COPYRIGHT NOTICE
THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-07-08

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-07-08

Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Các cấu trúc cơ bản
Tập hợp, Hàm, Dãy, Tổng

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Tập hợp
- Một số khái niệm và tính chất cơ bản
- Các phép toán trên tập hợp
- Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

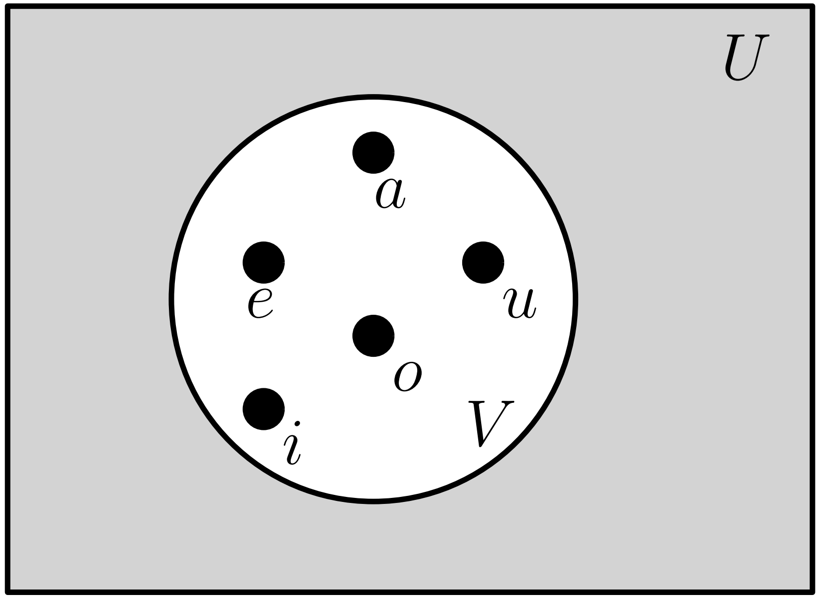
Hàm
- Quan hệ
- Định nghĩa hàm và một số khái niệm
- Một số hàm và toán tử

Dãy
- Định nghĩa dãy và một số khái niệm
- Một số dãy đặc biệt

Tổng
- Ký hiệu tổng và một số khái niệm
- Một số công thức tổng hữu ích

- Một *tập hợp (set)* là một tổng thể không sắp thứ tự các đối tượng phân biệt (gọi là các *phần tử (element)* hoặc *thành viên (member)* của tập hợp)
  - $x \in S$: x là phần tử của S
  - $x \notin S$: x không là phần tử của S
- Ta thường sử dụng các chữ in hoa $S, T, U, \dots$ để ký hiệu tập hợp
- Có thể mô tả một tập hợp bằng cách *liệt kê tất cả các phần tử* của tập đó giữa hai dấu ngoặc nhọn "{" và "}". Trong nhiều trường hợp, có thể *liệt kê thông qua "quy luật đơn giản"*
  - Tập các nguyên âm trong bảng chữ cái tiếng Anh $V = \{a, e, i, o, u\}$
  - Tập các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Có thể mô tả một tập hợp thông qua *quy tắc nhận biết*
  - Với vị từ $P(x)$ bất kỳ trên miền xác định nào đó, $\{x \mid P(x)\}$ là tập hợp tất cả x sao cho $P(x)$ đúng (có thể dùng ":" thay vì "|")
  - Tập các số tự nhiên chẵn $E = \{x \mid x = 2k \text{ với } k \in \mathbb{N}\}$

- Có thể mô tả một tập hợp thông qua *giản đồ Venn (Venn diagram)*
  - *Tập vũ trụ (universal set)* U gồm tất cả các đối tượng đang xét — Hình chữ nhật
  - Tập hợp cần mô tả — Hình tròn hoặc các hình khác
  - Phần tử của tập hợp — Điểm



Hình: Mô tả tập các nguyên âm trong bảng chữ cái tiếng Anh $V = \{a, e, i, o, u\}$ bằng giản đồ Venn

- *Tập hợp rỗng (empty set)*, ký hiệu $\emptyset$, là tập hợp duy nhất không chứa bất kỳ phần tử nào
- $\emptyset = \{\}$ hoặc $\emptyset = \{x \mid \mathbf{F}\}$ với $\mathbf{F}$ là một mệnh đề luôn luôn sai (mâu thuẫn)
- Bất kể miền xác định là gì, *mệnh đề* $\neg\exists x\,(x \in \emptyset)$ *luôn đúng*
- $\emptyset \neq \{\emptyset\}$
    - Tập $\{\emptyset\}$ không rỗng, vì nó chứa một phần tử—tập hợp rỗng

Cho hai tập hợp A và B. A là *tập con (subset)* của B, ký hiệu $A \subseteq B$ hoặc $B \supseteq A$, khi và chỉ khi mỗi phần tử của tập A cũng là một phần tử của B

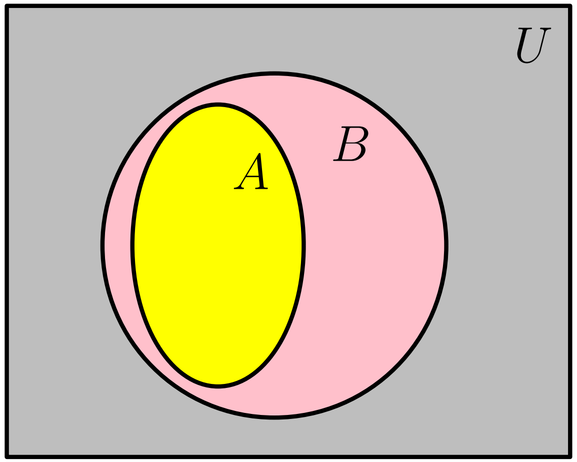
- $(A \subseteq B) \equiv \forall x\, (x \in A \to x \in B)$
- $(A \not\subseteq B) \equiv \neg(A \subseteq B)$ (A *không* là tập con của B)
- $(A \subset B) \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \not\subseteq A)$ (A là *tập con thực sự (proper subset)* của B)

Bài tập 1

Chứng minh các mệnh đề sau

(1) *Nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$ thì $A \subseteq C$*

(2) *Với mọi tập A, ta có $\emptyset \subseteq A$ và $A \subseteq A$*



Hình: Giản đồ Venn mô tả $A \subset B$

Cho hai tập hợp A và B. A và B là hai tập *bằng nhau*, ký hiệu $A = B$, khi và chỉ khi $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$

- $(A = B) \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \equiv \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
- Tất cả các phần tử trong một tập đều *phân biệt (distinct)*; liệt kê một phần tử nhiều lần là vô nghĩa
  - Nếu $a = b$ thì $\{a, b, c\} = \{a, c\} = \{b, c\} = \{a, a, b, c, a, c, c\}$
  - Ta nói rằng tập trên có (nhiều nhất) 2 phần tử
- Các phần tử của một tập hợp *không sắp thứ tự (unordered)*
  - Bất kể a, b, c là gì, $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$

Bài tập 2

Cho $A = \{1, 2, 3\}$ *và* $B = \{1, 3, 5, 7\}$. *Hãy liệt kê tất cả các tập hợp vừa là tập con của* A *vừa là tập con của* B

Bài tập 3

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

(a) $1 \in \{1\}$

(b) $1 \subseteq \{1\}$

(c) $\{1\} \in \{\{1\}\}$

(d) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$

Bài tập 4

Liệu có tồn tại các tập A *và* B *thỏa mãn* $A \in B$ *và* $A \subseteq B$*?*

- *Lực lượng (cardinality)* của một tập A, ký hiệu $|A|$, là số phần tử khác biệt mà A có
  - $|\emptyset| = 0$; $|\{1, 2, 3\}| = 3$; $|\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}| = 2$
- Nếu $|A| \in \mathbb{N}$, thì ta gọi A là *tập hữu hạn (finite set)*. Ngược lại, A là một *tập vô hạn (infinite set)*
- Một số tập vô hạn quan trọng
  - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ *Tập số tự nhiên (**n**atural numbers)*
  - $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ *Tập số nguyên (integers)*
  - $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$ *Tập số nguyên dương (positive integers)*
  - $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},$ và $q \neq 0\}$ *Tập số hữu tỷ (rational numbers)*
  - $\mathbb{R}$ *Tập số thực (**r**eal numbers)*
  - $\mathbb{R}^+$ *Tập số thực dương (positive real numbers)*
  - $\mathbb{C}$ *Tập số phức (**c**omplex numbers)*
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

- *Tập lũy thừa (power set)* của một tập A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp gồm tất cả các tập con của A
  - $\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$
  - $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
  - $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
  - $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- Nếu A là tập hữu hạn, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. Do đó ký hiệu 2^A đôi khi cũng được sử dụng để chỉ tập lũy thừa của A

Bài tập 5

*Chứng minh rằng nếu $A = B$ thì $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ với hai tập A, B bất kỳ. Ngược lại, nếu $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ thì A có bằng B không? (**Gợi ý:** $A = B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \equiv \forall x\, (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ và nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$ thì $A \subseteq C$)*

- Với $n \in \mathbb{N}$, một *bộ sắp thứ tự n phần tử (ordered n-tuples)* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là một dãy các phần tử có phần tử thứ nhất là a_1, phần tử thứ hai là a_2, ..., và phần tử thứ n là a_n
  - Một bộ sắp thứ tự 2 phần tử được gọi là một *cặp sắp thứ tự (order pair)*
- Hai bộ $(a_1, \ldots, a_n)$ và $(b_1, \ldots, b_n)$ là *bằng nhau* nếu với mọi $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i = b_i$
- **Chú ý:** $(1, 2) \neq (2, 1) \neq (2, 1, 1)$ (nhưng $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{2, 1, 1\}$)
- *Tích Đềcác (Cartesian product)* của hai tập A, B, ký hiệu $A \times B$, là tập tất cả các cặp sắp thứ tự (a, b) trong đó $a \in A$ và $b \in B$
  - $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
  - Chú ý rằng tích Đềcác *không* có tính chất giao hoán, nghĩa là $\neg\forall A, B\ (A \times B = B \times A)$
  - Tổng quát hóa $A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n\}$

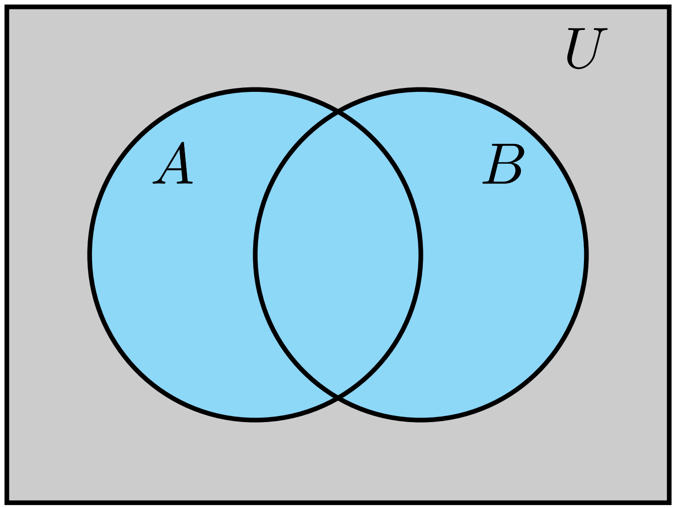
Bài tập 6

Chứng minh rằng $A \times B = \emptyset$ *khi và chỉ khi* $A = \emptyset$ *hoặc* $B = \emptyset$

