Lời giải bài tập trong sildes Thuật toán II

March 21, 2023

Họ và tên : Phạm Hữu Vang
Mã sinh viên : 22001296
Mã lớp học phần : MAT3500 2

- Bài 1

  1) $a_n = 2a_{n-1}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$

  Đa thức đặc trưng: $r - 2 = 0 => r = 2$
  Do đó nếu $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi thì $a_n = \alpha r^n$
  Có $a_0 = 3$
  $=> \alpha = 3$
  $=> a_n = 3.2^n$

  2) $a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 6, a_1 = 8$
  - Đa thức đặc trưng $r^2 - 5r + 6$ có hai nghiệm $r_1 = 2, r_2 = 3$
  - Do đó, nếu $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi thì $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$
  - Có $\left.\begin{array}{l} a_0 = 1 => \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ a_1 = 0 => 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{array}\right\} => \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases}$

  $=> a_n = 3.2^n - 2.3^n$

  3) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ với $n \geq 2, a_0 = 6, a_1 = 8$
  - Đa thức đặc trưng tương ứng là $r^2 - 4r + 4 = 0$ có nghiệm bội hai là $r = 2$
  - Do đó, nếu $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức đã cho thì $a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$
  -Có $\left.\begin{array}{c} a_0 = 6 => \alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ a_1 = 8 => 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 8 \end{array}\right\} => \begin{cases} \alpha_1 = 6 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases}$

  $=> a_n = 6.2^n - 2n.2^n$

  4) $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ với $n \geq 2, a_0 = 5, a_1 = -9, a_2 = 15$
  -Đa thức đặc trưng tương ứng là $r^3 + 3r^2 + 3r + 1$ có nghiệm bội 3 là $r = -1$
  -Do đó nếu $\{a_n\}$ là nghiệm của của hệ thức truy hồi đã cho thì
  $a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n + \alpha_3 n^2 r^n$

7) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$ với
-Đa thức đặc trưng của hệ thuần nhất là $r^2 - 5r + 6$ có hai nghiệm là $r_1 = 2, r_2 = 3$
Dãy $\{a_n^{(h)}\}$ với $a_n^{(h)} = c_1 2^n + c_2 3^n$ thỏa mãn hệ thức
-Một nghiệm của hệ không thuần nhất có dạng $a_n^{(p)} = qn2^n + p_1 n + p_2$
Thay vào hệ thức ban đầu có
$qn2^n + p_1 n + p_2 = 5[q(n-1)2^{n-1} + p_1(n-1) + p_2] - 6[q(n-2)2^{n-2} + p_1(n-2) + p_2] + 2^n + 3n$
$\Rightarrow qn2^n + p_1 n + p_2 = 2qn2^{n-1} + q2^{n-1} - p_1 n + 7p1 - p_2 + 2^n + 3n$
$\Rightarrow (q+2)2^{n-1} + (-2p_1 + 3)n + 7p_1 - 2p_2 = 0$
$$\Rightarrow \begin{cases} q = -2 \\ p_1 = \frac{3}{2} \\ p_2 = \frac{21}{4} \end{cases}$$
$\Rightarrow a_n^{(p)} = -n2^{n+1} + \frac{3n}{2} + \frac{21}{4}$
$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 2^n + c_2 3^n + -n2^{n+1} + \frac{3n}{2} + \frac{21}{4}$

- Bài 2
  - $G_f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-Ax} + \frac{b}{1-Bx}$
  $= \frac{a(1-Bx)+b(1-Ax)}{(1-Ax)(1-Bx)}$
  $= \frac{a+b-(aB+bA)x}{1-(A+B)x+ABx^2}$
  $$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ aB + bA = -1 \\ A + B = 1 \\ AB = -1 \end{cases}$$
  $$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ B = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ a = \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ b = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$
  - $G_f(x) = \frac{-1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n$
  $\Rightarrow f_n = \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

- Bài 3: Giải hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n \geqslant 2$ và các điều kiện ban đầu $a_0 = 1, a_1 = 1$ bằng cách sử dụng hàm sinh
  $$G_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} - a_{n-2})x^n$

$= 1 + x + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$

$= 1 + x + 2x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2}$

$= 1 + x + 2x\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m - x^2\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$

$= 1 + x + 2x(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m - a_0) - x^2\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$

$= 1 - x + 2xG_a(x) - x^2G_a(x)$

$\Rightarrow G_a(x) = \dfrac{1-x}{x^2-2x+1} = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n x^n$

$\Rightarrow a_n = 1^n = 1$

- Bài 4: Giải hệ thức truy hồi $a_n = 3a_{n-1} + n$ với $n \geqslant 1$ và các điều kiện ban đầu $a_0 = 1$ bằng cách sử dụng hàm sinh

  $G_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

  $= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (3a_{n-1} + n)x^n$

  $= 1 + 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

  $= 1 + 3x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

  $= 1 + 3x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

  $= 1 + 3xG_a(x) + \frac{x}{(1-x)^2}$

  $\Rightarrow G_a(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{7}{4}\frac{1}{1-3x} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}$

  $\Rightarrow G_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [\dfrac{7}{4}3^n - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}(n+1)]x^n$

  $\Rightarrow a_n = \frac{7}{4}3^n - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$