

# **COPYRIGHT NOTICE**

## **THÔNG BÁO BẢN QUYỀN**

© 2023 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

### **COPYRIGHT (English):**

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2023-05-21

### **BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):**

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2023-05-21



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 1

Lớp học phần: MAT3500 2, MAT3500 3

Ngành học: KHMT&TT

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

**Chú ý:** Đề gồm 6 câu/2 trang. Không sử dụng tài liệu. Điểm bài kiểm tra này chiếm 70% tổng số điểm của môn học. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

**Câu 1.** (1 điểm) Một tập các toán tử logic  $\mathcal{C}$  được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi mệnh đề phức hợp có một mệnh đề phức hợp tương đương logic với nó chỉ sử dụng các toán tử logic trong  $\mathcal{C}$ . Để thấy  $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge\}$  là một tập các toán tử logic đầy đủ, với hai mệnh đề  $p, q$ , hãy tìm các mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử logic trong  $\mathcal{C}$  và tương đương logic với

(a)  $p \vee q$

(c)  $p \rightarrow q$

(b)  $p \oplus q$

(d)  $p \leftrightarrow q$

**Câu 2.** (1 điểm) Với một tập hợp  $A$  bất kỳ, gọi  $\mathcal{P}(A)$  là tập hợp tất cả các tập con của  $A$ .

(a) Với các tập  $A, B$  bất kỳ, chứng minh rằng  $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ .

(b) Nếu thay  $\cap$  bằng  $\cup$  thì phát biểu ở phần (a) còn đúng hay không? Tại sao?

**Câu 3.** (2 điểm)

(a) Sử dụng Định lý Fermat nhỏ để tính  $a_1 = 23^{2023} \bmod 3$ ,  $a_2 = 23^{2023} \bmod 7$ , và  $a_3 = 23^{2023} \bmod 11$ .

(b) Tìm số nguyên  $x$  thỏa mãn  $0 \leq x < 231$  và

$$x \equiv a_1 \pmod{3} \quad (1)$$

$$x \equiv a_2 \pmod{7} \quad (2)$$

$$x \equiv a_3 \pmod{11} \quad (3)$$

trong đó  $a_1, a_2, a_3$  là các số được tính ở phần (a). Sử dụng kết quả trên và Định lý phần dư Trung Hoa để tính  $23^{2023} \bmod 231$ . (Chú ý rằng  $231 = 3 \times 7 \times 11$ .)

**Câu 4.** (3 điểm)

(a) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số?

(b) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số chia hết 5?

- (c) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số không chia hết cho 5?
- (d) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số có ba chữ số đầu là 111 hoặc hai chữ số cuối là 00?
- (e) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số có chứa 111111 (chuỗi 6 chữ số 1 liên tiếp)?
- (f) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số có ít nhất hai chữ số giống nhau?

**Câu 5.** (1 điểm) Cho  $G = (V, E)$  là một đơn đồ thị vô hướng có  $n \geq 2$  đỉnh.

- (a) Chứng minh rằng không tồn tại đồng thời hai đỉnh phân biệt  $u, v$  thỏa mãn  $\deg_G(u) = 0$  và  $\deg_G(v) = n - 1$ .
- (b) Chứng minh rằng nếu với mọi  $v \in V$  ta có  $\deg_G(v) \geq n/2$  thì  $G$  là một đồ thị liên thông.

**Câu 6.** (2 điểm)

- (a) Đồ thị  $C_n$  ( $n \geq 3$ ) có bao nhiêu cạnh? Đồ thị  $Q_n$  ( $n \geq 1$ ) có bao nhiêu cạnh?
- (b) Cho  $G = (V, E)$  là một đơn đồ thị vô hướng. Chứng minh rằng nếu  $G$  có chính xác hai đỉnh bậc lẻ  $u$  và  $v$  thì có một đường đi trong  $G$  giữa  $u$  và  $v$ .

