# COPYRIGHT NOTICE
## THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

# VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

## Lý thuyết đồ thị I

### Giới thiệu, Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu, Tính liên thông

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

# Nội dung

## Giới thiệu

- Định nghĩa đồ thị và một số ví dụ
- Định nghĩa và khái niệm
- Đồ thị mới từ đồ thị cũ
- Một số đơn đồ thị đặc biệt
- Đồ thị hai phần

## Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu

- Danh sách kề
- Ma trận kề
- Ma trận liên thuộc
- Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

## Tính liên thông trong đồ thị

- Đường đi
- Liên thông trong đồ thị vô hướng
- Liên thông trong đồ thị có hướng
- Đường đi và sự đẳng cấu
- Đếm số đường đi giữa các đỉnh

- Một *đồ thị (graph)* $G$ bao gồm một tập các *đỉnh (vertex)* hoặc *nút (node)* $V$ và một tập cách *cạnh* $E$ nối các (cặp) đỉnh với nhau
- $G$ được gọi là *đồ thị hữu hạn (finite graph)* nếu $V$ là tập hữu hạn và là *đồ thị vô hạn (infinite graph)* nếu $V$ là tập vô hạn. Chúng ta chỉ đề cập đến các đồ thị hữu hạn
- Có thể phân loại đồ thị dựa trên các loại cạnh
- Tồn tại nhiều thuật ngữ khác nhau và thường không thống nhất

- Với một tập $V$, gọi $[V]^k$ là *tập hợp tất cả các tập con $k$ phần tử của $V$*. (Nói cách khác, $[V]^k$ là tập hợp tất cả các tổ hợp chập $k$ của $V$)

**Đồ thị vô hướng**

Một *đơn đồ thị vô hướng (simple, undirected graph)* $G = (V, E)$ bao gồm một tập khác rỗng $V$ gồm các *đỉnh (vertex)* (hoặc *nút (node)*), và một tập $E \subseteq [V]^2$ gồm cách *cạnh vô hướng (undirected edge)*.
Mỗi cạnh $e = uv \in E$ (hoặc $e = \{u, v\} \in E$) có hai đỉnh phân biệt $u \neq v$ là các *đầu mút (endpoint)* của $e$. Ta nói các đỉnh $u, v$ là *liền kề (adjacent)* trong đồ thị $G$, và cạnh $e$ gọi là cạnh *liên thuộc (incident)* với các đỉnh $u, v$

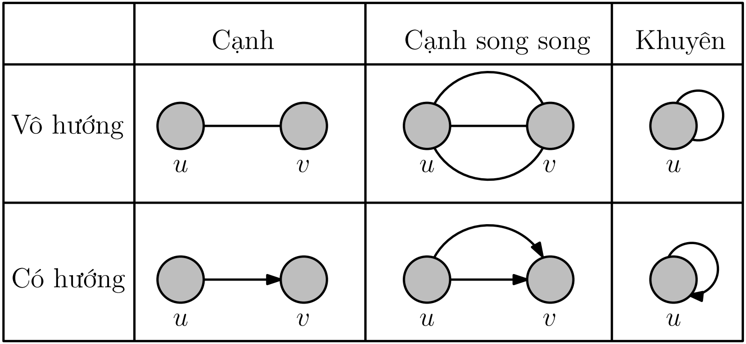
# Giới thiệu

## Định nghĩa đồ thị và một số ví dụ

### Đồ thị có hướng

Một *đồ thị có hướng (directed graph hoặc digraph)* $G = (V, E)$ bao gồm một tập khác rỗng $V$ gồm các *đỉnh (vertex)* (hoặc *nút (node)*) và một tập $E \subseteq V \times V$ gồm các *cạnh có hướng (directed edge)* (hoặc *cung (arc)*). Mỗi cạnh có hướng $(u, v) \in E$ có một *đỉnh đầu* (*start vertex* hoặc *tail vertex*) $u$ và *một đỉnh cuối* (*end vertex* hoặc *head vertex*) $v$

- Một đồ thị có hướng $G = (V, E)$ đơn giản là một tập hợp $V$ cùng với một *quan hệ nhị phân (binary relation)* $E$ trên $V$




Hình: Phân loại cạnh trong đồ thị

# Giới thiệu

## Định nghĩa đồ thị và một số ví dụ

| | Loại | Cạnh | Có cạnh song song? | Có khuyên? |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Đơn đồ thị vô hướng | Vô hướng | Không | Không |
| 2 | Đa đồ thị vô hướng | Vô hướng | Có | Không |
| 3 | Đa đồ thị vô hướng có khuyên | Vô hướng | Có | Có |
| 4 | Đồ thị có hướng | Có hướng | Không | Có |
| 5 | Đơn đồ thị có hướng | Có hướng | Không | Không |
| 6 | Đa đồ thị có hướng | Có hướng | Có | *Không*[1] |
| 7 | Đa đồ thị có hướng và có khuyên | Có hướng | Có | Có |
| 8 | Đồ thị hỗn hợp | Cả hai | Có | Có |

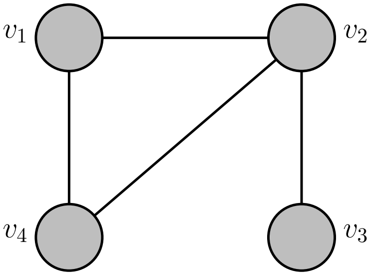
- Định nghĩa đa đồ thị có hướng khác với định nghĩa trong sách của Rosen
- Các đồ thị sẽ được đề cập trong bài giảng
  - đơn đồ thị vô hướng ((simple, undirected) graph)
  - đồ thị có hướng (directed graph hoặc digraph)

[1] Khác với sách của Rosen

## Ví dụ 1 (Đơn đồ thị vô hướng (simple undirected graph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$$

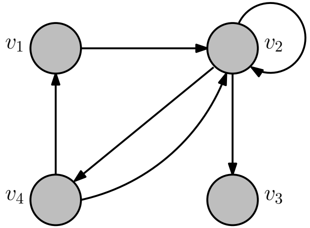



Hình: Chỉ có các cạnh *vô hướng*; có *nhiều nhất một cạnh* nối hai đỉnh phân biệt bất kỳ; và không có *khuyên (loop)*

## Ví dụ 2 (Đồ thị có hướng (và có khuyên) (directed graph (with loops)))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

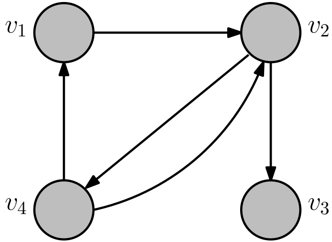
$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$




Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có *nhiều nhất một cạnh có hướng* nối từ một đỉnh bất kỳ sang một đỉnh khác bất kỳ; và *có khuyên*

## Ví dụ 3 (Đơn đồ thị có hướng (simple directed graph))

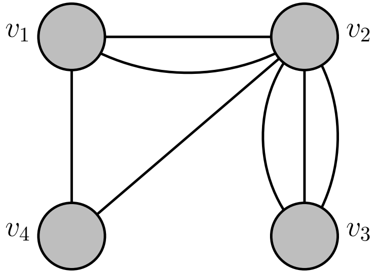
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$




Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có *nhiều nhất một cạnh có hướng* nối từ một đỉnh bất kỳ sang một đỉnh khác bất kỳ; và *không có khuyên*