Bài tập 7

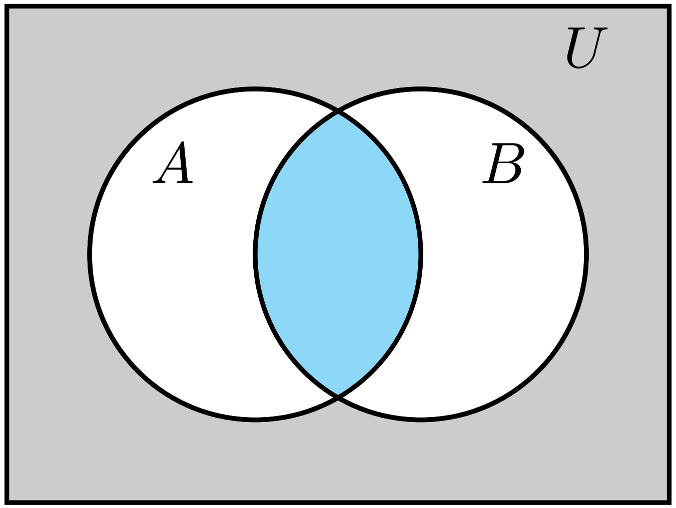
Chứng minh rằng $A \times B = B \times A$ *khi và chỉ khi* $A = \emptyset$ *hoặc* $B = \emptyset$ *hoặc* $A = B$

- *Hợp (union)* của hai tập hợp A, B, ký hiệu $A \cup B$, là tập chứa tất cả các phần tử hoặc thuộc A, hoặc thuộc B, hoặc thuộc cả hai
  - $\forall A, B\,(A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\})$
  - $A \cup B \supseteq A$ và $A \cup B \supseteq B$
  - $\{1, 3, 5\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Hình: Giản đồ Venn mô tả $A \cup B$

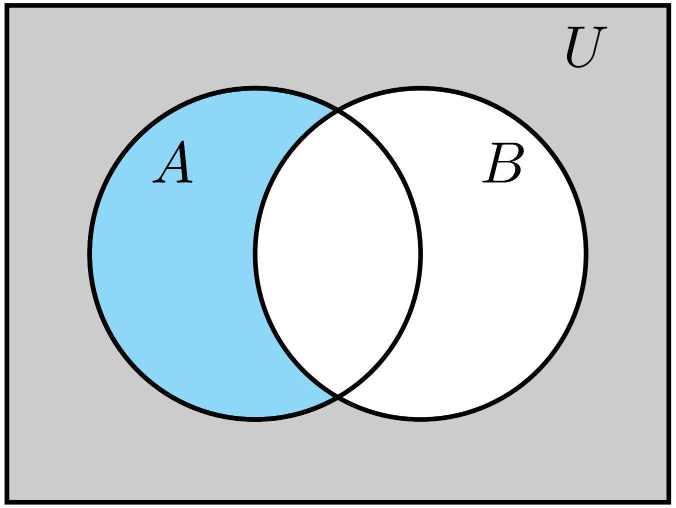
- *Giao (intersection)* của hai tập hợp A, B, ký hiệu $A \cap B$, là tập chứa tất cả các phần tử đồng thời thuộc cả A và B
  - $\forall A, B\ (A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\})$
  - $A \cap B \subseteq A$ và $A \cap B \subseteq B$
  - $\{1, 3, 5\} \cap \{2, 3, 4\} = \{3\}$
- Hai tập A và B là *rời nhau (disjoint)* nếu $A \cap B = \emptyset$.
  - $\{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$



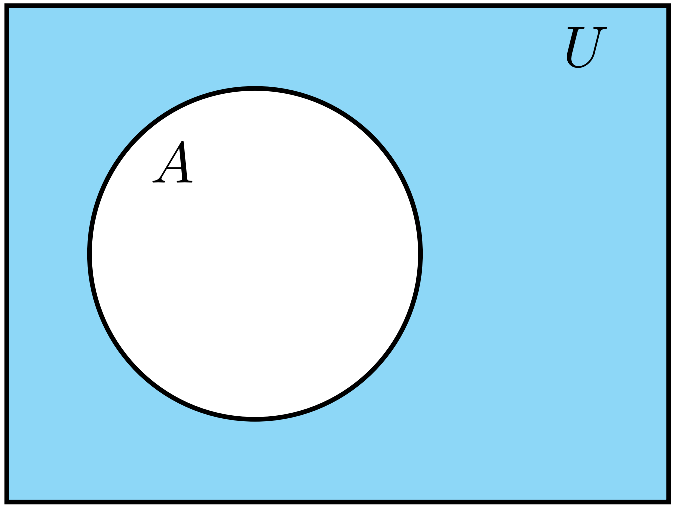
Hình: Giản đồ Venn mô tả $A \cap B$

Tập hợp
Phép hiệu

- *Hiệu (difference)* của hai tập hợp A, B, ký hiệu $A - B$ hoặc $A \setminus B$, là tập chứa tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B
  - $\forall A, B\, (A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\})$
  - $\{1, 3, 5\} - \{2, 3, 4\} = \{1, 5\}$
- Khi tập vũ trụ U được xác định, *phần bù (complement)* của tập A, ký hiệu $\overline{A}$, là tập $U - A$
  - $\forall A\, (\overline{A} = \{x \mid x \notin A\})$

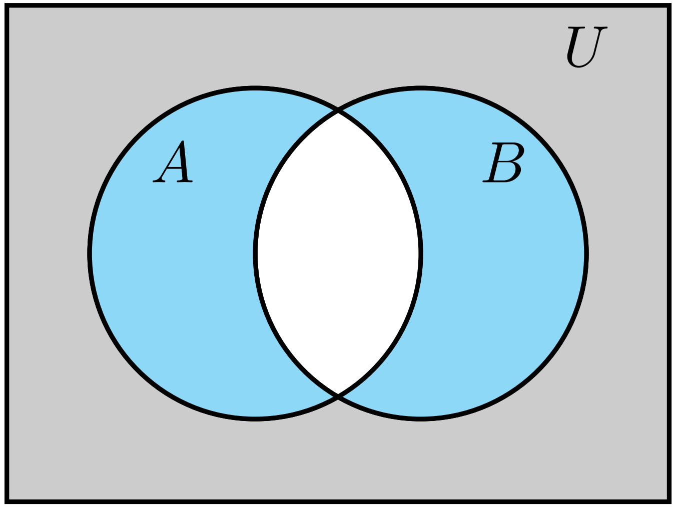


Hình: Giản đồ Venn mô tả $A - B$



Hình: Giản đồ Venn mô tả $\overline{A}$

- *Hiệu đối xứng (symmetric difference)* của hai tập hợp A, B, ký hiệu $A\Delta B$ hoặc $A \oplus B$, là tập chứa tất cả các phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc B nhưng không thuộc cả A và B
  - $\forall A, B\, (A\Delta B = \{x \mid x \in A \oplus x \in B\})$
  - $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
  - $\{1, 3, 5\}\Delta\{2, 3, 4\} = \{1, 2, 4, 5\}$



Hình: Giản đồ Venn mô tả $A\Delta B$

Bảng tính thuộc (membership table) của các phép toán trên tập hợp

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$	$\overline{A}$	$A \Delta B$
1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0

Bài tập 8

Xây dựng bảng tính thuộc của

(a) $A \cup (B \cup C)$ và $(A \cup B) \cup C$

(b) $A \cap (B \cup C)$ và $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(c) $\overline{A \cup B}$ và $\overline{A} \cap \overline{B}$

Tập hợp

Các hằng đẳng thức tập hợp

Tên gọi	Đẳng thức
Luật đồng nhất (Identity laws)	$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$
Luật nuốt (Domination laws)	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Luật lũy đẳng (Idempotent laws)	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Luật bù kép (Double complement laws)	$\overline{\overline{A}} = A$
Luật giao hoán (Commutative laws)	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Luật kết hợp (Associative laws)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Luật phân phối (Distributive laws)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Tên gọi	Đẳng thức
Luật De Morgan (De Morgan's laws)	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Luật hấp thụ (Absorption laws)	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Luật bù (Complement laws)	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Với hai tập A, B bất kỳ,

Chứng minh $A = B$

(1) Chứng minh trực tiếp $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$

(2) Chứng minh thông qua định nghĩa tập hợp và các phép biến đổi lôgic

(3) Chứng minh bằng bảng tính thuộc

(4) Chứng minh bằng giản đồ Venn

Ví dụ 1 (Dùng định nghĩa)

Chứng minh $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$
  - Giả sử $x \in \overline{A \cap B}$. Theo định nghĩa, $x \notin A \cap B$. Do đó, mệnh đề $\neg(x \in A \wedge x \in B)$ đúng. Áp dụng luật De Morgan, $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$ đúng. Theo định nghĩa, ta có $x \notin A$ hoặc $x \notin B$. Do đó, $x \in \overline{A}$ hoặc $x \in \overline{B}$, suy ra $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$
  - Giả sử $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Theo định nghĩa, $x \in \overline{A}$ hoặc $x \in \overline{B}$. Do đó, $x \notin A$ hoặc $x \notin B$. Như vậy, mệnh đề $(x \notin A) \vee (x \notin B)$ đúng. Theo định nghĩa, $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$ cũng đúng. Áp dụng luật De Morgan, mệnh đề $\neg(x \in A \wedge x \in B)$ đúng. Do đó, $\neg(x \in A \cap B)$ đúng, suy ra $x \in \overline{A \cap B}$

Ví dụ 2 (Dùng đẳng thức lôgic đã biết)

Chứng minh $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x \mid x \notin A \cap B\} && \text{định nghĩa phần bù} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \cap B)\} && \text{định nghĩa } \notin \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} && \text{định nghĩa } \cap \\
&= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} && \text{luật De Morgan} \\
&= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} && \text{định nghĩa } \notin \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} && \text{định nghĩa phần bù} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} && \text{định nghĩa } \cup \\
&= \overline{A} \cup \overline{B} && \text{mô tả tập hợp}
\end{aligned}
$$

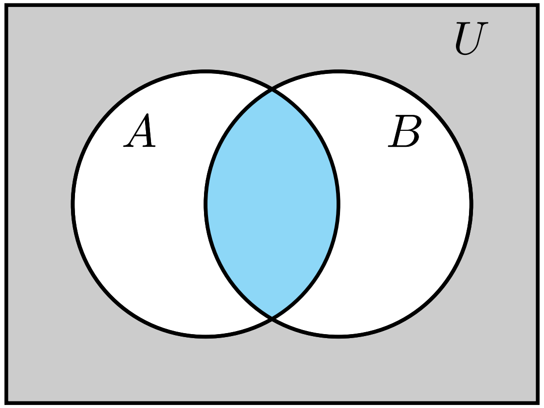
Ví dụ 3 (Dùng bảng tính thuộc)

