

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn



Nội dung



Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề



Mệnh đề

Một **mệnh đề** (*proposition*) là một phát biểu đúng (True) hoặc sai (False), chứ không thể vừa đúng vừa sai

- ✓ Hà Nội là thủ đô của Việt Nam
- ✓ $1 = 2$
- ✓ $1^3 + \dots + 9^3 = (20 + 25)^2 = 2025$
- ✓ Mọi số chẵn lớn hơn hoặc bằng 4 là tổng của hai số nguyên tố (Giả thuyết Goldbach)
- ✗ Máy giờ rồi?
- ✗ Hãy đọc quyển sách này
- ✗ Thời tiết hôm nay lạnh quá
- ✗ $x + 1 = 2$

[Câu hỏi]

[Mệnh lệnh]

[Ý kiến, Cảm thán]

[Đúng/sai tùy vào x]

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp

chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề



Bài tập 1

Câu nào sau đây là một mệnh đề?

- (1) Trái Đất là một hành tinh
- (2) $1 + 2$
- (3) $1 + 2 = 3$
- (4) Hôm nay trời mưa
- (5) Bạn có nói tiếng Anh không?
- (6) $x + y = 5$
- (7) A ha ha ha ha
- (8) Hãy đưa cho tôi quyển sách kia
- (9) Rất tốt!
- (10) Nếu $x = 3, y = 4, z = 5$ thì $x^2 + y^2 = z^2$

Bài tập 2

Khẳng định “Phát biểu này là sai” có phải là một mệnh đề lôgic hay không? Vì sao?

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

3

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị



- Ta thường sử dụng các chữ cái p, q, r, s, \dots để ký hiệu các mệnh đề
- Mệnh đề đúng có *giá trị chân lý đúng T* (True). Mệnh đề sai có *giá trị chân lý sai F* (False)
- *Mệnh đề phức hợp (compound proposition)* được xây dựng bằng cách tổ hợp một hoặc nhiều mệnh đề thông qua các *toán tử lôgic (logical operators)*. Ngược lại, *mệnh đề nguyên tử (atomic proposition)* không thể biểu diễn được qua các mệnh đề đơn giản hơn

Phủ định	NOT	\neg
Phép hội	AND	\wedge
Phép tuyển	OR	\vee
Phép tuyển loại	XOR	\oplus
Phép kéo theo	IMPLIES	\rightarrow
Phép tương đương	IFF	\leftrightarrow

- Mỗi quan hệ giữa các giá trị chân lý của các mệnh đề được thể hiện thông qua *bảng chân trị (truth table)*

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

4

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

5

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp

chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Ví dụ 1

Xét các mệnh đề sau:

- (1) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam [Mệnh đề nguyên tử]
- (2) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam và Hà Nội là một trong hai đô thị loại đặc biệt của Việt Nam [Mệnh đề phức hợp]
- (3) Hà Nội là thủ đô và đồng thời là một trong hai đô thị loại đặc biệt của Việt Nam [Mệnh đề phức hợp]

Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

6

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

- **Phủ định (negation)** của mệnh đề p , ký hiệu $\neg p$ hoặc \bar{p} , là mệnh đề “không phải là p ”. **Giá trị chân lý $\neg p = T$ khi và chỉ khi $p = F$ và $\neg p = F$ khi và chỉ khi $p = T$**

- Với $p :=$ “2 là số chẵn” thì $\neg p :=$ “2 không là số chẵn”

- Bảng chân trị

p	$\neg p$
T	F
F	T

Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

7

- **Hội (Conjunction)** của hai mệnh đề p và q , ký hiệu $p \wedge q$ hoặc pq , là mệnh đề “ p và q ”. **Giá trị chân lý $p \wedge q = T$ khi và chỉ khi cả p và q đều nhận giá trị T, và trong các trường hợp còn lại $p \wedge q = F$**

- Với $p :=$ “2 là số chẵn” và $q :=$ “2 là số nguyên tố” thì
 $p \wedge q :=$ “2 là số chẵn và 2 là số nguyên tố”

- **Bảng chân trị**

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

8

- **Tuyển (Disjunction/Inclusive Or)** của hai mệnh đề p và q , ký hiệu $p \vee q$ hoặc $p + q$, là mệnh đề “ p hoặc q ”. **Giá trị chân lý** $p \vee q = F$ khi và chỉ khi cả p và q đều nhận giá trị F , và trong các trường hợp còn lại $p \vee q = T$

- Với $p :=$ “2 là số chẵn” và $q :=$ “2 là số nguyên tố” thì $p \vee q :=$ “2 là số chẵn hoặc 2 là số nguyên tố”

- **Bảng chân trị**

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

9

- **Tuyến loại (Exclusive Or)** của hai mệnh đề p và q , ký hiệu $p \oplus q$, là mệnh đề “hoặc p hoặc q ”. **Giá trị chân lý $p \oplus q = T$ khi và chỉ khi chính xác một trong hai mệnh đề p và q nhận giá trị T, và trong các trường hợp còn lại $p \oplus q = F$**

- Với $p := “2 \text{ là số chẵn}”$ và $q := “2 \text{ là số nguyên tố}”$ thì $p \oplus q := “\text{Hoặc } 2 \text{ là số chẵn hoặc } 2 \text{ là số nguyên tố, nhưng không phải cả hai}”$

- **Bảng chân trị**

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- **Chú ý:** Khi $p = T$ và $q = T$ thì $p + q = T$ nhưng $p \oplus q = F$

Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị



- Mệnh đề **kéo theo (implication)** $p \rightarrow q$, với p, q là hai mệnh đề cho trước, là mệnh đề “nếu p , thì q ”. **Giá trị chân lý** $p \rightarrow q = F$ khi và chỉ khi $p = T$ và $q = F$, và trong mọi trường hợp còn lại $p \rightarrow q = T$

- Ta gọi p là “giả thiết (hypothesis)” và q là “kết luận (conclusion)”. Ta cũng nói “ p là điều kiện đủ (sufficient) cho q ” và “ q là điều kiện cần (necessary) cho p ”
- Với $p :=$ “2 là số chẵn” và $q :=$ “2 là số nguyên tố” thì $p \rightarrow q :=$ “Nếu 2 là số chẵn, thì 2 là số nguyên tố”

- Bảng chân trị

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- **Chú ý:** Giữa p và q **không nhất thiết có quan hệ nguyên nhân-kết quả**. Ví dụ, $p \rightarrow q = F$ không nhất thiết là “từ p không suy ra q ” mà đơn giản chỉ là $p = T$ và $q = F$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

10

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị



- Từ $p \rightarrow q$ ta có thể xây dựng một số mệnh đề mới
 - $q \rightarrow p$ là **mệnh đề đảo (converse)** của $p \rightarrow q$
 - $\neg q \rightarrow \neg p$ là **mệnh đề phản đảo (contrapositive)** của $p \rightarrow q$
 - $\neg p \rightarrow \neg q$ là **mệnh đề nghịch đảo (inverse)** của $p \rightarrow q$
- Ví dụ với $p \rightarrow q :=$ “Nếu 2 là số chẵn, thì 2 là số nguyên tố”
 - $q \rightarrow p :=$ “Nếu 2 là số nguyên tố, thì 2 là số chẵn”
 - $\neg q \rightarrow \neg p :=$ “Nếu 2 không là số nguyên tố, thì 2 không là số chẵn”
 - $\neg p \rightarrow \neg q :=$ “Nếu 2 không là số chẵn, thì 2 không là số nguyên tố”

Bài tập 3

Xây dựng bảng chân trị cho các mệnh đề trên.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\neg p \rightarrow \neg q$
T	T			T			
T	F			F			
F	T			T			
F	F			T			

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

11 Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp

chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

- Mệnh đề *tương đương (bi-implication)* $p \leftrightarrow q$, với p, q là hai mệnh đề cho trước, là mệnh đề “ p khi và chỉ khi q ”. **Giá trị chân lý** $p \leftrightarrow q = \text{T}$ khi và chỉ khi p và q nhận cùng giá trị, và trong các trường hợp khác $p \leftrightarrow q = \text{F}$

- Với $p :=$ “2 là số chẵn” và $q :=$ “2 là số nguyên tố”, ta có $p \leftrightarrow q :=$ “2 là số chẵn khi và chỉ khi 2 là số nguyên tố”

- Bảng chân trị

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

12

68

Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

13

■ Tổng kết các toán tử lôgic đã đề cập

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T

- Toán tử \neg được gọi là một **toán tử một ngôi (unary operator)**
- Các toán tử $\wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow$ được gọi là các **toán tử hai ngôi (binary operator)**
- **Thứ tự ưu tiên** của các toán tử lôgic trong một mệnh đề phức hợp: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Nên sử dụng **ngoặc đơn** “(” và “)” để xác định thứ tự ưu tiên
 - $\neg p \wedge q$ nghĩa là $(\neg p) \wedge q$ chứ không phải $\neg(p \wedge q)$
 - $p \wedge q \rightarrow r$ nghĩa là $(p \wedge q) \rightarrow r$ chứ không phải $p \wedge (q \rightarrow r)$



Bài tập 4

Cho các mệnh đề $p :=$ “Tôi mua một vé xổ số Vietlott” và $q :=$ “Tôi trúng giải đặc biệt 200 tỷ VNĐ”. Hãy mô tả bằng câu thông thường các mệnh đề phức hợp sau:

(a) $\neg p$

(b) $p \vee q$

(c) $p \rightarrow q$

(d) $p \wedge q$

(e) $p \leftrightarrow q$

(f) $\neg p \rightarrow \neg q$

(g) $\neg p \wedge \neg q$

(h) $\neg p \vee (p \wedge q)$

Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị



Ví dụ 2

Xây dựng bảng chân trị cho mệnh đề $(p \vee \neg q) \rightarrow q$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

Ví dụ 3

Xây dựng bảng chân trị cho mệnh đề $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \oplus q)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$	$\neg(p \oplus q)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \oplus q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

15 Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Lôgic mệnh đề

Lôgic và các toán tử bit



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

16

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

- Một **bit** (binary digit = chữ số nhị phân) có giá trị 0 hoặc 1
- Sử dụng bit để biểu diễn giá trị chân lý: 1 cho T và 0 cho F
- Một **chuỗi nhị phân độ dài n** là một dãy sắp thứ tự $x_1 x_2 \dots x_n$ trong đó mỗi x_i là một bit ($1 \leq i \leq n$).
 - Ví dụ, 1001101010 là một chuỗi nhị phân độ dài 10
- Các **toán tử bit**: \neg (NOT), \wedge (AND), \vee (OR), \oplus (XOR)

x	y	\bar{x}	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \oplus y$
1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0

Lôgic mệnh đề

Lôgic và các toán tử bit



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

17

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Tính toán với chuỗi nhị phân: thực hiện theo từng bit

$$\blacksquare \overline{x_1 \dots x_n} = (\overline{x_1}) \dots (\overline{x_n})$$

$$\blacksquare x_1 \dots x_n \wedge y_1 \dots y_n = (x_1 \wedge y_1) \dots (x_n \wedge y_n)$$

$$\blacksquare x_1 \dots x_n \vee y_1 \dots y_n = (x_1 \vee y_1) \dots (x_n \vee y_n)$$

$$\blacksquare x_1 \dots x_n \oplus y_1 \dots y_n = (x_1 \oplus y_1) \dots (x_n \oplus y_n)$$