## Ví dụ 4 (Đa đồ thị vô hướng (undirected multigraph))

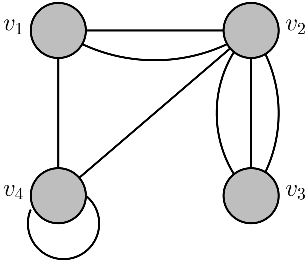
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$$
$$m(v_1v_2) = 2,\ m(v_2v_3) = 3$$
$$m(v_1v_4) = m(v_2v_4) = 1$$




Hình: Chỉ có các cạnh *vô hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *không có khuyên*

## Ví dụ 5 (Đa đồ thị vô hướng có khuyên (undirected pseudograph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_4\}$$
$$m(v_1v_2) = 2,\ m(v_2v_3) = 3$$
$$m(v_1v_4) = m(v_2v_4) = m(v_4, v_4) = 1$$

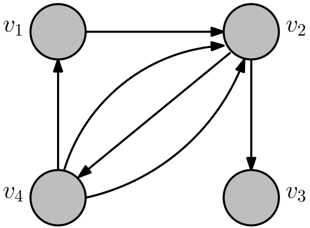



Hình: Chỉ có các cạnh *vô hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *có khuyên* (có thể có nhiều khuyên tại một đỉnh)

## Ví dụ 6 (Đa đồ thị có hướng (directed multigraph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$
$$m(v_1, v_2) = m(v_2, v_3) = m(v_2, v_4) = m(v_4, v_1) = 1$$
$$m(v_4, v_2) = 2$$




Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *không có khuyên* (khác với định nghĩa trong sách của Rosen)

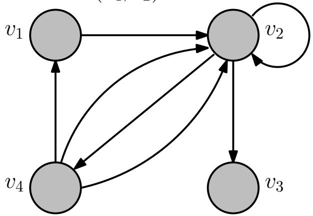
## Ví dụ 7 (Đa đồ thị có hướng và có khuyên (directed pseudograph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$

$$m(v_1, v_2) = m(v_2, v_2) = m(v_2, v_3) = m(v_2, v_4) = m(v_4, v_1) = 1$$

$$m(v_4, v_2) = 2$$



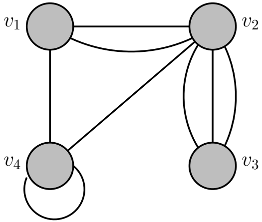

Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *có khuyên* (có thể có nhiều khuyên tại một đỉnh)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng

- Tập hợp các đỉnh kề với đỉnh $v$ của $G$, ký hiệu $N(v)$ hay $N_G(v)$, được gọi là *tập láng giềng (neighborhood)* của $v$.
- Với một tập các đỉnh $A \subseteq V$, ta ký hiệu $N(A)$ hoặc $N_G(A)$ để chỉ tập các đỉnh liền kề với ít nhất một đỉnh trong $A$. Nói cách khác, $N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$
- *Bậc (degree)* của một đỉnh $v$, ký hiệu $\deg(v)$, là số cạnh của $G$ liên thuộc với đỉnh đó. Một khuyên tại đỉnh $v$ (một cạnh nối $v$ với chính nó) đóng góp $2$ vào bậc của $v$

## Ví dụ 8

- $N(v_1) = \{v_2, v_4\}$,
  $N(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}$,
  $N(v_3) = \{v_2\}$,
  $N(v_4) = \{v_1, v_2, v_4\}$
- $\deg(v_1) = \deg(v_3) = 3$,
  $\deg(v_2) = 6$, $\deg(v_4) = 4$



- Một đỉnh bậc $0$ được gọi là một *đỉnh cô lập (isolated vertex)*
- Một đỉnh bậc $1$ được gọi là một *đỉnh treo (pendant vertex)*

**Định lý 1: Định lý bắt tay (Handshaking Lemma)**

*Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có $m$ cạnh. Ta có*

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

### Chứng minh.

- Với mỗi cạnh $e = uv \in E$, $e$ được đếm chính xác hai lần trong $\sum_{v \in V} \deg(v)$: một lần trong $\deg(u)$ và một lần trong $\deg(v)$
- Do đó, cả hai vế của đẳng thức trên đều bằng hai lần số cạnh của $G$

$\square$

**Định lý 2**

*Một đồ thị vô hướng có một số chẵn các đỉnh có bậc lẻ*

## Chứng minh.

- Gọi $V_1$ là tập các đỉnh bậc chẵn và $V_2$ là tập các đỉnh bậc lẻ trong đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có $m$ cạnh
- Ta có

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

  - $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ là một số chẵn, vì $V_1$ là tập tất cả các đỉnh có bậc chẵn
  - Do đó, $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ là một số chẵn, do $2m$ và $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ đều là số chẵn
  - Do $V_2$ là tập các đỉnh bậc lẻ, để $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ chẵn, cần phải có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ

## Ví dụ 9

Có bao nhiêu cạnh trong một đồ thị vô hướng có $10$ đỉnh, mỗi đỉnh có bậc $6$?

- Tổng bậc của các đỉnh trong đồ thị là $6 \cdot 10 = 60$
- Theo Định lý bắt tay, nếu $m$ là số cạnh của đồ thị thì $2m = 60$, và do đó $m = 30$

## Ví dụ 10

Nếu một đồ thị vô hướng có $5$ đỉnh thì liệu mỗi đỉnh có thể có bậc $3$ hay không?

- Không. Vì nếu mỗi đỉnh có bậc $3$ thì tổng bậc của các đỉnh là $3 \cdot 5 = 15$. Điều này mâu thuẫn với Định lý bắt tay: tổng bậc của các đỉnh phải là một số chẵn

## Bài tập 1

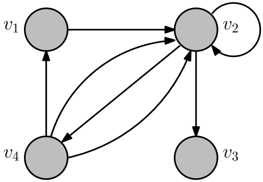
*Cho $G$ là một đồ thị vô hướng có $n$ đỉnh và $m$ cạnh. Gọi $\Delta(G)$ và $\delta(G)$ lần lượt là bậc lớn nhất và nhỏ nhất của một đỉnh của $G$. Chứng minh rằng $\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$.*

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng

- *Bậc vào (in-degree)* của một đỉnh $v$, ký hiệu $\deg^-(v)$ là số các cạnh có đỉnh cuối (tail vertex) là $v$
- *Bậc ra (out-degree)* của một đỉnh $v$, ký hiệu $\deg^+(v)$ là số các cạnh có đỉnh đầu (head vertex) là $v$
- Một khuyên ở đỉnh $v$ đóng góp $1$ vào bậc vào và $1$ vào bậc ra của $v$

## Ví dụ 11

- $\deg^-(v_1) = \deg^-(v_3) = \deg^-(v_4) = 1$, $\deg^-(v_2) = 4$
- $\deg^+(v_1) = 1$, $\deg^+(v_2) = \deg^+(v_4) = 3$, $\deg^+(v_3) = 0$



**Định lý 3**

*Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Ta có*

$$|E| = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v)$$

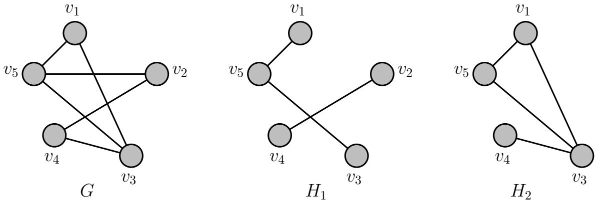
### Chứng minh.

