

# VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

## Thuật toán I

Mô tả, chứng minh, đánh giá thuật toán; Tìm kiếm và sắp xếp

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học  
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội  
[hoanganhduc@hus.edu.vn](mailto:hoanganhduc@hus.edu.vn)



# Nội dung



## Định nghĩa và một số khái niệm

### Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

### Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

### Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

### Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

## Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Định nghĩa và một số khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

2

## Định nghĩa và một số khái niệm

### Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

### Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

### Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

### Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- Một **thuật toán (algorithm)** là một tập hữu hạn các hướng dẫn cụ thể để thực hiện một nhiệm vụ nào đó

- cộng hai số tự nhiên biểu diễn dưới dạng số thập phân
- đăng ký môn học trực tuyến
- đi từ nhà đến trường

- Một **chương trình máy tính (computer program)** là

- một mô tả của thuật toán nào đó
- sử dụng một ngôn ngữ đủ chuẩn xác để máy tính có thể hiểu

- cùng với các phép toán mà máy tính đã biết cách thực hiện

Ta nói rằng thuật toán được **cài đặt (implement)** cụ thể bằng chương trình máy tính

- Khi mở một phần mềm trong máy tính, ta nói rằng **chương trình hoặc thuật toán của nó được chạy hoặc được thực hiện bởi máy tính**

- Khi có mô tả của một thuật toán, bạn cũng **có thể thực hiện từng bước của thuật toán với giấy và bút**

# Định nghĩa và một số khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Một số tính chất của một thuật toán

**Đầu vào (Input)** Một thuật toán có các giá trị đầu vào từ một tập đã được xác định trước

**Đầu ra (Output)** Từ mỗi một tập các giá trị đầu vào, một thuật toán sinh ra các giá trị đầu ra. Các giá trị này chính là lời giải cho bài toán

**Tính xác định (Definiteness)** Các bước của một thuật toán cần phải được xác định một cách chính xác

**Tính đúng đắn (Correctness)** Với mỗi tập giá trị đầu vào, một thuật toán cần cho ra kết quả đầu ra đúng

**Tính hữu hạn (Finiteness)** Với mỗi tập giá trị đầu vào, một thuật toán cần cho ra các giá trị đầu ra mong muốn sau một số hữu hạn (có thể là rất lớn) các bước

**Tính hiệu quả (Effectiveness)** Mỗi bước của thuật toán cần được thực hiện một cách chính xác và trong thời gian hữu hạn

**Tính tổng quát (Generality)** Thuật toán phải áp dụng được cho mọi bài toán mong muốn, chứ không phải chỉ với một tập các giá trị đầu vào đặc biệt

3

**Định nghĩa và một số khái niệm**

**Mô tả thuật toán**

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

**Chứng minh thuật toán**

Bất biến vòng lặp

**Độ phức tạp tính toán**

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

**Tìm kiếm và Sắp xếp**

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Định nghĩa và một số khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Một *mô tả đầy đủ của một thuật toán* bao gồm ba phần

## (1) *Thuật toán (algorithm)*

- Mô tả một cách rõ ràng và chính xác nhất có thể
  - Một *thuật toán* có thể được *mô tả bằng một ngôn ngữ máy tính* (C, Python, Java, v.v...). Tuy nhiên, những mô tả này cần tuân theo các chỉ dẫn cụ thể trong ngôn ngữ máy tính tương ứng. Điều này dẫn đến việc các mô tả theo phương pháp này thường phức tạp và khó hiểu
  - Thay vì dùng một ngôn ngữ máy tính cụ thể để mô tả thuật toán, ta sử dụng *ngôn ngữ thông thường (natural language)*, *giả mã (pseudocode)*, hoặc *sơ đồ khối (flowchart)*
- Thường kèm theo mô tả ngắn gọn về ý tưởng của thuật toán

## (2) Một chứng minh về *tính đúng đắn (correctness)* của thuật toán

- Với mọi tập đầu vào hợp lệ, thuật toán cần cho kết quả đầu ra đúng

## (3) Một phân tích về *hiệu năng (performance)* của thuật toán

- Thời gian thực thi, không gian bộ nhớ, v.v...

4

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Mô tả thuật toán

## Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Sử dụng *ngôn ngữ thông thường (natural language)* để mô tả từng bước thực hiện thuật toán

**Bước 1** Thực hiện việc  $X$

**Bước 3** Lặp lại  $Z$

**Bước 2** Tính  $Y$

**Bước 4** ...

## Ví dụ 1 (Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường)

### ■ Bài toán:

■ **Input:** Dãy số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$

■ **Output:** Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

### ■ Tìm giá trị của phần tử lớn nhất:

**Bước 1** Gán biến  $v$  (lưu giá trị lớn nhất hiện tại) bằng  $a_1$

**Bước 2** Lần lượt xét các phần tử  $a_2, a_3, \dots, a_n$ :

- Nếu phần tử đang xét lớn hơn  $v$ , cập nhật  $v$  bằng giá trị của phần tử đó
- Ngược lại, giữ nguyên giá trị của  $v$

**Bước 3** Sau khi xét hết tất cả các phần tử, trả về giá trị của  $v$  (chính là phần tử lớn nhất trong dãy)

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

5

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

6 Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

## Ví dụ 2 (Thực hiện thuật toán)

■ **Input:** Dãy  $a_1 = 7, a_2 = 12, a_3 = 5, a_4 = 16, a_5 = 9$

■ **Output:** Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
<div>7</div>	<div>12</div>	<div>5</div>	<div>16</div>	<div>9</div>
	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$v = 7$	$v = 12$	$v = 12$	$v = 16$	$v = 16$

# Mô tả thuật toán

## Mô tả bằng giả mã



### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

#### Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

#### Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

#### Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- **Giả mã (pseudocode)** là một dạng *hỗn hợp giữa ngôn ngữ thông thường và ngôn ngữ lập trình*
- Một **biến (variable)** được sử dụng để biểu diễn vị trí trong bộ nhớ máy tính để lưu trữ một giá trị. Khi ta nói đến một biến  $X$  nào đó, trên thực tế, chúng ta muốn sử dụng giá trị lưu tại một vị trí nào đó trong bộ nhớ ứng với  $X$

## Phép gán (assignment)

`variable := expression`

- Tính toán **expression**
- Lưu kết quả vào (vị trí trong bộ nhớ ứng với) biến **variable**
- Chú ý rằng  $=$  và  $:=$  khác nhau. Do đó, trong nhiều tài liệu, ký hiệu  $\leftarrow$  được sử dụng thay thế cho  $:=$ .

7



# Mô tả thuật toán

## Mô tả bằng giả mã



### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

## Cấu trúc điều kiện (conditional statement)

if condition then

$S_1$

else

$S_2$

- Tính **condition**; trả lại True hoặc False
- Nếu True, thực hiện  $S_1$ ; nếu False, thực hiện  $S_2$
- Sau đó tiếp tục với các lệnh tiếp theo sau cấu trúc điều kiện

8

# Mô tả thuật toán

## Mô tả bằng giả mã



### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt buộc vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

## Vòng lặp **for** (**for loop**)

```
for variable := initial_value to final_value do  
    S
```

- Khởi tạo **variable** với giá trị **initial\_value**
- Nếu **variable**  $\leq$  **final\_value**, thực hiện đoạn mã **S**
- Sau mỗi lần lặp, tăng **variable** thêm 1
- Kiểm tra lại điều kiện; nếu vẫn thỏa mãn, tiếp tục lặp
- Khi **variable**  $>$  **final\_value**, thoát vòng lặp, thực hiện các lệnh tiếp theo ngay sau vòng **for**

9

# Mô tả thuật toán

## Mô tả bằng giả mã



### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

## Vòng lặp **while** (**while loop**)

```
while condition do  
    S
```

- Kiểm tra giá trị của **condition**
- Nếu **condition** là **True**, thực hiện đoạn mã **S**
- Sau khi thực hiện **S**, kiểm tra lại **condition**
- Nếu vẫn **True**, thực hiện **S** lần nữa
- Khi **condition** trở thành **False**, thoát khỏi vòng lặp và thực hiện các lệnh tiếp theo ngay sau vòng **while**

10

76

# Mô tả thuật toán

## Mô tả bằng giả mã



### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

## Vòng lặp **do-while** (**do-while** loop)

```
do  
    S  
while condition
```

- Thực hiện đoạn mã  $S$  trước
- Sau đó, kiểm tra giá trị của **condition**
- Nếu **condition** là True, thực hiện  $S$  lần nữa
- Tiếp tục lặp lại quá trình cho đến khi **condition** trở thành False
- Khác với vòng lặp **while**, vòng lặp **do-while** luôn thực hiện  $S$  ít nhất một lần
- Một số giáo trình đề cập cấu trúc **repeat...until** tương tự, với **until** sử dụng điều kiện ngược lại để dừng lặp

11

76

# Mô tả thuật toán

## Mô tả bằng giả mã



## Lệnh trả về (**return statement**)

**return expression**

- Trả về giá trị của **expression** làm kết quả đầu ra của thuật toán
- Khi gặp lệnh **return**, thuật toán sẽ kết thúc ngay lập tức
- Nếu **return** nằm trong một hàm, nó sẽ trả về giá trị cho nơi gọi hàm và kết thúc việc thực thi hàm

## Nhận xét và chú thích (**comments**)

- Nhận xét là văn bản giải thích mà chương trình sẽ bỏ qua khi thực thi
- Được sử dụng để làm rõ code hoặc giải thích logic
- Các dạng phổ biến:
  - `// Nhận xét một dòng`
  - `/* Nhận xét nhiều dòng */`
  - `⟨⟨ Nhận xét ⟩⟩`

### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

12

76

# Mô tả thuật toán

## Mô tả bằng giả mã



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

## Ví dụ 3 (Mô tả thuật toán bằng giả mã)

### Thuật toán 1: Tìm giá trị của phần tử lớn nhất

**Input:**  $a_1, a_2, \dots, a_n$ : dãy số nguyên

**Output:** Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

```
1   $v := a_1$  // phần tử lớn nhất đến hiện tại
2  for  $i := 2$  to  $n$  do // lần lượt xét  $a_2, \dots, a_n$ 
3      if  $a_i > v$  then //  $a_i >$  phần tử lớn nhất hiện tại?
4           $v := a_i$  // bây giờ  $v$  lớn nhất trong
               $a_1, \dots, a_i$ 
5  return  $v$ 
```

