

# COPYRIGHT NOTICE / THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2025 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

## COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2025-09-14

## BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2025-09-14



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

# VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

## Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học  
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội  
[hoanganhduc@hus.edu.vn](mailto:hoanganhduc@hus.edu.vn)





# Nội dung

## Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

## Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

## Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

## Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

## Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

### Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

### Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

### Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

### Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



# Lôgic mệnh đề

## Mệnh đề

### Mệnh đề

Một **mệnh đề (proposition)** là một phát biểu đúng (True) hoặc sai (False), chứ không thể vừa đúng vừa sai

- ✓ Hà Nội là thủ đô của Việt Nam
- ✓  $1 = 2$
- ✓  $1^3 + \dots + 9^3 = (20 + 25)^2 = 2025$
- ✓ Mọi số chẵn lớn hơn hoặc bằng 4 là tổng của hai số nguyên tố (Giả thuyết Goldbach)
- ✗ Mấy giờ rồi? [Câu hỏi]
- ✗ Hãy đọc quyển sách này [Mệnh lệnh]
- ✗ Thời tiết hôm nay lạnh quá [Ý kiến, Cảm thán]
- ✗  $x + 1 = 2$  [Đúng/sai tùy vào  $x$ ]

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

2  
Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Lôgic mệnh đề

## Mệnh đề

### Bài tập 1

Câu nào sau đây là một mệnh đề?

- (1) Trái Đất là một hành tinh
- (2)  $1 + 2$
- (3)  $1 + 2 = 3$
- (4) Hôm nay trời mưa
- (5) Bạn có nói tiếng Anh không?
- (6)  $x + y = 5$
- (7) A ha ha ha ha
- (8) Hãy đưa cho tôi quyển sách kia
- (9) Rất tốt!
- (10) Nếu  $x = 3, y = 4, z = 5$  thì  $x^2 + y^2 = z^2$

### Bài tập 2

Khẳng định “Phát biểu này là sai” có phải là một mệnh đề lôgic hay không? Vì sao?

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

3 Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



# Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

- Ta thường sử dụng các chữ cái  $p, q, r, s, \dots$  để ký hiệu các mệnh đề
- Mệnh đề đúng có *giá trị chân lý đúng T* (True). Mệnh đề sai có *giá trị chân lý sai F* (False)
- *Mệnh đề phức hợp (compound proposition)* được xây dựng bằng cách tổ hợp một hoặc nhiều mệnh đề thông qua các *toán tử lôgic (logical operators)*. Ngược lại, *mệnh đề nguyên tử (atomic proposition)* không thể biểu diễn được qua các mệnh đề đơn giản hơn

|                  |         |                   |
|------------------|---------|-------------------|
| Phủ định         | NOT     | $\neg$            |
| Phép hội         | AND     | $\wedge$          |
| Phép tuyển       | OR      | $\vee$            |
| Phép tuyển loại  | XOR     | $\oplus$          |
| Phép kéo theo    | IMPLIES | $\rightarrow$     |
| Phép tương đương | IFF     | $\leftrightarrow$ |

- Mỗi quan hệ giữa các giá trị chân lý của các mệnh đề được thể hiện thông qua *bảng chân trị (truth table)*

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



# Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

5

■ **Phủ định (negation)** của mệnh đề  $p$ , ký hiệu  $\neg p$  hoặc  $\bar{p}$ , là mệnh đề “không phải là  $p$ ”. Giá trị chân lý  $\neg p = T$  khi và chỉ khi  $p = F$  và  $\neg p = F$  khi và chỉ khi  $p = T$

■ Với  $p :=$  “2 là số chẵn” thì  $\neg p :=$  “2 không là số chẵn”

■ **Bảng chân trị**

| $p$ | $\neg p$ |
|-----|----------|
| T   | F        |
| F   | T        |



# Lôgic mệnh đề

## Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân  
trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp  
chứng minh

Ví dụ và Bài tập

68

6

■ **Hội (Conjunction)** của hai mệnh đề  $p$  và  $q$ , ký hiệu  $p \wedge q$  hoặc  $pq$ , là mệnh đề “ $p$  và  $q$ ”. Giá trị chân lý  $p \wedge q = T$  khi và chỉ khi cả  $p$  và  $q$  đều nhận giá trị  $T$ , và trong các trường hợp còn lại  $p \wedge q = F$

■ Với  $p :=$  “2 là số chẵn” và  $q :=$  “2 là số nguyên tố” thì  $p \wedge q :=$  “2 là số chẵn và 2 là số nguyên tố”

■ **Bảng chân trị**

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| T   | T   | T            |
| T   | F   | F            |
| F   | T   | F            |
| F   | F   | F            |

68



# Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

7

■ *Tuyển (Disjunction/Inclusive Or)* của hai mệnh đề  $p$  và  $q$ , ký hiệu  $p \vee q$  hoặc  $p + q$ , là mệnh đề “ $p$  hoặc  $q$ ”. Giá trị chân lý  $p \vee q = F$  khi và chỉ khi cả  $p$  và  $q$  đều nhận giá trị  $F$ , và trong các trường hợp còn lại  $p \vee q = T$

■ Với  $p :=$  “2 là số chẵn” và  $q :=$  “2 là số nguyên tố” thì  $p \vee q :=$  “2 là số chẵn hoặc 2 là số nguyên tố”

■ **Bảng chân trị**

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| T   | T   | T          |
| T   | F   | T          |
| F   | T   | T          |
| F   | F   | F          |



# Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

68

- **Tuyển loại (Exclusive Or)** của hai mệnh đề  $p$  và  $q$ , ký hiệu  $p \oplus q$ , là mệnh đề “hoặc  $p$  hoặc  $q$ ”. Giá trị chân lý  $p \oplus q = T$  khi và chỉ khi chính xác một trong hai mệnh đề  $p$  và  $q$  nhận giá trị  $T$ , và trong các trường hợp còn lại  $p \oplus q = F$ 
  - Với  $p :=$  “2 là số chẵn” và  $q :=$  “2 là số nguyên tố” thì  $p \oplus q :=$  “Hoặc 2 là số chẵn hoặc 2 là số nguyên tố, nhưng không phải cả hai”

## Bảng chân trị

| $p$ | $q$ | $p \oplus q$ |
|-----|-----|--------------|
| T   | T   | F            |
| T   | F   | T            |
| F   | T   | T            |
| F   | F   | F            |

- **Chú ý:** Khi  $p = T$  và  $q = T$  thì  $p + q = T$  nhưng  $p \oplus q = F$



# Lôgic mệnh đề

## Toán tử lôgic và bảng chân trị

- Mệnh đề **kéo theo (implication)**  $p \rightarrow q$ , với  $p, q$  là hai mệnh đề cho trước, là mệnh đề “nếu  $p$ , thì  $q$ ”. Giá trị chân lý  $p \rightarrow q = F$  khi và chỉ khi  $p = T$  và  $q = F$ , và trong mọi trường hợp còn lại  $p \rightarrow q = T$

- Ta gọi  $p$  là “giả thiết (hypothesis)” và  $q$  là “kết luận (conclusion)”. Ta cũng nói “ $p$  là điều kiện đủ (sufficient) cho  $q$ ” và “ $q$  là điều kiện cần (necessary) cho  $p$ ”
- Với  $p := “2 là số chẵn”$  và  $q := “2 là số nguyên tố”$  thì  $p \rightarrow q := “Nếu 2 là số chẵn, thì 2 là số nguyên tố”$

### Bảng chân trị

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| T   | T   | T                 |
| T   | F   | F                 |
| F   | T   | T                 |
| F   | F   | T                 |

- Chú ý:** Giữa  $p$  và  $q$  *không nhất thiết có quan hệ nguyên nhân-kết quả*. Ví dụ,  $p \rightarrow q = F$  không nhất thiết là “từ  $p$  không suy ra  $q$ ” mà đơn giản chỉ là  $p = T$  và  $q = F$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



# Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân  
trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp  
chứng minh

Ví dụ và Bài tập

10

■ Từ  $p \rightarrow q$  ta có thể xây dựng một số mệnh đề mới

- $q \rightarrow p$  là **mệnh đề đảo (converse)** của  $p \rightarrow q$
- $\neg q \rightarrow \neg p$  là **mệnh đề phản đảo (contrapositive)** của  $p \rightarrow q$
- $\neg p \rightarrow \neg q$  là **mệnh đề nghịch đảo (inverse)** của  $p \rightarrow q$

■ Ví dụ với  $p \rightarrow q :=$  “Nếu 2 là số chẵn, thì 2 là số nguyên tố”

- $q \rightarrow p :=$  “Nếu 2 là số nguyên tố, thì 2 là số chẵn”
- $\neg q \rightarrow \neg p :=$  “Nếu 2 không là số nguyên tố, thì 2 không là số chẵn”
- $\neg p \rightarrow \neg q :=$  “Nếu 2 không là số chẵn, thì 2 không là số nguyên tố”

68



# Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

11

■ Mệnh đề *tương đương (bi-implication)*  $p \leftrightarrow q$ , với  $p, q$  là hai mệnh đề cho trước, là mệnh đề “ $p$  khi và chỉ khi  $q$ ”. Giá trị chân lý  $p \leftrightarrow q = T$  khi và chỉ khi  $p$  và  $q$  nhận cùng giá trị, và trong các trường hợp khác  $p \leftrightarrow q = F$

■ Với  $p :=$  “2 là số chẵn” và  $q :=$  “2 là số nguyên tố”, ta có  $p \leftrightarrow q :=$  “2 là số chẵn khi và chỉ khi 2 là số nguyên tố”

■ Bảng chân trị

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| T   | T   | T                     |
| T   | F   | F                     |
| F   | T   | F                     |
| F   | F   | T                     |

68



# Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

## ■ Tổng kết các toán tử lôgic đã đề cập

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \oplus q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|----------|--------------|------------|--------------|-------------------|-----------------------|
| T   | T   | F        | T            | T          | F            | T                 | T                     |
| T   | F   | F        | F            | T          | T            | F                 | F                     |
| F   | T   | T        | F            | T          | T            | T                 | F                     |
| F   | F   | T        | F            | F          | F            | T                 | T                     |

- Toán tử  $\neg$  được gọi là một *toán tử một ngôi (unary operator)*
- Các toán tử  $\wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow$  được gọi là các *toán tử hai ngôi (binary operator)*
- *Thứ tự ưu tiên* của các toán tử lôgic trong một mệnh đề phức hợp:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ . Nên sử dụng  *ngoặc đơn “(” và “)”* để xác định thứ tự ưu tiên
  - $\neg p \wedge q$  nghĩa là  $(\neg p) \wedge q$  chứ không phải  $\neg(p \wedge q)$
  - $p \wedge q \rightarrow r$  nghĩa là  $(p \wedge q) \rightarrow r$  chứ không phải  $p \wedge (q \rightarrow r)$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

## Bài tập 3

Cho các mệnh đề  $p :=$  “Tôi mua một vé xổ số Vietlott” và  $q :=$  “Tôi trúng giải đặc biệt 200 tỷ VNĐ”. Hãy mô tả bằng câu thông thường các mệnh đề phức hợp sau:

- |                       |                                 |
|-----------------------|---------------------------------|
| (a) $\neg p$          | (e) $p \leftrightarrow q$       |
| (b) $p \vee q$        | (f) $\neg p \rightarrow \neg q$ |
| (c) $p \rightarrow q$ | (g) $\neg p \wedge \neg q$      |
| (d) $p \wedge q$      | (h) $\neg p \vee (p \wedge q)$  |

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

13

68



# Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

## Ví dụ 1

Xây dựng bảng chân trị cho mệnh đề  $(p \vee \neg q) \rightarrow q$

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $p \vee \neg q$ | $(p \vee \neg q) \rightarrow q$ |
|-----|-----|----------|-----------------|---------------------------------|
| T   | T   | F        | T               | T                               |
| T   | F   | T        | T               | F                               |
| F   | T   | F        | F               | T                               |
| F   | F   | T        | T               | F                               |

## Ví dụ 2

Xây dựng bảng chân trị cho mệnh đề  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \oplus q)$

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \oplus q$ | $\neg(p \oplus q)$ | $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \oplus q)$ |
|-----|-----|-----------------------|--------------|--------------------|--|
| T   | T   | T                     | F            | T                  | T  |
| T   | F   | F                     | T            | F                  | T  |
| F   | T   | F                     | T            | F                  | T  |
| F   | F   | T                     | F            | T                  | T  |

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

14

68



# Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

## Bài tập 4

Xây dựng bảng chân trị cho các mệnh đề  $q \rightarrow p$ ,  $\neg q \rightarrow \neg p$ , và  $\neg p \rightarrow \neg q$

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $\neg q \rightarrow \neg p$ | $\neg p \rightarrow \neg q$ |
|-----|-----|----------|----------|-------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| T   | T   |          |          | T                 |                   |                             |                             |
| T   | F   |          |          | F                 |                   |                             |                             |
| F   | T   |          |          | T                 |                   |                             |                             |
| F   | F   |          |          | T                 |                   |                             |                             |

