VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Quy nạp toán học

- Giới thiệu
- Quy nạp yếu
- Quy nạp mạnh
- Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

- Định nghĩa và một số khái niệm
- Hàm định nghĩa bằng đệ quy
- Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy
- Quy nạp theo cấu trúc

Giải hệ thức truy hồi

- Dãy cho bởi hệ thức truy hồi
- Đoán nghiệm
- Đa thức đặc trưng
- Hàm sinh

- *Quy nạp toán học (mathematical induction)* là một kỹ thuật chứng minh cực kỳ quan trọng
- Quy nạp toán học được sử dụng để *chứng minh các kết quả về những đối tượng rời rạc khác nhau*
- Ta sẽ giới thiệu một số dạng quy nạp toán học
  - *Quy nạp toán học yếu (Weak Mathematical Induction)*, hay còn gọi là *Nguyên lý Thứ nhất của Quy nạp toán học (The First Principle of Mathematical Induction)*
  - *Quy nạp toán học mạnh (Strong Mathematical Induction)* hay còn gọi là *Nguyên lý Thứ hai của Quy nạp toán học (The Second Principle of Mathematical Induction)*
- Tính đúng đắn của phương pháp quy nạp bắt nguồn từ

Tiên đề 1: Tính chất sắp thứ tự tốt

Mọi tập con khác rỗng của tập các số nguyên dương có một phần tử nhỏ nhất

Nguyên lý quy nạp yếu

Để *chứng minh* $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$, chúng ta thực hiện hai bước

- *Bước cơ sở (basis step):* Chỉ ra mệnh đề $P(1)$ đúng
- *Bước quy nạp (inductive step):* Chứng minh mệnh đề $P(k) \to P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên dương k
  - Giả thiết $P(k)$ đúng, chứng minh $P(k+1)$ đúng
  - Giả thiết $P(k)$ đúng được gọi là *giả thiết quy nạp (inductive hypothesis hoặc induction hypothesis)*

Theo ngôn ngữ lôgic,

$$(P(1) \land \forall k \in \mathbb{Z}^+ \; (P(k) \to P(k+1))) \to \forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$$

- Chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng phương pháp quy nạp
  (1) *Bước cơ sở:* Chứng minh $P(1)$ đúng
  (2) *Bước quy nạp:* Chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$. Theo định nghĩa của toán tử lôgic "$\rightarrow$", ta cần chứng minh rằng *$P(k+1)$ không thể sai khi $P(k)$ đúng*. Điều này có thể được thực hiện bằng cách *giả thiết là $P(k)$ đúng và chứng minh rằng với giả thiết đó $P(k+1)$ cũng đúng*
    - Chú ý rằng ở đây *ta không giả thiết $P(k)$ đúng với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$*
- Sau khi hoàn thành bước cơ sở và bước quy nạp:
  - Từ bước cơ sở, ta biết rằng $P(1)$ đúng
  - Từ bước quy nạp và $P(1)$ đúng, ta biết rằng $P(2)$ đúng
  - Từ bước quy nạp và $P(2)$ đúng, ta biết rằng $P(3)$ đúng
  - ...
  - Từ bước quy nạp và $P(n-1)$ đúng, ta biết rằng $P(n)$ đúng (với bất kỳ số nguyên dương n)

Chứng minh (Quy nạp yếu là đúng).

- Giả sử $P(1)$ đúng và với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$, $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng phản chứng
- Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $P(n)$ sai. Do đó, tập $S = \{n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } P(n) \text{ sai}\} \subseteq \mathbb{Z}^+$ là tập khác rỗng.
- Theo Tiên đề 1, S có một phần tử nhỏ nhất m. Do $P(1)$ đúng, $m \neq 1$ và do đó $m > 1$, suy ra $m - 1 \in \mathbb{Z}^+$
- Do $m - 1 < m$, $m - 1 \notin S$, và do đó $P(m-1)$ đúng
- Do $P(k-1) \rightarrow P(k)$ đúng với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$, ta có $P(m-1) \rightarrow P(m)$ đúng.
- Kết hợp với $P(m-1)$ đúng, ta có $P(m)$ đúng. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của m. Do đó $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n

□

Khi sử dụng quy nạp toán học, không nhất thiết cần bắt đầu với $P(1)$ ở bước cơ sở

Nguyên lý quy nạp yếu (tổng quát)

Để *chứng minh* $\forall n \geq b\, P(n)$ *với* $n \in \mathbb{Z}$ *và* b *là số nguyên cho trước*, chúng ta thực hiện hai bước

- *Bước cơ sở (basis step):* Chỉ ra mệnh đề $P(b)$ đúng
- *Bước quy nạp (inductive step):* Chứng minh mệnh đề $P(k) \to P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq b$

Theo ngôn ngữ lôgic,

$$(P(b) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq b}\, (P(k) \to P(k+1))) \to \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq b}\, P(n),$$

trong đó $\mathbb{Z}^{\geq b} = \{m \mid m \in \mathbb{Z} \text{ và } m \geq b\}$ (chú ý là $\mathbb{Z}^{\geq 1} = \mathbb{Z}^{+}$)

(1) Mô tả điều cần chứng minh dưới dạng "với mọi $n \geq b$, $P(n)$" với b là số nguyên cố định nào đó
- "$P(n)$ với mọi số nguyên dương n" $\Rightarrow$ chọn $b = 1$
- "$P(n)$ với mọi số nguyên không âm n" $\Rightarrow$ chọn $b = 0$
- Với một số phát biểu, cần xác định giá trị phù hợp của b bằng cách kiểm tra giá trị chân lý của $P(n)$ với một số giá trị nhỏ của n

(2) Viết cụm từ "Bước cơ sở." Sau đó chỉ ra $P(b)$ là đúng. Hãy cẩn thận chọn đúng giá trị của b

(3) Viết cụm từ "Bước quy nạp." và phát biểu một cách rõ ràng giả thiết quy nạp dưới dạng "Giả sử rằng $P(k)$ đúng với một số nguyên cố định $k \geq b$ nào đó"

(4) Phát biểu điều cần chứng minh với giả thiết $P(k)$ đúng, nghĩa là, phát biểu cụ thể $P(k+1)$

(5) Chứng minh $P(k+1)$ đúng sử dụng giả thiết $P(k)$ đúng

(6) Xác định rõ ràng phần kết của bước quy nạp, ví dụ như bằng cách viết "Bước quy nạp đến đây là hoàn tất."

(7) Sau khi hoàn thành bước cơ sở và bước quy nạp, phát biểu kết luận "Bằng phương pháp quy nạp, ta đã chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên n thỏa mãn $n \geq b$."

