

# COPYRIGHT NOTICE

## THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

### COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-11-27

### BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-11-27



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

# VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

## Lý thuyết đồ thị II

Đường đi ngắn nhất, Đồ thị phẳng, Tô màu đồ thị

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học  
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội  
[hoanganhduc@hus.edu.vn](mailto:hoanganhduc@hus.edu.vn)



# Nội dung



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

## Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

## Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

## Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

## Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

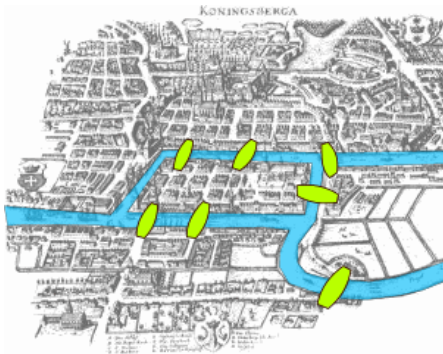
References

# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

Bảy cây cầu ở Königsberg



Hình: Leonhard Euler  
1707–1783 (Wikipedia)



Hình: Bản đồ Königsberg cũ (Wikipedia)

## Bảy cây cầu ở Königsberg

Tìm một tuyến đường đi qua mỗi cây cầu chính xác một lần và quay lại vị trí xuất phát

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

2

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

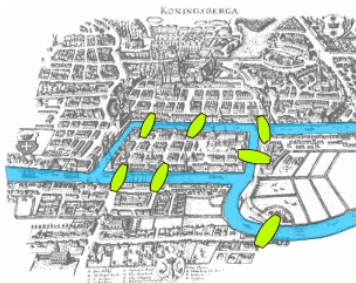
Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

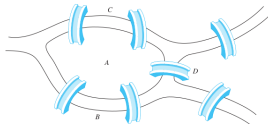
References

# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

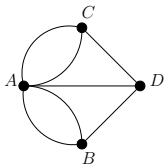
Bảy cây cầu ở Königsberg



(a) Bản đồ Königsberg cũ (Wikipedia)



(b) Bản đồ Königsberg cũ đơn giản hóa



(c) Đồ thị tương ứng

## ■ Đồ thị tương ứng:

- Mỗi vùng đất ứng với một đỉnh
  - Mỗi cây cầu nối hai vùng đất ứng với một cạnh
- ## ■ Tìm chu trình đơn trong đồ thị chứa tất cả các cạnh

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

3

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

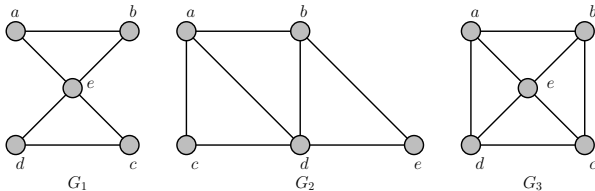
# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

## Đường đi Euler



Cho đồ thị  $G = (V, E)$ . Một **đường đi/chu trình Euler (Eulerian path/circuit)** trong  $G$  là một đường đi/chu trình đơn có chứa mọi cạnh của  $G$

## Ví dụ 1



- $G_1$  có chu trình Euler,  $G_2$  và  $G_3$  không có
- $G_2$  có đường đi Euler,  $G_3$  không có

## Bài tập 1

Chứng minh rằng nếu  $G = (V, E)$  là một đa đồ thị vô hướng thỏa mãn  $\deg_G(u) \geq 2$  với mọi  $u \in V$  thì  $G$  có một chu trình đơn

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

4 Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

References

# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

## Đường đi Euler



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

### Định lý 1

*Một đa đồ thị vô hướng liên thông có một chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của đồ thị có bậc chẵn*

## Chứng minh.

( $\Rightarrow$ ) Giả sử một đa đồ thị vô hướng liên thông  $G = (V, E)$  có một chu trình Euler  $e_1, e_2, \dots, e_m$  trong đó  $e_i = x_{i-1}x_i \in E$  với  $1 \leq i \leq m$  và  $x_0 = x_m = u$ .

- Với  $v = x_i$  ( $2 \leq i \leq m-1$ ): chu trình đi vào  $v$  qua  $e_i$  và đi ra qua  $e_{i+1}$
- Với  $u = x_0 = x_m$ : chu trình đi ra  $u$  qua  $e_1$  và trở lại  $u$  qua  $e_m$

□

5

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

References

# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

## Đường đi Euler

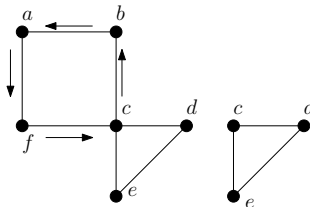


## Chứng minh (tiếp).

( $\Leftarrow$ ) Giả sử mọi đỉnh của  $G$  đều có bậc chẵn. Lập lại quá trình chọn chu trình sau cho đến khi đã chọn hết các cạnh (**Thuật toán Hierholzer (1873)**)

- Xuất phát từ đỉnh  $x_0 = a$  bất kỳ
- Xây dựng một đường đi đơn bằng cách chọn tùy ý các cạnh  $x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k$  để thêm vào đường đi cho đến khi không chọn được nữa
- Do bậc của mỗi đỉnh là chẵn, với mỗi đỉnh  $x_i$ , ta luôn có thể đi vào từ cạnh  $x_{i-1}x_i$  và đi ra từ cạnh  $x_ix_{i+1}$ . Do bậc của  $a$  cũng phải là chẵn, cạnh cuối cùng được chọn sẽ có dạng  $ya$
- Bỏ đi các cạnh đã chọn và các đỉnh không kề với các cạnh còn lại

Cuối cùng, ghép các chu trình trên thành một chu trình Euler.  
(Thuật toán chạy trong thời gian  $O(|E|)$ )



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

6

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References



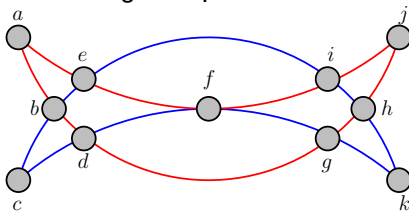
# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

## Đường đi Euler



## Ví dụ 2

Tìm chu trình Euler trong đồ thị sau



- Bắt đầu từ  $x_0 = a$ , chọn tùy ý các cạnh  $x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k, x_k a$ . Ví dụ: **ae, ef, fi, ij, jh, hg, gd, db, ba**
- Bỏ đi các cạnh đã chọn và các đỉnh  $a, j$
- Bắt đầu từ  $x_0 = c$ , chọn tùy ý các cạnh  $x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{l-1}x_l, x_l c$ . Ví dụ: **cb, be, ei, ih, hk, kg, gf, fd, dc**
- Bỏ đi các cạnh đã chọn và các đỉnh cô lập còn lại
- Ghép hai chu trình đã chọn thành một chu trình Euler:
  - **ae, ei, ih, hk, kg, gf, fd, dc, cb, be, ef, fi, ij, jh, hg, gd, db, ba**
  - **ae, ef, fd, dc, cb, be, ei, ih, hk, kg, gf, fi, ij, jh, hg, gd, db, ba**
  - ...