Bài tập 5

(a) $\overline{11010} =$

(b) $11010 \vee 10001 =$

(c) $11010 \wedge 10001 =$

(d) $11010 \oplus 10001 =$

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

18

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

- Một **hằng đúng (tautology)** là một mệnh đề phức hợp luôn luôn đúng với mọi giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần
 - Ký hiệu **T**
 - $p \vee \neg p$
- Một **mâu thuẫn (contradiction)** là một mệnh đề phức hợp luôn luôn sai với mọi giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần
 - Ký hiệu **F**
 - $p \wedge \neg p$
- Một **tiếp liên (contingency)** là một mệnh đề phức hợp không phải là hằng đúng cũng không phải là mâu thuẫn
 - $(p \vee q) \rightarrow r$

Các mệnh đề tương đương

Tương đương logic



- Mệnh đề phức hợp p **tương đương logic (logically equivalent)** với mệnh đề phức hợp q , ký hiệu $p \equiv q$ hoặc $p \Leftrightarrow q$, khi và chỉ khi mệnh đề $p \leftrightarrow q$ là một hằng đúng
- **Chú ý:** p và q là tương đương logic khi và chỉ khi p và q cùng nhận một giá trị chân lý giống nhau trong mỗi hàng tương ứng của các bảng chân trị của chúng

Ví dụ 4

Chứng minh rằng $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (luật De Morgan)

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T

Bài tập 6

Chứng minh các tương đương logic sau bằng bảng chân trị

(a) $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ (b) $p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

19

68

Các mệnh đề tương đương

Tương đương logic



Một số tương đương logic quan trọng

Tên gọi	Tương đương logic
Luật đồng nhất (Identity laws)	$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$
Luật nuốt (Domination laws)	$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
Luật lũy đẳng (Idempotent laws)	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
Luật phủ định kép (Double negation laws)	$\neg(\neg p) \equiv p$
Luật giao hoán (Commutative laws)	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Luật kết hợp (Associative laws)	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Luật phân phối (Distributive laws)	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

20

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Các mệnh đề tương đương

Tương đương logic



Một số tương đương logic quan trọng (tiếp)

Tên gọi	Tương đương logic
Luật De Morgan (De Morgan's laws)	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Luật hấp thụ (Absorption laws)	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Luật phủ định (Negation laws)	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$

Chú ý: Trong bảng các tương đương logic quan trọng ở trên, **T** là một mệnh đề phức hợp luôn đúng (hằng đúng) và **F** là một mệnh đề phức hợp luôn sai (mâu thuẫn)

Bài tập 7

Chứng minh các tương đương logic quan trọng nêu trên bằng cách lập bảng chân trị

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

21

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Các mệnh đề tương đương

Tương đương logic



Ví dụ 5

Chứng minh $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ và $\neg p \wedge \neg q$ là tương đương logic bằng cách sử dụng các tương đương logic đã biết

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg((p \vee \neg p) \wedge (p \vee q))$$

$$\equiv \neg(\mathbf{T} \wedge (p \vee q))$$

$$\equiv \neg((p \vee q) \wedge \mathbf{T})$$

$$\equiv \neg(p \vee q)$$

$$\equiv \neg p \wedge \neg q$$

Luật phân phối

Luật phủ định

Luật giao hoán

Luật đồng nhất

Luật De Morgan

Bài tập 8

Kiểm tra lại ví dụ trên bằng cách lập bảng chân trị

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

22

68

Các mệnh đề tương đương

Tương đương logic



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

23

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

■ Một số tương đương logic liên quan đến phép kéo theo

$$(1) p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$(2) p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$(3) p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$$

$$(4) p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$(5) \neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

$$(6) (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$$

$$(7) (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$$

$$(8) (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$$

$$(9) (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

■ Một số tương đương logic liên quan đến phép tương đương

$$(10) p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$(11) p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$$

$$(12) p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$(13) \neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$$

Bài tập 9

Chứng minh các tương đương logic trên bằng cách lập bảng chân trị hoặc sử dụng các tương đương logic đã biết

Các mệnh đề tương đương

Tương đương logic



Ví dụ 6

Chứng minh $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ là một hằng đúng

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$$

$$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$$

$$\equiv (p \vee \neg p) \vee (q \vee \neg q)$$

$$\equiv \mathbf{T} \vee \mathbf{T}$$

$$\equiv \mathbf{T}$$

$$\text{Từ } p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Luật De Morgan

Luật giao hoán, kết hợp

Luật phủ định

Luật nuốt

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

24

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Các mệnh đề tương đương

Tương đương logic



- Một tập C các toán tử logic được gọi là **đầy đủ (functionally complete)** nếu mỗi mệnh đề phức hợp tương đương với một mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử trong C
 - $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$ là một tập (các toán tử logic) đầy đủ

Ví dụ 7

Tìm một mệnh đề tương đương của $p \leftrightarrow q$ chỉ sử dụng các toán tử \neg, \wedge, \vee

- Ứng với **mỗi hàng có giá trị T** ở cột $p \leftrightarrow q$, ta tìm một biểu thức **chỉ đúng với các giá trị của p và q ở hàng đó, và sai với mọi giá trị khác.**

p	q	$p \leftrightarrow q$	
T	T	T	$p \wedge q$
T	F	F	
F	T	F	
F	F	T	$\neg p \wedge \neg q$

- $p \leftrightarrow q$ đúng khi **ít nhất một** biểu thức trên có giá trị T

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Chú ý: Phương pháp sử dụng trong ví dụ trên có thể áp dụng với mọi mệnh đề phức hợp. Mệnh đề thu được gọi là **dạng tuyển chuẩn tắc (disjunctive normal form - DNF)**

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

25

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Các mệnh đề tương đương

Tương đương logic



- Một tập C các toán tử logic được gọi là **đầy đủ (functionally complete)** nếu mỗi mệnh đề phức hợp tương đương với một mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử trong C
 - $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$ là một tập (các toán tử logic) đầy đủ

Ví dụ 7

Tìm một mệnh đề tương đương của $p \leftrightarrow q$ chỉ sử dụng các toán tử \neg, \wedge, \vee

- Ứng với **mỗi hàng có giá trị F** ở cột $p \leftrightarrow q$, ta tìm một biểu thức **chỉ sai với các giá trị của p và q ở hàng đó, và đúng với mọi giá trị khác.**

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$\neg p \vee q$

$p \vee \neg q$

- $p \leftrightarrow q$ sai khi **tất cả** biểu thức trên có giá trị F

$$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$

Chú ý: Phương pháp sử dụng trong ví dụ trên có thể áp dụng với mọi mệnh đề phức hợp. Mệnh đề thu được gọi là **dạng hội chuẩn tắc (conjunctive normal form - CNF)**

Logic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Logic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Logic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Logic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

25

68

Các mệnh đề tương đương

Tương đương logic



Tìm CNF/DNF sử dụng các tương đương logic đã biết

■ “Khử” \oplus , \rightarrow , và \leftrightarrow bằng các tương đương logic đã biết

■ $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

■ $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

■ $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

■ Giảm “phạm vi” của các dấu phủ định \neg thông qua luật De Morgan và luật phủ định kép

■ Chuyển sang CNF hoặc DNF bằng cách sử dụng các luật phân phối và kết hợp

Ví dụ 8

Tìm CNF của $p \vee q \rightarrow r \wedge s$

$$\begin{aligned} p \vee q \rightarrow r \wedge s &\equiv \neg(p \vee q) \vee (r \wedge s) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s) \\ &\equiv (\neg p \vee (r \wedge s)) \wedge (\neg q \vee (r \wedge s)) \\ &\equiv ((\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee s)) \wedge ((\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee s)) \\ &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee s) \end{aligned}$$

Khử \rightarrow

Luật De Morgan

Luật phân phối

Luật phân phối

Luật kết hợp

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

26

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

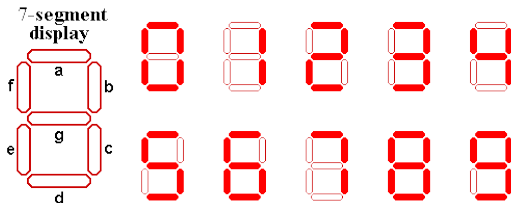
Ví dụ và Bài tập

Các mệnh đề tương đương

Tương đương logic



Ví dụ 9 (Hiển thị LED 7 đoạn)



Hình: Hiển thị LED 7 đoạn (Seven-segment LED display) sử dụng rộng rãi trong nhiều thiết bị điện tử

- Ví dụ, $a = T$ nghĩa là thanh a được hiển thị (bật) và $a = F$ nghĩa là thanh a không được hiển thị (tắt)
- Số 0 tương ứng với mệnh đề logic F_0 thỏa mãn F_0 đúng khi và chỉ khi $a = b = c = d = e = f = T$ và $g = F$ [Tìm F_0 ?]
- Số 1 tương ứng với mệnh đề logic F_1 thỏa mãn F_1 đúng khi và chỉ khi $b = c = T$ và $a = d = e = f = g = F$ [Tìm F_1 ?]
- ...

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

27

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

68

Các mệnh đề tương đương

Tương đương logic



Bài tập 10

Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 và 0. (Nghĩa là, giá trị của `x` và `y` là 0 hoặc 1.) Mỗi đoạn mã sau đây bao gồm một điều kiện dựa trên `x`, `y`, và các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia). Hãy viết lại các điều kiện này sử dụng ngôn ngữ của logic mệnh đề.

- (a) `if x * y ...`
- (b) `if x + y ...`
- (c) `if 2 - x - y ...`
- (d) `if x * (1 - y) ...`
- (e) `if x * (1 - y) + (1 - x) * y ...`

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

28

68

Các mệnh đề tương đương

Tương đương logic



Bài tập 11

Tìm CNF hoặc DNF của các mệnh đề

(a) $p \oplus q$

(c) $\neg p \oplus \neg q$

(b) $p \rightarrow q$

(d) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$

Bài tập 12

Tập các toán tử logic \mathcal{C} sau có đầy đủ không? Vì sao?