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

15

68



# Lôgic mệnh đề

## Lôgic và các toán tử bit

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

16

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

- Một **bit** (binary digit = chữ số nhị phân) có giá trị 0 hoặc 1
- Sử dụng bit để biểu diễn giá trị chân lý: 1 cho T và 0 cho F
- Một **chuỗi nhị phân độ dài n** là một dãy sắp thứ tự  $x_1x_2 \dots x_n$  trong đó mỗi  $x_i$  là một bit ( $1 \leq i \leq n$ ).
  - Ví dụ, 1001101010 là một chuỗi nhị phân độ dài 10
- Các **toán tử bit**:  $\neg$  (NOT),  $\wedge$  (AND),  $\vee$  (OR),  $\oplus$  (XOR)

| $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $x \wedge y$ | $x \vee y$ | $x \oplus y$ |
|-----|-----|-----------|--------------|------------|--------------|
| 1   | 1   | 0         | 1            | 1          | 0            |
| 1   | 0   | 0         | 0            | 1          | 1            |
| 0   | 1   | 1         | 0            | 1          | 1            |
| 0   | 0   | 1         | 0            | 0          | 0            |



# Lôgic mệnh đề

## Lôgic và các toán tử bit

Tính toán với chuỗi nhị phân: thực hiện theo từng bit

- $\overline{x_1 \dots x_n} = (\overline{x_1}) \dots (\overline{x_n})$
- $x_1 \dots x_n \wedge y_1 \dots y_n = (x_1 \wedge y_1) \dots (x_n \wedge y_n)$
- $x_1 \dots x_n \vee y_1 \dots y_n = (x_1 \vee y_1) \dots (x_n \vee y_n)$
- $x_1 \dots x_n \oplus y_1 \dots y_n = (x_1 \oplus y_1) \dots (x_n \oplus y_n)$

## Bài tập 5

- (a)  $\overline{11010} =$
- (b)  $11010 \vee 10001 =$
- (c)  $11010 \wedge 10001 =$
- (d)  $11010 \oplus 10001 =$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

17

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Các mệnh đề tương đương

## Phân loại mệnh đề

- Một *hằng đúng (tautology)* là một mệnh đề phức hợp luôn luôn đúng với mọi giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần
  - Ký hiệu T
  - $p \vee \neg p$
- Một *mâu thuẫn (contradiction)* là một mệnh đề phức hợp luôn luôn sai với mọi giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần
  - Ký hiệu F
  - $p \wedge \neg p$
- Một *tiếp liên (contingency)* là một mệnh đề phức hợp không phải là hằng đúng cũng không phải là mâu thuẫn
  - $(p \vee q) \rightarrow r$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đường

18 Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Các mệnh đề tương đương

## Tương đương lôgic

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

19

- Mệnh đề phức hợp  $p$  *tương đương lôgic (logically equivalent)* với mệnh đề phức hợp  $q$ , ký hiệu  $p \equiv q$  hoặc  $p \leftrightarrow q$ , khi và chỉ khi mệnh đề  $p \leftrightarrow q$  là một hằng đúng
- **Chú ý:**  $p$  và  $q$  là tương đương lôgic khi và chỉ khi  $p$  và  $q$  cùng nhận một giá trị chân lý giống nhau trong mỗi hàng tương ứng của các bảng chân trị của chúng

68



# Các mệnh đề tương đương

## Tương đương lôgic

### Ví dụ 3

Chứng minh rằng  $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$  (luật De Morgan)

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \vee \neg q$ | $\neg(p \wedge q)$ |
|-----|-----|--------------|----------|----------|----------------------|--------------------|
| T   | T   | T            | F        | F        | F                    | F                  |
| T   | F   | F            | F        | T        | T                    | T                  |
| F   | T   | F            | T        | F        | T                    | T                  |
| F   | F   | F            | T        | T        | T                    | T                  |

### Bài tập 6

Chứng minh các tương đương lôgic sau bằng bảng chân trị

$$(a) p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \quad (b) p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

20

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

68



# Các mệnh đề tương đương

## Tương đương lôgic

Một số tương đương lôgic quan trọng

| Tên gọi                                     | Tương đương lôgic  |
|---|--|
| Luật đồng nhất<br>(Identity laws)           | $p \wedge T \equiv p$<br>$p \vee F \equiv p$   |
| Luật nuốt<br>(Domination laws)              | $p \vee T \equiv T$<br>$p \wedge F \equiv F$   |
| Luật lũy đẳng<br>(Idempotent laws)          | $p \vee p \equiv p$<br>$p \wedge p \equiv p$   |
| Luật phủ định kép<br>(Double negation laws) | $\neg(\neg p) \equiv p$  |
| Luật giao hoán<br>(Commutative laws)        | $p \vee q \equiv q \vee p$<br>$p \wedge q \equiv q \wedge p$   |
| Luật kết hợp<br>(Associative laws)          | $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$<br>$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$                     |
| Luật phân phối<br>(Distributive laws)       | $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$<br>$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đường

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Các mệnh đề tương đương

## Tương đương lôgic

Một số tương đương lôgic quan trọng (tiếp)

| Tên gọi                              | Tương đương lôgic  |
|--------------------------------------|--|
| Luật De Morgan<br>(De Morgan's laws) | $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$<br>$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ |
| Luật hấp thụ<br>(Absorption laws)    | $p \vee (p \wedge q) \equiv p$<br>$p \wedge (p \vee q) \equiv p$                             |
| Luật phủ định<br>(Negation laws)     | $p \vee \neg p \equiv T$<br>$p \wedge \neg p \equiv F$                                       |

**Chú ý:** Trong bảng các tương đương lôgic quan trọng ở trên, **T** là một mệnh đề phức hợp luôn đúng (hằng đúng) và **F** là một mệnh đề phức hợp luôn sai (mâu thuẫn)

## Bài tập 7

Chứng minh các tương đương lôgic quan trọng nêu trên bằng cách lập bảng chân trị

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Các mệnh đề tương đương

Tương đương lôgic

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

## Ví dụ 4

Chứng minh  $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$  và  $\neg p \wedge \neg q$  là tương đương lôgic bằng cách sử dụng các tương đương lôgic đã biết

$$\begin{aligned}\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg((p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)) && \text{Luật phân phối} \\ &\equiv \neg(\mathbf{T} \wedge (p \vee q)) && \text{Luật phủ định} \\ &\equiv \neg((p \vee q) \wedge \mathbf{T}) && \text{Luật giao hoán} \\ &\equiv \neg(p \vee q) && \text{Luật đồng nhất} \\ &\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{Luật De Morgan}\end{aligned}$$

23

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

## Bài tập 8

Kiểm tra lại ví dụ trên bằng cách lập bảng chân trị

68



# Các mệnh đề tương đương

## Tương đương lôgic

### ■ Một số tương đương lôgic liên quan đến phép kéo theo

$$(1) p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$(2) p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$(3) p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$$

$$(4) p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$(5) \neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

$$(6) (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$$

$$(7) (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$$

$$(8) (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$$

$$(9) (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

### ■ Một số tương đương lôgic liên quan đến phép tương đương

$$(10) p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$(11) p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$$

$$(12) p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$(13) \neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$$

## Bài tập 9

Chứng minh các tương đương lôgic trên bằng cách lập bảng chân trị hoặc sử dụng các tương đương lôgic đã biết

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Các mệnh đề tương đương

## Tương đương lôgic

### Ví dụ 5

Chứng minh  $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$  là một hằng đúng

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \\&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \\&\equiv (p \vee \neg p) \vee (q \vee \neg q) \\&\equiv \mathbf{T} \vee \mathbf{T} \\&\equiv \mathbf{T}\end{aligned}$$

Từ  $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Luật De Morgan

Luật giao hoán, kết hợp

Luật phủ định

Luật nuốt

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đường

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

25

68



# Các mệnh đề tương đương

## Tương đương lôgic

- Một tập  $\mathcal{C}$  các toán tử lôgic được gọi là **đầy đủ (functionally complete)** nếu mỗi mệnh đề phức hợp tương đương với một mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử trong  $\mathcal{C}$ 
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee\}$  là một tập (các toán tử lôgic) đầy đủ

## Ví dụ 6

Tìm một mệnh đề tương đương của  $p \leftrightarrow q$  chỉ sử dụng các toán tử  $\neg, \wedge, \vee$

- Ứng với **mỗi hàng có giá trị**

T Ở cột  $p \leftrightarrow q$ , ta tìm một biểu thức **chỉ đúng với các giá trị của p và q ở hàng đó, và sai với mọi giá trị khác.**

- $p \leftrightarrow q$  đúng khi **ít nhất một** biểu thức trên có giá trị T

**Chú ý:** Phương pháp sử dụng trong ví dụ trên có thể áp dụng với mọi mệnh đề phức hợp. Mệnh đề thu được gọi là **dạng tuyển chuẩn tắc (disjunctive normal form - DNF)**

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |                        |
|-----|-----|-----------------------|------------------------|
| T   | T   | T                     | $p \wedge q$           |
| T   | F   | F                     |                        |
| F   | T   | F                     |                        |
| F   | F   | T                     | $\neg p \wedge \neg q$ |

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

26

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

68



# Các mệnh đề tương đương

## Tương đương lôgic

- Một tập  $\mathcal{C}$  các toán tử lôgic được gọi là **đầy đủ (functionally complete)** nếu mỗi mệnh đề phức hợp tương đương với một mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử trong  $\mathcal{C}$ 
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee\}$  là một tập (các toán tử lôgic) đầy đủ

### Ví dụ 6

Tìm một mệnh đề tương đương của  $p \leftrightarrow q$  chỉ sử dụng các toán tử  $\neg, \wedge, \vee$

- Ứng với **mỗi hàng có giá trị**

F ở cột  $p \leftrightarrow q$ , ta tìm một biểu thức **chỉ sai với các giá trị của p và q ở hàng đó, và đúng với mọi giá trị khác.**

- $p \leftrightarrow q$  sai khi **tất cả** biểu thức trên có giá trị F

$$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| T   | T   | T                     |
| T   | F   | F                     |
| F   | T   | F                     |
| F   | F   | T                     |

$$\neg p \vee q$$

$$p \vee \neg q$$

**Chú ý:** Phương pháp sử dụng trong ví dụ trên có thể áp dụng với mọi mệnh đề phức hợp. Mệnh đề thu được gọi là **dạng hội chuẩn tắc (conjunctive normal form - CNF)**

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

26

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

68



# Các mệnh đề tương đương

## Tương đương lôgic

### Tìm CNF/DNF sử dụng các tương đương lôgic đã biết

- “Khử”  $\oplus$ ,  $\rightarrow$ ,  $\neg$  và  $\leftrightarrow$  bằng các tương đương lôgic đã biết
  - $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
  - $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  - $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
- Giảm “phạm vi” của các dấu phủ định  $\neg$  thông qua luật De Morgan và luật phủ định kép
- Chuyển sang CNF hoặc DNF bằng cách sử dụng các luật phân phối và kết hợp

### Ví dụ 7

Tìm CNF của  $p \vee q \rightarrow r \wedge s$

$$\begin{aligned} p \vee q \rightarrow r \wedge s &\equiv \neg(p \vee q) \vee (r \wedge s) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s) \\ &\equiv (\neg p \vee (r \wedge s)) \wedge (\neg q \vee (r \wedge s)) \\ &\equiv ((\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee s)) \wedge ((\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee s)) \\ &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee s) \end{aligned}$$

Khử  $\rightarrow$

Luật De Morgan

Luật phân phối

Luật phân phối

Luật kết hợp

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

27

68



# Các mệnh đề tương đương

## Tương đương lôgic

### Bài tập 10

Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý!Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 và 0. (Nghĩa là, giá trị của x và y là 0 hoặc 1.) Mỗi đoạn mã sau đây bao gồm một điều kiện dựa trên x, y, và các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia). Hãy viết lại các điều kiện này sử dụng ngôn ngữ của lôgic mệnh đề.

- (a) `if x * y ...`
- (b) `if x + y ...`
- (c) `if 2 - x - y ...`
- (d) `if x * (1 - y) ...`
- (e) `if x * (1 - y) + (1 - x) * y ...`

### Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

#### Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

#### Các mệnh đề tương đường

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

#### Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

#### Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Các mệnh đề tương đương

Tương đương lôgic

## Bài tập 11

Tìm CNF hoặc DNF của các mệnh đề

- (a)  $p \oplus q$       (c)  $\neg p \oplus \neg q$   
(b)  $p \rightarrow q$       (d)  $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$

## Bài tập 12

Tập các toán tử lôgic  $\mathcal{C}$  sau có đầy đủ không? Vì sao?

