

# COPYRIGHT NOTICE

## THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

### COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-07-24

### BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-07-24



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

# VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

## Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học  
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội  
[hoanganhduc@hus.edu.vn](mailto:hoanganhduc@hus.edu.vn)



# Nội dung



## Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh  
Quy tắc nhân và Quy tắc cộng  
Nguyên lý bù trừ  
Quy tắc chia

## Nguyên lý chuồng bồ câu

## Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu  
Một số đẳng thức tổ hợp

## Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal  
Định lý nhị thức  
Nguyên lý bù trừ tổng quát

## Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

## Hàm sinh

## Một số ví dụ khác

## Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

## Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh  
Quy tắc nhân và Quy tắc cộng  
Nguyên lý bù trừ  
Quy tắc chia

## Nguyên lý chuồng bồ câu

## Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu  
Một số đẳng thức tổ hợp

## Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal  
Định lý nhị thức  
Nguyên lý bù trừ tổng quát

## Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Các nguyên lý đếm cơ bản

## Quy tắc song ánh



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

2

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

- **Quy tắc song ánh (The Bijection Rule):** Nếu  $f : A \rightarrow B$  là một song ánh, trong đó  $A$  và  $B$  là các tập hữu hạn, thì  $|A| = |B|$

## Ví dụ 1

- Cho tập hợp  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$
- Mỗi tập con  $A \subseteq U$  được biểu diễn bằng chuỗi nhị phân  $x_1 x_2 \dots x_n$  trong đó  $x_i = 1$  nếu  $u_i \in A$  và  $x_i = 0$  nếu  $u_i \notin A$
- Số tập con của  $U$  bằng với số các chuỗi nhị phân độ dài  $n$

# Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

3

74

## ■ Quy tắc nhân (The Product Rule):

- Giả sử một công việc được chia nhỏ ra thành  $n$  giai đoạn liên tiếp nhau
  - Giai đoạn thứ 1 có  $m_1$  cách thực hiện
  - Với mỗi cách thực hiện giai đoạn thứ 1, có  $m_2$  cách thực hiện giai đoạn thứ 2
  - Với mỗi cách thực hiện các giai đoạn thứ 1 và 2, có  $m_3$  cách thực hiện giai đoạn thứ 3
  - ...
  - Với mỗi cách thực hiện các giai đoạn thứ 1, 2,  $\dots$ ,  $n - 1$ , có  $m_n$  cách thực hiện giai đoạn thứ  $n$
- Có  $m_1 m_2 \dots m_n$  cách thực hiện công việc

## ■ Quy tắc cộng (The Sum Rule):

- Có  $n$  biện pháp khác nhau để thực hiện một công việc
- Cách thực hiện biện pháp thứ  $i$  luôn luôn khác cách thực hiện biện pháp thứ  $j$  với mọi  $i \neq j$  và  $1 \leq i, j \leq n$
- Nếu biện pháp thứ  $i$  có  $m_i$  cách thực hiện ( $1 \leq i \leq n$ ) thì ta có  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  cách thực hiện công việc

# Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

Các quy tắc đếm cơ bản có thể được biểu diễn theo ngôn ngữ tập hợp

- **Quy tắc nhân (The Product Rule):** Cho các tập hữu hạn  $A_1, A_2, \dots, A_n$  trong đó  $|A_i| = m_i$  với  $1 \leq i \leq n$ . Ta có

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n| = m_1 m_2 \dots m_n$$

- **Quy tắc cộng (The Sum Rule):** Cho các tập hữu hạn đôi một rời nhau  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , ( $A_i \cap A_j = \emptyset$  với mọi  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ) và  $|A_i| = m_i$  với  $1 \leq i \leq n$ . Ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

4

# Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

5 Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Ví dụ 2 (Quy tắc nhân)

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 7?

- Giả sử chuỗi  $x = x_1x_2 \dots x_7$  là một chuỗi nhị phân độ dài 7
- Để xây dựng  $x$ , ta lần lượt chọn giá trị cho  $x_1, x_2, \dots, x_7$ 
  - có 2 cách chọn  $x_1$  (0 hoặc 1)
  - với mỗi giá trị của  $x_1$ , có 2 cách chọn  $x_2$  (0 hoặc 1)
  - ...
  - với mỗi giá trị của  $x_1, \dots, x_6$ , có 2 cách chọn  $x_7$  (0 hoặc 1)
- Do đó có  $2^7$  chuỗi nhị phân độ dài 7

# Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Ví dụ 3 (Quy tắc nhân)

Tập hợp  $n$  phần tử  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  có bao nhiêu tập con?

- Một tập con của  $S$  có thể được xây dựng thông qua  $n$  bước liên tiếp
  - chọn  $x_1$  hoặc không chọn
  - chọn  $x_2$  hoặc không chọn
  - ...
  - chọn  $x_n$  hoặc không chọn
- Mỗi bước có thể được thực hiện bằng 2 cách
- Do đó có  $2^n$  tập con của  $S$

## Bài tập 1

Có bao nhiêu hàm  $f : A \rightarrow B$  với  $A$  và  $B$  lần lượt là các tập hữu hạn gồm  $m$  và  $n$  phần tử?

6



# Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Ví dụ 4 (Quy tắc cộng)

Một sinh viên có thể chọn một bài thực hành máy tính từ một trong ba danh sách tương ứng có 23, 15, và 19 bài. Giả thiết rằng không có hai bài nào giống nhau. Có bao nhiêu cách chọn bài thực hành?

- Có 23 cách chọn bài thực hành từ danh sách thứ nhất
- Có 15 cách chọn bài thực hành từ danh sách thứ hai
- Có 19 cách chọn bài thực hành từ danh sách thứ ba
- Do không có hai bài nào giống nhau, số cách chọn bài thực hành là  $23 + 15 + 19 = 57$

7

# Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng



## Ví dụ 5 (Quy tắc cộng)

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 7 có chính xác hai số 1?

- Trong một chuỗi nhị phân  $x_1x_2 \dots x_7$  độ dài 7 có chính xác hai số 1

- Ở các vị trí  $i$  và  $j$  nào đó với  $1 \leq i < j \leq 7$ ,  $x_i = x_j = 1$
- Ở các vị trí  $k \notin \{i, j\}$ ,  $x_k = 0$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
0	0	1	0	1	0	0
		$i$		$j$		

- Ứng với mỗi vị trí  $i$  của số 1 đầu tiên, có  $7 - i$  vị trí  $j$  có thể cho số 1 thứ hai

- Với  $i = 1$ , có  $7 - 1 = 6$  lựa chọn cho  $j$
- Với  $i = 2$ , có  $7 - 2 = 5$  lựa chọn cho  $j$
- ...
- Với  $i = 7$ , có  $7 - 7 = 0$  lựa chọn cho  $j$
- Theo quy tắc cộng, số các chuỗi nhị phân độ dài 7 có chính xác hai số 1 là  $\sum_{i=1}^7 (7 - i) = \sum_{i=0}^6 i = 6(6 + 1)/2 = 21$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

8

74

# Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng



## Ví dụ 6

Giả sử tên các biến trong một ngôn ngữ lập trình chỉ có thể là một chữ cái viết hoa hoặc một chữ cái viết hoa theo sau bởi một chữ số. Giả sử ta sử dụng bảng chữ cái tiếng Anh và các chữ số trong hệ thập phân. Có tất cả bao nhiêu tên biến trong ngôn ngữ lập trình này?

- Một tên biến có dạng  $x$  hoặc  $x\alpha$  với  $x \in \{A, B, \dots, Z\}$  và  $\alpha \in \{0, 1, \dots, 9\}$
- Nếu tên biến có dạng  $x$ , có 26 cách chọn giá trị của  $x$
- Nếu tên biến có dạng  $x\alpha$ , có 26 cách chọn giá trị của  $x$ , và ứng với mỗi giá trị của  $x$  có 10 cách chọn giá trị của  $\alpha$ . Theo quy tắc nhân, có  $26 \times 10 = 260$  tên biến có dạng  $x\alpha$
- Theo quy tắc cộng

$$\begin{aligned}\text{số tên biến} &= \text{số tên biến dạng } x + \text{số tên biến dạng } x\alpha \\ &= 26 + 260 = 286\end{aligned}$$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

9 Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng



## Ví dụ 7

Các *dịch vụ rút gọn đường dẫn (URL-shortening service)* như [bit.ly](https://bit.ly) hay [tinyurl.com](https://tinyurl.com) cho phép người dùng thu gọn một đường dẫn dài thành một dãy các ký tự ngắn hơn rất nhiều. Ví dụ đường dẫn tới bài giảng này trên trang web môn học <https://hoanganhduc.github.io/teaching/VNU-HUS/2024/summer/MAT3500/Lectures/Counting.pdf> sau khi rút gọn thông qua [bit.ly](https://bit.ly) là <https://bit.ly/3LAbjfI>.

Giả sử các đường dẫn sau khi rút gọn gồm có <https://bit.ly/> kèm theo một chuỗi 7 ký tự, mỗi ký tự chỉ có thể là một chữ số thập phân, một chữ cái viết hoa, hoặc một chữ cái viết thường trong bảng chữ cái tiếng Anh. Dịch vụ [bit.ly](https://bit.ly) có thể cung cấp tối đa bao nhiêu đường dẫn rút gọn?