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**  
**ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN**

**ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM**  
**ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II, NĂM HỌC 2022-2023**  
**Môn thi: Toán rời rạc**

Mã môn học: **MAT3500**                      Số tín chỉ: **4**                      Đề số: **1**  
Lớp học phần: **MAT3500 2, MAT3500 3**                      Ngành học: **KHMT&TT**

**Lời giải 1.** Một phương án giải là sử dụng bảng chân trị để đưa các biểu thức đã cho về dạng tuyển chuẩn tắc (DNF) hoặc dạng hội chuẩn tắc (CNF) rồi áp dụng luật De Morgan và các tương đương logic đã biết. **[1 điểm]**

(a)	$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$ <p style="text-align: right;">luật De Morgan</p>	<b>0.25</b>
(b)	$p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ $\equiv \neg(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q))$ <p>hoặc</p> $p \oplus q \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ $\equiv \neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)$ <p style="text-align: right;">dạng tuyển chuẩn tắc luật De Morgan</p> <p style="text-align: right;">dạng hội chuẩn tắc luật De Morgan</p>	<b>0.25</b>
(c)	$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ $\equiv \neg(p \wedge \neg q)$ <p>hoặc</p> $p \rightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ $\equiv \neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q))$ <p style="text-align: right;">dạng hội chuẩn tắc luật De Morgan</p> <p style="text-align: right;">dạng tuyển chuẩn tắc luật De Morgan</p>	<b>0.25</b>

(d)		0.25
	$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ $\equiv \neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q))$	dạng tuyển chuẩn tắc luật De Morgan
hoặc	$p \leftrightarrow q \equiv (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ $\equiv \neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge \neg q)$	dạng hội chuẩn tắc luật De Morgan

Lời giải 2.

[1 điểm]

(a) Ta chứng minh $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ và $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ . Lấy một tập bất kỳ $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ . Ta có $X \in \mathcal{P}(A)$ và $X \in \mathcal{P}(B)$ . Theo định nghĩa, $X \subseteq A$ và $X \subseteq B$ . Do đó, $X \subseteq (A \cap B)$ . Theo định nghĩa, $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ . Do đó $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ . Lấy một tập bất kỳ $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ . Theo định nghĩa, $X \subseteq (A \cap B)$ . Do đó, $X \subseteq (A \cap B) \subseteq A$ và $X \subseteq (A \cap B) \subseteq B$ . Theo định nghĩa, $X \in \mathcal{P}(A)$ và $X \in \mathcal{P}(B)$ , hay $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ . Do đó $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ .	0.5
(b) Nếu thay $\cap$ bằng $\cup$ thì phát biểu ở phần (a) không đúng, nghĩa là tồn tại các tập $A, B$ thỏa mãn $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$ . Để thấy điều này, xét các tập $A, B$ thỏa mãn $A \setminus B \neq \emptyset$ và $B \setminus A \neq \emptyset$ . Đặt $X = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Ta chứng minh $X \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ và $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ . Do $\emptyset \neq (B \setminus A) \subseteq X$ , ta có $X \not\subseteq A$ , và do đó $X \notin \mathcal{P}(A)$ . Do $\emptyset \neq (A \setminus B) \subseteq X$ , ta có $X \not\subseteq B$ , và do đó $X \notin \mathcal{P}(B)$ . Do đó, $X \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ . Mặt khác, do $X = A \Delta B \subseteq A \cup B$ , ta có $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ . Để chứng minh phát biểu ở phần (a) không đúng khi thay $\cap$ bằng $\cup$ , có thể lấy ví dụ cụ thể các tập $A, B$ thỏa mãn $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$ . Ví dụ với $A = \{1\}$ và $B = \{2\}$ thì $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ và $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$ , do đó $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ . Mặt khác, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ .	0.5

Lời giải 3.

[2 điểm]

(a) Theo định lý Fermat nhỏ, với $p$ là số nguyên tố và $a$ là số nguyên không chia hết cho $p$ , ta có $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Áp dụng định lý Fermat nhỏ, ta có $23^2 \equiv 1 \pmod{3}$ , $23^6 \equiv 1 \pmod{7}$ , và $23^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ . Do đó,  $a_1 = 23^{2023} \pmod{3} = (23^2)^{1011} \times 23 \pmod{3} = [(23^2 \pmod{3})^{1011} \times (23 \pmod{3})] \pmod{3} = 2$ $a_2 = 23^{2023} \pmod{7} = (23^6)^{337} \times 23 \pmod{7} = [(23^6 \pmod{7})^{337} \times (23 \pmod{7})] \pmod{7} = 2$ $a_3 = 23^{2023} \pmod{11} = (23^{10})^{202} \times 23^3 \pmod{11} = [(23^{10} \pmod{11})^{202} \times (23^3 \pmod{11})] \pmod{11}$ $= [23^3 \pmod{11}] \pmod{11} = (23 \pmod{11})^3 \pmod{11} = 1$	1
---	---