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

13

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Mô tả thuật toán

## Mô tả bằng sơ đồ khối



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

14 Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

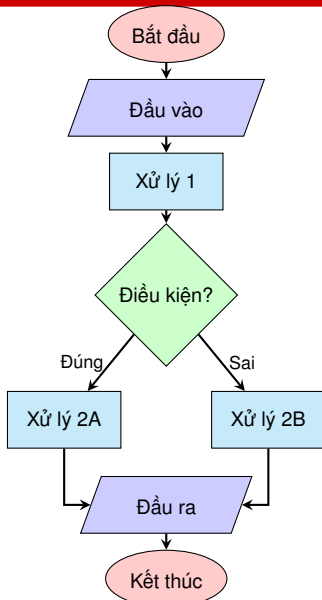
Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- **Sơ đồ khối (flowchart)** là một loại biểu đồ biểu diễn một luồng công việc hoặc quy trình
- Hiển thị các bước dưới dạng các hộp hình dạng khác nhau
- Thứ tự thực hiện được kết nối bằng các mũi tên
- Các thành phần chính:
  - **Bắt đầu/Kết thúc** (hình elip)
  - **Xử lý** (hình chữ nhật)
  - **Điều kiện** (hình thoi)
  - **Đầu vào/Đầu ra** (hình thang)



# Mô tả thuật toán

Mô tả bằng sơ đồ khối



## Ví dụ 4 (Mô tả thuật toán bằng sơ đồ khối)

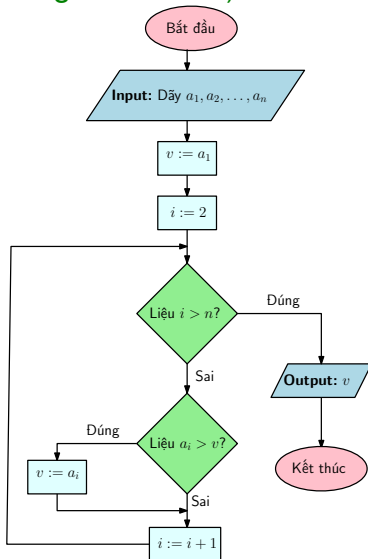
### Bài toán:

- **Input:** Dãy số nguyên

$a_1, a_2, \dots, a_n$

- **Output:** Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

**Ý tưởng:** Duyệt qua từng phần tử của dãy, lưu giữ giá trị lớn nhất đã tìm thấy cho đến hiện tại.



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

15 Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt buộc vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



# Chứng minh thuật toán

## Bất biến vòng lặp



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

16 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- Có rất nhiều phương pháp khác nhau để *chứng minh tính đúng đắn của một thuật toán*
- Một trong số đó là sử dụng *bất biến vòng lặp (loop invariant)*—một phương pháp được xây dựng dựa trên phương pháp quy nạp toán học
  - *Vòng lặp (loop): for, while, v.v...*
  - Một *bất biến vòng lặp* là *một phát biểu luôn đúng trước và sau mỗi lần lặp (iteration) của một vòng lặp (loop)*

What can I learn right now in just 10 minutes that could improve my algorithmic thinking?

All related (92) ▾

Sort

Recommended ▾



Thomas Cormen

The C in CLRS · Featured on ForbesUpvoted by Vaibhav Krishan, Ph. D. student Computer Science & Computational Complexity Theory, Indian Institute of Technology, Bombay (20... and Wei-Cheng Lin, M.S. Computer Science, National Taiwan University (2016)Author has **842** answers and **40.7M** answer views · 10y

Originally Answered: What can I learn right now in just 10 minutes that could improve my algorithmic thinking ?

It's pretty hard to answer that question without knowing what you already know. If I had to give just one thing, that thing would be loop invariants. Understand that when you write a loop, you either implicitly or explicitly use a loop invariant.

# Chứng minh thuật toán

## Bất biến vòng lặp



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khởi

Chứng minh thuật toán

17 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

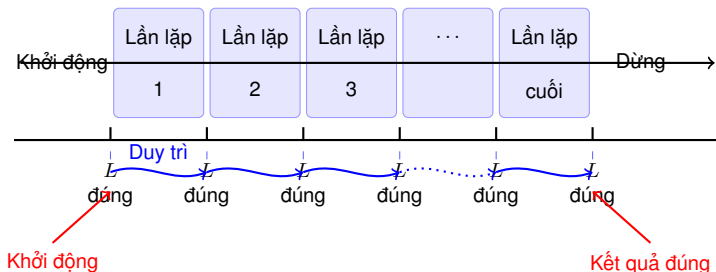
Sắp xếp chèn

Một bất biến vòng lặp  $L$  thỏa mãn ba tính chất:

**Khởi động (Initialization)**  $L$  đúng trước lần lặp đầu tiên của vòng lặp

**Duy trì (Maintenance)** Nếu  $L$  đúng trước một lần lặp của vòng lặp thì nó cũng đúng trước lần lặp tiếp theo

**Dừng (Termination)** Khi vòng lặp dừng, bất biến vòng lặp cho ta một tính chất hữu ích để chứng minh thuật toán đúng



Hình: Bất biến vòng lặp

# Chứng minh thuật toán

## Bất biến vòng lặp

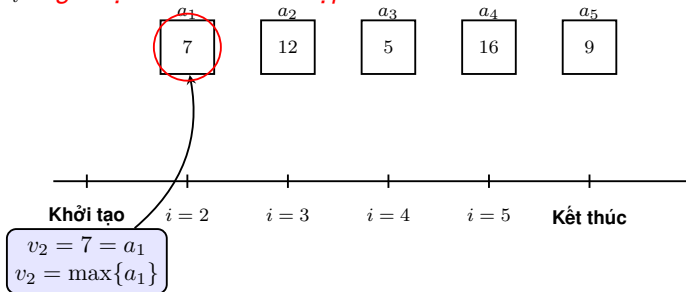


### Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên  $a_1, \dots, a_n$

$L = \text{“Ở trước lần lặp với biến } i, v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\} \text{”}$

Gọi  $v_i$  là *giá trị của  $v$  trước lần lặp với biến  $i$*



**Khởi động:**  $v_2 = a_1 = \max\{a_1\}$

### Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

18 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Chứng minh thuật toán

## Bất biến vòng lặp

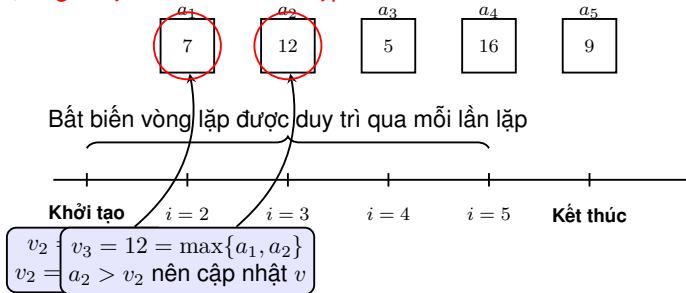


### Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên  $a_1, \dots, a_n$

$L =$  “*Ở trước lần lặp với biến  $i$ ,  $v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}$* ”

Gọi  $v_i$  là *giá trị của  $v$  trước lần lặp với biến  $i$*



**Khởi động:**  $v_2 = a_1 = \max\{a_1\}$

**Duy trì:** Trước  $i = k$ :  $v_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$

Trước  $i = k + 1$ :  $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$

Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

18 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Chứng minh thuật toán

## Bất biến vòng lặp

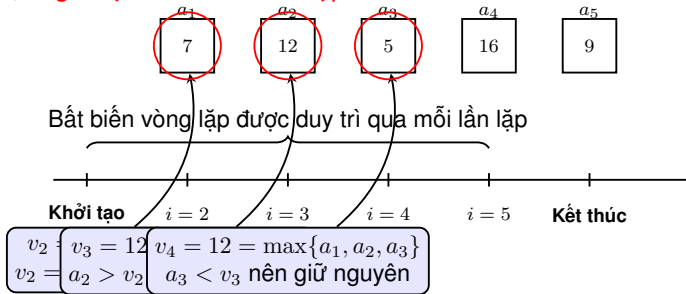


### Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên  $a_1, \dots, a_n$

$L =$  “*Ở trước lần lặp với biến  $i$ ,  $v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}$* ”

Gọi  $v_i$  là *giá trị của  $v$  trước lần lặp với biến  $i$*



**Khởi động:**  $v_2 = a_1 = \max\{a_1\}$

**Duy trì:** Trước  $i = k$ :  $v_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$

Trước  $i = k + 1$ :  $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$

Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

18 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Chứng minh thuật toán

## Bất biến vòng lặp

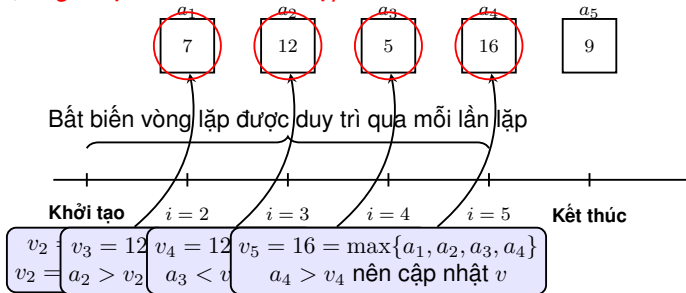


### Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên  $a_1, \dots, a_n$

$L =$  “*Ở trước lần lặp với biến  $i$ ,  $v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}$* ”

Gọi  $v_i$  là *giá trị của  $v$  trước lần lặp với biến  $i$*



**Khởi động:**  $v_2 = a_1 = \max\{a_1\}$

Trước  $i = k$ :  $v_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$

**Duy trì:** Trước  $i = k + 1$ :  $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$

### Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

18 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Chứng minh thuật toán

## Bất biến vòng lặp

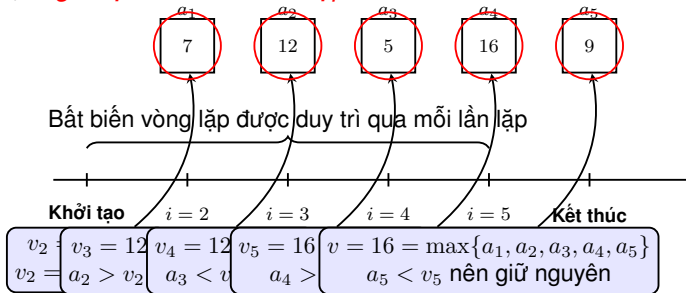


### Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên  $a_1, \dots, a_n$

$L =$  “*Ở trước lần lặp với biến  $i$ ,  $v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}$* ”

