

Một số chú ý

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học
Khoa Toán-Cơ-Tin học
Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội
`hoanganhduc@hus.edu.vn`

Mã đề 001

- Câu 29: Cả 2 đáp án A và C đều đúng.
- Câu 44: Đáp án đúng là C chứ không phải D như đã công bố trong đáp án ban đầu.
(Cụ thể, chỉ cần bỏ đi 2 đỉnh để đồ thị không liên thông, ví dụ T4 và T8.)

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 001

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 50 câu/10 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 60% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\forall x \in \mathbb{R} (P(x) \vee \neg Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là sai, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

☒ (A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai

☐ (B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

☒ (C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng

☐ (D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p = \text{"Tôi đi bơi."}$

$q = \text{"Trời mưa."}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

$\text{"Tôi không đi bơi khi trời mưa."}$

☒ (A) $\neg q \rightarrow p$

☐ (B) $q \rightarrow \neg p$

☐ (C) $p \rightarrow q$

☐ (D) $\neg p \rightarrow q$

Câu 03. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x \forall y \exists z (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$

☒ (A) $\forall x \exists y \forall z (P(x, y) \oplus Q(x, z))$

☐ (B) $\forall x \exists y \forall z (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$

☐ (C) $\forall x \exists y \forall z (P(x, y) \oplus \neg Q(x, z))$

☐ (D) $\exists x \forall y \exists z (P(x, y) \oplus \neg Q(x, z))$

Câu 04. Nếu như bạn muốn sử dụng phương pháp chứng minh phản đảo để chứng minh mệnh đề

$\text{"Với mọi } p \in \mathbb{Z} \text{ và } q \in \mathbb{Z}, \text{ nếu } p + q \text{ là một số lẻ, thì } p \text{ là số lẻ hoặc } q \text{ là số chẵn"}$

bạn sẽ cần bắt đầu chứng minh của bạn với giả thiết nào?

☒ (A) p là số lẻ và q là số lẻ

☐ (B) p là số chẵn và q là số lẻ

☐ (C) $p + q$ là số chẵn

☐ (D) $p + q$ là số lẻ

Câu 05. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

☒ (A) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} (x < y)$

☐ (B) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = n(n + 1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \rightarrow P(n + 1)$ luôn đúng

☐ (C) Với mọi mệnh đề p, q , nếu p đúng thì mệnh đề $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow q$ luôn đúng

☐ (D) Với mọi mệnh đề p, q , mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \rightarrow q)$ luôn đúng

Câu 06. Biểu thức nào là sai?

☒ (A) $\{x\} \subseteq \{x, \{x\}\}$

☐ (B) $\{x\} \in \{x\}$

☐ (C) $\{x\} \subseteq \{x\}$

☐ (D) $\{x\} \in \{x, \{x\}\}$

Câu 07. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^n i \cdot 2^i$$

- ☐ (A) $(n+1) \cdot 2^n - 2$
☐ (B) $(n-1) \cdot 2^n + 2$
☐ (C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$
☐ (D) $n \cdot 2^{n+1} - 2$

Câu 08. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

- ☐ (A) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
☐ (B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
☐ (C) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
☐ (D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 09. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- ☐ (A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
☐ (B) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$
☐ (C) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$
☐ (D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 10. Cho hàm $f : A \rightarrow B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
☐ (B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
☐ (C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ (D) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^3 \left(\prod_{j=1}^i \frac{j}{j+1} \right)$$

- ☐ (A) $\frac{13}{12}$
☐ (B) 10
 ☐ (C) $\frac{55}{11}$
☐ (D) 5

Câu 12. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

- ☐ (A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
☐ (B) 0
☐ (C) -1
☐ (D) 1

Câu 13. Cho các tập hợp X và Y bất kỳ và hàm $f : X \rightarrow Y$. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu dưới đây.

- ☐ (A) Với mọi $A \subseteq X$ và $B \subseteq X$, $f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B)$
☐ (B) Với mọi $A \subseteq X$ và $B \subseteq X$, $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$
☐ (C) Với mọi $A \subseteq X$ và $B \subseteq X$, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
☐ (D) Với mọi $A \subseteq X$ và $B \subseteq X$, $f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$

Câu 14. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☐ (A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
 ☐ (B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
☐ (C) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
 ☐ (D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 15. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$P(k+1) = 2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} \quad (\text{Định nghĩa } P(n)) \quad (1)$$

$$= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (2)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (3)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
- ☐ B Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác
- ☐ C Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
- ☐ D Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 16. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ " bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (4)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì đẳng thức (4) không chính xác
- ☐ B Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ D Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 17. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

- (A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
 (B) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
 (C) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
 (D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 18. Giả sử tôi đã thấy một cuộc điều hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n - 2$ và con ngựa thứ $n + 2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
 (B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
 (C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
 (D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 19. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 12 P(n)$ ". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k - 3)$ đúng thì $P(k + 1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

- (A) $P(12), P(13), P(14)$ (B) $P(12)$
 (C) $P(15)$ (D) $P(12), P(13), P(14), P(15)$

Câu 20. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

- (A) 22 (B) 18 (C) 26 (D) 14

Câu 21. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0, f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```
FIBMERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$ , với  $n = f_\ell \rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := f_{\ell-1}$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    FIBMERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    FIBMERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
```

```
MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m + 1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i + 1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j + 1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i + 1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j + 1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(f_\ell \log \ell)$ (B) $O(\ell \log \ell)$ (C) $O(\ell^2)$ (D) $O(\ell f_\ell)$

Câu 22. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n} \log n, 1000 \log n, n \log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
 (C) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, \frac{n^2}{1000000}, n \log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $\sqrt{n} \log n, 1000 \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 23. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

- (A) 2^{2^n} là $O(2^n)$ (B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
 (C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$ (D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 24. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 1$ và $b > 1, c, d \in \mathbb{R}, c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức (level) trong cây đệ quy (recursion tree) được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

- (A) $ca^i(n/b^i)^d$ (B) $ca^i n^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $c(n/a^i)^d$

Câu 25. Cho hệ phương trình sau.