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

7

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

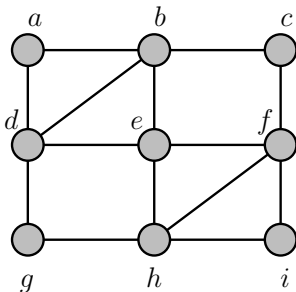
## Đường đi Euler



Với những giá trị nào của  $n$  thì các đồ thị sau có chu trình Euler?

- (a)  $K_n$  (c)  $W_n$   
 (b)  $C_n$  (d)  $Q_n$

*Tìm chu trình Euler trong đồ thị sau*



## Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

8

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

### Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

## Đồ thi phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thi

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

## References

# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

## Đường đi Euler



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

References

### Định lý 2

*Một đa đồ thị vô hướng liên thông  $G$  có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi có đúng hai đỉnh của  $G$  có bậc lẻ.*

## Chứng minh.

( $\Rightarrow$ ) Giả sử  $G$  có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler

- Hai đỉnh ở hai đầu mút của đường đi có bậc lẻ
- Các đỉnh còn lại có bậc chẵn

( $\Leftarrow$ ) Giả sử  $G$  có chính xác hai đỉnh bậc lẻ  $u, v$

- Tìm chu trình Euler của đồ thị  $G + uv$
- Xóa cạnh  $uv$  trong chu trình để thu được đường đi Euler trong  $G$



# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

## Đường đi Euler



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

10 Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

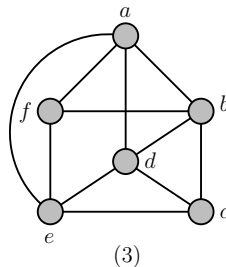
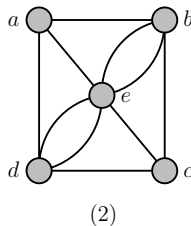
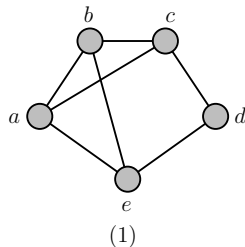
Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

## Bài tập 4

Hãy xác định xem các đồ thị sau có chu trình/đường đi Euler hay không? Nếu có, hãy tìm một chu trình/đường đi Euler trong đồ thị đó

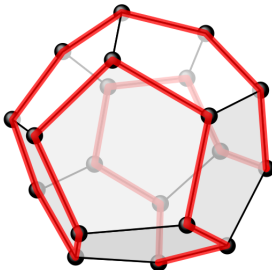


# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

Trò chơi “Vòng quanh thế giới” (1857)



**Hình:** Sir William Rowan Hamilton 1805–1865 (Wikipedia)



**Hình:** Trò chơi “Vòng quanh thế giới” (Wikipedia)

## Trò chơi “Vòng quanh thế giới”

Mỗi đỉnh trong 20 đỉnh của khối 12 mặt đại diện cho một thành phố. Tìm đường đi xuất phát từ một đỉnh dọc theo các cạnh của khối, ghé thăm mỗi đỉnh còn lại một lần, và quay lại vị trí ban đầu

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

11

48

# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

Trò chơi “Vòng quanh thế giới” (1857)



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

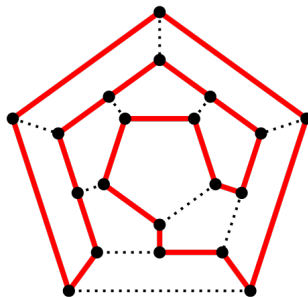
Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References



(a) Trò chơi “Vòng quanh thế giới”  
(Wikipedia)



(b) Đồ thị đẳng cấu với khối 12 mặt  
(Wikipedia)

12

48

# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

## Đường đi Hamilton



Cho  $G = (V, E)$  là một đồ thị vô hướng

- Một **đường đi Hamilton** trong  $G$  là một đường đi đơn

$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$  thỏa mãn điều kiện

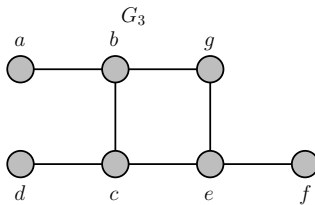
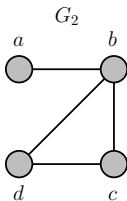
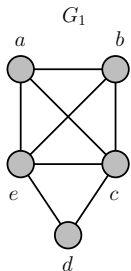
$V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  và  $x_i \neq x_j$  với  $0 \leq i < j \leq n$

- Một **chu trình Hamilton** trong  $G$  là một chu trình đơn

$x_0, x_1, x_{n-1}, x_n, x_0$  thỏa mãn điều kiện  $x_0, x_1, x_{n-1}, x_n$  là một đường đi Hamilton

## Bài tập 5

Các đồ thị sau có chu trình/đường đi Hamilton không?