- Quy nạp toán học có thể được sử dụng để chứng minh một giả thuyết khi giả thuyết này đã được thành lập (và đúng). Tuy nhiên, quy nạp toán học *không cung cấp ý tưởng giải thích tại sao các định lý lại đúng*
- Việc *kiểm tra phát biểu cần chứng minh với một số giá trị nhỏ của n* trước khi đi vào chứng minh có thể rất hữu ích. Thông thường, các ví dụ nhỏ có thể giúp ta nhận ra các khía cạnh dễ nhầm lẫn của phát biểu hoặc nhận ra tại sao phát biểu lại đúng trong trường hợp tổng quát
- Thông thường, bước chứng minh $P(k+1)$ với giả thiết $P(k)$ là bước khó nhất trong toàn bộ chứng minh quy nạp. Hãy *chắc chắn rằng chứng minh của bạn đúng với mọi $k \geq b$*, nhất là với các giá trị nhỏ của k, thậm chí là cả $k = b$
- Nếu bạn *không sử dụng giả thiết $P(k)$ trong chứng minh $P(k+1)$*, thì có thể có điều gì đó sai, hoặc ít nhất chứng minh của bạn không thực sự là chứng minh quy nạp

Ví dụ 1

Ta chứng minh vị từ $P(n)$ sau đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **Bước cơ sở.** $P(1)$ đúng, do vế trái bằng 1 và vế phải bằng $\frac{1(1+1)}{2} = 1$
- **Bước quy nạp.** Giả sử $P(k)$ đúng với một số nguyên cố định $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $\sum_{i=1}^{k} i = k(k+1)/2$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1)(k+2)/2$. Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) && \text{tách tổng} \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{giả thiết quy nạp} \\ &= (k+1)(k+2)/2 \end{aligned}$$

Ví dụ 2

Ta chứng minh vị từ $P(n)$ sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \text{ với số thực } r \neq 1 \text{ bất kỳ cho trước}$$

- **Bước cơ sở.** $P(0)$ đúng, do vế trái bằng 1 và vế phải bằng $(r^1 - 1)/(r-1) = 1$
- **Bước quy nạp.** Giả sử $P(k)$ đúng với một số nguyên cố định $k \geq 0$ nào đó, nghĩa là $\sum_{i=0}^{k} r^i = (r^{k+1}-1)/(r-1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $\sum_{i=0}^{k+1} r^i = (r^{k+2}-1)/(r-1)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} r^i &= \sum_{i=0}^{k} r^i + r^{k+1} && \text{tách tổng} \\ &= \frac{r^{k+1}-1}{r-1} + r^{k+1} && \text{giả thiết quy nạp} \\ &= (r^{k+2}-1)/(r-1) \end{aligned}$$

Ví dụ 3

Ta chứng minh với mọi số nguyên $n \geq 0$, vị từ $P(n)$ sau đúng

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ 0 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

- **Bước cơ sở:** $P(0)$ đúng, do vế trái $\sum_{i=0}^{0}(-1)^i = (-1)^0 = 1$ và vế phải bằng 1 (vì 0 là số chẵn)
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với một số nguyên cố định $k \geq 0$ nào đó, nghĩa là

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ 0 & \text{nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh

$$\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k+1 \text{ chẵn} \\ 0 & \text{nếu } k+1 \text{ lẻ} \end{cases}$$

Thật vậy, ta có

$$\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i + (-1)^{k+1} \qquad \text{tách tổng}$$

$$= \begin{cases} 1 + (-1)^{k+1} & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ 0 + (-1)^{k+1} & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases} \qquad \text{giả thiết quy nạp}$$

$$= \begin{cases} 1 + (-1)^{k+1} & \text{nếu } k+1 \text{ lẻ} \\ 0 + (-1)^{k+1} & \text{nếu } k+1 \text{ chẵn} \end{cases} \qquad k \text{ chẵn} \Leftrightarrow k+1 \text{ lẻ}$$

$$= \begin{cases} 1 + (-1) & \text{nếu } k+1 \text{ lẻ} \\ 0 + 1 & \text{nếu } k+1 \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{nếu } k+1 \text{ lẻ} \\ 1 & \text{nếu } k+1 \text{ chẵn} \end{cases}$$

Bài tập 1

Cho $P(n)$ *là phát biểu* $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(a) *Để chứng minh* $P(n)$ *đúng với mọi* $n \in \mathbb{Z}^+$
   (1) *Ở bước cơ sở, ta cần chứng minh điều gì?*
   (2) *Ở bước quy nạp, giả thiết quy nạp là gì? Ta cần chứng minh điều gì?*

(b) *Hãy chứng minh* $P(n)$ *đúng với mọi* $n \in \mathbb{Z}^+$ *bằng phương pháp quy nạp theo các bước bạn đã trả lời ở phần (a)*

Bài tập 2

Chứng minh các mệnh đề sau bằng phương pháp quy nạp

(a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ *với mọi* $n \in \mathbb{Z}^+$

(b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$

(c) $3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 3 \cdot 5^n = \dfrac{3(5^{n+1}-1)}{4}$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$

Bài tập 3

(a) *Chứng minh rằng* $3^n < n!$ *với mọi số nguyên* $n > 6$

(b) *Với các số nguyên không âm* n *nào thì* $2n + 3 \leq 2^n$*? Hãy chứng minh đáp án của bạn*

(c) *Chứng minh rằng* $n^3 + 2n$ *chia hết cho* 3 *với mọi số nguyên dương* n

Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để giải các bài tập sau

Bài tập 4

Chứng minh với mọi số nguyên $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Bài tập 5

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 4$*, ta có* $2^n \geq n^2$

Bài tập 6

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n *"đủ lớn", ta có* $2^n \geq n^3$ *(**Gợi ý:** Với bài tập này, trước tiên bạn cần tìm được một số nguyên* b *và chứng minh bất đẳng thức đã cho đúng với mọi* $n \geq b$*)*

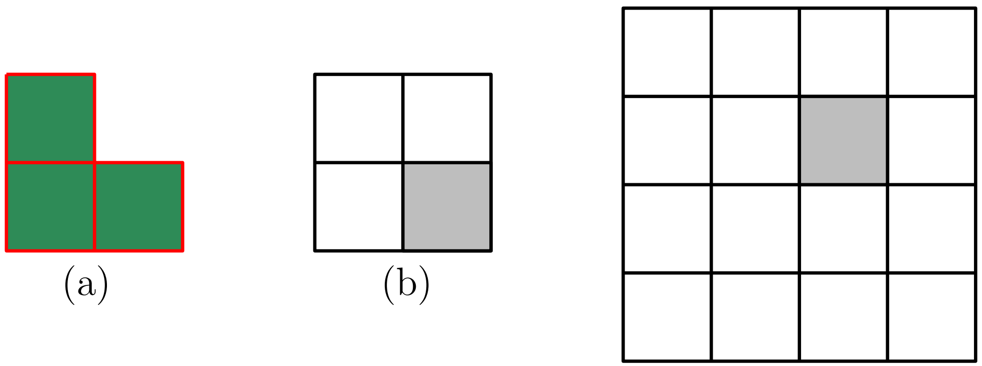
Bài tập 7

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$*, các tập* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *thỏa mãn* $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$

Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để giải các bài tập sau

Bài tập 8

*Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có thể phủ kín bàn cờ không hoàn chỉnh kích thước $2^n \times 2^n$ với một ô vuông bị loại bỏ bằng các khối hình chữ **L** như trong hình dưới đây sao cho không có hai khối nào chồng lên nhau*[1]



(a) (b) (c)

Hình: Phủ kín các bàn cờ, ví dụ như (b) hoặc (c), bằng các khối hình chữ **L** như ở (a)

[1] Bạn có thể thử phủ kín bàn cờ 8×8 ở `https://nstarr.people.amherst.edu/puzzle.html`

Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để giải các bài tập sau

Bài tập 9

Với các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và B, hãy chứng minh các phát biểu sau đúng với mọi số nguyên $n \geq 2$

(a) $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \cdots \cap (A_n \cup B)$

(b) $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$

(c) $(A_1 - B) \cap (A_2 - B) \cap \cdots \cap (A_n - B) = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) - B$

(d) $(A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \cdots \cup (A_n - B) = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) - B$

Bài tập 10

Chứng minh rằng một tập có n phần tử có $n(n-1)/2$ tập con chứa chính xác hai phần tử, với mọi số nguyên $n \geq 2$

