

COPYRIGHT NOTICE

THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-05-11

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-05-11



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

- Tính câu điểm cao nhất
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.

Họ và Tên: _____

Mã Sinh Viên: _____ Lớp: _____

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	10	10	10	10	40
Điểm:					

1. (10 điểm) Giả sử G và H là các đơn đồ thị thỏa mãn $G \simeq H$. Chứng minh rằng $\overline{G} \simeq \overline{H}$.

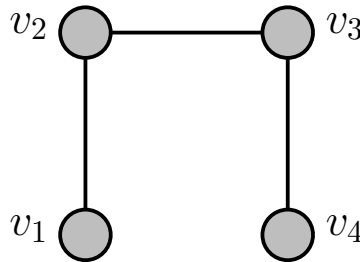
Lời giải: Do $G \simeq H$, tồn tại một song ánh $f : V(G) \rightarrow V(H)$ thỏa mãn điều kiện $uv \in E(G)$ khi và chỉ khi $f(u)f(v) \in E(H)$ với mọi cặp đỉnh $u, v \in V(G)$. Theo định nghĩa, $V(G) = V(\overline{G})$ và $V(H) = V(\overline{H})$, do đó $f : V(\overline{G}) \rightarrow V(\overline{H})$ là một song ánh. Thêm vào đó, với mọi cặp đỉnh $u, v \in V(\overline{G})$, ta có

$$\begin{aligned} uv \in E(\overline{G}) &\Leftrightarrow uv \notin E(G) && \text{Định nghĩa đồ thị bù} \\ &\Leftrightarrow f(u)f(v) \notin E(H) && G \simeq H \\ &\Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(\overline{H}) && \text{Định nghĩa đồ thị bù} \end{aligned}$$

Do đó, $\overline{G} \simeq \overline{H}$.

2. (10 điểm) Một đơn đồ thị G được gọi là *tự bù* (*self-complementary*) nếu $G \simeq \overline{G}$.

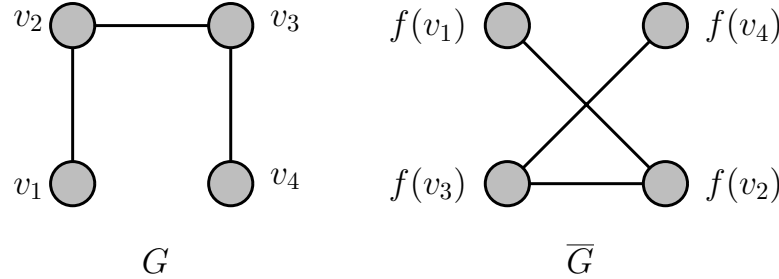
- (a) Chứng minh rằng đồ thị sau là một đồ thị tự bù



- (b) Tìm một đồ thị tự bù có 5 đỉnh.

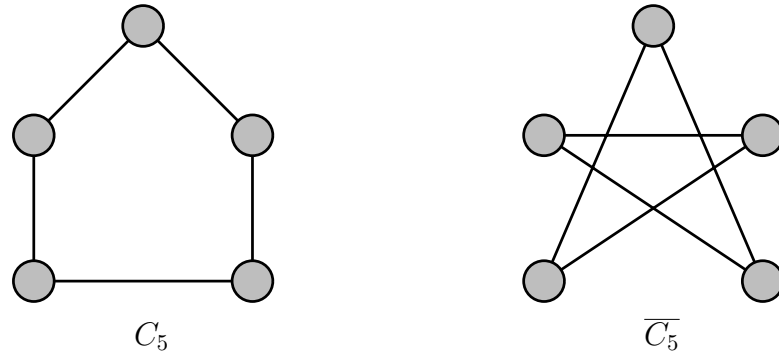
Lời giải:

- (a) Ta định nghĩa một song ánh $f : V(G) \rightarrow V(\overline{G})$ như sau: $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_4$, $f(v_3) = v_1$, và $f(v_4) = v_3$.



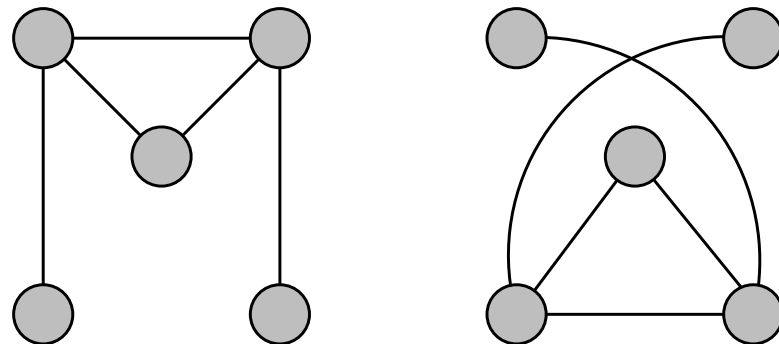
Để thấy với mọi cặp đỉnh v_i, v_j ($1 \leq i < j \leq 4$), ta có $v_i v_j \in E(G)$ khi và chỉ khi $f(v_i) f(v_j) \in E(\overline{G})$. (Có thể kiểm tra từng cặp một.) Do đó, $G \simeq \overline{G}$, hay G là một đồ thị tự bù.

- (b) Đồ thị C_5 là một đồ thị tự bù có 5 đỉnh.



Để thấy điều này, theo định nghĩa, nếu G là một đồ thị tự bù gồm n đỉnh thì do $G \simeq \overline{G}$, ta có $|E(G)| = |E(K_n)|/2 = n(n-1)/4$. Do đó, một đồ thị tự bù có 5 đỉnh thì cần có $5(5-1)/4 = 5$ cạnh. C_5 là một đồ thị thỏa mãn điều kiện trên.

