

COPYRIGHT NOTICE

THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-07-19

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-07-19



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

- Điền các thông tin về Họ Tên, Mã Sinh Viên, Lớp trước khi bắt đầu làm bài.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.
- Điểm bài kiểm tra này chiếm 20% tổng số điểm của môn học.

Họ và Tên: _____

Mã Sinh Viên: _____ Lớp: _____

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	3	2	3	2	10
Điểm:					

1. Cho các mệnh đề p , q , r , và s .

- (a) (1 điểm) Chứng minh rằng các mệnh đề $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ và $p \rightarrow (q \wedge r)$ là tương đương logic.
- (b) (1 điểm) Chứng minh rằng mệnh đề $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ là một hằng đúng.
- (c) (1 điểm) Chứng minh rằng các mệnh đề $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$ và $(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow s)$ không tương đương logic.

Lời giải:

(a) Ta có

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) && p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \\ &\equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee ((\neg p \vee q) \wedge r) && \text{Luật phân phối} \\ &\equiv \neg p \vee ((\neg p \vee q) \wedge r) && \text{Luật hấp thụ} \\ &\equiv (\neg p \vee (\neg p \vee q)) \wedge (\neg p \vee r) && \text{Luật phân phối} \\ &\equiv ((\neg p \vee \neg p) \vee q) \wedge (\neg p \vee r) && \text{Luật kết hợp} \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) && \text{Luật lũy đẳng} \\ &\equiv \neg p \vee (q \wedge r) && \text{Luật phân phối} \\ &\equiv p \rightarrow (q \wedge r) && p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q\end{aligned}$$

(b) Ta xây dựng bảng chân trị cho mệnh đề $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ như sau.

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

Từ bảng chân trị, mệnh đề $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ là một hằng đúng.

(c) Ngoài cách lập bảng chân trị, có thể lý luận như sau. Chú ý là mệnh đề $p \rightarrow q$ chỉ sai khi $p = \text{T}$ và $q = \text{F}$. Để chứng minh hai mệnh đề $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$ và $(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow s)$ không tương đương logic, ta cần chọn các giá trị chân lý cho p, q, r, s sao cho một mệnh đề đúng và mệnh đề kia sai.

- Để một trong hai mệnh đề đã cho là sai, ta có thể chọn sao cho $p \rightarrow q = p \rightarrow r = \text{T}$ và sau đó chọn sao cho $q \rightarrow s$ và $r \rightarrow s$ có giá trị chân lý khác nhau. Đơn giản nhất là chọn $p = \text{F}$.
- Tiếp theo, ta muốn chọn sao cho $q \rightarrow s$ và $r \rightarrow s$ có giá trị chân lý khác nhau. Như vậy, giá trị của q và r phải khác nhau. Nghĩa là nếu $q = \text{T}$ thì $r = \text{F}$ và nếu $q = \text{F}$ thì $r = \text{T}$.
- Thêm vào đó, do ít nhất một trong hai mệnh đề $q \rightarrow s$ và $r \rightarrow s$ phải có giá trị chân lý là F , bắt buộc ta phải chọn $s = \text{F}$.

Tóm lại, có thể chọn $p = s = \text{F}$ và sau đó chọn $q = \text{T}, r = \text{F}$ hoặc $q = \text{F}$ và $r = \text{T}$.

2. (2 điểm) Sử dụng phương pháp quy nạp, hãy chứng minh rằng $2^{3n} - 1$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải: Gọi $P(n)$ là vị từ “ $2^{3n} - 1$ chia hết cho 7”. Ta chứng minh $\forall n P(n)$ bằng phương pháp quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, với $n = 0$, ta có $2^{3n} - 1 = 2^0 - 1 = 0$ chia hết cho 7.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^{3k} - 1$ chia hết cho 7. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^{3(k+1)} - 1$ chia hết cho 7. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, $2^{3k} - 1$ chia hết cho 7. Do đó, $2^{3(k+1)} - 1 = 2^3(2^{3k} - 1) + 7$ cũng chia hết cho 7.

Bằng phương pháp quy nạp, ta đã chứng minh $2^{3n} - 1$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

3. (3 điểm) Sử dụng phương pháp quy nạp yếu, hãy chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 14$, tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 8b$. (**Chú ý:** Chứng minh bằng quy nạp mạnh cũng được chấp nhận, nhưng sẽ chỉ được tính tối đa 2 điểm.)

Lời giải: Ta chứng minh phát biểu $P(n) := \text{“tồn tại } a, b \in \mathbb{N} \text{ sao cho } n = 3a + 8b\text{”}$ bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(14)$ đúng. Thật vậy, $14 = 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 14$ nào đó, $P(k)$ đúng, nghĩa là tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $k = 3a + 8b$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh tồn tại $c, d \in \mathbb{N}$ sao cho $k+1 = 3c + 8d$.