Bài tập 11

Sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh rằng $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) = \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n$ với mọi $n \geq 2$, trong đó $p_1, \ldots, p_n$ là các mệnh đề lôgic

Nguyên lý quy nạp mạnh

Để *chứng minh* $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$, chúng ta thực hiện hai bước

- *Bước cơ sở (basis step):* Chỉ ra mệnh đề $P(1)$ đúng
- *Bước quy nạp (inductive step):* Chứng minh mệnh đề $(P(1) \land P(2) \land \cdots \land P(k)) \to P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên dương k
  - Giả thiết $P(1) \land P(2) \land \cdots \land P(k)$ đúng, chứng minh $P(k+1)$ đúng
  - Giả thiết $P(1) \land P(2) \land \cdots \land P(k)$ đúng được gọi là *giả thiết quy nạp*

Theo ngôn ngữ lôgic,

$$(P(1) \land \forall k \in \mathbb{Z}^+ \, (\bigwedge_{j=1}^{k} P(j) \to P(k+1))) \to \forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n),$$

trong đó $\bigwedge_{j=1}^{k} P(j) = P(1) \land P(2) \land \cdots \land P(k)$

Tương tự như với quy nạp yếu, ở bước cơ sở ta không nhất thiết cần bắt đầu từ $P(1)$

Nguyên lý quy nạp mạnh (tổng quát)

Để *chứng minh* $\forall n \geq b\, P(n)$ *với* $n \in \mathbb{Z}$ *và* b *là số nguyên cho trước*, chúng ta thực hiện hai bước

- *Bước cơ sở (basis step):* Chỉ ra mệnh đề $P(b)$ đúng
- *Bước quy nạp (inductive step):* Chứng minh mệnh đề $(P(b) \wedge P(b+1) \wedge \cdots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq b$

Theo ngôn ngữ lôgic,

$$(P(b) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq b} (\bigwedge_{j=b}^{k} P(j) \rightarrow P(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq b} P(n)$$

Thêm vào đó, thay vì chỉ chứng minh $P(b)$ đúng, ta có thể làm nhiều hơn ở bước cơ sở

Nguyên lý quy nạp mạnh (tổng quát)

Để *chứng minh $\forall n \geq b\, P(n)$ với $n \in \mathbb{Z}$ và b là số nguyên cho trước*, chúng ta thực hiện hai bước

- *Bước cơ sở (basis step):* Chỉ ra các mệnh đề $P(b)$, $P(b+1), \ldots, P(b+j)$ đúng, với j là một số nguyên dương cố định nào đó
- *Bước quy nạp (inductive step):* Chứng minh mệnh đề $(P(b) \wedge P(b+1) \wedge \cdots \wedge P(k)) \to P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq b+j$

Theo ngôn ngữ lôgic,

$$\left(\bigwedge_{i=0}^{j} P(b+i)\wedge \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq b+j}\left(\bigwedge_{i=b}^{k} P(i) \to P(k+1)\right)\right) \to \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq b}\, P(n)$$

Quy nạp toán học
Chú ý

- Về mặt hình thức, quy nạp mạnh và quy nạp yếu *khác nhau ở giả thiết quy nạp*: ở quy nạp yếu ta chỉ giả thiết $P(k)$ đúng, còn ở quy nạp mạnh ta giả thiết tất cả các mệnh đề $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ đều đúng
- *Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương về mặt lôgic*, nghĩa là, quy nạp yếu đúng khi và chỉ khi quy nạp mạnh cũng đúng
- Nếu bạn có thể trực tiếp chứng minh $P(k+1)$ với giả thiết $P(k)$ đúng, *nên dùng quy nạp yếu*
- Ngược lại, nếu bạn có thể chứng minh $P(k+1)$ từ giả thiết $P(j)$ đúng với mọi $j \leq k$, nhưng không rõ làm sao để trực tiếp chứng minh $P(k) \to P(k+1)$, *nên dùng quy nạp mạnh*

Ví dụ 4

Cho vị từ $P(n)$:

n viết được dưới dạng tích của một hoặc nhiều số nguyên tố

Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 2}\ P(n)$ bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở.** $P(2)$ đúng, vì 2 có thể được biểu diễn dưới dạng tích của một số nguyên tố—chính nó
- **Bước quy nạp.** Giả sử $P(j)$ đúng với mọi số nguyên j thỏa mãn $2 \leq j \leq k$ với $k \geq 2$ là số nguyên cố định nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy,
  - Nếu $k+1$ là số nguyên tố, $P(k+1)$ đúng do $k+1$ có thể được biểu diễn dưới dạng tích của một số nguyên tố—chính nó
  - Nếu $k+1$ là hợp số, ta có thể biểu diễn $k+1 = ab$ với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $2 \leq a \leq b < k+1$. Theo giả thiết quy nạp, cả a và b đều có thể được biểu diễn dưới dạng tích của các số nguyên tố, và do đó $k+1$ cũng thế

Ví dụ 5

Cho vị từ $P(n)$:

$$n = 4a + 5b \text{ với } a, b \in \mathbb{Z}$$

Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 12}\ P(n)$ bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở.** Ta chứng minh $P(12), P(13), P(14), P(15)$ đều đúng. Thật vậy, $12 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0$, $13 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1$, $14 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2$, và $15 = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3$
- **Bước quy nạp.** Giả sử với số nguyên cố định $k \geq 15$ bất kỳ, $P(m)$ đúng với mọi số nguyên m thỏa mãn $12 \leq m \leq k$. (Hay $P(12) \land \cdots \land P(k)$ đúng với số nguyên cố định $k \geq 15$.) Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, do $k \geq k - 3 \geq 12$, theo giả thiết quy nạp, ta có $P(k-3)$ đúng, nghĩa là tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho $k - 3 = 4a + 5b$. Suy ra $k + 1 = (k-3) + 4 = 4(a+1) + 5b$

Bài tập 12

Chứng minh ví dụ trên bằng quy nạp yếu

Bài tập 13

Gọi $P(n)$ là vị từ "tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $n = 3a + 5b$". Bài tập này mô tả cách chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 8$ bằng phương pháp quy nạp mạnh

(a) *Để hoàn thành bước cơ sở, hãy chứng minh rằng các mệnh đề $P(8)$, $P(9)$, và $P(10)$ là đúng*

(b) *Giả thiết quy nạp là gì?*

(c) *Trong bước quy nạp, bạn cần chứng minh điều gì?*

(d) *Hãy hoàn thành bước quy nạp cho $n \geq 10$*

Bài tập 14

Chỉ sử dụng các tờ tiền mệnh giá 20 USD và 50 USD, các bạn có thể tạo thành cọc tiền có những giá trị như thế nào? Hãy chứng minh câu trả lời của bạn bằng phương pháp quy nạp mạnh

Ví dụ 6 ([Gunderson and Rosen 2010])

Cho $P(n)$ là $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2}$. Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ bằng phương pháp quy nạp

- **Bước cơ sở.** $P(1)$ đúng do $\frac{(1+\frac{1}{2})^2}{2} = 1$
- **Bước quy nạp.** Giả sử $P(k)$ đúng với một số nguyên cố định $k \geq 1$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) \quad \text{tách tổng}$$

$$= \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{2} + (k+1) \quad \text{giả thiết quy nạp}$$

$$= \frac{(k+\frac{1}{2})^2 + 2(k+\frac{1}{2}) + 1}{2}$$

$$= \frac{(k+1+\frac{1}{2})^2}{2}$$

Câu hỏi

Chứng minh này sai ở đâu?