- Mỗi đường dẫn tương ứng với một chuỗi ký tự  $x_1x_2 \dots x_7$  trong đó  $x_i \in C = \{0, \dots, 9\} \cup \{A, \dots, Z\} \cup \{a, \dots, z\}$ ,  $1 \leq i \leq 7$ 
  - Có  $|C| = 10 + 26 + 26 = 62$  cách chọn giá trị cho  $x_1$
  - Với mỗi giá trị của  $x_1$ , có  $|C| = 62$  cách chọn giá trị cho  $x_2$
  - ...
  - Với mỗi giá trị của  $x_1, \dots, x_6$ , có  $|C| = 62$  cách chọn giá trị cho  $x_7$
- Theo quy tắc nhân, có  $|C|^7 = 62^7 = 3\,521\,614\,606\,208$  đường dẫn rút gọn

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

10

# Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng



## Bài tập 2

*Địa chỉ kiểm soát truy cập phương tiện truyền thông (MAC (media access control) address), hay còn gọi là địa chỉ MAC, là một định danh duy nhất được gán cho một card mạng (network adapter), ví dụ như card mạng có dây (ethernet card) hoặc card mạng không dây (wireless card). Địa chỉ này gồm một dãy sáu cặp các chữ số thập lục phân (nghĩa là các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F). Ví dụ, F7:DE:A1:B6:C4:33 là một địa chỉ MAC. (Các cặp số thường được phân tách bởi dấu hai chấm.) Có tất cả bao nhiêu địa chỉ MAC?*

## Bài tập 3

*Theo quy định của Bộ Thông Tin & Truyền Thông Việt Nam, tất cả các số thuê bao điện thoại di động cần có 10 chữ số, trong đó ba chữ số đầu tiên đại biểu cho nhà mạng cung cấp dịch vụ. Ví dụ, nhà mạng Viettel hiện tại sở hữu 12 đầu số di động: 086, 096 – 098, và 032 – 039. Viettel có thể cung cấp tối đa bao nhiêu số điện thoại di động?*

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

11

74

# Các nguyên lý đếm cơ bản

## Nguyên lý bù trừ



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

12

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

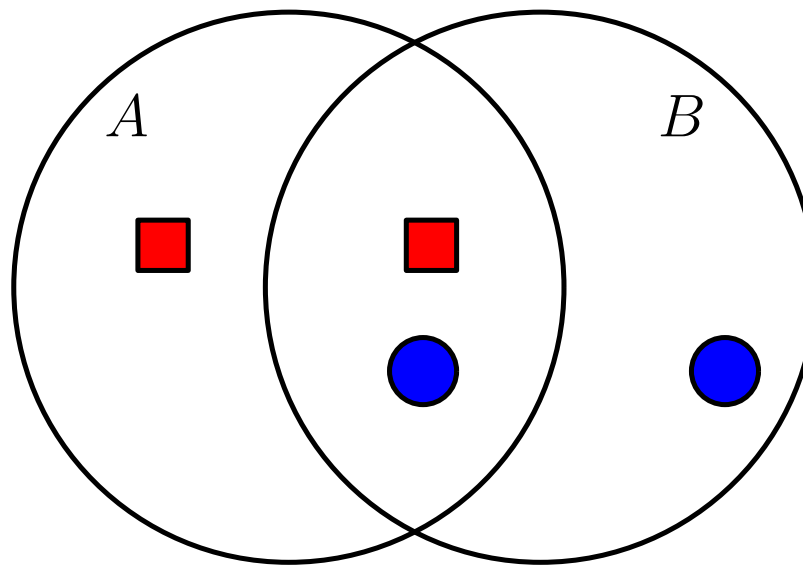
Một số ví dụ khác

### ■ Nguyên lý bù trừ (Inclusion-Exclusion Principle): (hay Quy tắc trừ (The Subtraction Rule))

- Có hai biện pháp khác nhau để thực hiện một công việc
- Biện pháp thứ nhất có  $m$  cách thực hiện
- Biện pháp thứ hai có  $n$  cách thực hiện
- Có  $k$  cách thực hiện đồng thời hai biện pháp
- Số cách thực hiện công việc là  $m + n - k$

### ■ Nguyên lý bù trừ (Inclusion-Exclusion Principle): Cho các tập hữu hạn $A, B$ trong đó $|A| = m$ và $|B| = n$ . Ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



# Các nguyên lý đếm cơ bản

## Nguyên lý bù trừ



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Ví dụ 8

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 8 bắt đầu với 1 hoặc kết thúc với 00?

- Gọi  $A$  là tập các chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng  $1x_2 \dots x_8$  (bắt đầu với 1) và  $B$  là tập các chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng  $x_1x_2 \dots x_600$  (kết thúc với 00)
- Tập các chuỗi nhị phân độ dài 8 bắt đầu với 1 hoặc kết thúc với 00 là  $A \cup B$
- Theo nguyên lý bù trừ,  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 
  - $|A|$ : Số chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng  $1x_2 \dots x_8$  là  $2^7$
  - $|B|$ : Số chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng  $x_1x_2 \dots x_600$  là  $2^6$
  - $|A \cap B|$ : Số chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng  $1x_2 \dots x_600$  là  $2^5$

Số chuỗi nhị phân độ dài 8 bắt đầu với 1 hoặc kết thúc với 00 là  $|A \cup B| = 2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$

13

74



# Các nguyên lý đếm cơ bản

## Nguyên lý bù trừ



### Ví dụ 9

Ở ngân hàng  $X$ , khách hàng có thể sử dụng mã **PIN** (*Personal Identification Number*) gồm 4 chữ số thập phân để truy cập tài khoản từ máy rút tiền tự động thông qua thẻ rút tiền. Ngân hàng  $X$  đặc biệt yêu cầu các mã PIN không thể bắt đầu hoặc kết thúc với ba chữ số liên tiếp giống nhau (ví dụ, dãy 7770 hoặc 0111 là không hợp lệ). Có tất cả bao nhiêu dãy PIN không hợp lệ?

- Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các dãy PIN bắt đầu với ba chữ số giống nhau và  $E$  là tập hợp tất cả các dãy PIN kết thúc với ba chữ số giống nhau. Tập hợp các dãy PIN không hợp lệ là  $S \cup E$
- Theo nguyên lý bù trừ,  $|S \cup E| = |S| + |E| - |S \cap E|$ 
  - $|S|$ : Số dãy PIN có dạng  $xxxy$  với  $x, y \in \{0, \dots, 9\}$  là  $10^2$  (có 10 cách chọn  $x$ , và ứng với mỗi giá trị của  $x$  có 10 cách chọn  $y$ )
  - $|E|$ : Số dãy PIN có dạng  $xyyy$  với  $x, y \in \{0, \dots, 9\}$  là  $10^2$  (có 10 cách chọn  $x$ , và ứng với mỗi giá trị của  $x$  có 10 cách chọn  $y$ )
  - $|S \cap E|$ : Một dãy PIN  $xyzt$  thuộc  $S \cap E$  khi và chỉ khi  $x = y = z$  (thuộc  $S$ ) và  $y = z = t$  (thuộc  $E$ ), nghĩa là  $x = y = z = t$ . Mỗi dãy thuộc  $S \cap E$  do đó có dạng  $xxxx$  và có 10 dãy dạng này (có 10 cách chọn  $x$ )
- Số dãy PIN không hợp lệ là  $|S \cup E| = 10^2 + 10^2 - 10 = 190$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

14

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác



# Các nguyên lý đếm cơ bản

## Nguyên lý bù trừ



### Ví dụ 10

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 00000 hoặc 11111?

- Gọi  $A$  là tập các chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 00000 và  $B$  là tập các chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 11111.  $A \cup B$  là tập chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 00000 hoặc 11111
- Theo nguyên lý bù trừ,  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Trước tiên, ta tính  $|A|$ . Các chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 00000 thuộc một trong các dạng:  $00000x_6x_7x_8x_9x_{10}$ ,  $100000x_7x_8x_9x_{10}$ ,  $x_1100000x_8x_9x_{10}$ ,  $x_1x_2100000x_9x_{10}$ ,  $x_1x_2x_3100000x_{10}$ , và  $x_1x_2x_3x_4100000$  (lần lượt ứng với các vị trí bắt đầu dãy 00000)
  - Có  $2^5$  chuỗi dạng  $00000x_6x_7x_8x_9x_{10}$
  - Với mỗi dạng còn lại, có  $2^4$  chuỗi
  - Do đó  $|A| = 2^5 + 5 \cdot 2^4$
- Tương tự,  $|B| = 2^5 + 5 \cdot 2^4$
- Tập  $A \cap B$  có chính xác hai phần tử: 0000011111 và 1111100000
- Do đó,  $|A \cup B| = 2(2^5 + 5 \cdot 2^4) - 2 = 222$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

15

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Các nguyên lý đếm cơ bản

## Nguyên lý bù trừ



### Bài tập 4

*Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 7 bắt đầu với 00 hoặc kết thúc với 111?*

### Bài tập 5

*Một chuỗi đối xứng là một chuỗi ký tự mà khi viết ngược lại từ phải sang trái thì chuỗi không thay đổi. Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài  $n$  là chuỗi đối xứng?*

### Bài tập 6

*Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 1000 thỏa mãn*

- (a) là bội của 7
- (b) là bội của cả 7 và 11
- (c) là bội của 7 nhưng không là bội của 11
- (d) là bội của 7 hoặc là bội của 11
- (e) không là bội của 7 và không là bội của 11

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

16

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Các nguyên lý đếm cơ bản

## Nguyên lý bù trừ



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

17

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Bài tập 7

*Có tất cả bao nhiêu số nguyên không vượt quá 1000 là bình phương hoặc lập phương của một số nguyên dương?*

## Bài tập 8 (★)

*Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 8 có chứa 000 hoặc 1111?*  
**(Đáp án: 147)**

# Các nguyên lý đếm cơ bản

## Quy tắc chia



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

18

74

### ■ Quy tắc chia (The Division Rule):

- Một công việc có thể được thực hiện bằng  $n$  cách
- Với mỗi cách thực hiện  $w$ , có chính xác  $d$  trong  $n$  cách thực hiện tương đương/cùng loại với nó
- Số cách **khác nhau** để thực hiện công việc là  $n/d$

### ■ Quy tắc chia (The Division Rule): Nếu $A$ là hợp của $m$ tập con đôi một không giao nhau, mỗi tập con có $d$ phần tử, thì $m = |A|/d$

### ■ Quy tắc chia (The Division Rule): Nếu $B$ là một tập hữu hạn và hàm $f : A \rightarrow B$ gán chính xác $k$ phần tử của $A$ cho mỗi phần tử của $B$ , thì $|A| = k \cdot |B|$

## Ví dụ 11

- Trong một đàn cừu, người ta đếm được  $n = 280$  chân cừu
- Mỗi con cừu  $w$  có chính xác  $d = 4$  chân
- Số con cừu trong đàn cừu là  $n/d = 280/4 = 70$

# Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc chia



## Ví dụ 12

Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp các số 1, 1, 2?

