ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
(Đề gồm 4 câu/4 trang)

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ
Môn: Toán rời rạc (MAT3500 2, 2022-2023)
Thời gian: 50 phút

- Điền các thông tin về Họ Tên, Mã Sinh Viên, Lớp trước khi bắt đầu làm bài.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.
- Điểm bài kiểm tra này chiếm 20% tổng số điểm của môn học. Tổng điểm nhỏ hơn hoặc bằng 10 thì giữ nguyên, còn ngược lại thì tính là 10 điểm.

Họ và Tên: ______________________________

Mã Sinh Viên: ______________________ Lớp: ______________________

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	3	3	3	3	12
Điểm:					

1. Cho mệnh đề $(p \to q) \wedge (p \oplus \neg q)$ với p, q là các mệnh đề lôgic.
   (a) (1 điểm) Lập bảng chân trị cho mệnh đề trên.
   (b) (2 điểm) Hãy xây dựng một mệnh đề lôgic phức hợp tương đương với mệnh đề đã cho trong đó chỉ sử dụng các toán tử $\neg, \wedge, \vee$.

Lời giải:

(a) Bảng chân trị của mệnh đề $(p \to q) \wedge (p \oplus \neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$p \oplus \neg q$	$(p \to q) \wedge (p \oplus \neg q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

(b) Từ các hàng có giá trị T trong bảng chân trị của $(p \to q) \wedge (p \oplus \neg q)$, ta xây dựng một dạng tuyển chuẩn tắc tương đương lôgic với nó.

- Ta xây dựng mệnh đề A_1 thỏa mãn $A_1 = \mathsf{T}$ khi và chỉ khi $p = \mathsf{T}$ và $q = \mathsf{T}$. Một mệnh đề như vậy có thể là $A_1 = p \wedge q$.
- Ta xây dựng mệnh đề A_2 thỏa mãn $A_2 = \mathsf{T}$ khi và chỉ khi $p = \mathsf{F}$ và $q = \mathsf{F}$. Một mệnh đề như vậy có thể là $A_2 = \neg p \wedge \neg q$.

- Theo bảng chân trị trên, $(p \to q) \wedge (p \oplus \neg q)$ có giá trị đúng khi và chỉ khi A_1 đúng hoặc A_2 đúng. Do đó, mệnh đề $A = A_1 \vee A_2 = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ là một mệnh đề tương đương lôgic với $(p \to q) \wedge (p \oplus \neg q)$. A chỉ sử dụng các toán tử $\neg, \wedge, \vee$ và do đó là một mệnh đề cần tìm.

2. (3 điểm) Cho $P(n)$ là phát biểu sau

$$n = 2a + 5b \text{ với các số nguyên không âm } a,\ b \text{ nào đó}$$

Chứng minh rằng $P(n)$ đúng với mọi $n \geq 4$.

Lời giải:

- **Cách 1:** Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \geq 4$ bằng quy nạp mạnh.
  - **Bước cơ sở:** $P(4)$ và $P(5)$ đúng, do
  $$4 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0$$
  $$5 = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1$$
  - **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 5$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, do $4 \leq k-1 \leq k$, theo giả thiết quy nạp, $P(k-1)$ đúng, nghĩa là $k-1 = 2a+5b$ với các số nguyên không âm a, b nào đó. Do đó
  $$k + 1 = (k-1) + 2 = 2(a+1) + 5b$$
  Nói cách khác, $P(k+1)$ đúng.

