

COPYRIGHT NOTICE

THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2023 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2023-04-11

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2023-04-11



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.

Họ và Tên: _____

Mã Sinh Viên: _____ Lớp: _____

Câu:	1	Tổng
Điểm tối đa:	10	10
Điểm:		

1. Chứng minh Định lý cơ bản của số học dựa trên các gợi ý sau:

Định lý 1 (Định lý cơ bản của số học). Mọi số nguyên dương $n > 1$ có thể được viết một cách duy nhất dưới dạng một số nguyên tố hoặc tích của các ước nguyên tố của nó theo thứ tự tăng dần.

- (a) (5 điểm) Chứng minh bằng quy nạp mạnh: Mọi số nguyên dương $n > 1$ có thể được biểu diễn dưới dạng một số nguyên tố hoặc tích của các ước nguyên tố của n theo thứ tự tăng dần.
- (b) (4 điểm) Chứng minh rằng nếu $n \geq 1$ và p là một số nguyên tố thỏa mãn $p \mid a_1 a_2 \dots a_n$, trong đó $a_i \in \mathbb{Z}$ với $1 \leq i \leq n$, thì $p \mid a_j$ với j nào đó thỏa mãn $1 \leq j \leq n$.
- (c) (1 điểm) Sử dụng phần (b) để chứng minh rằng nếu một số nguyên $n > 1$ được biểu diễn dưới dạng một số nguyên tố hoặc tích của các ước nguyên tố của n theo thứ tự tăng dần thì biểu diễn đó là duy nhất.

Lời giải:

(a) Ta chứng minh phát biểu $P(n)$ sau đúng với mọi $n \geq 2$ bằng phương pháp quy nạp

n có thể được biểu diễn dưới dạng tích của các ước nguyên tố của n theo thứ tự tăng dần.

- **Bước cơ sở:** $P(2)$ đúng, do $2 = 2$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(j)$ đúng với mọi số nguyên j thỏa mãn $2 \leq j \leq k$ với $k \geq 2$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, nếu $k+1$ là số nguyên tố thì hiển nhiên $P(k+1)$ đúng. Ngược lại, nếu $k+1$ là hợp số, ta có $k+1 = a \cdot b$ với $2 \leq a, b \leq k$. Theo giả thiết quy nạp, $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_h^{a_h}$ với $a_i \geq 0$ và p_i ($1 \leq i \leq h$) là các số nguyên tố thỏa mãn $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_h$ và tương tự $b = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_m^{b_m}$ với $b_i \geq 0$ và q_i ($1 \leq i \leq m$) là các số nguyên tố thỏa mãn $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m$, trong đó $m, h \geq 1$ là các số nguyên dương nào đó. Do đó, ta có thể viết $k+1 = a \cdot b = (p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_h^{a_h}) \cdot (q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_m^{b_m})$. Bằng cách sắp xếp lại các thừa số nguyên tố $p_1, \dots, p_h, q_1, \dots, q_m$ theo thứ tự tăng dần, ta có điều phải chứng minh.

(b) Ta chứng minh phát biểu $Q(n)$ sau đúng với mọi $n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp

Nếu p là một số nguyên tố thỏa mãn $p \mid a_1 a_2 \dots a_n$, trong đó $a_i \in \mathbb{Z}$ với $1 \leq i \leq n$, thì tồn tại $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $p \mid a_j$.

- **Bước cơ sở:** $Q(1)$ đúng, do nếu $p \mid a_1$ thì hiển nhiên $j = 1$ thỏa mãn điều kiện đề ra. Ta chứng minh $Q(2)$ đúng, nghĩa là, nếu p là một số nguyên tố thỏa mãn $p \mid a_1 a_2$, trong đó $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, thì $p \mid a_1$ hoặc $p \mid a_2$. Thật vậy, giả sử $p \nmid a_1$ và $p \nmid a_2$. Theo Định lý Bézout, tồn tại $s, t \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $\gcd(p, a_1) = 1 = sp + ta_1$. Nhân cả hai vế của đẳng thức trên với a_2 cho ta $a_2 = spa_2 + ta_1 a_2$. Do $p \mid a_1 a_2$, ta cũng có $p \mid (ta_1 a_2)$. Thêm vào đó, $p \mid (spa_2)$. Do đó, $p \mid (spa_2 + ta_1 a_2)$, nghĩa là $p \mid a_2$, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu. Tóm lại, ta có $Q(2)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $Q(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $1 \leq j \leq k$ với số nguyên $k \geq 2$ nào đó. Ta chứng minh $Q(k+1)$ đúng. Thật vậy, giả sử $p \mid a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1}$ với số nguyên tố p nào đó. Nếu $p \mid a_{k+1}$ thì hiển nhiên $Q(k+1)$ đúng. Nếu $p \nmid a_{k+1}$, do $Q(2)$ đúng, ta có $p \mid a_1 a_2 \dots a_k$. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại $j \in \{1, 2, \dots, k\} \subseteq \{1, 2, \dots, k, k+1\}$ sao cho $p \mid a_j$. Do đó, $Q(k+1)$ đúng.

(c) Ta sử dụng phương pháp phản chứng. Giả sử với các tập số nguyên tố $A = \{p_1, p_2, \dots, p_h\}$ ($p_1 \leq \dots \leq p_h$) và $B = \{q_1, \dots, q_m\}$ ($q_1 \leq \dots \leq q_m$) với $A \neq B$, ta có $(\star) n = p_1^{a_1} \dots p_h^{a_h} = q_1^{b_1} \dots q_m^{b_m}$. Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì không làm gì. Ngược lại, ta chia cả hai vế của (\star) cho tích các số nguyên tố trong $A \cap B$. Giả sử kết quả thu được là

$$r_1^{c_1} \dots r_u^{c_u} = s_1^{d_1} \dots s_v^{d_v}$$

trong đó $\{r_1, \dots, r_u\} = A - B$ và $\{s_1, \dots, s_v\} = B - A$. Do $r_1 \mid (r_1^{c_1} \dots r_u^{c_u})$, ta cũng có $r_1 \mid (s_1^{d_1} \dots s_v^{d_v})$. Theo phần (b), tồn tại $j \in \{1, 2, \dots, v\}$ thỏa mãn $r_1 \mid s_j^{d_j}$. Do cả r_1 và s_j đều là số nguyên tố, ta có $r_1 = s_j$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $r_1 \in A - B$ và $s_j \in B - A$. Do đó, ta có điều phải chứng minh.