(a) $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge\}$

(b) $\mathcal{C} = \{\neg, \vee\}$

(c) $\mathcal{C} = \{\wedge, \vee\}$

Bài tập 13

Cho p, q, r là các mệnh đề nguyên tử. Hãy sử dụng các mệnh đề trên và các toán tử logic \neg, \wedge, \vee để biểu diễn mệnh đề sau

“Ít nhất hai trong ba mệnh đề p, q, r là đúng”

Bài tập 14

Chứng minh các tương đương logic sau

(a) $\neg(p \oplus q) \equiv p \leftrightarrow q$

(b) $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \vee r)$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

29

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

68



Vị từ

Một *vị từ (predicate)* là một *hàm mệnh đề (propositional function)* (từ tập các đối tượng đến tập các mệnh đề) mô tả thuộc tính của các đối tượng và mối quan hệ giữa chúng

- Các biến (đối tượng) thường được ký hiệu bởi các chữ cái x, y, z, \dots và có thể được thay thế bằng các giá trị cụ thể từ một *miền xác định (domain)* \mathcal{D} tương ứng cho trước
- Các chữ in hoa P, Q, R, \dots thường được dùng để ký hiệu các hàm mệnh đề (vị từ)
- Với $n \geq 1$, ta gọi $P(x_1, \dots, x_n)$ là *vị từ (n-ngôi) ((n-place) predicate) xác định trên miền $\mathcal{D} = D_1 \times \dots \times D_n$ nếu $P(a_1, \dots, a_n)$ là một mệnh đề với bộ (a_1, \dots, a_n) bất kỳ trong \mathcal{D} ($a_1 \in D_1, \dots, a_n \in D_n$)*

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

30

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



Ví dụ 10

- $P(x) :=$ “ x lớn hơn 3” ($P :=$ “lớn hơn 3” và x là một biến) với x là số tự nhiên. $P(x)$ là vị từ xác định trên miền $\mathcal{D} = \mathbb{N}$
- $Q(x, y, z) :=$ “ x cho y điểm z ” với x, y là tên riêng và z là số tự nhiên. $Q(x, y, z)$ là vị từ xác định trên miền $\mathcal{D} = T \times T \times \mathbb{N}$ trong đó T là tập các tên riêng
- $P(x)$ không phải là mệnh đề nhưng $P(3)$ là mệnh đề. $Q(x, y, z)$ không phải là mệnh đề nhưng $Q(\text{Tý}, \text{Tèo}, 10)$ là mệnh đề

Bài tập 15

$P(x) :=$ “ $x > 0$ ” là vị từ xác định trên miền $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$. Tìm giá trị chân lý của các mệnh đề sau

(a) $P(3) \vee P(-1)$

(c) $P(3) \rightarrow P(-1)$

(b) $P(3) \wedge P(-1)$

(d) $P(3) \rightarrow \neg P(-1)$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

31

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



Lượng từ

Lượng từ (quantifier) (ví dụ như *tất cả*, *nhiều*, *một số*, *không có*, v.v...) thường được sử dụng với vị từ để định lượng (đếm) các đối tượng (biến) “thỏa mãn” vị từ đó

■ Hai lượng từ quan trọng nhất

Lượng từ	Ký hiệu
với mọi (universal quantifier)	\forall
tồn tại (existential quantifier)	\exists

- $\forall x P(x)$ nghĩa là “**với mọi** giá trị của x trong miền xác định \mathcal{D} , $P(x)$ đúng”
- $\exists x P(x)$ nghĩa là “**tồn tại** giá trị của x trong miền xác định \mathcal{D} (nghĩa là có thể có một hoặc nhiều giá trị thỏa mãn), $P(x)$ đúng”
- $P(x)$ **không phải là mệnh đề** nhưng $\forall x P(x)$ và $\exists x P(x)$ là **mệnh đề**

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

32

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



- $\forall x P(x)$: **với mọi** giá trị của x trong miền xác định \mathcal{D} , $P(x)$ đúng
- $\forall x P(x)$ là
 - **đúng** nếu $P(x)$ đúng với mọi x trong \mathcal{D}
 - **sai** nếu $P(x)$ sai với ít nhất một giá trị của x trong \mathcal{D}
 - Với $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và $P(x) := "x^2 \geq 0"$, mệnh đề $\forall x P(x)$ đúng
 - Với $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và $P(x) := "x^2 - 1 \geq 0"$, mệnh đề $\forall x P(x)$ sai
- Một **phản ví dụ (counterexample)** của mệnh đề $\forall x P(x)$ là một giá trị x trong miền \mathcal{D} sao cho $P(x)$ sai
- Nếu $\mathcal{D} = \emptyset$ thì mệnh đề $\forall x P(x)$ đúng
- Nếu có thể liệt kê tất cả các phần tử của \mathcal{D} , ví dụ như x_1, x_2, \dots, x_n , thì $\forall x P(x)$ tương đương lôgic với

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$$

Lógica vị từ

Lượng từ “tồn tại”



- $\exists x P(x)$: **tồn tại** giá trị của x trong miền xác định \mathcal{D} (nghĩa là có thể có một hoặc nhiều giá trị thỏa mãn), $P(x)$ đúng
- $\exists x P(x)$
 - **đúng** nếu $P(x)$ đúng với ít nhất một x trong \mathcal{D}
 - **sai** nếu $P(x)$ sai với mọi x trong \mathcal{D}
 - Với $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và $P(x) := "x^2 = 2"$, mệnh đề $\exists x P(x)$ đúng
 - Với $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$ và $P(x) := "x^2 = 2"$, mệnh đề $\exists x P(x)$ sai
- Nếu $\mathcal{D} = \emptyset$ thì mệnh đề $\exists x P(x)$ sai
- Nếu có thể liệt kê tất cả các phần tử của \mathcal{D} , ví dụ như x_1, x_2, \dots, x_n , thì $\exists x P(x)$ tương đương logic với

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)$$

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

34

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



Ví dụ 11

Mô tả câu “Tất cả sinh viên trong lớp này đã học môn Lập trình Java” bằng vị từ và lượng từ

- $J(x) :=$ “ x đã học môn Lập trình Java”
- Nếu \mathcal{D} là tập *các sinh viên trong lớp này* $\forall x J(x)$
- Nếu \mathcal{D} là tập *tất cả mọi người*. Đặt $S(x) :=$ “ x là sinh viên trong lớp này” $\forall x (S(x) \rightarrow J(x))$

Chú ý: Tại sao không phải là $\forall x (S(x) \wedge J(x))$?

Ví dụ 12

Mô tả câu “Một số sinh viên trong lớp này đã học môn Lập trình Java” bằng vị từ và lượng từ

- $J(x) :=$ “ x đã học môn Lập trình Java”
- Nếu \mathcal{D} là tập *các sinh viên trong lớp này* $\exists x J(x)$
- Nếu \mathcal{D} là tập *tất cả mọi người*. Đặt $S(x) :=$ “ x là sinh viên trong lớp này” $\exists x (S(x) \wedge J(x))$



Ví dụ 13

Mô tả câu “**Tồn tại duy nhất** một giá trị của x (trong miền xác định \mathcal{D}) sao cho $P(x)$ đúng” (Ta cũng viết “ $\exists!x P(x)$ ”) bằng các lượng từ \forall và \exists

$$\blacksquare \exists x P(x) \wedge \forall x_1 \forall x_2 ((P(x_1) \wedge P(x_2)) \rightarrow (x_1 = x_2))$$

$$\blacksquare \exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow (y = x)))$$

Bài tập 16

Giả sử miền xác định của tất cả các biến là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Các mệnh đề sau là đúng hay sai?

(a) $\forall x (x^2 \neq x)$

(b) $\forall x (x^2 \geq x)$

(c) $\forall x (x^2 \neq 2)$

Bài tập 17

Hãy mô tả định nghĩa số chính phương sau bằng vị từ và lượng từ: “Một số tự nhiên được gọi là số chính phương nếu nó là bình phương của một số tự nhiên nào đó”

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

36

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



Chú ý

Các tương đương lôgic đã biết trong lôgic mệnh đề vẫn đúng trong lôgic vị từ

Ví dụ 14

Giả sử biến x nhận giá trị từ miền \mathcal{D} . Ta chứng minh

$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x (Q(x) \wedge P(x))$. Cụ thể, ta chứng minh hai điều

(1) **Nếu $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ đúng thì $\forall x (Q(x) \wedge P(x))$ đúng**

- Giả sử $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ đúng. Do đó, với mọi $a \in \mathcal{D}$, mệnh đề $P(a) \wedge Q(a)$ đúng. Theo luật giao hoán, $Q(a) \wedge P(a)$ đúng. Suy ra $Q(a) \wedge P(a)$ đúng với mọi $a \in \mathcal{D}$. Do đó, $\forall x (Q(x) \wedge P(x))$ đúng

(2) **Nếu $\forall x (Q(x) \wedge P(x))$ đúng thì $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ đúng**

- Giả sử $\forall x (Q(x) \wedge P(x))$ đúng. Do đó, với mọi $a \in \mathcal{D}$, mệnh đề $Q(a) \wedge P(a)$ đúng. Theo luật giao hoán, $P(a) \wedge Q(a)$ đúng. Suy ra $P(a) \wedge Q(a)$ đúng với mọi $a \in \mathcal{D}$. Do đó, $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ đúng

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

37

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



Chú ý

Không nên sử dụng bảng chân trị để chứng minh hai mệnh đề có vị từ và lượng từ là tương đương lôgic

- Trong trường hợp miền xác định \mathcal{D} là **vô hạn**, ta không xây dựng được bảng chân trị
- Với phần lớn các phát biểu có lượng từ và vị từ, miền xác định luôn là miền vô hạn
- Tất nhiên, khi miền xác định \mathcal{D} là hữu hạn, có thể sử dụng bảng chân trị
 - Giả sử $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_n\}$
 - $\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_n)$
 - $\exists x P(x) \equiv P(x_1) \vee \dots \vee P(x_n)$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

38

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



Bài tập 18

Giả sử biến x nhận giá trị từ miền \mathcal{D} . Chứng minh

- (a) $\forall x (P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x))) \equiv \forall x ((P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(x) \vee R(x)))$
- (b) $\forall x \neg(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$

Bài tập 19

Giả sử biến x nhận giá trị từ miền \mathcal{D} .

- (a) Chứng minh $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
- (b) Các mệnh đề $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ và $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ có tương đương lôgic hay không? Vì sao?

Bài tập 20

Giả sử biến x nhận giá trị từ miền \mathcal{D} .

- (a) Chứng minh $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$
- (b) Các mệnh đề $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ và $(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$ có tương đương lôgic hay không? Vì sao?

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

39

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Lôgic vị từ

Lượng từ



Ví dụ 15

Các *công cụ tìm kiếm (search engine)* như Google, Bing, Yahoo, v.v... *cho phép người dùng sử dụng các toán tử lôgic (AND, OR, NOT) trong yêu cầu tìm kiếm (query) của họ.*

Ví dụ, yêu cầu (query) *“lôgic AND mat3500”*

sẽ trả lại kết quả là các trang web có *chứa đồng thời từ “lôgic” và từ “mat3500”*. Nói một cách đơn giản, *một yêu cầu tìm kiếm có thể được coi như là một vị từ Q* (với tập xác định là tập hợp tất cả các trang web có trong cơ sở dữ liệu); công cụ tìm kiếm sẽ *trả lại (theo một thứ tự nào đó) một danh sách các trang web p sao cho mệnh đề $Q(p)$ đúng*

Google search results for "lôgic AND mat3500". The search bar shows the query. Below the search bar, there are tabs for All, Images, Videos, Shopping, News, Books, Flights, and More. The results section shows a tip: "Limit this search to English language results. Learn more about filtering by language". The first result is from GitHub, titled "VNU-HUS MAT3500 3: Toán rời rạc", with a link to "https://hoanganhduc.github.io". The second result is from Studocu, titled "Logic and Proofs - toan roi rac - VNU-HUS MAT3500", with a link to "https://www.studocu.com/vn/logic-a...".

