3 \cdot 2^n$.

(f) Tìm tất cả các nghiệm của quan hệ truy hồi

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + (n+1)2^n.$$

(g) Tìm tất cả các nghiệm của quan hệ truy hồi

$$a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} + n4^n,$$

với điều kiện ban đầu $a_0 = -2,\ a_1 = 0,\ a_2 = 5$.

Bài tập 13 ($\star$)**.** Giải hệ quan hệ truy hồi đồng thời

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2b_{n-1}, \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1}. \end{aligned}$$

với điều kiện ban đầu $a_0 = 1,\ b_0 = 2$.

Bài tập 14. Tìm công thức tường minh cho hàm sinh (generating function) của từng dãy sau. (Đối với mỗi dãy, chọn dãy rõ ràng nhất phù hợp với các số hạng ban đầu được liệt kê.)

(a) $0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$

(b) $0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$

(c) $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$

(d) $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots$

(e) $\binom{7}{0}, \binom{7}{1}, \binom{7}{2}, \dots, \binom{7}{7}, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$

(f) $2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, \dots$

(g) $1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$

(h) $0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

(i) $-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$

(j) $1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots$

(k) $0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, -3, \dots$

(l) $1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$

(m) $\binom{7}{0}, 2\binom{7}{1}, 2^2\binom{7}{2}, \dots, 2^7\binom{7}{7}, 0, 0, 0, 0, \dots$

(n) $-3, 3, -3, 3, -3, 3, \dots$

(o) $0, 1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$

(p) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

Bài tập 15. Tìm hệ số

(a) của x^n trong khai triển của $(1-x)^{-2}$

(b) của x^n trong khai triển của $(1+x)^{-4}$

(c) của x^n trong khai triển của $\dfrac{1+x}{(1-2x)^5}$

Bài tập 16. Sử dụng hàm sinh để đếm số nghiệm nguyên không âm của

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \qquad \text{với } 0 \leq x_1 \leq 2,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Bài tập 17. (a) Sử dụng hàm sinh để xác định số cách khác nhau phân phát 10 quả bóng giống nhau cho 4 trẻ em sao cho mỗi trẻ nhận ít nhất 2 quả bóng.

(b) Sử dụng hàm sinh để xác định số cách khác nhau phân phát 12 mô hình trò chơi giống nhau cho 5 trẻ em sao cho mỗi trẻ nhận nhiều nhất 3 mô hình.

(c) Sử dụng hàm sinh để xác định số cách khác nhau phân phát 15 thú nhồi bông giống nhau cho 6 trẻ em sao cho mỗi trẻ nhận ít nhất 1 nhưng không quá 3 thú.

(d) Sử dụng hàm sinh để xác định số cách phân phát 25 chiếc donut giống nhau cho bốn sĩ quan cảnh sát sao cho mỗi sĩ quan nhận ít nhất 3 chiếc nhưng không quá 7 chiếc.

Bài tập 18. (a) Sử dụng hàm sinh để giải phương trình truy hồi $a_k = 7a_{k-1}$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 5$.

(b) Sử dụng hàm sinh để giải phương trình truy hồi $a_k = 3a_{k-1} + 2$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 1$.

(c) Sử dụng hàm sinh để giải phương trình truy hồi $a_k = 3a_{k-1} + 4^{k-1}$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 1$.

(d) Sử dụng hàm sinh để giải phương trình truy hồi $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ với các điều kiện ban đầu $a_0 = 6,\ a_1 = 30$.

(e) ($\star$) Sử dụng hàm sinh để tìm công thức tường minh cho dãy Fibonacci.

(f) ($\star$) Sử dụng hàm sinh để giải quan hệ truy hồi $a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2} + 2k$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 4,\ a_1 = 12$.

Bài tập 19. Cho $n \geq 0$. Có bao nhiêu cách để bỏ n quả vào một túi thỏa mãn các ràng buộc sau?

- Các quả chỉ thuộc bốn loại: táo, chuối, cam, lê.
- Số lượng táo phải là số chẵn.
- Số lượng chuối phải là bội số của 5.
- Có nhiều nhất 4 quả cam.
- Có nhiều nhất 1 quả lê.

Tài liệu

[1] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 8th edition, McGraw-Hill, 2018.

[2] Liben-Nowell, David, *Connecting Discrete Mathematics and Computer Science*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2022.