

# COPYRIGHT NOTICE

## THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

### COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-03-16

### BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-03-16



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

# VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

## Bài tập Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội  
hoanganhduc@hus.edu.vn

Ngày 16 tháng 3 năm 2024

**Bài tập 8.** Giả sử  $m$  và  $n$  là các số nguyên dương với  $m > n$  và  $f$  là một hàm từ  $\{1, 2, \dots, m\}$  đến  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh rằng  $f$  không phải là đơn ánh với mọi số nguyên dương  $n$ .

*Chứng minh.* Gọi  $P(n)$  là vị từ

Hàm  $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  không là đơn ánh, trong đó  $m$  là số nguyên dương nào đó thỏa mãn  $m > n$ .

Ta chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$  bằng phương pháp quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh  $P(1)$  đúng, nghĩa là  $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1\}$  không là đơn ánh. Thật vậy, do  $f$  là một hàm, ta có  $f(i) = 1$  với mọi  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Do  $m > n = 1$ , tồn tại  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  thỏa mãn  $i \neq j$ . Với các giá trị  $i, j$  này,  $f(i) = f(j) = 1$ . Do đó,  $f$  không là đơn ánh.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên  $k \geq 1$  nào đó,  $P(k)$  đúng, nghĩa là  $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  không là đơn ánh, trong đó  $m$  là số nguyên dương nào đó thỏa mãn  $m > k$ . Ta chứng minh  $P(k+1)$  đúng, nghĩa là chứng minh  $f' : \{1, \dots, m'\} \rightarrow \{1, \dots, k+1\}$  không là đơn ánh, trong đó  $m'$  là số nguyên dương nào đó thỏa mãn  $m' > k+1$ . Ta xét các trường hợp sau:
  - **TH1: không tồn tại  $i \in \{1, \dots, m'\}$  thỏa mãn  $f(i) = k+1$ .** Trong trường hợp này,  $f$  cũng là một hàm từ  $\{1, \dots, m'\}$  đến  $\{1, \dots, k\}$  và  $m' > k+1 > k$ . Do đó, theo giả thiết quy nạp,  $f$  không là đơn ánh.
  - **TH2: tồn tại  $i \in \{1, \dots, m'\}$  thỏa mãn  $f(i) = k+1$ .** Ta xét hai trường hợp nhỏ sau:
    - \* **TH2.1: tồn tại  $i, j \in \{1, \dots, m'\}$  thỏa mãn  $i \neq j$  và  $f(i) = f(j) = k+1$ .** Trong trường hợp này, theo định nghĩa,  $f$  hiển nhiên không là đơn ánh.
    - \* **TH2.2: tồn tại duy nhất  $i \in \{1, \dots, m'\}$  thỏa mãn  $f(i) = k+1$ .** Ta định nghĩa hàm  $g : \{1, \dots, m'-1\} \rightarrow \{1, \dots, m'\}$  như sau:

$$g(j) = \begin{cases} j & \text{nếu } j < i \\ j+1 & \text{nếu } j \geq i \end{cases}$$

Trước tiên, ta chỉ ra  $g$  là đơn ánh. Thật vậy, với mọi  $j, j' \in \{1, \dots, m'-1\}$  thỏa mãn  $j \neq j'$ ,

- nếu  $j, j' < i$ , thì  $g(j) = j \neq j' = g(j')$ ;
- nếu  $j, j' \geq i$ , thì  $g(j) = j+1 \neq j'+1 = g(j')$ ; và
- nếu  $j < i \leq j'$ , thì  $g(j) = j < g(j') = j'+1$ , và do đó  $g(j) \neq g(j')$ .

Trong mỗi trường hợp, ta đã chỉ ra rằng nếu  $j \neq j'$  thì  $g(j) \neq g(j')$ , với  $j, j' \in \{1, \dots, m'-1\}$ . Do đó,  $g$  là đơn ánh.

Chú ý rằng theo định nghĩa, tập giá trị của  $g$  không chứa  $i$ . Do đó,  $f \circ g$  là một hàm từ  $\{1, \dots, m'-1\}$  đến  $\{1, \dots, k+1\}$  thỏa mãn điều kiện không tồn tại  $\ell \in \{1, \dots, m'-1\}$  sao cho  $(f \circ g)(\ell) = f(g(\ell)) = k+1$ , bởi vì nếu  $\ell$  tồn tại thì  $g(\ell) = i$  và điều này mâu thuẫn với định nghĩa của  $g$ . (Nhắc lại là theo giả thiết,  $i$  là số duy nhất trong  $\{1, \dots, m'\}$

thỏa mãn  $f(i) = k + 1$ .) Tương tự như **TH1**,  $f \circ g$  cũng là một hàm từ  $\{1, \dots, m' - 1\}$  đến  $\{1, \dots, k\}$  và chú ý rằng  $m' - 1 > k$ . Do đó theo giả thiết quy nạp,  $f \circ g$  không là đơn ánh.

Do đó, tồn tại  $j, j' \in \{1, \dots, m' - 1\}$  thỏa mãn  $j \neq j'$  và  $(f \circ g)(j) = (f \circ g)(j') \in \{1, \dots, k + 1\}$ . Do  $(f \circ g)(j) = (f \circ g)(j')$ , theo định nghĩa của  $f \circ g$ , ta có  $f(g(j)) = f(g(j'))$ . Do  $g$  là đơn ánh,  $g(j) \neq g(j')$ . Do đó, tồn tại  $x = g(j)$  và  $y = g(j')$  thuộc  $\{1, \dots, m'\}$  thỏa mãn  $x \neq y$  và  $f(x) = f(y)$ . Suy ra,  $f$  không là đơn ánh.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có  $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ . □