COPYRIGHT NOTICE
THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-03-23

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-03-23

Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
(Đề gồm 4 câu/4 trang)

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ
Môn: Toán rời rạc (MAT3500 2, 2023-2024)
Thời gian: 50 phút

- Điền các thông tin về Họ Tên, Mã Sinh Viên, Lớp trước khi bắt đầu làm bài.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.
- Điểm bài kiểm tra này chiếm 20% tổng số điểm của môn học. Tổng điểm nhỏ hơn hoặc bằng 10 thì giữ nguyên, còn ngược lại thì tính là 10 điểm.

Họ và Tên: ______________________________

Mã Sinh Viên: ____________________ Lớp: ____________________

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	3	3	3	3	12
Điểm:					

1. Gọi F là tập hợp tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với tập xác định và tập giá trị là tập các số thực. (Ví dụ, hàm *plusOne* định nghĩa bởi $plusOne(x) = x + 1$ là một hàm $plusOne : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, và do đó $plusOne \in F$.) Các mệnh đề sau là đúng hay sai? Hãy giải thích đáp án của bạn.
   (a) (1 điểm) $\forall c \in \mathbb{R}\ \big[\exists f \in F\ (f(0) = c)\big]$.
   (b) (1 điểm) $\exists f \in F\ \big[\forall c \in \mathbb{R}\ (f(0) = c)\big]$.
   (c) (1 điểm) $\exists f \in F\ \big[\forall c \in \mathbb{R}\ (f(c) = 0)\big]$.

Lời giải:

(a) Mệnh đề $\forall c \in \mathbb{R}\ \big[\exists f \in F\ (f(0) = c)\big]$ là đúng. Lý do là với mỗi $c \in \mathbb{R}$, ta có thể chọn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm định nghĩa bởi $f(x) = x + c$, và ta luôn có $f(0) = c$.

(b) Mệnh đề $\exists f \in F\ \big[\forall c \in \mathbb{R}\ (f(0) = c)\big]$ là sai. Lý do là nếu tồn tại một hàm $f \in F$ thỏa mãn mệnh đề thì với các giá trị $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ bất kỳ thỏa mãn $c_1 \neq c_2$, ta cũng có $f(0) = c_1$ và $f(0) = c_2$. Do f là một hàm, ta cần có $c_1 = c_2$, đây là một mâu thuẫn.

(c) Mệnh đề $\exists f \in F\ \big[\forall c \in \mathbb{R}\ (f(c) = 0)\big]$ là đúng. Lý do là ta có thể chọn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm định nghĩa bởi $f(x) = 0$, và ta luôn có $f(c) = 0$ với mọi $c \in \mathbb{R}$.

2. (3 điểm) Sử dụng phương pháp quy nạp, hãy chứng minh $10^n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \geq 0$.

Lời giải: Gọi $P(n)$ là vị từ "$10^n - 1$ chia hết cho 9". Ta chứng minh $\forall n \geq 0\ P(n)$.

- **Bước cơ sở:** Với $n = 0$, ta có $10^0 - 1 = 0$ chia hết cho 9. Do đó $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó, nghĩa là, $10^k - 1$ chia hết cho 9. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $10^{k+1} - 1$ cũng chia hết cho 9. Thật vậy, ta có $10^{k+1} - 1 = 10(10^k - 1) + 9$. Theo giả thiết quy nạp, $10^k - 1$ chia hết cho 9, nghĩa là tồn tại $\ell \in \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện $10^k - 1 = 9\ell$. Do đó, $10^{k+1} - 1 = 10(10^k - 1) + 9 = 10 \cdot (9\ell) + 9 = 9(10\ell + 1)$. Do $10\ell + 1 \in \mathbb{N}$, ta có $10^{k+1} - 1$ chia hết cho 9, hay $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $\forall n \geq 0\ P(n)$.

3. Cho S là tập các số nguyên dương được định nghĩa theo đệ quy như sau:

   - **Bước cơ sở:** $5 \in S$.
   - **Bước đệ quy:** Nếu $n \in S$ thì $3n \in S$ và $n^2 \in S$.

   (a) (2 điểm) Chứng minh rằng với mọi $n \in S$, $n = 10a + 5$ với a là số nguyên không âm nào đó.

   (b) (1 điểm) Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương m thỏa mãn điều kiện $m \notin S$ và $m = 10a + 5$ với a là số nguyên không âm nào đó

Lời giải:

(a) Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấu trúc.

- **Bước cơ sở:** Do $n = 5 \in S$ được định nghĩa ở bước cơ sở của định nghĩa của S, ta cần chỉ ra phát biểu đúng với $n = 5$. Thật vậy, ta có $5 = 10 \cdot 0 + 5$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử phát biểu đúng với số nguyên $n \in S$ nào đó, nghĩa là, $n = 10a + 5$ với a là số nguyên không âm nào đó. Ta chứng minh phát biểu đúng với $3n \in S$ và $n^2 \in S$, nghĩa là chứng minh tồn tại các số nguyên không âm c và d thỏa mãn $3n = 10c + 5$ và $n^2 = 10d + 5$. Ta có $3n = 3(10a + 5) = 10(3a + 1) + 5$ và $n^2 = (10a+5)^2 = 10(10a^2+10a+2)+5$. Do đó, ta chọn $c = 3a+1$ và $d = 10a^2+10a+2$.

(b) Theo định nghĩa, chú ý rằng mọi số nguyên $n \in S$ thỏa mãn $n \geq 5$. Lấy $m = 35 = 10 \cdot 3 + 5$. Ta chứng minh $35 \notin S$ bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $35 \in S$. Do đó, tồn tại số nguyên $n \in S$ thỏa mãn $3n = 35$ hoặc $n^2 = 35$. Đây là một mâu thuẫn vì không tồn tại số nguyên dương nào thỏa mãn ít nhất một trong hai điều kiện trên. Do đó, $35 \notin S$.

4. (3 điểm) *Dãy Lucas* $\{\ell_n\}$ là một dãy được định nghĩa đệ quy như sau: $\ell_0 = 2$, $\ell_1 = 1$, và $\ell_n = \ell_{n-1} + \ell_{n-2}$ với $n \geq 2$. Tương tự, *dãy Fibonacci* f_n được cho bởi: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ với $n \geq 2$. Chứng minh rằng $f_n + f_{n+2} = \ell_{n+1}$ với mọi số nguyên dương n.

Lời giải: Ta sử dụng phương pháp quy nạp mạnh để chứng minh vị từ $P(n)$ sau:

$$f_n + f_{n+2} = \ell_{n+1}$$

đúng với mọi $n \geq 1$.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ và $P(2)$ đúng. Thật vậy, với $n = 1$, $f_1 + f_3 = 1 + 2 = 3$ và $\ell_2 = \ell_1 + \ell_0 = 1 + 2 = 3$. Do đó, $f_1 + f_3 = \ell_2$, nghĩa là $P(1)$ đúng. Với $n = 2$, $f_2 + f_4 = 1 + 3 = 4$ và $\ell_3 = \ell_2 + \ell_1 = 3 + 1 = 4$. Do đó, $f_2 + f_4 = \ell_3$, nghĩa là $P(2)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 2$ nào đó và với mọi i thỏa mãn $1 \leq i \leq k$, $P(i)$ đúng, nghĩa là $f_i + f_{i+2} = \ell_{i+1}$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $f_{k+1} + f_{k+3} = \ell_{k+2}$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
f_{k+1} + f_{k+3} &= (f_k + f_{k-1}) + (f_{k+2} + f_{k+1}) && \text{Định nghĩa dãy Fibonacci} \\
&= (f_k + f_{k+2}) + (f_{k-1} + f_{k+1}) \\
&= \ell_{k+1} + \ell_k && \text{Giả thiết quy nạp} \\
&= \ell_{k+2} && \text{Định nghĩa dãy Lucas}
\end{aligned}$$