Gọi  $v_i$  là *giá trị của  $v$  trước lần lặp với biến  $i$*



**Khởi động:**  $v_2 = a_1 = \max\{a_1\}$

**Duy trì:** Trước  $i = k$ :  $v_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$

Trước  $i = k + 1$ :  $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$

### Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

18 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

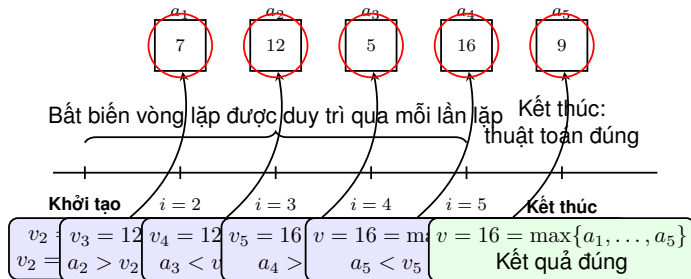


## Ví dụ 5

Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 1 (vòng **for** ở Dòng 2–4) tìm giá trị lớn nhất trong dãy số nguyên  $a_1, \dots, a_n$

$L =$  “*Ở trước lần lặp với biến  $i$ ,  $v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}$* ”

Gọi  $v_i$  là *giá trị của  $v$  trước lần lặp với biến  $i$*



**Khởi động:**  $v_2 = a_1 = \max\{a_1\}$

Trước  $i = k$ :  $v_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$

**Duy trì:** Trước  $i = k + 1$ :  $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$

**Dừng:**  $v = \max\{a_1, \dots, a_n\}$

Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

18

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

76



# Chứng minh thuật toán

## Bất biến vòng lặp



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

19 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

## Chứng minh tính chất của bất biến vòng lặp.

$L = \text{"Ở trước lần lặp với biến } i, v = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}"$

Gọi  $v_i$  là giá trị của  $v$  trước lần lặp với biến  $i$

■ **Khởi động** ( $i = 2$ ): Ta cần chỉ ra rằng trước vòng **for**,  $v_2 = \max\{a_1\} = a_1$ , và điều này hiển nhiên đúng do Thuật toán 1 gán  $v$  bằng  $a_1$  ở Dòng 1

■ **Duy trì**: Giả sử  $L$  đúng ở trước lần lặp với  $i = k$  nào đó, nghĩa là  $v_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ . Ta chứng minh  $L$  đúng ở trước lần lặp với  $i = k + 1$ , nghĩa là  $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$ . Ta xét các trường hợp dựa trên điều kiện ở Dòng 3

■ Nếu  $a_k > v = v_k$  sai, giá trị của  $v$  không thay đổi, và do đó  $v_{k+1} = v_k$ . Ta có  $\max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\} = \max\{v_k, a_k\} = v_k$ . Suy ra

$$v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$$

■ Nếu  $a_k > v = v_k$  đúng, giá trị của  $v$  được gán bằng  $a_k$ , và do đó  $v_{k+1} = a_k$ . Ta cũng có  $\max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\} = \max\{v_k, a_k\} = a_k$ . Suy ra  $v_{k+1} = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$

■ **Dừng**: Sau khi kết thúc lần lặp  $i = n$  (hoặc, trước khi bắt đầu lần lặp  $i = n + 1$  mà sẽ không bao giờ được thực hiện),  $v = \max\{a_1, \dots, a_n\}$  và do đó là giá trị lớn nhất của các phần tử trong dãy đầu vào



# Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

## Bài tập 1

Một thuật toán tính  $x^n$  với  $x \in \mathbb{R}^+$  và  $n \in \mathbb{N}$  được mô tả như sau

---

**Thuật toán 2:** Tính  $x^n$ .

---

**Input:**  $x$ : số thực dương,  $n$ : số tự nhiên

**Output:** Giá trị của  $x^n$

```
1 answer := 1
2 m := n
3 while m > 0 do
4   answer := answer · x
5   m := m - 1
6 return answer
```

---

Hãy chứng minh phát biểu  $L$  sau là một bất biến vòng lặp cho vòng **while**

$L =$  “Ở trước lần lặp với biến  $m$ ,  $answer = x^{n-m}$ ”

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

20 Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- **Phân tích thuật toán (algorithm analysis)** nghiên cứu cách đánh giá **hiệu quả** của thuật toán bằng cách ước lượng lượng **thời gian (time)** và **bộ nhớ (space)** cần thiết
- **Độ phức tạp (complexity)** của thuật toán là thước đo định lượng về tài nguyên (thời gian/bộ nhớ) mà thuật toán tiêu tốn
  - Thường được biểu diễn dưới dạng các hàm của **kích thước đầu vào (input size)**
  - Giúp ta so sánh và lựa chọn thuật toán hiệu quả nhất cho bài toán
- Với các hàm độ phức tạp  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hoặc  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , ta cần hiểu rõ tốc độ tăng trưởng của chúng
  - Ta nói  $f$  **tăng nhanh hơn**  $g$  nếu với mọi giá trị  $x$  đủ lớn,  $f(x) > g(x)$
  - Giúp ta đánh giá hiệu quả tương đối giữa các thuật toán khi kích thước đầu vào tăng lên
  - Là nền tảng để phân loại các thuật toán theo hiệu quả tiệm cận
- Để đánh giá và so sánh độ phức tạp một cách chính xác, ta sử dụng **ký hiệu O-lớn (big-O notation)** và các ký hiệu tiệm cận khác
  - Cho phép ta mô tả **tốc độ tăng trưởng (growth rate)** của các hàm độ phức tạp
  - Tập trung vào các thành phần chính ảnh hưởng đến tốc độ tăng trưởng, bỏ qua các yếu tố không quan trọng khi kích thước đầu vào lớn

21

76

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

### Ký hiệu $O$ -lớn

Cho  $f$  và  $g$  là các hàm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ta nói rằng  $f$  là  $O(g)$  (đọc là “ $f$  là  $O$ -lớn của  $g$ ” hoặc “ $f$  thuộc lớp  $O(g)$ ”) nếu tồn tại các hằng số  $C$  và  $k$  sao cho  $|f(x)| \leq C|g(x)|$  với mọi  $x > k$

### Ký hiệu $O$ -lớn

Cho  $f$  và  $g$  là các hàm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Giả sử  $g(x) \neq 0$  với  $x \in \mathbb{R}$  đủ lớn. Ta nói rằng  $f$  là  $O(g)$  (đọc là “ $f$  là  $O$ -lớn của  $g$ ” hoặc “ $f$  thuộc lớp  $O(g)$ ”) nếu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$  là hữu hạn

- $f$  là  $O(g)$  nếu từ sau điểm  $k$  nào đó, giá trị của hàm  $f$  không vượt quá giá trị của một hằng số nhân với giá trị của hàm  $g$ . Ta cũng nói “ $f$  bị chặn trên bởi  $g$ ”
- Các hằng số  $C$  và  $k$  được gọi là các **bằng chứng (witness)** cho mối liên hệ giữa  $f$  và  $g$ . Để xác định  $f$  là  $O(g)$ , chỉ cần một cặp bằng chứng là đủ

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

22

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

23

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

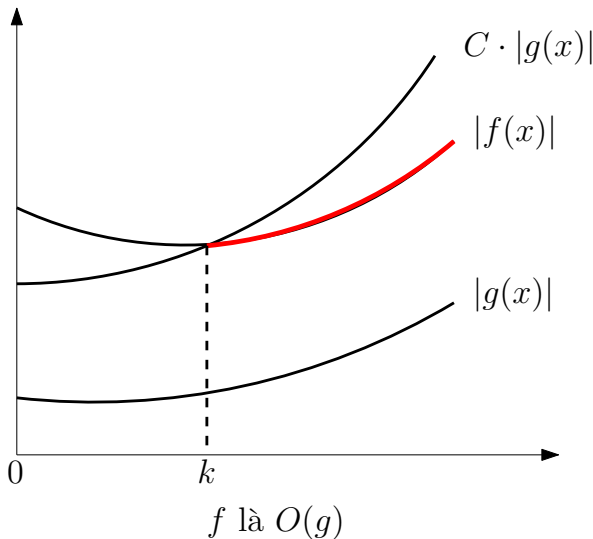
Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

24

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

## Ví dụ 6

Ta chứng minh hàm  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cho bởi  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  là  $O(g)$  với  $g(x) = x^2$  (Ta cũng viết  $x^2 + 2x + 1$  là  $O(x^2)$ )

**Cách 1:**

- Chú ý rằng khi  $x > 1$ , ta có  $x < x^2$  và  $1 < x^2$
- Do đó với mọi  $x > 1$ , ta có

$$|f(x)| = |x^2 + 2x + 1| \leq |x^2 + 2x^2 + x^2| = 4|x^2|$$

- Ta chọn  $C = 4$  và  $k = 1$

**Cách 2:** Do  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 + 2x + 1|}{|x^2|} = 1$ , ta có  $f = O(g)$

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

### Chú ý về quy tắc chia (division law of limit)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

chỉ đúng khi  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  đều tồn tại<sup>a</sup> và  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

<sup>a</sup>Nghĩa là các giới hạn này là các số hữu hạn

### Nhắc lại: Quy tắc L'Hospital (L'Hospital's rule)

Nếu  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  và  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ , thì  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , trong đó  $f'(x)$  và  $g'(x)$  lần lượt là đạo hàm của  $f(x)$  và  $g(x)$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

25 Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

26

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

## Ví dụ 7

Ta chứng minh  $x^2$  là  $O(2^x)$  bằng cách sử dụng định nghĩa  $O$ -lớn theo giới hạn. Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2|}{|2^x|} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2^x \cdot \ln 2} \\&= \frac{2}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^x} \\&= \frac{2}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x \cdot \ln 2} \\&= 0.\end{aligned}$$

Quy tắc L'Hospital

Quy tắc L'Hospital

Do đó,  $x^2 = O(2^x)$



# Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm



## Chú ý

Nếu không đề cập gì thêm thì  $\log(n) = \log_2(n)$

## Bài tập 2

Chứng minh

- (a)  $7x$  là  $O(x^3)$
- (b)  $x^3$  không là  $O(x^2)$
- (c)  $1 + 2 + \dots + n$  là  $O(n^2)$
- (d)  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$  là  $O(n^n)$
- (e)  $\log(n!)$  là  $O(n \log n)$
- (f)  $n^3$  là  $O(2^n)$
- (g)  $\log n$  là  $O(n)$
- (h) Với các hằng số  $b > 1$  và  $k > 0$ ,  $\log_b(n^k)$  là  $O(\log n)$

## Bài tập 3

Hãy giải thích một hàm  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là  $O(1)$  nghĩa là gì

Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

27

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

76

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



### Bài tập 4

Chứng minh rằng

- (a)  $x^3$  là  $O(x^4)$  nhưng  $x^4$  không là  $O(x^3)$
- (b)  $3x^4 + 1$  là  $O(x^4/2)$  và  $x^4/2$  là  $O(3x^4 + 1)$
- (c)  $x \log x$  là  $O(x^2)$  nhưng  $x^2$  không là  $O(x \log x)$
- (d)  $2^n$  là  $O(3^n)$  nhưng  $3^n$  không là  $O(2^n)$

### Bài tập 5

Chứng minh rằng nếu  $f(x)$  là  $O(x)$  thì  $f(x)$  cũng là  $O(x^2)$

### Bài tập 6

Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho phát biểu: Nếu  $f(x)$  là  $O(g_1(x))$  và  $f_2(x)$  là  $O(g_2(x))$  thì  $f_1(x) - f_2(x)$  là  $O(g_1(x) - g_2(x))$

### Bài tập 7

Chứng minh rằng nếu  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  với  $a_0, a_1, \dots, a_n$  là các số thực (nghĩa là,  $f(x)$  là một đa thức bậc  $n$ ) thì  $f$  là  $O(x^n)$

Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

28

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

29

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- Ký hiệu  $f(n) = O(g(n))$  thường được sử dụng để chỉ  $f(n)$  là  $O(g(n))$ 
  - Ký hiệu này không hoàn toàn chặt chẽ về mặt toán học, do  $f(n)$  là một hàm còn  $O(g(n))$  là một tập hợp các hàm
  - $f(n) = O(g(n))$  trên thực tế nghĩa là  $f(n) \in O(g(n))$ , do đó có thể viết  $n = O(n^2)$  nhưng **không nên viết**  $O(n^2) = n$
- Bạn có thể gặp biểu thức dạng “ $f(n) + O(g(n)) = O(h(n))$ ”
  - Dấu “=” ở đây nghĩa là “ $\subseteq$ ”. Cụ thể, biểu thức trên cần được hiểu là tập hợp  $S$  gồm các hàm  $f(n) + g_1(n)$  với  $g_1(n) \in O(g(n))$  là tập con của tập  $O(h(n))$
- Bạn có thể gặp biểu thức dạng “ $f(n) \leq g(n) + O(h(n))$  với mọi  $n \geq 0$ ” hoặc tương tự
  - Nghĩa là tồn tại  $e(n)$  sao cho (a)  $f(n) \leq g(n) + e(n)$  với mọi  $n \geq 0$  và (b)  $e(n) \in O(h(n))$
- Một số tác giả định nghĩa  $O$ -lớn bằng cách thay điều kiện  $|f(x)| \leq C|g(x)|$  bằng  $0 \leq f(x) \leq C(g(x))$ . (Làm việc với giá trị tuyệt đối và khả năng các hàm  $f(x)$  và  $g(x)$  có thể nhận giá trị âm thường khó hơn là chỉ làm việc với các hàm nhận giá trị dương.) Định nghĩa theo cách này không hoàn toàn chặt chẽ. Ví dụ như hàm  $\log x$  có thể nhận giá trị âm với  $x$  nhỏ

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

## Bài tập 8

Giải thích ý nghĩa của các ký hiệu sau:

(a)  $n^{O(k)}$

(b)  $n^2 + O(n)$

(c)  $n^2 + O(n) = O(n^2)$

## Bài tập 9

Sử dụng ký hiệu  $O$ -lớn để đánh giá liên hệ giữa các cặp hàm sau. Giải thích kết quả của bạn

(a)  $n^{124}$  và  $1.24^n$

(b)  $^{124}\sqrt{n}$  và  $(\log n)^{124}$

(c)  $n \log n$  và  $n^{\log n}$

(d)  $\sqrt{n}$  và  $2^{\sqrt{\log n}}$

(e)  $\sqrt{n}$  và  $n^{\sin(n)}$

(f)  $(n + \log n)^2$  và  $n^2 + n \log n$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

30

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

31

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

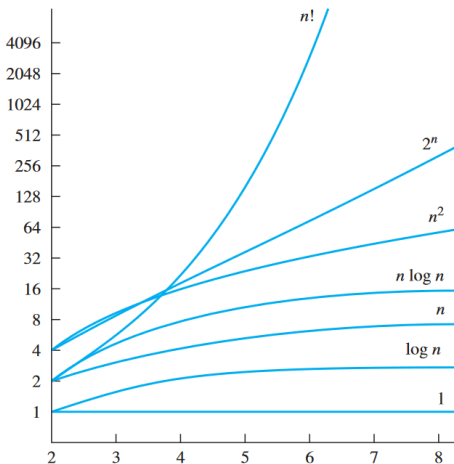
Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



Hình: Độ tăng của một số hàm thường dùng khi đánh giá với ký hiệu  $O$ -lớn [Rosen 2012]

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

32

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Một số xấp xỉ hữu ích

(1) Nếu  $d > c > 1$ , thì  $n^c$  là  $O(n^d)$ , nhưng  $n^d$  không là  $O(n^c)$

(2) Nếu  $b > 1$  và  $c, d$  là các số dương, thì  $(\log_b n)^c$  là  $O(n^d)$  nhưng  $n^d$  không là  $O((\log_b n)^c)$

(3) Nếu  $b > 1$  và  $d$  là số dương, thì  $n^d$  là  $O(b^n)$  nhưng  $b^n$  không là  $O(n^d)$

(4) Nếu  $c > b > 1$ , thì  $b^n$  là  $O(c^n)$  nhưng  $c^n$  không là  $O(b^n)$

Một số tính chất quan trọng

(a) Nếu  $f_1(x) = O(g_1(x))$  và  $f_2(x) = O(g_2(x))$  thì  $(f_1 + f_2)(x) = O(g(x))$  trong đó  $g(x) = \max\{|g_1(x)|, |g_2(x)|\}$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$

(b) Nếu  $f_1(x) = O(g_1(x))$  và  $f_2(x) = O(g_2(x))$  thì  $(f_1 f_2)(x) = O(g_1(x)g_2(x))$

## Bài tập 10

Ước lượng theo  $O$ -lớn hàm  $f(n) = 3n \log n! + (n^2 + 3) \log n$

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

33

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

## Bài tập 11

Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là  $O$ -lớn của hàm tiếp theo

- (a)  $\sqrt{n}$ ,  $1000 \log n$ ,  $n \log n$ ,  $2n!$ ,  $2^n$ ,  $3^n$ , và  $\frac{n^2}{1000000}$
- (b)  $(1.5)^n$ ,  $n^{100}$ ,  $(\log n)^3$ ,  $\sqrt{n} \log n$ ,  $10^n$ ,  $(n!)^2$ , và  $n^{99} + n^{98}$

## Bài tập 12

Giả sử bạn có hai thuật toán khác nhau để giải một bài toán. Để giải một bài toán có kích thước  $n$ ,

- (1) thuật toán thứ nhất sử dụng đúng  $n(\log n)$  phép toán và thuật toán thứ hai sử dụng đúng  $n^{3/2}$  phép toán;
- (2) thuật toán thứ nhất sử dụng đúng  $n^2 2^n$  phép toán và thuật toán thứ hai sử dụng đúng  $n!$  phép toán.

Khi  $n$  tăng, trong mỗi trường hợp trên, thuật toán nào sử dụng ít phép toán hơn?

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

## Bài tập 13

Hãy đưa ra ước lượng  $O$ -lớn chính xác nhất có thể cho mỗi hàm sau

- (a)  $(n^2 + 8)(n + 1)$
- (b)  $(n \log n + n^2)(n^3 + 2)$
- (c)  $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2 + 1))$
- (d)  $(n^3 + n^2 \log n)(\log n + 1) + (17 \log n + 19)(n^3 + 2)$
- (e)  $(2n + n^2)(n^3 + 3n)$
- (f)  $(n^n + n2^n + 5^n)(n! + 5n)$
- (g)  $n \log(n^2 + 1) + n^2 \log n$
- (h)  $(n \log n + 1)^2 + (\log n + 1)(n^2 + 1)$
- (i)  $n^{2^n} + n^{n^2}$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

34

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



### Bài tập 14

Giả sử  $T(1) = O(1)$  và  $T(n) = T(n-1) + O(1)$  với mọi  $n > 1$ . Chứng minh sau sai ở đâu? Hãy đánh giá  $T(n)$  theo ký hiệu  $O$ -lớn và giải thích đánh giá của bạn.

Giả sử  $P(n)$  là phát biểu  $T(n) = O(1)$ . Ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$  bằng quy nạp.

■ **Bước cơ sở:**  $P(1)$  đúng vì  $T(1) = O(1)$ .

■ **Bước quy nạp:** Giả sử  $P(k)$  đúng với số nguyên  $k \geq 1$  nào đó, nghĩa là  $T(k) = T(k-1) + O(1)$ . Ta chứng minh  $P(k+1)$  đúng, nghĩa là chứng minh  $T(k+1) = T(k) + O(1)$ . Thật vậy, ta có:

$$T(k+1) = T(k) + O(1) \quad \text{giả thiết} \quad (1)$$

$$= (T(k-1) + O(1)) + O(1) \quad \text{giả thiết quy nạp} \quad (2)$$

$$= T(k-1) + O(1) + O(1) \quad (3)$$

$$= T(k-1) + O(1). \quad (4)$$

Do đó,  $P(k+1)$  đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có  $P(n)$  đúng với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$ , tức là  $T(n) = O(1)$  với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

35

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

### Ký hiệu $\Omega$ -lớn

Cho  $f$  và  $g$  là các hàm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ta nói rằng  $f$  là  $\Omega(g)$  nếu tồn tại các hằng số  $C > 0$  và  $k$  sao cho  $|f(x)| \geq C|g(x)|$  với mọi  $x > k$

### Ký hiệu $\Omega$ -lớn

Cho  $f$  và  $g$  là các hàm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Giả sử  $g(x) \neq 0$  với  $x \in \mathbb{R}$  đủ lớn. Ta nói rằng  $f$  là  $\Omega(g)$  nếu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$  khác 0

## Bài tập 15

Chứng minh rằng  $f$  là  $\Omega(g)$  khi và chỉ khi  $g$  là  $O(f)$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

36

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

### Chú ý

$f$  là  $O(g)$  theo nghĩa nào đó là “độ tăng của  $f \leq$  độ tăng của  $g$ ”. Tuy nhiên, bạn cần cẩn thận! Với hai số thực  $a, b \in \mathbb{R}$ , các bất đẳng thức  $a \leq b$  và  $b \leq a$  không thể cùng sai. Nhưng tồn tại hàm  $f$  sao cho  $f = O(g)$  và  $f = \Omega(g)$  cùng sai