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

13

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

## Đường đi Hamilton



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

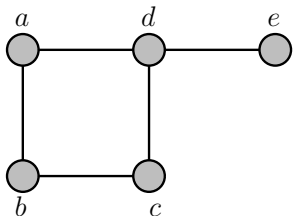
Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

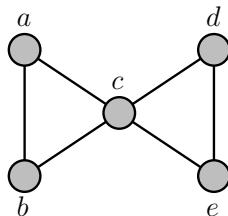
Tô màu đồ thị phẳng

References

- Chưa có điều kiện cần và đủ để kiểm tra xem một đồ thị có chu trình Hamilton hay không
- Một số tính chất có thể được sử dụng để chỉ ra một đồ thị *không có chu trình Hamilton*
  - Đồ thị có chứa đỉnh bậc 1 không có chu trình Hamilton
  - Nếu đỉnh  $v$  của đồ thị  $G$  có bậc 2 thì hai cạnh kề với  $v$  thuộc mọi chu trình Hamilton của  $G$  (nếu có)
  - Một chu trình Hamilton không chứa một chu trình con nào có số đỉnh nhỏ hơn nó



$G$



$H$

14

48



# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

## Đường đi Hamilton

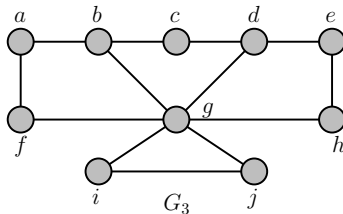
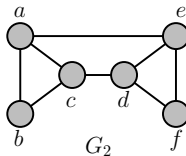
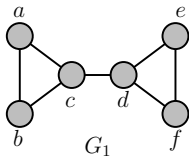


### Bài tập 6

Hãy cho ví dụ về một đồ thị mà chu trình Euler của nó cũng là chu trình Hamilton

### Bài tập 7

Trong các đồ thị sau, đồ thị nào có chu trình Hamilton? Tại sao?



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

15

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

## Đường đi Hamilton



### Định lý 3: Định lý Dirac

Nếu  $G = (V, E)$  là một đơn đồ thị vô hướng gồm  $n$  đỉnh ( $n \geq 3$ ) thỏa mãn điều kiện bậc của mỗi đỉnh trong  $G$  lớn hơn hoặc bằng  $n/2$  thì  $G$  có một chu trình Hamilton

## Bài tập 8 ((\*) Chứng minh Định lý Dirac)

- (a) Để thấy Định lý đúng với  $n = 3$ . Giả sử  $n \geq 4$
- (b)  $G$  phải liên thông (Tại sao?)
- (c) Gọi  $P = v_0, v_1, \dots, v_k$  là đường đi đơn có độ dài lớn nhất trong  $G$  ( $0 \leq k \leq n - 1$ ).
  - Mọi đỉnh kề với  $v_0$  hoặc  $v_k$  đều phải thuộc  $P$  (Tại sao?)
  - Do  $\deg(v_k) \geq n/2$ , có ít nhất  $n/2$  cạnh phân biệt  $v_i v_{i+1}$  của  $P$  thỏa mãn  $v_i v_k \in E$ . Tương tự, do  $\deg(v_0) \geq n/2$ , có ít nhất  $n/2$  cạnh phân biệt  $v_j v_{j+1}$  của  $P$  thỏa mãn  $v_0 v_{j+1} \in E$
  - Do  $P$  có ít hơn  $n$  cạnh, tồn tại một cạnh  $v_q v_{q+1}$  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện trên:  $v_q v_k \in E$  và  $v_0 v_{q+1} \in E$
- (d)  $P$  chứa tất cả các đỉnh của  $G$  (Tại sao?)

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

16

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

## Đường đi Hamilton



### Định lý 4: Định lý Ore

Nếu  $G = (V, E)$  là một đơn đồ thị vô hướng gồm  $n$  đỉnh ( $n \geq 3$ ) thỏa mãn điều kiện  $\deg(u) + \deg(v) \geq n$  với mọi cặp đỉnh  $u, v$  không kề nhau trong  $G$  thì  $G$  có một chu trình Hamilton

## Bài tập 9

Chứng minh Định lý Dirac (Định lý 3) bằng cách sử dụng Định lý Ore

## Bài tập 10 (★)

Cho  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  là một đồ thị hai phần với  $|V_1| = |V_2| = n$  ( $n \geq 2$ ). Chứng minh rằng nếu  $\deg(v) > n/2$  với mọi đỉnh  $v \in V = V_1 \cup V_2$  thì  $G$  có một chu trình Hamilton (**Gợi ý:** Xem lại chứng minh của Định lý Dirac.)

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

# Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

## Đường đi Hamilton



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

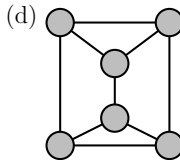
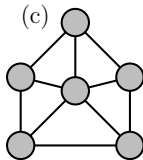
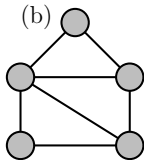
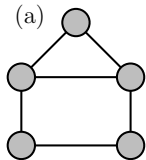
Tô màu đồ thị phẳng

References

## Bài tập 11

Với mỗi đồ thị sau, hãy xác định

- (i) có thể sử dụng Định lý Dirac để chứng minh đồ thị có chu trình Hamilton không?
- (ii) có thể sử dụng Định lý Ore để chứng minh đồ thị có chu trình Hamilton không?
- (iii) đồ thị có chu trình Hamilton không?



18

48

# Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

19 Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

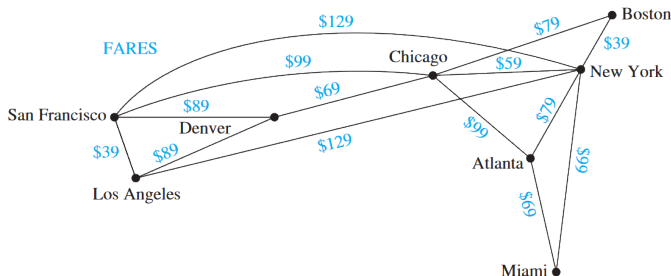
Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

References

- Một **đồ thị có trọng số (weighted graph)**  $G = (V, E, w)$  gồm tập đỉnh  $V$ , tập cạnh  $E$ , và một hàm  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  gán mỗi cạnh (cung)  $e \in E$  bởi một số thực  $w(e)$  gọi là **trọng số (weight)** của cạnh (cung)  $e$
- Trong bài giảng, chúng ta chỉ xét các đồ thị có **trọng số dương**, nghĩa là,  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$



**Hình:** Đồ thị có trọng số mô tả giá vé của các chuyến bay giữa một số thành phố ở Mỹ (từ [Rosen 2012], Chương 10)

# Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và

Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất

20

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

Cho  $G = (V, E, w)$  là đơn đồ thị có trọng số

- Một đường đi từ  $u$  đến  $v$  qua các cạnh (cung)  $e_1, e_2, \dots, e_n$  có **độ dài (length)**  $c(u, v) = \sum_{i=1}^n w(e_i)$
- **Khoảng cách (distance)** giữa hai đỉnh  $u, v$ , ký hiệu  $d_G(u, v)$ , là chiều dài nhỏ nhất của một đường đi từ  $u$  đến  $v$