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

40

68



Bài tập 21

Tìm hiểu một số cách tìm kiếm với Google sử dụng các toán tử lôgic

Bài tập 22 (★)

Xét các yêu cầu tìm kiếm sau:

Q_A : “python AND algorithm AND NOT computer”

Q_B : “(computer OR algorithm) AND python”

Q_C : “python AND NOT (computer OR algorithm OR program)”⁴¹

Hãy mô tả hoặc lấy ví dụ (một trang web, một câu nào đó, v.v...) về kết quả trả lại trong các trường hợp sau:

- (a) Kết quả trả lại thỏa mãn yêu cầu Q_A
- (b) Kết quả trả lại thỏa mãn yêu cầu Q_A và không thỏa mãn yêu cầu Q_B
- (c) Kết quả trả lại thỏa mãn yêu cầu Q_A và Q_B nhưng không thỏa mãn yêu cầu Q_C

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



Ví dụ 16

- Ở mức độ nào đó, chúng ta có thể coi một **cơ sở dữ liệu (database)** như là một bảng
 - Các hàng tương ứng với các **cá thể (individual entity)** nào đó
 - Các cột tương ứng với các **trường (field)** mô tả dữ liệu liên quan đến các cá thể
- Một **truy vấn cơ sở dữ liệu (database query)** có thể xem như là một vị từ $Q(x)$ có chứa các điều kiện để kiểm tra các giá trị từ các cột và các toán tử lôgic liên kết các điều kiện này.
- Khi một truy vấn cơ sở dữ liệu được đưa vào, **hệ quản trị cơ sở dữ liệu (database management system)** sẽ trả lại một danh sách các hàng (ứng với các thực thể) trong cơ sở dữ liệu thỏa mãn điều kiện đề ra trong truy vấn
- Chúng ta có thể nghĩ về hình thức truy cập cơ sở dữ liệu này **từ góc nhìn của lôgic vị từ: để phản hồi truy vấn (query) Q , hệ thống trả lại một danh sách các hàng, trong đó mỗi hàng x thỏa mãn điều kiện $Q(x)$ đúng**

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

42

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



Bảng: Ví dụ một cơ sở dữ liệu. Nếu muốn tìm danh sách tất cả các sinh viên có GPA (grade point averages - điểm trung bình) tối thiểu 3.4 và nếu đã học ít nhất một khóa học về khoa học máy tính (computer science - CS) thì phải đến từ Hawaii, ta có thể truy vấn $[GPA(x) \geq 3.4] \wedge [takenCS(x) \rightarrow (home(x) = Hawaii)]$. Kết quả trả lại với cơ sở dữ liệu này là Charlie.

name	GPA	CS taken?	home	age
Alice	4.0	yes	Alberta	20
Bob	3.14	yes	Bermuda	19
Charlie	3.54	no	Cornwall	18
Desdemona	3.8	yes	Delaware	17



- Trước đó, ta thường phải chỉ rõ miền xác định \mathcal{D} có chứa các giá trị của biến trước khi phát biểu mệnh đề với vị từ và lượng từ. Để thuận tiện, ***có thể chỉ ra \mathcal{D} ngay trong mệnh đề***

- $\forall x > 0 P(x)$ nghĩa là “Với mọi số $x > 0$, $P(x)$ đúng”. (\mathcal{D} là tập tất cả các số lớn hơn không.) Thực ra, đây là cách viết ngắn gọn của mệnh đề $\forall x Q(x)$ trong đó

$$Q(x) := (x > 0) \rightarrow P(x)$$

- $\exists x > 0 P(x)$ nghĩa là “Tồn tại số $x > 0$, $P(x)$ đúng”. (\mathcal{D} là tập tất cả các số lớn hơn không.) Thực ra, đây là cách viết ngắn gọn của mệnh đề $\exists x Q(x)$ trong đó

$$Q(x) := (x > 0) \wedge P(x)$$

- Chú ý:

- $\forall x > 0 P(x) \neq \forall x (x > 0 \wedge P(x))$
- $\exists x > 0 P(x) \neq \exists x (x > 0 \rightarrow P(x))$

- Các lượng từ \forall và \exists có ***thứ tự ưu tiên cao hơn tất cả các toán tử lôgic*** đã đề cập

- $\forall x P(x) \vee Q(x)$ ***nghĩa là $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$*** chứ không phải $\forall x (P(x) \vee Q(x))$

Lôgic vị từ

Biến tự do và biến ràng buộc



- Vị từ $P(x)$ có **biến tự do (free variable)** x (nghĩa là, giá trị của x không xác định)
- Lượng từ (\forall hoặc \exists) sử dụng với một vị từ có một hoặc nhiều biến tự do “ràng buộc” những biến này, tạo thành một biểu thức có một hoặc nhiều **biến ràng buộc (bound variable)**

Ví dụ 17

- $P(x, y)$ có hai biến tự do: x và y
- $\forall x P(x, y)$ có một biến tự do y và một biến ràng buộc x
- Biểu thức **không có bất kỳ biến tự do nào**, ví dụ $\forall x P(x)$, là mệnh đề
- Biểu thức **có một hoặc nhiều biến tự do**, ví dụ $\forall x P(x, y)$, không là mệnh đề

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

45

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Lôgic vị từ

Phủ định với lượng từ



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

■ *Phủ định* của mệnh đề có lượng từ

$$\blacksquare \neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

$$\blacksquare \neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

■ Hai tương đương lôgic trên được gọi là *Luật De Morgan cho lượng từ (De Morgan's Laws for Quantifiers)*. Lý do của tên gọi này là nếu ta có thể liệt kê toàn bộ các phần tử trong miền \mathcal{D} , ví dụ như x_1, \dots, x_n , thì

$$\neg \forall x P(x) \equiv \neg (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n))$$

$$\equiv \neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \dots \vee \neg P(x_n) \quad \text{Luật De Morgan}$$

$$\equiv \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \neg (P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n))$$

$$\equiv \neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \dots \wedge \neg P(x_n) \quad \text{Luật De Morgan}$$

$$\equiv \forall x \neg P(x)$$

46

68



Bài tập 23

Giả sử A là một mệnh đề thỏa mãn điều kiện A đúng hay sai không phụ thuộc vào x . Giả sử miền xác định của các biến là không rỗng. Hãy chứng minh các tương đương lôgic sau

(a) $(\forall x P(x)) \vee A \equiv \forall x (P(x) \vee A)$

(b) $(\exists x P(x)) \vee A \equiv \exists x (P(x) \vee A)$

(c) $(\forall x P(x)) \wedge A \equiv \forall x (P(x) \wedge A)$

(d) $(\exists x P(x)) \wedge A \equiv \exists x (P(x) \wedge A)$

(e) $A \rightarrow \forall x P(x) \equiv \forall x (A \rightarrow P(x))$

(f) $\exists x P(x) \rightarrow A \equiv \forall x (P(x) \rightarrow A)$

(g) $A \rightarrow \exists x P(x) \equiv \exists x (A \rightarrow P(x))$

(h) $\forall x P(x) \rightarrow A \equiv \exists x (P(x) \rightarrow A)$

(Gợi ý: Xét từng trường hợp $A = T$ và $A = F$)

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

47

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Lógica vị từ

Phủ định với lượng từ



Ví dụ 18

Ta chứng minh câu (h) trong Bài tập 23:

$\forall x P(x) \rightarrow A \equiv \exists x (P(x) \rightarrow A)$, trong đó A là mệnh đề có giá trị chân lý không phụ thuộc vào biến x

$$\begin{aligned}\exists x (P(x) \rightarrow A) &\equiv \exists x (\neg P(x) \vee A) \\ &\equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x A \\ &\equiv \exists x \neg P(x) \vee A \\ &\equiv \neg \forall x P(x) \vee A \\ &\equiv \forall x P(x) \rightarrow A\end{aligned}$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Bài 20(a)

Định nghĩa của A

De Morgan cho lượng từ

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

48

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



Ví dụ 19

$P(x, y) := “x \text{ nhỏ hơn } y”$ xác định trên miền $\mathcal{D} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- $\exists y P(x, y) := “\text{có số nguyên } y \text{ sao cho } x \text{ nhỏ hơn } y”$ (Biểu thức với **1** biến tự do—không phải mệnh đề)
- $\forall x (\exists y P(x, y)) := “\text{với mọi số nguyên } x \text{ có số nguyên } y \text{ sao cho } x \text{ nhỏ hơn } y”$ (Biểu thức với **0** biến tự do—là mệnh đề)

Bài tập 24

Cho $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \mathbb{Z}$ và $P(x, y) := x < y$. Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau

- (a) $\forall x \forall y P(x, y)$
- (b) $\forall x \exists y P(x, y)$
- (c) $\exists x \forall y P(x, y)$
- (d) $\exists x \exists y P(x, y)$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

49

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Lôgic vị từ

Lồng các lượng từ



■ Một số tương đương lôgic:

■ $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$

■ $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$

■ Để thuận tiện, có thể nối các lượng từ cùng loại

■ $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall x, y P(x, y)$

■ Trừ khi tất cả các lượng từ đều là \forall hoặc đều là \exists , *thứ tự các lượng từ là quan trọng*

■ $\forall x \exists y P(x, y)$ khác với $\exists y \forall x P(x, y)$

■ Ví dụ, với x, y là các số nguyên, mệnh đề $\forall x \exists y (x < y)$ *đúng*, vì với mỗi x ta có thể chọn $y = x + 1$ và hiển nhiên $x < y$. Ngược lại, mệnh đề $\exists y \forall x (x < y)$ *sai*, vì không tồn tại số nguyên lớn nhất

Bài tập 25

Các mệnh đề sau khi nào đúng và khi nào sai?

(1) $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$

(2) $\forall x \exists y P(x, y)$

(3) $\exists y \forall x P(x, y)$

(4) $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

50

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

68



Bài tập 26

Hãy biểu diễn phủ định của các mệnh đề sau sao cho tất cả các ký tự phủ định \neg đứng ngay trước các vị từ

- (a) $\forall x \exists y \forall z T(x, y, z)$
- (b) $\forall x \exists y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y)$
- (c) $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists z R(x, y, z))$
- (d) $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$

Chứng minh

Một số thuật ngữ



- **Chứng minh (proof)**: một lý luận hợp lý chỉ ra tính đúng đắn của một mệnh đề toán học.
- **Tiên đề (axiom/postulate)**: một mệnh đề được giả thiết là đúng
- **Định lý (theorem)**: một mệnh đề đã được chứng minh là đúng
- **Mệnh đề (proposition)**: một định lý “không quá quan trọng”
- **Bổ đề (lemma)**: một định lý nhỏ có thể được sử dụng như một công cụ hỗ trợ chứng minh các định lý khác lớn hơn
- **Hệ quả (corollary)**: một định lý nhỏ thu được bằng cách trực tiếp áp dụng một định lý khác lớn hơn
- **Giả thuyết (conjecture)**: một mệnh đề mà tính đúng/sai của nó chưa được xác định, nhưng thường được “tin là đúng” thông qua một số bằng chứng hoặc qua kinh nghiệm, dự đoán của một chuyên gia

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

52

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

68

Chứng minh

Một số phương pháp chứng minh



Mục tiêu

Chứng minh p đúng

- **Chứng minh trực tiếp (direct proof)**
- **Chứng minh gián tiếp (indirect proof):** Giả thiết $\neg p$ đúng, chứng minh $\neg p \rightarrow F$ (phương pháp **Chứng minh phản chứng (Proof by Contradiction)**)
- **Chứng minh bằng cách chia trường hợp (proof by cases):** Tìm p_1, \dots, p_n thỏa mãn $p \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$ và chứng minh p_i đúng với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. (Chia điều cần chứng minh p thành các phần nhỏ (trường hợp) p_1, \dots, p_n và xét từng phần một cách riêng biệt)