Chứng minh $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

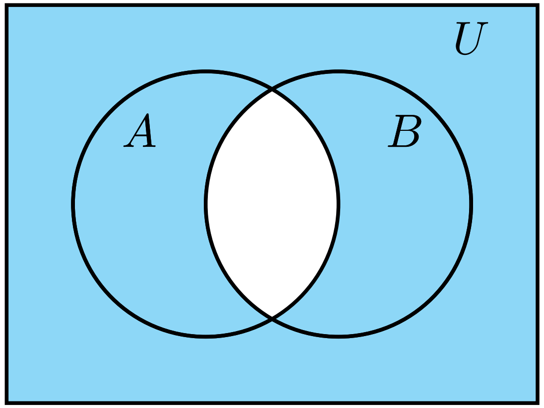
A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Ví dụ 4 (Dùng giản đồ Venn)

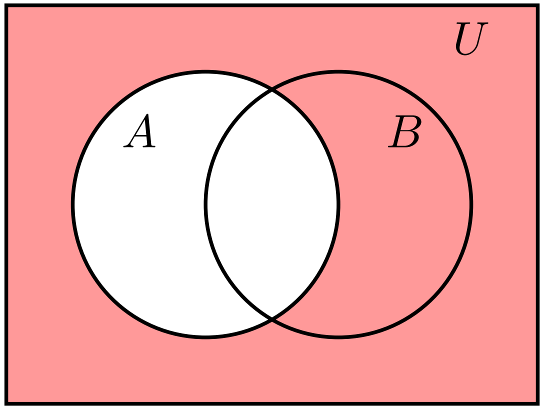
Chứng minh $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



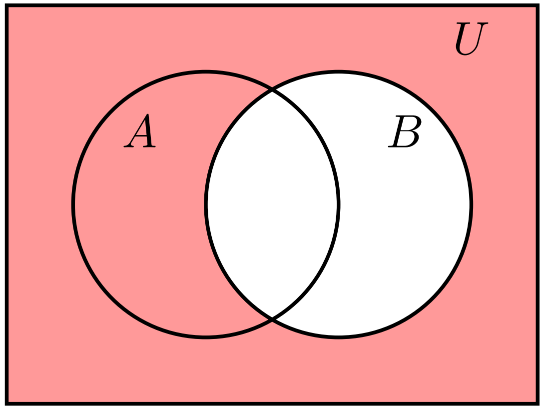
Hình: Giản đồ Venn mô tả $A \cap B$



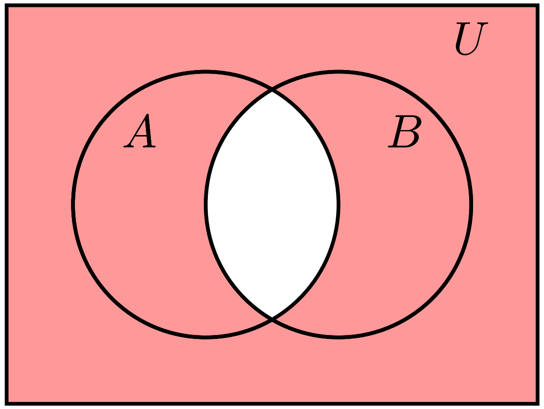
Hình: Giản đồ Venn mô tả $\overline{A \cap B}$



Hình: Giản đồ Venn mô tả $\overline{A}$



Hình: Giản đồ Venn mô tả $\overline{B}$



Hình: Giản đồ Venn mô tả $\overline{A} \cup \overline{B}$

Bài tập 9

Chứng minh các hằng đẳng thức tập hợp đã đề cập (sử dụng các phương pháp đã ví dụ ở trên)

Bài tập 10

Với hai tập A, B bất kỳ, chứng minh

(a) $A \cap B \subseteq A$ và $A \cap B \subseteq B$

(b) $A \cap B = A - (A - B)$

(c) $A \cup (B - A) = A \cup B$

(d) $A \cap (B - A) = \emptyset$

(e) $A \Delta A = \emptyset$

(f) $A \Delta \emptyset = A$

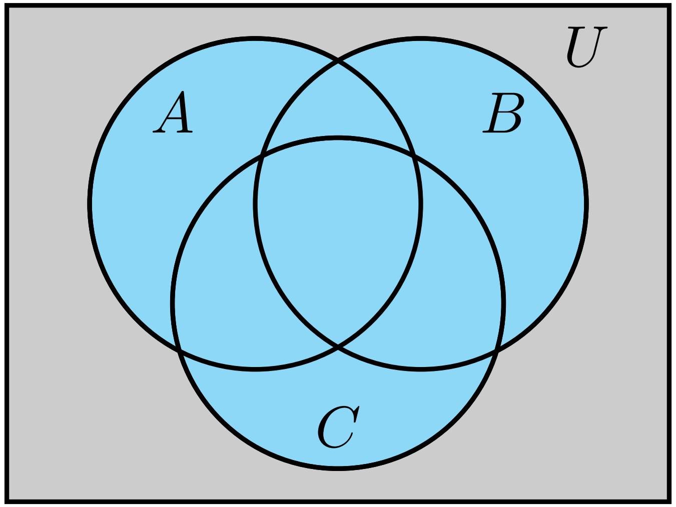
(g) $A \Delta B = B \Delta A$

(h) $(A \Delta B) \Delta B = A$

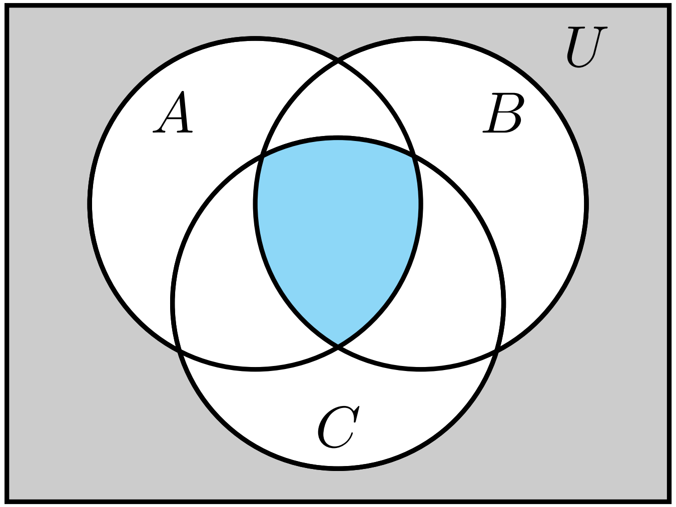
Tập hợp

Tổng quát hóa phép hợp và phép giao

- Do các phép hợp và giao thỏa mãn luật giao hoán và luật kết hợp, ta có thể mở rộng các khái niệm này cho dãy n tập $A_1, \dots, A_n$ hoặc thậm chí dãy vô hạn các tập.
  - Cách nhóm và thứ tự thực hiện không quan trọng
  - $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = B \cup (A \cup C) = \dots$
  - $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = B \cap (A \cap C) = \dots$



Hình: Giản đồ Venn cho $A \cup B \cup C$



Hình: Giản đồ Venn cho $A \cap B \cap C$

Tập hợp

Tổng quát hóa phép hợp và phép giao

- *Hợp (union)* của một bộ (hữu hạn hoặc vô hạn) các tập hợp là một tập chứa tất cả các phần tử là thành viên của ít nhất một tập trong bộ
  - $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \exists i \in \{1,\dots,n\}\,(x \in A_i)\} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$
  - Tương tự với tập chỉ số I bất kỳ $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ hay với vô hạn các tập hợp $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$
  - Ví dụ, với $i = 1, 2, \dots$ nếu $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$ thì $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n}\{i, i+1, i+2, \dots\} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}^+$

- *Giao (intersection)* của một bộ (hữu hạn hoặc vô hạn) các tập hợp là một tập chứa tất cả các phần tử là thành viên của tất cả các tập trong bộ
  - $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} \, (x \in A_i)\} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$
  - Tương tự với tập chỉ số I bất kỳ $\bigcap_{i \in I} A_i$ hay với vô hạn các tập hợp $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$
  - Ví dụ, với $i = 1, 2, \dots$ nếu $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$ thì $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \dots\} = \{n, n+1, n+2, \dots\} = A_n$

- Giả sử *tập vũ trụ U là hữu hạn* và các phần tử của U được liệt kê theo *thứ tự* $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$. Ta có thể biểu diễn một tập hữu hạn $A \subseteq U$ dưới dạng một chuỗi nhị phân $\mathcal{B}(A) = x_1x_2\dots x_n$ trong đó $x_i = 1$ *nếu* $u_i \in A$ và $x_i = 0$ *nếu* $u_i \notin A$.
  - Với $U = \{1, 2, \dots, 10\}$ ($u_1 = 1, \dots, u_{10} = 10$) và $A = \{2, 3, 5, 7\}$ thì $\mathcal{B}(A) = 0110101000$

U	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathcal{B}(A)$	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0

- Các toán tử tập hợp *"$\cup$", "$\cap$", và "$\overline{}$"* lần lượt tương ứng với các toán tử lôgic *"$\vee$", "$\wedge$", và "$\neg$"* thực hiện theo từng bit.

Bài tập 11

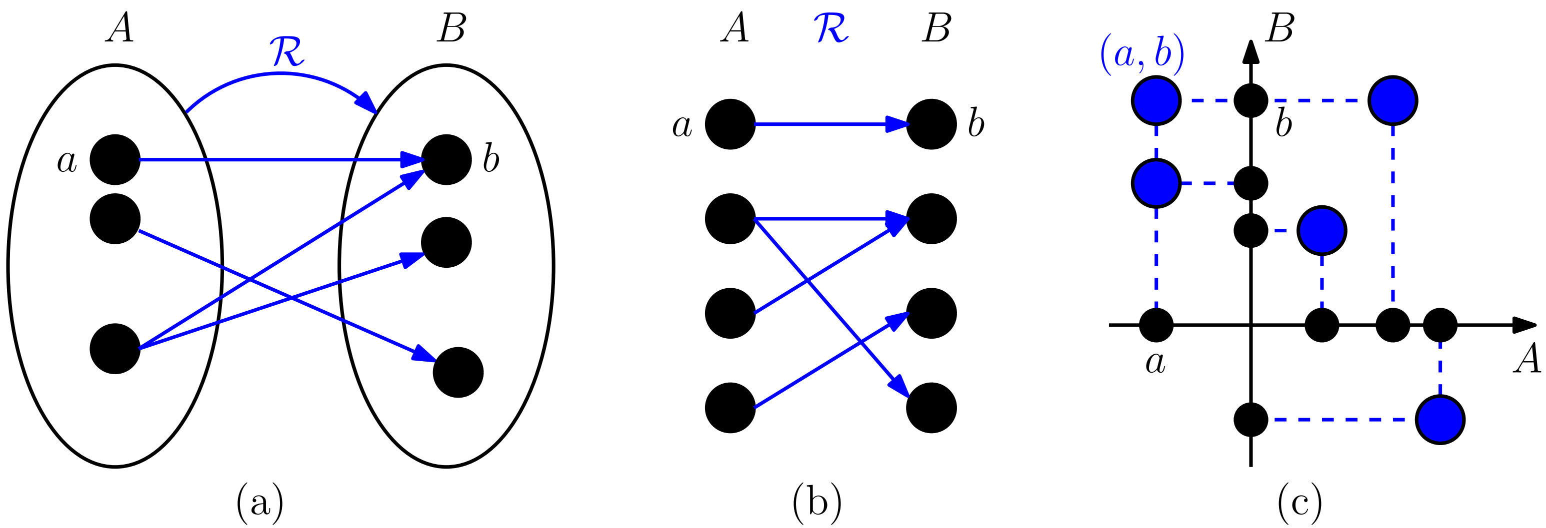
Với $U = \{1, 2, \dots, 10\}$ ($u_i = i$), $A_1 = \{2, 3, 5, 7\}$, $A_2 = \{1, 3, 9\}$, hãy so sánh