- Mỗi cạnh có hướng $e = (u, v) \in E$ đóng góp $1$ vào $\deg^-(v)$ và $1$ vào $\deg^+(u)$, với $u, v \in V$
- Do đó, $|E|$ = tổng các bậc vào = tổng các bậc ra

$\square$

Cho đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$

- Một *đồ thị con (subgraph)* của $G$ là một đồ thị $H = (W, F)$ trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$
- $H = (W, F)$ là một *đồ thị con thực sự (proper subgraph)* của $G = (V, E)$ nếu $H$ là đồ thị con của $G$ và $H \neq G$
- $H = (W, F)$ là một *đồ thị con cảm sinh (induced subgraph)* của $G = (V, E)$ nếu $H$ là đồ thị con của $G$ và với mọi cặp đỉnh $u, v \in W$, $uv \in F$ khi và chỉ khi $uv \in E$. Ta cũng nói *$H$ là đồ thị con của $G$ cảm sinh bởi $W$* và viết $H = G[W]$



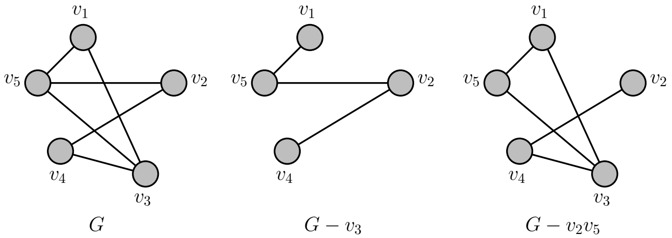

Hình: $H_1$ là đồ thị con thực sự của $G$ nhưng không phải đồ thị con cảm sinh. $H_2$ là đồ thị con cảm sinh của $G$


Lý thuyết đồ thị I

Hoàng Anh Đức

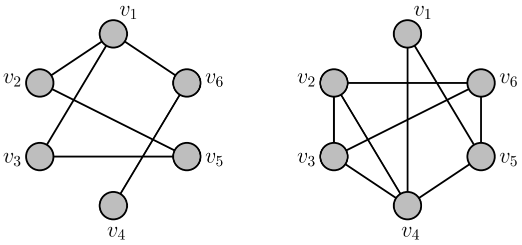
Cho đơn đồ thị $G = (V, E)$ vô hướng và các tập $V' \subseteq V$ và $E' \subseteq E$

- Đồ thị $G - V'$ là đồ thị thu được bằng cách *xóa các đỉnh trong $V'$ và các cạnh liên thuộc với chúng*. Với một đỉnh $v \in V'$, ta viết $G - v$ thay vì $G - \{v\}$
- Đồ thị $G - E'$ là đồ thị thu được bằng cách *xóa các cạnh trong $E'$*. Với một cạnh $e \in E'$, ta viết $G - e$ thay vì $G - \{e\}$



Cho đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$

- *Đồ thị bù (complement graph)* của $G$, ký hiệu $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$, là đồ thị có tập đỉnh $\overline{V} = V$ và tập cạnh $\overline{E} = [V]^2 \setminus E = \{uv \mid u, v \in V \text{ và } uv \notin E\}$
- $\overline{G}$ là đồ thị thu được từ $G$ bằng cách *xóa các cạnh trong $E$* và *thêm các cạnh trong $\overline{E} = [V]^2 \setminus E$*

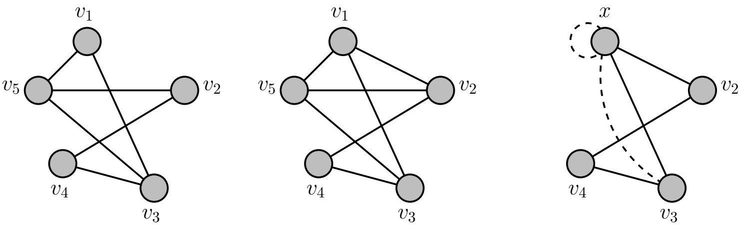



$G$ $\overline{G}$

# Giới thiệu
## Đồ thị mới từ đồ thị cũ

Cho đơn đồ thị $G = (V, E)$ vô hướng và tập $E' \subseteq [V]^2 \setminus E$

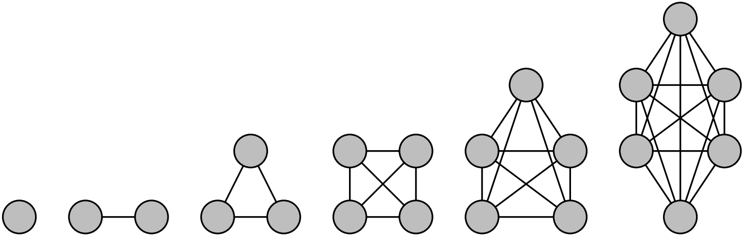
- Đồ thị $G + E'$ là đồ thị thu được bằng cách *thêm các cạnh trong $E'$*. Với $f \in E'$, ta viết $G + f$ thay vì $G + \{f\}$
- Đồ thị $G/e$ là đồ thị thu được bằng *phép co (contraction) cạnh $e = uv \in E$*
  - gộp hai đỉnh $u, v$ thành một đỉnh mới $x$, các cạnh kề với $u$ và kề với $v$ chuyển thành cạnh kề với $x$
  - xóa các khuyên tạo thành sau phép gộp
  - giữ lại một cạnh duy nhất trong số các cạnh song song




$G$ $\quad$ $G + v_1v_2$ $\quad$ $G/v_1v_5$

## Đồ thị đầy đủ

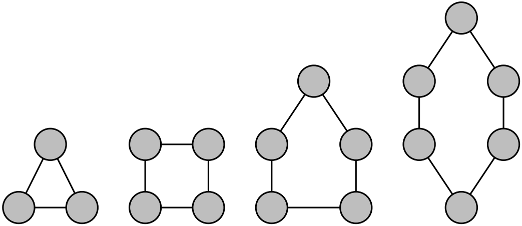
*Đồ thị đầy đủ (complete graph)* $n$ đỉnh, ký hiệu $K_n$, là một đơn đồ thị chứa đúng một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt



$K_1$ $K_2$ $K_3$ $K_4$ $K_5$ $K_6$

### Chu trình

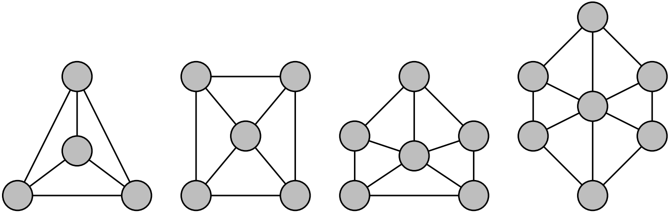
Một *chu trình (cycle)* $n$ đỉnh với $n \geq 3$, ký hiệu $C_n$, là một đồ thị với các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ và các cạnh $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$, và $v_nv_1$