## Bài toán đường đi ngắn nhất

- **Input:** Đơn đồ thị vô hướng  $G = (V, E, w)$  trong đó  $V = \{v_0 = a, v_1, \dots, v_n = z\}$ ,  $w : [V]^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  với  $w(v_i, v_j) = \infty$  nếu  $v_i v_j \notin E$
- **Output:** Khoảng cách  $d_G(a, z)$

# Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Dijkstra



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

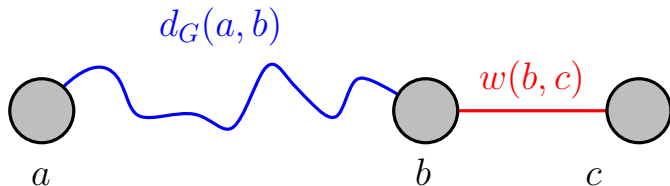
Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

References

## Bài toán đường đi ngắn nhất

- **Input:** Đơn đồ thị vô hướng  $G = (V, E, w)$  trong đó  $V = \{v_0 = a, v_1, \dots, v_n = z\}$ ,  $w : [V]^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  với  $w(v_i, v_j) = \infty$  nếu  $v_i v_j \notin E$
- **Output:** Khoảng cách  $d_G(a, z)$

**Ý tưởng:** Tìm đường đi ngắn nhất từ  $a$  tới các đỉnh kế tiếp cho đến khi đạt đến  $z$ . Chú ý rằng với các đỉnh  $a, b, c$ , *độ dài đường đi ngắn nhất từ  $a$  đến  $c$  đi qua đỉnh  $b$  kề với  $c$  bằng khoảng cách giữa  $a$  và  $b$  cộng với trọng số cạnh nối  $b$  và  $c$*



21

48

# Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Dijkstra



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

22

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

## Thuật toán Dijkstra

- Khởi tạo: Gán nhãn  $L(a) := 0$ ,  $L(v_i) := \infty$  với mọi  $v_i \neq a$ , và lấy một tập  $S := \emptyset$ .
- Trong khi  $z \notin S$ , lặp lại các bước sau:
  - Gọi  $u$  là đỉnh không thuộc  $S$  với  $L(u)$  nhỏ nhất. Thêm  $u$  vào  $S$ .
  - Với mọi đỉnh  $v$  không thuộc  $S$ 
    - Nếu  $L(u) + w(u, v) < L(v)$  thì gán  $L(v) := L(u) + w(u, v)$  (Sửa đổi nhãn của các đỉnh không thuộc  $S$ )
- Cuối cùng,  $L(z)$  là độ dài đường đi ngắn nhất (khoảng cách) từ  $a$  đến  $z$ .



# Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Dijkstra



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và

Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

23

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

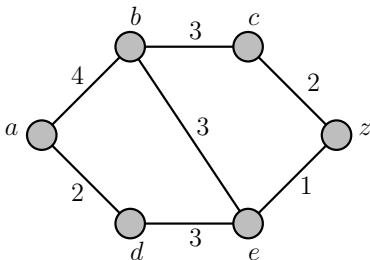
Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

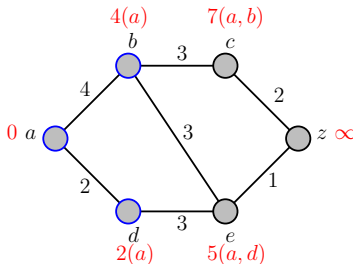
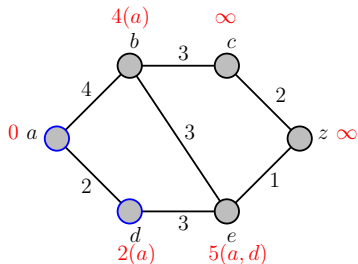
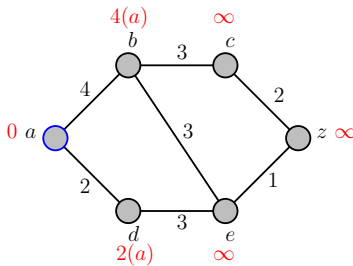
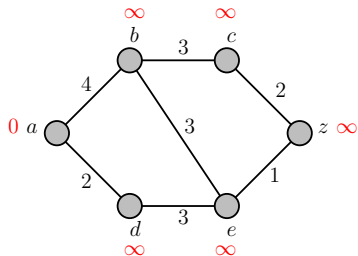
## Ví dụ 3

Sử dụng thuật toán Dijkstra để tìm khoảng cách giữa hai đỉnh  $a$  và  $z$  trong đồ thị sau



# Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Dijkstra



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

24

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

# Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Dijkstra



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và

Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

25

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

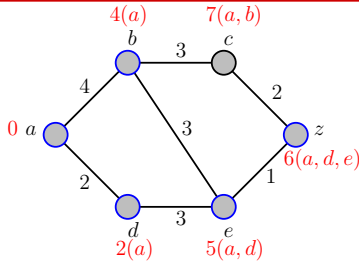
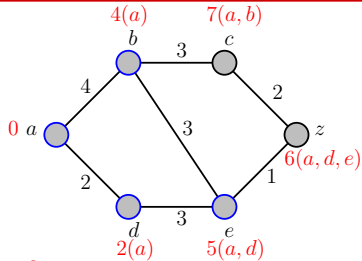
Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

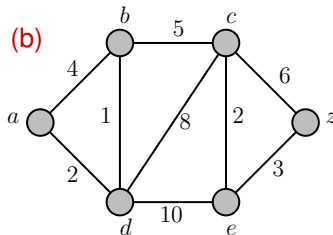
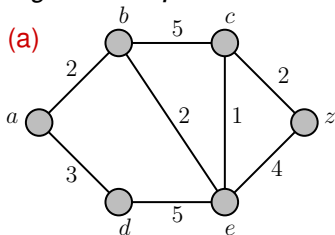
Tô màu đồ thị phẳng

References



## Bài tập 12

Áp dụng thuật toán Dijkstra để tìm khoảng cách từ  $a$  đến  $z$  trong mỗi đồ thị sau



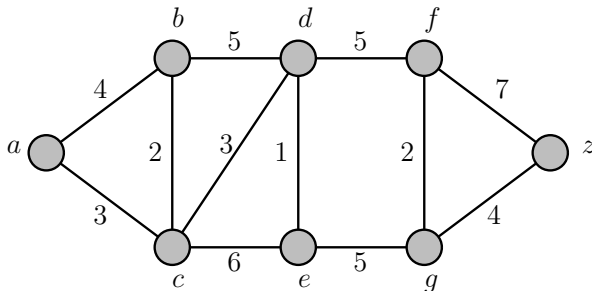
# Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Dijkstra



## Bài tập 13

Tìm độ dài đường đi ngắn nhất từ  $a$  đến  $z$  trong đồ thị sau bằng thuật toán Dijkstra



## Bài tập 14

Đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị có trọng số  $G = (V, E, w)$  có phải là duy nhất hay không nếu như trọng số của các cạnh là phân biệt, nghĩa là với hai cạnh  $e, f \in E$  bất kỳ thì  $w(e) \neq w(f)$ ?