(1) $\mathcal{B}(A_1 \cup A_2)$ *và* $\mathcal{B}(A_1) \vee \mathcal{B}(A_2)$

(2) $\mathcal{B}(A_1 \cap A_2)$ *và* $\mathcal{B}(A_1) \wedge \mathcal{B}(A_2)$

(3) $\mathcal{B}(\overline{A_1})$ *và* $\neg\mathcal{B}(A_1)$

- Cho hai tập hợp A và B. Một *quan hệ (relation)* $\mathcal{R}$ giữa A và B là một tập con của tích Đềcác $A \times B$. Ta viết $a\mathcal{R}b$ nếu $(a, b) \in \mathcal{R}$. Trong trường hợp $A = B$ thì $\mathcal{R}$ được gọi là một quan hệ trong A
  - A là tập các giảng viên. B là tập các lớp. $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ là quan hệ "phân công giảng viên dạy lớp học"
  - $\mathcal{R} = \emptyset$: không có giảng viên nào dạy bất kỳ lớp nào
  - $\mathcal{R} = A \times B$: mỗi giảng viên dạy tất cả các lớp
- Biểu diễn một quan hệ bằng hình vẽ



Hình: (a) tương tự giản đồ Venn, (b) đồ thị, (c) hệ tọa độ Đềcác

- Một quan hệ $\mathcal{R}$ trong A được gọi là *quan hệ tương đương (equivalence relation)* nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau

  Tính phản xạ (reflexive) Với mọi a thuộc A, ta có $a\mathcal{R}a$

  Tính đối xứng (symmetric) Với mọi a, b thuộc A, nếu ta có $a\mathcal{R}b$ thì ta cũng có $b\mathcal{R}a$

  Tính bắc cầu (transitive) Với mọi a, b, c thuộc A, nếu ta có $a\mathcal{R}b$ và $b\mathcal{R}c$ thì ta cũng có $a\mathcal{R}c$

Bài tập 12

Trong mỗi trường hợp sau, $\mathcal{R}$ có phải là quan hệ tương đương hay không?

(1) $\mathcal{R} = \{(p, q) \mid p \equiv q\}$ *với* p, q *là các mệnh đề lôgic*

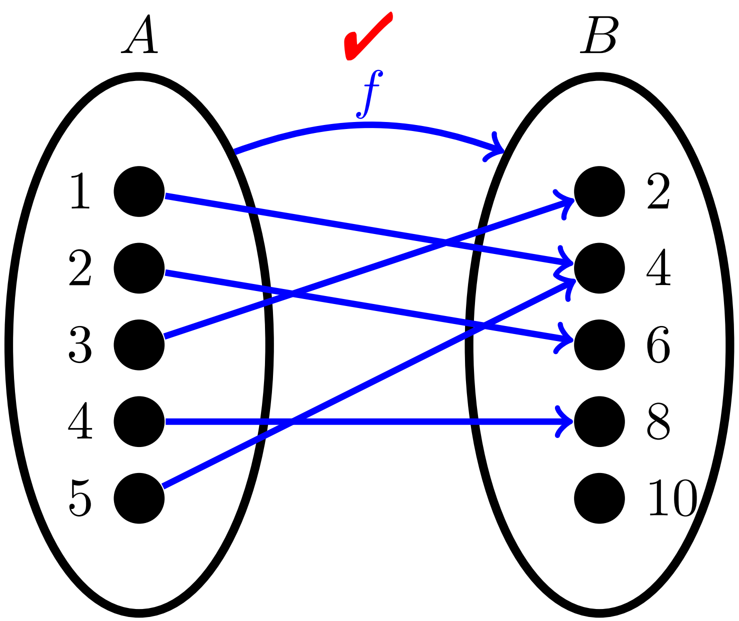
(2) $\mathcal{R} = \{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ *với* A, B *là các tập hợp*

(3) $\mathcal{R} = \{(A, B) \mid A = B\}$ *với* A, B *là các tập hợp*

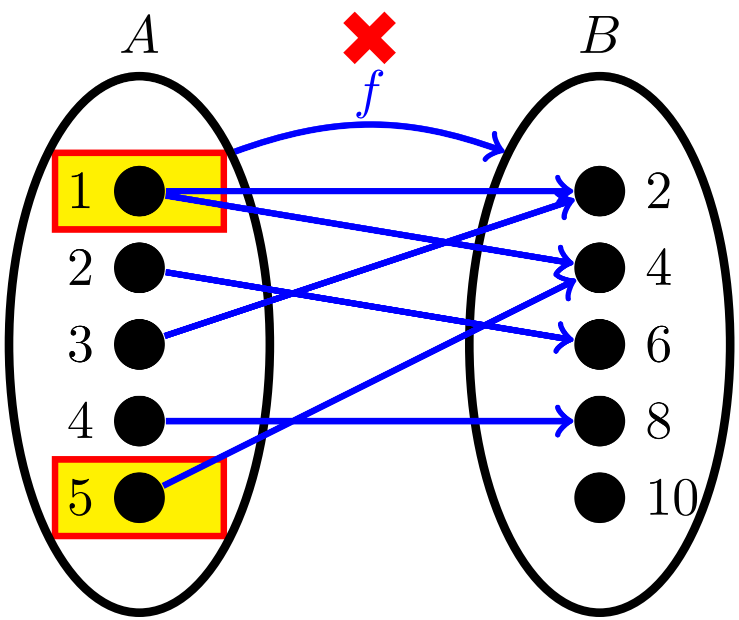
(4) $\mathcal{R} = \{(a, b) \mid b$ *chia hết cho* $a\}$ *với* a, b *là các số nguyên dương*

- Với hai tập khác rỗng A, B, một *hàm (function)* f từ A đến B, ký hiệu $f : A \to B$, là một quan hệ giữa A và B gán *chính xác một phần tử của B* cho *mỗi phần tử của A*
  (1) Với mọi $a \in A$, tồn tại $b \in B$ sao cho $(a, b) \in f$
  (2) Với b_1 và b_2 thuộc B sao cho $(a, b_1) \in f$ và $(a, b_2) \in f$, ta có $b_1 = b_2$

  Nếu b là phần tử duy nhất thuộc B được gán cho phần tử a thuộc A bởi f, ta viết $f(a) = b$



Hình: Hàm



Hình: Không phải hàm

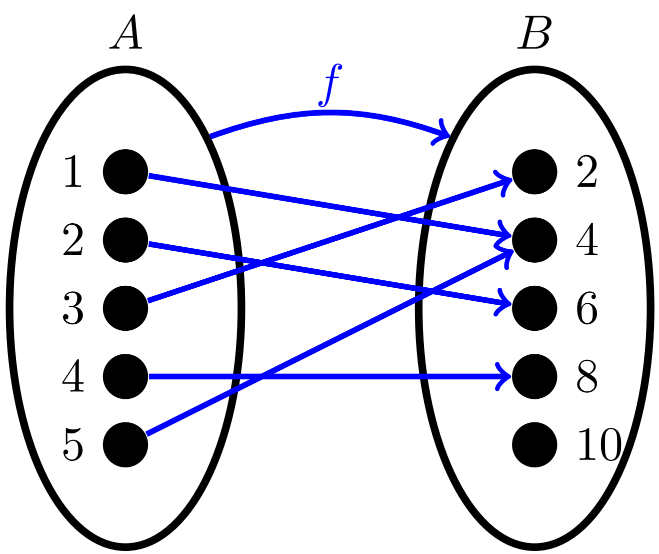
Giả sử f là một hàm từ A đến B

- A được gọi là *miền xác định (domain)* của f
- B được gọi là *miền giá trị (codomain)* của f
- Nếu $f(a) = b$, ta gọi b là *ảnh (image)* của a và a là một *nghịch ảnh (preimage)* của b. Tập hợp tất cả các ảnh của các phần tử thuộc A được gọi là *ảnh của A* qua hàm f, ký hiệu $f(A)$
  - $f(A) \subseteq B$
- Ta cũng nói rằng f *ánh xạ* A đến B

Ví dụ 5

Với hàm f như hình bên

- Tập xác định $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Tập giá trị $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- $f(A) = \{4, 6, 2, 8\} \subseteq B$
- $4 \in B$ là ảnh của cả $1 \in A$ và $5 \in A$



Hình: $f : A \to B$

Bài tập 13

Gọi F là tập hợp tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với tập xác định và tập giá trị là tập các số thực. (Ví dụ, hàm plusOne định nghĩa bởi plusOne$(x) = x + 1$ là một hàm plusOne : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, và do đó plusOne $\in F$.) Các mệnh đề sau là đúng hay sai? Hãy giải thích đáp án của bạn.

(a) $\forall c \in \mathbb{R}\ \left[\exists f \in F\ (f(0) = c)\right]$.

(b) $\exists f \in F\ \left[\forall c \in \mathbb{R}\ (f(0) = c)\right]$.

(c) $\exists f \in F\ \left[\forall c \in \mathbb{R}\ (f(c) = 0)\right]$.