## Bài tập 16 (★)

Tìm các ví dụ của các hàm  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn các điều kiện (a) – (d) tương ứng

	$f(n)$ là $O(n^3)$	$f(n)$ không là $O(n^3)$
$f(n)$ là $\Omega(n^3)$	(a)	(b)
$f(n)$ không là $\Omega(n^3)$	(c)	(d)

Cụ thể, ở (a), bạn cần tìm ví dụ về một hàm  $f(n)$  đồng thời là  $O(n^3)$  và  $\Omega(n^3)$  và chứng minh ví dụ bạn tìm ra là đúng. Tương tự cho các phần (b), (c), và (d)

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



### Ký hiệu $\Theta$ -lớn

Cho  $f$  và  $g$  là các hàm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ta nói rằng  $f$  là  $\Theta(g)$  nếu  $f$  là  $O(g)$  và  $f$  là  $\Omega(g)$

### Ký hiệu $\Theta$ -lớn

Cho  $f$  và  $g$  là các hàm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Giả sử  $g(x) \neq 0$  với  $x \in \mathbb{R}$  đủ lớn. Ta nói rằng  $f$  là  $\Theta(g)$  nếu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$  là hữu hạn và khác 0

## Bài tập 17

- (a) Chứng minh rằng  $1 + 2 + \dots + n$  là  $\Theta(n^2)$
- (b) Các tập  $O(1)$  và  $\Theta(1)$  có bằng nhau không? Tại sao?

## Bài tập 18

Chứng minh rằng với các hàm  $f, g$  từ  $\mathbb{R}$  đến  $\mathbb{R}$ ,  $f$  là  $\Theta(g)$  khi và chỉ khi tồn tại các hằng số dương  $C_1, C_2$ , và  $k$  sao cho  $C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$  với mọi  $x > k$

### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

38

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

### Ký hiệu $o$ -nhỏ

Cho  $f$  và  $g$  là các hàm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ta nói rằng  $f$  là  $o(g)$  nếu với mọi  $C > 0$  tồn tại  $k$  sao cho  $|f(x)| < C|g(x)|$  với mọi  $x > k$

### Ký hiệu $o$ -nhỏ

Cho  $f$  và  $g$  là các hàm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Giả sử  $g(x) \neq 0$  với  $x \in \mathbb{R}$  đủ lớn. Ta nói rằng  $f$  là  $o(g)$  nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$

### Ký hiệu $o$ -nhỏ

Cho  $f$  và  $g$  là các hàm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ta nói rằng  $f$  là  $o(g)$  nếu  $f$  là  $O(g)$  nhưng  $f$  không là  $\Omega(g)$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

39

76

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

### Ký hiệu $\omega$ -nhỏ

Cho  $f$  và  $g$  là các hàm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ta nói rằng  $f$  là  $\omega(g)$  nếu với mọi  $C > 0$  tồn tại  $k$  sao cho  $|f(x)| > C|g(x)|$  với mọi  $x > k$

### Ký hiệu $\omega$ -nhỏ

Cho  $f$  và  $g$  là các hàm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Giả sử  $g(x) \neq 0$  với  $x \in \mathbb{R}$  đủ lớn. Ta nói rằng  $f$  là  $\omega(g)$  nếu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$  bằng  $\infty$

### Ký hiệu $\omega$ -nhỏ

Cho  $f$  và  $g$  là các hàm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Giả sử  $g(x) \neq 0$  với  $x \in \mathbb{R}$  đủ lớn. Ta nói rằng  $f$  là  $\omega(g)$  nếu  $f$  là  $\Omega(g)$  nhưng  $f$  không là  $O(g)$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

40

76

# Độ phức tạp tính toán

## Độ tăng của các hàm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Tóm lại, với các hàm  $f$  và  $g$  từ  $\mathbb{R}$  đến  $\mathbb{R}$

■  $f$  là  $O(g)$  “ $f$  tăng không nhanh hơn  $g$ ” tương tự “ $\leq$ ”

$$\exists C, k \forall x > k \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$$

■  $f$  là  $\Omega(g)$  “ $f$  tăng ít nhất nhanh như  $g$ ” tương tự “ $\geq$ ”

$$\exists C > 0, k \forall x > k \quad |f(x)| \geq C|g(x)|$$

■  $f$  là  $\Theta(g)$  “ $f$  tăng nhanh như  $g$ ” tương tự “ $=$ ”

$$\exists C_1 > 0, C_2 > 0, k \forall x > k \quad C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$$

■  $f$  là  $o(g)$  “ $f$  tăng chậm hơn  $g$ ” tương tự “ $<$ ”

$$\forall C > 0 \exists k \forall x > k \quad |f(x)| < C|g(x)|$$

■  $f$  là  $\omega(g)$  “ $f$  tăng nhanh hơn  $g$ ” tương tự “ $>$ ”

$$\forall C > 0 \exists k \forall x > k \quad |f(x)| > C|g(x)|$$

41

76

# Độ phức tạp tính toán

## Định nghĩa và khái niệm



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

42

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- Một thuật toán tốt phải *luôn đúng về mặt kết quả* và *hiệu quả về mặt tài nguyên*
- **Độ phức tạp (complexity)** đo lường mức độ khó khăn của một tính toán dựa trên tài nguyên cần thiết:
  - **Độ phức tạp theo thời gian (time complexity):** Số lượng các phép toán cơ bản hoặc số bước thực hiện
  - **Độ phức tạp theo không gian (space complexity):** Lượng bộ nhớ (số bit) cần thiết để thực hiện tính toán
- Độ phức tạp của thuật toán thay đổi theo **kích thước đầu vào (input size)**
  - Ví dụ: Tìm kiếm một phần tử trong dãy có 100000 phần tử sẽ tốn nhiều tài nguyên hơn so với dãy có chỉ vài phần tử
- Do đó, độ phức tạp thường được biểu diễn dưới dạng một **hàm số  $f(n)$**  với  $n$  là kích thước đầu vào
  - Hàm này giúp ta dự đoán tài nguyên cần thiết khi kích thước đầu vào tăng lên
- Khi phân tích thuật toán, chúng ta không quan tâm đến chính xác số lượng phép toán, mà chỉ cần **đánh giá tiệm cận (asymptotic estimate)** về mức độ tài nguyên tiêu thụ khi kích thước đầu vào tăng lên



# Độ phức tạp tính toán

## Độ phức tạp tính toán theo thời gian



### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

- Các ký hiệu tiệm cận là những công cụ toán học thiết yếu để đặc trưng hóa và so sánh độ phức tạp các thuật toán
- Trong phân tích *độ phức tạp tính toán theo thời gian (time complexity)*, ta xem xét ba loại trường hợp:
  - *Độ phức tạp trường hợp xấu nhất (worst-case complexity)*: Thời gian tối đa mà thuật toán có thể tiêu tốn với bất kỳ đầu vào nào có kích thước cụ thể—**thường được sử dụng phổ biến nhất trong phân tích thuật toán**
  - *Độ phức tạp trường hợp trung bình (average-case complexity)*: Thời gian trung bình khi xét tất cả các đầu vào có khả năng xuất hiện với cùng kích thước—**thường khó xác định**
  - *Độ phức tạp trường hợp tốt nhất (best-case complexity)*: Thời gian tối thiểu với đầu vào thuận lợi nhất có kích thước cụ thể—**ít có giá trị thực tiễn trong đánh giá thuật toán**
- Trong thực hành, ta thường mô tả thời gian chạy của thuật toán theo *ký hiệu O-lớn* để đơn giản hóa việc phân tích. *Ký hiệu  $\Theta$ -lớn* cung cấp đánh giá chính xác hơn về độ phức tạp thực sự nhưng đôi khi khó xác định
- Cần lưu ý rằng nhiều tài liệu sử dụng biểu thức “ $f(n)$  là  $O(g(n))$ ” khi thực chất họ đang muốn biểu diễn “ $f(n)$  là  $\Theta(g(n))$ ”

43

76

# Độ phức tạp tính toán

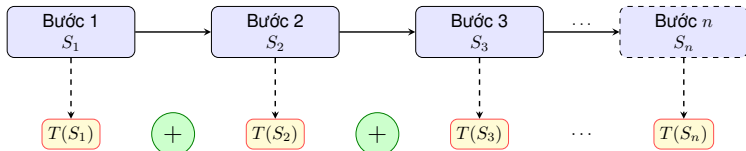
## Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Độ phức tạp của một chuỗi tuần tự các bước là tổng của độ phức tạp của từng bước



$$\text{Tổng độ phức tạp} = T(S_1) + T(S_2) + T(S_3) + \dots + T(S_n)$$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

44

76

# Độ phức tạp tính toán

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

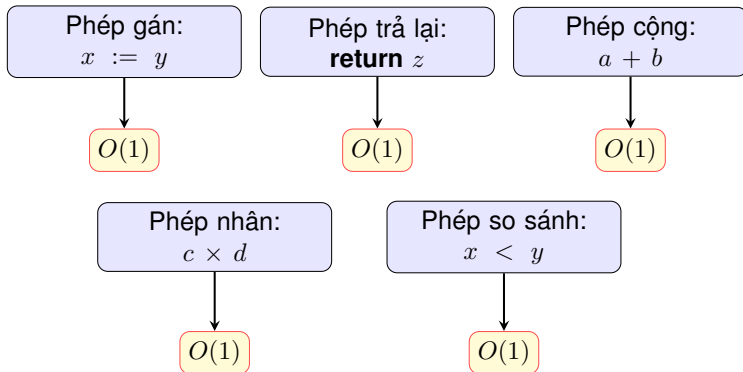


Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thời gian thực hiện các lệnh gán ( $:=$ ), trả lại (**return**) là  $O(1)$ , và giả sử thời gian thực hiện các phép toán cơ bản (cộng, trừ, nhân, chia, so sánh, v.v...) cũng là  $O(1)$

- Trong thực tế, việc cộng hai số nguyên độ dài  $n$  bit biểu diễn dưới dạng số nhị phân có độ phức tạp  $O(n)$  chứ không phải  $O(1)$