- Đầu tiên, giả sử hai số 1 là phân biệt:  $1_a$  và  $1_b$
- Có  $3!$  cách sắp xếp 3 số phân biệt
- Tuy nhiên, khi coi  $1_a$  và  $1_b$  là cùng một số 1, *với mỗi cách sắp xếp các số 1, 1, 2, có chính xác 2 trong 3! cách “cùng loại”*, ví dụ
  - Với cách sắp xếp 1, 1, 2, có hai cách sắp xếp tương đương là  $(1_a, 1_b, 2)$  và  $(1_b, 1_a, 2)$
- Do đó, số cách sắp xếp khác nhau của dãy 1, 1, 2 là  $3!/2 = 3$

$1_a, 1_b, 2$	$1_b, 1_a, 2$	1, 1, 2
$1_a, 2, 1_b$	$1_b, 2, 1_a$	1, 2, 1
$2, 1_a, 1_b$	$2, 1_b, 1_a$	2, 1, 1

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

19

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc chia



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

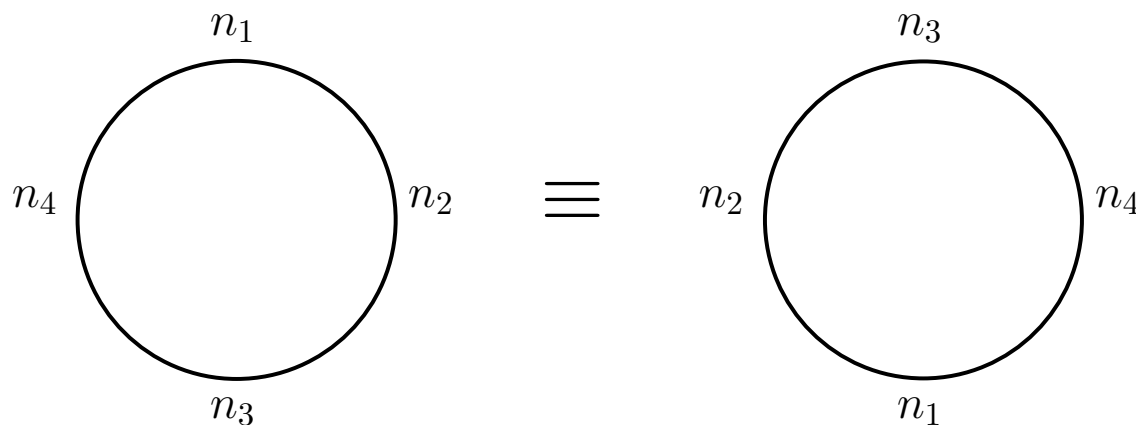
Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Ví dụ 13

Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 4 người ngồi quanh một bàn tròn? Biết rằng *hai cách sắp xếp là giống nhau nếu mỗi người có người ngồi bên trái giống nhau và người ngồi bên phải giống nhau trong cả hai cách sắp xếp*. Ví dụ, hai cách sắp xếp sau là giống nhau



20

74

# Các nguyên lý đếm cơ bản

## Quy tắc chia



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

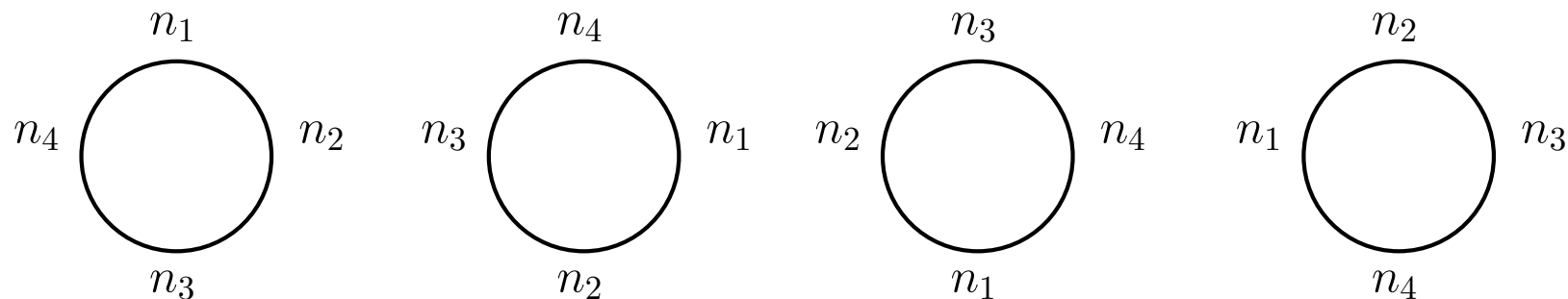
Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

21

- Nếu *không có điều kiện gì* thì có tất cả  $4!$  cách sắp xếp
- Chú ý rằng hai cách sắp xếp là giống nhau nếu khi ta xoay bàn sao cho  $n_1$  nằm ở trên đỉnh thì chúng giống nhau
- Do đó, *với mỗi cách sắp xếp 4 người quanh bàn tròn, có chính xác 4 trong  $4!$  cách sắp xếp “cùng loại”*
- Theo quy tắc chia, số cách khác nhau để xếp 4 người quanh bàn tròn là  $4!/4 = 6$



Hình: Bốn cách sắp xếp giống nhau

# Các nguyên lý đếm cơ bản

## Quy tắc chia



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh  
Quy tắc nhân và Quy tắc cộng  
Nguyên lý bù trừ  
Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu  
Một số đẳng thức tổ hợp

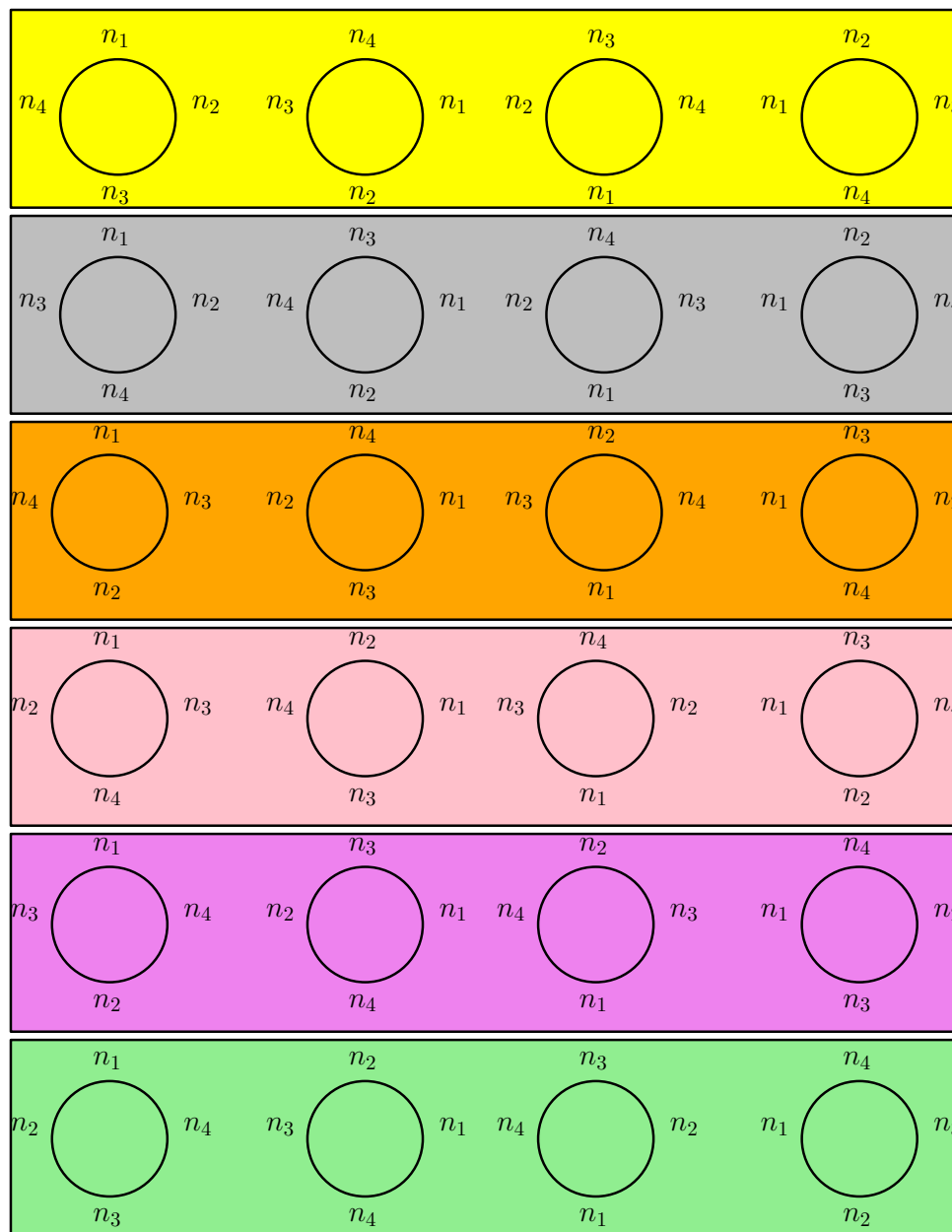
Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal  
Định lý nhị thức  
Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác



22

74



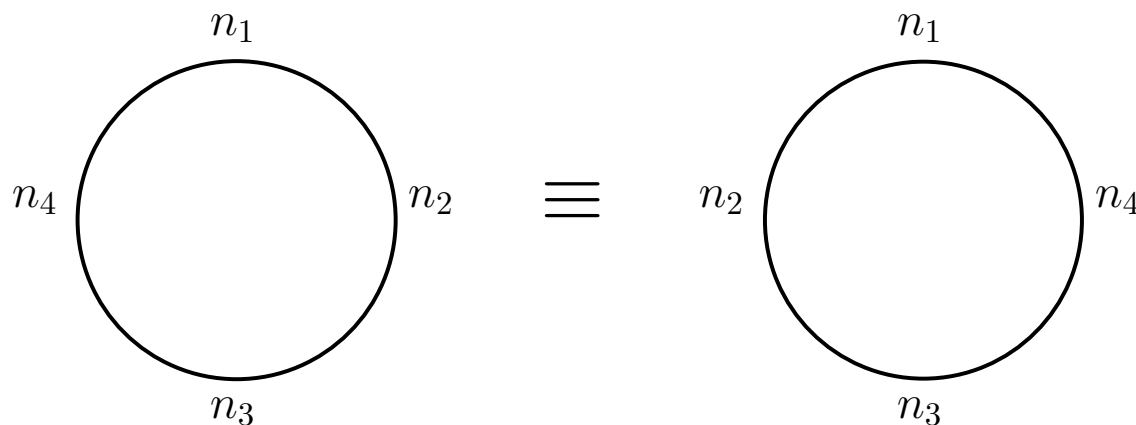
# Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc chia



## Bài tập 9

Giả sử hai cách sắp xếp 4 người quanh một bàn tròn là giống nhau khi mỗi người có hai người ngồi cạnh giống nhau trong cả hai cách sắp xếp không quan tâm là ngồi bên trái hay bên phải, ví dụ như hai cách sắp xếp trong hình sau là giống nhau với giả thiết hiện tại



nhưng không giống nhau với giả thiết trong Ví dụ 13. Trong trường hợp này, có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 4 người quanh một bàn tròn?