- Cho *f_1 và f_2 là các hàm từ A đến $\mathbb{R}$*. Ta định nghĩa $f_1 + f_2$ và $f_1 f_2$ là các hàm từ A đến $\mathbb{R}$, gọi là các *hàm thực (real-valued function)*, như sau. Với mọi $x \in A$,

ký hiệu hàm

$$\boxed{(f_1 + f_2)}(x) = \boxed{f_1(x) + f_2(x)}$$
$$\boxed{(f_1 f_2)}(x) = \boxed{f_1(x) f_2(x)}$$

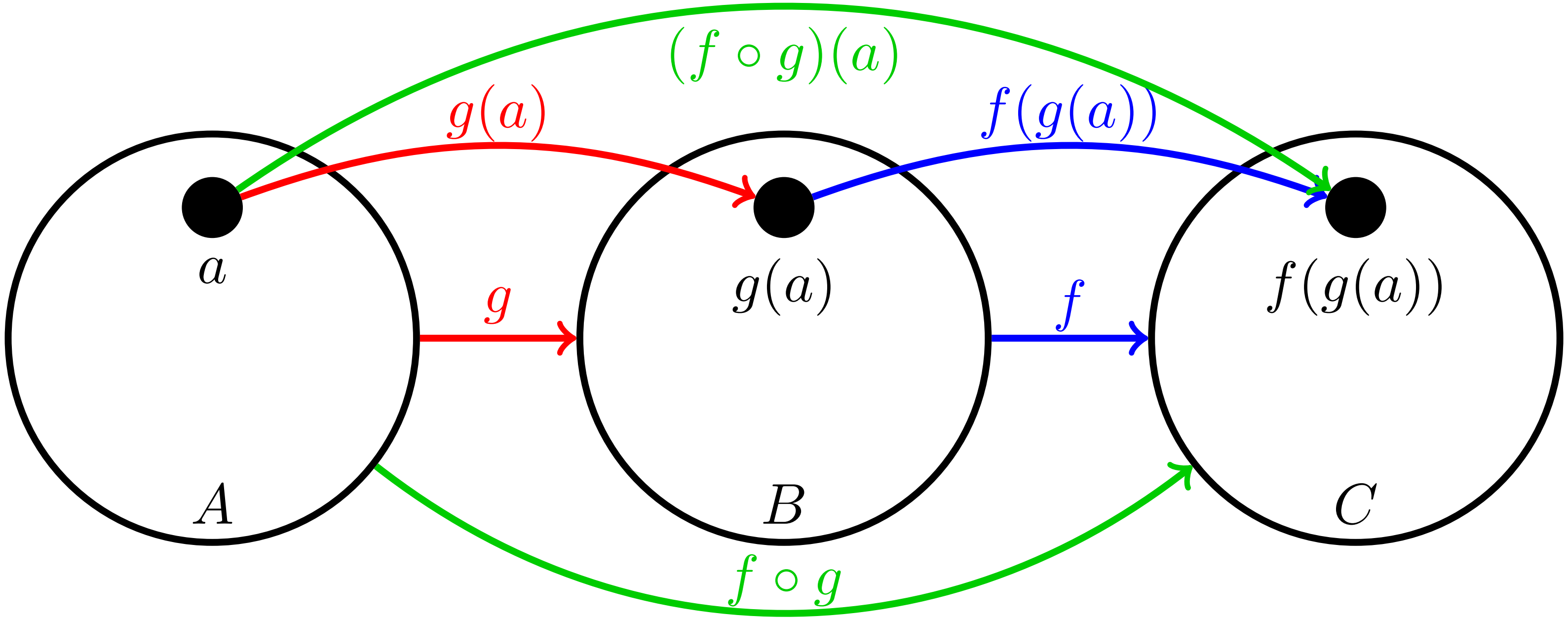
phép toán trong $\mathbb{R}$

Bài tập 14

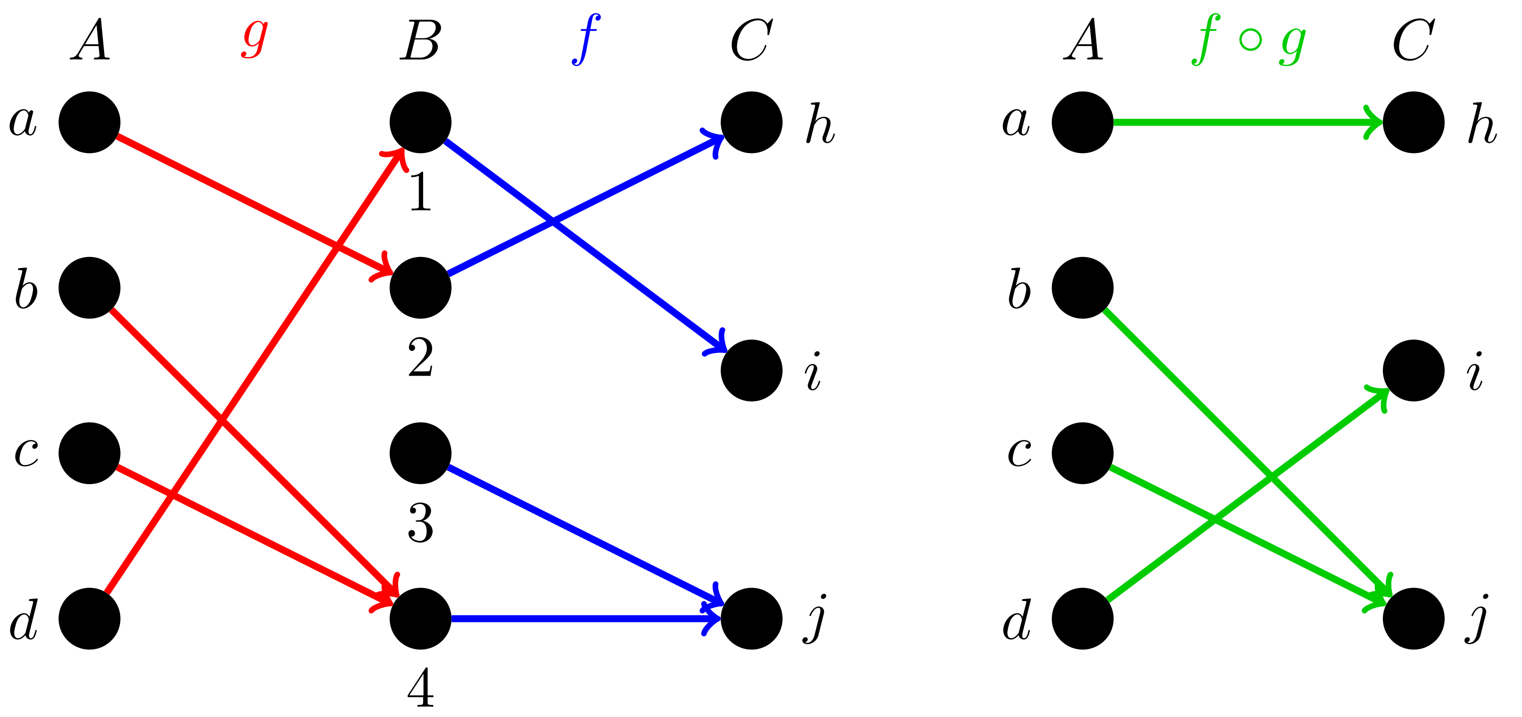
Hãy kiểm tra lại rằng $f_1 + f_2$ và $f_1 f_2$ thực sự là các hàm

- Giả sử f là hàm từ A đến B. Có thể mở rộng định nghĩa ảnh của tập xác định A cho một tập con S của nó. *Ảnh của S* qua hàm f, ký hiệu $f(S)$, là tập tất cả các ảnh của các phần tử thuộc S
  - $f(S) = \{t \mid \exists s \in S\,(t = f(s))\} = \{f(s) \mid s \in S\}$
  - **Chú ý:** $f(s)$ là một phần tử của B và $f(S)$ là một tập con của B

- Với các hàm $g : A \to B$ và $f : B \to C$, ta có thể định nghĩa *hợp (composition)* của f và g, ký hiệu $f \circ g : A \to C$, như sau
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
với mọi $x \in A$
- **Chú ý:** $f \circ g$ chỉ được định nghĩa khi *tập giá trị của g là tập con của tập xác định của f*
- **Chú ý:** Toán tử "$\circ$" không giao hoán, nghĩa là, *trong hầu hết mọi trường hợp, $f \circ g \neq g \circ f$*



Ví dụ 6

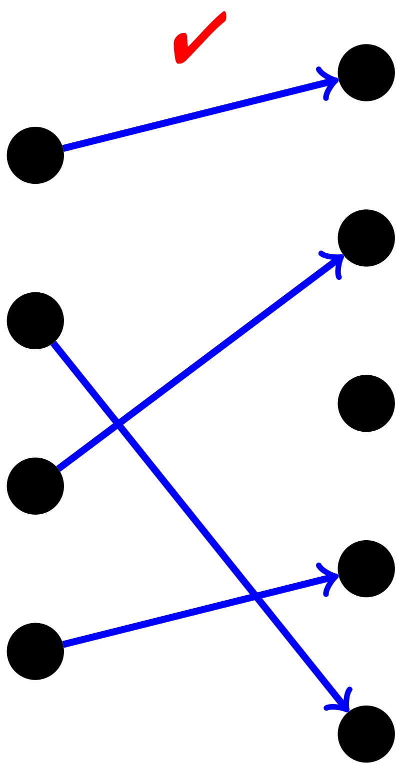


Bài tập 15

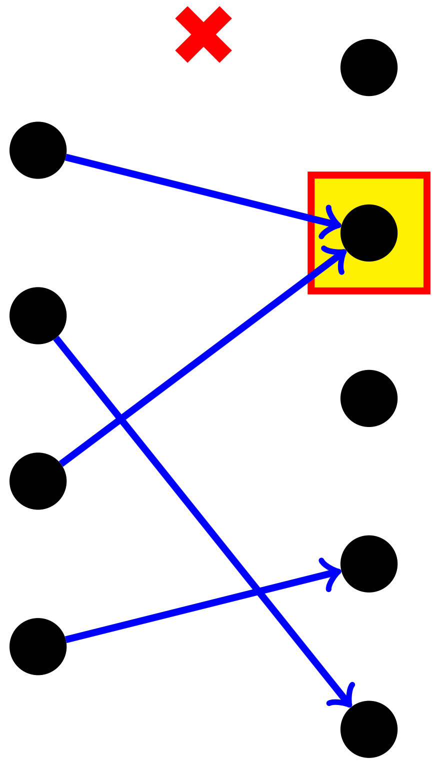
Cho $g : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ *với* $g(a) = b$, $g(b) = c$, *và* $g(c) = a$.
Cho $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ *với* $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, *và* $f(c) = 1$.
Hãy tìm $f \circ g$ *và* $g \circ f$

- Hàm $f : A \to B$ được gọi là một *đơn ánh (injection)* hay một *hàm một-một (one-to-one function)* khi và chỉ khi $f(a) = f(b)$ kéo theo $a = b$ với mọi a và b thuộc tập xác định A của f
  - $\forall a, b\,(f(a) = f(b) \to a = b) \equiv \forall a, b\,(a \neq b \to f(a) \neq f(b))$

