

Bài tập tuần 2

18/09/2025

GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Chú ý

- (1) Danh sách bài tập mỗi tuần có ở <https://hoanganhduc.github.io/teaching/VNU-HUS/2025/winter/MAT3302/>.
- (2) Tham gia Google Classroom (<https://classroom.google.com/c/ODAwMzIxNzA3OTEy?cjc=j1jzv5ov>) để biết cách tính điểm thường xuyên qua việc lên bảng và điểm danh.
- (3) Các bài tập đánh dấu sao (★) có thể cần thời gian suy nghĩ lâu hơn.

Bài tập 1. Cho $P(x)$ là phát biểu “ x có thể nói tiếng Nga” và $Q(x)$ là phát biểu “ x biết ngôn ngữ lập trình C++”. Miền xác định của các lượng từ là tập tất cả sinh viên trong trường bạn. Viết các câu sau bằng cách sử dụng $P(x), Q(x)$, các lượng từ và các toán tử logic.

- (a) Có một sinh viên trong trường bạn vừa có thể nói tiếng Nga vừa biết C++
- (b) Có một sinh viên trong trường bạn có thể nói tiếng Nga nhưng không biết C++
- (c) Mọi sinh viên trong trường bạn hoặc có thể nói tiếng Nga hoặc biết C++
- (d) Không tồn tại sinh viên nào trong trường bạn mà có thể nói tiếng Nga hoặc biết C++

Bài tập 2. Tìm phủ định của các mệnh đề sau bằng cách sử dụng các lượng từ và *không* dùng ký hiệu phủ định.

- | | |
|--|---------------------------------------|
| (a) $\forall x(x > 1)$ | (f) $\exists x((x < 4) \vee (x > 7))$ |
| (b) $\forall x(x \leq 2)$ | (g) $\forall x(-2 < x < 3)$ |
| (c) $\exists x(x \geq 4)$ | (h) $\forall x(0 \leq x < 5)$ |
| (d) $\exists x(x < 0)$ | (i) $\exists x(-4 \leq x \leq 1)$ |
| (e) $\forall x((x < -1) \vee (x > 2))$ | (j) $\exists x(-5 < x < -1)$ |

Bài tập 3 (★). Xác định xem các cặp mệnh đề sau có tương đương về mặt logic hay không. Giải thích câu trả lời của bạn.

- (a) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ và $\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$ (c) $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ và $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
 (b) $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$ và $\forall xP(x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$ (d) $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ và $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

Bài tập 4. Dịch các lượng từ lồng nhau sau đây thành một phát biểu diễn đạt một mệnh đề toán học theo ngôn ngữ thông thường. Miền xác định trong mỗi trường hợp là tập hợp các số thực.

- (a) $\exists x\forall y(x + y = y)$ (e) $\exists x\forall y(xy = y)$
 (b) $\forall x\forall y(((x \geq 0) \wedge (y < 0)) \rightarrow (x - y > 0))$ (f) $\forall x\forall y(((x < 0) \wedge (y < 0)) \rightarrow (xy > 0))$
 (c) $\exists x\exists y(((x \leq 0) \wedge (y \leq 0)) \wedge (x - y > 0))$ (g) $\exists x\exists y((x^2 > y) \wedge (x < y))$
 (d) $\forall x\forall y((x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \leftrightarrow (xy \neq 0))$ (h) $\forall x\forall y\exists z(x + y = z)$

Bài tập 5. Cho $I(x)$ là phát biểu “ x có kết nối Internet” và $C(x, y)$ là phát biểu “ x và y đã trò chuyện qua Internet,” trong đó miền xác định của các biến x và y là tất cả sinh viên trong cùng một lớp học. Sử dụng các lượng từ để biểu diễn các phát biểu sau.