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và

Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

26

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

# Bài toán đường đi ngắn nhất

## Thuật toán Dijkstra



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

- Tính đúng đắn của thuật toán Dijkstra có thể được chứng minh bằng cách **sử dụng bất biến vòng lặp**. Cụ thể, trước mỗi lần lặp, hàm  $L$  và tập  $S$  thỏa mãn các tính chất sau:
  - (1) Với mọi  $v \in S$ ,  $L(v)$  là khoảng cách từ  $a$  đến  $v$
  - (2) Với mọi  $v \in V - S$ ,  $L(v)$  là độ dài đường đi ngắn nhất từ  $a$  đến  $v$  **chỉ qua các đỉnh thuộc**  $S \cup \{v\}$
  - (3) Với mọi  $u \in S$  và  $v \in V - S$ ,  $L(u) \leq L(v)$
- Thông thường, thuật toán Dijkstra chạy trong thời gian  $O(n^2)$ , với  $n = |V|$
- Với cấu trúc dữ liệu “đồng Fibonacci” (Fibonacci Heap), thuật toán Dijkstra có thể được lập trình để chạy trong thời gian  $O(m + n \log n)$ , với  $n = |V|$  và  $m = |E|$ . Hiệu quả của cách lập trình này được thể hiện khi chạy với các “đồ thị thưa” (sparse graph) cực lớn (các đồ thị có  $m$  rất nhỏ so với  $n^2$ )
- Thuật toán Dijkstra cũng có thể được lập trình để xuất ra một đường đi ngắn nhất từ  $a$  đến mỗi đỉnh khác trong đồ thị

27

48

# Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và

Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

28

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

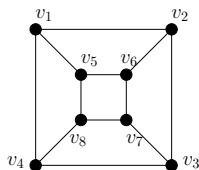
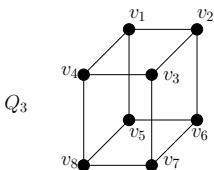
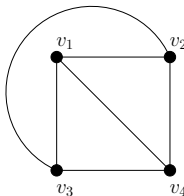
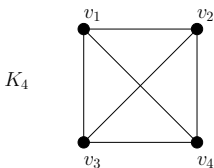
Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

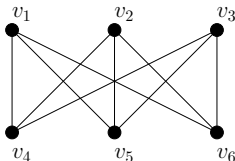
- Một đồ thị vô hướng được gọi là **đồ thị phẳng (planar graph)** nếu nó có thể được vẽ trên mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau (ở một điểm không phải là đầu mút của cạnh).
- Hình vẽ như thế được gọi là một **biểu diễn phẳng (planar representation)** của đồ thị.

## Ví dụ 4



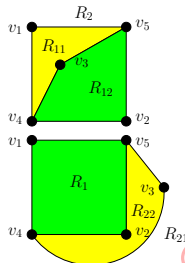
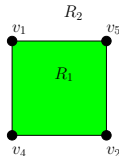
## Ví dụ 5

$K_{3,3}$  không là đồ thị phẳng



Ta chứng minh khẳng định trên bằng phản chứng. Giả sử  $K_{3,3}$  là đồ thị phẳng

- Trong bất kỳ biểu diễn phẳng nào của  $K_{3,3}$  ta có  $v_1$  và  $v_2$  đều phải luôn nối với  $v_4$  và  $v_5$ . Các đỉnh này chia mặt phẳng thành hai miền  $R_1$  và  $R_2$ .
- Đỉnh  $v_3$  thuộc  $R_1$  hoặc  $R_2$
- Vị trí của  $v_6$ ?



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

29 Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

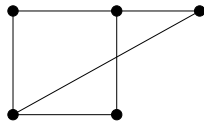
Tô màu đồ thị

Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

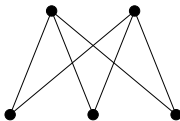
References

## Bài tập 15

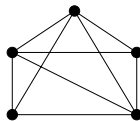
Tìm một biểu diễn phẳng của các đồ thị phẳng sau



$G_1$



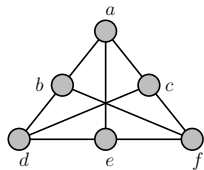
$G_2$



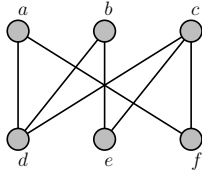
$G_3$

## Bài tập 16

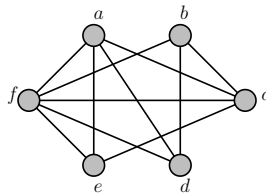
Các đồ thị sau có phải đồ thị phẳng không? Nếu đúng, hãy vẽ một biểu diễn phẳng của đồ thị đó



$G_1$



$G_2$



$G_3$

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

30

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

References



# Đồ thị phẳng

## Công thức Euler



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và

Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

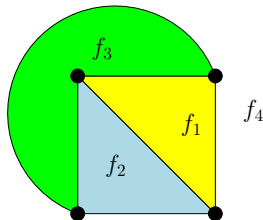
References

- Biểu diễn phẳng của một đồ thị phẳng  $G = (V, E)$  chia mặt phẳng thành các **miền (region)**, kể cả **miền vô hạn (unbounded region)**
- Hai điểm bất kỳ trong cùng một miền có thể được nối với nhau bằng một nét liền mà không cắt bất kỳ cạnh nào
- **Bậc (degree)** của một miền  $f$ , ký hiệu  $\deg(f)$ , là số cạnh của  $G$  trên biên của  $f$

## Ví dụ 6

Biểu diễn phẳng của  $K_4$

- chia mặt phẳng thành 4 miền  $f_1, f_2, f_3$ , và  $f_4$ ; và
- $\deg(f_1) = \deg(f_2) = \deg(f_3) = \deg(f_4) = 3$
- **Chú ý:**  $\sum_{\text{miền } f \text{ của } G} \deg(f) \leq 2|E|$  (Mỗi cạnh thuộc tối đa hai miền)



