ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
(Đề gồm 4 câu/1 trang)

ĐỀ KIỂM TRA THƯỜNG XUYÊN 3
Môn: Toán rời rạc (MAT3500 1, 2023-2024)
Thời gian: 30 phút

- Tính câu điểm cao nhất
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.

Họ và Tên: ______________________________

Mã Sinh Viên: ____________________ Lớp: ____________________

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	10	10	10	10	40
Điểm:					

1. (10 điểm) Giả sử G và H là các đơn đồ thị thỏa mãn $G \simeq H$. Chứng minh rằng $\overline{G} \simeq \overline{H}$.

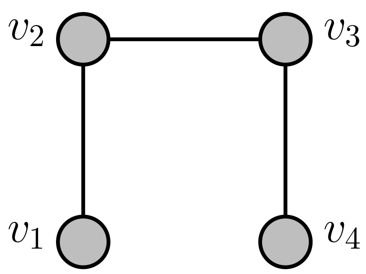
Lời giải: Do $G \simeq H$, tồn tại một song ánh $f : V(G) \to V(H)$ thỏa mãn điều kiện $uv \in E(G)$ khi và chỉ khi $f(u)f(v) \in E(H)$ với mọi cặp đỉnh $u, v \in V(G)$. Theo định nghĩa, $V(G) = V(\overline{G})$ và $V(H) = V(\overline{H})$, do đó $f : V(\overline{G}) \to V(\overline{H})$ là một song ánh. Thêm vào đó, với mọi cặp đỉnh $u, v \in V(\overline{G})$, ta có

$$\begin{aligned}
uv \in E(\overline{G}) &\Leftrightarrow uv \notin E(G) && \text{Định nghĩa đồ thị bù} \\
&\Leftrightarrow f(u)f(v) \notin E(H) && G \simeq H \\
&\Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(\overline{H}) && \text{Định nghĩa đồ thị bù}
\end{aligned}$$

Do đó, $\overline{G} \simeq \overline{H}$.

2. (10 điểm) Một đơn đồ thị G được gọi là *tự bù (self-complementary)* nếu $G \simeq \overline{G}$.

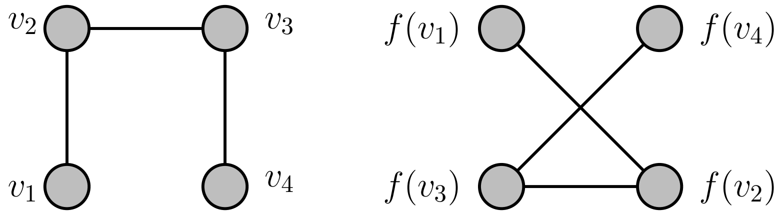
   (a) Chứng minh rằng đồ thị sau là một đồ thị tự bù



   (b) Tìm một đồ thị tự bù có 5 đỉnh.

Lời giải:

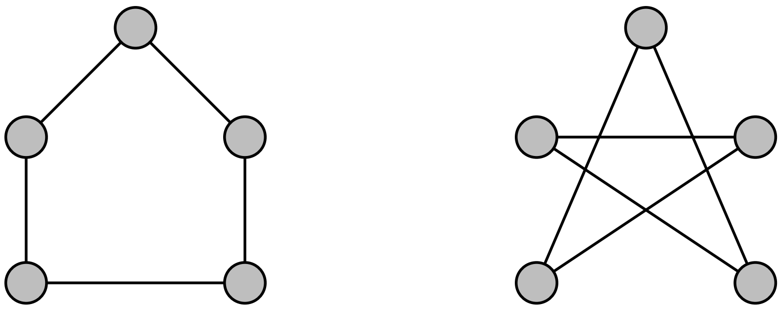
(a) Ta định nghĩa một song ánh $f : V(G) \to V(\overline{G})$ như sau: $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_4$, $f(v_3) = v_1$, và $f(v_4) = v_3$.



G $\qquad$ $\overline{G}$

Dễ thấy với mọi cặp đỉnh v_i, v_j $(1 \leq i < j \leq 4)$, ta có $v_i v_j \in E(G)$ khi và chỉ khi $f(v_i)f(v_j) \in E(\overline{G})$. (Có thể kiểm tra từng cặp một.) Do đó, $G \simeq \overline{G}$, hay G là một đồ thị tự bù.

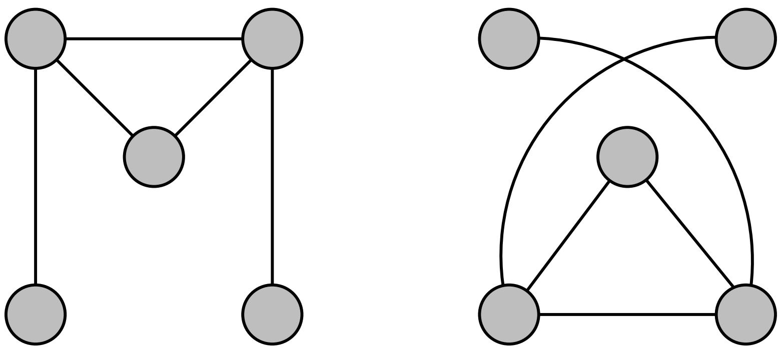
(b) Đồ thị C_5 là một đồ thị tự bù có 5 đỉnh.



C_5 $\qquad$ $\overline{C_5}$

Để thấy điều này, theo định nghĩa, nếu G là một đồ thị tự bù gồm n đỉnh thì do $G \simeq \overline{G}$, ta có $|E(G)| = |E(K_n)|/2 = n(n-1)/4$. Do đó, một đồ thị tự bù có 5 đỉnh thì cần có $5(5-1)/4 = 5$ cạnh. C_5 là một đồ thị thỏa mãn điều kiện trên.