Ví dụ 7 ([Gunderson and Rosen 2010])

Cho vị từ $P(n)$

$$\textit{Nếu } n = \max\{a, b\} \textit{ với } a, b \in \mathbb{Z}^+ \textit{ thì } a = b$$

Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ bằng quy nạp

- **Bước cơ sở.** Với $n = 1$, giả sử $1 = \max\{a, b\}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Do đó $a = b = 1$. Suy ra $P(1)$ đúng
- **Bước quy nạp.** Giả sử $P(k)$ đúng với một số nguyên cố định $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là nếu $k = \max\{a, b\}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ thì $a = b$

Câu hỏi

Chứng minh này sai ở đâu?

Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng, nghĩa là chứng minh nếu $k + 1 = \max\{c, d\}$ với $c, d \in \mathbb{Z}^+$ thì $c = d$. Thật vậy, giả sử hai số $c, d \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $k + 1 = \max\{c, d\}$. Do đó, $\max\{c - 1, d - 1\} = k$. Theo giả thiết quy nạp, $c - 1 = d - 1$, và do đó $c = d$

Ví dụ 8 (Tất cả ngựa đều cùng màu)

$P(n)$:= "*Bất kỳ n con ngựa nào đều có cùng màu sắc*"

Thật vậy, ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng phương pháp quy nạp

- **Bước cơ sở.** $P(1)$ hiển nhiên đúng.
- **Bước quy nạp.** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ cố định nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng. Giả sử có $k+1$ con ngựa $H_1, H_2, \dots, H_k, H_{k+1}$. Theo giả thiết quy nạp, $H_1, H_2, \dots, H_k$ đều có cùng màu sắc. Cũng theo giả thiết quy nạp, $H_2, \dots, H_k, H_{k+1}$ đều có cùng màu sắc. Do đó, $H_1, H_2, \dots, H_k, H_{k+1}$ đều có cùng màu sắc

Câu hỏi

Chứng minh này sai ở đâu?

$$H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4$$

Ví dụ 9

Câu hỏi

Chứng minh này sai ở đâu?

$$P(n) := \text{“}\, 5n = 0 \,\text{”}$$

Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$ bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở:** $P(0)$ đúng, do $5 \cdot 0 = 0$
- **Bước quy nạp:** Giả sử $5j = 0$ với mọi số nguyên không âm j thỏa mãn $0 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $5(k+1) = 0$. Thật vậy, ta có thể viết $k + 1 = i + j$, với $i, j \in \mathbb{N}$ và i, j nhỏ hơn $k + 1$. Theo giả thiết quy nạp,
  $5(k+1) = 5(i+j) = 5i + 5j = 0 + 0 = 0$

- Trong *quy nạp*, ta chứng minh mọi phần tử của một tập vô hạn thỏa mãn vị từ P nào đó bằng cách
  - chứng minh tính đúng đắn của P cho các phần tử lớn hơn trong tập hợp dựa vào tính đúng đắn của các phần tử nhỏ hơn
- Trong các *định nghĩa đệ quy (recursive definition)*, tương tự, ta định nghĩa một cấu trúc (hàm, vị từ, tập hợp, hay một cấu trúc nào đó phức tạp hơn) trên một miền vô hạn nào đó (miền xác định) bằng cách
  - định nghĩa cấu trúc của các phần tử lớn hơn dựa vào cấu trúc của các phần tử nhỏ hơn

- *Hàm định nghĩa bằng đệ quy (recursive function)*
  $f : \mathbb{N} \to A$ với tập A bất kỳ
  - *Bước cơ sở (basis step):* Định nghĩa một số giá trị ban đầu $f(0), f(1), \dots, f(b)$ với số nguyên cố định $b \geq 0$ nào đó
  - *Bước đệ quy (recursive step):* Định nghĩa một quy luật để tìm giá trị của $f(n)$ từ các giá trị $f(n-1)$, $f(n-2)$, $\dots$, $f(n-b)$, $f(n-b-1)$ với mọi $n > b$

Ví dụ 10

Định nghĩa một dãy bằng hệ thức truy hồi

- Dãy Fibonacci $\{f_n\}$
  - **Bước cơ sở:** $f_0 = 0$, $f_1 = 1$
  - **Bước đệ quy:** $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$
- Dãy giai thừa $\{g_n\}$
  - **Bước cơ sở:** $g_0 = 1$
  - **Bước đệ quy:** $g_n = ng_{n-1}$ $(n \geq 1)$

Ví dụ 11 (Chứng minh tính chất của hàm sử dụng định nghĩa đệ quy)

Cho dãy Fibonacci $\{f_n\}$. Ta chứng minh $f_n < 2^n$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$ bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở:** $f_0 = 0 < 2^0 = 1$ và $f_1 = 1 < 2^1 = 2$ (sử dụng các định nghĩa ở bước cơ sở của định nghĩa đệ quy)
- **Bước quy nạp:** Giả sử với mọi i thỏa mãn $1 \leq i \leq k$, ta có $f_i < 2^i$. Ta chứng minh $f_{k+1} < 2^{k+1}$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} && \text{định nghĩa đệ quy của } \{f_n\} \\ &< 2^k + 2^{k-1} && \text{giả thiết quy nạp} \\ &< 2^k + 2^k = 2^{k+1} \end{aligned}$$

Ví dụ 12 (Chứng minh tính chất của hàm sử dụng định nghĩa đệ quy)

Cho dãy Fibonacci $\{f_n\}$. Ta chứng minh $f_n > \alpha^{n-2}$ *với mọi số tự nhiên* $n \geq 3$ *và* $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$ bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở:** Với $n = 3$, ta có $f_3 = 2 > \alpha^{3-2} = \alpha$. Với $n = 4$, ta có $f_4 = 3 > \alpha^{4-2} = \alpha^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = \alpha + 1 \approx 2.61803$
- **Bước quy nạp:** Giả sử với mọi i thỏa mãn $3 \leq i \leq k$ ta có $f_i > \alpha^{i-2}$. Ta chứng minh $f_{k+1} > \alpha^{k-1}$. Thật vậy,

$$\begin{aligned}
f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} && \text{định nghĩa đệ quy của } \{f_n\} \\
&> \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3} && \text{giả thiết quy nạp} \\
&= \alpha^{k-3}(\alpha + 1) \\
&= \alpha^{k-3}\alpha^2 = \alpha^{k-1} && \text{do } \alpha^2 = \alpha + 1
\end{aligned}$$

Quy nạp và Đệ quy
Hoàng Anh Đức

- *Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy (recursive set)*
  - *Bước cơ sở (basis step):* Định nghĩa một tập con các phần tử ban đầu
  - *Bước đệ quy (recursive step):* Định nghĩa một quy luật để tìm phần tử mới trong tập từ các phần tử đã biết là thuộc tập đó
- Thông thường, với các tập định nghĩa bằng đệ quy, *quy tắc ngoại trừ (exclusion rule)* sau luôn được áp dụng: tập hợp cần định nghĩa chỉ chứa các phần tử liệt kê ở bước cơ sở và các phần tử thu được bằng cách áp dụng quy tắc ở bước đệ quy.

