VNU-HUS MAT3302: Toán rời rạc GV: Phan Thị Hà Dương (lý thuyết)

Bài tập tuần 8

11/12/2025 GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Chú ý

(1) Danh sách bài tập mỗi tuần có ở `https://hoanganhduc.github.io/teaching/VNU-HUS/2025/winter/MAT3302/`.

(2) Tham gia Google Classroom (`https://classroom.google.com/c/ODAwMzkxNzA3OTEy?cjc=y6rexxh5`) để biết cách tính điểm thường xuyên qua việc lên bảng và điểm danh.

(3) Các bài tập đánh dấu sao ($\star$) có thể cần thời gian suy nghĩ lâu hơn.

Bài tập 1. Giả sử một cây T có số cạnh là một số chẵn. Chứng minh rằng ít nhất một đỉnh của T phải có bậc chẵn.

Bài tập 2. Gọi T là một cây có $n > 1$ đỉnh. Chứng minh rằng số đỉnh bậc 1 (đỉnh lá) là

$$2 + \sum_{\deg(v) \geq 3} (\deg(v) - 2),$$

trong đó tổng được lấy trên tất cả các đỉnh có bậc lớn hơn hoặc bằng 3.

Bài tập 3. Cho một đồ thị G, định nghĩa bậc trung bình của G là

$$\mathrm{avgdeg}(G) = \frac{2|E|}{|V|}.$$

Nếu T là một cây và $\mathrm{avgdeg}(T) = a$, hãy tìm số đỉnh của T theo a.

Bài tập 4 ($\star$). Giả sử T là một cây sao cho mọi đỉnh kề với một đỉnh lá đều có bậc ít nhất là 3. Chứng minh rằng có ít nhất một cặp đỉnh lá trong T có một đỉnh kề chung.

Bài tập 5 ($\star$). Chứng minh rằng một đơn đồ thị là một cây khi và chỉ khi nó liên thông nhưng việc xóa bất kỳ cạnh nào của nó sẽ tạo ra một đồ thị không liên thông.

Bài tập 6. (a) Có bao nhiêu cây không có gốc không đẳng cấu với ba đỉnh?

(b) Có bao nhiêu cây có gốc không đẳng cấu với ba đỉnh (sử dụng định nghĩa đẳng cấu cho đồ thị có hướng)?

Bài tập 7 ($\star$). (a) Có bao nhiêu cây không có gốc không đẳng cấu với bốn đỉnh?

(b) Có bao nhiêu cây có gốc không đẳng cấu với bốn đỉnh (sử dụng định nghĩa đẳng cấu cho đồ thị có hướng)?

Bài tập 8 ($\star$)**.** Chứng minh rằng:

(a) G là một cây khi và chỉ khi G là đồ thị liên thông và có $n-1$ cạnh.

(b) G là một cây khi và chỉ khi G không có chu trình đơn và có $n-1$ cạnh. (**Gợi ý:** Chỉ ra rằng G không thể có nhiều hơn một thành phần liên thông nếu nó không có chu trình đơn và có $n-1$ cạnh, từ đó suy ra G liên thông.)

(**Nhắc lại:** Mọi đồ thị liên thông với n đỉnh đều có ít nhất $n-1$ cạnh.)

Bài tập 9. Một cây có gốc được gọi là *cây m-phân (m-ary tree)* nếu mỗi đỉnh trong có không quá m đỉnh con. Cây được gọi là *cây m-phân đầy đủ (full m-ary tree)* nếu mỗi đỉnh trong có đúng m con. Một cây m-phân với $m = 2$ được gọi là cây nhị phân.

Định lý 10. *Một cây m-phân đầy đủ với:*

(i) n đỉnh có $i = \dfrac{n-1}{m}$ đỉnh trong và $l = \dfrac{(m-1)n+1}{m}$ đỉnh lá,

(ii) i đỉnh trong có $n = mi + 1$ đỉnh và $l = (m-1)i + 1$ đỉnh lá,

(iii) l lá có $n = \dfrac{ml-1}{m-1}$ đỉnh và $i = \dfrac{l-1}{m-1}$ đỉnh trong.

(a) Chứng minh Định lý 10.

(b) Có bao nhiêu đỉnh trong một cây 5-phân đầy đủ với 100 đỉnh trong?

