VNU-HUS MAT3302: Toán rời rạc	GV: Phan Thị Hà Dương (lý thuyết)

Bài tập tuần 3

25/09/2025	GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Chú ý

(1) Danh sách bài tập mỗi tuần có ở `https://hoanganhduc.github.io/teaching/VNU-HUS/2025/winter/MAT3302/`.

(2) Tham gia Google Classroom (`https://classroom.google.com/c/ODAwMzkxNzA3OTEy?cjc=y6rexxh5`) để biết cách tính điểm thường xuyên qua việc lên bảng và điểm danh.

(3) Các bài tập đánh dấu sao ($\star$) có thể cần thời gian suy nghĩ lâu hơn.

Bài tập 1. (a) Giả sử A, B, C là các tập hợp sao cho $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$. Chứng minh rằng $A \subseteq C$.

(b) Tìm hai tập A và B sao cho $A \in B$ và $A \subseteq B$.

(c) Tích Đề-các (Cartesian product) của hai tập hợp A và B, kí hiệu là $A \times B$, là tập hợp các cặp có thứ tự (a, b) với $a \in A$ và $b \in B$. Ví dụ, nếu $A = \{1, 2\}$ và $B = \{x, y\}$ thì $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$. Chứng minh rằng với các tập hợp A, B, C, D bất kỳ, nếu $A \subseteq C$ và $B \subseteq D$ thì $A \times B \subseteq C \times D$.

(d) ($\star$) Tập lũy thừa (power set) của một tập hợp S là tập hợp tất cả các tập con của S, kí hiệu là $\mathcal{P}(S)$. Ví dụ, nếu $S = \{1, 2\}$ thì $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Với hai tập hợp A và B bất kỳ, phát biểu "$A = B$ khi và chỉ khi $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$" có đúng không? Giải thích.

(e) Bài tập này trình bày *nghịch lí Russell (Russell's paradox)*. Cho S là tập hợp các tập x sao cho $x \notin x$, tức là

$$S = \{x \mid x \notin x\}.$$

(i) Chứng minh rằng giả thiết S là một phần tử của S dẫn đến mâu thuẫn.

(ii) Chứng minh rằng giả thiết S không phải là một phần tử của S cũng dẫn đến mâu thuẫn.

Từ các phần (i) và (ii), ta kết luận rằng tập S không thể định nghĩa được. Nghịch lý này có thể được giải quyết bằng cách hạn chế các loại phần tử mà một tập hợp có thể có.

(f) ($\star$) Cho A, B, C là các tập hợp. Có thể kết luận rằng $A = B$ trong các trường hợp sau không?

(i) $A \cup C = B \cup C$?

(ii) $A \cap C = B \cap C$?

(iii) $A \cup C = B \cup C$ và $A \cap C = B \cap C$?

Bài tập 2. Một hàm $f : A \to B$ là một quy tắc ánh xạ mỗi phần tử của tập A (tập xác định (domain)) tới đúng một phần tử của tập B (tập giá trị (codomain)). Ta nói rằng f là *đơn ánh (injective hoặc one-to-one)* nếu với mọi $a_1, a_2 \in A$, nếu $f(a_1) = f(a_2)$ thì $a_1 = a_2$. Ta nói rằng f là *toàn ánh (surjective)* nếu với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$. Cuối cùng, ta nói rằng f là *song ánh (bijective)* nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

(a) Cho ví dụ về hàm $f : A \to B$ thỏa mãn:

(i) f là đơn ánh nhưng không phải toàn ánh.

(ii) f là toàn ánh nhưng không phải đơn ánh.

(iii) f không là đơn ánh và cũng không là toàn ánh.

(b) Mỗi hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau có phải là đơn ánh hay không? Giải thích.

(i) $f(n) = n - 1$

(ii) $f(n) = n^2 + 1$

(iii) $f(n) = n^3$

(iv) $f(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ (ở đây $\lceil x \rceil$ là *hàm trần (ceiling)*, lấy số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x)

(c) Mỗi hàm $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau có phải là toàn ánh hay không? Giải thích.

(i) $f(m, n) = 2m - n$.

(ii) $f(m, n) = m^2 - n^2$.

(iii) $f(m, n) = m + n + 1$.

(iv) $f(m, n) = |m| - |n|$.

(v) $f(m, n) = m^2 - 4$.

(d) Mỗi hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sau có phải là song ánh hay không? Giải thích.

(i) $f(x) = -3x + 4$

(ii) $f(x) = -3x^2 + 7$

(iii) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

(iv) $f(x) = x^5 + 1$

(e) Giả sử g là một hàm từ A đến B và f là một hàm từ B đến C. *Hàm hợp (composition)* của f và g, ký hiệu $f \circ g$, là hàm từ A đến C được định nghĩa bởi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ với mọi $x \in A$.