Ví dụ 13

- Tập S các số nguyên dương chia hết cho 3
  - **Bước cơ sở:** $3 \in S$
  - **Bước đệ quy:** Nếu $x \in S$ và $y \in S$ thì $x + y \in S$
  - Đầu tiên, $3 \in S$, sau đó là $3 + 3 = 6$, $3 + 6 = 9$, v.v...
- Tập số tự nhiên $\mathbb{N}$
  - **Bước cơ sở:** $0 \in \mathbb{N}$
  - **Bước đệ quy:** Nếu $n \in \mathbb{N}$ thì $n + 1 \in \mathbb{N}$
- Tập các chuỗi ký tự Σ^* sinh bởi bảng chữ cái Σ
  - **Bước cơ sở:** $\lambda \in \Sigma^*$ (λ là chuỗi rỗng không chứa bất kỳ ký tự nào)
  - **Bước đệ quy:** Nếu $w \in \Sigma^*$ và $x \in \Sigma$ thì $wx \in \Sigma^*$
  - Ví dụ nếu $\Sigma = \{0, 1\}$ thì
    - $\lambda \in \Sigma^*$ (bước cơ sở)
    - $\{0, 1\} \subseteq \Sigma^*$ (lần đầu áp dụng bước quy nạp)
    - $\{00, 01, 10, 11\} \subseteq \Sigma$ (lần thứ hai áp dụng bước quy nạp)
    - v.v...
    - Do đó Σ^* là tập tất cả các chuỗi nhị phân

Ví dụ 14

- Tập *các công thức được tạo đúng quy tắc (well-formed formulae)* trong lôgic mệnh đề
  - **Bước cơ sở:** $\mathbf{T}$, $\mathbf{F}$, và mệnh đề nguyên tử s là các công thức được tạo đúng quy tắc
  - **Bước đệ quy:** Nếu A và B là các công thức được tạo đúng quy tắc, thì $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, và $(A \leftrightarrow B)$ cũng thế
  - Ví dụ, với các mệnh đề nguyên tử p, q, $((p \vee q) \rightarrow (q \wedge \mathbf{F}))$ và $(p \wedge q)$ là các công thức được tạo đúng quy tắc, còn $\wedge pq$, $pq\wedge$, và $p \wedge q$ thì không phải (Tại sao?)

Bài tập 15

Hãy tìm một định nghĩa đệ quy của

(a) *Dãy* $\{a_n\}$ *với* $a_n = 4n - 2$ *và* $n = 1, 2, \dots$

(b) *Dãy* $\{b_n\}$ *với* $b_n = n(n+1)$ *và* $n = 1, 2, \dots$

(c) *Tập hợp các số nguyên dương lẻ*

(d) *Tập hợp các số nguyên dương là lũy thừa của* 3

(e) *Tập hợp các số nguyên dương chia hết cho* 5

(f) *Tập hợp các số nguyên dương không chia hết cho* 5

Để chứng minh một tính chất P của các phần tử của một tập hợp định nghĩa theo đệ quy, ta sử dụng *quy nạp theo cấu trúc (structural induction)*

Nguyên lý quy nạp theo cấu trúc

- *Bước cơ sở:* Chứng minh rằng mọi phần tử định nghĩa trong bước cơ sở của định nghĩa đệ quy đều thỏa mãn P
- *Bước quy nạp:* Chứng minh rằng nếu các phần tử được sử dụng để xây dựng phần tử mới của tập hợp trong bước đệ quy đều thỏa mãn P, thì phần tử mới cũng thỏa mãn P

Ví dụ 15

Cho S là tập định nghĩa theo đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $3 \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $x \in S$ và $y \in S$ thì $x + y \in S$

Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấu trúc rằng *mọi phần tử của S đều chia hết cho 3*

- **Bước cơ sở:** 3 chia hết cho 3
- **Bước quy nạp:** Giả sử với $x \in S$ và $y \in S$, cả x và y đều chia hết cho 3. Ta chứng minh $n = x + y$ cũng chia hết cho 3. Thật vậy, do x chia hết cho 3, ta có $x = 3k$ với số nguyên k nào đó. Tương tự, $y = 3j$ với số nguyên j nào đó. Suy ra $n = x + y = 3(k + j)$, và do đó n cũng chia hết cho 3

Ví dụ 16

Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấu trúc rằng *mọi công thức được tạo đúng quy tắc trong lôgic mệnh đề có số dấu ngoặc đơn trái "(" bằng số dấu ngoặc đơn phải ")"*

- **Bước cơ sở:** Các mệnh đề $\mathbf{T}$, $\mathbf{F}$, và mọi mệnh đề nguyên tử s đều không có các dấu ngoặc đơn trái và phải
- **Bước quy nạp:** Với công thức A, gọi l_A và r_A lần lượt là số ngoặc đơn trái và ngoặc đơn phải của A. Giả sử với các công thức A, B, $l_A = r_A$ và $l_B = r_B$. Ta chứng minh rằng điều này cũng đúng với các công thức $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, và $(A \leftrightarrow B)$. Thật vậy, công thức đầu tiên có $l_A + 1$ ngoặc trái và $r_A + 1$ ngoặc phải, và các công thức sau đó có $l_A + l_B + 1$ ngoặc trái và $r_A + r_B + 1$ ngoặc phải

Bài tập 16

Cho dãy Fibonacci $\{f_n\}$. Chứng minh rằng $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$ với mọi số nguyên dương n

Bài tập 17

*Chứng minh rằng tập S định nghĩa bởi $1 \in S$ và $s + t \in S$ nếu $s \in S$ và $t \in S$ là tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$. (**Gợi ý:** Chứng minh $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ và $\mathbb{Z}^+ \subseteq S$)*

Bài tập 18

Cho S là tập các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa bằng đệ quy như sau

- ***Bước cơ sở:*** $(0, 0) \in S$
- ***Bước đệ quy:*** *Nếu $(a, b) \in S$, thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$*

(a) *Sử dụng quy nạp mạnh với số lần áp dụng bước đệ quy trong định nghĩa của S ở trên, hãy chứng minh $a + b$ chia hết cho 5 với mọi $(a, b) \in S$*

(b) *Sử dụng quy nạp theo cấu trúc để chứng minh $a + b$ chia hết cho 5 với mọi $(a, b) \in S$*

- Một *hệ thức truy hồi (recurrence relation)* cho dãy $\{a_n\}$ là một *phương trình biểu diễn a_n thông qua một hoặc nhiều số hạng trước đó của dãy* với mọi số nguyên n thỏa mãn $n \geq n_0$ với n_0 là một số nguyên không âm.
  - Với dãy $\{a_n\} = 0, 1, 4, 9, 16 \ldots (n \geq 0)$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ *với* $n \geq 1$ là một hệ thức truy hồi cho $\{a_n\}$ (ở đây $n_0 = 1$)
- Để *định nghĩa một dãy $\{a_n\}$ thông qua hệ thức truy hồi*, ta cần thêm *các điều kiện ban đầu (initial conditions)* bằng cách định nghĩa các phần tử trước a_{n_0} trong dãy
  - Để *định nghĩa $\{a_n\}$ qua hệ thức $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ $(n \geq 1)$*, ta cần thêm *điều kiện ban đầu $a_0 = 0$*
- Một dãy được gọi là một *nghiệm (solution)* của một hệ thức truy hồi nếu *các số hạng của dãy thỏa mãn hệ thức đó*
- *Giải hệ thức truy hồi với các điều kiện ban đầu* nghĩa là *tìm một công thức tường minh cho các số hạng của dãy*
  - Một công thức tường minh cho dãy $\{a_n\}$ định nghĩa bởi $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ với $n \geq 1$ và điều kiện ban đầu $a_0 = 0$ là $a_n = n^2$ $(n \geq 0)$