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

53

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Chứng minh

Một số phương pháp chứng minh



Mục tiêu

Chứng minh $p \rightarrow q$ đúng

- **Chứng minh hiển nhiên (trivial proof):** Chứng minh q đúng mà không cần giả thiết gì khác
- **Chứng minh trực tiếp (direct proof):** Giả thiết p đúng, chứng minh q
- **Chứng minh gián tiếp (indirect proof)**
 - **Chứng minh phản đảo (Proof by Contraposition)**
 $(\neg q \rightarrow \neg p)$: Giả thiết $\neg q$ đúng, chứng minh $\neg p$
 - **Chứng minh phản chứng (Proof by Contradiction):** Giả thiết $p \wedge \neg q$ đúng, và chỉ ra rằng điều này dẫn đến một mâu thuẫn (nghĩa là, chứng minh $(p \wedge \neg q) \rightarrow \text{F}$)
- **Chứng minh rỗng (vacuous proof):** Chứng minh $\neg p$ đúng mà không cần giả thiết gì khác
- **Chứng minh bằng cách chia trường hợp (proof by cases):** Tìm p_1, p_2, \dots, p_n thỏa mãn $p \rightarrow q \equiv (p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)$ và chứng minh $p_i \rightarrow q$ đúng với từng giá trị $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

54

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Chứng minh

Một số phương pháp chứng minh



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

55

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Mục tiêu

Chứng minh $p \leftrightarrow q$ đúng

- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- Chứng minh $p \rightarrow q$ đúng và $q \rightarrow p$ đúng

Chứng minh

Ví dụ



Một số nguyên n là số **chẵn** (*even*) khi và chỉ khi $n = 2k$ với k là số nguyên nào đó; n là số **lẻ** (*odd*) khi và chỉ khi $n = 2k + 1$ với k là số nguyên nào đó

Định lý 1

Với mọi số nguyên n , n không thể vừa chẵn vừa lẻ

Chứng minh phản chứng.

- (1) **Nhắc lại:** Để chứng minh p , ta chứng minh $\neg p \rightarrow \mathbf{F}$
- (2) Giả sử tồn tại một số nguyên n vừa chẵn vừa lẻ. Ta chứng minh tồn tại mâu thuẫn
- (3) Do n chẵn, $n = 2k$ với số nguyên k nào đó
- (4) Do n lẻ, $n = 2j + 1$ với số nguyên j nào đó
- (5) Do đó, $2k = 2j + 1$, suy ra $k - j = \frac{1}{2}$. Mệnh đề này sai với mọi số nguyên k và j , đây là một mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Logic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

56

68

Chứng minh

Ví dụ



Chứng minh sau của Định lý 1

Với mọi số nguyên n , n không thể vừa chẵn vừa lẻ

là sai? Tại sao?

Chứng minh phản chứng.

- (1) Giả sử tồn tại một số nguyên n vừa chẵn vừa lẻ. Ta chứng minh tồn tại mâu thuẫn
- (2) Do n chẵn, $n = 2k$ với số nguyên k nào đó
- (3) Do n lẻ, $n = 2k + 1$ với số nguyên k nào đó
- (4) Do đó, $2k = 2k + 1$, suy ra $0 = 1$. Mệnh đề này sai với mọi số nguyên k , đây là một mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

57

68

Chứng minh

Bài tập



Bài tập 27

Chứng minh bằng phương pháp phản chứng rằng

- (a) Tổng của một số vô tỷ và một số hữu tỷ là một số vô tỷ
- (b) Với mọi số nguyên n , nếu $n^3 + 5$ lẻ, thì n chẵn
- (c) Với mọi số nguyên n , nếu $3n + 2$ chẵn, thì n chẵn

Bài tập 28

Chứng minh rằng

- (a) Có ít nhất mười ngày trong 64 ngày bất kỳ rơi vào cùng một ngày của một tuần (nghĩa là, có ít nhất mười ngày cùng là Thứ Hai, hoặc cùng là Thứ Ba, v.v...)
- (b) Có ít nhất ba ngày trong 25 ngày bất kỳ rơi vào cùng một tháng của năm

Bài tập 29

Sử dụng phương pháp phản chứng, hãy chứng minh rằng $\sqrt{2}$ không phải là một số hữu tỷ

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

58

68

Chứng minh

Ví dụ



Định lý 2

Với mọi số nguyên n , nếu n là số lẻ, thì n^2 cũng là số lẻ

Chứng minh trực tiếp.

- (1) Nếu n lẻ, thì $n = 2k + 1$ với k là số nguyên nào đó
- (2) Do đó, $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
- (3) Do đó, $n^2 = 2j + 1$ với $j = 2k^2 + 2k$ là số nguyên
- (4) Theo định nghĩa, n^2 lẻ



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

59

68

Chứng minh

Bài tập



Bài tập 30

Chứng minh trực tiếp các mệnh đề sau

- (a) Tổng của hai số lẻ là một số chẵn
- (b) Tổng của hai số chẵn là một số chẵn
- (c) Bình phương của một số chẵn là một số chẵn
- (d) Tích của hai số lẻ là một số lẻ

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

60

68

Chứng minh

Ví dụ



Định lý 3

Với mọi số nguyên n , nếu $3n + 2$ là số lẻ, thì n cũng là số lẻ

Chứng minh phản đảo.

- **Nhắc lại:** để chứng minh $p \rightarrow q$, ta chứng minh $\neg q \rightarrow \neg p$
 - *Ta chứng minh mệnh đề phản đảo: Nếu n chẵn, thì $3n + 2$ cũng chẵn)*
- (1) Giả sử n chẵn
 - (2) Do đó $n = 2k$ với số nguyên k nào đó
 - (3) Suy ra $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$
 - (4) Từ đó, $3n + 2 = 2j$ với $j = 3k + 1$ là số nguyên, và do đó là số chẵn. Ta có điều phải chứng minh



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

61

68

Chứng minh

Ví dụ



Định lý 4

Với mọi số nguyên n , $n(n+1)^2$ là một số chẵn

Chứng minh bằng cách chia trường hợp.

- **Nếu n chẵn**, thì $n = 2k$ với số nguyên k nào đó. Suy ra $n(n+1)^2 = 2j$ với $j = k(2k+1)^2$ là số nguyên. Do đó, $n(n+1)^2$ là một số chẵn
- **Nếu n lẻ**, thì $n = 2k+1$ với số nguyên k nào đó. Suy ra $n(n+1)^2 = 2\ell$ với $\ell = (2k+1)2(k+1)^2$ là số nguyên. Do đó, $n(n+1)^2$ là một số chẵn



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

62

68

Chứng minh

Ví dụ



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

Chứng minh sau của mệnh đề

(Với mọi số nguyên n) Ta có $-|n| \leq n \leq |n|$

là sai. Tại sao?

Chứng minh bằng cách chia trường hợp.

- (1) Nếu $n > 0$, ta có $-n \leq 0 \leq n$. Theo định nghĩa, $|n| = n$ và do đó $-|n| = -n$. Suy ra $-|n| = -n \leq 0 \leq n = |n|$
- (2) Nếu $n < 0$, ta có $n \leq 0 \leq -n$. Theo định nghĩa, $|n| = -n$ và do đó $-|n| = n$. Suy ra $-|n| = n \leq 0 \leq -n = |n|$



63

68

Chứng minh

Ví dụ



Định lý 5

Với mọi số nguyên n , nếu n vừa chẵn vừa lẻ, thì $n^2 = n + n$

Chứng minh rằng.

- **Nhắc lại:** để chứng minh $p \rightarrow q$, ta chứng minh $\neg p$ mà không cần bất cứ giả thiết nào
- (1) Mệnh đề “ n vừa chẵn vừa lẻ” sai với mọi số nguyên n
- (2) Ta có điều phải chứng minh (Tập các giả thiết là rỗng)



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

64

68

Chứng minh

Ví dụ



Định lý 6

Với mọi số nguyên n , nếu n là tổng của hai số nguyên tố, thì hoặc n chẵn hoặc n lẻ

Chứng minh hiển nhiên.

- **Nhắc lại:** để chứng minh $p \rightarrow q$, ta chứng minh q mà không cần bất cứ giả thiết nào
- (1) Với mọi số nguyên n , mệnh đề “hoặc n chẵn hoặc n lẻ” đúng
- (2) Do đó, kết luận của mệnh đề cần chứng minh luôn đúng, bất luận giả thiết là đúng hay sai
- (3) Hiển nhiên là mệnh đề cần chứng minh luôn đúng



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

65

68

Chứng minh

Ví dụ



Chứng minh sau của mệnh đề

$$1 = 2$$

là sai. Tại sao?

Chứng minh.

Gọi a, b là hai số nguyên dương bằng nhau.

(1) $a = b$

(2) $a^2 = ab$

(3) $a^2 - b^2 = ab - b^2$

(4) $(a - b)(a + b) = (a - b)b$
nhân tử

(5) $a + b = b$

(6) $2b = b$

(7) $2 = 1$

Giả thiết

Nhân hai vế của (1) với a

Trừ b^2 từ cả hai vế của (2)

Phân tích hai vế của (3) thành

Chia cả hai vế của (4) cho $a - b$

Thay a bởi b trong (5) vì $a = b$, và đơn giản hóa

Chia cả hai vế của (6) cho b

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

66

68

Chứng minh

Ví dụ



Chứng minh sau của mệnh đề

(Với mọi số nguyên n) Nếu n^2 chẵn, thì n cũng chẵn

là sai. Tại sao?

Chứng minh.

- (1) Mệnh đề đúng với $n = 0$. Do đó ta chỉ xét $n \neq 0$
- (2) Giả sử n^2 chẵn. Do đó $n^2 = 2k$ với số nguyên k nào đó
- (3) Chia cả hai vế cho n , ta có $n = (2k)/n = 2(k/n)$
- (4) Do đó, tồn tại số $j = k/n$ sao cho $n = 2j$
- (5) Do tích của j và một số nguyên (2) là một số nguyên (n), nên j cũng là số nguyên
- (6) Do đó n chẵn



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

67

68

Chứng minh

Bài tập



Bài tập 31

Chứng minh các mệnh đề sau. Nêu rõ phương pháp chứng minh bạn sử dụng

- (a) Với mọi số nguyên n , nếu n chẵn thì $(-1)^n = 1$
- (b) Với mọi số nguyên x, y, z , nếu $x + y + z$ lẻ, thì ít nhất một trong ba số x, y, z là lẻ
- (c) Với mọi số nguyên m và n , nếu $m \cdot n$ chẵn, thì m chẵn hoặc n chẵn
- (d) Với mọi số nguyên dương n , n chẵn khi và chỉ khi $7n + 4$ chẵn
- (e) Với mọi số nguyên dương n , n lẻ khi và chỉ khi $5n + 6$ lẻ
- (f) Với mọi số nguyên dương m và n , $m^2 = n^2$ khi và chỉ khi $m = n$ hoặc $m = -n$

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lógica mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử logic và bảng chân trị

Lógica và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương logic

Lógica vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lỗi các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

68

68

Part I

Phụ lục

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

1 Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

- **Một lập luận (argument)** là một dãy các phát biểu kết thúc bằng một kết luận
- Một số dạng lập luận (“hợp lý (valid)”) không bao giờ dẫn tới một kết luận sai từ các phát biểu đúng. Một số dạng lập luận khác (“ngụy biện (fallacies)”) có thể dẫn tới một kết luận sai từ các phát biểu đúng
- **Một lập luận logic (logical argument)** bao gồm một dãy các mệnh đề (có thể là mệnh đề phức hợp) được gọi là **các tiền đề (premises)/các giả thiết (hypotheses)** và một mệnh đề duy nhất gọi là **kết luận (conclusion)**
- **Các quy tắc suy luận logic (logical rules of inference)** là các phương pháp chỉ phụ thuộc vào logic để suy ra một phát biểu mới từ một tập hợp các phát biểu khác. (Có thể coi các quy tắc này như là các mẫu (templates) cho việc xây dựng các lập luận hợp lý (valid arguments))

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

2

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

■ Một lập luận logic được gọi là **hợp lý (valid)** nếu **khi mọi giả thiết đúng thì kết luận cũng đúng**. Một lập luận logic không hợp lý được gọi là một **ngụy biện (fallacy)**

■ Một **quy tắc suy luận (inference rule)** là một khuôn mẫu thiết lập rằng nếu chúng ta **biết một tập các giả thiết nào đó là đúng**, thì chúng ta có thể **suy luận một cách hợp lý rằng một phát biểu kết luận liên quan nào đó là đúng**

■ Mỗi **quy tắc suy luận logic hợp lý (valid inference rule)** tương ứng với một **hằng đúng (tautology)**

■ Ký hiệu \therefore nghĩa là “do đó”

■ Hằng đúng (tautology) tương ứng (nếu quy tắc hợp lý)

Giả thiết 1
Giả thiết 2

...