Ví dụ 7



Hình: Đơn ánh



Hình: Không phải đơn ánh

Cho $f : A \to B$ là một hàm trong đó các tập A, B là tập con của $\mathbb{R}$

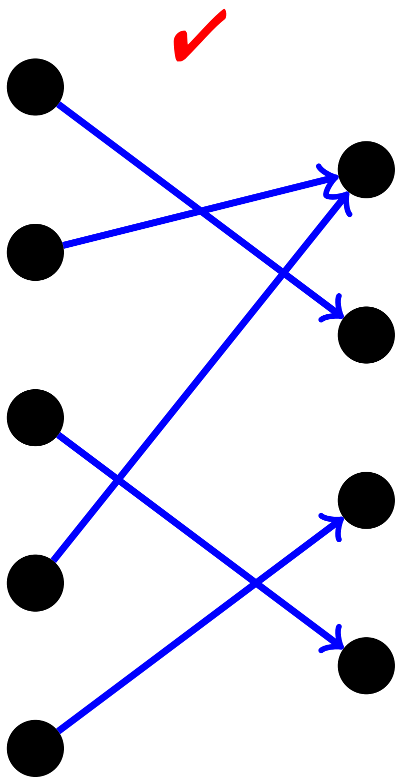
- f được gọi là *tăng (increasing)* khi và chỉ khi với mọi x, y thuộc A thỏa mãn $x < y$, ta luôn có $f(x) \leq f(y)$
  - $\forall x \forall y\,(x < y \to f(x) \leq f(y))$
- f được gọi là *thực sự tăng (strictly increasing)* khi và chỉ khi với mọi x, y thuộc A thỏa mãn $x < y$, ta luôn có $f(x) < f(y)$
  - $\forall x \forall y\,(x < y \to f(x) < f(y))$
- f được gọi là *giảm (decreasing)* khi và chỉ khi với mọi x, y thuộc A thỏa mãn $x < y$, ta luôn có $f(x) \geq f(y)$
  - $\forall x \forall y\,(x < y \to f(x) \geq f(y))$
- f được gọi là *thực sự giảm (strictly decreasing)* khi và chỉ khi với mọi x, y thuộc A thỏa mãn $x < y$, ta luôn có $f(x) > f(y)$
  - $\forall x \forall y\,(x < y \to f(x) > f(y))$

Bài tập 16

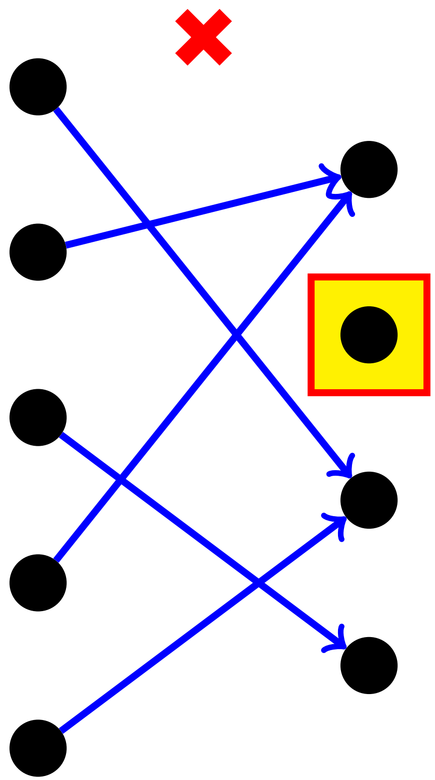
Chứng minh nếu f là hàm thực sự tăng hoặc thực sự giảm thì f là đơn ánh

- Hàm $f : A \to B$ được gọi là một *toàn ánh (surjection)* khi và chỉ khi với mọi phần tử b thuộc B tồn tại một phần tử a thuộc A sao cho $f(a) = b$
  - $\forall b \in B\, \exists a \in A\, (f(a) = b)$
  - $f(A) = B$ (ảnh của A qua f bằng với tập giá trị B)

Ví dụ 8



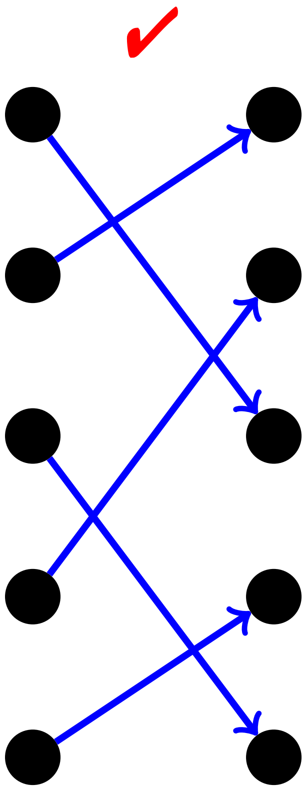
Hình: Toàn ánh



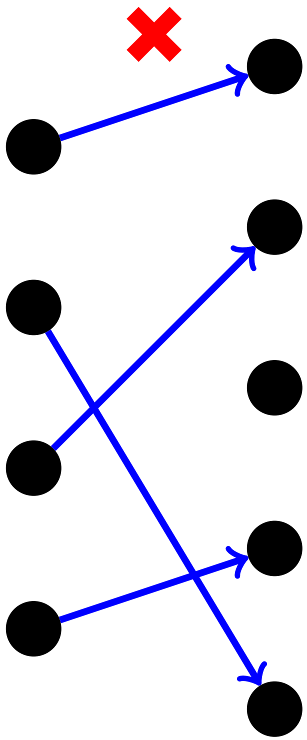
Hình: Không phải toàn ánh

- Hàm $f : A \to B$ được gọi là một *song ánh (bijection)* khi và chỉ khi nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh

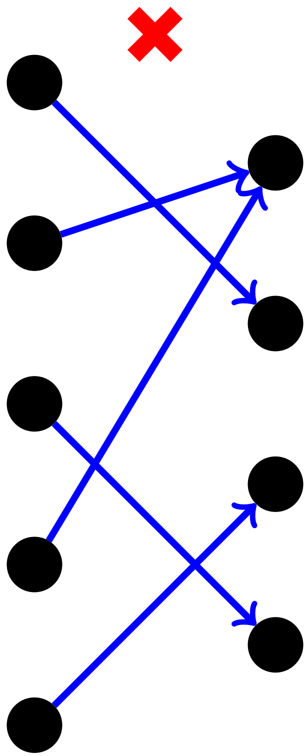
Ví dụ 9



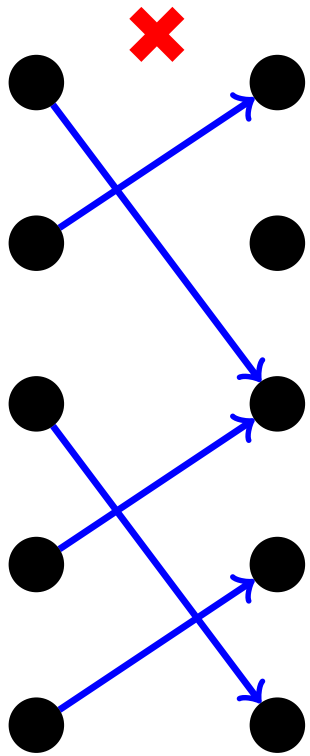
Hình: Song ánh



Hình: Đơn ánh, không toàn ánh

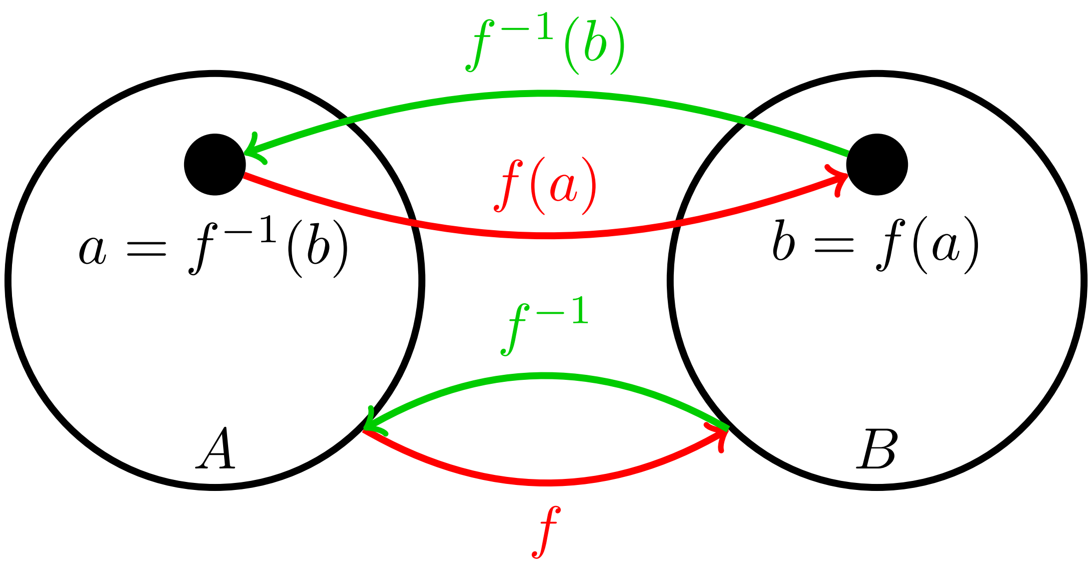


Hình: Toàn ánh, không đơn ánh



Hình: Không đơn ánh, không toàn ánh

- Cho $f : A \to B$ là một song ánh. *Hàm ngược (inverse function)* của f là một hàm gán cho mỗi phần tử $b \in B$ một phần tử duy nhất $a \in A$ sao cho $f(a) = b$. Hàm ngược của f được ký hiệu là $f^{-1} : B \to A$
- Một song ánh còn được gọi là một *hàm khả nghịch (invertible function)*



Bài tập 17

Chứng minh rằng f^{-1} là một song ánh

Bài tập 18

Hàm ngược của các hàm sau có tồn tại hay không? Tại sao?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$

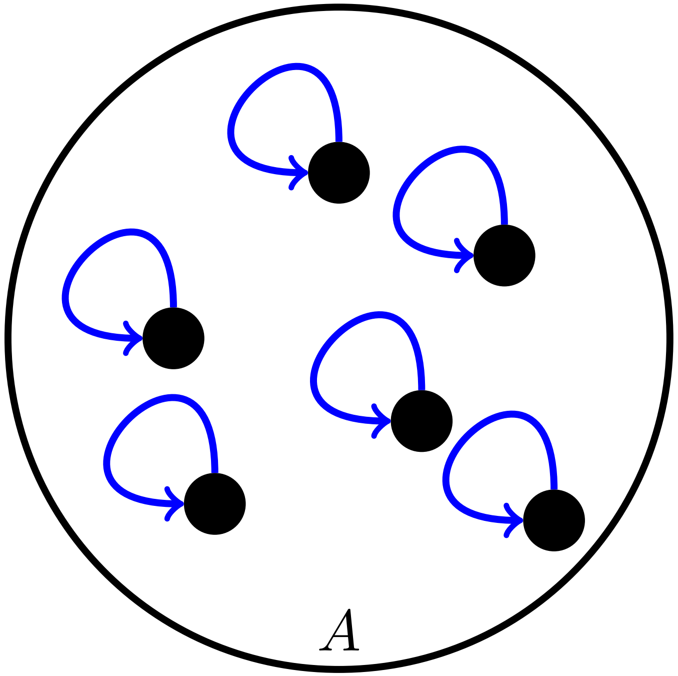
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$