Ví dụ 17

- Dãy $\{b_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi $b_n = -b_{n-1}$ với $n \geq 1$ và điều kiện ban đầu $b_0 = 1$
  - $\{b_n\} = 1, -1, 1, -1, \dots$
- Dãy $\{s_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi $s_n = s_{n-1} - s_{n-2}$ với $n \geq 2$ và điều kiện ban đầu $s_0 = 3$ và $s_1 = 5$
  - $\{s_n\} = 3, 5, 2, -3, -5, \dots$
- *Dãy Fibonacci (Fibonacci sequence)* $\{f_n\}$ $(n \geq 0)$ được định nghĩa bởi điều kiện ban đầu $f_0 = 0, f_1 = 1$ và hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ với mọi số nguyên $n \geq 2$
  - $\{f_n\} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$
- *Dãy giai thừa (factorial sequence)* $\{g_n\}$ được định nghĩa bởi điều kiện ban đầu $g_0 = 1$ và hệ thức truy hồi $g_n = n g_{n-1}$ với mọi số nguyên $n \geq 1$
  - $\{g_n\} = 1, 1, 2, 6, 24, \dots$

- Một số phương pháp giải hệ thức truy hồi
  (1) Đoán nghiệm (và chứng minh bằng phương pháp quy nạp)
  (2) Sử dụng đa thức đặc trưng
  (3) Sử dụng hàm sinh

Ví dụ 18

Giải hệ thức truy hồi $d_n = d_{n-1} + 4$ $(n \geq 1)$ với điều kiện ban đầu $d_0 = -1$

Hướng suy luận

(1) Từ hệ thức truy hồi, ta cũng có $d_{n-1} = d_{n-2} + 4$

(2) Thay (2) vào hệ thức ban đầu
$d_n = (d_{n-2} + 4) + 4 = d_{n-2} + 2 \cdot 4$

(3) Từ hệ thức truy hồi, ta cũng có $d_{n-2} = d_{n-3} + 4$

(4) Thay (4) vào (3), ta thu được $d_n = d_{n-3} + 3 \cdot 4$

(5) Lặp lại quá trình trên, ta "đoán" $d_n = d_{n-r} + r \cdot 4$

(6) Để có một công thức tường minh cho d_n, ta cần $n - r = 0$, tức là $r = n$. Khi đó d_n được biểu diễn qua d_0 đã cho trước và $n = r$.

(7) Tóm lại, ta có $d_n = -1 + 4n$

Ví dụ 19

Giải hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ $(n \geq 1)$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 0$

(1) Từ hệ thức truy hồi, ta có $a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-1) - 1$

(2) Thay vào hệ thức ban đầu,
$a_n = (a_{n-2} + 2(n-1) - 1) + 2n - 1 = a_{n-2} + 4n - 4$

(3) Từ hệ thức truy hồi, ta có $a_{n-2} = a_{n-3} + 2(n-2) - 1$

(4) Thay vào (2),
$a_n = (a_{n-3} + 2(n-2) - 1) + 4n - 4 = a_{n-3} + 6n - 9$

(5) Từ hệ thức truy hồi, ta có $a_{n-3} = a_{n-4} + 2(n-3) - 1$

(6) Thay vào (4),
$a_n = (a_{n-4} + 2(n-3) - 1) + 6n - 9 = a_{n-4} + 8n - 16$

(7) Lặp lại quá trình trên, ta "đoán" $a_n =$

(8) Để có một công thức tường minh cho a_n, ta cần $n - r = 0$, tức là $r = n$. Khi đó a_n được biểu diễn qua a_0 đã cho trước và $n = r$

(9) Tóm lại $a_n =$

Bài tập 19

Giải các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau và chứng minh công thức bạn tìm được là đúng bằng quy nạp

(a) $a_n = -a_{n-1}$, $a_0 = 5$
(b) $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_0 = 1$
(c) $a_n = a_{n-1} - n$, $a_0 = 4$
(d) $a_n = 5a_{n-1}$, $a_0 = 1$
(e) $a_n = 2a_{n-1} - 3$, $a_0 = -1$
(f) $a_n = (n+1)a_{n-1}$, $a_0 = 2$
(g) $a_n = 2na_{n-1}$, $a_0 = 3$
(h) $a_n = -a_{n-1} + n - 1$, $a_0 = 7$

Bài tập 20

Giả thiết dân số thế giới năm 2023 là 8 tỷ người và tăng theo tỷ lệ 0.8%/năm. Với $n \geq 1$,

(a) *Xây dựng hệ thức truy hồi để tính dân số thế giới n năm sau 2023*
(b) *Tìm công thức tường minh để tính dân số thế giới n năm sau 2023*
(c) *Dân số thế giới năm 2057 sẽ là bao nhiêu?*

Giải hệ thức truy hồi

Đa thức đặc trưng

- *Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k với hệ số hằng (Linear homogeneous recurrence relation of degree k with constant coefficients)* là hệ thức có dạng

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

  trong đó $c_1, c_2, \dots, c_k$ là các số thực, $c_k \neq 0$, và $n \geq k$
- Một dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 0)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi trên được *xác định một cách duy nhất* bởi *hệ thức này* và k *điều kiện ban đầu* $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \dots, a_{k-1} = C_{k-1}$
  - Hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ là một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai với hệ số hằng. Dãy Fibonacci $\{f_n\}$ được xác định bởi hệ thức trên và điều kiện ban đầu $f_0 = 0, f_1 = 1$
  - Các hệ thức $g_n = n g_{n-1}$, $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}^2$ không là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

Giải hệ thức truy hồi
Đa thức đặc trưng

- Hệ thức $a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$ $(c_k \neq 0)$ có hai tính chất quan trọng
  - Nghiệm của hệ thức có dạng $a_n = r^n$ *với* $r \neq 0$ là một hằng số nào đó. Từ đó, $r^n = c_1 r^{n-1} + \cdots + c_k r^{n-k}$. Chia hai vế cho r^{n-k} và chuyển vế, ta có

    $$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

    Đa thức cuối cùng gọi là *đa thức đặc trưng (characteristic equation)* của hệ thức, và nghiệm của nó gọi là *nghiệm đặc trưng (characteristic root)* của hệ thức
  - Nếu s_n và t_n thỏa mãn hệ thức truy hồi, thì *mọi tổ hợp tuyến tính của s_n và t_n*, nghĩa là mọi biểu thức có dạng $b_1 s_n + b_2 t_n$ với b_1, b_2 là các số thực nào đó, cũng thỏa mãn hệ thức truy hồi

Định lý 2

Cho các số thực $c_1, c_2, \dots, c_k$. Giả sử $r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_{k-1} r - c_k$ có t nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \dots, r_t$ với các bội tương ứng $m_1, m_2, \dots, m_t$ thỏa mãn $m_i \geq 1$ với $1 \leq i \leq t$ và $m_1 + \cdots + m_t = k$ (nghĩa là, có m_i nghiệm có giá trị r_i). Dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ $(n \geq k)$ với điều kiện ban đầu $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \dots, a_{k-1} = C_{k-1}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} a_n = &(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \cdots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n \\ &+ (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \cdots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n \\ &+ \cdots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \cdots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n \end{aligned}$$

với $n \geq 0$, trong đó $\alpha_{i,j}$ là các hằng số với $1 \leq i \leq t$ và $0 \leq j \leq m_i - 1$

Ví dụ 20

Giải hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$ với điều kiện ban đầu $f_0 = 0$ và $f_1 = 1$