$C_3$ $C_4$ $C_5$ $C_6$

## Đồ thị bánh xe

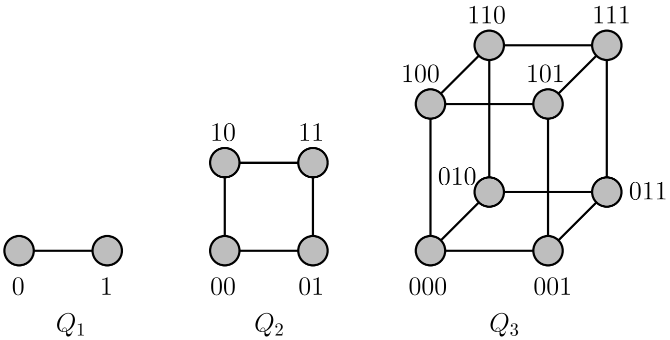
Một *đồ thị bánh xe (wheel)* gồm $n + 1$ đỉnh với $n \geq 3$, ký hiệu $W_n$, là một đồ thị thu được bằng cách thêm một đỉnh mới vào $C_n$ và nối đỉnh đó với mọi đỉnh của $C_n$ bằng các cạnh mới



$W_3$ $W_4$ $W_5$ $W_6$

## Các khối $n$ chiều

Một *khối $n$ chiều ($n$-dimensional cube)*, ký hiệu $Q_n$, là một đồ thị có $2^n$ đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng một chuỗi nhị phân độ dài $n$, và hai đỉnh là liền kề khi và chỉ khi các xâu nhị phân biểu diễn chúng khác nhau đúng một bit



## Bài tập 2

*Vẽ các đồ thị sau*

(a) $K_7$
(b) $C_7$
(c) $W_7$
(d) $Q_4$

## Bài tập 3

*Một đồ thị được gọi là đồ thị chính quy (regular graph) nếu các đỉnh của đồ thị có cùng bậc. Ta gọi một đồ thị là $n$-chính quy nếu nó là đồ thị chính quy trong đó các đỉnh có cùng bậc $n$. Với các giá trị nào của $n$ thì các đồ thị sau là đồ thị chính quy*

(a) $K_n$
(b) $C_n$
(c) $W_n$
(d) $Q_n$

## Đồ thị hai phần

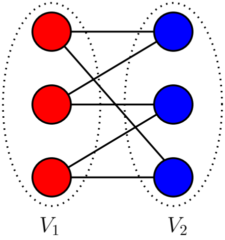
Một đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được gọi là một *đồ thị hai phần (bipartite graph)* nếu tồn tại các tập $V_1 \subseteq V$ và $V_2 \subseteq V$ thỏa mãn $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, và mỗi cạnh của $G$ nối một đỉnh thuộc $V_1$ và một đỉnh thuộc $V_2$. Ta cũng ký hiệu $G = (V_1 \cup V_2, E)$

## Định lý 4

*Một đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ là một đồ thị hai phần khi và chỉ khi có một cách tô màu mỗi đỉnh của $G$ bằng hai màu sao cho không có hai đỉnh kề nhau được tô cùng màu*

## Ví dụ 12

$C_6$ là một đồ thị hai phần



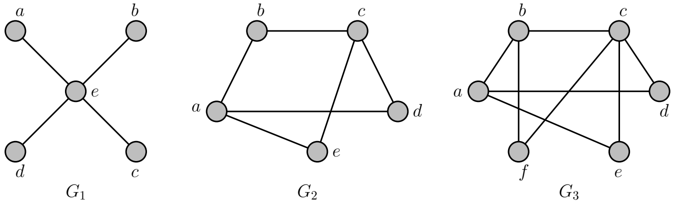
## Bài tập 4

*Chứng minh $K_n$ không là đồ thị hai phần với mọi $n \geq 3$. (**Gợi ý:** Sử dụng phương pháp phản chứng)*

## Bài tập 5

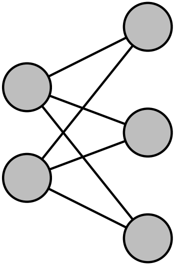
(a) *Chứng minh Định lý 4*

(b) *Sử dụng Định lý 4, hãy kiểm tra xem các đồ thị sau có phải đồ thị hai phần hay không*

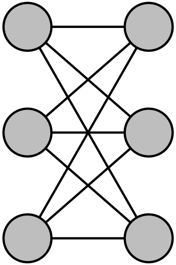


## Đồ thị hai phần đầy đủ

Một *đồ thị hai phần đầy đủ (complete bipartite graph)* là một đồ thị hai phần $G = (V_1 \cup V_2, E)$ thỏa mãn điều kiện với mọi $v_1 \in V_1$ và $v_2 \in V_2$ ta có $v_1v_2 \in E$. Nếu $|V_1| = m$ và $|V_2| = n$, ta ký hiệu đồ thị $G$ bằng $K_{m,n}$.



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$

## Bài tập 6

*Các đồ thị sau có bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu cạnh?*

(a) $K_n$
(b) $C_n$
(c) $W_n$
(d) $K_{m,n}$
(e) $Q_n$

## Bài tập 7

*Cho đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có $n \geq 3$ đỉnh. Gọi $H = (W, F)$ là một đồ thị con của $G$ có ít nhất hai đỉnh. Chứng minh rằng nếu $G$ là đồ thị hai phần thì $H$ cũng là đồ thị hai phần.*

## Bài tập 8

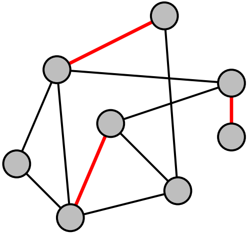
*Chứng minh $W_n$ không là đồ thị hai phần với mọi $n \geq 3$. (**Gợi ý:** Sử dụng Bài tập 7 và kết quả $K_3$ không là đồ thị hai phần từ Bài tập 4)*

## Bài tập 9

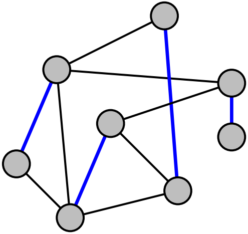
*Chứng minh rằng nếu một đồ thị hai phần $G = (V_1 \cup V_2, E)$ là đồ thị chính quy thì $|V_1| = |V_2|$.*

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng

- Một *ghép cặp (matching)* $M$ trong $G$ là một tập con của $E$ thỏa mãn điều kiện không có hai cạnh nào trong $M$ có cùng một đỉnh liên thuộc. Nói cách khác, nếu $uv, st \in M \subseteq E$ thì $\{u, v\} = \{s, t\}$ hoặc $\{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset$
- Một *ghép cặp cực đại (maximum matching)* trong $G$ là một ghép cặp có số cạnh lớn nhất có thể



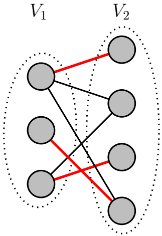
$M$ là một ghép cặp



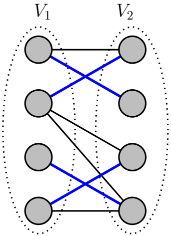
$M$ là một ghép cặp cực đại

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng

- Ta nói rằng một tập cạnh $W \subseteq E$ *bao phủ (cover)* một tập đỉnh $A \subseteq V$ nếu với mọi đỉnh $u \in A$, tồn tại một cạnh $e \in W$ sao cho $e$ liên thuộc với $u$, nghĩa là $e = uv$ với đỉnh $v \in V$ nào đó
- Trong một đồ thị hai phần $G = (V_1 \cup V_2, E)$, một *ghép cặp đầy đủ (complete matching)* ứng với $V_1$ là một ghép cặp $M' \subseteq E$ bao phủ $V_1$, và một *ghép cặp hoàn hảo (perfect matching)* là một ghép cặp $M^\star \subseteq E$ bao phủ $V = V_1 \cup V_2$