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

23

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc chia



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Bài tập 10

*Giả thiết rằng hai cách sắp xếp là giống nhau nếu mỗi người có người ngồi bên trái và người ngồi bên phải giống nhau trong mỗi cách sắp xếp*

- (a) *Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn?*
- (b) *Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?*

24

# Nguyên lý chuồng bồ câu



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

25 Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

- *Nguyên lý chuồng bồ câu (The Pigeonhole Principle)* (hay *Nguyên lý Dirichlet (The Dirichlet Drawer Principle)*): Nếu  $k$  là một số nguyên dương và có  $k + 1$  con chim bồ câu hoặc nhiều hơn được đặt trong  $k$  chuồng bồ câu, thì có ít nhất một chuồng có hai con chim bồ câu hoặc nhiều hơn
- *Nguyên lý chuồng bồ câu (The Pigeonhole Principle)*: Nếu một hàm  $f : A \rightarrow B$  ánh xạ một tập hữu hạn  $A$  với  $|A| \geq k + 1$  đến một tập hữu hạn  $B$  với  $|B| = k$ , thì  $f$  không là một đơn ánh (**Nhắc lại:**  $f$  là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi  $x_1, x_2 \in A$ , nếu  $x_1 \neq x_2$  thì  $f(x_1) \neq f(x_2)$ )

## Cách áp dụng nguyên lý chuồng bồ câu

- Xác định xem cái gì đại diện cho “bồ câu (pigeon)”
- Xác định xem cái gì đại diện cho “chuồng bồ câu (pigeonhole)”
- Xác định cách “bồ câu” được chia vào các “chuồng bồ câu”

# Nguyên lý chuồng bồ câu



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

26 Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Ví dụ 14

Trong một nhóm bất kỳ có 367 người, luôn có hai người trong nhóm có cùng ngày sinh

- Có tất cả 366 ngày sinh nhật (= “chuồng bồ câu”) và 367 người (= “bồ câu”), do đó có ít nhất hai người có cùng ngày sinh nhật

## Ví dụ 15

Giả sử một kỳ thi tính các điểm số từ 0 đến 100, và mọi điểm số đều là số nguyên. Cần bao nhiêu sinh viên tham gia kỳ thi để chắc chắn có hai sinh viên có cùng điểm số?

- Có tất cả 101 điểm số (= “chuồng”). Cần ít nhất 102 sinh viên (= “bồ câu”) để chắc chắn có hai sinh viên có cùng điểm số

# Nguyên lý chuồng bồ câu



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

27 Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

- *Nguyên lý chuồng bồ câu tổng quát (The Generalized Pigeonhole Principle)*: Nếu  $N$  con chim bồ câu được đặt vào  $k$  chuồng bồ câu, với  $k$  là số nguyên dương nào đó, thì tồn tại một chuồng có ít nhất  $\lceil N/k \rceil$  con

## Ví dụ 16

- Có  $N = 280$  sinh viên (= “bồ câu”) trong một lớp học. Một năm có  $k = 52$  tuần (= “chuồng”). Do đó có một tuần mà ít nhất  $\lceil 280/52 \rceil = \lceil 5.38 \rceil = 6$  sinh viên có ngày sinh nhật trong tuần đó

- Giá trị lớn nhất của  $d$  là bao nhiêu để **chắc chắn** rằng phát biểu “Trong tất cả 145 sinh viên, có ít nhất  $d$  sinh viên sinh ra vào cùng một tháng”?

Trong 145 sinh viên (= “bồ câu”), có ít nhất  $\lceil 145/12 \rceil = 13$  sinh viên sinh ra vào cùng một tháng (= “chuồng”). Thêm vào đó, **phát biểu với  $d \geq 14$  không đúng** khi có 13 sinh viên sinh ra vào cùng một tháng và các tháng còn lại mỗi tháng có 12 sinh viên sinh vào tháng đó. Do đó  $d = 13$  là giá trị lớn nhất thỏa mãn đề bài

# Nguyên lý chuồng bồ câu



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

28 Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Ví dụ 17

Chứng minh rằng trong một tập  $n + 1$  số nguyên dương bất kỳ nhỏ hơn hoặc bằng  $2n$ , tồn tại một số là ước của một số khác trong tập đó

- Viết các số trong  $n + 1$  số nguyên dương  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$  dưới dạng tích của một lũy thừa của 2 và một số nguyên dương lẻ, nghĩa là,  $a_i = 2^{b_i} c_i$  trong đó  $b_i \geq 0$  và  $c_i \leq 2n$  (= “bồ câu”) là một số nguyên dương lẻ, với  $1 \leq i \leq n + 1$
- Có tối đa  $n$  số nguyên dương lẻ (= “chuồng”) nhỏ hơn  $2n$ . Do đó, theo nguyên lý chuồng bồ câu, có hai số  $c_i, c_j$  thỏa mãn  $c_i = c_j$ , với  $1 \leq i, j \leq n + 1$
- Suy ra,  $a_i = 2^{b_i} c_i$  và  $a_j = 2^{b_j} c_j$ . Do đó, nếu  $b_i \leq b_j$  thì  $a_i \mid a_j$  và ngược lại thì  $a_j \mid a_i$

# Nguyên lý chuồng bồ câu



## Ví dụ 18

Mọi dãy số gồm  $n^2 + 1$  số thực phân biệt có một dãy con gồm  $n + 1$  phần tử và là dãy thực sự tăng hoặc thực sự giảm

- Gọi dãy  $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$  là một dãy gồm  $n^2 + 1$  số thực phân biệt. Với mỗi  $k \in \{1, 2, \dots, n^2 + 1\}$ , gọi  $(i_k, d_k)$  là một cặp số tương ứng với  $a_k$  (= “bồ câu”), trong đó  $i_k$  là độ dài của dãy thực sự tăng dài nhất bắt đầu từ  $a_k$ , và  $d_k$  là độ dài của dãy thực sự giảm dài nhất bắt đầu từ  $a_k$
- Giả sử không có dãy thực sự tăng hoặc thực sự giảm nào có  $n + 1$  phần tử, nghĩa là,  $1 \leq i_k, d_k \leq n$ . Do đó, có tối đa  $n^2$  cặp  $(i_k, d_k)$  phân biệt (= “chuồng”)
- Theo nguyên lý chuồng bồ câu, tồn tại  $s, t \in \{1, 2, \dots, n^2 + 1\}$  thỏa mãn  $(i_s, d_s) = (i_t, d_t)$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $s < t$
- Do các phần tử trong dãy đều phân biệt, ta có  $a_s < a_t$  hoặc  $a_t < a_s$ 
  - Nếu  $a_s < a_t$ , ta có thể xây dựng một dãy con thực sự tăng bắt đầu từ  $a_s$  gồm  $i_s + 1 = i_t + 1$  phần tử bằng cách lấy  $a_s$  và dãy thực sự tăng bắt đầu từ  $a_t$  có  $i_t$  phần tử. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của  $i_s$
  - Tương tự với  $a_s > a_t$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

29 Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác



# Nguyên lý chuồng bồ câu



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

30 Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Bài tập 11

*Giả sử một ngăn tủ chỉ có hai loại tất màu đen và trắng, mỗi loại có 12 chiếc. Một người lấy tất trong ngăn tủ một cách ngẫu nhiên trong bóng tối*

- (a) *Cần lấy bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn có hai chiếc cùng màu? bốn chiếc cùng màu?*
- (b) *Cần lấy bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn có một đôi màu đen?*
- (c) *Nếu có thêm 12 chiếc tất màu nâu nữa trong ngăn tủ thì cần lấy bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn có hai chiếc cùng màu?*

## Bài tập 12

*Chứng minh rằng trong một nhóm  $n$  số nguyên bất kỳ, có hai số nguyên có cùng số dư khi chia cho  $n - 1$*



# Nguyên lý chuồng bồ câu



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

## Bài tập 13 (★)

*Chứng minh rằng với bất kỳ cách xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn, luôn tìm được một bạn (có thể là nam hoặc nữ) ngồi giữa hai bạn nam (**Gợi ý:** Chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử có cách xếp thỏa mãn điều kiện không có bạn nào ngồi giữa hai bạn nam. Nếu chia nhóm các bạn nam thì mỗi nhóm có tối đa bao nhiêu thành viên? Giữa các nhóm này cần sắp xếp tối thiểu bao nhiêu bạn nữ để không có bạn nào ngồi giữa hai bạn nam?)*

31 Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Nguyên lý chuồng bồ câu



## Bài tập 14

- (a) Chứng minh rằng nếu 7 số nguyên được chọn từ tập  $\{1, 2, \dots, 10\}$  thì có ít nhất hai cặp trong số các số được chọn có tổng bằng 11. Nếu ta chọn 6 số nguyên thay vì 7 thì kết luận trên còn đúng không?
- (b) Cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số từ tập  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  để chắc chắn rằng trong tập các số đã chọn có hai số có tổng bằng 7?