Một đồ thị khác thỏa mãn điều kiện trên là đồ thị sau:



3. (10 điểm) Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Một đỉnh $w \in V$ được gọi là *hướng tới được* (reachable) từ đỉnh $v \in V(G)$ nếu tồn tại một đường đi có hướng từ v đến w . Hai đỉnh v, w là *lẫn nhau hướng tới được* (mutually reachable) nếu như w hướng tới được từ v và v hướng tới được từ w .

- (a) Chứng minh rằng nếu u, v là lẫn nhau hướng tới được và v, w là lẫn nhau hướng tới được thì u, w là lẫn nhau hướng tới được.

- (b) Sử dụng phần (a), chứng minh rằng nếu H và K lần lượt là các thành phần liên thông mạnh chứa u và v thì $H = K$ hoặc H và K không có đỉnh chung, trong đó u, v là các đỉnh bất kỳ.

Lời giải:

- (a) Do u, v là lẫn nhau hướng tới được, tồn tại một đường đi có hướng $P(u, v)$ từ u đến v và một đường đi có hướng $P(v, u)$ từ v đến u . Tương tự, do v, w là lẫn nhau hướng tới được, tồn tại một đường đi có hướng $P(v, w)$ từ v đến w và một đường đi có hướng $P(w, v)$ từ w đến v . Các đường đi $P(u, v)$ và $P(v, w)$ tạo thành một đường đi có hướng từ u đến w qua v . Các đường đi $P(w, v)$ và $P(v, u)$ tạo thành một đường đi có hướng từ w đến u qua v . Do đó, u, w là lẫn nhau hướng tới được.

- (b) Ta chứng minh nếu $H \neq K$ thì H và K không có đỉnh chung. Theo định nghĩa, trong một thành phần liên thông mạnh, hai đỉnh bất kỳ x và y là lẫn nhau hướng tới được. Ta sử dụng phương pháp phản chứng. Giả sử rằng $H \neq K$ và H và K có một đỉnh chung w .

Trước tiên, do $H \neq K$, $H \cup K$ thực sự chứa cả H và K .

Ta chứng minh $H \cup K$ là một thành phần liên thông của G bằng cách chỉ ra với mỗi cặp đỉnh u, v bất kỳ thuộc $H \cup K$, u và v là lẫn nhau hướng tới được.

- Nếu u, v cùng thuộc H hoặc cùng thuộc K thì hiển nhiên theo định nghĩa của thành phần liên thông mạnh, u và v là lẫn nhau hướng tới được.
- Trường hợp còn lại là u thuộc H và v thuộc K . Do H là thành phần liên thông mạnh và H chứa cả u và w , ta có u, w là lẫn nhau hướng tới được. Tương tự, w và v là lẫn nhau hướng tới được. Do đó, u và v là lẫn nhau hướng tới được.

Do đó, $H \cup K$ là một thành phần liên thông mạnh của G .

Ta đã chứng minh $H \cup K$ là một thành phần liên thông mạnh của G thực sự chứa cả H và K . Điều này mâu thuẫn với giả thiết H và K là hai thành phần liên thông mạnh của G .

4. (10 điểm) Chứng minh rằng mỗi đồ thị sau không có đỉnh cắt

- (a) C_n với $n \geq 3$
(b) W_n với $n \geq 3$

Lời giải:

- (a) Giả sử $V(C_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ và $E(C_n) = \{v_0v_1, \dots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_0\}$ với $n \geq 3$. Ta chứng minh với mọi $i \in \{0, \dots, n-1\}$, đồ thị $C_n - v_i$ là đồ thị liên thông. Thật vậy, với mọi cặp đỉnh $v_j, v_k \in V(C_n - v_i)$, trong đó $j, k \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{i\}$ và $j < k$, một đường đi giữa v_j và v_k là $v_j = v_{k \bmod n}, v_{(k+1) \bmod n}, \dots, v_{(k+(n-k+j)) \bmod n} = v_j$ nếu $i < k$ và là $v_j = v_{j \bmod n}, v_{(j+1) \bmod n}, \dots, v_{(j+(k-j)) \bmod n} = v_k$ nếu $i > k$.

Ta đã chỉ ra với mọi đỉnh $v \in V(C_n)$, các đồ thị C_n và $C_n - v$ đều có chính xác một thành phần liên thông. Do đó, C_n không có đỉnh cắt.

- (b) Giả sử $V(W_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\} \cup \{w\}$ và $E(W_n) = \{v_0v_1, \dots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_0\} \cup \{wv_0, wv_1, \dots, wv_{n-1}\}$ với $n \geq 3$. Đồ thị $W_n - v_i$ là đồ thị liên thông với mọi $i \in \{0, \dots, n-1\}$ do với mọi cặp đỉnh $v_j, v_k \in V(C_n - v_i)$, trong đó $j, k \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{i\}$, một đường đi giữa v_j và v_k là v_j, w, v_k . Thêm vào đó, đồ thị $W_n - w$ là C_n và do đó cũng là đồ thị liên thông, do với mỗi cặp đỉnh $v_j, v_k \in V(C_n)$, trong đó $j, k \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{i\}$ và $j < k$, một đường đi giữa v_j và v_k là $v_j = v_{j \bmod n}, v_{(j+1) \bmod n}, \dots, v_{k \bmod n} = v_k$.

Ta đã chỉ ra với mọi đỉnh $v \in V(W_n)$, các đồ thị W_n và $W_n - v$ đều có chính xác một thành phần liên thông. Do đó, W_n không có đỉnh cắt.