\therefore Kết luận

$((\text{Giả thiết 1}) \wedge (\text{Giả thiết 2}) \wedge \dots) \rightarrow (\text{Kết luận})$

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

3

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Ví dụ 20

- Một lập luận logic
 - **Giả thiết 1:** Nếu tôi làm việc suốt đêm, thì tôi mệt mỗi
 - **Giả thiết 2:** Tôi làm việc suốt đêm
 - **Kết luận:** Do đó, tôi mệt mỗi
- Biểu diễn các biến logic
 - p = “Tôi làm việc suốt đêm”
 - q = “Tôi mệt mỗi”
- Theo góc nhìn của logic, lập luận trên có thể được viết lại như sau:

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q & \text{Giả thiết 1} \\ p & \text{Giả thiết 2} \\ \hline \therefore q & \text{Kết luận} \end{array}$$

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên biện phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

- Quy tắc *Modus Ponens* (tiếng Latin của “phương pháp khẳng định (method of affirming)”)

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Modus Ponens

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

Hằng đúng tương ứng

- Chú ý rằng hàng đầu tiên là hàng duy nhất mà giả thiết luôn đúng

Ví dụ 21

Nếu $\left\{ \begin{array}{ll} p \rightarrow q & \text{“Nếu } n \text{ chia hết cho 3,} \\ & \text{thì } n^2 \text{ chia hết cho 3”} \\ p & \text{“} n \text{ chia hết cho 3”} \end{array} \right\}$ là ĐÚNG
thì $\therefore q$ “ n^2 chia hết cho 3” cũng ĐÚNG

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên biện phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

- Quy tắc **Modus Tollens** (tiếng Latin của “phương pháp phủ định (method of denying)”)

$$\begin{array}{c} \neg q \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Modus Tollens

$$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$$

Hằng đúng tương ứng

Ví dụ 22

Nếu $\left\{ \begin{array}{l} p \rightarrow q \text{ “Nếu chiếc nhẫn làm bằng kim cương, thì nó có thể làm xước kính”} \\ \neg q \text{ “Chiếc nhẫn không làm xước kính”} \end{array} \right\}$ là ĐÚNG
thì $\therefore \neg p$ “Chiếc nhẫn không làm bằng kim cương” cũng ĐÚNG

5

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

■ Quy tắc Cộng (Addition)

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

Quy tắc Cộng (Addition)

■ Quy tắc Rút gọn (Simplification)

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

Quy tắc Rút gọn (Simplification)

■ Quy tắc Hội (Conjunction)

$$\frac{p}{\therefore p \wedge q}$$

Quy tắc Hội (Conjunction)

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

Hằng đúng tương ứng

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

Hằng đúng tương ứng

$$((p) \wedge (q)) \rightarrow p \wedge q$$

Hằng đúng tương ứng

6

36

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Ví dụ 23

Các lập luận sau sử dụng các quy tắc suy luận nào?

- (a) Nếu có ca nhiễm COVID-19 mới, thì trường sẽ đóng cửa. Trường không đóng cửa hôm nay. Do đó, không có ca nhiễm COVID-19 mới hôm nay [Quy tắc Modus Tollens]
- (b) Nhiệt độ hiện tại là dưới $0^{\circ}C$. Do đó, nhiệt độ hiện tại là dưới $0^{\circ}C$ hoặc trời đang mưa [Quy tắc Cộng]
- (c) Nhiệt độ hiện tại là dưới $0^{\circ}C$ và trời đang mưa. Do đó, nhiệt độ hiện tại là dưới $0^{\circ}C$ [Quy tắc Rút gọn]

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

■ Quy tắc *Tam đoạn luận giả định (Hypothetical syllogism)*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Tam đoạn luận giả định
(Hypothetical syllogism)

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Hằng đúng tương ứng

Ví dụ 24

p “Nếu trời mưa hôm nay, thì chúng ta sẽ không tổ chức tiệc nướng hôm nay. Nếu chúng ta không tổ chức tiệc nướng hôm nay, thì chúng ta sẽ tổ chức tiệc nướng vào ngày mai. Do đó nếu trời mưa hôm nay, thì chúng ta sẽ tổ chức tiệc nướng vào ngày mai.” *q*

r *p* *r*

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

■ Quy tắc *Tam đoạn luận tuyển (Disjunctive syllogism)*

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Tam đoạn luận tuyển
(Disjunctive syllogism)

$$((p \vee q) \wedge (\neg p)) \rightarrow q$$

Hằng đúng tương ứng

Ví dụ 25

“Ví của tôi nằm trong túi áo khoác hoặc nó nằm trên bàn.
Ví của tôi không nằm trong túi áo khoác. Do đó, nó nằm trên bàn.”

p

q

$\neg p$

q

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

■ Quy tắc *Hợp giải (Resolution)*

$$\frac{p \vee q \quad \neg p \vee r}{\therefore q \vee r}$$

Hợp giải (Resolution)

■ Khi $q = r$, ta có

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)) \rightarrow q$$

Hằng đúng tương ứng

■ Khi $r = \text{F}$, ta có *Quy tắc tam đoạn luận tuyến*

$$((p \vee q) \wedge (\neg p)) \rightarrow q$$

Ví dụ 26

q “Tôi đang đi trên đường hoặc p trời mưa. $\neg p$ Trời không mưa hoặc
 r tôi đang ở nhà. Do đó, tôi đang đi trên đường hoặc tôi đang ở nhà.”
 q

10

36

Các quy tắc suy luận

Các chứng minh hình thức



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận
trong logic mệnh đề

11 Các chứng minh hình thức

Một số nguyên lý phổ biến
Một số quy tắc suy luận
trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng
minh (Proof
Techniques) bạn nên
tránh

- Cho trước các tiền đề (premises) p_1, p_2, \dots, p_n . Một **chứng minh hình thức (formal proof)** của một **kết luận C** là một dãy **các bước (steps)**, trong đó **mỗi bước áp dụng một quy tắc suy luận nào đó cho các tiền đề hoặc các phát biểu đã được chứng minh trước đó** để suy luận ra một phát biểu mới đúng (kết luận)
- Một chứng minh cho thấy rằng **nếu** các tiền đề là đúng, **thì** kết luận là đúng

Ví dụ 27

- Giả sử chúng ta có các tiền đề sau:
 - Trời không nắng và thời tiết lạnh
 - Chúng ta sẽ đi bơi chỉ khi trời nắng
 - Nếu chúng ta không đi bơi, thì chúng ta sẽ đi chèo xuồng
 - Nếu chúng ta đi chèo xuồng, chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn
- Với các tiền đề đã cho, chứng minh kết luận “Chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn” bằng cách sử dụng các quy tắc suy luận

Các quy tắc suy luận

Các chứng minh hình thức



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

12 Các chứng minh hình thức

Một số nguyên biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

■ Bước 1: Xác định các mệnh đề Chúng ta sẽ dùng các ký hiệu sau:

- $sunny$ = “Trời nắng”; $cold$ = “Thời tiết lạnh”; $swim$ = “Chúng ta sẽ đi bơi”; $canoe$ = “Chúng ta sẽ đi chèo xuồng”; $sunset$ = “Chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn”

■ Bước 2: Xác định lập luận (Xây dựng dạng cho lập luận)

$p_1 \quad \neg sunny \wedge cold$ Trời không nắng và thời tiết lạnh

$p_2 \quad swim \rightarrow sunny$ Chúng ta sẽ đi bơi chỉ khi trời nắng

$p_3 \quad \neg swim \rightarrow canoe$ Nếu chúng ta không đi bơi, thì chúng ta sẽ đi chèo xuồng

$p_4 \quad canoe \rightarrow sunset$ Nếu chúng ta đi chèo xuồng, chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn

$\therefore \quad \underline{\quad sunset \quad}$ Chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn

Các quy tắc suy luận

Các chứng minh hình thức



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

13

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

■ Bước 3: Xây dựng chứng minh hoàn chỉnh dựa trên các quy tắc suy luận

Bước	Chứng minh bởi
1. $\neg \text{sunny} \wedge \text{cold}$	Tiền đề p_1
2. $\neg \text{sunny}$	Quy tắc Rút gọn
3. $\text{swim} \rightarrow \text{sunny}$	Tiền đề p_2
4. $\neg \text{swim}$	Modus Tollens cho 2 và 3
5. $\neg \text{swim} \rightarrow \text{canoe}$	Tiền đề p_3
6. canoe	Modus Ponens cho 4 và 5
7. $\text{canoe} \rightarrow \text{sunset}$	Tiền đề p_4
8. sunset	Modus Ponens cho 6 và 7

p_1	$\neg \text{sunny} \wedge \text{cold}$
p_2	$\text{swim} \rightarrow \text{sunny}$
p_3	$\neg \text{swim} \rightarrow \text{canoe}$
p_4	$\text{canoe} \rightarrow \text{sunset}$
\therefore	sunset

Các quy tắc suy luận

Một số nguy biến phổ biến



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

- Một *nguy biến (fallacy)* là một quy tắc suy luận hoặc một phương pháp chứng minh không hợp lý về mặt logic
 - Một nguy biến có thể dẫn tới một kết luận sai
- *Nguy biến khẳng định hậu kiện (Fallacy of affirming the conclusion)*
 - $p \rightarrow q$ là đúng, và q là đúng. Do đó, p là đúng (Sai. Bởi vì $F \rightarrow T$ đúng)

Ví dụ 28

- Nếu David Cameron là Tổng thống Hoa Kỳ, thì ông ta ít nhất là bốn mươi tuổi ($p \rightarrow q$)
- David Cameron ít nhất là bốn mươi tuổi (q)
- Do đó, David Cameron là Tổng thống Hoa Kỳ (p)
- *Nguy biến phủ định giả thiết (Fallacy of denying the hypothesis)*
 - $p \rightarrow q$ là đúng, và p sai. Do đó q là sai (Sai. Bởi vì $F \rightarrow T$ đúng)