## Bài tập 15 (★)

Chứng minh rằng trong một nhóm  $n$  người ( $n \geq 2$ ) có ít nhất hai người có cùng số người quen biết trong nhóm

## Bài tập 16

Chứng minh rằng trong một nhóm 6 người bất kỳ, luôn có ít nhất ba người đôi một biết nhau hoặc đôi một không biết nhau

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

32 Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

33

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

74

- Một **hoán vị (permutation)** của một tập  $S$  gồm các phần tử phân biệt là một dãy sắp thứ tự (ordered sequence) chứa mỗi phần tử trong  $S$  chính xác một lần
  - Tập  $S = \{1, 2, 3\}$  có tất cả sáu hoán vị:  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 2)$ ,  $(2, 1, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$ ,  $(3, 1, 2)$ ,  $(3, 2, 1)$
- Một **chỉnh hợp chập  $r$  ( $r$ -permutation)** của một tập  $S$  là một dãy sắp thứ tự  $r$  phần tử phân biệt của  $S$ , trong đó  $r$  là một số nguyên thỏa mãn  $0 \leq r \leq |S|$ 
  - Tập  $S$  có tất cả sáu chỉnh hợp chập 2:  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 2)$
- Ký hiệu  $P(n, r)$  hoặc  $P_n^r$  là **số chỉnh hợp chập  $r$  của (một tập)  $n$  phần tử**

## Định lý 1

Với mọi số nguyên  $n \geq 1$  và mọi số nguyên  $r$  thỏa mãn  $0 \leq r \leq n$

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

# Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu



## Chứng minh Định lý 1.

Để xây dựng một chỉnh hợp chập  $r$  của một tập  $S$  gồm  $n$  phần tử, ta thực hiện một dãy  $r$  bước chọn các phần tử phân biệt trong  $S$  để xếp vào  $r$  vị trí:

- Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 1: có  $n$  cách chọn
- Với vị trí thứ nhất đã được xác định, chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 2: có  $n - 1$  cách chọn
- Với hai vị trí đầu đã được xác định, chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 3: có  $n - 2$  cách chọn
- ...
- Với  $r - 1$  vị trí đầu đã được xác định, chọn phần tử xếp vào vị trí thứ  $r$ : có  $n - r + 1$  cách chọn

Theo quy tắc nhân, có tất cả

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$
 chỉnh hợp chập  $r$  của một tập  $n$  phần tử. □

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

34

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

74

# Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu



## Ví dụ 19

Có bao nhiêu hoán vị của các chữ cái  $ABCDEFGH$  có chứa chuỗi ký tự liên tiếp  $ABC$ ?

- Số hoán vị có chứa chuỗi ký tự  $ABC$  bằng với số hoán vị của tập gồm sáu phần tử:  $ABC, D, E, F, G, H$
- Do đó, đáp án là  $6! = 720$

## Ví dụ 20

Giả sử bạn cần đến 8 địa điểm khác nhau trong một thành phố nào đó. Bạn bắt buộc phải xuất phát từ một địa điểm định sẵn, nhưng có thể chọn lần lượt các địa điểm còn lại theo thứ tự bất kỳ. Có bao nhiêu thứ tự bạn có thể chọn để đến các địa điểm này?

- Địa điểm đầu tiên là cố định, còn 7 địa điểm còn lại có thể được sắp thứ tự tùy ý
- Do đó, đáp án là  $7! = 5040$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

35

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu



## Ví dụ 21

Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 4 người ngồi quanh một bàn tròn? Biết rằng hai cách sắp xếp là giống nhau nếu mỗi người có người ngồi bên trái giống nhau và người ngồi bên phải giống nhau trong cả hai cách sắp xếp.

- Giả sử ta muốn sắp xếp  $n_1, n_2, n_3, n_4$  quanh bàn tròn
- Để người ngồi bên trái luôn giống nhau và người ngồi bên phải luôn giống nhau trong cả hai cách sắp xếp, cách duy nhất để thu được một cách sắp xếp từ một cách khác giống nó là xoay bàn theo chiều kim đồng hồ hoặc ngược chiều kim đồng hồ.
- Do đó, để sắp xếp  $n_1, n_2, n_3, n_4$  quanh bàn tròn:
  - Cố định vị trí của  $n_1$ : có 1 cách (Chọn  $n_1$  ở bất kỳ vị trí nào đều giống nhau, do nếu có một cách sắp xếp giống cách bạn sử dụng nhưng vị trí của  $n_1$  không giống, ta có thể xoay bàn để vị trí của  $n_1$  giống nhau trong cả hai cách sắp xếp)
  - Sắp xếp  $n_2, n_3, n_4$  vào các vị trí còn lại: có  $3! = 6$  cách
- Tóm lại, đáp án là  $1 \cdot 3! = 6$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

36

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

37

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

- Một **tổ hợp chập  $r$**  ( $r$ -combination) của một tập hợp  $S$  là một dãy không sắp thứ tự  $r$  phần tử phân biệt của  $S$ , trong đó  $r$  là một số nguyên thỏa mãn  $0 \leq r \leq |S|$ . Nói cách khác, một tổ hợp chập  $r$  của  $S$  cũng là một tập con  $r$  phần tử của  $S$

- Tập  $S = \{1, 2, 3\}$  có ba tổ hợp chập 2:  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{1, 3\}$

- Ký hiệu  $C(n, r)$ ,  $C_n^r$ , hoặc  $\binom{n}{r}$  (đọc là “ $n$  chọn  $r$ ”) là **số tổ hợp chập  $r$  của (một tập)  $n$  phần tử**

## Định lý 2

Với mọi số nguyên  $n \geq 1$  và mọi số nguyên  $r$  thỏa mãn  $0 \leq r \leq n$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

# Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

38

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Chứng minh Định lý 2.

Để xây dựng một tổ hợp chập  $r$  của một tập  $S$  gồm  $n$  phần tử:

- Đầu tiên, ta giả thiết rằng thứ tự các phần tử là quan trọng, và xây dựng một chỉnh hợp chập  $r$  của  $S$ : có  $P_n^r$  cách
- Theo định nghĩa, trong mỗi tổ hợp chập  $r$  của  $S$ , thứ tự giữa các phần tử là không quan trọng. Nói cách khác, mỗi tổ hợp chập  $r$  của  $S$  ứng với chính xác  $P_r^r = r!$  chỉnh hợp chập  $r$  có chứa cùng các phần tử và chỉ khác nhau bởi thứ tự sắp xếp các phần tử
- Theo quy tắc chia, số tổ hợp chập  $r$  của  $S$  là

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{P_r^r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$





# Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu



## Ví dụ 22

Có bao nhiêu cách chọn ra 7 quân bài khác nhau từ một bộ bài 52 quân?

- Thứ tự lựa chọn các quân bài là không quan trọng
- Do đó, đáp án là  $C_{52}^7 = \frac{52!}{7!45!} = 133\,784\,560$

## Ví dụ 23

Có bao nhiêu cách chọn ra 3 bạn nam và 3 bạn nữ trong một nhóm gồm 10 bạn nam và 7 bạn nữ để đại diện tham gia một buổi họp mặt?

- Đầu tiên ta chọn 3 bạn nam từ nhóm 10 bạn nam, sau đó chọn 3 bạn nữ từ nhóm 7 bạn nữ
- Có  $C_{10}^3$  cách chọn ra 3 bạn nam, và  $C_7^3$  cách chọn ra 3 bạn nữ
- Áp dụng quy tắc nhân, có tổng cộng  $C_{10}^3 \cdot C_7^3 = 120 \cdot 35 = 4200$  cách

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

39

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Một số đẳng thức tổ hợp



## Định lý 3

Với các số nguyên  $n, r$  thỏa mãn  $0 \leq r \leq n$ , ta có

$$C_n^r = C_n^{n-r}$$

## Chứng minh.

- Giả sử  $\mathcal{A}$  là tập các tập con  $r$  phần tử và  $\mathcal{B}$  là tập các tập con  $n - r$  phần tử của một tập  $n$  phần tử  $X$ . Hàm  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  cho bởi  $f(A) = X \setminus A$  với  $A \in \mathcal{A}$  là một song ánh.
- Do đó,  $C_n^r = C_n^{n-r}$



## Bài tập 17

Chứng minh Định lý 3 bằng công thức đã biết.

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

40 Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

## Một số đẳng thức tổ hợp



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

41 Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

Ta có thể chứng minh hai vế của một đẳng thức bằng cách chỉ ra chúng *đếm cùng một đối tượng thông qua các phương pháp khác nhau*. Phương pháp chứng minh này gọi là *phương pháp đếm bằng hai cách (double counting proof)*

Trong ví dụ tiếp theo, với  $n, k \geq 2$  và  $n \geq k + 2$ , ta minh họa phương pháp nêu trên bằng cách chứng minh

$$C_n^k - C_{n-2}^{k-2} = 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k$$

# Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Một số đẳng thức tổ hợp



## Ví dụ 24 (Đếm bằng hai cách)

Giả sử  $n, k \geq 2$  và  $n \geq k + 2$ . Ta đếm số cách chọn  $k$  số nguyên từ tập  $\{1, 2, \dots, n\}$  sao cho 1 và 2 không đồng thời được chọn

### ■ Cách 1:

- Có  $C_n^k$  tập con  $k$  phần tử và không có hạn chế gì
- Có  $C_{n-2}^{k-2}$  tập con  $k$  phần tử có chứa đồng thời cả 1 và 2
  - Cố định 1 và 2, chọn  $k - 2$  phần tử còn lại từ tập  $\{3, \dots, n\}$
- Do đó đáp án là  $C_n^k - C_{n-2}^{k-2}$

### ■ Cách 2:

- Có  $C_{n-2}^{k-1}$  tập con  $k$  phần tử chứa 1 nhưng không chứa 2
  - Cố định 1, chọn  $k - 1$  phần tử còn lại từ tập  $\{3, \dots, n\}$
- Tương tự, có  $C_{n-2}^{k-1}$  tập con  $k$  phần tử chứa 2 nhưng không chứa 1
- Có  $C_{n-2}^k$  tập con  $k$  phần tử không chứa cả 1 và 2
  - Chọn  $k$  phần tử từ tập  $\{3, \dots, n\}$
- Do đó đáp án là  $2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k$

$$\text{Do đó, } C_n^k - C_{n-2}^{k-2} = 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k$$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

42

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Một số đẳng thức tổ hợp



## Định lý 4

Giả sử  $n > k \geq 1$ . Ta có  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