31

48



## Định lý 5: Công thức Euler

Giả sử  $G$  là một đơn đồ thị phẳng và liên thông gồm  $m$  cạnh,  $n$  đỉnh, và  $r$  miền. Ta có  $n - m + r = 2$

## Chứng minh.

- Xây dựng dãy đồ thị  $G_1, G_2, \dots, G_m = G$ 
  - Chọn một cạnh bất kỳ của  $G$  làm  $G_1$
  - $G_i$  được tạo thành từ  $G_{i-1}$  bằng cách thêm một cạnh bất kỳ liên thuộc với một đỉnh của  $G_{i-1}$  ( $i \in \{2, 3, \dots, m\}$ )
  - Gọi  $n_i, m_i, r_i$  lần lượt là số đỉnh, cạnh, và miền của một biểu diễn phẳng của  $G_i$
- Công thức Euler đúng với mọi  $G_i$ 
  - Ta có  $n_1 - m_1 + r_1 = 2 - 1 + 1 = 2$
  - Giả sử công thức Euler đúng với  $G_i$ , tức là  $n_i - m_i + r_i = 2$   
Gọi  $a_{i+1}b_{i+1}$  là cạnh thêm vào  $G_i$  để tạo thành  $G_{i+1}$ . Có hai khả năng:
    - một trong hai đỉnh  $a_{i+1}, b_{i+1}$  không thuộc  $G_{i-1}$
    - cả  $a_{i+1}$  và  $b_{i+1}$  thuộc  $G_{i-1}$

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và

Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

32

48



## Hệ quả 6

*Giả sử  $G$  là một đồ thị phẳng liên thông gồm  $m$  cạnh và  $n$  đỉnh ( $n \geq 3$ ). Khi đó,  $m \leq 3n - 6$ . Thêm vào đó, nếu  $m = 3n - 6$  thì mỗi miền của  $G$  có chính xác 3 cạnh trên biên.*

## Chứng minh.

- Nhận xét rằng mỗi miền của  $G$  có ít nhất 3 cạnh trên biên,

do đó  $\sum_{\text{miền } f \text{ của } G} \deg(f) \geq 3r$ . Mặt khác, ta cũng có

$$\sum_{\text{miền } f \text{ của } G} \deg(f) \leq 2m. \text{ Suy ra } 3r \leq 2m.$$

- Áp dụng công thức Euler, ta có

$$2 = n - m + r \leq n - m + 2m/3, \text{ suy ra } m \leq 3n - 6.$$

## Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

33



48



## Bài tập 17

Giả sử  $G$  là một đồ thị đơn phẳng và liên thông gồm 20 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc 3. Một biểu diễn phẳng của  $G$  chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

## Bài tập 18

Trong số các đồ thị không phẳng sau, đồ thị nào thỏa mãn điều kiện sau: nếu bỏ đi một đỉnh bất kỳ và các cạnh liên thuộc với đỉnh đó thì ta thu được một đồ thị phẳng.

(a)  $K_5$

(c)  $K_{3,3}$

(b)  $K_6$

(d)  $K_{3,4}$

## Bài tập 19

Chứng minh  $K_5$  không là đồ thị phẳng

## Bài tập 20

Chứng minh rằng nếu  $G$  là một đơn đồ thị phẳng và liên thông thì  $G$  có một đỉnh có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 5

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và

Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

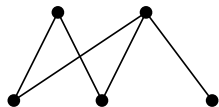
Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

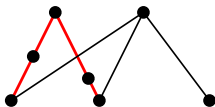
References

- Cho đồ thị  $G$ . Một **phép phân chia (subdivision)** một cạnh  $e$  của  $G$  được thực hiện bằng cách thay thế  $e$  bằng một đường đi đơn
- Hai đồ thị  $G_1$  và  $G_2$  được gọi là **đồng phôi (homeomorphic)** nếu chúng được xây dựng từ cùng một đồ thị thông qua một dãy các phép phân chia

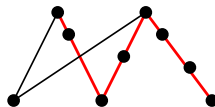
## Ví dụ 7



$G$



$G_1$



$G_2$

### Định lý 7: Định lý Kuratowski

$G$  là đồ thị phẳng khi và chỉ khi nó không chứa bất kỳ đồ thị nào đồng phôi với  $K_5$  hoặc  $K_{3,3}$

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và

Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

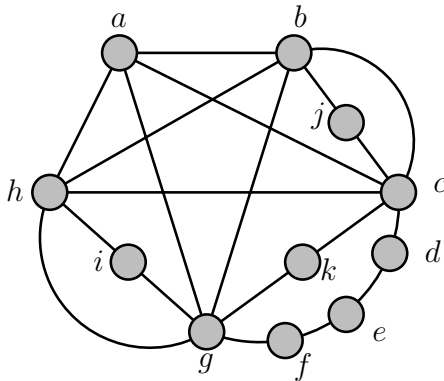
References

35

48

## Bài tập 21

Sử dụng Định lý Kuratowski, hãy chứng minh đồ thị sau không là đồ thị phẳng



Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler

36 Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

References

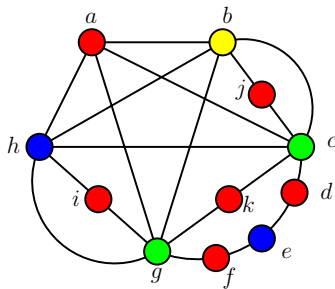
# Tô màu đồ thị

Giới thiệu



Cho đơn đồ thị vô hướng  $G = (V, E)$

- **Tô màu** một đồ thị đơn là sự gán màu cho các đỉnh của đồ thị sao cho không có hai đỉnh liên kề được gán cùng một màu. Cụ thể, với các “màu”  $1, 2, \dots, k$ , một **cách tô màu các đỉnh (vertex  $k$ -coloring)** của  $G$  là một hàm  $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  thỏa mãn  $f(u) \neq f(v)$  với mọi  $u, v \in V$  với  $uv \in E$



- **Sắc số (chromatic number)** của  $G$ , ký hiệu  $\chi(G)$ , là số tối thiểu các màu cần thiết để tô màu  $G$