<p>(b) Ta giải hệ phương trình sau</p> $\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{3} & (1) \\ x &\equiv 2 \pmod{7} & (2) \\ x &\equiv 1 \pmod{11} & (3) \end{aligned}$ <p>(Cách 1) <b>Sử dụng chứng minh của Định lý phần dư Trung Hoa.</b></p> <p>Đặt <math>m_1 = 3, m_2 = 7, m_3 = 11</math>, và <math>m = m_1 m_2 m_3 = 3 \times 7 \times 11 = 231</math>. Ta có</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>M_1 = m/m_1 = 7 \times 11 = 77</math> và <math>y_1 = -1</math> là một nghịch đảo của <math>M_1</math> theo môđun <math>m_1 = 3</math>.</li> <li>• <math>M_2 = m/m_2 = 3 \times 11 = 33</math> và <math>y_2 = 3</math> là một nghịch đảo của <math>M_2</math> theo môđun <math>m_2 = 7</math>.</li> <li>• <math>M_3 = m/m_3 = 3 \times 7 = 21</math> và <math>y_3 = -1</math> là một nghịch đảo của <math>M_3</math> theo môđun <math>m_3 = 11</math>.</li> </ul> <p>Một nghiệm của hệ phương trình là</p> $x^* = \sum_{i=1}^3 a_i y_i M_i = 2 \times (-1) \times 77 + 2 \times 3 \times 33 + 1 \times (-1) \times 21 = 23.$ <p>Theo Định lý phần dư Trung Hoa, <math>x^*</math> là nghiệm duy nhất của hệ phương trình theo môđun 231, nghĩa là, mọi số nguyên <math>x</math> thỏa mãn <math>x \equiv x^* \pmod{231}</math> đều là nghiệm của hệ phương trình. Do đó, <math>x = x^* \bmod 231 = 23</math> là nghiệm duy nhất của hệ phương trình thỏa mãn <math>0 \leq x &lt; 231</math>.</p> <p>(Cách 2) <b>Sử dụng phương pháp thay ngược.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Từ (1), tồn tại <math>t \in \mathbb{Z}</math> sao cho <math>x = 3t + 2</math>.</li> <li>• Thay vào (2), ta có <math>3t + 2 \equiv 2 \pmod{7}</math>, suy ra <math>3t \equiv 0 \pmod{7}</math>, và do đó <math>t \equiv 0 \pmod{7}</math>. Do đó, tồn tại <math>u \in \mathbb{Z}</math> sao cho <math>t = 7u</math>. Suy ra <math>x = 3t + 2 = 3(7u) + 2 = 21u + 2</math>.</li> <li>• Thay vào (3), ta có <math>21u + 2 \equiv 1 \pmod{11}</math>, suy ra <math>21u \equiv -1 \pmod{11}</math>, và do đó <math>u \equiv -10 \pmod{11} \equiv 1 \pmod{11}</math>. Do đó, tồn tại <math>v \in \mathbb{Z}</math> sao cho <math>u = 11v + 1</math>. Suy ra <math>x = 21u + 2 = 21(11v + 1) + 2 = 231v + 23</math>.</li> <li>• Do đó, <math>x = 23</math> là nghiệm duy nhất của hệ phương trình thỏa mãn <math>0 \leq x &lt; 231</math>.</li> </ul> <p>Theo Định lý phần dư Trung Hoa, do <math>23^{2023}</math> là một nghiệm của hệ phương trình, ta có <math>23^{2023} \equiv 23 \pmod{231}</math> và do đó <math>23^{2023} \bmod 231 = 23</math>.</p>	<b>1</b>
---	----------

**Lời giải 4.** Giả sử  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$  là một số thập phân có 8 chữ số.

(a) Gọi $A$ là tập các số thập phân có 8 chữ số. Để xây dựng một phần tử thuộc $A$ , có 9 cách chọn $a_1$ ( $1, 2, \dots, 9$ ) và 10 cách chọn ( $0, 1, 2, \dots, 9$ ) mỗi chữ số trong tập $a_2, \dots, a_8$ . Do đó, có $9 \times 10^7 = 90\,000\,000$ số thập phân có 8 chữ số.	<b>0.5</b>
--	------------