- (a) Jerry không có kết nối Internet.
 (b) Rachel chưa từng trò chuyện qua Internet với Chelsea.
 (c) Jan và Sharon chưa từng trò chuyện qua Internet.
 (d) Không ai trong lớp đã trò chuyện với Bob.
 (e) Sanjay đã trò chuyện với tất cả mọi người ngoại trừ Joseph.
 (f) Có một người trong lớp không có kết nối Internet.
 (g) Không phải tất cả mọi người trong lớp đều có kết nối Internet.
 (h) Chính xác một sinh viên trong lớp có kết nối Internet.
 (i) Tất cả mọi người ngoại trừ một sinh viên trong lớp đều có kết nối Internet.
 (j) Tất cả mọi người trong lớp có kết nối Internet đều đã trò chuyện qua Internet với ít nhất một sinh viên khác trong lớp.
 (k) Có một người trong lớp có kết nối Internet nhưng chưa từng trò chuyện với bất kỳ ai khác trong lớp.
 (l) Có hai sinh viên trong lớp chưa từng trò chuyện với nhau qua Internet.
 (m) Có một sinh viên trong lớp đã trò chuyện với tất cả mọi người trong lớp qua Internet.
 (n) Có ít nhất hai sinh viên trong lớp chưa từng trò chuyện với cùng một người trong lớp.

Bài tập 6. Biểu diễn mỗi yêu cầu hệ thống sau bằng cách sử dụng các vị từ, lượng từ và các phép nối logic.

- (a) Khi có ít hơn 30 megabyte trống trên ổ cứng, một thông báo cảnh báo được gửi đến tất cả người dùng.
- (b) Không thư mục nào trong hệ thống tệp có thể được mở và không tệp nào có thể được đóng khi các lỗi hệ thống đã được phát hiện.
- (c) Hệ thống tệp không thể được sao lưu nếu có một người dùng hiện đang đăng nhập.
- (d) Dịch vụ video theo yêu cầu (video on demand) có thể được cung cấp khi có ít nhất 8 megabyte bộ nhớ khả dụng và tốc độ kết nối ít nhất là 56 kilobit mỗi giây.

Bài tập 7. Biểu diễn phủ định các mệnh đề sau sao cho tất cả các ký hiệu phủ định nằm ngay trước các vị từ.

- (a) $\neg(\forall x \exists y \forall z T(x, y, z))$
- (b) $\neg(\forall x \exists y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y))$
- (c) $\neg(\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists z R(x, y, z)))$
- (d) $\neg(\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y)))$
- (e) $\neg(\exists z \forall y \forall x T(x, y, z))$
- (f) $\neg(\exists x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \forall y Q(x, y))$
- (g) $\neg(\exists x \exists y (Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x)))$
- (h) $\neg(\forall y \exists x \exists z (T(x, y, z) \vee Q(x, y)))$

Bài tập 8 (★). Chứng minh rằng $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ và $\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$, trong đó tất cả các lượng từ có cùng miền xác định không rỗng, là tương đương về mặt logic. (Biến mới y được sử dụng để kết hợp các lượng từ một cách chính xác.) (**Gợi ý:** Chứng minh hai chiều: $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ đúng khi và chỉ khi $\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$ đúng.)

Bài tập 9 (★). Ở mức độ nào đó, chúng ta có thể coi một *cơ sở dữ liệu* (database) như là một bảng với các hàng tương ứng với các *cá thể* (individual entity) nào đó, và các cột tương ứng với các *trường* (field) mô tả dữ liệu liên quan đến các cá thể đó. Ví dụ, Bảng 1 là ví dụ về một phần của cơ sở dữ liệu về các sinh viên trong một lớp học.