- (a)  $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge\}$       (b)  $\mathcal{C} = \{\neg, \vee\}$       (c)  $\mathcal{C} = \{\wedge, \vee\}$

## Bài tập 13

Cho  $p, q, r$  là các mệnh đề nguyên tử. Hãy sử dụng các mệnh đề trên và các toán tử lôgic  $\neg, \wedge, \vee$  để biểu diễn mệnh đề sau

“Ít nhất hai trong ba mệnh đề  $p, q, r$  là đúng”

## Bài tập 14

Chứng minh các tương đương lôgic sau

- (a)  $\neg(p \oplus q) \equiv p \leftrightarrow q$   
(b)  $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \vee r)$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Lôgic vị từ

## Vị từ

### Vị từ

Một **vị từ (predicate)** là một **hàm mệnh đề (propositional function)** (từ tập các đối tượng đến tập các mệnh đề) mô tả thuộc tính của các đối tượng và mối quan hệ giữa chúng

- Các biến (đối tượng) thường được ký hiệu bởi các chữ cái  $x, y, z, \dots$  và có thể được thay thế bằng các giá trị cụ thể từ một **miền xác định (domain)**  $\mathcal{D}$  tương ứng cho trước
- Các chữ in hoa  $P, Q, R, \dots$  thường được dùng để ký hiệu các hàm mệnh đề (vị từ)
- Với  $n \geq 1$ , ta gọi  $P(x_1, \dots, x_n)$  là **vị từ ( $n$ -ngôi) (( $n$ -place) predicate) xác định trên miền**  $\mathcal{D} = D_1 \times \dots \times D_n$  nếu  $P(a_1, \dots, a_n)$  là một mệnh đề với bộ  $(a_1, \dots, a_n)$  bất kỳ trong  $\mathcal{D}$  ( $a_1 \in D_1, \dots, a_n \in D_n$ )

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

30  
Vị từ  
Lượng tử  
Phủ định với lượng tử  
Lồng các lượng tử

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Lôgic vị từ

## Vị từ

### Ví dụ 8

- $P(x) := "x \text{ lớn hơn } 3"$  ( $P := \text{"lớn hơn } 3"$  và  $x$  là một biến) với  $x$  là số tự nhiên.  $P(x)$  là vị từ xác định trên miền  $\mathcal{D} = \mathbb{N}$
- $Q(x, y, z) := "x \text{ cho } y \text{ điểm } z"$  với  $x, y$  là tên riêng và  $z$  là số tự nhiên.  $Q(x, y, z)$  là vị từ xác định trên miền  $\mathcal{D} = T \times T \times \mathbb{N}$  trong đó  $T$  là tập các tên riêng
- $P(x)$  không phải là mệnh đề nhưng  $P(3)$  là mệnh đề.  
 $Q(x, y, z)$  không phải là mệnh đề nhưng  $Q(\text{Tý}, \text{Tèo}, 10)$  là mệnh đề

### Bài tập 15

$P(x) := "x > 0"$  là vị từ xác định trên miền  $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$ . Tìm giá trị chân lý của các mệnh đề sau

- (a)  $P(3) \vee P(-1)$   
(b)  $P(3) \wedge P(-1)$

- (c)  $P(3) \rightarrow P(-1)$   
(d)  $P(3) \rightarrow \neg P(-1)$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

31  
Vị từ  
Lượng tử  
Phủ định với lượng tử  
Lồng các lượng tử

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Lôgic vị từ

## Lượng từ

### Lượng từ

**Lượng từ (quantifier)** (ví dụ như *tất cả, nhiều, một số, không có, v.v...*) thường được sử dụng với vị từ để định lượng (đếm) các đối tượng (biên) “thỏa mãn” vị từ đó

#### ■ Hai lượng từ quan trọng nhất

| Lượng từ                         | Ký hiệu   |
|----------------------------------|-----------|
| với mọi (universal quantifier)   | $\forall$ |
| tồn tại (existential quantifier) | $\exists$ |

- $\forall x P(x)$  nghĩa là “*với mọi* giá trị của  $x$  trong miền xác định  $\mathcal{D}$ ,  $P(x)$  đúng”
- $\exists x P(x)$  nghĩa là “*tồn tại* giá trị của  $x$  trong miền xác định  $\mathcal{D}$  (nghĩa là có thể có một hoặc nhiều giá trị thỏa mãn),  $P(x)$  đúng”
- $P(x)$  không phải là mệnh đề nhưng  $\forall x P(x)$  và  $\exists x P(x)$  là mệnh đề

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Lôgic vị từ

Lượng tử “với mọi”

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng tử  
Phù định với lượng tử  
Lồng các lượng tử

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

- $\forall x P(x)$ : *với mọi* giá trị của  $x$  trong miền xác định  $\mathcal{D}$ ,  $P(x)$  đúng
- $\forall x P(x)$  là
  - *đúng* nếu  $P(x)$  đúng với mọi  $x$  trong  $\mathcal{D}$
  - *sai* nếu  $P(x)$  sai với ít nhất một giá trị của  $x$  trong  $\mathcal{D}$
  - Với  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  và  $P(x) := "x^2 \geq 0"$ , mệnh đề  $\forall x P(x)$  đúng
  - Với  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  và  $P(x) := "x^2 - 1 \geq 0"$ , mệnh đề  $\forall x P(x)$  sai
- Một *phản ví dụ (counterexample)* của mệnh đề  $\forall x P(x)$  là một giá trị  $x$  trong miền  $\mathcal{D}$  sao cho  $P(x)$  sai
- Nếu  $\mathcal{D} = \emptyset$  thì mệnh đề  $\forall x P(x)$  đúng
- Nếu có thể liệt kê tất cả các phần tử của  $\mathcal{D}$ , ví dụ như  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , thì  $\forall x P(x)$  tương đương lôgic với

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$$



# Lôgic vị từ

## Lượng tử “tồn tại”

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

- $\exists x P(x)$ : *tồn tại* giá trị của  $x$  trong miền xác định  $\mathcal{D}$  (nghĩa là có thể có một hoặc nhiều giá trị thỏa mãn),  $P(x)$  đúng
- $\exists x P(x)$ 
  - *đúng* nếu  $P(x)$  đúng với ít nhất một  $x$  trong  $\mathcal{D}$
  - *sai* nếu  $P(x)$  sai với mọi  $x$  trong  $\mathcal{D}$
  - Với  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  và  $P(x) := "x^2 = 2"$ , mệnh đề  $\exists x P(x)$  đúng
  - Với  $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$  và  $P(x) := "x^2 = 2"$ , mệnh đề  $\exists x P(x)$  sai
- Nếu  $\mathcal{D} = \emptyset$  thì mệnh đề  $\exists x P(x)$  sai
- Nếu có thể liệt kê tất cả các phần tử của  $\mathcal{D}$ , ví dụ như  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , thì  $\exists x P(x)$  tương đương lôgic với

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)$$

34

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng tử  
Phù định với lượng tử  
Lồng các lượng tử

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

68



# Lôgic vị từ

Lượng tử

## Ví dụ 9

Mô tả câu “Tất cả sinh viên trong lớp này đã học môn Lập trình Java” bằng vị từ và lượng tử

- $J(x) := "x \text{ đã học môn Lập trình Java}"$
- Nếu  $\mathcal{D}$  là tập *các sinh viên trong lớp này*  $\forall x J(x)$
- Nếu  $\mathcal{D}$  là tập *tất cả mọi người*. Đặt  $S(x) := "x \text{ là sinh viên trong lớp này}"$   $\forall x (S(x) \rightarrow J(x))$

**Chú ý:** Tại sao không phải là  $\forall x (S(x) \wedge J(x))$ ?

## Ví dụ 10

Mô tả câu “Một số sinh viên trong lớp này đã học môn Lập trình Java” bằng vị từ và lượng tử

- $J(x) := "x \text{ đã học môn Lập trình Java}"$
- Nếu  $\mathcal{D}$  là tập *các sinh viên trong lớp này*  $\exists x J(x)$
- Nếu  $\mathcal{D}$  là tập *tất cả mọi người*. Đặt  $S(x) := "x \text{ là sinh viên trong lớp này}"$   $\exists x (S(x) \wedge J(x))$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng tử  
Phù định với lượng tử  
Lồng các lượng tử

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

35

68



# Lôgic vị từ

## Lượng từ

### Ví dụ 11

Mô tả câu “*Tồn tại duy nhất* một giá trị của  $x$  (trong miền xác định  $\mathcal{D}$ ) sao cho  $P(x)$  đúng” (Ta cũng viết “ $\exists!x P(x)$ ”) bằng các lượng từ  $\forall$  và  $\exists$

- $\exists x P(x) \wedge \forall x_1 \forall x_2 ((P(x_1) \wedge P(x_2)) \rightarrow (x_1 = x_2))$
- $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow (y = x)))$

### Bài tập 16

Giả sử miền xác định của tất cả các biến là  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ . Các mệnh đề sau là đúng hay sai?

- (a)  $\forall x (x^2 \neq x)$
- (b)  $\forall x (x^2 \geq x)$
- (c)  $\forall x (x^2 \neq 2)$

### Bài tập 17

Hãy mô tả định nghĩa số chính phương sau bằng vị từ và lượng từ: “Một số tự nhiên được gọi là số chính phương nếu nó là bình phương của một số tự nhiên nào đó”

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

36

68



# Lôgic vị từ

Lượng tử

## Chú ý

Các tương đương lôgic đã biết trong lôgic mệnh đề vẫn đúng trong lôgic vị từ

## Ví dụ 12

Giả sử biến  $x$  nhận giá trị từ miền  $\mathcal{D}$ . Ta chứng minh  
 $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x (Q(x) \wedge P(x))$ . Cụ thể, ta chứng minh hai điều

(1) *Nếu  $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$  đúng thì  $\forall x (Q(x) \wedge P(x))$  đúng*

■ Giả sử  $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$  đúng. Do đó, với mọi  $a \in \mathcal{D}$ , mệnh đề  $P(a) \wedge Q(a)$  đúng. Theo luật giao hoán,  $Q(a) \wedge P(a)$  đúng. Suy ra  $Q(a) \wedge P(a)$  đúng với mọi  $a \in \mathcal{D}$ . Do đó,  $\forall x (Q(x) \wedge P(x))$  đúng

(2) *Nếu  $\forall x (Q(x) \wedge P(x))$  đúng thì  $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$  đúng*

■ Giả sử  $\forall x (Q(x) \wedge P(x))$  đúng. Do đó, với mọi  $a \in \mathcal{D}$ , mệnh đề  $Q(a) \wedge P(a)$  đúng. Theo luật giao hoán,  $P(a) \wedge Q(a)$  đúng. Suy ra  $P(a) \wedge Q(a)$  đúng với mọi  $a \in \mathcal{D}$ . Do đó,  $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$  đúng

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng tử  
Phù định với lượng tử  
Lồng các lượng tử

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

37

68



# Lôgic vị từ

## Lượng tử

### Chú ý

*Không nên* sử dụng bảng chân trị để chứng minh hai mệnh đề có vị từ và lượng từ là tương đương lôgic

- Trong trường hợp miền xác định  $\mathcal{D}$  là *vô hạn*, ta không xây dựng được bảng chân trị
- Với phần lớn các phát biểu có lượng từ và vị từ, miền xác định luôn là miền vô hạn
- Tất nhiên, khi miền xác định  $\mathcal{D}$  là hữu hạn, có thể sử dụng bảng chân trị
  - Giả sử  $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_n\}$
  - $\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_n)$
  - $\exists x P(x) \equiv P(x_1) \vee \dots \vee P(x_n)$

### Lôgic và Chứng minh

#### Hoàng Anh Đức

#### Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

#### Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

#### Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng tử  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

#### Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Lôgic vị từ

Lượng tử

## Bài tập 18

Giả sử biến  $x$  nhận giá trị từ miền  $\mathcal{D}$ . Chứng minh

(a)  $\forall x (P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x))) \equiv \forall x ((P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(x) \vee R(x)))$

(b)  $\forall x \neg(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$

## Bài tập 19

Giả sử biến  $x$  nhận giá trị từ miền  $\mathcal{D}$ .

(a) Chứng minh  $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

(b) Các mệnh đề  $\forall x (P(x) \vee Q(x))$  và  $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$  có tương đương lôgic hay không? Vì sao?

## Bài tập 20

Giả sử biến  $x$  nhận giá trị từ miền  $\mathcal{D}$ .

(a) Chứng minh  $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$

(b) Các mệnh đề  $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$  và  $(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$  có tương đương lôgic hay không? Vì sao?

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng tử  
Phù định với lượng tử  
Lồng các lượng tử

39

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

68



# Lôgic vị từ

## Lượng tử

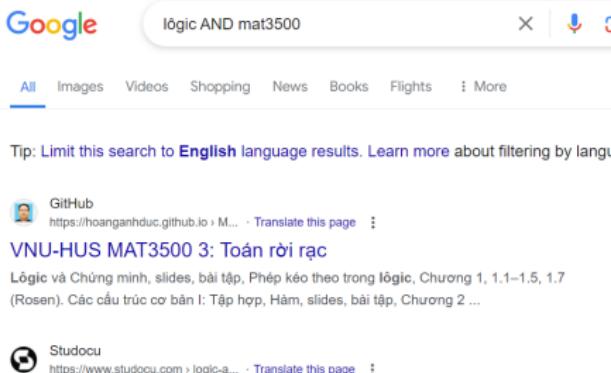
### Ví dụ 13

Các *công cụ tìm kiếm (search engine)* như Google, Bing, Yahoo, v.v... *cho phép người dùng sử dụng các toán tử lôgic (AND, OR, NOT) trong yêu cầu tìm kiếm (query) của họ.*

Ví dụ, yêu cầu (query)  
*"lôgic AND mat3500"*

sẽ trả lại kết quả là  
các trang web có *chứa*  
*đồng thời từ "lôgic"*  
*và từ "mat3500".* Nói  
một cách đơn giản,  
*một yêu cầu tìm kiếm*  
*có thể được coi như là*  
*một vị từ Q* (xác định  
trên tập hợp tất cả các

trang web có trong cơ sở dữ liệu); công cụ tìm kiếm sẽ *trả lại*  
*(theo một thứ tự nào đó) một danh sách các trang web sao cho*  
*mệnh đề Q(p) đúng với mỗi trang web p trong danh sách đó.*



Google lôgic AND mat3500

All Images Videos Shopping News Books Flights More

Tip: Limit this search to English language results. Learn more about filtering by language

**GitHub** https://hoanganhduc.github.io · M... · Translate this page

**VNU-HUS MAT3500 3: Toán rời rạc**

Lôgic và Chứng minh, slides, bài tập. Phép kéo theo trong lôgic, Chương 1, 1.1–1.5, 1.7 (Rosen). Các cấu trúc cơ bản I: Tập hợp, Hám, slides, bài tập, Chương 2 ...