  Theo nguyên lý quy nạp mạnh, với mọi $n \geq 4$, $P(n)$ đúng.
- **Cách 2:** Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \geq 4$ bằng quy nạp yếu.
  - **Bước cơ sở:** $P(4)$ đúng, do $4 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0$.
  - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 4$ nào đó, nghĩa là $k = 2a + 5b$ với các số nguyên không âm a, b nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có $k+1 = 2a+5b+1 = 2(a+3)+5(b-1)$. Ta xét hai trường hợp
    * Nếu $b \geq 1$ thì rõ ràng $P(k+1)$ đúng.
    * Nếu $b = 0$, ta có $k+1 = 2a+1 = 2(a-2)+5 \cdot 1$. Để chứng minh $P(k+1)$ đúng, ta cần chỉ ra $a \geq 2$. Thật vậy, do $k \geq 4$, ta có $k+1 = 2a+1 \geq 5$ và do đó $a \geq 2$.

  Theo nguyên lý quy nạp yếu, với mọi $n \geq 4$, $P(n)$ đúng.

3. Giải các hệ thức truy hồi sau
   (a) ($1\frac{1}{2}$ điểm) $a_n = 7a_{n-1}$ ($n \geq 1$) với điều kiện ban đầu $a_0 = 3$.
   (b) ($1\frac{1}{2}$ điểm) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ ($n \geq 2$) với điều kiện ban đầu $a_0 = 0$ và $a_1 = 5$.

Lời giải:

(a) Ta có

$$a_n = 7a_{n-1} = 7^2 a_{n-2} = \cdots = 7^r a_{n-r} = \cdots = 7^n a_0 = 3 \cdot 7^n.$$

Ta chứng minh phát biểu $P(n)$ sau

$$a_n = 3 \cdot 7^n$$

đúng với mọi $n \geq 0$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Với $n = 0$, $a_0 = 3 \cdot 7^0 = 3$, do đó $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sủ $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó, nghĩa là, $a_k = 3 \cdot 7^k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là $a_{k+1} = 3 \cdot 7^{k+1}$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 7a_k \\ &= 7(3 \cdot 7^k) && \text{giả thiết quy nạp} \\ &= 3 \cdot 7^{k+1}. \end{aligned}$$

(b) Đa thức đặc trưng của hệ thức truy hồi đã cho là $r^2 - r - 6 = 0$. Đa thức này có hai nghiệm phân biệt $r_1 = -2$ và $r_2 = 3$. Do đó, nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho có dạng $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2(3)^n$. Từ điều kiện ban đầu, ta có $a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$ và $a_1 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 5$. Do đó $\alpha_1 = -1$ và $\alpha_2 = 1$. Cuối cùng, nghiệm của hệ thức truy hồi là dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn $a_n = 3^n - (-2)^n$.

4. Chứng minh rằng
   (a) (1 điểm) $\sum_{i=0}^{n} i^k$ là $O(n^{k+1})$.
   (b) (1 điểm) $(3n)!$ là $\Omega(6^n)$.
   (c) (1 điểm) $\sum_{i=0}^{n} i(i+1)$ là $\Theta(n^3)$.

Lời giải:

(a) Với mọi số nguyên $n > 1$, ta có

$$|\sum_{i=0}^{n} i^k| = |\sum_{i=1}^{n} i^k| \leq |\sum_{i=1}^{n} n^k| = |n^{k+1}|.$$

Do đó, theo định nghĩa, $\sum_{i=0}^{n} i^k$ là $O(n^{k+1})$.

(b) Với mọi số nguyên $n > 1$, ta có

$$|(3n)!| = |(1 \cdot 2 \cdot 3)(4 \cdot 5 \cdot 6) \dots ((3n-2) \cdot (3n-1) \cdot (3n))| \geq |(1 \cdot 2 \cdot 3)^n| = |6^n|.$$

Do đó, theo định nghĩa, $(3n)!$ là $\Omega(6^n)$.

(c) Ta có

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Với mọi số nguyên $n > 1$, ta cũng có

$$\frac{1}{3}|n^3| \leq \left|\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right| = \left|\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}\right| \leq \left|\frac{n^3 + 3n^3 + 2n^3}{3}\right| = 2|n^3|$$

Do đó, theo định nghĩa, $\sum_{i=0}^{n} i(i+1)$ là $\Theta(n^3)$.