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và

Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

37

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

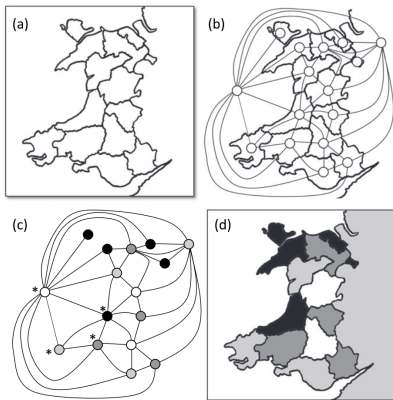
48

# Tô màu đồ thị

## Giới thiệu



Ghi chép sớm nhất về bài toán tô màu đồ thị có lẽ là vào năm 1852 khi Francis Guthrie (1831–1899), lúc đó là một sinh viên ở Đại học Cao đẳng London (University College London), tô màu một bản đồ các quận của Anh và nhận ra là có lẽ chỉ cần bốn màu để tô màu bản đồ sao cho hai quận liền kề nhau có màu khác nhau



### Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

#### Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

#### Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

#### Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

#### Tô màu đồ thị

38

#### Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

#### References

48



# Tô màu đồ thị

Giới thiệu



- Phỏng đoán của Guthrie được cho là phát biểu đầu tiên của **Định lý bốn màu (Four Color Theorem)**

## Định lý 8: Định lý bốn màu

Với mọi đồ thị phẳng  $G$ , ta luôn có  $\chi(G) \leq 4$

- Năm 1879, Kempe đề xuất một chứng minh cho Định lý bốn màu. Khoảng 10 năm sau đó, Heawood chỉ ra lỗi sai trong chứng minh của Kempe và chỉnh sửa lại chứng minh của Kempe để chỉ ra rằng năm màu là đủ để tô màu bất kỳ đồ thị phẳng nào
- Năm 1976, Kenneth Appel and Wolfgang Haken (Đại học Illinois) [Appel and Haken 1977]; [Appel, Haken, and Koch 1977] chứng minh định lý bốn màu bằng cách giả sử nếu Định lý bốn màu là sai thì sẽ có một phản ví dụ thuộc một trong 1936 loại khác nhau, và chỉ ra rằng không có loại nào dẫn đến phản ví dụ. Các trường hợp này được phân tích cẩn thận nhờ máy tính
- Robertson, Sanders, Seymour, và Thomas [Robertson, Sanders, Seymour, and Thomas 1997] đưa ra một chứng minh đơn giản hơn với 633 loại cần kiểm tra

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và

Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

39

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

# Tô màu đồ thị

Một số tính chất cơ bản



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và

Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm

Công thức Euler

Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu

Một số tính chất cơ bản

Tô màu đồ thị phẳng

References

■ Để **chỉ ra**  $\chi(G) = k$  với đồ thị  $G$  nào đó, ta cần:

■ Chỉ ra một cách tô màu các đỉnh của  $G$  bằng  $k$  màu.

■ Chỉ ra rằng không thể dùng ít hơn  $k$  màu để tô màu các đỉnh của  $G$ .

■ Một số nhận xét

(1) Mọi đồ thị  $G$  gồm  $n$  đỉnh có thể được tô màu bằng  $n$  màu

(2)  $\chi(K_n) = n$  (Tại sao?)

(3) Ta ký hiệu  $\omega(G)$  là số nguyên dương lớn nhất  $r \geq 1$  thỏa mãn  $K_r$  là đồ thị con của  $G$ . Với mọi đồ thị  $G$ , ta có  $\omega(G) \leq \chi(G)$ . Thông thường,  $\omega(G) \neq \chi(G)$

(4)  $\chi(C_n) = 2$  nếu  $n \geq 4$  chẵn và  $\chi(C_n) = 3$  nếu  $n \geq 3$  lẻ (Tại sao?)

(5)  $G$  là đồ thị hai phần khi và chỉ khi  $\chi(G) = 2$  (Tại sao?)

■ Chưa biết có tồn tại hay không một thuật toán chạy trong thời gian đa thức để xác định xem một đồ thị  $G$  có thể được tô màu bằng 3 màu hay không

## Bài tập 22

Tính  $\chi(W_n)$ ,  $\chi(K_{m,n})$ , và  $\chi(Q_n)$

40

48

# Tô màu đồ thị

## Một số tính chất cơ bản



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton  
Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất  
Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng  
Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị  
Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

References

## Bài tập 23

Những đồ thị nào có sắc số bằng 1?

## Bài tập 24

Một cách tô màu các cạnh của một đồ thị  $G = (V, E)$  bằng  $k$  màu ( $k$ -edge coloring) là một hàm  $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  thỏa mãn điều kiện  $f(e) \neq f(e')$  nếu  $e$  và  $e'$  liên thuộc với cùng một đỉnh. **Sắc số cạnh (edge chromatic number)** của một đồ thị  $G$ , ký hiệu  $\chi'(G)$ , là số màu nhỏ nhất có thể dùng để tô màu các cạnh của  $G$

- (a) Tìm  $\chi'(C_n)$  và  $\chi'(W_n)$  với  $n \geq 3$
- (b) Chứng minh rằng  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ , trong đó  $\Delta(G)$  là bậc lớn nhất của một đỉnh của  $G$

41

48

# Tô màu đồ thị

Một số tính chất cơ bản



Gọi  $\Delta(G)$  là *bậc lớn nhất của các đỉnh của đồ thị  $G$*

## Định lý 9

Cho  $G = (V, E)$  là đơn đồ thị vô hướng có  $n$  đỉnh. Ta có  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

## Chứng minh.

Một thuật toán tham lam để tô màu các đỉnh của  $G$  bằng  $\Delta(G) + 1$  màu  $\{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$  là như sau:

1. Gán nhãn  $v_1, v_2, \dots, v_n$  cho các đỉnh của  $G$  một cách tùy ý
2. Với  $i$  từ 1 đến  $n$ , tô màu đỉnh  $v_i$  bằng màu nhỏ nhất trong số các màu chưa được tô cho bất kỳ đỉnh nào trong  $N(v_i)$

Ta chứng minh rằng *Bước 2 của thuật toán luôn thực hiện được với  $\Delta(G) + 1$  màu*. Thật vậy, đỉnh  $v_i$  có tối đa  $\Delta(G)$  đỉnh kề với nó, do đó số màu tối đa sử dụng để tô màu các đỉnh trong  $N(v_i)$  là  $\Delta(G)$ , nghĩa là luôn có ít nhất một trong số  $\Delta(G) + 1$  màu không được sử dụng cho bất kỳ đỉnh nào kề với  $v_i$ , và ta có thể tô màu  $v_i$  bằng màu nhỏ nhất trong số các màu này  $\square$

