VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Ngày 16 tháng 3 năm 2024

Bài tập 8. Giả sử m và n là các số nguyên dương với $m > n$ và f là một hàm từ $\{1, 2, \dots, m\}$ đến $\{1, 2, \dots, n\}$. Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh rằng f không phải là đơn ánh với mọi số nguyên dương n.

Chứng minh. Gọi $P(n)$ là vị từ

Hàm $f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ không là đơn ánh, trong đó m là số nguyên dương nào đó thỏa mãn $m > n$.

Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ bằng phương pháp quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng, nghĩa là $f : \{1, \dots, m\} \to \{1\}$ không là đơn ánh Thật vậy, do f là một hàm, ta có $f(i) = 1$ với mọi $i \in \{1, \dots, m\}$. Do $m > n = 1$, tồn tại $i, j \in \{1, \dots, m\}$ thỏa mãn $i \neq j$. Với các giá trị i, j này, $f(i) = f(j) = 1$. Do đó, f không là đơn ánh.

- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(k)$ đúng, nghĩa là $f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, k\}$ không là đơn ánh, trong đó m là số nguyên dương nào đó thỏa mãn $m > k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $f' : \{1, \dots, m'\} \to \{1, \dots, k+1\}$ không là đơn ánh, trong đó m' là số nguyên dương nào đó thỏa mãn $m' > k + 1$. Ta xét các trường hợp sau:
  - **TH1: không tồn tại $i \in \{1, \dots, m'\}$ thỏa mãn $f(i) = k+1$.** Trong trường hợp này, f cũng là một hàm từ $\{1, \dots, m'\}$ đến $\{1, \dots, k\}$ và $m' > k + 1 > k$. Do đó, theo giả thiết quy nạp, f không là đơn ánh.
  - **TH2: tồn tại $i \in \{1, \dots, m'\}$ thỏa mãn $f(i) = k + 1$.** Ta xét hai trường hợp nhỏ sau:
    * **TH2.1: tồn tại $i, j \in \{1, \dots, m'\}$ thỏa mãn $i \neq j$ và $f(i) = f(j) = k+1$.** Trong trường hợp này, theo định nghĩa, f hiển nhiên không là đơn ánh.
    * **TH2.2: tồn tại duy nhất $i \in \{1, \dots, m'\}$ thỏa mãn $f(i) = k + 1$.** Ta định nghĩa hàm $g : \{1, \dots, m' - 1\} \to \{1, \dots, m'\}$ như sau:

      $$g(j) = \begin{cases} j & \text{nếu } j < i \\ j + 1 & \text{nếu } j \geq i \end{cases}$$

      Trước tiên, ta chỉ ra g là đơn ánh. Thật vậy, với mọi $j, j' \in \{1, \dots, m' - 1\}$ thỏa mãn $j \neq j'$,
      - nếu $j, j' < i$, thì $g(j) = j \neq g(j') = j'$;
      - nếu $j, j' \geq i$, thì $g(j) = j + 1 \neq g(j') = j' + 1$; và
      - nếu $j < i \leq j'$, thì $g(j) = j < g(j') = j' + 1$, và do đó $g(j) \neq g(j')$.

      Trong mỗi trường hợp, ta đã chỉ ra rằng nếu $j \neq j'$ thì $g(j) \neq g(j')$, với $j, j' \in \{1, \dots, m' - 1\}$. Do đó, g là đơn ánh.
      Chú ý rằng theo định nghĩa, tập giá trị của g không chứa i. Do đó, $f \circ g$ là một hàm từ $\{1, \dots, m' - 1\}$ đến $\{1, \dots, k + 1\}$ thỏa mãn điều kiện không tồn tại $\ell \in \{1, \dots, m' - 1\}$ sao cho $(f \circ g)(\ell) = f(g(\ell)) = k + 1$, bởi vì nếu ℓ tồn tại thì $g(\ell) = i$ và điều này mâu thuẫn với định nghĩa của g. (Nhắc lại là theo giả thiết, i là số duy nhất trong $\{1, \dots, m'\}$

thỏa mãn $f(i) = k + 1$.) Tương tự như **TH1**, $f \circ g$ cũng là một hàm từ $\{1, \ldots, m' - 1\}$ đến $\{1, \ldots, k\}$ và chú ý rằng $m' - 1 > k$. Do đó theo giả thiết quy nạp, $f \circ g$ không là đơn ánh.

Do đó, tồn tại $j, j' \in \{1, \ldots, m' - 1\}$ thỏa mãn $j \neq j'$ và $(f \circ g)(j) = (f \circ g)(j') \in \{1, \ldots, k+1\}$. Do $(f \circ g)(j) = (f \circ g)(j')$, theo định nghĩa của $f \circ g$, ta có $f(g(j)) = f(g(j'))$. Do g là đơn ánh, $g(j) \neq g(j')$. Do đó, tồn tại $x = g(j)$ và $y = g(j')$ thuộc $\{1, \ldots, m'\}$ thỏa mãn $x \neq y$ và $f(x) = f(y)$. Suy ra, f không là đơn ánh.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$. $\square$