**Studocu** https://www.studocu.com · logic-a... · Translate this page

**Logic and Proofs - toán rời rạc - VNU-HUS MAT3500**

toan roi rac mat3500: toán rời rạc bài tập lôgic và chứng minh hoàng anh đức bộ môn tin học, đại học khtn, dhqg hà nội lôgic mệnh đề bài tập câu nào sau đây ...

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng tử  
Phù định với lượng tử  
Lồng các lượng tử

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

40

68



# Lôgic vị từ

Lượng từ

## Bài tập 21

Tìm hiểu một số cách tìm kiếm với Google sử dụng các toán tử lôgic

## Bài tập 22 (\*)

Xét các yêu cầu tìm kiếm sau:

$Q_A$ : “python AND algorithm AND NOT computer”

$Q_B$ : “(computer OR algorithm) AND python”

$Q_C$ : “python AND NOT (computer OR algorithm OR program)”<sup>41</sup>

Hãy mô tả hoặc lấy ví dụ (một trang web, một câu nào đó, v.v...) về kết quả trả lại trong các trường hợp sau:

- Kết quả trả lại thỏa mãn yêu cầu  $Q_A$
- Kết quả trả lại thỏa mãn yêu cầu  $Q_A$  và không thỏa mãn yêu cầu  $Q_B$
- Kết quả trả lại thỏa mãn yêu cầu  $Q_A$  và  $Q_B$  nhưng không thỏa mãn yêu cầu  $Q_C$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phù định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



# Lôgic vị từ

Lượng tử

## Ví dụ 14

- Ở mức độ nào đó, chúng ta có thể coi một **cơ sở dữ liệu (database)** như là một bảng
  - Các hàng tương ứng với các **cá thể (individual entity)** nào đó
  - Các cột tương ứng với các **trường (field)** mô tả dữ liệu liên quan đến các cá thể
- Một **truy vấn cơ sở dữ liệu (database query)** có thể xem như là một vị từ  $Q(x)$  có chứa các điều kiện để kiểm tra các giá trị từ các cột và các toán tử lôgic liên kết các điều kiện này.
- Khi một truy vấn cơ sở dữ liệu được đưa vào, **hệ quản trị cơ sở dữ liệu (database management system)** sẽ trả lại một danh sách các hàng (ứng với các thực thể) trong cơ sở dữ liệu thỏa mãn điều kiện đề ra trong truy vấn
- Chúng ta có thể nghĩ về hình thức truy cập cơ sở dữ liệu này **từ góc nhìn của lôgic vị từ**: để phản hồi truy vấn (query)  $Q$ , hệ thống trả lại một danh sách các hàng, trong đó mỗi hàng  $x$  thỏa mãn điều kiện  $Q(x)$  đúng

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng tử

Phù định với lượng tử

Lồng các lượng tử

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

42

68



# Lôgic vị từ

## Lượng tử

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng tử  
Phù định với lượng tử  
Lồng các lượng tử

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

**Bảng:** Ví dụ một cơ sở dữ liệu. Nếu muốn tìm danh sách tất cả các sinh viên có GPA (grade point averages - điểm trung bình) tối thiểu 3.4 và nếu đã học ít nhất một khóa học về khoa học máy tính (computer science - CS) thì phải đến từ Hawaii, ta có thể truy vấn  
 $[GPA(x) \geq 3.4] \wedge [takenCS(x) \rightarrow (home(x) = \text{Hawaii})]$ . Kết quả trả lại với cơ sở dữ liệu này là Charlie.

| name      | GPA  | CS taken? | home     | age |
|-----------|------|-----------|----------|-----|
| Alice     | 4.0  | yes       | Alberta  | 20  |
| Bob       | 3.14 | yes       | Bermuda  | 19  |
| Charlie   | 3.54 | no        | Cornwall | 18  |
| Desdemona | 3.8  | yes       | Delaware | 17  |

43

68



# Lôgic vị từ

## Lượng tử

- Trước đó, ta thường phải chỉ rõ miền xác định  $\mathcal{D}$  có chứa các giá trị của biến trước khi phát biểu mệnh đề với vị từ và lượng tử. Để thuận tiện, **có thể chỉ ra  $\mathcal{D}$  ngay trong mệnh đề**

■  $\forall x > 0 P(x)$  nghĩa là “Với mọi số  $x > 0$ ,  $P(x)$  đúng”. ( $\mathcal{D}$  là tập tất cả các số lớn hơn không.) Thực ra, đây là cách viết ngắn gọn của mệnh đề  $\forall x Q(x)$  trong đó

$$Q(x) := (x > 0) \rightarrow P(x)$$

■  $\exists x > 0 P(x)$  nghĩa là “Tồn tại số  $x > 0$ ,  $P(x)$  đúng”. ( $\mathcal{D}$  là tập tất cả các số lớn hơn không.) Thực ra, đây là cách viết ngắn gọn của mệnh đề  $\exists x Q(x)$  trong đó

$$Q(x) := (x > 0) \wedge P(x)$$

■ **Chú ý:**

■  $\forall x > 0 P(x) \not\equiv \forall x (x > 0 \wedge P(x))$

■  $\exists x > 0 P(x) \not\equiv \exists x (x > 0 \rightarrow P(x))$

- Các lượng từ  $\forall$  và  $\exists$  có **thứ tự ưu tiên cao hơn tất cả các toán tử lôgic** đã đề cập

■  $\forall x P(x) \vee Q(x)$  nghĩa là  $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$  chứ không phải  $\forall x (P(x) \vee Q(x))$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng tử

Phù định với lượng tử

Lồng các lượng tử

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập



# Lôgic vị từ

Biến tự do và biến ràng buộc

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng tử

Phủ định với lượng tử

Lồng các lượng tử

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp  
chứng minh

Ví dụ và Bài tập

45

## Ví dụ 15

- $P(x, y)$  có hai biến tự do:  $x$  và  $y$
- $\forall x P(x, y)$  có một biến tự do  $y$  và một biến ràng buộc  $x$
- Biểu thức *không có bất kỳ biến tự do nào*, ví dụ  $\forall x P(x)$ , là  
mệnh đề
- Biểu thức *có một hoặc nhiều biến tự do*, ví dụ  $\forall x P(x, y)$ ,  
không là mệnh đề

68



# Lôgic vị từ

Phủ định với lượng từ

## ■ Phủ định của mệnh đề có lượng từ

- $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

■ Hai tương đương lôgic trên được gọi là *Luật De Morgan cho lượng từ (De Morgan's Laws for Quantifiers)*. Lý do của tên gọi này là nếu ta có thể liệt kê toàn bộ các phần tử trong miền  $\mathcal{D}$ , ví dụ như  $x_1, \dots, x_n$ , thì

$$\begin{aligned}\neg\forall x P(x) &\equiv \neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)) \\ &\equiv \neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \dots \vee \neg P(x_n) \quad \text{Luật De Morgan} \\ &\equiv \exists x \neg P(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg\exists x P(x) &\equiv \neg(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)) \\ &\equiv \neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \dots \wedge \neg P(x_n) \quad \text{Luật De Morgan} \\ &\equiv \forall x \neg P(x)\end{aligned}$$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Lôgic vị từ

Phủ định với lượng từ

## Bài tập 23

Giả sử  $A$  là một mệnh đề thỏa mãn điều kiện  $A$  đúng hay sai không phụ thuộc vào  $x$ . Giả sử miền xác định của các biến là không rỗng. Hãy chứng minh các tương đương lôgic sau

(a)  $(\forall x P(x)) \vee A \equiv \forall x (P(x) \vee A)$

(b)  $(\exists x P(x)) \vee A \equiv \exists x (P(x) \vee A)$

(c)  $(\forall x P(x)) \wedge A \equiv \forall x (P(x) \wedge A)$

(d)  $(\exists x P(x)) \wedge A \equiv \exists x (P(x) \wedge A)$

(e)  $A \rightarrow \forall x P(x) \equiv \forall x (A \rightarrow P(x))$

(f)  $\exists x P(x) \rightarrow A \equiv \forall x (P(x) \rightarrow A)$

(g)  $A \rightarrow \exists x P(x) \equiv \exists x (A \rightarrow P(x))$

(h)  $\forall x P(x) \rightarrow A \equiv \exists x (P(x) \rightarrow A)$

(**Gợi ý:** Xét từng trường hợp  $A = T$  và  $A = F$ )

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

47

68



# Lôgic vị từ

Phủ định với lượng từ

## Ví dụ 16

Ta chứng minh câu (h) trong Bài tập 23:

$\forall x P(x) \rightarrow A \equiv \exists x (P(x) \rightarrow A)$ , trong đó  $A$  là mệnh đề có giá trị chân lý không phụ thuộc vào biến  $x$

$$\begin{aligned}\exists x (P(x) \rightarrow A) &\equiv \exists x (\neg P(x) \vee A) \\ &\equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x A \\ &\equiv \exists x \neg P(x) \vee A \\ &\equiv \neg \forall x P(x) \vee A \\ &\equiv \forall x P(x) \rightarrow A\end{aligned}$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Bài 20(a)

Định nghĩa của  $A$

De Morgan cho lượng từ

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Lôgic vị từ

## Lồng các lượng tử

### Ví dụ 17

$P(x, y) := "x \text{ nhỏ hơn } y"$  xác định trên miền  $\mathcal{D} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- $\exists y P(x, y) := \text{"có số nguyên } y \text{ sao cho } x \text{ nhỏ hơn } y"$  (Biểu thức với 1 biến tự do—không phải mệnh đề)
- $\forall x (\exists y P(x, y)) := \text{"với mọi số nguyên } x \text{ có số nguyên } y \text{ sao cho } x \text{ nhỏ hơn } y"$  (Biểu thức với 0 biến tự do—là mệnh đề)

### Bài tập 24

Cho  $x \in \mathbb{Z}$  và  $y \in \mathbb{Z}$  và  $P(x, y) := "x < y"$ . Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau

(a)  $\forall x \forall y P(x, y)$

(b)  $\forall x \exists y P(x, y)$

(c)  $\exists x \forall y P(x, y)$

(d)  $\exists x \exists y P(x, y)$

### Lôgic và Chứng minh

#### Hoàng Anh Đức

##### Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

##### Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

##### Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng tử  
Phù hợp với lượng tử  
Lồng các lượng tử

##### Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Lôgic vị từ

## Lồng các lượng từ

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

50

68

### ■ Một số tương đương lôgic:

- $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$

- $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$

- Để thuận tiện, có thể nối các lượng từ cùng loại

- $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall x, y P(x, y)$

### ■ Trừ khi tất cả các lượng từ đều là $\forall$ hoặc đều là $\exists$ , *thứ tự các lượng từ là quan trọng*

- $\forall x \exists y P(x, y)$  khác với  $\exists y \forall x P(x, y)$

- Ví dụ, với  $x, y$  là các số nguyên, mệnh đề  $\forall x \exists y (x < y)$

*đúng*, vì với mỗi  $x$  ta có thể chọn  $y = x + 1$  và hiển nhiên  $x < y$ . Ngược lại, mệnh đề  $\exists y \forall x (x < y)$  sai, vì không tồn tại số nguyên lớn nhất



# Lôgic vị từ

## Lồng các lượng tử

### Bài tập 25

Các mệnh đề sau khi nào đúng và khi nào sai?

- (1)  $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$
- (2)  $\forall x \exists y P(x, y)$
- (3)  $\exists y \forall x P(x, y)$
- (4)  $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$

### Bài tập 26

Hãy biểu diễn phủ định của các mệnh đề sau sao cho tất cả các ký tự phủ định  $\neg$  đứng ngay trước các vị từ

- (a)  $\forall x \exists y \forall z T(x, y, z)$
- (b)  $\forall x \exists y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y)$
- (c)  $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists z R(x, y, z))$
- (d)  $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng tử  
Phủ định với lượng tử

51

Lồng các lượng tử

Chứng minh  
Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

68



# Chứng minh

Một số thuật ngữ

- **Chứng minh (proof)**: một lý luận hợp lý chỉ ra tính đúng đắn của một mệnh đề toán học.
- **Tiên đề (axiom/postulate)**: một mệnh đề được giả thiết là đúng
- **Định lý (theorem)**: một mệnh đề đã được chứng minh là đúng
- **Mệnh đề (proposition)**: một định lý “không quá quan trọng”
- **Bổ đề (lemma)**: một định lý nhỏ có thể được sử dụng như một công cụ hỗ trợ chứng minh các định lý khác lớn hơn
- **Hệ quả (corollary)**: một định lý nhỏ thu được bằng cách trực tiếp áp dụng một định lý khác lớn hơn
- **Giả thuyết (conjecture)**: một mệnh đề mà tính đúng/sai của nó chưa được xác định, nhưng thường được “tin là đúng” thông qua một số bằng chứng hoặc qua kinh nghiệm, dự đoán của một chuyên gia

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

52

68



# Chứng minh

Một số phương pháp chứng minh

## Mục tiêu

Chứng minh  $p$  đúng

- **Chứng minh trực tiếp (direct proof)**
- **Chứng minh gián tiếp (indirect proof):** Giả thiết  $\neg p$  đúng, chứng minh  $\neg p \rightarrow F$  (phương pháp *Chứng minh phản chứng (Proof by Contradiction)*)
- **Chứng minh bằng cách chia trường hợp (proof by cases):** Tìm  $p_1, \dots, p_n$  thỏa mãn  $p \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$  và chứng minh  $p_i$  đúng với mỗi  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . (Chia điều cần chứng minh  $p$  thành các phần nhỏ (trường hợp)  $p_1, \dots, p_n$  và xét từng phần một cách riêng biệt)

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Chứng minh

Một số phương pháp chứng minh

## Mục tiêu

Chứng minh  $p \rightarrow q$  đúng

- **Chứng minh hiển nhiên (trivial proof):** Chứng minh  $q$  đúng mà không cần giả thiết gì khác
- **Chứng minh trực tiếp (direct proof):** Giả thiết  $p$  đúng, chứng minh  $q$
- **Chứng minh gián tiếp (indirect proof)**
  - **Chứng minh phản đảo (Proof by Contraposition)**  
 $(\neg q \rightarrow \neg p)$ : Giả thiết  $\neg q$  đúng, chứng minh  $\neg p$
  - **Chứng minh phản chứng (Proof by Contradiction):** Giả thiết  $p \wedge \neg q$  đúng, và chỉ ra rằng điều này dẫn đến một mâu thuẫn (nghĩa là, chứng minh  $(p \wedge \neg q) \rightarrow F$ )
- **Chứng minh rỗng (vacuous proof):** Chứng minh  $\neg p$  đúng mà không cần giả thiết gì khác
- **Chứng minh bằng cách chia trường hợp (proof by cases):** Tìm  $p_1, p_2, \dots, p_n$  thỏa mãn  $p \rightarrow q \equiv (p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)$  và chứng minh  $p_i \rightarrow q$  đúng với từng giá trị  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị  
Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Chứng minh

Một số phương pháp chứng minh

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

Ví dụ và Bài tập

## Mục tiêu

Chứng minh  $p \leftrightarrow q$  đúng

- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- Chứng minh  $p \rightarrow q$  đúng và  $q \rightarrow p$  đúng

55

68



# Chứng minh

Ví dụ

Một số nguyên  $n$  là số **chẵn (even)** khi và chỉ khi  $n = 2k$  với  $k$  là số nguyên nào đó;  $n$  là số **lẻ (odd)** khi và chỉ khi  $n = 2k + 1$  với  $k$  là số nguyên nào đó

## Định lý 1

Với mọi số nguyên  $n$ ,  $n$  không thể vừa chẵn vừa lẻ

## Chứng minh phản chứng.

- (1) **Nhắc lại:** Để chứng minh  $p$ , ta chứng minh  $\neg p \rightarrow F$
- (2) Giả sử tồn tại một số nguyên  $n$  vừa chẵn vừa lẻ. Ta chứng minh tồn tại mâu thuẫn
- (3) Do  $n$  chẵn,  $n = 2k$  với số nguyên  $k$  nào đó
- (4) Do  $n$  lẻ,  $n = 2j + 1$  với số nguyên  $j$  nào đó
- (5) Do đó,  $2k = 2j + 1$ , suy ra  $k - j = \frac{1}{2}$ . Mệnh đề này sai với mọi số nguyên  $k$  và  $j$ , đây là một mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

### Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

### Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

### Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

### Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Chứng minh

Ví dụ

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

Chứng minh sau của Định lý 1

Với mọi số nguyên  $n$ ,  $n$  không thể vừa chẵn vừa lẻ  
là sai? Tại sao?

Chứng minh phản chứng.

- (1) Giả sử tồn tại một số nguyên  $n$  vừa chẵn vừa lẻ. Ta chứng minh tồn tại mâu thuẫn
- (2) Do  $n$  chẵn,  $n = 2k$  với số nguyên  $k$  nào đó
- (3) Do  $n$  lẻ,  $n = 2k + 1$  với số nguyên  $k$  nào đó
- (4) Do đó,  $2k = 2k + 1$ , suy ra  $0 = 1$ . Mệnh đề này sai với mọi số nguyên  $k$ , đây là một mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh

57

□

68



# Chứng minh

## Bài tập

### Bài tập 27

Chứng minh bằng phương pháp phản chứng rằng

- (a) Tổng của một số vô tỷ và một số hữu tỷ là một số vô tỷ
- (b) Với mọi số nguyên  $n$ , nếu  $n^3 + 5$  lẻ, thì  $n$  chẵn
- (c) Với mọi số nguyên  $n$ , nếu  $3n + 2$  chẵn, thì  $n$  chẵn

### Bài tập 28

Chứng minh bằng phương pháp phản chứng rằng

- (a) Có ít nhất mươi ngày trong 64 ngày bất kỳ rơi vào cùng một ngày của một tuần (nghĩa là, có ít nhất mươi ngày cùng là Thứ Hai, hoặc cùng là Thứ Ba, v.v...)
- (b) Có ít nhất ba ngày trong 25 ngày bất kỳ rơi vào cùng một tháng của năm

### Bài tập 29

Sử dụng phương pháp phản chứng, hãy chứng minh rằng  $\sqrt{2}$  không phải là một số hữu tỷ

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập



# Chứng minh

Ví dụ

## Định lý 2

Với mọi số nguyên  $n$ , nếu  $n$  là số lẻ, thì  $n^2$  cũng là số lẻ

### Chứng minh trực tiếp.

- (1) Nếu  $n$  lẻ, thì  $n = 2k + 1$  với  $k$  là số nguyên nào đó
- (2) Do đó,  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
- (3) Do đó,  $n^2 = 2j + 1$  với  $j = 2k^2 + 2k$  là số nguyên
- (4) Theo định nghĩa,  $n^2$  lẻ





# Chứng minh

## Bài tập

### Bài tập 30

Chứng minh trực tiếp các mệnh đề sau

- (a) Tổng của hai số lẻ là một số chẵn
- (b) Tổng của hai số chẵn là một số chẵn
- (c) Bình phương của một số chẵn là một số chẵn
- (d) Tích của hai số lẻ là một số lẻ

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp chứng minh

60 Ví dụ và Bài tập



# Chứng minh

Ví dụ

## Định lý 3

Với mọi số nguyên  $n$ , nếu  $3n + 2$  là số lẻ, thì  $n$  cũng là số lẻ

### Chứng minh phản đảo.

- **Nhắc lại:** để chứng minh  $p \rightarrow q$ , ta chứng minh  $\neg q \rightarrow \neg p$
- **Ta chứng minh mệnh đề phản đảo:** Với mọi số nguyên  $n$ , nếu  $n$  chẵn, thì  $3n + 2$  cũng chẵn

- (1) Giả sử  $n$  chẵn
- (2) Do đó  $n = 2k$  với số nguyên  $k$  nào đó
- (3) Suy ra  $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$
- (4) Từ đó,  $3n + 2 = 2j$  với  $j = 3k + 1$  là số nguyên. Do đó  $3n + 2$  chẵn

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

61



68



# Chứng minh

Ví dụ

## Định lý 4

Với mọi số nguyên  $n$ ,  $n(n + 1)^2$  là một số chẵn

Chứng minh bằng cách chia trường hợp.

- **Nếu  $n$  chẵn,** thì  $n = 2k$  với số nguyên  $k$  nào đó. Suy ra  $n(n + 1)^2 = 2j$  với  $j = k(2k + 1)^2$  là số nguyên. Do đó,  $n(n + 1)^2$  là một số chẵn
- **Nếu  $n$  lẻ,** thì  $n = 2k + 1$  với số nguyên  $k$  nào đó. Suy ra  $n(n + 1)^2 = 2\ell$  với  $\ell = (2k + 1)2(k + 1)^2$  là số nguyên. Do đó,  $n(n + 1)^2$  là một số chẵn



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

62

68



# Chứng minh

Ví dụ

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

Chứng minh sau của mệnh đề

(Với mọi số nguyên  $n$ ) Ta có  $-|n| \leq n \leq |n|$

là sai. Tại sao?

## Chứng minh bằng cách chia trường hợp.

- (1) Nếu  $n > 0$ , ta có  $-n \leq 0 \leq n$ . Theo định nghĩa,  $|n| = n$  và do đó  $-|n| = -n$ . Suy ra  $-|n| = -n \leq 0 \leq n = |n|$
- (2) Nếu  $n < 0$ , ta có  $n \leq 0 \leq -n$ . Theo định nghĩa,  $|n| = -n$  và do đó  $-|n| = n$ . Suy ra  $-|n| = n \leq 0 \leq -n = |n|$

□

63

68



# Chứng minh

Ví dụ

## Định lý 5

Với mọi số nguyên  $n$ , nếu  $n$  vừa chẵn vừa lẻ, thì  $n^2 = n + n$

## Chứng minh rõng.

- **Nhắc lại:** Để chứng minh  $p \rightarrow q$ , ta chứng minh  $\neg p$  mà không cần bất cứ giả thiết nào
- Để chứng minh mệnh đề đã cho bằng cách chứng minh rõng, ta cần chứng minh với mọi số nguyên  $n$ , mệnh đề “ $n$  vừa chẵn vừa lẻ” là sai
  - (1) Định lý 1: Mệnh đề “ $n$  vừa chẵn vừa lẻ” sai với mọi số nguyên  $n$
  - (2) Ta có điều phải chứng minh (Tập các giả thiết là rõng)

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

64



68



# Chứng minh

Ví dụ

## Định lý 6

Với mọi số nguyên  $n$ , nếu  $n$  là tổng của hai số nguyên tố, thì hoặc  $n$  chẵn hoặc  $n$  lẻ

## Chứng minh hiển nhiên.

- **Nhắc lại:** Để chứng minh  $p \rightarrow q$ , ta chứng minh  $q$  mà không cần bắt cứ giả thiết nào
- Để chứng minh mệnh đề đã cho bằng cách chứng minh hiển nhiên, ta cần chứng minh với mọi số nguyên  $n$ , mệnh đề “hoặc  $n$  chẵn hoặc  $n$  lẻ” là đúng
  - (1) Định lý 1: Với mọi số nguyên  $n$ , mệnh đề “hoặc  $n$  chẵn hoặc  $n$  lẻ” đúng
  - (2) Do đó, mệnh đề cần chứng minh luôn đúng





# Chứng minh

Ví dụ

Chứng minh sau của mệnh đề

$$1 = 2$$

là sai. Tại sao?

## Chứng minh.

Gọi  $a, b$  là hai số nguyên dương bằng nhau.

(1)  $a = b$

Giả thiết

(2)  $a^2 = ab$

Nhân hai vế của (1) với  $a$

(3)  $a^2 - b^2 = ab - b^2$

Trừ  $b^2$  từ cả hai vế của (2)

(4)  $(a - b)(a + b) = (a - b)b$

Phân tích hai vế của (3) thành  
nhân tử

(5)  $a + b = b$

Chia cả hai vế của (4) cho  $a - b$

(6)  $2b = b$

Thay  $a$  bởi  $b$  trong (5) vì  $a = b$ , và đơn giản hóa

(7)  $2 = 1$

Chia cả hai vế của (6) cho  $b$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

66

68



# Chứng minh

Ví dụ

Chứng minh sau của mệnh đề

(Với mọi số nguyên  $n$ ) Nếu  $n^2$  chẵn, thì  $n$  cũng chẵn là sai. Tại sao?