<p>(b) Gọi <math>A_5</math> là tập các số thập phân có 8 chữ số chia hết cho 5. Ta đếm số phần tử của <math>A_5</math>. Với <math>x \in A_5</math>, do <math>x</math> là số thập phân có 8 chữ số, ta có <math>10^7 \leq x &lt; 10^8</math>. Kết hợp với <math>x</math> chia hết cho 5, ta có <math>x = 10^7 + 5k</math> với số nguyên <math>k \geq 0</math> nào đó. Từ <math>10^7 \leq x &lt; 10^8</math>, ta có <math>10^7 \leq 10^7 + 5k &lt; 10^8</math>, suy ra <math>0 \leq k &lt; (10^8 - 10^7)/5 = 18 \times 10^6</math>. Do đó, <math>A_5 = \{10^7 + 5k \mid 0 \leq k &lt; 18 \times 10^6\}</math>, suy ra <math> A_5  = 18 \times 10^6 = 18\,000\,000</math>.</p>	0.5
<p>(c) Từ các phần (a) và (b), số các số thập phân có 8 chữ số không chia hết cho 5 chính là số phần tử của tập <math>\overline{A_5} = A \setminus A_5</math>. Ta có <math> \overline{A_5}  =  A  -  A_5  = 9 \times 10^7 - 18 \times 10^6 = 72 \times 10^6 = 72\,000\,000</math>.</p>	0.5
<p>(d) Gọi <math>B_{111}</math> là tập các số thập phân có 8 chữ số có ba chữ số đầu là 111 và <math>E_{00}</math> là tập các số thập phân có 8 chữ số có hai chữ số cuối là 00. Số các số thập phân có 8 chữ số có ba chữ số đầu là 111 hoặc hai chữ số cuối là 00 bằng số phần tử của tập <math>B_{111} \cup E_{00}</math>. Theo nguyên lý bù trừ, <math> B_{111} \cup E_{00}  =  B_{111}  +  E_{00}  -  B_{111} \cap E_{00} </math>.          Để xây dựng một phần tử của <math>B_{111}</math>, ta chỉ cần chọn các chữ số trong tập <math>a_4, \dots, a_8</math> (do <math>a_1 = a_2 = a_3 = 1</math>), trong đó mỗi <math>a_i</math> (<math>4 \leq i \leq 8</math>) có 10 cách chọn (<math>0, \dots, 9</math>). Do đó <math> B_{111}  = 10^5</math>. Để xây dựng một phần tử của <math>E_{00}</math>, ta chỉ cần chọn các chữ số trong tập <math>a_1, \dots, a_6</math> (do <math>a_7 = a_8 = 0</math>), trong đó <math>a_1</math> có 9 cách chọn (<math>1, \dots, 9</math>) và mỗi <math>a_i</math> (<math>2 \leq i \leq 6</math>) có 10 cách chọn. Do đó, <math>E_{00} = 9 \times 10^5</math>. Để xây dựng một phần tử của <math>B_{111} \cap E_{00}</math>, ta chỉ cần chọn các chữ số trong tập <math>a_4, \dots, a_6</math> (do <math>a_1 = a_2 = a_3 = 1</math> và <math>a_7 = a_8 = 0</math>), trong đó mỗi <math>a_i</math> (<math>4 \leq i \leq 6</math>) có 10 cách chọn. Do đó, <math> B_{111} \cap E_{00}  = 10^3</math>.          Ta có <math> B_{111} \cup E_{00}  =  B_{111}  +  E_{00}  -  B_{111} \cap E_{00}  = 10^5 + 9 \times 10^5 - 10^3 = 999\,000</math>.</p>	0.5
<p>(e) Ta xét các trường hợp dựa trên vị trí bắt đầu của dãy 111111 trong một số thập phân có 8 chữ số.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Các số có dạng <math>111111a_7a_8</math>.</b> Mỗi chữ số <math>a_7</math> và <math>a_8</math> có 10 cách chọn (<math>0, 1, \dots, 9</math>). Do đó, có <math>10^2</math> số dạng này.</li> <li>• <b>Các số có dạng <math>a_111111a_8</math> với <math>a_1 \neq 1</math>.</b> Có 8 cách chọn <math>a_1</math> (<math>2, 3, \dots, 9</math>) và có 10 cách chọn <math>a_8</math> (<math>0, \dots, 9</math>). Do đó, có <math>8 \times 10</math> số dạng này.</li> <li>• <b>Các số có dạng <math>a_1a_211111</math> với <math>a_2 \neq 1</math>.</b> Có 9 cách chọn <math>a_1</math> (<math>1, \dots, 9</math>) và có 9 cách chọn <math>a_2</math> (<math>0, 2, 3, \dots, 9</math>). Do đó, có <math>9^2</math> số dạng này.</li> </ul> <p>Như vậy, theo quy tắc cộng, có <math>10^2 + 8 \times 10 + 9^2 = 261</math> số thập phân có 8 chữ số có chứa 111111.</p>	0.5