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton  
Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất  
Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng  
Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

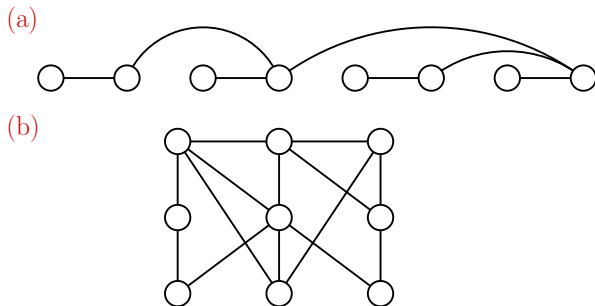
Tô màu đồ thị  
Giới thiệu  
42 Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

References



## Bài tập 25

Sử dụng thuật toán ở Định lý 9 để tô màu các đồ thị sau



Trên thực tế, với phần lớn các đồ thị, chỉ cần  $\Delta(G)$  màu là đủ

### Định lý 10: Định lý Brook

Nếu  $G$  không phải là một chu trình độ dài lẻ hoặc một đồ thị đầy đủ thì  $\chi(G) \leq \Delta(G)$

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton  
Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất  
Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng  
Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị  
Giới thiệu

43

Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

References

48

# Tô màu đồ thị

## Tô màu đồ thị phẳng



### Bổ đề 11

Mọi đơn đồ thị phẳng và liên thông  $G$  gồm  $n$  đỉnh có một cách sắp thứ tự các đỉnh  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sao cho mỗi đỉnh kề với tối đa 5 đỉnh đứng trước nó

## Chứng minh.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo  $n$ .

- **Bước cơ sở:** Với  $n \leq 6$ , bất kể thứ tự sắp xếp các đỉnh nào đều thỏa mãn Bổ đề
- **Bước quy nạp:**
  - Giả sử Bổ đề đúng với mọi  $6 \leq n \leq k$ , trong đó  $k \geq 6$  là một số nguyên nào đó. Ta chứng minh Bổ đề đúng với  $n = k + 1$ .
  - Thật vậy, giả sử  $G$  là đồ thị bất kỳ gồm  $k + 1$  đỉnh. Từ Bài tập 20, tồn tại một đỉnh  $v$  của  $G$  thỏa mãn  $\deg(v) \leq 5$ .
  - Đồ thị  $G - v$ :
    - có tối đa 5 thành phần liên thông  $G_1, G_2, \dots, G_5$
    - mỗi  $G_i$  có  $n_i \leq k$  đỉnh ( $1 \leq i \leq 5$ )
    - và  $n_1 + \dots + n_5 = k$
  - Từ giả thiết quy nạp, tồn tại một thứ tự  $v_1, \dots, v_k$  các đỉnh của  $G - v$  thỏa mãn Bổ đề.
  - Đặt  $v_{k+1} = v$ , ta có  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$  là một thứ tự các đỉnh của  $G$  thỏa mãn Bổ đề

### Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

References

44

48

# Tô màu đồ thị

## Tô màu đồ thị phẳng



### Định lý 12

Mọi đồ thị phẳng  $G$  có  $\chi(G) \leq 6$

### Chứng minh.

Ta chỉ ra một cách tô màu đơn đồ thị phẳng và liên thông  $G$  bằng 6 màu

1. Tìm thứ tự các đỉnh  $v_1, v_2, \dots, v_n$  của  $G$  thỏa mãn Bổ đề 11: mỗi đỉnh có tối đa 5 đỉnh kề đứng trước nó
2. Áp dụng thuật toán tham lam ở Định lý 9 với thứ tự đỉnh tìm được ở Bước 1

Chú ý rằng

- Khuyên và cạnh song song (nếu có) không ảnh hưởng gì đến quá trình tô màu
- Nếu đồ thị phẳng đã cho không liên thông, ta có thể áp dụng quá trình tô màu riêng biệt cho từng thành phần liên thông

### Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

References

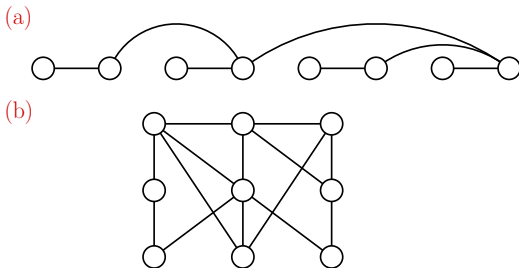
# Tô màu đồ thị

## Tô màu đồ thị phẳng



### Bài tập 26

Sử dụng thuật toán ở Định lý 12 để tô màu các đồ thị phẳng sau bằng 6 màu  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Nếu có thể, hãy tìm một cách tô màu các đồ thị trên bằng 5 màu hoặc ít hơn

### Bài tập 27

Chứng minh Định lý 12 bằng phương pháp quy nạp. (**Gợi ý:** Xem lại chứng minh Bổ đề 11)

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler  
Định lý Kuratowski


Tô màu đồ thị


Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng


References






 Lewis, Rhyd M. R. (2021). *Guide to Graph Colouring: Algorithms and Applications*. 2nd. Springer. DOI: 10.1007/978-3-030-81054-2.

 Rosen, Kenneth (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications*. 7th. McGraw-Hill.

 Robertson, Neil, Daniel Sanders, Paul Seymour, and Robin Thomas (1997). "The four-colour theorem". In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70.1, pp. 2–44. DOI: 10.1006/jctb.1997.1750.

 Appel, Kenneth and Wolfgang Haken (1977). "Every planar map is four colorable. Part I: Discharging". In: *Illinois Journal of Mathematics* 21.3, pp. 429–490. DOI: 10.1215/ijm/1256049011.

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton  
Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất  
Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng  
Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị  
Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng

# Tài liệu tham khảo (tiếp)



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và  
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler  
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi  
ngắn nhất

Đồ thị có trọng số  
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng

Định nghĩa và khái niệm  
Công thức Euler  
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị

Giới thiệu  
Một số tính chất cơ bản  
Tô màu đồ thị phẳng



Appel, Kenneth, Wolfgang Haken, and John Koch (1977).  
“Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility”.  
In: *Illinois Journal of Mathematics* 21.3, pp. 491–567. DOI:  
10.1215/ijm/1256049012.