- Đa thức đặc trưng của hệ thức truy hồi là $r^2 - r - 1$
- Đa thức đặc trưng có hai nghiệm phân biệt $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
- Do đó, nếu dãy $\{f_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi thì $f_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với các hằng số α_1, α_2 nào đó
- $\{f_n\}$ cần thỏa mãn điều kiện ban đầu $f_0 = 0$ và $f_1 = 1$. Thay vào dạng tổng quát của f_n, ta có hệ phương trình

$$f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$f_1 = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Từ đó $\alpha_1 = 1/\sqrt{5}$ và $\alpha_2 = -1/\sqrt{5}$

Ví dụ 21

Giải hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ với các điều kiện ban đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 6$

- Đa thức đặc trưng của hệ thức truy hồi là $r^2 - 6r + 9$
- Đa thức đặc trưng có một nghiệm $r_1 = 3$ với bội 2
- Do đó, nếu dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi thì $a_n = \alpha_{1,0}r_1^n + \alpha_{1,1}nr_1^n = \alpha_{1,0}3^n + \alpha_{1,1}n3^n$ với các hằng số $\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}$ nào đó
- Dãy $\{a_n\}$ cũng cần thỏa mãn điều kiện ban đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 6$. Thay vào dạng tổng quát của a_n, ta có hệ phương trình

$$a_0 = \alpha_{1,0} = 1$$
$$a_1 = \alpha_{1,0} \cdot 3 + \alpha_{1,1} \cdot 3 = 6$$

Do đó, ta có $\alpha_{1,0} = 1$ và $\alpha_{1,1} = 1$

Ví dụ 22

Giải hệ thức truy hồi $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ với các điều kiện ban đầu $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, và $a_2 = -1$

- Đa thức đặc trưng của hệ thức là $r^3 + 3r^2 + 3r + 1$
- Đa thức đặc trưng có một nghiệm $r_1 = -1$ với bội 3
- Do đó, nếu $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi thì $a_n = \alpha_{1,0}r_1^n + \alpha_{1,1}nr_1^n + \alpha_{1,2}n^2r^n$
- Dãy $\{a_n\}$ cũng cần thỏa mãn điều kiện ban đầu $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, và $a_2 = -1$. Thay vào dạng tổng quát của a_n, ta có hệ phương trình

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \alpha_{1,0} = 1 \\
a_1 &= -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2} = -2 \\
a_2 &= \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2} = -1
\end{aligned}
$$

Do đó ta có $\alpha_{1,0} = 1$, $\alpha_{1,1} = 3$, và $\alpha_{1,2} = -2$

Bài tập 21

Giải các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau

(1) $a_n = 2a_{n-1}$ *với* $n \geq 1$, $a_0 = 3$

(2) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ *với* $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

(3) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ *với* $n \geq 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$

(4) $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ *với* $n \geq 3$, $a_0 = 5$, $a_1 = -9$, $a_2 = 15$

- *Hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất bậc k với hệ số hằng (Linear nonhomogeneous recurrence relation of degree k with constant coefficients)* là hệ thức có dạng

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các số thực, $c_k \neq 0$, $F(n)$ là một hàm chỉ phụ thuộc vào n và không phải luôn bằng 0, và $n \geq k$

- Hệ thức $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ được gọi là *hệ thức truy hồi thuần nhất tương ứng (associated homogeneous recurrence relation)* của hệ thức trên

Định lý 3

Nếu $\{a_n^{(p)}\}$ là một nghiệm riêng nào đó của hệ thức $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$ thì mọi nghiệm của hệ thức đó có dạng $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, trong đó $a_n^{(h)}$ là nghiệm của hệ thức thuần nhất tương ứng $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$

Với một số dạng $F(n)$, nghiệm riêng có dạng đặc biệt

Định lý 4

Giả sử $\{a_n\}$ thỏa mãn hệ thức

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

trong đó $c_1, \dots, c_k$ là các số thực, và

$$F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0) s^n,$$

trong đó $b_0, \dots, b_t$ và s là các số thực. Khi s không phải là nghiệm của đa thức đặc trưng của hệ thức thuần nhất tương ứng, tồn tại một nghiệm riêng có dạng $(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$. Khi s là một nghiệm với bội m của đa thức đặc trưng của hệ thức thuần nhất tương ứng, tồn tại một nghiệm riêng có dạng $n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$.

Ví dụ 23

Giải hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + n$ $(n \geq 2)$ với điều kiện ban đầu $a_1 = 1$

- Hệ thức thuần nhất tương ứng là $a_n = a_{n-1}$ $(n \geq 2)$. Hệ thức này có nghiệm đặc trưng $r = 1$ và dãy $\{a_n^{(h)}\}$ với $a_n^{(h)} = c \cdot (1)^n$ là một dãy thỏa mãn hệ thức, trong đó c là hằng số nào đó
- Ta có $F(n) = n = (1 \cdot n + 0) \cdot 1^n$. Vì $s = 1$ là nghiệm đặc trưng của hệ thức thuần nhất tương ứng với bội 1, một nghiệm riêng của hệ thức không thuần nhất đã cho có dạng $a_n^{(p)} = n(p_1 n + p_0)1^n = p_1 n^2 + p_0 n$
- Thay dạng của nghiệm riêng vào hệ thức đã cho, ta có $n(2p_1 - 1) + (p_0 - p_1) = 0$, nghĩa là $2p_1 - 1 = 0$ và $p_0 - p_1 = 0$, do đó $p_0 = p_1 = 1/2$
- Cuối cùng, hệ thức ban đầu có nghiệm dạng $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = n(n+1)/2 + c$. Thay vào điều kiện ban đầu $a_1 = 1$ ta được $c = 0$

Bài tập 22

Giải các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau

(1) $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ *với* $n \geq 1$, $a_0 = 1$

(2) $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$ *với* $n \geq 2$, $a_1 = 5$

(3) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$ *(**Gợi ý:** Tìm nghiệm riêng có dạng* $qn2^n + p_1n + p_2$*, trong đó* q, p_1, p_2 *là các hằng số)*

Hàm sinh

Hàm sinh (generating function) $G_a(x)$ của một dãy vô hạn $\{a_n\}$ $(n \geq 0)$ được định nghĩa như sau

$$G_a(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \ldots$$

Nói cách khác, a_n là hệ số của x^n trong $G_a(x)$

$$G_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots)$$

$$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \ldots.$$

→

Công thức tường minh

$$G_a(x) = h(x)$$

→

Khai triển $h(x)$

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{}\, x^n$$

Định lý 5

Cho $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *và* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. *Ta có*

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

Chú ý: Định lý trên chỉ đúng cho các chuỗi lũy thừa hội tụ trong một khoảng nào đó, và tất cả các chuỗi chúng ta sẽ xét trong bài giảng này đều thỏa mãn điều kiện đó. Tuy nhiên, ngay cả khi các chuỗi không hội tụ, định lý trên có thể được sử dụng như là định nghĩa cho các phép cộng và nhân các hàm sinh

Ví dụ 24

Giải hệ thức truy hồi $a_n = 3a_{n-1}$ $(n \geq 1)$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 2$

$$\begin{aligned}
G_a(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (3a_{n-1}) x^n \\
&= 2 + 3x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = 2 + 3x \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \\
&= 2 + 3x G_a(x) \\
G_a(x) &= \frac{2}{1-3x}
\end{aligned}$$

Nhắc lại rằng $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ với $-1 < x < 1$. Suy ra

$\sum_{n=0}^{\infty} c^n x^n = \frac{1}{1-cx}$ với $-1 < cx < 1$ trong đó $c \neq 0$ là hằng số nào đó