<p>(f) Gọi <math>D</math> là tập các số thập phân có 8 chữ số trong đó không có hai chữ số nào giống nhau. Kết hợp với phần (a), số các số thập phân có 8 chữ số trong đó có ít nhất hai chữ số giống nhau là số phần tử của tập <math>\overline{D} = A \setminus D</math>. Để xây dựng một phần tử thuộc <math>D</math>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• có 9 cách chọn <math>a_1</math> (<math>1, 2, \dots, 9</math>),</li> <li>• ứng với mỗi cách chọn <math>a_1</math>, có 9 cách chọn <math>a_2</math> từ tập <math>\{0, \dots, 9\} - a_1</math>,</li> <li>• ứng với mỗi cách chọn <math>a_1, a_2</math>, có 8 cách chọn <math>a_3</math> từ tập <math>\{0, \dots, 9\} - \{a_1, a_2\}</math>,</li> <li>• ứng với mỗi cách chọn <math>a_1, a_2, a_3</math>, có 7 cách chọn <math>a_4</math> từ tập <math>\{0, \dots, 9\} - \{a_1, a_2, a_3\}</math>,</li> <li>• ...</li> <li>• ứng với mỗi cách chọn <math>a_1, \dots, a_7</math>, có 3 cách chọn <math>a_8</math> từ tập <math>\{0, \dots, 9\} - \{a_1, \dots, a_7\}</math>.</li> </ul> <p>Do đó, <math> D  = 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 1\,632\,960</math>. Suy ra <math> \overline{D}  =  A  -  D  = 90\,000\,000 - 1\,632\,960 = 88\,367\,040</math>.</p>	0.5
--	-----

Lời giải 5.

[1 điểm]