(d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$

- Cho A là một tập hợp. *Hàm đồng nhất (identity function)* trên A là hàm $\mathrm{id}_A : A \to A$ trong đó $\mathrm{id}_A(x) = x$ với mọi $x \in A$
- id_A là song ánh với mọi tập A
- Với song ánh $f : A \to B$ và hàm ngược của nó $f^{-1} : B \to A$

$$f^{-1} \circ f = id_A$$



Hình: Hàm đồng nhất trên A

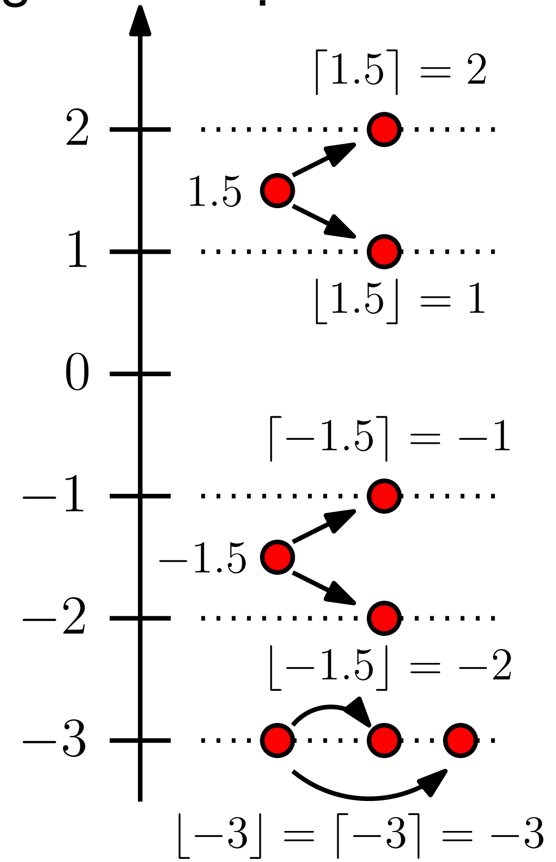
Trong toán rời rạc, ta thường dùng hai hàm sau

- *Hàm sàn (floor function)* gán cho số thực x số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x. Giá trị của hàm sàn được ký hiệu là $\lfloor x \rfloor$
- *Hàm trần (ceiling function)* gán cho số thực x số nguyên nhỏ nhất có giá trị lớn hơn hoặc bằng x. Giá trị của hàm trần được ký hiệu là $\lceil x \rceil$

- Nếu $x \notin \mathbb{Z}$ thì $\lfloor -x \rfloor \neq -\lfloor x \rfloor$ và $\lceil -x \rceil \neq -\lceil x \rceil$
- Nếu $x \in \mathbb{Z}$ thì $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$

Ví dụ 10

- $\lfloor 1.5 \rfloor = 1$, $\lceil 1.5 \rceil = 2$
- $\lfloor -1.5 \rfloor = -2$, $\lceil -1.5 \rceil = -1$
- $\lfloor -3 \rfloor = -3$, $\lceil -3 \rceil = -3$



Dãy

- Một *dãy (sequence)* $\{a_n\}$ được xác định qua một hàm $f : I \to A$ trong đó $I \subseteq \mathbb{Z}$ và A là tập bất kỳ
  - Thông thường, $I = \mathbb{N}$ hoặc $I = \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$
  - Ví dụ, dãy $\{a_n\}$ xác định bởi $f(n) = n^2$ với mọi số nguyên $n \geq 0$ có các phần tử $0, 1, 4, 9, 16, \dots$
- Với $n \in I$, ta *sử dụng a_n để chỉ ảnh của n*, nghĩa là $a_n = f(n)$.
  - a_n là một *số hạng (term)* của dãy $\{a_n\}$
  - n là *chỉ số (index)* của a_n (thông thường, ta sử dụng i thay vì n)
- Đôi khi, thay vì ký hiệu $\{a_n\}$, có thể viết *"dãy $a_1, a_2, \dots$"* để chắc chắn rằng tập các chỉ số I được xác định rõ ràng
- Có thể mô tả một dãy bằng cách liệt kê một vài phần tử đầu tiên hoặc cuối cùng của dãy và sử dụng "…" cho phần còn lại
  - Ví dụ, có thể mô tả dãy $\{a_n\}$ ở trên bằng cách viết $\{a_n\} = 0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots$

- Một *cấp số nhân (geometric progression)* là một dãy có dạng

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots$$

  trong đó *số hạng đầu tiên (initial term)* a và *công bội (common ratio)* r là các số thực
- Ví dụ, với $n = 0, 1, 2, \dots$
  - $\{b_n\}$ với $b_n = (-1)^n$ số hạng đầu tiên 1, công bội -1
  - $\{c_n\}$ với $c_n = 6 \cdot (1/3)^n$ số hạng đầu tiên 6, công bội $1/3$
- Một *cấp số cộng (arithmetic progression)* là một dãy có dạng

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$$

  trong đó *số hạng đầu tiên (initial term)* a và *công sai (common difference)* d là các số thực
- Ví dụ, với $n = 0, 1, 2, \dots$
  - $\{d_n\}$ với $d_n = -1 + 4n$ số hạng đầu tiên -1, công sai 4
  - $\{e_n\}$ với $e_n = 7 - 3n$ số hạng đầu tiên 7, công sai -3

- Một *hệ thức truy hồi (recurrence relation)* cho dãy $\{a_n\}$ là một phương trình biểu diễn a_n thông qua một hoặc nhiều số hạng trước đó của dãy với mọi số nguyên n thỏa mãn $n \geq n_0$ với n_0 là một số nguyên không âm.
  - Với dãy $\{a_n\} = 0, 1, 4, 9, 16 \dots \ (n \geq 0)$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ *với* $n \geq 1$ là một hệ thức truy hồi cho $\{a_n\}$ (ở đây $n_0 = 1$)
- Để định nghĩa một dãy $\{a_n\}$ thông qua hệ thức truy hồi, ta cần thêm *các điều kiện ban đầu (initial conditions)* bằng cách *định nghĩa các phần tử trước* a_{n_0} trong dãy
  - Để định nghĩa $\{a_n\}$ qua hệ thức $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ $(n \geq 1)$, ta cần thêm *điều kiện ban đầu* $a_0 = 0$
- Một dãy được gọi là một *nghiệm (solution)* của một hệ thức truy hồi nếu các số hạng của dãy thỏa mãn hệ thức đó.
- *Giải hệ thức truy hồi với các điều kiện ban đầu* nghĩa là tìm một công thức tường minh cho các số hạng trong dãy
  - Một công thức tường minh cho dãy $\{a_n\}$ định nghĩa bởi $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ với $n \geq 1$ và điều kiện ban đầu $a_0 = 0$ là $a_n = n^2$ *$(n \geq 0)$*

Ví dụ 11

- Dãy $\{b_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi $b_n = -b_{n-1}$ với $n \geq 1$ và điều kiện ban đầu $b_0 = 1$
    - $\{b_n\} = 1, -1, 1, -1, \dots$
- Dãy $\{s_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi $s_n = s_{n-1} - s_{n-2}$ với $n \geq 2$ và điều kiện ban đầu $s_0 = 3$ và $s_1 = 5$
    - $\{s_n\} = 3, 5, 2, -3, -5, \dots$
- *Dãy Fibonacci (Fibonacci sequence)* $\{f_n\}$ $(n \geq 0)$ được định nghĩa bởi điều kiện ban đầu $f_0 = 0, f_1 = 1$ và hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ với mọi số nguyên $n \geq 2$
    - $\{f_n\} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$
- *Dãy giai thừa (factorial sequence)* $\{g_n\}$ được định nghĩa bởi điều kiện ban đầu $g_0 = 1$ và hệ thức truy hồi $g_n = ng_{n-1}$ với mọi số nguyên $n \geq 1$
    - $\{g_n\} = 1, 1, 2, 6, 24, \dots$

Ví dụ 12

Giải hệ thức truy hồi $d_n = d_{n-1} + 4$ $(n \geq 1)$ với điều kiện ban đầu $d_0 = -1$

Hướng suy luận

(1) Từ hệ thức truy hồi, ta cũng có $d_{n-1} = d_{n-2} + 4$

(2) Thay (2) vào hệ thức ban đầu
$d_n = (d_{n-2} + 4) + 4 = d_{n-2} + 2 \cdot 4$

(3) Từ hệ thức truy hồi, ta cũng có $d_{n-2} = d_{n-3} + 4$

(4) Thay (4) vào (3), ta thu được $d_n = d_{n-3} + 3 \cdot 4$

(5) Lặp lại quá trình trên, ta "đoán" $d_n = d_{n-r} + r \cdot 4$

(6) Để có một công thức tường minh cho d_n, ta cần $n - r = 0$, tức là $r = n$. Khi đó d_n được biểu diễn qua d_0 đã cho trước và $n = r$.

(7) Tóm lại, ta có $d_n = -1 + 4n$

Ví dụ 13

Giải hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ $(n \geq 1)$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 0$

(1) Từ hệ thức truy hồi, ta có $a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-1) - 1$

(2) Thay vào hệ thức ban đầu,
$a_n = (a_{n-2} + 2(n-1) - 1) + 2n - 1 = a_{n-2} + 4n - 4$

(3) Từ hệ thức truy hồi, ta có $a_{n-2} = a_{n-3} + 2(n-2) - 1$

(4) Thay vào (2),
$a_n = (a_{n-3} + 2(n-2) - 1) + 4n - 4 = a_{n-3} + 6n - 9$

(5) Từ hệ thức truy hồi, ta có $a_{n-3} = a_{n-4} + 2(n-3) - 1$

(6) Thay vào (4),
$a_n = (a_{n-4} + 2(n-3) - 1) + 6n - 9 = a_{n-4} + 8n - 16$

(7) Lặp lại quá trình trên, ta "đoán" $a_n =$

(8) Để có một công thức tường minh cho a_n, ta cần $n - r = 0$, tức là $r = n$. Khi đó a_n được biểu diễn qua a_0 đã cho trước và $n = r$

(9) Tóm lại $a_n =$

- Cho trước một vài phần tử của dãy
- Yêu cầu tìm
  - một công thức tường minh của các số hạng
  - hoặc một phương thức để liệt kê các phần tử của dãy

Ví dụ 14

Số tiếp theo trong dãy có thể là bao nhiêu?

- $1, 2, 3, 4, \ldots$
- $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$
- $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

Ví dụ 15

Các số hạng tiếp theo có thể là bao nhiêu?

- $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$
- $0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55$

- Một phương pháp hữu ích để tìm công thức tổng quát cho các số hạng của một dãy là *so sánh các số hạng của dãy cần tìm với các số hạng của một dãy đã biết* (ví dụ như cấp số cộng, cấp số nhân, dãy số chính phương, v.v...)