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

45

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

76

# Độ phức tạp tính toán

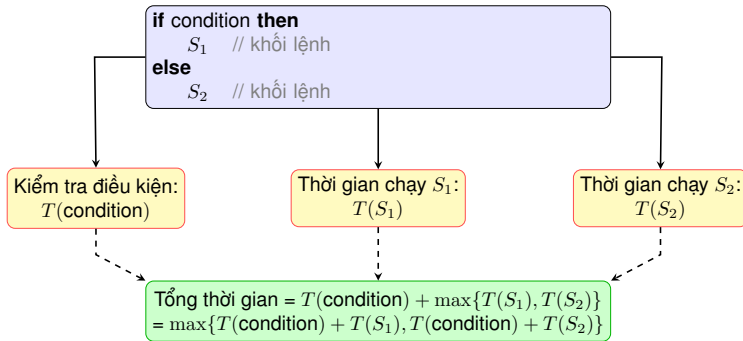
Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thời gian thực hiện cấu trúc **if...then...else** là thời gian lớn nhất thực hiện các lệnh sau **then** hoặc sau **else** cộng với thời gian kiểm tra điều kiện



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt buộc vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

46

76

# Độ phức tạp tính toán

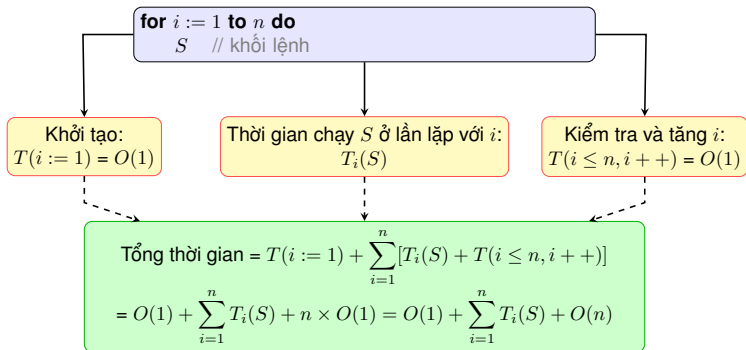
## Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Thời gian thực hiện vòng lặp là tổng thời gian thực hiện các lần lặp và thời gian kiểm tra điều kiện lặp. Nếu thời gian thực hiện mỗi lần lặp là giống nhau, thì tổng thời gian thực hiện các lần lặp là tích của số lần lặp và thời gian thực hiện mỗi lần lặp



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

47

76

# Độ phức tạp tính toán

Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường  
Mô tả bằng giả mã  
Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

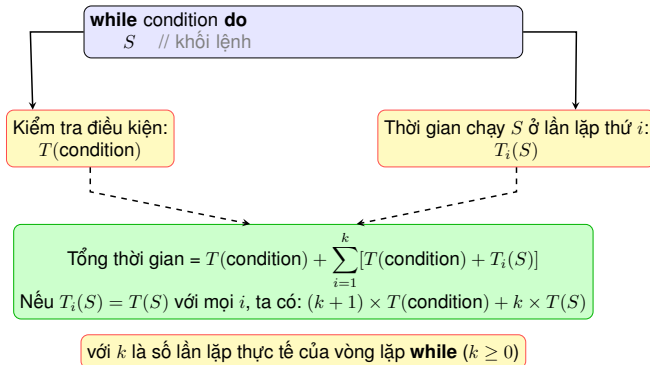
Độ tăng của các hàm  
Định nghĩa và khái niệm

48 Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm  
Tìm kiếm tuyến tính  
Tìm kiếm nhị phân  
Một số thuật toán sắp xếp  
Sắp xếp nổi bọt  
Sắp xếp chèn

Thời gian thực hiện vòng lặp là tổng thời gian thực hiện các lần lặp và thời gian kiểm tra điều kiện lặp. Nếu thời gian thực hiện mỗi lần lặp là giống nhau, thì tổng thời gian thực hiện các lần lặp là tích của số lần lặp và thời gian thực hiện mỗi lần lặp



**Chú ý:** Nếu điều kiện sai ngay từ đầu ( $k = 0$ ), khối lệnh  $S$  không được thực hiện lần nào

# Độ phức tạp tính toán

## Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

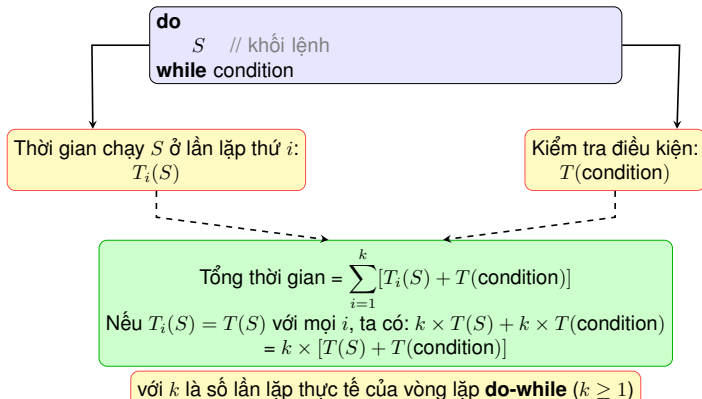
Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Thời gian thực hiện vòng lặp là tổng thời gian thực hiện các lần lặp và thời gian kiểm tra điều kiện lặp. Nếu thời gian thực hiện mỗi lần lặp là giống nhau, thì tổng thời gian thực hiện các lần lặp là tích của số lần lặp và thời gian thực hiện mỗi lần lặp



**Chú ý:** Khác vòng lặp while, vòng lặp do-while luôn thực hiện S ít nhất một lần

# Độ phức tạp tính toán

Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

**Bảng:** Một số thuật ngữ thường dùng

Độ phức tạp	Thuật ngữ
$O(1)$	Độ phức tạp hằng số (constant complexity)
$O(\log n)$	Độ phức tạp lôgarit (logarithmic complexity)
$O(n)$	Độ phức tạp tuyến tính (linear complexity)
$O(n \log n)$	Độ phức tạp $n \log n$ (linearithmic complexity)
$O(n^b)$	Độ phức tạp đa thức (polynomial complexity)
$O(b^n)$ , với $b > 1$	Độ phức tạp hàm mũ (exponential complexity)
$O(n!)$	Độ phức tạp giai thừa (factorial complexity)

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

50

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



# Độ phức tạp tính toán

## Độ phức tạp tính toán theo thời gian



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

51 Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

76

**Thuật toán 1:** Tìm giá trị của phần tử lớn nhất

**Input:**  $a_1, a_2, \dots, a_n$ : dãy số nguyên

**Output:** Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

```
1  $v := a_1$   $t_1$ 
2 for  $i := 2$  to  $n$  do
3   if  $a_i > v$  then  $t_2$ 
4      $v := a_i$ 
5 return  $v$   $t_3$ 
```

**Thuật toán 1:** Tìm giá trị của phần tử lớn nhất

$T(n)$  là  $O(n)$

$T(n)$  là  $O(n)$

**Input:**  $a_1, a_2, \dots, a_n$ : dãy số nguyên (xấu nhất)

(tốt nhất)

**Output:** Giá trị của phần tử lớn nhất trong dãy

```
1  $v := a_1$   $t_1$ 
2 for  $i := 2$  to  $n$  do
3   if  $a_i > v$  then  $t_2$ 
4      $v := a_i$   $t_4^i$ 
```

# Thuật toán

## Một số bài tập



### Bài tập 19

- (a) Thiết kế thuật toán để tính tổng của tất cả các số hạng trong một dãy số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$  cho trước
- (b) Chứng minh thuật toán bạn thiết kế là đúng
- (c) Đánh giá thời gian chạy của thuật toán bạn thiết kế

### Bài tập 20

Một chuỗi ký tự được gọi là **chuỗi đối xứng (palindrome)** khi viết từ trái qua phải và viết từ phải qua trái thì chuỗi không thay đổi. Một ví dụ là chuỗi madam.

- (a) Thiết kế thuật toán để kiểm tra xem một chuỗi ký tự có phải là chuỗi đối xứng hay không
- (b) Đánh giá thời gian chạy của thuật toán bạn thiết kế

### Bài tập 21

Cho  $f : A \rightarrow B$  là một hàm với các tập  $A, B$  là các tập con hữu hạn của  $\mathbb{Z}$ . Hãy thiết kế một thuật toán để kiểm tra xem

- (a) liệu  $f$  có là đơn ánh không;
- (b) liệu  $f$  có là toàn ánh không.

Trong mỗi trường hợp, hãy đánh giá thời gian chạy của thuật toán bạn thiết kế

#### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt đầu vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

52

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Thuật toán

## Một số thuật toán tìm kiếm



### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

53

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

### Bài toán tìm kiếm

Cho một dãy  $n$  phần tử  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và một phần tử  $x$ . Tìm  $x$  trong dãy đã cho hoặc kết luận rằng  $x$  không có trong dãy

- Tìm kiếm tuyến tính (Linear Search)
- Tìm kiếm nhị phân (Binary Search)



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

54

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

76

## ■ Bài toán:

- **Input:**  $a_1, \dots, a_n$ : dãy số nguyên,  $x$ : số nguyên
- **Output:** Chỉ số  $i$  thỏa mãn  $x = a_i$  hoặc 0 nếu  $x$  không có trong dãy

## ■ Tìm kiếm tuyến tính:

- (1) Bắt đầu từ phần tử đầu tiên của dãy ( $a_1$ )
- (2) So sánh phần tử hiện tại ( $a_i$ ) với giá trị cần tìm  $x$
- (3) Nếu  $a_i = x$ , trả về vị trí  $i$  và kết thúc thuật toán
- (4) Nếu  $a_i \neq x$ , chuyển sang phần tử tiếp theo ( $a_{i+1}$ )
- (5) Lặp lại bước (2) đến (4) cho đến khi tìm thấy  $x$  hoặc đã duyệt hết dãy
- (6) Nếu đã duyệt hết dãy mà không tìm thấy  $x$ , trả về giá trị 0



## Ví dụ 8 (Tìm kiếm tuyến tính)

- **Input:** Dãy  $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 12$  và  $x = 8$
- **Output:** Chỉ số  $i$  thỏa mãn  $x = a_i$  hoặc 0 nếu  $x$  không có trong dãy

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
<div>2</div>	<div>5</div>	<div>6</div>	<div>8</div>	12
$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	
$\neq x$	$\neq x$	$\neq x$	$= x$	

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

55

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



## Thuật toán 3: Tìm kiếm tuyến tính (Linear Search)

**Input:**  $a_1, \dots, a_n$ : dãy số nguyên,  $x$ : số nguyên

**Output:** Chỉ số  $i$  thỏa mãn  $x = a_i$  hoặc 0 nếu  $x$  không có trong dãy

```
1   $i := 1$                                      // Bắt đầu từ đầu dãy
2  while  $i \leq n$  và  $x \neq a_i$  do // Chưa xong và chưa tìm thấy
3     $i := i + 1$  // Đi tới vị trí tiếp theo trong dãy
4  if  $i \leq n$  then
5     $location := i$                              // Tìm thấy  $x$  trong dãy
6  else
7     $location := 0$                              // Không tìm thấy  $x$  trong dãy
8  return  $location$ 
```