<p>(a) Giả sử tồn tại hai đỉnh phân biệt <math>u, v</math> trong <math>G</math> thỏa mãn <math>\deg_G(u) = 0</math> và <math>\deg_G(v) = n - 1 &gt; 0</math>. Do bậc của <math>u</math> bằng 0, <math>u</math> không liên kết với bất kỳ đỉnh nào khác trong <math>n - 1</math> đỉnh còn lại. Do đó, với mọi đỉnh <math>w \neq u</math>, ta có <math>\deg_G(w) \leq n - 2</math>. Điều này mâu thuẫn với giả thiết <math>\deg_G(v) = n - 1 &gt; n - 2</math>.</p>	0.5
<p>(b) Giả sử <math>G</math> không là đồ thị liên thông, nghĩa là, tồn tại hai đỉnh <math>u, v \in V</math> sao cho không có đường đi giữa <math>u</math> và <math>v</math> trong <math>G</math>. Gọi <math>H = (V_H, E_H)</math> và <math>K = (V_K, E_K)</math> lần lượt là các thành phần liên thông của <math>G</math> chứa <math>u</math> và <math>v</math>. Ta có <math>\deg_H(w) = \deg_G(w)</math> với mọi <math>w \in V_H</math> và <math>\deg_K(w) = \deg_G(w)</math> với mọi <math>w \in V_K</math>. Do đó, <math>\deg_H(u) \geq n/2</math> và <math>\deg_K(v) \geq n/2</math>. Suy ra <math> V_H  \geq n/2 + 1</math> và <math> V_K  \geq n/2 + 1</math>. Do <math>H</math> và <math>K</math> là các thành phần liên thông của <math>G</math>, <math>V_H</math> và <math>V_K</math> là các tập con không giao nhau của <math>V</math> và <math>V_H \cup V_K \subseteq V</math>. Do đó, <math>n =  V  \geq  V_H  +  V_K  \geq 2(n/2 + 1) = n + 2</math>. Đây là một mâu thuẫn.</p> <p>Một cách chứng minh khác là như sau. Ta chứng minh với mọi cặp đỉnh <math>u, v \in V</math>, tồn tại một đường đi giữa <math>u</math> và <math>v</math> trong <math>G</math>. Với một đỉnh <math>w \in V</math> bất kỳ, gọi <math>N[w]</math> là tập chứa <math>w</math> và các đỉnh liên kết với <math>w</math> trong <math>G</math>. Theo giả thiết <math> N[w]  \geq n/2 + 1</math>. Với mọi cặp đỉnh <math>u, v \in V</math>, ta có <math> N[u]  \geq n/2 + 1</math> và <math> N[v]  \geq n/2 + 1</math>. Do đó, <math> N[u]  +  N[v]  \geq n + 2 &gt; n</math>. Mặt khác, do <math>N[u] \cup N[v] \subseteq V</math>, ta có <math>n =  V  \geq  N[u] \cup N[v]  =  N[u]  +  N[v]  -  N[u] \cap N[v]  \geq n + 2 -  N[u] \cap N[v] </math>. Do đó, <math> N[u] \cap N[v]  \geq 2</math>. Do đó, <math>N[u] \cap N[v] \neq \emptyset</math>. Nếu <math>u \in N[u] \cap N[v]</math> thì <math>u</math> và <math>v</math> là hai đỉnh liên kết nhau, và do đó cạnh <math>uv</math> là một đường đi giữa <math>u</math> và <math>v</math> trong <math>G</math>. Ngược lại, nếu <math>u \notin N[u] \cap N[v]</math> thì ta cũng có <math>v \notin N[u] \cap N[v]</math> và do đó tồn tại một đỉnh <math>w</math> khác với cả <math>u</math> và <math>v</math> thỏa mãn <math>w \in N[u] \cap N[v]</math>. Do đó, các cạnh <math>uw</math> và <math>wv</math> tạo thành một đường đi giữa <math>u</math> và <math>v</math> trong <math>G</math>.</p>	0.5

Lời giải 6.

[2 điểm]

<p>(a) Mỗi đỉnh trong đồ thị <math>C_n</math> có bậc 2, do đó tổng bậc của tất cả các đỉnh trong <math>C_n</math> là <math>2n</math>. Theo Định lý bắt tay, số cạnh của <math>C_n</math> là <math>2n/2 = n</math>.</p> <p>Theo định nghĩa, mỗi đỉnh trong <math>Q_n</math> ứng với một chuỗi nhị phân độ dài <math>n</math>. Do đó, <math>Q_n</math> có <math>2^n</math> đỉnh. Mỗi đỉnh trong đồ thị <math>Q_n</math> có bậc <math>n</math>, do đó tổng bậc của tất cả các đỉnh trong <math>Q_n</math> là <math>n2^n</math>. Theo Định lý bắt tay, số cạnh của <math>Q_n</math> là <math>n2^n/2 = n2^{n-1}</math>.</p>	1
--	---



(b) Giả sử không có đường đi nào giữa $u$ và $v$ trong $G$ . Do đó, $u$ và $v$ không thuộc cùng một thành phần liên thông của $G$ . Gọi $H = (V_H, E_H)$ và $K = (V_K, E_K)$ lần lượt là các thành phần liên thông của $G$ chứa $u$ và $v$ . Do $u \neq v$ , $H$ và $K$ là hai đồ thị phân biệt. Do $H$ là một thành phần liên thông của $G$ , với mọi $w \in V_H$ , ta có $\deg_H(w) = \deg_G(w)$ . Do đó, với mọi đỉnh $w \neq u$ trong $H$ , $\deg_H(w)$ là chẵn, và $\deg_H(u)$ là lẻ. Suy ra $\sum_{w \in V_H} \deg_H(w)$ phải là một số lẻ. Điều này mâu thuẫn với Định lý bắt tay. Do đó, tồn tại một đường đi trong $G$ giữa $u$ và $v$ .	<b>1</b>
---	----------

Hà Nội, ngày 22 tháng 05 năm 2023  
 NGƯỜI LÀM ĐÁP ÁN  
 (ký và ghi rõ họ tên)

Hoàng Anh Đức