(i) Chứng minh rằng nếu cả f và g đều là các hàm đơn ánh, thì $f \circ g$ cũng là một hàm đơn ánh.

(ii) Chứng minh rằng nếu cả f và g đều là các hàm toàn ánh, thì $f \circ g$ cũng là một hàm toàn ánh.

Bài tập 3. (a) Tên của một biến trong ngôn ngữ lập trình C là một chuỗi có thể chứa các chữ cái viết hoa, chữ cái viết thường, chữ số hoặc dấu gạch dưới. Hơn nữa, ký tự đầu tiên trong chuỗi phải là một chữ cái (viết hoa hoặc viết thường) hoặc dấu gạch dưới. Nếu tên của một biến được xác định bởi tám ký tự đầu tiên, có bao nhiêu biến khác nhau có thể được đặt tên trong C? (Lưu ý rằng tên của một biến có thể chứa ít hơn tám ký tự.)

(b) Tên của một biến trong ngôn ngữ lập trình JAVA là một chuỗi có độ dài từ 1 đến 65535 ký tự, bao gồm cả hai đầu, trong đó mỗi ký tự có thể là một chữ cái viết hoa, chữ cái viết thường, dấu đô la, dấu gạch dưới hoặc chữ số, ngoại trừ ký tự đầu tiên không được là chữ số. Xác định số lượng tên biến khác nhau trong JAVA.

(c) Liên minh Viễn thông Quốc tế (International Telecommunications Union - ITU) quy định rằng một số điện thoại phải bao gồm mã quốc gia có độ dài từ 1 đến 3 chữ số, ngoại trừ mã 0 không được sử dụng làm mã quốc gia, tiếp theo là một số có tối đa 15 chữ số. Có bao nhiêu số điện thoại khả dụng thỏa mãn các hạn chế này?

(d) Giả sử rằng tại một thời điểm nào đó trong tương lai, mỗi điện thoại trên thế giới được gán một số bao gồm mã quốc gia dài từ 1 đến 3 chữ số, tức là có dạng X, XX, hoặc XXX, tiếp theo là một số điện thoại dài 10 chữ số có dạng NXX-NXX-$XXXX$. Ở đây, X biểu thị một chữ số có thể nhận bất kỳ giá trị nào từ 0 đến 9, N biểu thị một chữ số có thể nhận bất kỳ giá trị nào từ 2 đến 9, và Y biểu thị một chữ số phải là 0 hoặc 1. Có bao nhiêu số điện thoại khác nhau sẽ có sẵn trên toàn thế giới theo kế hoạch đánh số này?

(e) Một khóa trong hệ mật mã Vigenère là một chuỗi các chữ cái tiếng Anh, trong đó không phân biệt chữ hoa hay chữ thường. Có bao nhiêu khóa khác nhau cho hệ mật mã này với độ dài ba, bốn, năm hoặc sáu chữ cái?

(f) Một mật khẩu WEP (wired equivalent privacy) cho mạng WiFi là một chuỗi gồm 10, 26 hoặc 58 chữ số hệ thập lục phân. Có bao nhiêu khóa WEP khác nhau?

Bài tập 4. (a) Trong cờ vua, các quân cờ thường có hai màu đen và trắng. Bên trắng luôn đi trước, sau đó hai bên lần lượt di chuyển quân cờ theo lượt. Hỏi có bao nhiêu nước đi đầu tiên hợp lệ cho bên trắng?

(b) Trong đại dịch Ebola ở Tây Phi bắt đầu từ năm 2014 (`https://www.who.int/emergencies/situations/ebola-outbreak-2014-2016-West-Africa`), các nhà di truyền học đã làm việc để truy vết quá trình lây lan của dịch bệnh. Để làm điều này, họ đã thu thập các mẫu DNA của virus từ một số bệnh nhân và gắn một "nhãn" duy nhất vào mẫu của mỗi bệnh nhân. Một nhãn là một chuỗi gồm 8 nucleotide—mỗi nucleotide là một phần tử thuộc tập hợp $\{A, C, G, T\}$—được gắn vào cuối mẫu virus của mỗi bệnh nhân, để sau đó có thể dễ dàng xác định bệnh nhân liên quan đến một mẫu cụ thể. Có bao nhiêu nhãn khác nhau như vậy?