## Chứng minh.

- (1) Mệnh đề đúng với  $n = 0$ . Do đó ta chỉ xét  $n \neq 0$
- (2) Giả sử  $n^2$  chẵn. Do đó  $n^2 = 2k$  với số nguyên  $k$  nào đó
- (3) Chia cả hai vế cho  $n$ , ta có  $n = (2k)/n = 2(k/n)$
- (4) Do đó, tồn tại số  $j = k/n$  sao cho  $n = 2j$
- (5) Do tích của  $j$  và một số nguyên (2) là một số nguyên ( $n$ ), nên  $j$  cũng là số nguyên
- (6) Do đó  $n$  chẵn

□

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề  
Toán tử lôgic và bảng chân  
trí

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương  
đương

Phân loại mệnh đề  
Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ  
Lượng từ  
Phủ định với lượng từ  
Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ  
Một số phương pháp  
chứng minh  
Ví dụ và Bài tập

67

68



# Chứng minh

## Bài tập

### Bài tập 31

Chứng minh các mệnh đề sau. Nêu rõ phương pháp chứng minh bạn sử dụng

- (a) Với mọi số nguyên  $n$ , nếu  $n$  chẵn thì  $(-1)^n = 1$
- (b) Với mọi số nguyên  $x, y, z$ , nếu  $x + y + z$  lẻ, thì ít nhất một trong ba số  $x, y, z$  là lẻ
- (c) Với mọi số nguyên  $m$  và  $n$ , nếu  $m \cdot n$  chẵn, thì  $m$  chẵn hoặc  $n$  chẵn
- (d) Với mọi số nguyên dương  $n$ ,  $n$  chẵn khi và chỉ khi  $7n + 4$  chẵn
- (e) Với mọi số nguyên dương  $n$ ,  $n$  lẻ khi và chỉ khi  $5n + 6$  lẻ
- (f) Với mọi số nguyên dương  $m$  và  $n$ ,  $m^2 = n^2$  khi và chỉ khi  $m = n$  hoặc  $m = -n$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Lôgic mệnh đề

Mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương

Phân loại mệnh đề

Tương đương lôgic

Lôgic vị từ

Vị từ

Lượng từ

Phủ định với lượng từ

Lồng các lượng từ

Chứng minh

Một số thuật ngữ

Một số phương pháp

chứng minh

Ví dụ và Bài tập

# Part I

## Phụ lục



# Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức  
Một số ngụy biện phổ biến  
Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

- **Một lập luận (argument)** là một dãy các phát biểu kết thúc bằng một kết luận
- Một số dạng lập luận (“hợp lý (valid)”) không bao giờ dẫn tới một kết luận sai từ các phát biểu đúng. Một số dạng lập luận khác (“ngụy biện (fallacies)”) có thể dẫn tới một kết luận sai từ các phát biểu đúng
- **Một lập luận lôgic (logical argument)** bao gồm một dãy các mệnh đề (có thể là mệnh đề phức hợp) được gọi là **các tiền đề (premises)/các giả thiết (hypotheses)** và một mệnh đề duy nhất gọi là **kết luận (conclusion)**
- **Các quy tắc suy luận lôgic (logical rules of inference)** là các phương pháp chỉ phụ thuộc vào lôgic để suy ra một phát biểu mới từ một tập hợp các phát biểu khác. (Có thể coi các quy tắc này như là các mẫu (templates) cho việc xây dựng các lập luận hợp lý (valid arguments))



# Các quy tắc suy luận

## Giới thiệu

- Một lập luận lôgic được gọi là **hợp lý (valid)** nếu *khi mọi giả thiết đúng thì kết luận cũng đúng*. Một lập luận lôgic không hợp lý được gọi là một **ngụy biện (fallacy)**
  - Một **quy tắc suy luận (inference rule)** là một khuôn mẫu thiết lập rằng nếu chúng ta *biết một tập các giả thiết nào đó là đúng*, thì chúng ta có thể *suy luận một cách hợp lý rằng một phát biểu kết luận liên quan nào đó là đúng*
  - Mỗi **quy tắc suy luận lôgic hợp lý (valid inference rule)** tương ứng với một **hằng đúng (tautology)**
    - Ký hiệu  $\therefore$  nghĩa là “**do đó**”
    - Hằng đúng (tautology) tương ứng (nếu quy tắc hợp lý)
- Giả thiết 1  
Giả thiết 2  
 $\dots$   
 $\therefore$  Kết luận
- $((\text{Giả thiết } 1) \wedge (\text{Giả thiết } 2) \wedge \dots) \rightarrow (\text{Kết luận})$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức  
Một số ngụy biện phổ biến  
Một số quy tắc suy luận trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

2

36



# Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

## Ví dụ 18

### ■ Một lập luận lôgic

- **Giả thiết 1:** Nếu tôi làm việc suốt đêm, thì tôi mệt mỏi
- **Giả thiết 2:** Tôi làm việc suốt đêm
- **Kết luận:** Do đó, tôi mệt mỏi

### ■ Biểu diễn các biến lôgic

- $p$  = “Tôi làm việc suốt đêm”
- $q$  = “Tôi mệt mỏi”

### ■ Theo góc nhìn của lôgic, lập luận trên có thể được viết lại như sau:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \quad \text{Giả thiết 1} \\ p \quad \quad \quad \text{Giả thiết 2} \end{array}}{\therefore q \quad \quad \quad \text{Kết luận}}$$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình  
Một số nguy biến phổ biến  
Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh



# Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

- Quy tắc ***Modus Ponens*** (tiếng Latin của “phương pháp khẳng định (method of affirming)”)

$$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore \frac{p \rightarrow q}{q} \end{array}$$

Modus Ponens

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

Hàng đúng tương ứng

- Chú ý rằng hàng đầu tiên là hàng duy nhất mà giả thiết luôn đúng

## Ví dụ 19

Nếu  $\left\{ \begin{array}{l} p \rightarrow q \quad \text{"Nếu } n \text{ chia hết cho 3,} \\ \quad \quad \quad \text{"thì } n^2 \text{ chia hết cho 3"} \\ p \\ \hline \therefore q \quad \quad \quad \text{"n chia hết cho 3"} \end{array} \right.$  là ĐÚNG  
thì  $n^2$  chia hết cho 3 cũng ĐÚNG

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng

mình (Proof Techniques) bạn nên

tránh

4

36



# Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

- Quy tắc *Modus Tollens* (tiếng Latin của “phương pháp phủ định (method of denying)”) :

$$\begin{array}{c} \neg q \\ p \rightarrow q \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Modus Tollens

$$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$$

Hằng đúng tương ứng

## Ví dụ 20

Nếu  $\left\{ \begin{array}{l} p \rightarrow q \text{ “Nếu chiếc nhẫn làm bằng kim cương,} \\ \quad \text{thì nó có thể làm xước được tấm kính”} \\ \hline \neg q \quad \text{“Chiếc nhẫn không làm xước tấm kính”} \end{array} \right\}$  là DÚNG  
thì  $\therefore \neg p$  “Chiếc nhẫn không làm bằng kim cương” cũng DÚNG

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng

minh (Proof  
Techniques) bạn nên

tránh

5

36



# Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

## ■ Quy tắc *Cộng (Addition)*

$$\therefore \frac{p}{p \vee q}$$

Quy tắc Cộng (Addition)

## ■ Quy tắc *Rút gọn (Simplification)*

$$\therefore \frac{p \wedge q}{p}$$

Quy tắc Rút gọn  
(Simplification)

## ■ Quy tắc *Hội (Conjunction)*

$$\therefore \frac{p \\ q}{p \wedge q}$$

Quy tắc Hội (Conjunction)

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

Hằng đúng tương ứng

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

Hằng đúng tương ứng

$$((p) \wedge (q)) \rightarrow p \wedge q$$

Hằng đúng tương ứng

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận

trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng

minh (Proof  
Techniques) bạn nên

tránh

6

36



# Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

7  
Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức  
Một số nguy biến phổ biến  
Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

## Ví dụ 21

Các lập luận sau sử dụng các quy tắc suy luận nào?

- (a) Nếu có ca nhiễm COVID-19 mới, thì trường sẽ đóng cửa.  
Trường không đóng cửa hôm nay. Do đó, không có ca nhiễm COVID-19 mới hôm nay [Quy tắc Modus Tollens]
- (b) Nhiệt độ hiện tại là dưới  $0^{\circ}C$ . Do đó, nhiệt độ hiện tại là dưới  $0^{\circ}C$  hoặc trời đang mưa [Quy tắc Cộng]
- (c) Nhiệt độ hiện tại là dưới  $0^{\circ}C$  và trời đang mưa. Do đó, nhiệt độ hiện tại là dưới  $0^{\circ}C$  [Quy tắc Rút gọn]



# Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

## ■ Quy tắc *Tam đoạn luận giả định* (*Hypothetical syllogism*)

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Tam đoạn luận giả định  
(*Hypothetical syllogism*)

Hằng đúng tương ứng

## Ví dụ 22

"Nếu trời mưa hôm nay, thì chúng ta sẽ không tổ chức tiệc nướng  
hôm nay. Nếu chúng ta không tổ chức tiệc nướng hôm nay, *q*,  
chúng ta sẽ tổ chức tiệc nướng vào ngày mai. Do đó nếu trời mưa  
hôm nay, *p*, thì chúng ta sẽ tổ chức tiệc nướng vào ngày mai." *r*

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

8

36



# Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

## ■ Quy tắc *Tam đoạn luận tuyển* (*Disjunctive syllogism*)

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \therefore q \end{array}$$

Tam đoạn luận tuyển  
(*Disjunctive syllogism*)

$$((p \vee q) \wedge (\neg p)) \rightarrow q$$

Hằng đúng tương ứng

## Ví dụ 23

"Ví của tôi nằm trong túi áo khoác hoặc nó nằm trên bàn. Ví của tôi không nằm trong túi áo khoác. Do đó, nó nằm  
trên bàn."

*p*

*q*

*\neg p*

*q*

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức  
Một số nguy biến phổ biến  
Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

9

36



# Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

## ■ Quy tắc *Hợp giải (Resolution)*

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \therefore q \vee r \end{array}$$

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$$

Hợp giải (Resolution)

Hằng đúng tương ứng

## ■ Khi $q = r$ , ta có

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)) \rightarrow q$$

## ■ Khi $r = F$ , ta có *Quy tắc tam đoạn luận tuyến*

$$((p \vee q) \wedge (\neg p)) \rightarrow q$$

Ví dụ 24

“Tôi đang đi trên đường hoặc trời mưa. Trời không mưa hoặc r tôi đang ở nhà. Do đó, tôi đang đi trên đường hoặc tôi đang ở nhà.”

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

10

36



# Các quy tắc suy luận

## Các chứng minh hình thức

- Cho trước các tiền đề (premises)  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Một **chứng minh hình thức (formal proof)** của một **kết luận C** là một dãy **các bước (steps)**, trong đó **mỗi bước áp dụng một quy tắc suy luận nào đó cho các tiền đề hoặc các phát biểu đã được chứng minh trước đó** để suy luận ra một phát biểu mới đúng (kết luận)
- Một chứng minh cho thấy rằng **nếu** các tiền đề là đúng, **thì** kết luận là đúng

## Ví dụ 25

- Giả sử chúng ta có các tiền đề sau:
- Trời không nắng và thời tiết lạnh
  - Chúng ta sẽ đi bơi chỉ khi trời nắng
  - Nếu chúng ta không đi bơi, thì chúng ta sẽ đi chèo xuồng
  - Nếu chúng ta đi chèo xuồng, chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn
- Với các tiền đề đã cho, chứng minh kết luận “Chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn” bằng cách sử dụng các quy tắc suy luận

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến  
Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

11

36



# Các quy tắc suy luận

Các chứng minh hình thức

## ■ **Bước 1: Xác định các mệnh đề** Chúng ta sẽ dùng các ký hiệu sau:

- $sunny$  = “Trời nắng”;  $cold$  = “Thời tiết lạnh”;  $swim$  = “Chúng ta sẽ đi bơi”;  $canoe$  = “Chúng ta sẽ đi chèo xuồng”;  $sunset$  = “Chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn”

## ■ **Bước 2: Xác định lập luận** (Xây dựng dạng cho lập luận)

$$p_1 \quad \neg sunny \wedge cold$$

Trời không nắng và thời tiết lạnh

$$p_2 \quad swim \rightarrow sunny$$

Chúng ta sẽ đi bơi chỉ khi trời nắng

$$p_3 \quad \neg swim \rightarrow canoe$$

Nếu chúng ta không đi bơi, thì chúng ta sẽ đi chèo xuồng

$$p_4 \quad canoe \rightarrow sunset$$

Nếu chúng ta đi chèo xuồng, chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn

---

$$\therefore \quad sunset$$

Chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng

minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

12

36



# Các quy tắc suy luận

Các chứng minh hình thức

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

## ■ Bước 3: Xây dựng chứng minh hoàn chỉnh dựa trên các quy tắc suy luận

| Bước   | Chứng minh bởi              |
|--|-----------------------------|
| 1. $\neg \text{sunny} \wedge \text{cold}$      | Tiền đề $p_1$               |
| 2. $\neg \text{sunny}$                         | Quy tắc Rút gọn             |
| 3. $\text{swim} \rightarrow \text{sunny}$      | Tiền đề $p_2$               |
| 4. $\neg \text{swim}$                          | Modus Tollens cho 2<br>và 3 |
| 5. $\neg \text{swim} \rightarrow \text{canoe}$ | Tiền đề $p_3$               |
| 6. $\text{canoe}$                              | Modus Ponens cho<br>4 và 5  |
| 7. $\text{canoe} \rightarrow \text{sunset}$    | Tiền đề $p_4$               |
| 8. $\text{sunset}$                             | Modus Ponens cho<br>6 và 7  |

$$\begin{array}{l} p_1 \quad \neg \text{sunny} \wedge \text{cold} \\ p_2 \quad \text{swim} \rightarrow \text{sunny} \\ p_3 \quad \neg \text{swim} \rightarrow \text{canoe} \\ p_4 \quad \text{canoe} \rightarrow \text{sunset} \\ \hline \therefore \quad \text{sunset} \end{array}$$