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

56

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 3 (vòng **while** ở Dòng 2–3) tìm kiếm tuyến tính số nguyên  $x$  trong dãy  $a_1, \dots, a_n$

$L = \text{“Ở trước lần lặp với biến } i, x \notin \{a_1, \dots, a_{i-1}\}”$

- **Khởi động** ( $i = 1$ ): Do  $i - 1 = 0$ , tập  $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$  là tập rỗng, và do đó  $x \notin \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ , nghĩa là  $L$  đúng
- **Duy trì**: Giả sử  $L$  đúng ở trước lần lặp với  $i = k$  nào đó, nghĩa là  $x \notin \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ . Ta chứng minh  $L$  đúng ở trước lần lặp với  $i = k + 1$ , nghĩa là  $x \notin \{a_1, \dots, a_k\}$ . Thật vậy, để thực hiện lần lặp  $i = k$ , điều kiện ở vòng **while** cần được thỏa mãn, nghĩa là  $k \leq n$  và  $x \neq a_k$ . Kết hợp với giả thiết, ta có điều cần chứng minh
- **Dừng**: Vòng lặp **while** kết thúc khi  $i = n + 1$  hoặc  $x = a_i$  với  $1 \leq i \leq n$ . Với trường hợp đầu tiên, bất biến vòng lặp  $L$  cho ta  $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$  và do đó kết luận không tìm được  $x$ . Với trường hợp thứ hai,  $x$  hiển nhiên thuộc dãy đã cho

## Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



### Thuật toán 3: Tìm kiếm tuyến tính (Linear Search)

**Input:**  $a_1, \dots, a_n$ : dãy số nguyên,  $x$ : số nguyên

**Output:** Chỉ số  $i$  thỏa mãn  $x = a_i$  hoặc 0 nếu  $x$  không có trong dãy

```
1  $i := 1$  _____  $t_1$ 
2 while  $i \leq n$  và  $x \neq a_i$  do
3    $i := i + 1$  _____  $t_5^i$  _____  $t_2$ 
4 if  $i \leq n$  then
5    $location := i$  _____  $t_6$ 
6 else
7    $location := 0$  _____  $t_7$ 
8 return  $location$  _____  $t_4$ 
```

$$T(n) = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

$$t_1, t_4 \text{ là } O(1)$$

$$T(n) \text{ là } O(n)$$

(xấu nhất)

$$T(n) \text{ là } O(1)$$

(tốt nhất)

$$t_3 = \max\{t_6, t_7\} + (\text{thời gian kiểm tra } i \leq n) = O(1)$$

$$t_2 = \sum_{\{i | i \leq n \wedge x \neq a_i\}} \left[ t_5^i + (\text{t.g. kiểm tra } i \leq n \text{ và } x \neq a_i) \right]$$

### Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

58

76





Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

## ■ Bài toán:

- **Input:**  $a_1, \dots, a_n$ : dãy số nguyên **thực sự tăng**,  $x$ : số nguyên
- **Output:** Chỉ số  $i$  thỏa mãn  $x = a_i$  hoặc 0 nếu  $x$  không có trong dãy

## ■ Tìm kiếm nhị phân: (Một ví dụ về kỹ thuật **chia để trị** (*divide and conquer*) trong thiết kế thuật toán)

- (1) Tính  $m = \lfloor (1 + n)/2 \rfloor$ . Phần tử ở giữa của dãy là  $a_m$
- (2) Chia dãy  $a_1, \dots, a_n$  thành hai dãy con (a)  $a_1, \dots, a_m$  và (b)  $a_{m+1}, \dots, a_n$ . Nếu  $x > a_m$  thì ta chỉ tìm  $x$  trong dãy con (b), còn ngược lại thì ta chỉ tìm  $x$  trong dãy con (a)
- (3) Làm tương tự cho đến khi không gian tìm kiếm chỉ còn một phần tử  $a_i$ . Nếu  $x = a_i$  thì trả lại vị trí  $i$  của  $x$ , còn ngược lại thì trả lại 0



### Ví dụ 9 (Tìm kiếm nhị phân)

- Input:** Dãy  $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 12$  và  $x = 8$
- Output:** Chỉ số  $i$  thỏa mãn  $x = a_i$  hoặc 0 nếu  $x$  không có trong dãy

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
2	5	6	8	12
$i$		$m$		$j$

$< x$

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
2	5	6	8	12
			$i = m$	$j$

$= x$

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
2	5	6	8	12
			$i = j$	

$= x$

#### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



### Thuật toán 4: Tìm kiếm nhị phân (Binary Search)

**Input:**  $a_1, \dots, a_n$ : dãy số nguyên *thực sự tăng*,  $x$ : số nguyên

**Output:** Chỉ số  $i$  thỏa mãn  $x = a_i$  hoặc 0 nếu  $x$  không có trong dãy

```
1   $i := 1$                                 // Chỉ số bắt đầu khoảng tìm kiếm
2   $j := n$                                 // Chỉ số kết thúc khoảng tìm kiếm
3  while  $i < j$  do                        // Khi khoảng tìm kiếm có  $> 1$  phần tử
4       $m := \lfloor (i + j) / 2 \rfloor$            // Chỉ số của phần tử ở giữa
5      if  $x > a_m$  then
6           $i := m + 1$ 
7      else
8           $j := m$ 
9  if  $x = a_i$  then
10      $location := i$ 
11 else
12      $location := 0$ 
13 return  $location$ 
```

#### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



Một bất biến vòng lặp trong Thuật toán 4 (vòng **while** ở Dòng 3–8) tìm kiếm nhị phân số nguyên  $x$  trong dãy thực sự tăng  $a_1, \dots, a_n$

$L :=$  Ở trước mỗi lần lặp với các biến  $i, j$ , nếu  $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$  thì  
 $x \in \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_j\}$

- **Khởi động** ( $i = 1, j = n$ ):  $L$  hiển nhiên đúng
- **Duy trì**: Giả sử ở trước lần lặp với các biến  $k, \ell$ , nếu  $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$  thì  $x \in \{a_k, a_{k+1}, \dots, a_\ell\}$ . Ta chứng minh rằng ở trước lần lặp kế tiếp với các biến (a)  $k, \lfloor (k + \ell)/2 \rfloor$  hoặc (b)  $\lfloor (k + \ell)/2 \rfloor + 1, \ell$ , nếu  $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$  thì tương ứng (a')  $x \in \{a_k, \dots, a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor}\}$  hoặc (b')  $x \in \{a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor + 1}, \dots, a_\ell\}$ . Với (a), điều kiện ở Dòng 7 cần được thỏa mãn, nghĩa là  $x \leq a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor}$ . Do đó, nếu  $x \in \{a_k, a_{k+1}, \dots, a_\ell\}$  thì (a') đúng. Với (b), điều kiện ở Dòng 5 cần được thỏa mãn, nghĩa là  $x > a_{\lfloor (k+\ell)/2 \rfloor}$ . Do đó, nếu  $x \in \{a_k, a_{k+1}, \dots, a_\ell\}$  thì (b') đúng
- **Dừng**: Vòng lặp **while** dừng khi  $i = j$ , và từ  $L$ , ta có nếu  $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$  thì  $x \in \{a_i\}$ . Do đó Thuật toán 4 trả lại vị trí chính xác của  $x$  hoặc kết luận không tìm được  $x$  (Dòng 9–13)

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Độ phức tạp tính toán

## Tìm kiếm nhị phân



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt buộc vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

**Thuật toán 4:** Tìm kiếm nhị phân (Binary Search)

**Input:**  $a_1, \dots, a_n$ : dãy số nguyên thực sự tăng,  $x$ : số nguyên

**Output:** Chỉ số  $i$  thỏa mãn  $x = a_i$  hoặc 0 nếu  $x$  không có trong dãy

```
1  $i := 1$ 
2  $j := n$ 
3 while  $i < j$  do
4    $m := \lfloor (i + j) / 2 \rfloor$ 
5   if  $x > a_m$  then
6      $i := m + 1$ 
7   else
8      $j := m$ 
9 if  $x = a_i$  then
10   $location := i$ 
11 else
12   $location := 0$ 
13 return  $location$ 
```

Time complexity analysis:

- $t_1$ : Lines 1 and 2
- $t_2$ : Lines 4, 5, 6, 7, 8
- $t_3$ : Lines 9, 10, 11
- $t_4$ : Line 13
- $t_5^{i,j}$ : Line 4
- $t_6^{i,j}$ : Line 8
- $t_7$ : Line 6
- $t_8$ : Line 8
- $t_9$ : Line 10
- $t_{10}$ : Line 12

# Độ phức tạp tính toán

## Tìm kiếm nhị phân



### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

$$T(n) = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

$t_1, t_4, t_5^{i,j}, t_7, \dots, t_{10}$  là  $O(1)$

$$t_2 = \sum_{\text{lần lặp while với cặp } i, j} \left[ (t_5^{i,j} + t_6^{i,j}) + \right. \\ \left. + (\text{thời gian kiểm tra } i < j) \right]$$

$$t_6^{i,j} = \max\{t_7, t_8\} \\ + (\text{thời gian kiểm tra } x > a_m)$$

$$t_3 = \max\{t_9, t_{10}\} \\ + (\text{thời gian kiểm tra } x = a_i)$$

# cặp  $i, j$  trong vòng **while** là  $O(\log n)$

$$T(n) \text{ là } O(\log n)$$

(xấu nhất)

$$T(n) \text{ là } O(\log n)$$

(tốt nhất)