$M$ là một ghép cặp bao phủ $V_1$



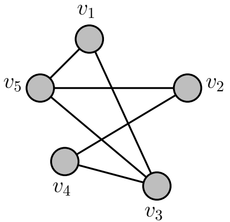

$M$ là một ghép cặp bao phủ $V$

**Định lý 5: Định lý Hall (Hall's Marriage Theorem)**

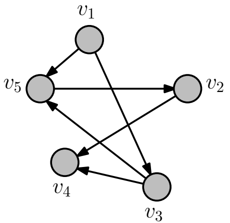
*Cho $G = (V_1 \cup V_2, E)$ là một đồ thị hai phần. Tồn tại một ghép cặp $M \subseteq E$ bao phủ $V_1$ khi và chỉ khi với mọi $S \subseteq V_1$, $|S| \leq |N_G(S)|$*

# Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu
## Danh sách kề

Một *danh sách kề (adjacency list)* biểu diễn một đồ thị không có cạnh song song bằng cách liệt kê các đỉnh liền kề với mỗi đỉnh trong đồ thị



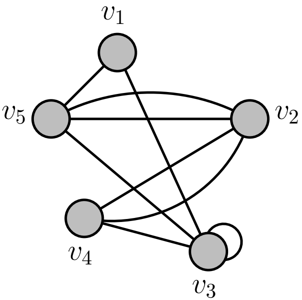

| Đỉnh | Các đỉnh liền kề |
|---|---|
| $v_1$ | $v_3, v_5$ |
| $v_2$ | $v_4, v_5$ |
| $v_3$ | $v_1, v_4, v_5$ |
| $v_4$ | $v_2, v_3$ |
| $v_5$ | $v_1, v_2, v_3$ |




| Đỉnh bắt đầu | Đỉnh kết thúc |
|---|---|
| $v_1$ | $v_3, v_5$ |
| $v_2$ | $v_4$ |
| $v_3$ | $v_4, v_5$ |
| $v_4$ | |
| $v_5$ | $v_2$ |

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có $n$ đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$. *Ma trận kề (adjacency matrix)* $A$ của $G$ ứng với thứ tự các đỉnh như trên là một ma trận kích thước $n \times n$ trong đó mỗi phần tử $a_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ được định nghĩa như sau

$$a_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{nếu có } m_{ij} \text{ cạnh } v_i v_j \\ 0 & \text{nếu } v_i v_j \notin E \end{cases}$$



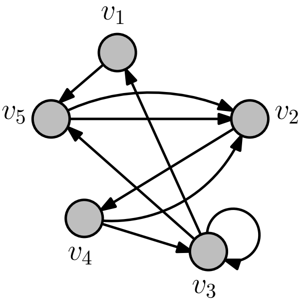

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu

## Ma trận kề

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng có $n$ đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$. *Ma trận kề (adjacency matrix)* $A$ của $G$ ứng với thứ tự các đỉnh như trên là một ma trận kích thước $n \times n$ trong đó mỗi phần tử $a_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ được định nghĩa như sau

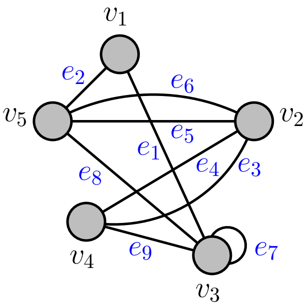
$$a_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{nếu có } m_{ij} \text{ cạnh } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{nếu } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$




$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có $n$ đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ và $m$ cạnh $e_1, e_2, \dots, e_m$. *Ma trận liên thuộc (incidence matrix)* $A$ của $G$ tương ứng với thứ tự các đỉnh và cạnh như trên là một ma trận kích thước $n \times m$ trong đó các phần tử $a_{ij}$ ($1 \leq i \leq n$ và $1 \leq j \leq m$) được định nghĩa như sau

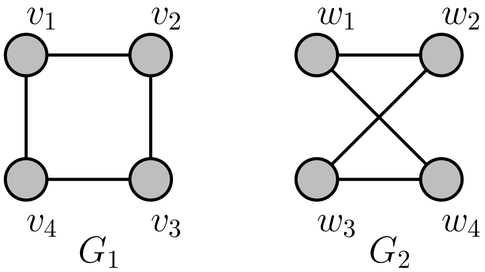
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ liên thuộc với đỉnh } v_i \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$




$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Sự đẳng cấu

Hai đồ thị vô hướng $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là *đẳng cấu (isomorphic)*, ký hiệu $G_1 \simeq G_2$, nếu tồn tại một song ánh $f : V_1 \to V_2$ thỏa mãn điều kiện: với mọi đỉnh $u, v \in V_1$, $uv \in E_1$ khi và chỉ khi $f(u)f(v) \in E_2$

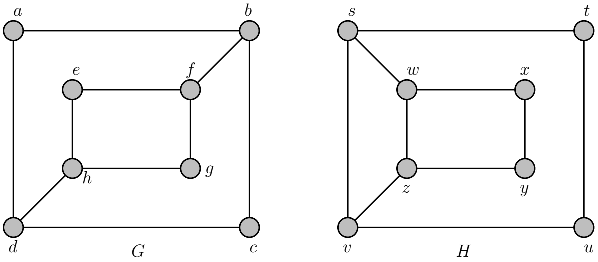



Hình: $G_1 \simeq G_2$ do tồn tại song ánh $f : V_1 \to V_2$ định nghĩa bởi $f(v_i) = w_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ thỏa mãn điều kiện đề ra

- Một số tính chất hiển nhiên mà các đồ thị đẳng cấu $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ cần có
  - $|V_1| = |V_2|$
  - $|E_1| = |E_2|$
  - Với mỗi $d$, số đỉnh bậc $d$ trong $G_1$ bằng số đỉnh bậc $d$ trong $G_2$
  - v.v...
- Thông thường, *việc kiểm tra tất cả các song ánh* có thể giữa hai tập đỉnh của hai đồ thị $G_1$, $G_2$ để xác định xem chúng có đẳng cấu hay không là *rất khó*: có $n!$ song ánh giữa hai đồ thị $n$ đỉnh
  - Đến hiện tại, *chưa biết* có hay không một *thuật toán trong thời gian đa thức* để kiểm tra xem hai đồ thị là đẳng cấu hay không
  - Thêm nữa, một *bài toán mở trong hàng thập kỷ* là *thiết kế một thuật toán với độ phức tạp trong thời gian xấu nhất tốt hơn thời gian $O(2^{\sqrt{n}})$*. Một bước *đột phá* là kết quả của L. Babai [Babai 2016]: thuật toán trong thời gian $2^{O((\log n)^k)}$ với hằng số $k > 1$ cố định nào đó. Thời gian chạy của thuật toán này "tốt hơn" $O(2^{\sqrt{n}})$ nhưng "tệ hơn" thời gian đa thức

- Để chứng minh hai đồ thị là *không đẳng cấu*, chúng ta thường tìm một tính chất mà chỉ một trong hai đồ thị có. Một tính chất như thế được gọi là một *bất biến đồ thị (graph invariant)* (ví dụ như số các đỉnh có bậc cho trước nào đó, danh sách bậc các đỉnh của đồ thị, v.v...)
- Trên thực tế, có những thuật toán *rất hiệu quả cho phần lớn các đồ thị xuất hiện trong thực hành* (Ví dụ như phần mềm “nauty” của Brendan McKay (xem `https://pallini.di.uniroma1.it/`))