## Chứng minh.

- $C_n^k$  là số cách chọn  $k$  phần tử từ tập  $n$  phần tử  $\{1, 2, \dots, n\}$
- Để chọn  $k$  phần tử từ  $\{1, 2, \dots, n\}$ , ta cũng có thể:
  - Chọn 1, và chọn  $k - 1$  phần tử còn lại từ tập  $\{2, \dots, n\}$ : có  $C_{n-1}^{k-1}$  cách chọn
  - Không chọn 1, và chọn  $k$  phần tử từ tập  $\{2, \dots, n\}$ : có  $C_{n-1}^k$  cách chọn

Do đó, theo quy tắc cộng, có  $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$  tập con  $k$  phần tử của tập  $n$  phần tử

- Do đó,  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

43 Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Một số đẳng thức tổ hợp



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Bài tập 18

*Chứng minh Định lý 4 bằng công thức đã biết*

## Bài tập 19

*Sử dụng Định lý 4, chứng minh đẳng thức thu được từ Ví dụ 24 sau*

$$C_n^k - C_{n-2}^{k-2} = 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k$$

44

74

# Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

45

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

Bắt đầu với  $n = 0$ , hàng thứ  $n$  có  $n + 1$  phần tử:  $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$

$$C_0^0 = 1$$

$$C_1^0 = 1 \quad C_1^1 = 1$$

$$C_2^0 = 1 \quad C_2^1 = 2 \quad C_2^2 = 1$$

$$C_3^0 = 1 \quad C_3^1 = 3 \quad C_3^2 = 3 \quad C_3^3 = 1$$

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4 \quad C_4^4 = 1$$

**Hình:** Tam giác Pascal

Định lý 3 và 4 có thể được minh họa bằng tam giác Pascal

# Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal



Một tính chất khác của tam giác Pascal là

## Định lý 5

Với mọi  $n \geq 0$ , tổng các phần tử ở hàng thứ  $n$  là

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

**Chứng minh.**

- $C_n^k$  là số cách chọn tập con  $k$  phần tử từ một tập  $n$  phần tử
- Do đó,  $\sum_{k=0}^n C_n^k$  là số tập con của một tập  $n$  phần tử
- Như ta đã đề cập trong phần quy tắc nhân, số tập con của một tập  $n$  phần tử là  $2^n$

## Bài tập 20

Chứng minh Định lý 5 bằng phương pháp quy nạp. (**Gợi ý:** Sử dụng Định lý 4)

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

46

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác



# Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

## Định lý nhị thức



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

**Bài toán:** Khai triển  $(x + y)^n$

**Ví dụ 25**

$$(x + y)^0 = 1$$

$$(x + y)^1 = 1 \cdot x + 1 \cdot y$$

$$(x + y)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2$$

$$(x + y)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3$$

$$(x + y)^4 = 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3y + 6 \cdot x^2y^2 + 4 \cdot xy^3 + 1 \cdot y^4$$

**Nhận xét:** Các hệ số khi khai triển  $(x + y)^n$  ( $0 \leq n \leq 4$ ) giống với các hàng tương ứng trong tam giác Pascal

47

74

# Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

## Định lý nhị thức



### Định lý 6: Định lý nhị thức

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k$$

## Chứng minh.

- Để nhận được một số hạng  $x^{n-k}y^k$  trong khai triển của  $(x + y)^n = (x + y)(x + y) \dots (x + y)$ , ta cần chọn chính xác  $n - k$  số  $x$  và  $k$  số  $y$  từ  $n$  thừa số  $(x + y)$ . (Với mỗi thừa số, chọn chính xác một phần tử: hoặc  $x$  hoặc  $y$ )
  - Có  $C_n^{n-k}$  cách chọn chính xác  $n - k$  số  $x$
  - Ứng với mỗi cách chọn  $n - k$  số  $x$ , có chính xác 1 cách chọn  $k$  số  $y$  từ  $k$  thừa số  $(x + y)$  còn lại
- Do đó, hệ số của  $x^{n-k}y^k$  là  $C_n^{n-k} = C_n^k$

## Bài tập 21

Chứng minh Định lý 5 bằng cách sử dụng Định lý 6

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

48

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác



# Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

## Định lý nhị thức



### Ví dụ 26

Khai triển  $(x + 2)^4$

$$\begin{aligned}(x + 2)^4 &= C_4^0 \cdot x^4 + C_4^2 \cdot x^3 \cdot 2^1 + C_4^3 \cdot x^2 \cdot 2^2 + \\ &\quad + C_4^1 \cdot x^1 \cdot 2^3 + C_4^4 \cdot x^0 \cdot 2^4 \\ &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\end{aligned}$$

### Ví dụ 27

Tính  $(1.02)^7$  làm tròn đến chữ số thập phân thứ 4

$$\begin{aligned}(1 + 0.02)^7 &= C_7^0 \cdot 1^7 + C_7^1 \cdot 1^6 \cdot (0.02) + C_7^2 \cdot 1^5 \cdot (0.0004) \\ &\quad + C_7^3 \cdot 1^4 \cdot (0.000008) + \dots \\ &= 1 + 1.14 + 0.0084 + 0.00028 + \dots \\ &\approx 1.14868 \approx 1.1487\end{aligned}$$

**Chú ý:** Để làm tròn đến chữ số thập phân thứ 4, ta cần tính toán đến chữ số thập phân thứ 5

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

49

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

## Định lý nhị thức



## Bài tập 22

Chứng minh rằng với mọi  $n \geq 0$ ,  $\sum_{k=0}^n 2^k C_n^k = 3^n$

- (a) bằng cách áp dụng Định lý nhị thức (Định lý 6)
- (b) (★) bằng phương pháp đếm hai lần (**Gợi ý:** Có bao nhiêu cách xây dựng một chuỗi  $n$  ký tự chỉ sử dụng các ký tự  $A, B, C$  thỏa mãn điều kiện có chính xác  $n - k$  ký tự  $A$ ?)

## Bài tập 23

Tìm hệ số

- (a) của  $x^7$  trong khai triển của  $(1 + x)^{11}$
- (b) của  $x^9$  trong khai triển của  $(2 - x)^{19}$
- (c) (★) của  $x^k$  trong khai triển của  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{100}$ , trong đó  $k$  là một số nguyên

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

50

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát



## Định lý 7: Nguyên lý bù trừ tổng quát

Với các tập hữu hạn  $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\{I \mid I \subseteq \{1, \dots, n\} \wedge |I|=k\}} (-1)^{k-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right)$$

■  $n = 2$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

■  $n = 3$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

## Bài tập 24

Theo nguyên lý bù trừ tổng quát,  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = ?$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

51

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát



## Chứng minh.

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\{I \mid I \subseteq \{1, \dots, n\} \wedge |I|=k\}} (-1)^{k-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right)$$

- Cho  $a \in \bigcup_{k=1}^n A_k$  và giả thiết rằng  $a$  xuất hiện trong chính xác  $m$  tập  $A_{a_1}, A_{a_2}, \dots, A_{a_m}$ , với  $1 \leq a_1, a_2, \dots, a_m \leq n$
- $a$  được đếm một lần ở về trái
- Có bao nhiêu lần  $a$  được đếm ở về phải?
  - $a$  xuất hiện trong  $m$  tập  $A_{a_1}, A_{a_2}, \dots, A_{a_m}$
  - $a$  xuất hiện trong  $C_m^2$  tập  $A_{a_i} \cap A_{a_j}$  với  $1 \leq i < j \leq m$
  - $a$  xuất hiện trong  $C_m^3$  tập  $A_{a_i} \cap A_{a_j} \cap A_{a_k}$  với  $1 \leq i < j < k \leq m$
  - ...

Do đó, ở về phải,  $a$  được đếm  $\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k$  lần

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

52

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác



# Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát



## Chứng minh (tiếp).

- Để chứng minh vế trái bằng vế phải, ta cần chỉ ra  $a$  cũng được đếm một lần ở vế phải, nghĩa là

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k = 1$$

- Theo Định lý 6, ta có

$$\begin{aligned} 0 &= (-1 + 1)^m \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k (-1)^k 1^{m-k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^m (-1)^k C_m^k \end{aligned}$$

$$\text{Do đó, } \sum_{k=1}^m (-1)^k C_m^k = -1. \text{ Suy ra } \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k = 1$$

(Chia hai vế cho  $-1$ )

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

53

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

74

# Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát



## Bài tập 25

(a) Chứng minh rằng với mọi  $n > 0$ ,  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$

(b) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng với mọi  $m > 0$ ,  $\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k = 1$ . (**Gợi ý:**  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ )

## Bài tập 26

Chứng minh **đẳng thức Vandermonde (Vandermonde's Identity)** sau

$$C_{m+n}^r = \sum_{k=0}^r C_m^{r-k} C_n^k,$$

trong đó  $m, n, r$  là các số nguyên không âm và  $r \leq \min(m, n)$ .  
(**Gợi ý:** Có bao nhiêu cách chọn ra một ban đại diện gồm  $r$  thành viên từ một lớp học có  $m$  nam và  $n$  nữ?)