Ví dụ 29

- Nếu trời mưa, thì đường lầy lội ($p \rightarrow q$)
- Trời không mưa ($\neg p$)
- Do đó đường không lầy lội ($\neg q$)

14

36

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên lý phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

15

■ Quy tắc *Khởi tạo phổ quát (Universal instantiation)*

$$\therefore \frac{\forall x P(x)}{P(c)}$$

Với *bất kỳ một phần tử c cụ thể* trong miền xác định

■ Quy tắc *Tổng quát hóa phổ quát (Universal generalization)*

$$\therefore \frac{P(c)}{\forall x P(x)}$$

Với *bất kỳ một phần tử c nào đó* trong miền xác định

■ Quy tắc *Khởi tạo hiện sinh (Existential instantiation)*

$$\therefore \frac{\exists x P(x)}{P(c)}$$

Với *phần tử c nào đó* trong miền xác định sao cho *P(c) đúng*

■ Quy tắc *Tổng quát hóa hiện sinh (Existential generalization)*

$$\therefore \frac{P(c)}{\exists x P(x)}$$

Với *phần tử c nào đó* trong miền xác định

36

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ



Ví dụ 30

- Ta chứng minh lập luận sau: “Mỗi người đều sẽ chết. Socrates là người. Do đó, Socrates sẽ chết”

- **Xác định các vị từ**

- $M(x) = “x \text{ là người}”$
- $D(x) = “x \text{ sẽ chết}”$
- $S = “\text{Socrates}”$ – một phần tử trong vũ trụ

- **Xác định lập luận**

p_1	$\forall x (M(x) \rightarrow D(x))$	Mỗi người đều sẽ chết
p_2	$M(S)$	Socrates là người
\therefore	$D(S)$	Socrates sẽ chết

- **Xây dựng chứng minh**

Bước

Chứng minh bởi

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1. $\forall x (M(x) \rightarrow D(x))$ | Tiền đề p_1 |
| 2. $M(S) \rightarrow D(S)$ | Quy tắc Khởi tạo phổ quát cho 1 |
| 3. $M(S)$ | Tiền đề p_2 |
| 4. $D(S)$ | Modus Ponens cho 2 và 3 |

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên biện phổ biến

16

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ



Ví dụ 31

- Lý luận sau đây là đúng hay sai: “Ít nhất một trong số các sinh viên trong lớp rất thông minh. John là một sinh viên trong lớp. Do đó, John rất thông minh”?

■ Xác định các vị từ

- Giả sử *miền xác định* là *tập tất cả mọi người*
- $S(x) = “x \text{ là sinh viên trong lớp}”$
- $I(x) = “x \text{ rất thông minh}”$
- $J = “\text{John}”$ – một thành viên trong tập tất cả mọi người

■ Xác định lập luận

$$\begin{array}{ll} p_1 & \exists x (S(x) \wedge I(x)) \quad \text{Ít nhất một trong số các sinh viên trong} \\ & \text{lớp rất thông minh} \\ p_2 & S(J) \quad \text{John là một sinh viên trong lớp} \\ \hline \therefore & I(J) \quad \text{John rất thông minh} \end{array}$$

■ Lập luận có hợp lý không? KHÔNG

- **Phản ví dụ:** Xét trường hợp *có chính xác một sinh viên A trong lớp rất thông minh và A không phải là John*, nghĩa là, $S(A) \wedge I(A)$ đúng, $S(B) \wedge I(B)$ sai với mọi $B \neq A$, và $A \neq J$
- Áp dụng Quy tắc Tổng quát hóa hiện sinh cho $S(A) \wedge I(A)$, *tiền đề*
 $p_1 = \exists x (S(x) \wedge I(x))$ *đúng*. *Tiền đề* $p_2 = S(J)$ *luôn đúng*
- Tuy nhiên, do $S(B) \wedge I(B)$ sai với mọi $B \neq A$ và $A \neq J$, Quy tắc Khử tạo phổ quát cho ta *kết luận* $I(J)$ *là sai*

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên lý phổ biến

17

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ



Bài tập 32

Lập luận sau là đúng hay sai: “Mọi giảng viên đều ra đề bài kiểm tra khó. Tôi là một giảng viên. Do đó, tôi ra đề bài kiểm tra khó”

Bài tập 33

Với mỗi lập luận sau, hãy giải thích quy tắc suy luận nào được sử dụng trong mỗi bước

- (a) Doug là một sinh viên trong lớp biết cách sử dụng ngôn ngữ lập trình Java. Mỗi người biết sử dụng ngôn ngữ lập trình Java đều có thể tìm được một công việc trả lương cao. Do đó, một sinh viên nào đó trong lớp có thể tìm được một công việc trả lương cao
- (b) Ai đó trong lớp thích xem cá voi. Mỗi người thích xem cá voi đều quan tâm đến vấn đề ô nhiễm đại dương. Do đó, tồn tại một sinh viên trong lớp quan tâm đến vấn đề ô nhiễm đại dương
- (c) Mỗi sinh viên trong lớp có một máy tính cá nhân. Mỗi người có máy tính cá nhân có thể sử dụng một trình soạn thảo văn bản. Do đó, Zeke, một sinh viên trong lớp, có thể sử dụng một trình soạn thảo văn bản

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên lý phổ biến

18

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên lý phổ biến

19 Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Bài tập 34

Lập luận sau để chứng minh nếu $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ đúng thì $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ cũng đúng có hợp lý hay không?

Bước	Chứng minh bởi
1. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	Tiền đề
2. $\exists x P(x)$	Quy tắc Rút gọn cho 1
3. $P(c)$	Quy tắc khởi tạo hiện sinh cho 2
4. $\exists x Q(x)$	Quy tắc Rút gọn cho 1
5. $Q(c)$	Quy tắc khởi tạo hiện sinh cho 4
6. $P(c) \wedge Q(c)$	Quy tắc hội cho 3 và 5
7. $\exists x P(x) \wedge Q(x)$	Quy tắc Tổng quát hóa hiện sinh

Một số lỗi thường gặp



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

20

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Chú ý

Tham khảo từ tài liệu “Common Mistakes in Discrete Mathematics” (https://highered.mheducation.com/sites/dl/free/125967651x/1106131/Common_Mistakes_in_Discrete_Math.pdf)

(a) Dịch sai các phát biểu từ ngôn ngữ thông thường sang dạng ký hiệu

- Ví dụ, có những khó khăn với việc sử dụng từ “hoặc”; hãy chắc chắn phân biệt giữa “ A hoặc B ” ($\equiv A \vee B$) và “hoặc A hoặc B ” ($\equiv A \oplus B$)
- Một phát biểu điều kiện hoàn toàn khác với một phép “hội” (\wedge), nhưng một số người không phân biệt được chúng; việc nói rằng “ B sẽ xảy ra nếu A xảy ra” hoàn toàn khác với việc nói rằng “ A và/hoặc B sẽ xảy ra”

Một số lỗi thường gặp (tiếp)



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

(b) Phủ định sai các mệnh đề phức hợp do không sử dụng đúng luật De Morgan

- Chẳng hạn, cho rằng $\neg(p \vee q)$ tương đương logic với $\neg p \vee \neg q$, hoặc $\neg(p \wedge q)$ tương đương logic với $\neg p \wedge \neg q$.
- Ví dụ, “không phải là John trên 18 tuổi **hoặc** sống xa nhà” nghĩa là John không trên 18 tuổi **và** (chứ **không phải hoặc**) John không sống xa nhà
- Phát biểu đúng là $\neg(p \vee q)$ tương đương logic với $\neg p \wedge \neg q$, và $\neg(p \wedge q)$ tương đương logic với $\neg p \vee \neg q$
- Lỗi này là một trường hợp tổng quát của việc giả định rằng mỗi toán tử phân phối qua mọi toán tử khác, trong trường hợp này là cho rằng phủ định phân phối qua phép hội (hoặc phép tuyển)

21 Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Một số lỗi thường gặp (tiếp)



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số quy tắc suy luận phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

22

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

(c) Viết sai dạng ký hiệu của mệnh đề tồn tại

- Viết sai dạng ký hiệu của mệnh đề tồn tại dưới dạng $\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$ thay vì $\exists x(A(x) \wedge B(x))$
- Ví dụ, dạng ký hiệu của “Tồn tại một số chẵn là số nguyên tố” là $\exists x(E(x) \wedge P(x))$, không phải $\exists x(E(x) \rightarrow P(x))$, trong đó $E(x)$ có nghĩa là “ x là số chẵn” và $P(x)$ có nghĩa là “ x là số nguyên tố”
- Thông thường, các lượng từ tồn tại thường được theo sau bởi các phép hội

(d) Viết sai dạng ký hiệu của mệnh đề phổ quát

- Viết sai dạng ký hiệu của mệnh đề phổ quát dưới dạng $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ thay vì $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$
- Ví dụ, dạng ký hiệu của “Mọi số lẻ là số nguyên tố” là $\forall x(O(x) \rightarrow P(x))$, không phải $\forall x(O(x) \wedge P(x))$, trong đó $O(x)$ có nghĩa là “ x là số lẻ” và $P(x)$ có nghĩa là “ x là số nguyên tố”
- Thông thường, các lượng từ phổ quát thường được theo sau bởi các mệnh đề điều kiện

Một số lỗi thường gặp (tiếp)



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số quy biện phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

23

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

(e) Đặt sai vị trí các vị từ bên trong vị từ khác

- Đặt sai vị trí các vị từ bên trong vị từ khác, ví dụ như $P(Q(x))$
- Ví dụ, nếu $P(x)$ là “ x là số nguyên tố,” và $Q(x)$ là “ x là số lẻ,” thì việc viết $P(Q(x))$ để cố gắng biểu diễn một phát biểu như “ x là số nguyên tố lẻ” hoặc viết $\forall x P(Q(x))$ để nói “mọi số lẻ đều là số nguyên tố” là vô nghĩa
- Ký hiệu $P(Q(x))$ thực sự có nghĩa là *phát biểu “ x là số lẻ” là một số nguyên tố* (hay *phát biểu $Q(x)$ là một số nguyên tố*), và rõ ràng một phát biểu không phải là bất kỳ loại số nào

(f) Không thay đổi lượng từ khi phủ định một mệnh đề có lượng từ

- Ví dụ, phủ định của phát biểu “*một số* con mèo *thích* gan lợn” không phải là “*một số* con mèo *không thích* gan lợn”; mà là “*không* có con mèo nào *thích* gan lợn”, hoặc “*tất cả* các con mèo đều *không thích* gan lợn”

Một số lỗi thường gặp (tiếp)



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên biện phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

24 Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

(g) Lạm dụng thuật ngữ “theo định nghĩa” khi biện minh cho các phát biểu trong chứng minh

- Ví dụ, Franklin Roosevelt không phải là Tổng thống Hoa Kỳ vào thời điểm nước này tham gia Thế chiến thứ II vào tháng 12 năm 1941. Tuy nhiên, “theo định nghĩa”, ông là Tổng thống vì ông đã được bầu vào vị trí này vào đầu năm 1941 và chưa mất hay rời khỏi chức vụ