## Ví dụ 13

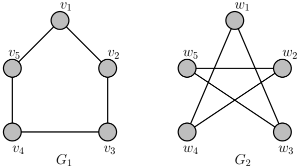


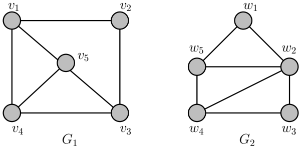

$G$ và $H$ không đẳng cấu

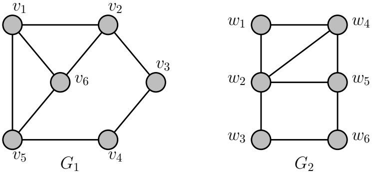
- Do $\deg(a) = 2$, nếu tồn tại một đẳng cấu giữa $G$ và $H$, $a$ phải tương ứng với một trong bốn đỉnh bậc $2$ của $H$: $t, u, x$, hoặc $y$
- Tuy nhiên, mỗi đỉnh trong bốn đỉnh $t, u, x, y$ đều liền kề với một đỉnh bậc hai, trong khi $a$ không thỏa mãn tính chất này trong $G$

## Bài tập 10

*Các cặp đồ thị sau có đẳng cấu hay không? Vì sao?*



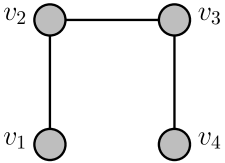

## Bài tập 11

*Giả sử* $G$ *và* $H$ *là các đơn đồ thị thỏa mãn* $G \simeq H$. *Chứng minh rằng* $\overline{G} \simeq \overline{H}$

## Bài tập 12

*Một đơn đồ thị $G$ được gọi là tự bù (self-complementary) nếu $G \simeq \overline{G}$.*

(a) *Chứng minh rằng đồ thị sau là một đồ thị tự bù*



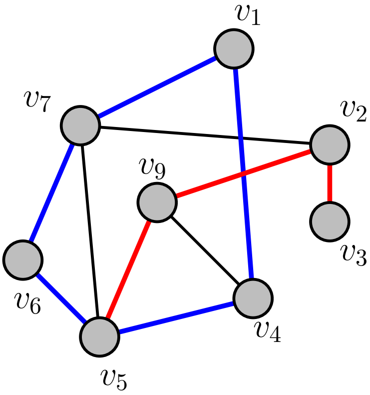

(b) *Tìm một đồ thị tự bù có $5$ đỉnh.*

## Đường đi (vô hướng)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng và $n$ là một số nguyên dương. *Đường đi (path)* độ dài $n$ từ đỉnh $u$ đến đỉnh $v$ trong $G$ là một dãy các cạnh $e_1, e_2, \dots, e_n$ của đồ thị thỏa mãn điều kiện tồn tại một dãy các đỉnh $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ sao cho $v_0 = u$, $v_n = v$, và $e_i$ có các đầu mút $v_{i-1}$ và $v_i$, với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

- Ta nói rằng đường đi bắt đầu với $u$ và kết thúc với $v$
- *Độ dài (length)* của một đường đi vô hướng là số cạnh của đường đi đó
- Một đường đi độ dài $n \geq 1$ được gọi là một *chu trình (circuit hoặc cycle)* nếu nó bắt đầu và kết thúc ở cùng một đỉnh
- Khi $G$ *không có các cạnh song song*, mỗi đường đi có thể được xác định một cách duy nhất thông qua các đỉnh của nó, và do đó ta có thể ký hiệu một đường đi bằng dãy các đỉnh của nó $v_0, v_1, \dots, v_n$

## Ví dụ 14



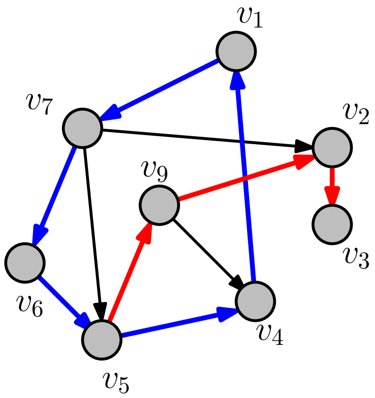

Hình: $v_5v_9, v_9v_2, v_2v_3$ (hoặc $v_5, v_9, v_2, v_3$) là một đường đi độ dài $3$ và $v_1v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_1$ (hoặc $v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1$) là một chu trình độ dài $5$

## Đường đi (có hướng)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng và $n$ là một số nguyên dương. *Đường đi (path)* độ dài $n$ từ đỉnh $u$ đến đỉnh $v$ trong $G$ là một dãy các cung $e_1, e_2, \dots, e_n$ của đồ thị thỏa mãn điều kiện tồn tại một dãy các đỉnh $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ sao cho $v_0 = u$, $v_n = v$, và $e_i$ có đỉnh đầu $v_{i-1}$ và đỉnh cuối $v_i$, với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

- Ta nói rằng đường đi bắt đầu với $u$ và kết thúc với $v$
- *Độ dài (length)* của một đường đi có hướng là số cung của đường đi đó
- Một đường đi độ dài $n \geq 1$ được gọi là một *chu trình (circuit hoặc cycle)* nếu nó bắt đầu và kết thúc ở cùng một đỉnh
- Khi $G$ *không có các cạnh song song*, mỗi đường đi có thể được xác định một cách duy nhất thông qua các đỉnh của nó, và do đó ta có thể ký hiệu một đường đi bằng dãy các đỉnh của nó $v_0, v_1, \dots, v_n$

## Ví dụ 15




Hình: $(v_5, v_9), (v_9, v_2), (v_2, v_3)$ (hoặc $v_5, v_9, v_2, v_3$) là một đường đi độ dài $3$ và $(v_1, v_7), (v_7, v_6), (v_6, v_5), (v_5, v_4), (v_4, v_1)$ (hoặc $v_1, v_7, v_6, v_5, v_4, v_1$) là một chu trình độ dài $5$

Một đường đi đơn (simple path) là một đường đi không chứa cùng một cạnh (cung) nhiều hơn một lần

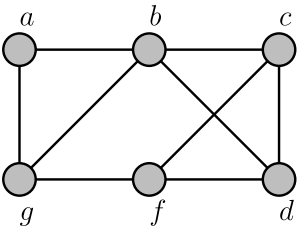
## Bài tập 13

*Hãy tìm trong đồ thị ở hình bên*

(a) *Một đường đi có độ dài* $n$ *với* $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$

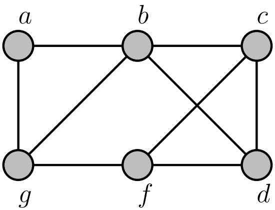
(b) *Một đường đi đơn có độ dài* $n$ *với* $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$

(c) *Một chu trình có độ dài* $n$ *với* $n \in \{3, \ldots, 7\}$

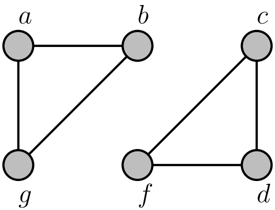


# Tính liên thông trong đồ thị
## Liên thông trong đồ thị vô hướng

Một đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được gọi là *liên thông (connected)* nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của $G$. Ngược lại, nếu không tồn tại đường đi giữa một cặp đỉnh phân biệt nào đó trong $G$, ta gọi $G$ là đồ thị *không liên thông (disconnected)*