13

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến  
Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh



# Các quy tắc suy luận

Một số ngụy biện phổ biến

- Một *ngụy biện (fallacy)* là một quy tắc suy luận hoặc một phương pháp chứng minh không hợp lý về mặt lôgic
  - Một ngụy biện có thể dẫn tới một kết luận sai
- *Ngụy biện khẳng định hậu kiện (Fallacy of affirming the conclusion)*
  - $p \rightarrow q$  là đúng, và  $q$  là đúng. Do đó,  $p$  là đúng (Sai. Bởi vì  $F \rightarrow T$  đúng)

## Ví dụ 26

- Nếu David Cameron là Tổng thống Hoa Kỳ, thì ông ta ít nhất là bốn mươi tuổi  $(p \rightarrow q)$
- David Cameron ít nhất là bốn mươi tuổi  $(q)$
- Do đó, David Cameron là Tổng thống Hoa Kỳ  $(p)$
- *Ngụy biện phủ định giả thiết (Fallacy of denying the hypothesis)*
  - $p \rightarrow q$  là đúng, và  $p$  sai. Do đó  $q$  là sai (Sai. Bởi vì  $F \rightarrow T$  đúng)

## Ví dụ 27

- Nếu trời mưa, thì đường lầy lội  $(p \rightarrow q)$
- Trời không mưa  $(\neg p)$
- Do đó đường không lầy lội  $(\neg q)$

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số ngụy biện phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng

minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

14

36



# Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic vị từ

## ■ Quy tắc *Khởi tạo phổ quát* (*Universal instantiation*)

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall x P(x) \\ \therefore P(c) \end{array}}$$

Với *bất kỳ một phần tử c cụ thể* trong miền xác định

## ■ Quy tắc *Tổng quát hóa phổ quát* (*Universal generalization*)

$$\boxed{\begin{array}{c} P(c) \\ \therefore \forall x P(x) \end{array}}$$

Với *bất kỳ một phần tử c nào đó* trong miền xác định

## ■ Quy tắc *Khởi tạo hiện sinh* (*Existential instantiation*)

$$\boxed{\begin{array}{c} \exists x P(x) \\ \therefore P(c) \end{array}}$$

Với *phần tử c nào đó* trong miền xác định sao cho *P(c)* đúng

## ■ Quy tắc *Tổng quát hóa hiện sinh* (*Existential generalization*)

$$\boxed{\begin{array}{c} P(c) \\ \therefore \exists x P(x) \end{array}}$$

Với *phần tử c nào đó* trong miền xác định

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một chứng minh hình thức

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

15

36



# Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic vị từ

## Ví dụ 28

- Ta chứng minh lập luận sau: “Mỗi người đều sẽ chết. Socrates là người. Do đó, Socrates sẽ chết”

- Xác định các vị từ**

- $M(x) = "x \text{ là người}"$
- $D(x) = "x \text{ sẽ chết}"$
- $S = \text{"Socrates"} - \text{một phần tử trong vũ trụ}$

- Xác định lập luận**

$$\frac{\begin{array}{c} p_1 \quad \forall x (M(x) \rightarrow D(x)) \\ p_2 \quad M(S) \\ \therefore \quad D(S) \end{array}}{\text{Mỗi người đều sẽ chết}} \quad \begin{array}{l} \text{Socrates là người} \\ \text{Socrates sẽ chết} \end{array}$$

- Xây dựng chứng minh**

**Bước****Chứng minh bởi**

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| 1. $\forall x (M(x) \rightarrow D(x))$ | Tiền đề $p_1$                   |
| 2. $M(S) \rightarrow D(S)$             | Quy tắc Khởi tạo phổ quát cho 1 |
| 3. $M(S)$                              | Tiền đề $p_2$                   |
| 4. $D(S)$                              | Modus Ponens cho 2 và 3         |

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

16

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh



# Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic vị từ

## Ví dụ 29

- Lý luận sau đây là đúng hay sai: “Ít nhất một trong số các sinh viên trong lớp rất thông minh. John là một sinh viên trong lớp. Do đó, John rất thông minh”?

- **Xác định các vị từ**

- Giả sử **miền xác định** là **tập tất cả mọi người**
- $S(x) = "x \text{ là sinh viên trong lớp}"$
- $I(x) = "x \text{ rất thông minh}"$
- $J = \text{"John"} - \text{một thành viên trong tập tất cả mọi người}$

- **Xác định lập luận**

$p_1 \quad \exists x (S(x) \wedge I(x))$  Ít nhất một trong số các sinh viên trong lớp rất thông minh

$p_2 \quad \frac{S(J)}{I(J)}$  John là một sinh viên trong lớp  
 $\therefore \quad \text{John rất thông minh}$

- **Lập luận có hợp lý không? KHÔNG**

- **Phản ví dụ:** Xét trường hợp **có chính xác một sinh viên A trong lớp rất thông minh và A không phải là John**, nghĩa là,  $S(A) \wedge I(A)$  đúng,  $S(B) \wedge I(B)$  sai với mọi  $B \neq A$ , và  $A \neq J$
- Áp dụng Quy tắc Tổng quát hóa hiện sinh cho  $S(A) \wedge I(A)$ , **tiền đề**  $p_1 = \exists x (S(x) \wedge I(x))$  **đúng**. **Tiền đề**  $p_2 = S(J)$  **luôn đúng**
- Tuy nhiên, do  $S(B) \wedge I(B)$  sai với mọi  $B \neq A$  và  $A \neq J$ , Quy tắc Khởi tạo phổ quát cho ta **kết luận  $I(J)$  là sai**

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

17

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

36



# Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic vị từ

## Bài tập 32

Lập luận sau là đúng hay sai: “Mọi giảng viên đều ra đề bài kiểm tra khó. Tôi là một giảng viên. Do đó, tôi ra đề bài kiểm tra khó”

## Bài tập 33

Với mỗi lập luận sau, hãy giải thích quy tắc suy luận nào được sử dụng trong mỗi bước

- (a) Doug là một sinh viên trong lớp biết cách sử dụng ngôn ngữ lập trình Java. Mỗi người biết sử dụng ngôn ngữ lập trình Java đều có thể tìm được một công việc trả lương cao. Do đó, một sinh viên nào đó trong lớp có thể tìm được một công việc trả lương cao
- (b) Ai đó trong lớp thích xem cá voi. Mỗi người thích xem cá voi đều quan tâm đến vấn đề ô nhiễm đại dương. Do đó, tồn tại một sinh viên trong lớp quan tâm đến vấn đề ô nhiễm đại dương
- (c) Mỗi sinh viên trong lớp có một máy tính cá nhân. Mỗi người có máy tính cá nhân có thể sử dụng một trình soạn thảo văn bản. Do đó, Zeke, một sinh viên trong lớp, có thể sử dụng một trình soạn thảo văn bản

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến  
Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

18 Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh



# Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic vị từ

## Bài tập 34

Lập luận sau để chứng minh nếu  $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$  đúng thì  $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$  cũng đúng có hợp lý hay không?

| Bước                                      | Chứng minh bởi                   |
|---|----------------------------------|
| 1. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ | Tiền đề                          |
| 2. $\exists x P(x)$                       | Quy tắc Rút gọn cho 1            |
| 3. $P(c)$                                 | Quy tắc khởi tạo hiện sinh cho 2 |
| 4. $\exists x Q(x)$                       | Quy tắc Rút gọn cho 1            |
| 5. $Q(c)$                                 | Quy tắc khởi tạo hiện sinh cho 4 |
| 6. $P(c) \wedge Q(c)$                     | Quy tắc hội cho 3 và 5           |
| 7. $\exists x P(x) \wedge Q(x)$           | Quy tắc Tổng quát hóa hiện sinh  |

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng

minh (Proof  
Techniques) bạn nên

tránh

19

36



# Một số lỗi thường gặp

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

## Chú ý

Tham khảo từ tài liệu “Common Mistakes in Discrete Mathematics” ([https://highered.mheducation.com/sites/dl/free/125967651x/1106131/Common\\_Mistakes\\_in\\_Discrete\\_Math.pdf](https://highered.mheducation.com/sites/dl/free/125967651x/1106131/Common_Mistakes_in_Discrete_Math.pdf))

20

Một số lỗi thường gặp

### (a) Dịch sai các phát biểu từ ngôn ngữ thông thường sang dạng ký hiệu

- Ví dụ, có những khó khăn với việc sử dụng từ “hoặc”; hãy chắc chắn phân biệt giữa “ $A$  hoặc  $B$ ” ( $\equiv A \vee B$ ) và “ $hoặc A$  hoặc  $B$ ” ( $\equiv A \oplus B$ )
- Một phát biểu điều kiện hoàn toàn khác với một phép “hội ( $\wedge$ )”, nhưng một số người không phân biệt được chúng; việc nói rằng “ $B$  sẽ xảy ra nếu  $A$  xảy ra” hoàn toàn khác với việc nói rằng “ $A$  và/hoặc  $B$  sẽ xảy ra”

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

36



# Một số lỗi thường gặp (tiếp)

- Có lẽ lỗi phổ biến nhất là nhầm lẫn  $p \rightarrow q$  với  $q \rightarrow p$ . Ví dụ, khi nói rằng “tôi sẽ đi xem phim **neu** tôi hoàn thành bài tập về nhà” mang ý nghĩa hoàn toàn khác với việc khẳng định rằng “tôi sẽ đi xem phim **chỉ khi** tôi hoàn thành bài tập về nhà”

## (b) Phủ định sai các mệnh đề phức hợp do không sử dụng đúng luật De Morgan

- Chẳng hạn, cho rằng  $\neg(p \vee q)$  tương đương logic với  $\neg p \vee \neg q$ , hoặc  $\neg(p \wedge q)$  tương đương logic với  $\neg p \wedge \neg q$ .
- Ví dụ, “không phải là John trên 18 tuổi **hoặc** sống xa nhà” nghĩa là John không trên 18 tuổi **và** (chứ **không phải hoặc**) John không sống xa nhà
- Phát biểu đúng là  $\neg(p \vee q)$  tương đương logic với  $\neg p \wedge \neg q$ , và  $\neg(p \wedge q)$  tương đương logic với  $\neg p \vee \neg q$
- Lỗi này là một trường hợp tổng quát của việc giả định rằng mỗi toán tử phân phối qua mọi toán tử khác, trong trường hợp này là cho rằng phủ định phân phối qua phép hội (hoặc phép tuyển)

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

21

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng

mình (Proof  
Techniques) bạn nên

tránh

36



# Một số lỗi thường gặp (tiếp)

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

22

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

## (c) Viết sai dạng ký hiệu của mệnh đề tồn tại

- Viết sai dạng ký hiệu của mệnh đề tồn tại dưới dạng  $\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$  thay vì  $\exists x(A(x) \wedge B(x))$
- Ví dụ, dạng ký hiệu của “Tồn tại một số chẵn là số nguyên tố” là  $\exists x(E(x) \wedge P(x))$ , không phải  $\exists x(E(x) \rightarrow P(x))$ , trong đó  $E(x)$  có nghĩa là “ $x$  là số chẵn” và  $P(x)$  có nghĩa là “ $x$  là số nguyên tố”
- Thông thường, các lượng từ tồn tại thường được theo sau bởi các phép hội

## (d) Viết sai dạng ký hiệu của mệnh đề phổ quát

- Viết sai dạng ký hiệu của mệnh đề phổ quát dưới dạng  $\forall x(A(x) \wedge B(x))$  thay vì  $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$
- Ví dụ, dạng ký hiệu của “Mọi số lẻ là số nguyên tố” là  $\forall x(O(x) \rightarrow P(x))$ , không phải  $\forall x(O(x) \wedge P(x))$ , trong đó  $O(x)$  có nghĩa là “ $x$  là số lẻ” và  $P(x)$  có nghĩa là “ $x$  là số nguyên tố”
- Thông thường, các lượng từ phổ quát thường được theo sau bởi các mệnh đề điều kiện

36



# Một số lỗi thường gặp (tiếp)

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số ngụy biện phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

23

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng

mình (Proof  
Techniques) bạn nên

tránh

## (e) Đặt sai vị trí các vị từ bên trong vị từ khác

- Đặt sai vị trí các vị từ bên trong vị từ khác, ví dụ như  $P(Q(x))$
- Ví dụ, nếu  $P(x)$  là “ $x$  là số nguyên tố,” và  $Q(x)$  là “ $x$  là số lẻ,” thì việc viết  $P(Q(x))$  để cố gắng biểu diễn một phát biểu như “ $x$  là số nguyên tố lẻ” hoặc viết  $\forall xP(Q(x))$  để nói “mọi số lẻ đều là số nguyên tố” là vô nghĩa
- Ký hiệu  $P(Q(x))$  thực sự có nghĩa là **phát biểu “ $x$  là số lẻ” là một số nguyên tố** (hay **phát biểu  $Q(x)$  là một số nguyên tố**), và rõ ràng một phát biểu không phải là bất kỳ loại số nào

## (f) Không thay đổi lượng từ khi phủ định một mệnh đề có lượng từ

- Ví dụ, phủ định của phát biểu “**một số** con mèo **thích** gan lợn” không phải là “**một số** con mèo **không thích** gan lợn”; mà là “**không** có con mèo nào **thích** gan lợn”, hoặc “**tất cả** các con mèo đều **không thích** gan lợn”