Sử dụng đẳng thức trên, ta có thể viết

$$G_a(x) = \frac{2}{1-3x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2 \cdot 3^n) x^n$$

Suy ra $a_n = 2 \cdot 3^n$

Một phương pháp khác để tìm công thức tường minh cho $G_a(x)$ trong Ví dụ 24. Chú ý rằng $a_n = 3a_{n-1}$ $(n \geq 1)$ và $a_0 = 2$

$$G_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{Định nghĩa hàm sinh}$$

$$-3xG_a(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} [3a_n] x^{n+1} \qquad \text{Nhân hai vế với } -3x$$

$$\begin{aligned}
G_a(x) - 3xG_a(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} [3a_n] x^{n+1} && \text{Cộng hai đẳng thức} \\
&= a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} [3a_n] x^{n+1} \\
&= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} [3a_{n-1}] x^n && \text{Đổi chỉ số} \\
&= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n - 3a_{n-1}\right] x^n && a_n = 3a_{n-1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Một số đẳng thức hữu ích

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$$

$$\frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{kn}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

Ví dụ 25

Dãy Fibonacci $\{f_n\}$ cho bởi hệ thức $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$ và điều kiện ban đầu $f_0 = 0$ và $f_1 = 1$

$$
\begin{aligned}
G_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n &= f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) x^n \\
&= x + x \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^{n-2} \\
&= x + x \sum_{m=1}^{\infty} f_m x^m + x^2 \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m && \text{đổi biến} \\
&= x + x[\sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m - f_0 x^0] + x^2 \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m && f_0 x^0 = 0 \\
&= x + x G_f(x) + x^2 G_f(x)
\end{aligned}
$$

$$G_f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Nhắc lại rằng $\sum_{n=0}^{\infty} c^n x^n = \frac{1}{1-cx}$ với $-1 < cx < 1$ trong đó $c \neq 0$ là hằng số nào đó

Bài tập 23

- *Viết* $G_f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-Ax} + \frac{b}{1-Bx}$ *với các hằng số* a, b, A, B *nào đó*
- *Áp dụng công thức trên để đưa* $G_f(x)$ *về dạng* $a\sum_{n=0}^{\infty} A^n x^n + b\sum_{n=0}^{\infty} B^n x^n$ *với* $-1 < Ax < 1$ *và* $-1 < Bx < 1$ ($\equiv$ *Khai triển* $G_f(x)$ *thành chuỗi lũy thừa)*
- *Từ định nghĩa hàm sinh, suy ra công thức cho dãy* $\{f_n\}$

Chú ý rằng từ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ với $-1 < x < 1$, bằng cách lấy đạo hàm hai vế và đổi chỉ số lấy tổng, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)x^m = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Bài tập 24

Giải hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và các điều kiện ban đầu $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ bằng cách sử dụng hàm sinh

Bài tập 25 ($\star$)

Giải hệ thức truy hồi $a_n = 3a_{n-1} + n$ với $n \geq 1$ và điều kiện ban đầu $a_0 = 1$ bằng cách sử dụng hàm sinh

Tài liệu tham khảo

Gunderson, David S. and Kenneth H. Rosen (2010). *Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications*. Chapman and Hall/CRC. DOI: 10.1201/b16005.

Part I

Phụ lục

Nội dung

Chứng minh (Quy nạp mạnh là đúng).

- Giả sử $P(1)$ đúng và với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$, $(P(1) \land P(2) \land \cdots \land P(k)) \to P(k+1)$ đúng. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ bằng phản chứng
- Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $P(n)$ sai. Do đó, tập $S = \{n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } P(n) \text{ sai}\} \subseteq \mathbb{Z}^+$ là tập khác rỗng.
- Theo Tiên đề 1, S có một phần tử nhỏ nhất m. Do $P(1)$ đúng và $m \in \mathbb{Z}^+$, ta có $m > 1$, suy ra $m - 1 \in \mathbb{Z}^+$
- Theo định nghĩa của m, với mọi số nguyên dương $j \leq m - 1$, ta có $P(j)$ đúng (nếu không thì $j < m$ và $P(j)$ sai; điều này mâu thuẫn với định nghĩa của m). Do đó $P(1) \land P(2) \land \cdots \land P(m-1)$ đúng
- Do $(P(1) \land P(2) \land \cdots \land P(k)) \to P(k+1)$ đúng với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$, ta có $(P(1) \land P(2) \land \cdots \land P(m-1)) \to P(m)$ đúng
- Kết hợp với $P(1) \land P(2) \land \cdots \land P(m-1)$ đúng, ta có $P(m)$ đúng. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của m. Do đó $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n

Quy nạp yếu $\Rightarrow$ Quy nạp mạnh.

(1) Giả sử với mọi $R(n)$, ta có $(R(1) \land \forall k \in \mathbb{Z}^+ (R(k) \rightarrow R(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ R(n)$ đúng, nghĩa là, quy nạp yếu đúng

(2) Giả sử với vị từ $P(n)$ ta có $P(1) \land \forall k \in \mathbb{Z}^+ \bigwedge_{j=1}^{k} P(j) \rightarrow P(k+1)$ đúng, nghĩa là, bước cơ sở và bước quy nạp của quy nạp mạnh là đúng. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ đúng

(3) Ta định nghĩa $Q(n) = \bigwedge_{j=1}^{n} P(n)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$

(4) Từ (1), ta có $(Q(1) \land \forall k \in \mathbb{Z}^+ (Q(k) \rightarrow Q(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ Q(n)$ đúng

(5) Từ (3), ta có $Q(1) \equiv P(1)$ và $\forall n \in \mathbb{Z}^+ Q(n) \equiv \forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$

(6) Chú ý rằng với các mệnh đề p, q bất kỳ $p \rightarrow q \equiv p \rightarrow p \land q$ (Tại sao?).

(7) Do đó $Q(k) \rightarrow Q(k+1) \equiv \bigwedge_{j=1}^{k} P(k) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^{k+1} P(k+1) \equiv \bigwedge_{j=1}^{k} P(k) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^{k} P(k) \land P(k+1) \equiv \bigwedge_{j=1}^{k} P(k) \rightarrow P(k+1)$

(8) Thay (5) và (7) vào (4), ta có điều phải chứng minh

$\square$

Quy nạp mạnh $\Rightarrow$ Quy nạp yếu.

(1) Giả sử với mọi $R(n)$ ta có $(R(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ \, (\bigwedge_{j=1}^{k} R(j) \to R(k+1))) \to \forall n \in \mathbb{Z}^+ \, R(n)$ đúng, nghĩa là, quy nạp mạnh đúng

(2) Giả sử với vị từ $P(n)$ ta có $P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ \, (P(k) \to P(k+1))$ đúng, nghĩa là, bước cơ sở và bước quy nạp của quy nạp yếu đúng. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ đúng

(3) Chú ý rằng với các mệnh đề p, q, r bất kỳ, nếu $p \to q$ đúng thì $p \wedge r \to q$ cũng đúng (Tại sao?)

(4) Áp dụng (1) với $P(n)$, ta có $(P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ \, (\bigwedge_{j=1}^{k} P(j) \to P(k+1))) \to \forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ đúng.

(5) Từ (2), ta có $P(1)$ đúng và $\forall k \in \mathbb{Z}^+ \, (P(k) \to P(k+1))$ đúng. Kết hợp với (3), ta có $\forall k \in \mathbb{Z}^+ \, (\bigwedge_{j=1}^{k} P(j) \to P(k+1))$ đúng

(6) Từ (4) và (5) ta có điều phải chứng minh

$\square$