ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
(Đề gồm 4 câu/4 trang)

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ
Môn: Toán rời rạc
(MAT3500 2, Học kỳ 1, 2024-2025)
Thời gian: 50 phút

- Điền các thông tin về Họ Tên, Mã Sinh Viên, Lớp trước khi bắt đầu làm bài.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.
- Điểm bài kiểm tra này chiếm 20% tổng số điểm của môn học.

Họ và Tên: ______________________________

Mã Sinh Viên: ____________________ Lớp: ____________________

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	2	3	3	2	10
Điểm:					

1. (a) (1 điểm) Cho các mệnh đề p, q, và r. Hai mệnh đề $p \to (\neg q \to r)$ và $p \to (\neg q \wedge r)$ có tương đương lôgic không? Vì sao?
   (b) (1 điểm) Cho các tập hợp A, B, và C. Các tập hợp $A - (B \cap C)$ và $(A - B) \cup (A - C)$ có bằng nhau hay không? Vì sao?

Lời giải:

(a) Hai mệnh đề đã cho không tương đương lôgic. Ví dụ, với $p = q = r = \mathsf{T}$, ta có:

$$p \to (\neg q \to r) = \mathsf{T} \to (\neg \mathsf{T} \to \mathsf{T}) = \mathsf{T} \to \mathsf{T} = \mathsf{T}$$
$$p \to (\neg q \wedge r) = \mathsf{T} \to (\neg \mathsf{T} \wedge \mathsf{T}) = \mathsf{F}$$

(b) Hai tập hợp $A - (B \cap C)$ và $(A - B) \cup (A - C)$ bằng nhau. Có thể chứng minh bằng cách sử dụng bảng tính thuộc như sau.

A	B	C	$B \cap C$	$A - (B \cap C)$	$A - B$	$A - C$	$(A - B) \cup (A - C)$
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Do các giá trị tương ứng ở mỗi hàng của các cột $A - (B \cap C)$ và $(A - B) \cup (A - C)$ trong bảng đều bằng nhau, suy ra hai tập hợp cũng bằng nhau.

2. (3 điểm) Cho dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $a_1 = 2$, $a_2 = 9$, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ $(n \geq 3)$. Sử dụng nguyên lý quy nạp mạnh, hãy chứng minh $a_n \leq 3^n$ với mọi số nguyên $n \geq 1$.

Lời giải: Gọi $P(n)$ là phát biểu $a_n \leq 3^n$. Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 1$ bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ và $P(2)$ đúng. Thật vậy,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \leq 3^1 = 3 && P(1) \text{ đúng} \\ a_2 &= 9 \leq 3^2 = 9 && P(2) \text{ đúng} \end{aligned}$$

- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $1 \leq j \leq k$, trong đó $k \geq 2$ là một số nguyên dương nào đó. Nghĩa là, với $1 \leq j \leq k$, ta có $a_j \leq 3^j$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $a_{k+1} \leq 3^{k+1}$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k + 3a_{k-1} && \text{Do } k+1 \geq 3 \\ &\leq 2 \cdot 3^k + 3 \cdot 3^{k-1} && \text{Do } k \geq 2 \text{, giả thiết quy nạp cho ta } P(k) \text{ và } P(k-1) \text{ đúng} \\ &= 3^{k+1}. \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp mạnh, ta có điều phải chứng minh.

3. (3 điểm) Cho S là tập các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa bằng đệ quy như sau

   - **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
   - **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$, thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

   Sử dụng quy nạp theo cấu trúc để chứng minh $a + b$ chia hết cho 5 với mọi $(a, b) \in S$.

Lời giải: Gọi P là tính chất sau: $a+b$ chia hết cho 5. Ta chứng minh P đúng với mọi $(a, b) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $(0, 0)$ thỏa mãn tính chất P. Thật vậy, ta có $0 + 0 = 0$ luôn chia hết cho 5.

- **Bước quy nạp:** Giả sử $(a, b) \in S$ thỏa mãn tính chất P, nghĩa là $a + b$ chia hết cho 5. Ta chứng minh $(a + 2, b + 3)$ và $(a + 3, b + 2)$ cũng thỏa mãn tính chất P. Thật vậy, với cặp $(a + 2, b + 3)$, ta có $(a + 2) + (b + 3) = (a + b) + 5$. Do $a + b$ chia hết cho 5, ta có $(a + b) + 5$ cũng chia hết cho 5, và do đó cặp $(a + 2, b + 3)$ thỏa mãn tính chất P. Tương tự, cặp $(a + 3, b + 2)$ cũng thỏa mãn tính chất P.

Theo nguyên lý quy nạp theo cấu trúc, ta có điều phải chứng minh.

4. (2 điểm) Chứng minh rằng phương trình $x^4 + y^4 = 100$ không có nghiệm nguyên dương, nghĩa là, không tồn tại cặp $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $x^4 + y^4 = 100$.

Lời giải: Từ $x^4 \leq 100$, ta có $x^2 \leq 10$, suy ra $x \leq \sqrt{10} \approx 3.16$. Do $x \in \mathbb{Z}^+$, ta có $1 \leq x \leq 3$. Tương tự, ta cũng có $1 \leq y \leq 3$. Xét tất cả các trường hợp có thể xảy ra:

x	y	$x^4 + y^4$
1	1	2
1	2	17
1	3	82
2	1	17
2	2	32
2	3	97
3	1	82
3	2	97
3	3	162

Từ bảng trên, ta thấy không có trường hợp nào thỏa mãn $x^4 + y^4 = 100$. Do đó, ta có điều phải chứng minh.