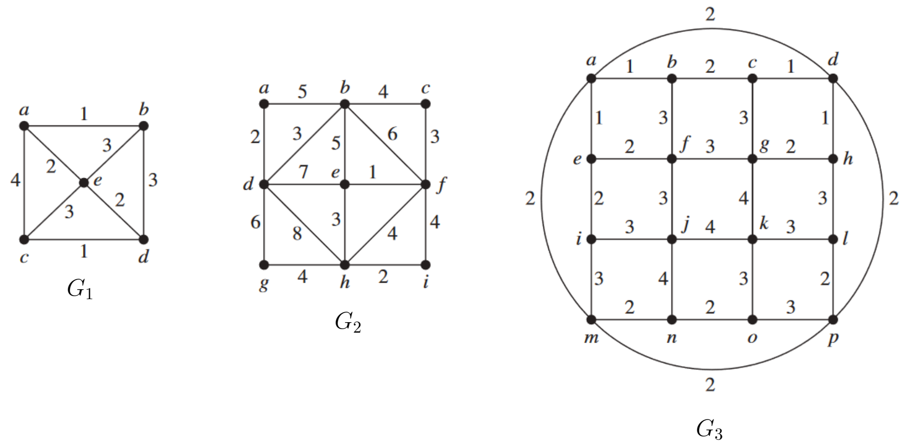
(c) Có bao nhiêu cạnh trong một cây nhị phân đầy đủ với 1000 đỉnh trong?

(d) Có bao nhiêu lá trong một cây 3-phân đầy đủ với 100 đỉnh?

(e) ($\star$) Vẽ một cây m-phân đầy đủ với 76 lá và chiều cao 3, trong đó m là một số nguyên dương, hoặc chứng minh rằng không tồn tại cây như vậy.

Bài tập 11. Chứng minh rằng mọi đồ thị liên thông đều chứa ít nhất một cây bao trùm (spanning tree).

Bài tập 12. Với mỗi đồ thị có trọng số trong Hình 1, hãy tìm một cây bao trùm nhỏ nhất sử dụng thuật toán Prim hoặc thuật toán Kruskal.



Hình 1: Đồ thị cho bài tập 12.

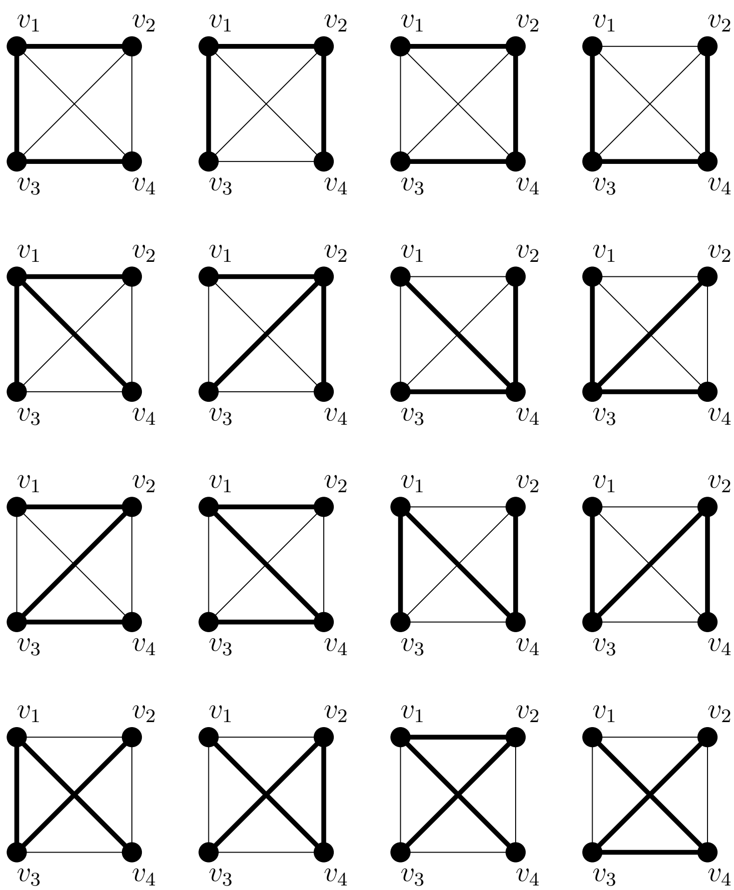
Bài tập 13 ($\star$)**.** Một *cây bao trùm* của một đồ thị G gồm n đỉnh là một đồ thị con T của G thỏa mãn: T là một cây, và T chứa tất cả các đỉnh của G. Biết rằng đồ thị đầy đủ K_n có tất cả n^{n-2} cây bao trùm được gán nhãn khác nhau. (Ví dụ, K_4 có $4^{4-2} = 16$ cây bao trùm được gán nhãn khác nhau, như minh họa trong Hình 2. Công thức này được biết đến với tên gọi *công thức Cayley (Cayley's formula)*.)

Gọi e là một cạnh của đồ thị K_n. Chứng minh rằng đồ thị $K_n - e$ thu được từ K_n bằng cách bỏ đi e có $(n-2)n^{n-3}$ cây bao trùm được gán nhãn khác nhau.

Tài liệu

[1] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 8th edition, McGraw-Hill, 2018.

[2] Liben-Nowell, David, *Connecting Discrete Mathematics and Computer Science*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2022.



Hình 2: K_4 có $4^{4-2} = 16$ cây bao trùm được gán nhãn khác nhau. Các cây bao trùm được đánh dấu bằng các cạnh tô đậm.