$G$ là đồ thị liên thông




$G$ là đồ thị không liên thông

- Một *thành phần liên thông (connected component)* $H = (V', E')$ của $G$ là một đồ thị con liên thông cực đại của $G$, nghĩa là, $H$ là một đồ thị con liên thông của $G$ và với mọi đồ thị con liên thông $K$ khác của $G$, $H$ không là đồ thị con thực sự của $K$
- *Hợp (union)* của hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đồ thị $G = (V, E)$ có tập đỉnh $V = V_1 \cup V_2$ và tập cạnh $E = E_1 \cup E_2$. Ta cũng viết $G = G_1 \cup G_2$
- Một đồ thị không liên thông $G$ có thể được xem như là hợp của hai hay nhiều đồ thị con liên thông trong đó không có đỉnh chung nào giữa mỗi cặp đồ thị con này. Các đồ thị con này chính là các thành phần liên thông của $G$
- $G$ là đồ thị liên thông khi và chỉ khi $G$ có chính xác một thành phần liên thông

**Mệnh đề 6**

*Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng liên thông có ít nhất hai đỉnh. Với hai đỉnh bất kỳ $u, v \in V$ của $G$, tồn tại một đường đi đơn giữa $u$ và $v$*

## Chứng minh.

- Do $G$ liên thông, luôn tồn tại một đường đi giữa hai đỉnh $u, v$. Gọi $P = e_1, e_2, \dots, e_k$ là một đường đi có độ dài nhỏ nhất trong số tất cả các đường đi giữa $u$ và $v$. Ta chứng minh $P$ là một đường đi đơn
- Giả sử $P$ không phải đường đi đơn. Suy ra, tồn tại $i, j$ thỏa mãn $0 \leq i < j \leq k$ và $e_i = e_j$. Do đó, $P' = e_1, e_2, \dots, e_i, e_{j+1}, \dots, e_k$ là một đường đi giữa $u$ và $v$ và $P'$ có độ dài nhỏ hơn độ dài $k$ của $P$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của $P$

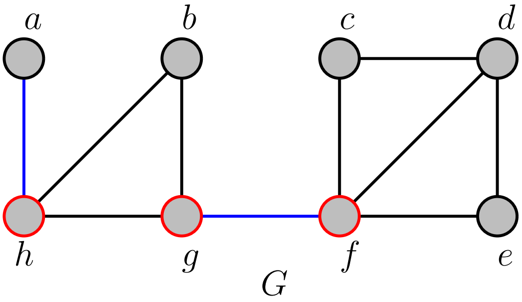
□

# Tính liên thông trong đồ thị

## Liên thông trong đồ thị vô hướng

Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$

- Một đỉnh $v \in V$ được gọi là *đỉnh cắt (cut vertex)* hoặc *điểm khớp (articulation point)* nếu $G - v$ có nhiều thành phần liên thông hơn $G$
- Một cạnh $e \in E$ được gọi là *cạnh cắt (cut edge)* hoặc *cầu (bridge)* nếu $G - e$ có nhiều thành phần liên thông hơn $G$




Hình: Các đỉnh cắt của $G$ là $f, g, h$. Các cạnh cắt của $G$ là $ah, gf$

## Bài tập 14

*Một đồ thị không có đỉnh cắt nào được gọi là **đồ thị không thể tách rời (nonseparable graph)**. Chứng minh rằng mỗi đồ thị sau là đồ thị không thể tách rời*

(a) $C_n$ *với* $n \geq 3$

(b) $W_n$ *với* $n \geq 3$

(c) $K_{m,n}$ *với* $m \geq 2$ *và* $n \geq 2$

(d) $Q_n$ *với* $n \geq 2$

## Bài tập 15

*Chứng minh rằng nếu $G$ là đơn đồ thị vô hướng có chính xác hai đỉnh bậc lẻ $u, v$ thì các đỉnh này phải thuộc cùng một thành phần liên thông của $G$*

## Bài tập 16

*Chứng minh rằng một đồ thị vô hướng liên thông bất kỳ gồm $n \geq 1$ đỉnh có ít nhất $n-1$ cạnh. (**Gợi ý:** Quy nạp mạnh theo số đỉnh $n$ của đồ thị.)*

## Bài tập 17

*Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng liên thông gồm $n \geq 1$ đỉnh và $G \neq K_n$. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập các đỉnh $V'$ sao cho $G - V'$ là đồ thị không liên thông*

- Tập đỉnh $V'$ của một đơn đồ thị vô hướng liên thông $G$ thỏa mãn điều kiện ở Bài tập 17 được gọi là một *tập phân tách (separating set (of vertices))* của $G$
- *Số liên thông đỉnh (vertex connectivity)* của $G$, ký hiệu $\kappa(G)$, là *số đỉnh nhỏ nhất cần bỏ đi từ $G$* để thu được một đồ thị con $G'$ *không liên thông* hoặc *chỉ có một đỉnh*
  - $\kappa(G) = 0$ nếu $G$ không liên thông hoặc chỉ có một đỉnh
  - $\kappa(G)$ là số phần tử nhỏ nhất trong một tập phân tách (nếu có) của $G$
- $G$ là *$k$-liên thông ($k$-connected)* nếu $\kappa(G) \geq k$
  - Nếu $G$ là $k$-liên thông thì cũng là $j$-liên thông với mọi $0 \leq j \leq k$
  - Nếu *xóa đi tối đa $k - 1$ đỉnh bất kỳ* từ $G$ thì đồ thị thu được luôn là đồ thị liên thông

## Bài tập 18

*Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng liên thông gồm $n \geq 2$ đỉnh. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập cạnh $E'$ sao cho $G - E'$ là một đồ thị không liên thông*

- Tập cạnh $E'$ của một đơn đồ thị vô hướng liên thông $G$ thỏa mãn điều kiện ở Bài tập 18 được gọi là một *tập cạnh phân tách (separating set of edges)* của $G$
- *Số liên thông cạnh (edge connectivity)* của $G$, ký hiệu $\lambda(G)$, là *số cạnh nhỏ nhất cần bỏ đi từ $G$* để thu được một đồ thị con $G'$ *không liên thông* hoặc *chỉ có một đỉnh*
  - $\lambda(G) = 0$ nếu $G$ không liên thông hoặc chỉ có một đỉnh
  - $\lambda(G)$ là số phần tử nhỏ nhất trong một tập cạnh phân tách (nếu có) của $G$
- $G$ là *$k$-liên thông cạnh ($k$-edge connected)* nếu $\lambda(G) \geq k$
  - Nếu $G$ là $k$-liên thông cạnh thì cũng là $j$-liên thông cạnh với mọi $0 \leq j \leq k$
  - Nếu *xóa đi tối đa $k - 1$ cạnh bất kỳ* từ $G$, đồ thị thu được luôn là đồ thị liên thông




