

COPYRIGHT NOTICE

THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2023 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2023-02-26

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2023-02-26



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Các cấu trúc cơ bản I

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

1 Tập hợp

Bài tập 1. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{0, 3, 6\}$. Tìm

- (a) $A \cup B$
- (b) $A \cap B$
- (c) $A - B$
- (d) $A \Delta B$

Bài tập 2. Tìm các tập A và B , biết rằng $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$, và $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

Bài tập 3. Cho các tập hợp A, B . Chứng minh

- (a) $(A \cap B) \subseteq A$
- (b) $A \subseteq (A \cup B)$
- (c) $A - B \subseteq A$
- (d) $A \cap (A - B) = \emptyset$
- (e) $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bài tập 4. Hãy chứng minh rằng với các tập A, B, C , $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ bằng cách

- (a) Chứng minh theo định nghĩa. (Nhắc lại: $A = B$ khi và chỉ khi $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$.)
- (b) Dùng bảng tính thuộc.

Bài tập 5. Với các tập A, B, C , có thể kết luận rằng $A = B$ nếu

- (a) $A \cup C = B \cup C$?
- (b) $A \cap C = B \cap C$?
- (c) $A \cup C = B \cup C$ và $A \cap C = B \cap C$?

Bài tập 6. Với A là tập con của một tập vũ trụ U , chứng minh rằng

- (a) $A \Delta U = \overline{A}$
- (b) $A \Delta \overline{A} = U$

Bài tập 7. Với hai tập A, B bất kỳ, chứng minh

- (a) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- (b) $A \Delta B = B \Delta A$
- (c) $(A \Delta B) \Delta B = A$

Bài tập 8. Có thể nói gì về các tập A, B nếu $A \Delta B = A$?

Bài tập 9. Chứng minh rằng $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$ với A, B, C là các tập hữu hạn bất kỳ. (Đây là trường hợp đặc biệt của *nguyên lý bù trừ (inclusion-exclusion principle)* sẽ được đề cập ở phần sau.)

Bài tập 10. Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho

- (a) $A \times (B \cup C) = (A \times C) \cup (B \times C)$
- (b) $A \times (B \cap C) = (A \times C) \cap (B \times C)$

trong đó A, B, C là các tập bất kỳ.

2 Hàm

Bài tập 11. Hãy tìm ví dụ một hàm f từ \mathbb{N} đến \mathbb{N} thỏa mãn

- (a) f là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
- (c) f là song ánh và f khác hàm đồng nhất trên \mathbb{N}
- (b) f là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
- (d) f vừa không là đơn ánh vừa không là toàn ánh

Bài tập 12. Hàm $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là đơn ánh không?

- (a) $f(n) = n - 1$
- (c) $f(n) = n^3$
- (b) $f(n) = n^2 + 1$
- (d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$

Bài tập 13. Hàm $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là toàn ánh không?

- (a) $f(m, n) = 2m - n$
- (c) $f(m, n) = m + n + 1$
- (b) $f(m, n) = m^2 - n^2$
- (d) $f(m, n) = m^2 - 4$

Bài tập 14. Hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là song ánh không?

- (a) $f(x) = -3x + 4$
- (e) $f(x) = 2x + 1$
- (b) $f(x) = -3x^2 + 7$
- (f) $f(x) = x^2 + 1$
- (c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$
- (g) $f(x) = x^3$
- (d) $f(x) = x^5 + 1$
- (h) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2) + 2$

Bài tập 15. Gọi $f : A \rightarrow B$ là một hàm với A, B là các tập hữu hạn thỏa mãn $|A| = |B|$. Chứng minh rằng f là đơn ánh khi và chỉ khi nó là toàn ánh.

Bài tập 16. Cho các hàm $g : A \rightarrow B$ và $f : B \rightarrow C$. Chứng minh rằng

- (a) Nếu cả g và f đều là đơn ánh thì $f \circ g$ cũng là đơn ánh.
- (b) Nếu cả g và f đều là toàn ánh thì $f \circ g$ cũng là toàn ánh.
- (c) Nếu $f \circ g$ là toàn ánh thì f cũng là toàn ánh
- (d) Nếu $f \circ g$ là đơn ánh thì g cũng là đơn ánh
- (e) Nếu $f \circ g$ là song ánh thì g là toàn ánh khi và chỉ khi f là đơn ánh

Bài tập 17. Tìm ví dụ các hàm f và g thỏa mãn $f \circ g$ là song ánh, nhưng g không phải toàn ánh và f không phải đơn ánh.

Bài tập 18. Chứng minh các tính chất sau của hàm trần và hàm sàn, trong đó $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{Z}$

- (1a) $\lfloor x \rfloor = n$ khi và chỉ khi $n \leq x < n + 1$
- (3a) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
- (1b) $\lceil x \rceil = n$ khi và chỉ khi $n - 1 < x \leq n$
- (3b) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
- (1c) $\lfloor x \rfloor = n$ khi và chỉ khi $x - 1 < n \leq x$
- (4a) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
- (1d) $\lceil x \rceil = n$ khi và chỉ khi $x \leq n < x + 1$
- (4b) $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$
- (2) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

Bài tập 19. Chứng minh rằng nếu $n \in \mathbb{N}$ thì $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$ nếu n chẵn và $\lfloor n/2 \rfloor = (n - 1)/2$ nếu n lẻ.

Bài tập 20. Chứng minh rằng nếu $x \in \mathbb{R}$ thì $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor$.

(Gợi ý: Khi xét các bài toán liên quan đến hàm sàn, một cách tiếp cận hữu ích là đặt $x = n + \epsilon$ trong đó $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ và ϵ là một số thực thỏa mãn $0 \leq \epsilon < 1$. Tương tự, với hàm trần, có thể đặt $x = n - \epsilon$.)