Từ giả thiết quy nạp, ta có $k+1 = 3a + 8b + 1 = 3(a+3) + 8(b-1)$.

Với $b \geq 1$, $P(k+1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a+3 \in \mathbb{N}$ và $d = b-1 \in \mathbb{N}$.

Với $b = 0$, do $14 \leq k = 3a + 8b = 3a$ và $a \in \mathbb{N}$, ta có $a \geq 5$. Ta cũng có $k+1 = 3a+1 = 3(a-5) + 8 \cdot 2$. Suy ra $P(k+1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a-5 \in \mathbb{N}$ và $d = 2 \in \mathbb{N}$.

Theo nguyên lý quy nạp yếu, với mọi số nguyên $n \geq 14$, tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 8b$.

Chú ý: Một phương án khác để chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ là như sau:

Từ giả thiết quy nạp, ta có $k+1 = 3a + 8b + 1 = 3(a-5) + 8(b+2)$.

Với $a \geq 5$, $P(k+1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a-5 \in \mathbb{N}$ và $d = b+2 \in \mathbb{N}$.

Với $0 \leq a \leq 4$, do $14 \leq k = 3a + 8b \leq 12 + 8b$ và $b \in \mathbb{N}$, ta có $b \geq 1$, hay $b-1 \in \mathbb{N}$. Ta cũng có $k+1 = 3a + 8b + 1 = 3(a+3) + 8(b-1)$. Suy ra $P(k+1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a+3 \in \mathbb{N}$ và $d = b-1 \in \mathbb{N}$.

4. (2 điểm) Tìm công thức tường minh của tổng sau cho mọi số nguyên $n \geq 1$.

$$T_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i}. \quad (1)$$

Lời giải:

Cách 1: Với mọi $n \geq 1$, ta có

$$T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{Nhân hai vế của (2) với } 1/2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{Lấy (2) - (3)} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+2}} \quad \text{Nhân hai vế của (4) với } 1/2 \quad (5)$$

$$\frac{1}{4}T_n = \frac{1}{2^1} - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{n}{2^{n+2}} \quad \text{Lấy (4) - (5)} \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2n+2-n}{2^{n+2}} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{n+2}{2^{n+2}} \quad (8)$$

$$T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}. \quad \text{Nhân hai vế của (8) với 4} \quad (9)$$

Cách 2: Dãy $\{T_n\}$ được xác định bởi hệ thức truy hồi $T_n = T_{n-1} + \frac{n}{2^n}$ ($n \geq 2$) và điều kiện ban đầu $T_1 = 1/2$.

Hệ thức $T_n = T_{n-1} + \frac{n}{2^n}$ ($n \geq 2$) (*) là một hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất bậc một với hệ số hằng và có hệ thức thuần nhất tương ứng là $T_n = T_{n-1}$ (**). Hệ thức thuần nhất (**) có đa thức đặc trưng là $r - 1$. Đa thức này có nghiệm duy nhất $r = 1$. Do đó, nghiệm của (**) có dạng $T_n^{(h)} = c \cdot 1^n = c$, với c là hằng số nào đó.

Ta có $n/(2^n) = (1 \cdot n + 0) \cdot (1/2)^n$. Do $1/2$ không là nghiệm đặc trưng của (**), một nghiệm riêng $T_n^{(p)}$ của (*) có dạng $T_n^{(p)} = (p_0n + p_1)(1/2)^n$ ($n \geq 1$). Do $T_n^{(p)}$ là nghiệm của (*), ta có

$$\begin{aligned} \frac{p_0n + p_1}{2^n} &= \frac{p_0(n-1) + p_1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \\ \Leftrightarrow \frac{p_0n + p_1}{2^n} &= \frac{2(p_0(n-1) + p_1) + n}{2^n} \\ \Leftrightarrow p_0n + p_1 &= 2p_0n - 2p_0 + 2p_1 + n \\ \Leftrightarrow (p_0 + 1)n + (p_1 - 2p_0) &= 0. \end{aligned}$$

Suy ra $p_0 + 1 = 0$ và $p_1 - 2p_0 = 0$, nghĩa là $p_0 = -1$ và $p_1 = -2$. Do đó, $T_n^{(p)} = \frac{-n-2}{2^n}$.

Mọi nghiệm của (*) có dạng $T_n = T_n^{(h)} + T_n^{(p)} = c + \frac{-n-2}{2^n}$ ($n \geq 1$). Ta cũng có $T_1 = c + \frac{-1-2}{2^1} = \frac{1}{2}$. Suy ra $c = 2$. Do đó, $T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ với mọi $n \geq 1$.