36



# Một số lỗi thường gặp (tiếp)

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biện phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

24

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng

minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

## (g) Lạm dụng thuật ngữ “theo định nghĩa” khi biện minh cho các phát biểu trong chứng minh

- Ví dụ, Franklin Roosevelt không phải là Tổng thống Hoa Kỳ vào thời điểm nước này tham gia Thế chiến thứ II vào tháng 12 năm 1941. Tuy nhiên, “theo định nghĩa”, ông là Tổng thống vì ông đã được bầu vào vị trí này vào đầu năm 1941 và chưa mất hay rời khỏi chức vụ

## (h) Không kiểm tra cẩn thận các định nghĩa trong chứng minh

- Ví dụ, nếu đang cố gắng chứng minh điều gì đó về các số nguyên lẻ, thì việc sử dụng chính xác ý nghĩa của khái niệm đó (rằng một số nguyên lẻ là một số có thể viết dưới dạng  $2k + 1$  với  $k$  là một số nguyên) tại một hoặc nhiều chỗ trong chứng minh là rất quan trọng

## (i) Bắt đầu chứng minh bằng cách giả định điều cần chứng minh

36



# Một số lỗi thường gặp (tiếp)

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

25

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng

mình (Proof

Techniques) bạn nên

tránh

- Một trường hợp phổ biến của lỗi này là *cố gắng chứng minh các đẳng thức bằng cách bắt đầu với chính đẳng thức đó và sử dụng các biến đổi đại số để đạt được  $A = A$* ; cách này là *không hợp lệ*. Tương tự, nếu chúng ta đang cố gắng chứng minh một đẳng thức tập hợp trong phần “Các cấu trúc cơ bản”, chẳng hạn như  $A \subseteq A \cup B$ , sẽ là *không hợp lệ* khi *bắt đầu với chính phát biểu  $A \subseteq A \cup B$*

## (j) Giả định sai rằng một vài ví dụ của một mệnh đề phổ quát có nghĩa là mệnh đề đó đúng

- Giả định không hợp lệ rằng một vài (hoặc thậm chí số lượng lớn) ví dụ của một mệnh đề phổ quát có nghĩa là mệnh đề đó đúng
- Có một ví dụ từ lý thuyết số về một mệnh đề thú vị về số nguyên dương  $n$  mà đúng với mọi  $n \leq 4\,000\,000$  ngoại trừ trường hợp  $n = 1969$
- Một chứng minh của mệnh đề phổ quát  $\forall x P(x)$  bao gồm việc chỉ ra rằng thuộc tính  $P(x)$  luôn đúng bất kể  $x$  được chọn như thế nào từ miền xác định (vũ trụ các đối tượng)

36



# Một số lỗi thường gặp (tiếp)

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

26

Một số lỗi thường gặp

Các kỹ thuật chứng

mình (Proof  
Techniques) bạn nên

tránh

## (k) Giả định sai rằng đối tượng tùy ý có thuộc tính cụ thể khi chỉ biết tồn tại một đối tượng với thuộc tính đó

- Ví dụ, giả sử chúng ta đang cố gắng chứng minh khẳng định rằng  $x^2$  luôn dư 1 khi chia cho 8
- Sẽ là không hợp lệ khi bắt đầu chứng minh bằng cách giả sử rằng  $x = 2n + 1$  với một số nguyên  $n$  nào đó
- Mặc dù một số số nguyên thỏa mãn tính chất này là số lẻ, nhưng không phải tất cả số nguyên đều vậy, vì vậy chúng ta sẽ chỉ chứng minh khẳng định đúng trong một số trường hợp, chứ không phải luôn luôn đúng

36

# Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

## Chú ý

Đây là bản dịch tài liệu *Proof Techniques* của Dana Angluin (SIGACT News, Winter-Spring 1983, Volume 15 #1). Bản dịch này tuân theo một bản sao của tài liệu ở <https://mfleck.cs.illinois.edu/proof.html>.

**Mọi sai sót trong bản dịch này hoàn toàn là do hạn chế về kiến thức của người dịch.** Mọi góp ý xin gửi về hoanganhduc@hus.edu.vn.

**Chứng minh bằng ví dụ** Các tác giả đưa ra chứng minh cho  $n = 2$  và đề nghị rằng nó có chứa phần lớn các ý tưởng của chứng minh cho trường hợp tổng quát.

**Chứng minh bằng hăm dọa** “Tầm thường” hoặc “hiển nhiên”.

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình học

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

27

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh



# Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

**Chứng minh bằng cách liệt kê tất cả mọi thứ** Một hoặc hai số của một tạp chí chỉ dành riêng cho chứng minh của bạn là một điều có ích.

**Chứng minh bằng cách bớt xén** “Độc giả có thể dễ dàng đưa ra các chi tiết”, “253 trường hợp còn lại được tiến hành tương tự”.

**Chứng minh bằng cách giấu giếm** Một chuỗi dài các phát biểu liên quan đúng và/hoặc vô nghĩa về mặt cú pháp.

**Chứng minh bằng cách trích dẫn đầy ước muôn** Tác giả trích dẫn phủ định, đảo, hoặc tổng quát của một định lý đã biết để hỗ trợ cho khẳng định của mình.

**Chứng minh bằng hỗ trợ tài chính** Làm sao mà ba tổ chức chính phủ khác nhau có thể sai được? Hoặc theo một góc nhìn đối lập: làm sao mà bất cứ thứ gì hỗ trợ tài chính bởi những tổ chức tầm thường này có thể đúng được?

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình học

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

28

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

36



# Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

**Chứng minh bằng dân chủ** Rất nhiều người tin rằng điều này đúng: làm sao mà tất cả bọn họ đều sai được?

**Chứng minh bằng kinh tế thị trường** Lý thuyết của tôi là lý thuyết duy nhất trên thị trường sẽ xử lý các dữ liệu.

**Chứng minh bằng sự hiểu biết sâu sắc** “Tôi thấy Ruzena ở trong thang máy và cô ấy nói rằng điều đó đã được thử nghiệm ở những năm 1970 và không dùng được”.

**Chứng minh bằng vũ trụ** Phủ định của mệnh đề này là không tưởng hoặc vô nghĩa. Phổ biến cho các chứng minh về sự tồn tại của Chúa và cho các chứng minh rằng máy tính không thể suy nghĩ.

**Chứng minh bằng liên hệ cá nhân** “Bài toán Eight-dimensional colored cycle stripping là NP-đầy đủ [Karp, liên hệ cá nhân]”.

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu  
Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức  
Một số nguy biến phổ biến  
Một số quy tắc suy luận trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

29

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

36



# Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

**Chứng minh bằng cách liên hệ đến các bài nói chuyện** “Ở một buổi hội thảo đặc biệt của NSA về lĩnh vực thị giác máy tính, Binford đã chứng minh rằng SHGC không thể nhận biết được trong thời gian đa thức”.

**Chứng minh bằng cách đưa về sai bài toán** “Để thấy rằng bài toán infinite-dimensional coloured cycle stripping có thể giải được, ta đưa nó về bài toán halting”.

**Chứng minh bằng cách trích dẫn các nguồn không truy cập được**  
Tác giả trích dẫn một hệ quả đơn giản của một định lý được tìm ra trong một bản ghi nhớ lưu hành nội bộ của Hiệp hội Triết học Slovenia năm 1883. Phương pháp này thậm chí còn hiệu quả hơn nếu tài liệu này chưa bao giờ được dịch từ bản gốc tiếng Iceland.

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số ngụy biện phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

30

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

36



# Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

## Chứng minh bằng cách trích dẫn các nguồn không tồn tại

Không có điều gì thậm chí hơi giống với định lý đã được trích dẫn xuất hiện ở trong tài liệu được đề cập. Tốt hơn là kết hợp với phương pháp chứng minh bằng cách trích dẫn các nguồn không truy cập được.

## Chứng minh bằng cách trích dẫn một tài liệu sẽ xuất bản

Thông thường tác giả sẽ trích dẫn một bài báo sắp xuất bản của chính mình, và tài liệu này thường không còn sắp xuất bản như lúc đầu.

## Chứng minh bằng tính quan trọng

Một lượng lớn các hệ quả hữu ích đều suy ra từ mệnh đề trong câu hỏi.

## Chứng minh bằng việc tích lũy bằng chứng

Việc tìm kiếm lâu dài và siêng năng không cho ta bất kỳ một phản ví dụ nào.

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình học

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

31

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

36



# Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

**Chứng minh bằng các tài liệu tham khảo lẫn nhau** Trong tài liệu A, Định lý 5 được cho là suy ra từ Định lý 3 của tài liệu B, và định lý này được suy ra từ Hệ quả 6.2 trong tài liệu C, và hệ quả này là một hệ quả dễ dàng suy ra được từ Định lý 5 của tài liệu A.

**Chứng minh bằng siêu chứng minh** Một phương pháp được đưa ra để xây dựng chứng minh. Tính đúng đắn của phương pháp này được chứng minh bằng bất kể một kỹ thuật nào trong số các kỹ thuật này. Sự hiểu biết sâu sắc về ngữ nghĩa ngôn ngữ lập trình sẽ giúp ích ở đây.

**Chứng minh bằng hình vẽ** Một hình thức thuyết phục hơn của Chứng minh bằng ví dụ. Kết hợp tốt với Chứng minh bằng cách bót xén.

32 Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh



# Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

## Chứng minh bằng đồ họa hào nhoáng

Còn được gọi là phương pháp Jabberwocky. Chỉ có một kết quả thực sự mạnh mẽ mới có thể làm nền tảng cho một màn trình diễn âm thanh và ánh sáng tuyệt vời như vậy. “Sản phẩm dành cho những người không có bài thuyết trình.”

## Chứng minh bằng các biểu đồ dễ gây nhầm lẫn hoặc không giải thích được

Hầu như bất kỳ đường cong nào cũng có thể được tạo ra để trông giống như kết quả mong muốn bằng cách chuyển đổi phù hợp các biến và thao tác với các tỷ lệ trực. Thường gặp trong công việc thí nghiệm.

## Chứng minh bằng việc khẳng định một cách kịch liệt

Tốt nhất là khi có một loại quan hệ quyền hạn nào đó với khán giả, và do đó phương pháp này đặc biệt hữu ích trong một lớp học.

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình học

Một số nguy biện phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

33 Các kỹ thuật chứng

minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh



# Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

**Chứng minh bằng cách lặp lại** Cũng được biết đến như là chứng minh của Bellman: “Điều gì tôi nói ba lần là đúng.”

**Chứng minh bằng cách kêu gọi trực giác** Các hình vẽ theo dạng đám mây thường giúp ích ở đây.

**Chứng minh bằng cách vẫy tay một cách mạnh mẽ** Hoạt động tốt trong môi trường lớp học, xêmina hoặc hội thảo.

**Chứng minh bằng cách thay đổi ngữ nghĩa** Một số định nghĩa cơ bản nhưng bất tiện được thay đổi để phù hợp với phát biểu của kết quả.

**Chứng minh bằng ký hiệu rườm rà** Tốt nhất là thực hiện với việc sử dụng ít nhất bốn bảng chữ cái, các ký tự đặc biệt, và phiên bản mới nhất của LaTeX.

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

34

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

36



# Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

**Chứng minh bằng sự trừu tượng vô nghĩa** Một phiên bản của Chứng minh bằng hăm dọa. Tác giả sử dụng các thuật ngữ hoặc định lý từ toán học cao cấp trong rất ẩn tượng nhưng chỉ liên quan trực tiếp đến vấn đề hiện tại. Một vài tích phân ở đây, một vài dãy số chính xác ở kia, và ai sẽ biết liệu bạn có thực sự có chứng minh hay không?

**Phản chứng bằng cách tìm ra một quả táo xấu** Một quả táo xấu làm hỏng cả chùm<sup>1</sup>. Trong số nhiều người ủng hộ lý thuyết này, chúng tôi đã tìm thấy một người rõ ràng là điên rồ; vì vậy chúng ta có thể làm mất uy tín của toàn bộ lý thuyết. (Thường sử dụng trong ngữ cảnh chính trị.)

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận  
trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

35

Các kỹ thuật chứng  
minh (Proof  
Techniques) bạn nên  
tránh

36

# Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)



Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

**Chứng minh bằng con đường dốc trơn trượt** Nếu chúng tôi chấp nhận [đề xuất ban đầu], chúng tôi sẽ phải chấp nhận [đề xuất được sửa đổi một chút] và cuối cùng điều này sẽ dẫn đến [đề xuất hoàn toàn khác biệt và rõ ràng là có thể bị phản đối].

**Chứng minh bằng “không phát minh ở đây”** Chúng tôi có kinh nghiệm làm việc với thiết bị này trong nhiều năm ở MIT và chúng tôi chưa bao giờ nhận ra hiệu quả này.

Các quy tắc suy luận

Giới thiệu

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

Các chứng minh hình thức

Một số nguy biến phổ biến

Một số quy tắc suy luận trong lôgic vị từ

Một số lỗi thường gặp

36

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

<sup>1</sup>Con sâu làm rầu nồi canh