(c) Một người nhận được một mẩu giấy ghi mật khẩu của một điểm truy cập wifi, được viết như sau: `a154bc0401011`. Tuy nhiên, cô ấy không thể xác định từ chữ viết tay trong mẩu giấy này liệu mỗi ký tự "1" là số 1 (một), chữ l (L thường), hay chữ I (i hoa); hoặc liệu "0" là số 0 (không) hay chữ O (O hoa). Hỏi cô ấy phải thử tối đa bao nhiêu mật khẩu có thể để tìm ra mật khẩu chính xác?

Bài tập 5. *Nguyên lý bù trừ (inclusion-exclusion principle)* phát biểu rằng với hai tập hợp hữu hạn A và B, ta có $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Sử dụng nguyên lý này để trả lời các câu hỏi sau:

(a) Mỗi sinh viên trong lớp toán rời rạc hoặc là chuyên ngành khoa học máy tính (computer science), hoặc là chuyên ngành toán học (mathematics), hoặc là chuyên ngành kép (joint major) trong hai môn này. Hỏi có bao nhiêu sinh viên trong lớp nếu có 38 sinh viên chuyên ngành khoa học máy tính (bao gồm cả chuyên ngành kép), 23 sinh viên chuyên ngành toán học (bao gồm cả chuyên ngành kép), và 7 sinh viên chuyên ngành kép?

(b) ($\star$) Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1000000 chia hết cho 4 hoặc 6?

(c) Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 7 bắt đầu bằng hai chữ số 0 hoặc kết thúc bằng ba chữ số 1?

(d) Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 10 bắt đầu bằng ba chữ số 0 hoặc kết thúc bằng hai chữ số 0?

(e) ($\star$) Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 10 chứa năm chữ số 0 liên tiếp hoặc năm chữ số 1 liên tiếp?

(f) ($\star$) Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 8 chứa ba chữ số 0 liên tiếp hoặc bốn chữ số 1 liên tiếp?

Bài tập 6. Nguyên lý bù trừ có thể được mở rộng cho ba tập hợp hữu hạn A, B, C như sau: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Sử dụng nguyên lý trên, hãy đếm số các số nguyên dương không vượt quá 1000 chia hết cho 2, 3, hoặc 5.

Bài tập 7. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1000:

(a) chia hết cho 7?

(b) chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 11?

(c) chia hết cho cả 7 và 11?

(d) chia hết cho 7 hoặc 11?

(e) chia hết chính xác cho một trong hai số 7 và 11?

(f) không chia hết cho cả 7 và 11?

(g) có các chữ số khác nhau?

(h) có các chữ số khác nhau và là số chẵn?

Bài tập 8. Có bao nhiêu chuỗi ký tự gồm ba chữ số thập phân:

(a) không chứa cùng một chữ số lặp lại ba lần?

(b) bắt đầu bằng một chữ số lẻ?

(c) có chính xác hai chữ số là số 4?

Bài tập 9. (a) Một *chuỗi đối xứng (palindrome)* là một chuỗi mà khi đảo ngược lại vẫn giống hệt chuỗi ban đầu. Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài n là chuỗi đối xứng?

(b) Có bao nhiêu tập con của một tập hợp gồm 100 phần tử có nhiều hơn một phần tử?

(c) Có bao nhiêu hàm từ tập hợp $\{1, 2, \ldots, n\}$, với n là một số nguyên dương, tới tập hợp $\{0, 1\}$?

Bài tập 10. *Nguyên lý bồ câu (pigeonhole principle)* phát biểu rằng nếu có $k + 1$ con bồ câu hoặc nhiều hơn được đặt vào k chuồng bồ câu, với số nguyên dương k nào đó, thì ít nhất một chuồng chứa hai con bồ câu hoặc nhiều hơn. Tổng quát hơn, nếu N con bồ câu được đặt vào k chuồng, với số nguyên dương k nào đó, thì tồn tại ít nhất một chuồng chứa ít nhất $\lceil N/k \rceil$ con bồ câu. Sử dụng nguyên lý này để trả lời các câu hỏi sau:

(a) Một ngăn kéo chứa một tá tất màu nâu và một tá tất màu đen, tất cả đều không có đôi. Một người đàn ông lấy tất ra một cách ngẫu nhiên trong bóng tối.

   (i) Anh ta phải lấy ra bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn rằng anh ta có ít nhất hai chiếc tất cùng màu?

   (ii) Anh ta phải lấy ra bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn rằng anh ta có ít nhất hai chiếc tất màu đen?

(b) Có sáu giáo sư giảng dạy lớp toán rời rạc nhập môn tại một trường đại học. Tất cả sáu giáo sư đều sử dụng cùng một đề thi cuối kỳ. Nếu điểm thấp nhất có thể đạt được trong bài thi cuối kỳ là 0 và điểm cao nhất là 100, cần có bao nhiêu sinh viên để đảm bảo rằng có hai sinh viên học cùng một giáo sư đạt cùng một điểm số trong bài thi cuối kỳ?

