

Toán rời rạc

GV: Phan Thị Hà Dương (lý thuyết)

Hàm sinh và hệ thức truy hồi

01/10/2018

GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Bài 1. Tìm hàm sinh của các dãy sau dưới dạng tường minh:

(a) $1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots$

(b) $0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, -3, \dots$

(c) $1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$

(d) $0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

(e) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

Ví dụ, dạng tường minh của hàm sinh của dãy $1, 1, 1, 1, \dots$ là $\frac{1}{1-x}$.

(Gợi ý: Có thể tham khảo bảng một số hàm sinh thường dùng ở cuối tài liệu này.)

Bài 2. Tìm công thức cho số hạng tổng quát a_n của dãy $\{a_n\}$ có hàm sinh là

(a) $(3x - 4)^3$

(b) $\frac{1}{1 - 2x^2}$

(c) $\frac{1}{1 + x - 2x^2}$

(d) $e^{3x^2} - 1$

(e) $\frac{x^2}{(1-x)^3}$

(Gợi ý: Có thể tham khảo bảng một số hàm sinh thường dùng ở cuối tài liệu này.)

Bài 3. Giải thích cách sử dụng hàm sinh để tính

- (a) số cách chia 15 quả bóng hoàn toàn giống nhau cho sáu bạn và mỗi bạn nhận được ít nhất một quả nhưng không nhiều hơn ba quả bóng.

- (b) số cách chọn 14 quả bóng từ một rổ bóng gồm vô số các quả bóng màu đỏ, xanh, và vàng, sao cho có ít nhất 3 quả và nhiều nhất 10 quả bóng xanh được chọn, giả thiết rằng thứ tự lựa chọn trước sau của các quả bóng là không quan trọng.
- (c) số cách chia n đồng xu giống hệt nhau vào 5 hộp thỏa mãn điều kiện: số đồng xu ở hộp 1 và hộp 2 là số chẵn và không quá 10, và các hộp còn lại chứa 3 đến 5 đồng xu.
- (d) số các từ khác nhau có 4 ký tự được tạo thành từ các chữ cái a, b, c và mỗi từ chứa ít nhất hai chữ a .
- (e) số cách sắp xếp khác nhau của n vật chọn ra từ 4 loại vật thể khác nhau, mỗi loại vật thể xuất hiện ít nhất 2 lần và không quá 5 lần.

Bài 4. (a) Chứng minh rằng $1/(1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)$ là hàm sinh của số cách thu được tổng bằng n khi một xúc xắc được gieo nhiều lần liên tiếp và thứ tự các lần gieo là quan trọng.

- (b) Chứng minh rằng $\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$ là hàm sinh của dãy $\{n^2\}$.
- (c) Chứng minh rằng $(x^2+x)/(1-x)^4$ là hàm sinh của dãy $\{a_n\}$, với $a_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Từ đó, hãy tìm công thức tường minh cho tổng $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ theo n .

Bài 5. Sử dụng hàm sinh để tìm công thức của số Fibonacci F_i theo i . Số Fibonacci được định nghĩa như sau: $F_0 = 0, F_1 = 1$, và $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ với $i \geq 2$.

Bài 6. Giải các hệ thức truy hồi sau

- (a) $a_k = 7a_{k-1}$ với $a_0 = 5$.
- (b) $a_k = 3a_{k-1} + 4^{k-1}$ với $a_0 = 1$.
- (c) $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ với $a_0 = 6$ và $a_1 = 30$.
- (d) $a_k = 4a_{k-1} - 4a_{k-2} + k^2$ với $a_0 = 2$ và $a_1 = 5$.

Bài 7. (a) Tìm hệ thức truy hồi của số các dãy a_1, a_2, \dots, a_k thỏa mãn điều kiện $a_1 = 1, a_k = n$, và $a_j < a_{j+1}$ với $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, và n là một số nguyên dương. Với $n \geq 2$ thì có bao nhiêu dãy thỏa mãn điều kiện đề ra?

- (b) Tìm hệ thức truy hồi của số các xâu nhị phân độ dài n có chứa 01. Với $n \geq 0$ thì có bao nhiêu xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện đề ra?

Bài 8. Giải các hệ thức truy hồi đồng thời sau:

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{aligned}$$

với $a_0 = 1$ và $b_0 = 2$.

Bài 9. Xét một hệ thống mã hóa thông tin sử dụng các chuỗi ký tự cơ số 4 (các ký tự thuộc tập $\{0, 1, 2, 3\}$). Một chuỗi ký tự được gọi là *hợp lệ* nếu số các số 0 và số các số 1 trong từ khóa đều là số chẵn. Gọi a_n là số các chuỗi hợp lệ gồm n ký tự. Gọi b_n, c_n , và d_n lần lượt là số các chuỗi gồm n ký tự cơ số 4 có chứa một số chẵn các số 0 và một số lẻ các số 1, chứa một số lẻ các số 0 và một số chẵn các số 1, và chứa một số lẻ các số 0 và một số lẻ các số 1.

- (a) Chứng minh rằng $d_n = 4^n - a_n - b_n - c_n$. Sử dụng đẳng thức này để chỉ ra rằng $a_{n+1} = 2a_n + b_n + c_n$; $b_{n+1} = b_n - c_n + 4^n$; và $c_{n+1} = c_n - b_n + 4^n$.
- (b) Tìm a_1, b_1, c_1 , và d_1 .
- (c) Sử dụng phần (a) và (b) để tìm a_3, b_3, c_3 , và d_3 .
- (d) Sử dụng các hệ thức truy hồi ở phần (a) và các điều kiện ban đầu ở phần (b) để thành lập ba phương trình tương ứng với các hàm sinh $A(x), B(x)$, và $C(x)$ của các dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$, và $\{c_n\}$.
- (e) Giải hệ ba phương trình thu được từ phần (d) để thu được công thức tường minh của $A(x), B(x)$, và $C(x)$, và sử dụng các công thức này để suy ra các công thức của a_n, b_n, c_n , và d_n .

TABLE 1 Useful Generating Functions.

$G(x)$	a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k)x^k$ $= 1 + C(n, 1)x + C(n, 2)x^2 + \cdots + x^n$	$C(n, k)$
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k)a^k x^k$ $= 1 + C(n, 1)ax + C(n, 2)a^2 x^2 + \cdots + a^n x^n$	$C(n, k)a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k)x^{rk}$ $= 1 + C(n, 1)x^r + C(n, 2)x^{2r} + \cdots + x^{rn}$	$C(n, k/r)$ if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$	1 if $k \leq n$; 0 otherwise
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$	1
$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2 x^2 + \cdots$	a^k
$\frac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk} = 1 + x^r + x^{2r} + \cdots$	1 if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$	$k+1$
$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1, k)x^k$ $= 1 + C(n, 1)x + C(n+1, 2)x^2 + \cdots$	$C(n+k-1, k) = C(n+k-1, n-1)$
$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1, k)(-1)^k x^k$ $= 1 - C(n, 1)x + C(n+1, 2)x^2 - \cdots$	$(-1)^k C(n+k-1, k) = (-1)^k C(n+k-1, n-1)$
$\frac{1}{(1-ax)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1, k)a^k x^k$ $= 1 + C(n, 1)ax + C(n+1, 2)a^2 x^2 + \cdots$	$C(n+k-1, k)a^k = C(n+k-1, n-1)a^k$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$1/k!$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$(-1)^{k+1}/k$

Note: The series for the last two generating functions can be found in most calculus books when power series are discussed.