58

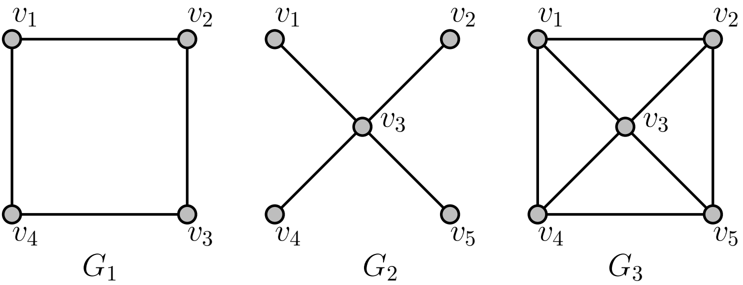
67

# Tính liên thông trong đồ thị

## Liên thông trong đồ thị vô hướng

### Bài tập 19

*Xác định* $\kappa(G_i)$ *và* $\lambda(G_i)$ *trong các đồ thị* $G_i$ *với* $i = 1, 2, 3$ *sau*



## Bài tập 20

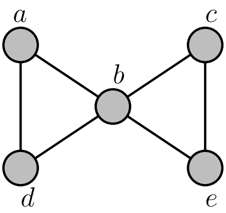
*Chứng minh rằng với mọi đồ thị vô hướng liên thông* $G = (V, E)$

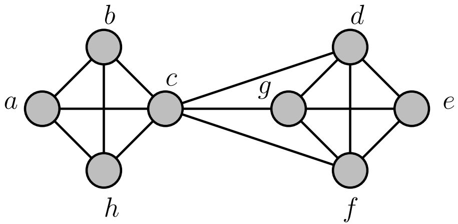
$$\kappa(G) \leq \min_{v \in V} \deg_G(v) \tag{1}$$

$$\lambda(G) \leq \min_{v \in V} \deg_G(v) \tag{2}$$

## Bài tập 21

*Với mỗi đồ thị trong các trường hợp sau, tìm* $\kappa(G), \lambda(G)$, *và* $\min_{v \in V} \deg(v)$

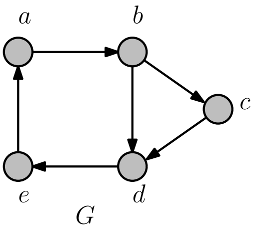


Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng

- $G$ được gọi là *liên thông mạnh (strongly connected)* nếu với mỗi cặp đỉnh $u, v \in V$, tồn tại một đường đi có hướng từ $u$ đến $v$ và một đường đi có hướng từ $v$ đến $u$
- $G$ được gọi là *liên thông yếu (weakly connected)* nếu đồ thị vô hướng thu được bằng cách bỏ qua hướng của các cung của $G$ là một đồ thị liên thông

## Ví dụ 16




Hình: $G$ là đồ thị liên thông mạnh. $H$ không là đồ thị liên thông mạnh nhưng là đồ thị liên thông yếu

# Tính liên thông trong đồ thị

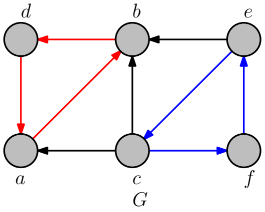
## Liên thông trong đồ thị có hướng

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng

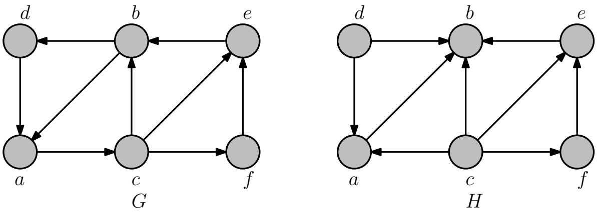
- Một *thành phần liên thông mạnh (strongly connected component)* của $G$ là một đồ thị con liên thông mạnh cực đại $H$ của $G$, nghĩa là, $H$ là một đồ thị con liên thông mạnh của $G$ và không là đồ thị con thực sự của bất kỳ đồ thị con liên thông mạnh nào khác

## Ví dụ 17

- $G$ không là đồ thị liên thông mạnh
- Đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ với $V_1 = \{a, b, d\}$ và $E_1 = \{(a, b), (b, d), (d, a)\}$ là một thành phần liên thông mạnh của $G$
- Đồ thị $G_2 = (V_2, E_2)$ với $V_2 = \{c, e, f\}$ và $E_2 = \{(c, f), (f, e), (e, c)\}$ là một thành phần liên thông mạnh của $G$



- Một *đồ thị có hướng không có chu trình (directed acyclic graph – DAG)* là một đồ thị có hướng không chứa khuyên hoặc chu trình có hướng.

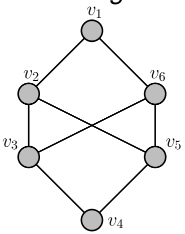



Hình: $G$ là một đồ thị có hướng và có chu trình. $H$ là một đồ thị có hướng và không có chu trình

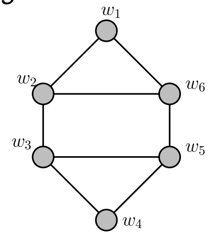
- **Nhắc lại:** Để chứng minh hai đồ thị là *không đẳng cấu*, chúng ta thường tìm một tính chất mà chỉ một trong hai đồ thị có. Một tính chất như thế được gọi là một *bất biến đồ thị (graph invariant)*
  - số các đỉnh có bậc cho trước nào đó
  - danh sách bậc các đỉnh của đồ thị
- Một bất biến đồ thị hữu ích là *sự tồn tại của các chu trình đơn với độ dài $k \geq 3$*

## Bài tập 22

*Các đồ thị sau có đẳng cấu không? Vì sao?*




$G_1$

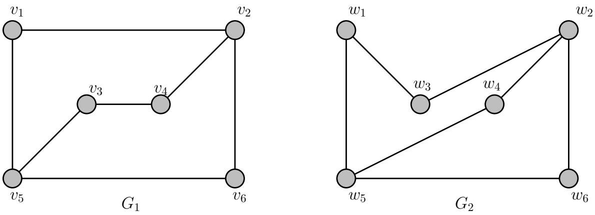



$G_2$

- Chúng ta cũng có thể sử dụng đường đi để tìm các ánh xạ giữa hai đồ thị đẳng cấu

## Bài tập 23

*Các đồ thị sau có đẳng cấu không? Vì sao?*



**Định lý 7**

*Cho $G$ là một đồ thị với ma trận kề $A$ tương ứng với thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$. Số các đường đi khác nhau độ dài $r$ từ $v_i$ tới $v_j$, trong đó $r$ là một số nguyên dương, bằng giá trị của phần tử $(i, j)$ của ma trận $A^r$.*

## Chứng minh.

Ta chứng minh Định lý bằng quy nạp theo $r$

- **Bước cơ sở:** Theo định nghĩa ma trận kề, Định lý 7 đúng với $r = 1$
- **Bước quy nạp:** Giả sử Định lý 7 đúng với mọi $1 \leq r \leq k$. Ta chứng minh Định lý 7 đúng với $r = k + 1$, tức là, số các đường đi khác nhau độ dài $k + 1$ từ $v_i$ tới $v_j$ bằng giá trị của phần tử $(i, j)$ của $A^{k+1}$.
  - Một đường đi độ dài $k + 1$ từ $v_i$ đến $v_j$ được tạo thành bởi một đường đi độ dài $k$ từ $v_i$ đến $v_\ell$ nào đó, và cạnh $\{v_\ell, v_j\}$.

## Bài tập 24

*Tìm số đường đi độ dài $n$ giữa hai đỉnh phân biệt của $K_4$ với $n$ bằng*

(a) $2$

(b) $3$

(c) $4$

(d) $5$