# Độ phức tạp tính toán

## Tìm kiếm nhị phân



Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

*Tại sao # cặp  $i, j$  trong vòng lặp **while** là  $O(\log n)$ ?*

- Lần lặp 0: dãy  $a_i, \dots, a_j$  có độ dài  $\leq \lceil n/2^0 \rceil$
- Lần lặp 1: dãy  $a_i, \dots, a_j$  có độ dài  $\leq \lceil n/2^1 \rceil$
- ...
- Lần lặp  $h$  (cuối cùng): dãy  $a_i, \dots, a_j$  có độ dài  $\leq \lceil n/2^h \rceil$
- # cặp  $i, j$  trong vòng lặp **while** là  $h + 1$
- Vòng **while** kết thúc khi  $i = j$ , nghĩa là khi dãy  $a_i, \dots, a_j$  có độ dài 1
- Vì  $h$  là lần lặp cuối cùng,  $h$  phải là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn  $\lceil n/2^h \rceil \leq 1$  (Nếu có số  $h' < h$  thỏa mãn  $\lceil n/2^{h'} \rceil \leq 1$  thì không thể có lần lặp nào sau  $h'$ , trái với giả thiết  $h$  là lần lặp cuối cùng)
- Từ  $\lceil n/2^h \rceil \leq 1$ , suy ra  $n/2^h \leq 1$ , nghĩa là  $h \geq \log n$ . Giá trị nhỏ nhất của  $h$  là  $\lceil \log n \rceil$ . Do đó, # cặp  $i, j$  trong vòng lặp **while** là  $h + 1 = \lceil \log n \rceil + 1 = O(\log n)$

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt đầu vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Thuật toán

## Một số thuật toán sắp xếp



### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

66

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

### Bài toán sắp xếp

Cho một dãy  $n$  phần tử và một cách so sánh hai phần tử bất kỳ trong dãy. Hãy sắp xếp dãy theo thứ tự tăng dần

- Sắp xếp nổi bọt (Bubble Sort)
- Sắp xếp chèn (Insertion Sort)





Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

## ■ Bài toán:

- **Input:**  $a_1, a_2, \dots, a_n$ : dãy số thực ( $n \geq 2$ )
- **Output:** Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

## ■ Sắp xếp nổi bọt:

- (1) So sánh các phần tử liên tiếp, bắt đầu với cặp  $(a_1, a_2)$
- (2) Nếu  $a_1 > a_2$ , hoán đổi giá trị của chúng
- (3) Lặp lại (1) và (2) với các cặp  $(a_2, a_3), (a_3, a_4), \dots, (a_{n-1}, a_n)$ . Lúc này,  $a_n$  là phần tử lớn nhất trong dãy
- (4) Lặp lại (1) – (3) với dãy  $a_1, \dots, a_{n-1}$ , và sau đó với dãy  $a_1, \dots, a_{n-2}$ , dãy  $a_1, \dots, a_{n-3}, \dots$ , cho đến dãy  $a_1, a_2$



## Ví dụ 10

- **Input:** Dãy  $a_1 = 34, a_2 = 13, a_3 = 21, a_4 = 3, a_5 = 89$
- **Output:** Dãy sắp xếp theo thứ tự tăng dần

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
	34	13	21	3	89
$i = 1$	13	21	3	34	89
$i = 2$	13	3	21	34	
$i = 3$	3	13	21		
$i = 4$	3	13			
	3	13	21	34	89

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn



## Thuật toán 5: Sắp xếp nổi bọt (Bubble Sort)

**Input:**  $a_1, a_2, \dots, a_n$ : dãy số thực ( $n \geq 2$ )

**Output:** Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

```
1 for  $i := 1$  to  $n - 1$  do // Lặp lại  $n - 1$  lần
2   for  $j := 1$  to  $n - i$  do
3     if  $a_j > a_{j+1}$  then
4       Hoán đổi giá trị của  $a_j$  và  $a_{j+1}$ 
5   //  $a_{n-i+1}, \dots, a_n$  đã được sắp xếp
6 //  $a_1, \dots, a_n$  đã được sắp xếp
```

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

# Thuật toán

## Sắp xếp nổi bọt



### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Thuật toán 5 có hai vòng lặp **for**: vòng lặp trong ở Dòng 2–4 và vòng lặp ngoài (chứa vòng lặp trong) ở Dòng 1–4

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp ngoài là

*Ở trước lần lặp  $i$ , dãy  $a_{n-i+1}, \dots, a_n$  là dãy tăng chứa các phần tử lớn hơn hoặc bằng mọi phần tử trong  $a_1, \dots, a_{n-i}$*

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp trong là

*Ở trước lần lặp  $j$ ,  $a_j = \max\{a_1, \dots, a_j\}$*

## Sơ đồ chứng minh:

- Chứng minh bước **Khởi động** cho bất biến vòng lặp ngoài
- Ở bước **Duy trì** cho vòng lặp ngoài
  - Chứng minh bất biến vòng lặp trong (**Khởi động**, **Duy trì**, **Dừng**)
  - Sử dụng bất biến vòng lặp trong để chứng minh cho vòng lặp ngoài
- Chứng minh bước **Dừng** cho bất biến vòng lặp ngoài

# Thuật toán

## Sắp xếp nổi bọt



### Thuật toán 5: Sắp xếp nổi bọt (Bubble Sort)

**Input:**  $a_1, a_2, \dots, a_n$ : dãy số thực ( $n \geq 2$ )

**Output:** Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

```
1 for i := 1 to n - 1 do
2   for j := 1 to n - i do
3     if  $a_j > a_{j+1}$  then
4       Hoán đổi giá trị của  $a_j$  và  $a_{j+1}$  —  $t_4$  —  $t_3^j$  —  $t_2^i$  —  $t_1$ 
```

$$T(n) = t_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ t_2^i + (\text{t.g. tăng } i \text{ và kiểm tra } i \leq n - 1) \right]$$

$$t_2^i = \sum_{j=1}^{n-i} \left[ t_3^j + (\text{t.g. tăng } j \text{ và kiểm tra } j \leq n - i) \right]$$

$t_4$  là  $O(1)$  ( $v := a_j, a_j := a_{j+1}, a_{j+1} := v$ )

$t_3^j = t_4 + (\text{thời gian kiểm tra } a_j > a_{j+1})$

$T(n)$  là  $O(n^2)$

(xấu nhất)

$T(n)$  là  $O(n^2)$

(tốt nhất)

### Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

71

76



Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

## ■ Bài toán:

- **Input:**  $a_1, a_2, \dots, a_n$ : dãy số thực ( $n \geq 2$ )
- **Output:** Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

## ■ Sắp xếp chèn:

- (1) Ban đầu, ta xem  $a_1$  như một dãy đã được sắp xếp
- (2) Để xử lý phần tử  $a_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ):
  - Lưu giá trị  $a_i$  vào một biến tạm  $m$
  - Duyệt các phần tử  $a_{i-1}, a_{i-2}, \dots, a_1$  từ phải sang trái
  - Đẩy mỗi phần tử lớn hơn  $m$  sang phải một vị trí
  - Chèn  $m$  vào vị trí thích hợp (ngay sau phần tử đầu tiên nhỏ hơn hoặc bằng  $m$ )
- (3) Sau mỗi bước, dãy  $a_1, a_2, \dots, a_i$  đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần
- (4) Lặp lại quá trình cho đến khi xử lý xong  $a_n$

# Thuật toán

## Sắp xếp chèn



### Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

■ **Input:** Dãy  $a_1 = 34, a_2 = 13, a_3 = 21, a_4 = 3, a_5 = 89$

■ **Output:** Dãy sắp xếp theo thứ tự tăng dần

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
	34	13	21	3	89
$i = 2$	13	34	21	3	89
$i = 3$	13	21	34	3	89
$i = 4$	3	13	21	34	89
$i = 5$	3	13	21	34	89



## Thuật toán 6: Sắp xếp chèn (Insertion Sort)

**Input:**  $a_1, a_2, \dots, a_n$ : dãy số thực ( $n \geq 2$ )

**Output:** Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

```
1 for  $i = 2$  to  $n$  do
2      $m := a_i$  //  $m$  sắp được chèn vào dãy  $a_1, \dots, a_{i-1}$ 
3      $j := i - 1$ 
4     while  $j \geq 1$  và  $m < a_j$  do // Nếu  $m < a_j$ , đẩy  $a_j$ 
        sang phải để có chỗ chèn  $m$ 
5          $a_{j+1} := a_j$ 
6          $j := j - 1$ 
7      $a_{j+1} := m$  // Chèn  $m$ 
8     // Dãy  $a_1, \dots, a_i$  đã được sắp thứ tự
```

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bắt biên vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn





Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

Thuật toán 6 có hai vòng lặp: vòng lặp trong **while** ở Dòng 4–6 và vòng lặp ngoài **for** (chứa vòng lặp trong) ở Dòng 1–7

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp ngoài là

*Ở trước lần lặp  $i$ , dãy  $a_1, \dots, a_{i-1}$  là dãy tăng*

- Một bất biến vòng lặp cho vòng lặp trong là

*Ở trước lần lặp  $j$ ,  $m \leq \min\{a_{j+1}, \dots, a_i\}$*

# Thuật toán

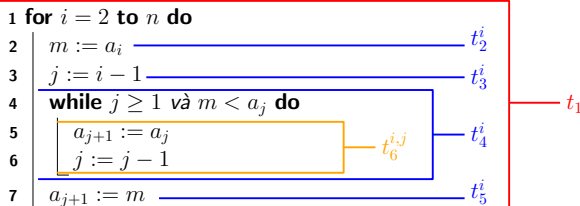
## Sắp xếp chèn



### Thuật toán 6: Sắp xếp chèn (Insertion Sort)

**Input:**  $a_1, a_2, \dots, a_n$ : dãy số thực ( $n \geq 2$ )

**Output:** Dãy đã cho được sắp xếp theo thứ tự tăng dần



$$T(n) = t_1 = \sum_{i=2}^n \left[ \sum_{k=2}^5 t_k^i + (\text{t.g. tăng } i \text{ và kiểm tra } i \leq n) \right]$$

$t_2^i, t_3^i, t_5^i, t_6^{i,j}$  là  $O(1)$

$$t_4^i = \sum_{1 \leq j \leq i-1 \text{ và } m < a_j} [t_6^{i,j} + (\text{t.g. kiểm tra } j \geq 1 \text{ và } m < a_j)]$$

$T(n)$  là  $O(n^2)$

(xấu nhất)

$T(n)$  là  $O(n)$

(tốt nhất)

### Thuật toán 1

Hoàng Anh Đức

Định nghĩa và một số khái niệm

Mô tả thuật toán

Mô tả bằng ngôn ngữ thông thường

Mô tả bằng giả mã

Mô tả bằng sơ đồ khối

Chứng minh thuật toán

Bất biến vòng lặp

Độ phức tạp tính toán

Độ tăng của các hàm

Định nghĩa và khái niệm

Độ phức tạp tính toán theo thời gian

Tìm kiếm và Sắp xếp

Một số thuật toán tìm kiếm

Tìm kiếm tuyến tính

Tìm kiếm nhị phân

Một số thuật toán sắp xếp

Sắp xếp nổi bọt

Sắp xếp chèn

76

76