Công thức	**Mười số hạng đầu tiên**
n^2	$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots$
n^3	$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, \dots$
n^4	$1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000, \dots$
f_n	$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$
2^n	$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots$
3^n	$3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, \dots$
$n!$	$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, \dots$

- Bảng Tra Cứu Dãy Số Nguyên Trực Tuyến (The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences - OEIS) `https://oeis.org/`

- Cho *dãy* $\{a_n\}$, một số nguyên *giới hạn dưới (lower limit)* m, và một số nguyên *giới hạn trên (upper limit)* $n \geq m$. *Tổng (summation)* của các số hạng $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ có thể được viết là

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j$$

$$\sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

- Ở đây, j được gọi là *chỉ số lấy tổng (index of summation)* và được chọn hoàn toàn tùy ý

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

- Với tập chỉ số S bất kỳ, ta có thể viết

$$\sum_{j \in S} a_j$$

- Với $\{a_n\}$ là dãy vô hạn, ta có thể viết

$$\sum_{i=j}^{\infty} a_i = a_j + a_{j+1} + \dots$$

- Tổng các giá trị của một hàm trên tập $X = \{x_1, x_2, \dots\}$

$$\sum_{x \in X} f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \dots$$

- Nếu $X = \{x \mid P(x)\}$ với vị từ $P(x)$ nào đó

$$\sum_{P(x)} f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \dots$$

Ví dụ 16

$$\sum_{j=1}^{4} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots$$

$$\sum_{\substack{(0 \le x \le 10) \\ \wedge (x \text{ chẵn})}} x^2 = 0 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2$$

- *Tổng hằng số:* Với hằng số c bất kỳ,

$$\sum_{n=i}^{j} c = (j - i + 1) \cdot c$$

- *Phân phối:* Với hằng số c bất kỳ,

$$\sum_{n=i}^{j} cf(n) = c\sum_{n=i}^{j} f(n)$$

- *Giao hoán:*

$$\sum_{n=i}^{j}(f(n) + g(n)) = \sum_{n=i}^{j} f(n) + \sum_{n=i}^{j} g(n)$$

- *Đổi chỉ số:*

$$\sum_{i=j}^{m} f(i) = \sum_{k=j+n}^{m+n} f(k-n)$$

  - Ví dụ $\sum_{i=1}^{4} i^2 = \sum_{k=3}^{6} (k-2)^2$ (đặt $k = i + 2$)

- *Tách tổng:* Với $j \leq m < k$

$$\sum_{i=j}^{k} f(i) = \sum_{i=j}^{m} f(i) + \sum_{i=m+1}^{k} f(i)$$

- *Đảo thứ tự:*

$$\sum_{i=0}^{k} f(i) = \sum_{i=0}^{k} f(k-i)$$

- Với $\{a_n\}$ là cấp số nhân có số hạng đầu tiên a và công bội r, tổng của $n+1$ số hạng đầu tiên của dãy là

$$S = \sum_{i=0}^{n} ar^i$$

- Công thức tường minh

$$S = \sum_{i=0}^{n} ar^i = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1} - a}{r-1} & \text{nếu } r \neq 1 \\ (n+1)a & \text{nếu } r = 1 \end{cases}$$

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

$$rS = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + ar^{n+1}$$

$$rS - S = ar^{n+1} - a$$

$$
\begin{aligned}
rS &= r\sum_{i=0}^{n} ar^i && \text{công thức của } S \\
&= \sum_{i=0}^{n} ar^{i+1} && \text{phân phối} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k && \text{đổi chỉ số, } k = i+1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} ar^k + \sum_{k=n+1}^{n+1} ar^k && \text{tách tổng} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} ar^k + ar^0\right) + (ar^{n+1} - ar^0) && \text{thêm và bớt } ar^0 = a \\
&= \sum_{k=0}^{n} ar^k + (ar^{n+1} - a) && \text{tách tổng} \\
&= S + (ar^{n+1} - a) && \text{công thức của } S
\end{aligned}
$$

Ví dụ 17

Tìm công thức tường minh cho tổng $T = \sum_{i=1}^{n} i$

$$\begin{aligned} T &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ T &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\ 2T &= (n+1) \cdot n \end{aligned}$$

Bài tập 19

Với $\{a_n\}$ là cấp số cộng có số hạng đầu tiên a và công sai d, tổng của $n+1$ số hạng đầu tiên của dãy là

$$T = \sum_{i=0}^{n} (a + id)$$

Hãy tìm công thức tường minh cho T

Ví dụ 18

Phương pháp của Gauss để tính $\sum_{i=1}^{100} i$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$

Bài tập 20

Tìm công thức tường minh cho $T = \sum_{i=1}^{n} i$ *sử dụng phương pháp tương tự như ví dụ trên. Có thể áp dụng phương pháp tương tự cho Bài tập 19 không?*

Ví dụ 19

Tìm công thức tường minh của $T = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ với x là số thực thỏa mãn $-1 < x < 1$

Ta đã chứng minh

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}.$$

Do $-1 < x < 1$, $x^{k+1} \to 0$ khi $k \to \infty$. Ta có

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} x^n = \lim_{k\to\infty} \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}$$

Tổng	Công thức tường minh
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \ (r \neq 0)$	$\dfrac{ar^{n+1} - a}{r - 1} \ (r \neq 1)$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \ (-1 < x < 1)$	$\dfrac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \ (-1 < x < 1)$	$\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Part I

Phụ lục

Nội dung

Tập hợp
- Nghịch lý

Lực lượng của tập vô hạn
- Định nghĩa
- Tập đếm được và không đếm được

- Chúng ta đang học một *lý thyết tập hợp ngây thơ (naive set theory)*
  - Định nghĩa bằng ngôn ngữ tự nhiên, không chặt chẽ về mặt toán học
  - Mô tả các khía cạnh của các tập hợp toán học quen thuộc trong toán rời rạc
  - Bản thân lý thuyết này có chứa các *nghịch lý (paradox)* (= một phát biểu tự phủ định chính nó mặc dù lúc đầu nhìn có vẻ đúng)
- *Nghịch lý Russell* (Đặt theo tên nhà triết học, nhà lôgic học, nhà toán học người Anh Bertrand Russell (1872–1970))
  - Gọi S là tập *tất cả các tập hợp không chứa chính nó như là một phần tử*, nghĩa là $S = \{A \mid A$ là một tập hợp và $A \notin A\}$
    - Chú ý rằng *theo định nghĩa tập hợp ta đã học, tồn tại một tập hợp chứa chính nó như là một phần tử*. Ví dụ xét *tập T các tập hợp có chứa ít nhất một phần tử*
  - *Liệu S có phải là một phần tử của chính nó hay không*, nói cách khác, liệu $S \in S$?

- **Nhắc lại:** *Lực lượng (cardinality)* của một tập A, ký hiệu $|A|$, là số phần tử khác biệt mà A có
- Các tập A và B *có cùng lực lượng*, ký hiệu $|A| = |B|$, khi và chỉ khi tồn tại một *song ánh* từ A đến B
- Nếu tồn tại một *đơn ánh* từ A đến B, ta nói "lực lượng của A nhỏ hơn hoặc bằng lực lượng của B", và ký hiệu $|A| \leq |B|$
- Khi $|A| \leq |B|$ và hai tập A, B có lực lượng khác nhau, ta nói "lực lượng của A nhỏ hơn lực lượng của B", và ký hiệu $|A| < |B|$

Bài tập 21

Chứng minh rằng $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ với mọi tập hợp A, trong đó $\mathcal{P}(A)$ là tập tất cả các tập hợp con của A

Bài tập 22

Tập $2\mathbb{Z}$ gồm các số nguyên chẵn có cùng lực lượng với tập số nguyên $\mathbb{Z}$ hay không?

Định lý 1: Định lý Cantor

Không tồn tại một toàn ánh $f : A \to \mathcal{P}(A)$ với A là một tập hợp bất kỳ và $\mathcal{P}(A)$ là tập tất cả các tập con của A

Chứng minh.

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng

- Giả sử tồn tại toàn ánh $f : A \to \mathcal{P}(A)$
- Ta định nghĩa tập con $G \subseteq A$ như sau

$$G := \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$$

- Do f là toàn ánh, tồn tại $a \in A$ sao cho $G = f(a)$
- Xét hai trường hợp
  - Nếu $a \in G$ thì theo định nghĩa của G, ta có $a \notin f(a) = G$. Đây là một mâu thuẫn
  - Nếu $a \notin G = f(a)$ thì $a \notin f(a)$. Do đó theo định nghĩa của G, ta có $a \in G$. Đây là một mâu thuẫn

- Một tập có hữu hạn số phần tử hoặc có cùng lực lượng với tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ được gọi là *tập đếm được (countable set)* và ngược lại thì gọi là *tập không đếm được (uncountable set)*
  - Có thể liệt kê các phần tử của tập đếm được theo thứ tự: phần tử thứ 1, phần tử thứ 2, v.v...
- Khi một tập vô hạn S là tập đếm được, ta ký hiệu lực lượng của S là $\aleph_0$ ("aleph null") và viết $|S| = \aleph_0$

Ví dụ 20

Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ là tập đếm được

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array}$$

Ví dụ 21

Tập các số nguyên dương lẻ là tập đếm được

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots \end{array}$$

Ví dụ 22

Tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ là tập đếm được

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots \end{array}$$

Ví dụ 23

Tập các số hữu tỷ dương $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+\}$ là tập đếm được

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{\frac{1}{1}} & \boxed{\frac{2}{1}} & \boxed{\frac{3}{1}} & \boxed{\frac{4}{1}} & \boxed{\frac{5}{1}} & \cdots \\ \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{2}{2} & \boxed{\frac{3}{2}} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\ \boxed{\frac{1}{3}} & \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\ \boxed{\frac{1}{4}} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \cdots \\ \boxed{\frac{1}{5}} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \cdots \end{array}$$

Ta chứng minh *tập số thực $\mathbb{R}$ là tập không đếm được* bằng phương pháp phản chứng sử dụng *lập luận đường chéo của Cantor (Cantor diagonalization argument)*

- Giả sử $\mathbb{R}$ là tập đếm được. Do mọi tập con của một tập đếm được cũng là một tập đếm được (*tại sao?*), tập các số thực nằm giữa 0 và 1 cũng là tập đếm được
- Sắp thứ tự các số thực giữa 0 và 1: $r_1, r_2, \dots$

$$\begin{aligned}
r_1 &= 0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}\dots \\
r_2 &= 0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}\dots \\
r_3 &= 0.d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}\dots \\
r_4 &= 0.d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}\dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

trong đó $d_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

- Xây dựng một số thực $r = 0.d_1d_2d_3d_4\dots$ mới trong đó

$$d_i = \begin{cases} 4 & \text{nếu } d_{ii} \neq 4 \\ 5 & \text{nếu } d_{ii} = 4 \end{cases}$$

- r không bằng bất cứ số nào trong các số $r_1, r_2, \dots$ vì nó luôn khác r_i ở vị trí thứ i sau "$0.$"
- Do đó r là một số thực giữa 0 và 1 không nằm trong danh sách $r_1, r_2, \dots$, do mỗi số thực có một biểu diễn thập phân duy nhất
- Tóm lại, không phải mọi số thực giữa 0 và 1 đều được liệt kê theo thứ tự $r_1, r_2, \dots$, và do đó tập các số thực giữa 0 và 1 là tập không đếm được
- Nếu tập con của một tập là không đếm được thì tập đó cũng không đếm được (*tại sao?*), suy ra tập số thực $\mathbb{R}$ là không đếm được