Một đồ thị khác thỏa mãn điều kiện trên là đồ thị sau:



3. (10 điểm) Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Một đỉnh $w \in V$ được gọi là *hướng tới được (reachable)* từ đỉnh $v \in V(G)$ nếu tồn tại một đường đi có hướng từ v đến w. Hai đỉnh v, w là *lẫn nhau hướng tới được (mutually reachable)* nếu như w hướng tới được từ v và v hướng tới được từ w.

   (a) Chứng minh rằng nếu u, v là lẫn nhau hướng tới được và v, w là lẫn nhau hướng tới được thì u, w là lẫn nhau hướng tới được.

(b) Sử dụng phần (a), chứng minh rằng nếu H và K lần lượt là các thành phần liên thông mạnh chứa u và v thì $H = K$ hoặc H và K không có đỉnh chung, trong đó u, v là các đỉnh bất kỳ.

Lời giải:

(a) Do u, v là lẫn nhau hướng tới được, tồn tại một đường đi có hướng $P(u, v)$ từ u đến v và một đường đi có hướng $P(v, u)$ từ v đến u. Tương tự, do v, w là lẫn nhau hướng tới được, tồn tại một đường đi có hướng $P(v, w)$ từ v đến w và một đường đi có hướng $P(w, v)$ từ w đến v. Các đường đi $P(u, v)$ và $P(v, w)$ tạo thành một đường đi có hướng từ u đến w qua v. Các đường đi $P(w, v)$ và $P(v, u)$ tạo thành một đường đi có hướng từ w đến u qua v. Do đó, u, w là lẫn nhau hướng tới được.

(b) Ta chứng minh nếu $H \neq K$ thì H và K không có đỉnh chung. Theo định nghĩa, trong một thành phần liên thông mạnh, hai đỉnh bất kỳ x và y là lẫn nhau hướng tới được. Ta sử dụng phương pháp phản chứng. Giả sử rằng $H \neq K$ và H và K có một đỉnh chung w.

Trước tiên, do $H \neq K$, $H \cup K$ thực sự chứa cả H và K.

Ta chứng minh $H \cup K$ là một thành phần liên thông của G bằng cách chỉ ra với mỗi cặp đỉnh u, v bất kỳ thuộc $H \cup K$, u và v là lẫn nhau hướng tới được.

- Nếu u, v cùng thuộc H hoặc cùng thuộc K thì hiển nhiên theo định nghĩa của thành phần liên thông mạnh, u và v là lẫn nhau hướng tới được.
- Trường hợp còn lại là u thuộc H và v thuộc K. Do H là thành một phần liên thông mạnh và H chứa cả u và w, ta có u, w là lẫn nhau hướng tới được. Tương tự, w và v là lẫn nhau hướng tới được. Do đó, u và v là lẫn nhau hướng tới được.

Do đó, $H \cup K$ là một thành phần liên thông mạnh của G.

Ta đã chứng minh $H \cup K$ là một thành phần liên thông mạnh của G thực sự chứa cả H và K. Điều này mâu thuẫn với giả thiết H và K là hai thành phần liên thông mạnh của G.

4. (10 điểm) Chứng minh rằng mỗi đồ thị sau không có đỉnh cắt

   (a) C_n với $n \geq 3$

   (b) W_n với $n \geq 3$

Lời giải:

(a) Giả sử $V(C_n) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ và $E(C_n) = \{v_0v_1, \ldots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_0\}$ với $n \geq 3$. Ta chứng minh với mọi $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, đồ thị $C_n - v_i$ là đồ thị liên thông. Thật vậy, với mọi cặp đỉnh $v_j, v_k \in V(C_n - v_i)$, trong đó $j, k \in \{0, \ldots, n-1\} \setminus \{i\}$ và $j < k$, một đường đi giữa v_j và v_k là $v_k = v_{k \bmod n}, v_{(k+1) \bmod n}, \ldots, v_{(k+(n-k+j)) \bmod n} = v_j$ nếu $i < k$ và là $v_j = v_{j \bmod n}, v_{(j+1) \bmod n}, \ldots, v_{(j+(k-j)) \bmod n} = v_k$ nếu $i > k$.

Ta đã chỉ ra với mọi đỉnh $v \in V(C_n)$, các đồ thị C_n và $C_n - v$ đều có chính xác một thành phần liên thông. Do đó, C_n không có đỉnh cắt.

(b) Giả sử $V(W_n) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\} \cup \{w\}$ và $E(W_n) = \{v_0v_1, \ldots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_0\} \cup \{wv_0, wv_1, \ldots, wv_{n-1}\}$ với $n \geq 3$. Đồ thị $W_n - v_i$ là đồ thị liên thông với mọi $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ do với mọi cặp đỉnh $v_j, v_k \in V(C_n - v_i)$, trong đó $j, k \in \{0, \ldots, n-1\} \setminus \{i\}$, một đường đi giữa v_j và v_k là v_j, w, v_k. Thêm vào đó, đồ thị $W_n - w$ là C_n và do đó cũng là đồ thị liên thông, do với mỗi cặp đỉnh $v_j, v_k \in V(C_n)$, trong đó $j, k \in \{0, \ldots, n-1\} \setminus \{i\}$ và $j < k$, một đường đi giữa v_j và v_k là $v_j = v_{j \bmod n}, v_{(j+1) \bmod n}, \ldots, v_{k \bmod n} = v_k$.

Ta đã chỉ ra với mọi đỉnh $v \in V(W_n)$, các đồ thị W_n và $W_n - v$ đều có chính xác một thành phần liên thông. Do đó, W_n không có đỉnh cắt.