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

54

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

74





# Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

55 Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

- Một **chỉnh hợp lặp chập  $r$**  ( *$r$ -permutation with repetition*) của một tập  $S$  là một dãy sắp thứ tự  $r$  phần tử của  $S$  trong đó các phần tử có thể lặp lại
- Một **tổ hợp lặp chập  $r$  của một tập  $S$**  ( *$r$ -combination with repetition*) của một tập  $S$  là một dãy không sắp thứ tự  $r$  phần tử của  $S$  trong đó các phần tử có thể lặp lại

## Định lý 8

Số chỉnh hợp lặp chập  $r$  của một tập  $n$  phần tử là  $n^r$

## Chứng minh.

Có  $n$  lựa chọn cho vị trí thứ nhất,  $n$  lựa chọn cho vị trí thứ hai, ...,  $n$  lựa chọn cho vị trí thứ  $r$ . Do đó có  $n^r$  cách xây dựng một chỉnh hợp lặp chập  $r$  của một tập  $n$  phần tử □



# Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

## Định lý 9

Số tổ hợp lặp chập  $r$  của một tập  $n$  phần tử là  $C_{n+r-1}^{n-1}$

## Chứng minh.

- Mỗi tổ hợp lặp chập  $r$  từ tập  $n$  phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy  $n - 1$  thanh đứng và  $r$  ngôi sao
  - Ta dùng  $n - 1$  thanh đứng để phân cách các ngăn
  - Ngăn thứ  $i$  chứa thêm một ngôi sao mỗi lần khi phần tử thứ  $i$  của tập xuất hiện trong tổ hợp
  - Ví dụ, một tổ hợp lặp chập 6 của tập 4 phần tử được biểu diễn bởi

\*\* | \* || \* \* \*

là một tổ hợp chứa đúng hai phần tử thứ nhất, một phần tử thứ hai, không phần tử thứ ba, và ba phần tử thứ tư của tập 4 phần tử

- Mỗi dãy  $n - 1$  thanh đứng và  $r$  ngôi sao ứng với một chuỗi nhị phân độ dài  $n + r - 1$  có chính xác  $r$  số 1. Do đó, số các dãy thanh đứng và ngôi sao là  $C_{n+r-1}^r = C_{n+r-1}^{n-1}$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

56

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác



74



# Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

## Ví dụ 28

Có bao nhiêu cách để 6 quả bóng vào một túi, biết rằng mỗi quả bóng chỉ có thể có màu đỏ (R), xanh lá cây (G), hoặc xanh da trời (B)?

- 6 quả bóng ứng với 6 ngôi sao, và 2 thanh đứng phân cách thành ba ngăn ứng với các màu đỏ, xanh lá cây, xanh da trời
  - Lựa chọn [R, R, G, G, G, B] ứng với dãy \*\* | \* \* \* | \*
  - Lựa chọn [R, B, R, R, B, R] ứng với dãy \* \* \* \* || \*\*
- Số cách để 6 quả bóng vào túi là  $C_{3+6-1}^{3-1} = 28$

## Ví dụ 29

Phương trình  $x_1 + x_2 + x_3 = 11$  có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ , và  $x_3 \geq 0$ ?

- Mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách để 11 quả bóng vào 3 hộp gán nhãn  $x_1, x_2, x_3$
- Số nghiệm nguyên không âm của phương trình chính là tổ hợp lặp chập 11 của tập 3 phần tử:  $C_{3+11-1}^{3-1} = 78$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

57 Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

58

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Ví dụ 30

Phương trình  $x_1 + x_2 + x_3 = 11$  có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn  $x_1 \geq -2$ ,  $x_2 \geq 1$ , và  $x_3 \geq 0$ ?

- Ta *xây dựng một phương trình mới có dạng tổng của các số nguyên không âm* như ở ví dụ trước
  - Ta có  $x_1 + 2 \geq 0$  và  $x_2 - 1 \geq 0$
  - Đặt  $x'_1 = x_1 + 2 \geq 0$  và  $x'_2 = x_2 - 1 \geq 0$
  - Số nghiệm nguyên của phương trình  $x_1 + x_2 + x_3 = 11$  thỏa mãn  $x_1 \geq -2$ ,  $x_2 \geq 1$ , và  $x_3 \geq 0$  cũng là số nghiệm nguyên không âm của phương trình  $x'_1 + x'_2 + x_3 = 11 + 2 - 1 = 12$
- Số nghiệm thỏa mãn điều kiện là  $C_{3+12-1}^{3-1} = 91$

# Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng



## Ví dụ 31

Phương trình  $x_1 + x_2 + x_3 = 11$  có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn  $0 \leq x_1 \leq 2, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ ?

■ Ta đếm số nghiệm thỏa mãn

■  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

■  $x_1 \geq 3, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Số nghiệm thỏa mãn  $0 \leq x_1 \leq 2, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$  sẽ là hiệu của hai số trên

■ Có  $C_{3+11-1}^{11} = 78$  nghiệm nguyên thỏa mãn  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ . Có  $C_{3+8-1}^8 = 45$  nghiệm nguyên thỏa mãn  $x_1 \geq 3, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ . Do đó, kết quả là  $C_{3+11-1}^{11} - C_{3+8-1}^8 = 78 - 45 = 33$

## Bài tập 27

Đếm số nghiệm nguyên của  $x_1 + x_2 + x_3 = 11$  thỏa mãn  $0 \leq x_1 \leq 2, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$  một cách trực tiếp bằng cách xét từng trường hợp  $x_1 = 0, x_1 = 1, \text{ và } x_1 = 2$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

59

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

74

# Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng



## Định lý 10

Số hoán vị phân biệt của  $n$  phần tử trong đó có  $n_1$  phần tử giống nhau thuộc loại 1,  $n_2$  phần tử giống nhau thuộc loại 2, ..., và  $n_k$  phần tử giống nhau thuộc loại  $k$ , là  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

## Chứng minh.

- Nếu coi tất cả  $n$  phần tử đều khác nhau, có  $n!$  hoán vị
- Với mỗi hoán vị trong  $n!$  hoán vị này, có thể xây dựng một hoán vị giống nó bằng một chuỗi  $k$  bước:
  - Hoán vị  $n_1$  phần tử loại 1: có  $n_1!$  cách
  - Với mỗi cách hoán vị các phần tử loại 1, hoán vị  $n_2$  phần tử loại 2: có  $n_2!$  cách
  - ...
  - Với mỗi cách hoán vị các phần tử loại 1, ...,  $k - 1$ , hoán vị  $n_k$  phần tử loại  $k$ : có  $n_k!$  cách

Theo quy tắc nhân, mỗi hoán vị có  $n_1!n_2!\dots n_k!$  hoán vị giống nó trong số  $n!$  hoán vị

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

60

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

74

# Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

61 Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Ví dụ 32

Có bao nhiêu chuỗi ký tự thu được bằng cách sắp xếp lại thứ tự các chữ cái trong chuỗi **SUCCESS**?

- Số chuỗi ký tự chính là số hoán vị phân biệt của 7 ký tự, trong đó có 3 ký tự **S**, 2 ký tự **C**, 1 ký tự **U**, và 1 ký tự **E**

- Do đó kết quả là  $\frac{7!}{3!2!1!1!} = 420$

# Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng



## Ví dụ 33

Có bao nhiêu cách chia 5 quân bài cho mỗi người trong số 4 người chơi từ một bộ bài 52 quân thông thường?

- Mỗi cách chia bài ứng với một chuỗi các bước
  - Chia 5 quân từ 52 quân bài cho người chơi thứ nhất: có  $C_{52}^5$  cách
  - Với mỗi bộ 5 quân mà người chơi thứ nhất có, chia tiếp 5 quân từ 47 quân còn lại cho người chơi thứ hai: có  $C_{47}^5$  cách
  - Với mỗi các bộ 5 quân mà hai người chơi đầu tiên có, chia tiếp 5 quân từ 42 quân còn lại cho người chơi thứ ba: có  $C_{42}^5$  cách
  - Với mỗi các bộ 5 quân mà ba người chơi đầu tiên có, chia tiếp 5 quân từ 37 quân còn lại cho người chơi thứ tư: có  $C_{37}^5$  cách
- Theo quy tắc nhân, có tất cả  $C_{52}^5 C_{47}^5 C_{42}^5 C_{37}^5 = \frac{52!}{5!5!5!32!}$  cách chia bài

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

62

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác





# Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

## Định lý 11

Số cách chia  $n$  vật khác nhau vào trong  $k$  hộp sao cho có  $n_i$  đồ vật được đặt vào hộp thứ  $i$ , với  $i = 1, 2, \dots, k$  là

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Với các số nguyên  $n, n_1, n_2, \dots, n_k \geq 0$  thỏa mãn  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ , ta định nghĩa

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

## Định lý 12: Định lý đa thức

Với mọi  $n \geq 0$  và  $k \geq 1$

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{0 \leq n_1, \dots, n_k \leq n \\ n_1 + \dots + n_k = n}} C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

63 Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

# Hàm sinh



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh  
Quy tắc nhân và Quy tắc cộng  
Nguyên lý bù trừ  
Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu  
Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal  
Định lý nhị thức  
Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

64 Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Hàm sinh

**Hàm sinh (generating function)**  $G_a(x)$  của một dãy vô hạn  $\{a_n\}$  ( $n \geq 0$ ) được định nghĩa bởi  $G_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Nói cách khác,  $a_n$  là hệ số của  $x^n$  trong  $G_a(x)$

## Đếm bằng cách sử dụng hàm sinh

Các bài toán liên quan đến việc **đếm số cách chọn các phần tử trong một tập hợp** có thể được giải bằng cách sử dụng hàm sinh thông qua các lý luận để **đồng nhất số cách chọn  $n$  phần tử với hệ số của  $x^n$  trong hàm sinh**



## Ví dụ 34 (Định lý nhị thức)

- Hàm sinh của dãy  $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n, 0, 0, \dots$  là

$$G(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = (1+x)^n$$

- *Hệ số của  $x^k$  trong  $G(x)$  là số cách chọn ra  $k$  số  $x$  và  $n-k$  số 1 từ  $n$  thừa số của tích*

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x) \dots (1+x),$$

*trong đó với mỗi thừa số ta chọn chính xác một phần tử: hoặc 1 hoặc  $x$*

- Có  $C_n^k$  cách chọn  $k$  số  $x$
- Ứng với mỗi cách chọn  $k$  số  $x$ , có chính xác 1 cách chọn  $n-k$  số 1 từ  $n-k$  thừa số  $(1+x)$  còn lại

# Hàm sinh



## Ví dụ 35

Phương trình  $x_1 + x_2 + x_3 = 11$  có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ , và  $x_3 \geq 0$ ?