(c) Chứng minh rằng trong bất kỳ nhóm nào gồm năm số nguyên (không nhất thiết liên tiếp), luôn có hai số có cùng số dư khi chia cho 4.

(d) Cho d là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong bất kỳ nhóm nào gồm $d+1$ số nguyên (không nhất thiết liên tiếp), luôn có hai số có cùng số dư khi chia cho d.

(e) Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong bất kỳ tập hợp nào gồm n số nguyên liên tiếp, luôn có đúng một số chia hết cho n.

(f) Chứng minh rằng nếu chọn ra năm số nguyên từ tám số nguyên dương đầu tiên, thì phải có một cặp số trong các số này có tổng bằng 9. Kết luận này có đúng không nếu thay vì chọn năm số nguyên, ta chỉ chọn bốn số nguyên?

(g) Chứng minh rằng trong một mạng máy tính gồm sáu máy tính, mỗi máy tính được kết nối trực tiếp với không hoặc nhiều máy tính khác, luôn tồn tại ít nhất hai máy tính trong mạng được kết nối trực tiếp với cùng số lượng máy tính khác.

(h) ($\star$) Chứng minh rằng bất kể 25 bạn gái và 25 bạn trai được sắp xếp xung quanh một bàn tròn như thế nào, luôn tồn tại một người mà cả hai người ngồi bên cạnh đều là bạn trai.

(i) ($\star$) Alice và Bob chơi trò chơi sau: Bob chọn 10 số nguyên bất kỳ trong khoảng từ 1 đến 40. Alice cần tìm hai tập số nguyên khác nhau trong các số mà Bob chọn, mỗi tập có 3 phần tử, sao cho tổng các số nguyên trong hai tập là bằng nhau. Hãy chứng minh rằng Alice luôn luôn thắng.

Bài tập 11. (a) Sử dụng định lý nhị thức để tìm hệ số của $x^a y^b$ trong khai triển của $(5x^2 + 2y^3)^6$, với:

(i) $a = 6$, $b = 9$.

(ii) $a = 2$, $b = 15$.

(iii) $a = 3$, $b = 12$.

(iv) $a = 12$, $b = 0$.

(v) $a = 8$, $b = 9$.

(b) Sử dụng định lý nhị thức để tìm hệ số của $x^a y^b$ trong khai triển của $(2x^3 - 4y^2)^7$, với:

(i) $a = 9$, $b = 8$.

(ii) $a = 8$, $b = 9$.

(iii) $a = 0$, $b = 14$.

(iv) $a = 12$, $b = 6$.

(v) $a = 18$, $b = 2$.

(c) ($\star$) Tìm công thức cho hệ số của x^k trong khai triển của $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{100}$, với k là một số nguyên.

(d) ($\star$) Tìm công thức cho hệ số của x^k trong khai triển của $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{100}$, với k là một số nguyên.

Bài tập 12. (a) Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên dương, thì

$$1 = \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n} = 1.$$

(b) Chứng minh rằng $\binom{n}{k} \leq 2^n$ với mọi số nguyên dương n và mọi số nguyên k thỏa mãn $0 \leq k \leq n$.

Bài tập 13 ($\star$). Để chứng minh một đẳng thức tổ hợp, ta có thể chứng minh rằng cả vế trái lẫn vế phải đều đếm cùng một đối tượng theo hai cách khác nhau. Phương pháp này được gọi là phương pháp đếm hai lần (double counting). Sử dụng phương pháp đếm hai lần để chứng minh các đẳng thức sau:

(a) Nếu n và k là các số nguyên thỏa mãn $1 \leq k \leq n$, thì

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(b) Nếu n, r, k là các số nguyên không âm thỏa mãn $r \leq n$ và $k \leq r$, thì

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

(c) Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}.$$

(d) Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

(e) Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

(f) Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

(g) Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên dương, thì

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Bài tập 14. (a) Có bao nhiêu nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$, trong đó x_1, x_2, x_3, x_4 là các số nguyên không âm?

(b) Có bao nhiêu nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$, trong đó x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) là các số nguyên không âm, thỏa mãn:

(i) $x_1 \geq 1$?

(ii) $x_i \geq 2$ với $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

(iii) $0 \leq x_1 \leq 10$?

(c) Có bao nhiêu cách để phân phối 12 quả bóng không phân biệt vào 6 thùng phân biệt?

(d) Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1000000 có tổng các chữ số bằng 19?

Tài liệu

[1] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 8th edition, McGraw-Hill, 2018.

[2] Liben-Nowell, David, *Connecting Discrete Mathematics and Computer Science*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2022.