(h) Không kiểm tra cẩn thận các định nghĩa trong chứng minh

- Ví dụ, nếu đang cố gắng chứng minh điều gì đó về các số nguyên lẻ, thì việc sử dụng chính xác ý nghĩa của khái niệm đó (rằng một số nguyên lẻ là một số có thể viết dưới dạng $2k + 1$ với k là một số nguyên) tại một hoặc nhiều chỗ trong chứng minh là rất quan trọng

(i) Bắt đầu chứng minh bằng cách giả định điều cần chứng minh

Một số lỗi thường gặp (tiếp)



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số quy biện phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

25 Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

- Một trường hợp phổ biến của lỗi này là *cố gắng chứng minh các đẳng thức bằng cách bắt đầu với chính đẳng thức đó và sử dụng các biến đổi đại số để đạt được $A = A$* ; cách này là *không hợp lệ*. Tương tự, nếu chúng ta đang cố gắng chứng minh một đẳng thức tập hợp trong phần “Các cấu trúc cơ bản”, chẳng hạn như $A \subseteq A \cup B$, sẽ là *không hợp lệ* khi *bắt đầu với chính phát biểu $A \subseteq A \cup B$*

(j) Giả định sai rằng một vài ví dụ của một mệnh đề phổ quát có nghĩa là mệnh đề đó đúng

- Giả định không hợp lệ rằng một vài (hoặc thậm chí số lượng lớn) ví dụ của một mệnh đề phổ quát có nghĩa là mệnh đề đó đúng
- Có một ví dụ từ lý thuyết số về một mệnh đề thú vị về số nguyên dương n mà đúng với mọi $n \leq 4\,000\,000$ ngoại trừ trường hợp $n = 1969$
- Một chứng minh của mệnh đề phổ quát $\forall x P(x)$ bao gồm việc chỉ ra rằng thuộc tính $P(x)$ luôn đúng bất kể x được chọn như thế nào từ miền xác định (vũ trụ các đối tượng)

Một số lỗi thường gặp (tiếp)



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên biện phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

26

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

(k) Giả định sai rằng đối tượng tùy ý có thuộc tính cụ thể khi chỉ biết tồn tại một đối tượng với thuộc tính đó

- Ví dụ, giả sử chúng ta đang cố gắng chứng minh khẳng định rằng x^2 luôn dư 1 khi chia cho 8
- Sẽ là không hợp lệ khi bắt đầu chứng minh bằng cách giả sử rằng $x = 2n + 1$ với một số nguyên n nào đó
- Mặc dù một số số nguyên thỏa mãn tính chất này là số lẻ, nhưng không phải tất cả số nguyên đều vậy, vì vậy chúng ta sẽ chỉ chứng minh khẳng định đúng trong một số trường hợp, chứ không phải luôn luôn đúng

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

27 Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Chú ý

Đây là bản dịch tài liệu *Proof Techniques* của Dana Angluin (SIGACT News, Winter-Spring 1983, Volume 15 #1). Bản dịch này tuân theo một bản sao của tài liệu ở <https://mfleck.cs.illinois.edu/proof.html>.

Mọi sai sót trong bản dịch này hoàn toàn là do hạn chế về kiến thức của người dịch. Mọi góp ý xin gửi về hoanganhduc@hus.edu.vn.

Chứng minh bằng ví dụ Các tác giả đưa ra chứng minh cho $n = 2$ và đề nghị rằng nó có chứa phần lớn các ý tưởng của chứng minh cho trường hợp tổng quát.

Chứng minh bằng hăm dọa “Tầm thường” hoặc “hiển nhiên”.

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)



Chứng minh bằng cách liệt kê tất cả mọi thứ Một hoặc hai số của một tạp chí chỉ dành riêng cho chứng minh của bạn là một điều có ích.

Chứng minh bằng cách bớt xén “Độc giả có thể dễ dàng đưa ra các chi tiết”, “253 trường hợp còn lại được tiến hành tương tự”.

Chứng minh bằng cách giấu giếm Một chuỗi dài các phát biểu liên quan đúng và/hoặc vô nghĩa về mặt cú pháp.

Chứng minh bằng cách trích dẫn đầy ước muốn Tác giả trích dẫn phủ định, đảo, hoặc tổng quát của một định lý đã biết để hỗ trợ cho khẳng định của mình.

Chứng minh bằng hỗ trợ tài chính Làm sao mà ba tổ chức chính phủ khác nhau có thể sai được? Hoặc theo một góc nhìn đối lập: làm sao mà bất cứ thứ gì hỗ trợ tài chính bởi những tổ chức tầm thường này có thể đúng được?

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

28

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)



Chứng minh bằng dân chủ Rất nhiều người tin rằng điều này đúng: làm sao mà tất cả bọn họ đều sai được?

Chứng minh bằng kinh tế thị trường Lý thuyết của tôi là lý thuyết duy nhất trên thị trường sẽ xử lý các dữ liệu.

Chứng minh bằng sự hiểu biết sâu sắc “Tôi thấy Ruzena ở trong thang máy và cô ấy nói rằng điều đó đã được thử nghiệm ở những năm 1970 và không dùng được”.

Chứng minh bằng vũ trụ Phủ định của mệnh đề này là không tưởng hoặc vô nghĩa. Phổ biến cho các chứng minh về sự tồn tại của Chúa và cho các chứng minh rằng máy tính không thể suy nghĩ.

Chứng minh bằng liên hệ cá nhân “Bài toán Eight-dimensional colored cycle stripping là NP-đầy đủ [Karp, liên hệ cá nhân]”.

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

29

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

30 Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Chứng minh bằng cách liên hệ đến các bài nói chuyện “Ở một buổi hội thảo đặc biệt của NSA về lĩnh vực thị giác máy tính, Binford đã chứng minh rằng SHGC không thể nhận biết được trong thời gian đa thức”.

Chứng minh bằng cách đưa về sai bài toán “Để thấy rằng bài toán infinite-dimensional coloured cycle stripping có thể giải được, ta đưa nó về bài toán halting”.

Chứng minh bằng cách trích dẫn các nguồn không truy cập được
Tác giả trích dẫn một hệ quả đơn giản của một định lý được tìm ra trong một bản ghi nhớ lưu hành nội bộ của Hiệp hội Triết học Slovenia năm 1883. Phương pháp này thậm chí còn hiệu quả hơn nếu tài liệu này chưa bao giờ được dịch từ bản gốc tiếng Iceland.

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)



Chứng minh bằng cách trích dẫn các nguồn không tồn tại

Không có điều gì thậm chí hơi giống với định lý đã được trích dẫn xuất hiện ở trong tài liệu được đề cập. Tốt hơn là kết hợp với phương pháp chứng minh bằng cách trích dẫn các nguồn không truy cập được.

Chứng minh bằng cách trích dẫn một tài liệu sẽ xuất bản

Thông thường tác giả sẽ trích dẫn một bài báo sắp xuất bản của chính mình, và tài liệu này thường không còn sắp xuất bản như lúc đầu.

Chứng minh bằng tính quan trọng

Một lượng lớn các hệ quả hữu ích đều suy ra từ mệnh đề trong câu hỏi.

Chứng minh bằng việc tích lũy bằng chứng

Việc tìm kiếm lâu dài và siêng năng không cho ta bất kỳ một phản ví dụ nào.

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên lý phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

31

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Chứng minh bằng các tài liệu tham khảo lẫn nhau Trong tài liệu A, Định lý 5 được cho là suy ra từ Định lý 3 của tài liệu B, và định lý này được suy ra từ Hệ quả 6.2 trong tài liệu C, và hệ quả này là một hệ quả dễ dàng suy ra được từ Định lý 5 của tài liệu A.

Chứng minh bằng siêu chứng minh Một phương pháp được đưa ra để xây dựng chứng minh. Tính đúng đắn của phương pháp này được chứng minh bằng bất kể một kỹ thuật nào trong số các kỹ thuật này. Sự hiểu biết sâu sắc về ngữ nghĩa ngôn ngữ lập trình sẽ giúp ích ở đây.

Chứng minh bằng hình vẽ Một hình thức thuyết phục hơn của Chứng minh bằng ví dụ. Kết hợp tốt với Chứng minh bằng cách bớt xén.

32 Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)



Chứng minh bằng đồ họa hào nhoáng Còn được gọi là phương pháp Jabberwocky. Chỉ có một kết quả thực sự mạnh mẽ mới có thể làm nền tảng cho một màn trình diễn âm thanh và ánh sáng tuyệt vời như vậy. “Sản phẩm dành cho những người không có bài thuyết trình.”

Chứng minh bằng các biểu đồ dễ gây nhầm lẫn hoặc không giải thích được Hầu như bất kỳ đường cong nào cũng có thể được tạo ra để trông giống như kết quả mong muốn bằng cách chuyển đổi phù hợp các biến và thao tác với các tỷ lệ trục. Thường gặp trong công việc thí nghiệm.

Chứng minh bằng việc khẳng định một cách kịch liệt Tốt nhất là khi có một loại quan hệ quyền hạn nào đó với khán giả, và do đó phương pháp này đặc biệt hữu ích trong một lớp học.

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)



Chứng minh bằng cách lặp lại Cũng được biết đến như là chứng minh của Bellman: “Điều gì tôi nói ba lần là đúng.”

Chứng minh bằng cách kêu gọi trực giác Các hình vẽ theo dạng đám mây thường giúp ích ở đây.

Chứng minh bằng cách vẫy tay một cách mạnh mẽ Hoạt động tốt trong môi trường lớp học, xêmina hoặc hội thảo.

Chứng minh bằng cách thay đổi ngữ nghĩa Một số định nghĩa cơ bản nhưng bất tiện được thay đổi để phù hợp với phát biểu của kết quả.

Chứng minh bằng ký hiệu rườm rà Tốt nhất là thực hiện với việc sử dụng ít nhất bốn bảng chữ cái, các ký tự đặc biệt, và phiên bản mới nhất của LaTeX.

Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

34

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

35

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Chứng minh bằng sự trừu tượng vô nghĩa Một phiên bản của Chứng minh bằng hăm dọa. Tác giả sử dụng các thuật ngữ hoặc định lý từ toán học cao cấp trông rất ấn tượng nhưng chỉ liên quan trực tiếp đến vấn đề hiện tại. Một vài tích phân ở đây, một vài dãy số chính xác ở kia, và ai sẽ biết liệu bạn có thực sự có chứng minh hay không?

Phản chứng bằng cách tìm ra một quả táo xấu Một quả táo xấu làm hỏng cả chùm¹. Trong số nhiều người ủng hộ lý thuyết này, chúng tôi đã tìm thấy một người rõ ràng là điên rồ; vì vậy chúng ta có thể làm mất uy tín của toàn bộ lý thuyết. (Thường sử dụng trong ngữ cảnh chính trị.)

36

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)



Lógica và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong logic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguyên tắc phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong logic vị từ

Một số lỗi thường gặp

36

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Chứng minh bằng con đường dốc trơn trượt Nếu chúng tôi chấp nhận [đề xuất ban đầu], chúng tôi sẽ phải chấp nhận [đề xuất được sửa đổi một chút] và cuối cùng điều này sẽ dẫn đến [đề xuất hoàn toàn khác biệt và rõ ràng là có thể bị phản đối].

Chứng minh bằng “không phát minh ở đây” Chúng tôi có kinh nghiệm làm việc với thiết bị này trong nhiều năm ở MIT và chúng tôi chưa bao giờ nhận ra hiệu quả này.

¹ Con sâu làm rầu nồi canh