- Ta muốn xây dựng một hàm sinh  $G(x)$  cho phương trình sao cho **hệ số của  $x^{11}$  trong  $G(x)$  là số nghiệm thỏa mãn phương trình**
- Một phương án là  $G(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{11})^3$ 
  - Để có  $x^{11}$ , ta cần chọn lần lượt  $x^{x_1}$ ,  $x^{x_2}$ , và  $x^{x_3}$  từ ba thừa số  $(1 + x + \dots + x^{11})$  của  $G(x)$  (từ mỗi thừa số, chọn chính xác một số hạng trong tổng  $1 + x + \dots + x^{11}$ ) thỏa mãn  $x_1 + x_2 + x_3 = 11$
  - Số cách chọn thỏa mãn điều kiện trên chính là hệ số của  $x^{11}$  và cũng là số nghiệm nguyên không âm của  $x_1 + x_2 + x_3 = 11$
- Ta có

$$\begin{aligned} G(x) &= (1 + x + \dots + x^{11})^3 \\ &= \left( \frac{1 - x^{12}}{1 - x} \right)^3 \\ &= (1 - x^{12})^3 (1 - x)^{-3} \end{aligned}$$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

66 Hàm sinh

Một số ví dụ khác



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

67

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

74

Để tìm hệ số của  $x^{11}$  trong Ví dụ 35, ta cần một số định nghĩa và định lý sau

## Hệ số nhị thức mở rộng

Với  $n \in \mathbb{R}$  bất kỳ và  $r \geq 0$ , *hệ số nhị thức tổng quát (generalized binomial coefficient)*  $C_n^r$  được định nghĩa như sau

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}$$

## Ví dụ 36

$$C_{-2}^5 = \frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)}{5!} = -6$$



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh  
Quy tắc nhân và Quy tắc cộng  
Nguyên lý bù trừ  
Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu  
Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal  
Định lý nhị thức  
Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

68 Hàm sinh

Một số ví dụ khác

## Mệnh đề 13

Nếu  $n$  là một số nguyên dương thì

$$C_{-n}^r = (-1)^r C_{n+r-1}^r$$

## Định lý 14: Định lý nhị thức tổng quát

Với mọi  $n \in \mathbb{R}$ ,

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} C_n^r x^r$$

# Hàm sinh



## Ví dụ 37

Tìm hệ số của  $x^{11}$  trong khai triển của  $(1 - x)^{-3}$

- Hệ số của  $x^r$  trong khai triển của  $(1 - x)^{-3}$  là

$$(-1)^r C_{-3}^r = (-1)^r [(-1)^r \cdot C_{3+r-1}^r] = \frac{(r+2)(r+1)}{2}$$

- Suy ra, hệ số của  $x^{11}$  trong khai triển của  $(1 - x)^{-3}$  là  $(11+2)(11+1)/2 = 78$

## Ví dụ 38 (Tiếp tục Ví dụ 35)

Tìm hệ số của  $x^{11}$  trong khai triển của

$$G(x) = (1 - x^{12})^3 (1 - x)^{-3}$$

- Ta có  $(1 - x^{12})^3 = 1 - 3x^{12} + 3x^{24} - x^{36}$
- Cách duy nhất để thu được  $x^{11}$  là lấy  $x^0$  trong khai triển của  $(1 - x^{12})^3$  nhân với  $x^{11}$  trong khai triển của  $(1 - x)^{-3}$
- Do đó, hệ số của  $x^{11}$  trong khai triển của  $G(x)$  là hệ số của  $x^{11}$  trong khai triển của  $(1 - x)^{-3}$ , và bằng 78 (Ví dụ 37)

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

69 Hàm sinh

Một số ví dụ khác

74

# Hàm sinh



## Ví dụ 39

Phương trình  $x_1 + x_2 + x_3 = 6$  có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn  $-1 \leq x_1 \leq 2$  và  $1 \leq x_2, x_3 \leq 4$

- Ta định nghĩa

$$G(x) = (x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^2$$

- Số nghiệm nguyên của phương trình thỏa mãn điều kiện đề ra là hệ số của  $x^6$  trong khai triển của  $G(x)$
- Ta có

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^2 \\ &= \frac{1}{x^2}(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^3 \\ &= \frac{x^3}{x^2}(1 + x + x^2 + x^3)^3 \\ &= x(1 + x + x^2 + x^3)^3 \end{aligned}$$

## Bài tập 28

Hoàn thành Ví dụ 39 bằng cách tìm hệ số của  $x^5$  trong khai triển của  $(1 + x + x^2 + x^3)^3$

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

70

Hàm sinh

Một số ví dụ khác

74



# Hàm sinh



## Bài tập 29

*Tìm hệ số*

(a) của  $x^4$  trong khai triển của  $(1 - x)^{-2}$

(b) của  $x^n$  trong khai triển của  $(1 + x)^{-4}$

(c) của  $x^n$  trong khai triển của  $\frac{1 + x}{(1 - 2x)^5}$

**(Gợi ý:**  $(1 + x)/((1 - 2x)^5) = (1 - 2x)^{-5} + x(1 - 2x)^{-5}$ .

*Tìm hệ số của  $x^n$  trong khai triển của từng số hạng và cộng các kết quả tìm được)*

## Bài tập 30

*Sử dụng hàm sinh để đếm số nghiệm nguyên của*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \text{ thỏa mãn } 0 \leq x_1 \leq 2, x_2 \geq 0, \text{ và } x_3 \geq 0$$

## Bài tập 31

*Sử dụng hàm sinh để đếm số nghiệm nguyên của*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \text{ thỏa mãn } x_1 \geq -2, x_2 \geq 1, \text{ và } x_3 \geq 0. \text{ (Gợi ý:}$$

*Chú ý rằng  $-2 \leq x_1 \leq 11, 1 \leq x_2 \leq 13, \text{ và } 0 \leq x_3 \leq 12$ )*

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chính hợp và tổ hợp suy rộng

71 Hàm sinh

Một số ví dụ khác

74

# Một số ví dụ khác



## Ví dụ 40

Có bao nhiêu cách phân phối 4 nhân viên khác nhau  $A, B, C, D$  vào 3 văn phòng hoàn toàn giống hệt nhau? (Chú ý là xếp  $A, B$  vào phòng thứ nhất và  $C, D$  vào phòng thứ hai hoàn toàn giống với việc xếp  $A, B$  vào phòng thứ hai và  $C, D$  vào phòng thứ ba. *Điều quan trọng là  $A, B$  cùng phòng và  $C, D$  cùng phòng.*) Giả sử rằng mỗi văn phòng có thể chứa được bất kỳ một số lượng nhân viên nào

- Cả 4 người chung một văn phòng: có  $C_4^4 = 1$  cách
  - Xếp 4 người vào bất kỳ phòng nào đều được
- ba + một: có  $C_4^3 = 4$  cách
  - Chọn 3 người xếp vào một phòng, người còn lại tự động xếp vào một trong hai phòng còn lại, phòng nào đều được
- hai + hai: có  $C_4^2/2 = 3$  cách
  - Chọn 2 người để xếp vào một phòng, hai người còn lại tự động vào một trong hai phòng còn lại. Mỗi cách chọn này có một cách tương đương với nó, ví dụ như chọn  $A, B$  xếp vào một phòng tương đương với chọn  $C, D$  xếp vào một phòng, vì đều cho kết quả là  $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}$
- hai + một + một: có  $C_4^2$  cách
  - Chọn 2 người để xếp vào một phòng, hai người còn lại tự động xếp vào hai phòng còn lại

## Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

## Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh  
Quy tắc nhân và Quy tắc cộng  
Nguyên lý bù trừ  
Quy tắc chia

## Nguyên lý chuồng bồ câu

## Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu  
Một số đẳng thức tổ hợp

## Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal  
Định lý nhị thức  
Nguyên lý bù trừ tổng quát

## Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

## Hàm sinh

72 Một số ví dụ khác

# Một số ví dụ khác



Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh  
Quy tắc nhân và Quy tắc cộng  
Nguyên lý bù trừ  
Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu  
Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal  
Định lý nhị thức  
Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

73 Một số ví dụ khác

## Ví dụ 41

Có bao nhiêu cách để đặt 6 quyển sách hoàn toàn giống nhau vào 4 hộp hoàn toàn giống nhau, trong đó mỗi hộp có thể chứa nhiều nhất 6 quyển sách?

- Ta liệt kê các cách sắp xếp bằng cách liệt kê số sách lớn nhất trong một hộp, theo sau bởi các số sách nhỏ hơn trong các hộp có chứa ít nhất một quyển sách khác, theo thứ tự giảm dần của số sách. Ví dụ, 4, 1, 1 mô tả cách xếp sách vào 3 hộp, một hộp có 4 quyển, hai hộp khác mỗi hộp có 1 quyển

- Các cách sắp xếp là:

- 6
- 5, 1
- 4, 2    4, 1, 1
- 3, 3    3, 2, 1    3, 1, 1, 1
- 2, 2, 2    2, 2, 1, 1

# Một số ví dụ khác

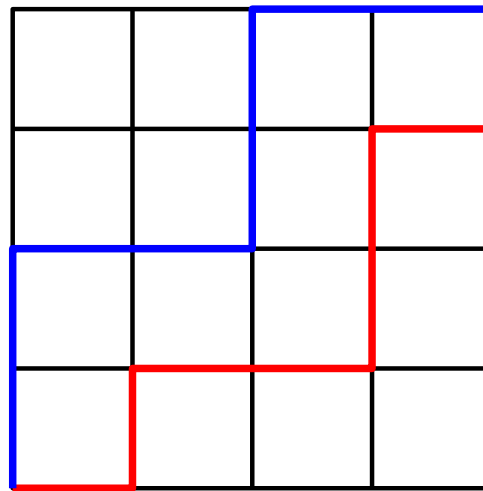


## Bài tập 32 (★)

Alice và Bob chơi trò chơi sau: Bob chọn 10 số nguyên bất kỳ trong khoảng từ 1 đến 40. Alice cần tìm hai tập số nguyên khác nhau trong các số mà Bob chọn, mỗi tập có 3 phần tử, sao cho tổng các số nguyên trong hai tập là bằng nhau. Hãy chứng minh rằng Alice luôn luôn thắng. (**Gợi ý:** Áp dụng nguyên lý chuồng bồ câu)

## Bài tập 33

Có bao nhiêu cách đi từ góc dưới cùng bên trái đến góc trên cùng bên phải của một lưới kích thước  $n \times n$ ? Giả sử rằng trong mỗi bước từ một đỉnh sang đỉnh khác của lưới, bạn chỉ có thể đi sang phải một bước hoặc đi lên trên một bước



Hình: Một lưới  $4 \times 4$  và ví dụ một số đường đi

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc song ánh

Quy tắc nhân và Quy tắc cộng

Nguyên lý bù trừ

Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức

Tam giác Pascal

Định lý nhị thức

Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Hàm sinh

74

Một số ví dụ khác

74