Tên (name)	GPA	Đã học CS? (takenCS)	Quê quán (home)	Tuổi (age)	Số năm học ở trường (schoolYear)	Có mặt ở trường? (onCampus)	Có chuyên ngành? (hasMajor)
Alice	4.0	có	Alberta	20	3	có	có
Bob	3.14	có	Bermuda	19	3	có	không
Charlie	3.54	không	Cornwall	18	1	không	có
Desdemona	3.8	có	Delaware	17	2	không	không

Bảng 1: Một phần cơ sở dữ liệu về sinh viên trong một lớp học

Một truy vấn cơ sở dữ liệu (*database query*) có thể xem như là một vị từ $Q(x)$ có chứa các điều kiện để kiểm tra các giá trị từ các cột và các toán tử logic liên kết các điều kiện này. Khi một truy vấn cơ sở dữ liệu được đưa vào, *hệ quản trị cơ sở dữ liệu* (*database management system*) sẽ trả lại một danh sách các hàng (ứng với các thực thể) trong cơ sở dữ liệu thỏa mãn điều kiện đề ra trong truy vấn. Chúng ta có thể nghĩ về hình thức truy cập cơ sở dữ liệu này từ góc nhìn của logic vị từ: để phản hồi truy vấn (query) Q , hệ thống trả lại một danh sách các hàng, trong đó mỗi hàng x thỏa mãn điều kiện $Q(x)$ đúng. Ví dụ, để tìm danh sách tất cả các sinh viên có GPA (điểm trung bình) tối thiểu 3.4 và nếu đã học ít nhất một khóa học về khoa học máy tính (CS) thì phải đến từ Hawaii, ta có thể truy vấn $[gpa(x) \geq 3.4] \wedge [takenCS(x) \rightarrow (home(x) = Hawaii)]$. Kết quả trả lại với cơ sở dữ liệu này là Charlie.

Mỗi vị từ $Q(x)$ sau thể hiện một truy vấn với cơ sở dữ liệu ví dụ ở Bảng 1. Với mỗi vị từ, hãy tìm một vị từ tương đương về mặt logic trong đó tên của mỗi cột xuất hiện *không* quá một lần. Bạn cũng có thể sử dụng các ký hiệu **T** (True), **F** (False), cùng với các toán tử logic phổ biến nhất (\neg , \wedge , \vee , \rightarrow) bao nhiêu lần tùy ý.

- (a) $[age(x) < 18] \vee [age(x) \geq 18] \wedge [gpa(x) \geq 3.0]$
- (b) $takenCS(x) \rightarrow \neg([home(x) = Hawaii] \leftrightarrow [home(x) = Hawaii] \wedge takenCS(x))$
- (c) $hasMajor(x) \wedge [schoolYear(x) \neq 3] \wedge onCampus(x) \vee hasMajor(x) \wedge [schoolYear(x) \neq 3] \wedge \neg onCampus(x) \vee hasMajor(x) \wedge [schoolYear(x) = 3] \wedge \neg onCampus(x)$

(Gợi ý: Sử dụng các tương đương logic đã biết để đơn giản hóa các vị từ.)

Bài tập 10 (*). Steve Martin, một danh hài nổi tiếng, kể trong cuốn sách *Born Standing Up: A Comic's Life* (Simon & Schuster, 2008) rằng, lấy cảm hứng từ Lewis Carroll, ông đã kết thúc các buổi biểu diễn của mình bằng câu nói sau. (Câu nói này đã khiến khán giả cười lớn.) “Tôi sẽ không về nhà tối nay; tôi sẽ đến Bananaland, một nơi mà chỉ có hai điều đúng, chỉ hai điều: Một, tất cả các ghế đều màu xanh lá cây; và hai, không có ghế nào màu xanh lá cây.” Steve Martin mô tả câu nói đùa này như một mâu thuẫn (nghĩa là, một mệnh đề logic luôn luôn sai)—nhưng, thực tế, hai điều đúng này không hề mâu thuẫn! Hãy giải thích. Làm thế nào mà “tất cả các ghế ở Bananaland đều màu xanh lá cây” và “không có ghế nào ở Bananaland màu xanh lá cây” lại có thể đồng thời đúng?

Tài liệu

- [1] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 8th edition, McGraw-Hill, 2018.
- [2] Liben-Nowell, David, *Connecting Discrete Mathematics and Computer Science*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2022.