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 5 \pmod{6} \end{cases}$$

Giá trị của $x \bmod 24$ là bao nhiêu? Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) 15 (B) 23 (C) 12 (D) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng

Câu 26. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $3^{3n+1} + 2^{n+1}$ luôn chia hết cho?

- (A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
 (B) 5 (C) 4 (D) 3

Câu 27. Nghịch đảo của 32 theo môđun 96 là?

- (A) Không tồn tại (B) 25 (C) 71 (D) 6

Câu 28. Một nhà xuất bản sách có 3000 bản sách toán rời rạc. Có bao nhiêu cách để lưu trữ những quyển sách này vào ba kho của họ nếu các bản sách là giống nhau?

- (A) C_{3002}^3 (B) C_{3002}^2 (C) C_{3003}^3 (D) 3^{3000}

Câu 29. Trong khai triển của $(3x - 5y)^{19}$, hệ số của $x^{11}y^8$ là bao nhiêu?

- (A) $C_{19}^{11} \cdot 3^{11} \cdot (-5)^8$ (B) $C_{19}^{11} \cdot 3^8 \cdot (-5)^{11}$ (C) $C_{19}^8 \cdot 3^{11} \cdot (-5)^8$ (D) $-C_{19}^8 \cdot 3^{11} \cdot 5^8$

Câu 30. Một chuỗi đối xứng (palindrome) là một chuỗi mà khi viết theo thứ tự ngược lại sẽ giống hệt chuỗi ban đầu. Ví dụ, chuỗi madam là một chuỗi đối xứng. Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài n là chuỗi đối xứng?

- (A) $2^{\lceil n/2 \rceil}$ (B) $2^{n/2+1}$ (C) $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (D) $2^{n/2}$

Câu 31. Trong một lớp học có 12 bạn nữ và 10 bạn nam. Có bao nhiêu cách để chọn ra một nhóm 6 bạn trong đó số bạn nữ luôn nhiều hơn số bạn nam?

- (A) $C_{22}^6 - (C_{10}^6 \cdot C_{12}^0 + C_{10}^5 \cdot C_{12}^1 + C_{10}^4 \cdot C_{12}^2)$
 (B) $(C_{12}^4 \cdot C_{10}^2) \cdot (C_{12}^5 \cdot C_{10}^1) \cdot (C_{12}^6 \cdot C_{10}^0)$
 (C) $(C_{12}^4 \cdot C_{10}^2) + (C_{12}^5 \cdot C_{10}^1) + (C_{12}^6 \cdot C_{10}^0)$
 (D) $(C_{12}^3 \cdot C_{10}^3) + (C_{12}^4 \cdot C_{10}^2) + (C_{12}^5 \cdot C_{10}^1) + (C_{12}^6 \cdot C_{10}^0)$

Câu 32. Giả sử có 25 quả bóng trong một túi, gồm 12 quả màu đỏ, 8 quả màu xanh lam và 5 quả màu xanh lục. Số quả bóng tối thiểu mà một người cần phải lấy ra từ túi (không bỏ lại vào túi) để đảm bảo rằng người đó có ít nhất hai quả bóng cùng màu là bao nhiêu?

(A) 5

(B) 6

(C) 4

(D) 3

Câu 33. Một bài kiểm tra trắc nghiệm môn Toán rời rạc gồm 40 câu hỏi, mỗi câu có bốn phương án trả lời có thể: A, B, C, D . Cần ít nhất bao nhiêu sinh viên trong lớp để đảm bảo rằng có ít nhất ba bài làm giống hệt nhau? (Giả sử sinh viên chọn chính xác một đáp án cho mỗi câu hỏi.)

(A) $3 \cdot 4^{20}$

(B) 4^{40}

(C) $4^{40} + 1$

(D) $2 \cdot 4^{40} + 1$

Câu 34. Có 300 sinh viên ngành Khoa học dữ liệu ở VNU-HUS, trong đó 112 sinh viên học môn MAT3500, 85 sinh viên học môn MAT3504, 95 sinh viên học môn MAT3514, 45 sinh viên học cả hai môn MAT3500 và MAT3504, 30 sinh viên học cả hai môn MAT3500 và MAT3514, 25 sinh viên học cả hai môn MAT3504 và MAT3514, và 5 sinh viên học cả ba môn. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không học môn nào trong số ba môn này?

(A) 103

(B) 97

(C) 113

(D) 93

Câu 35. Một máy tính tạo ra mã gồm một chữ số, một chữ cái, một chữ số khác và một chữ cái khác, với các chữ số và chữ cái khác nhau trong mỗi mã, ví dụ như $0A2B, 2B9D, 0E5B$ v.v. Các chữ cái được chọn từ tập hợp $L = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$. Cần tạo ra ít nhất bao nhiêu mã để đảm bảo rằng có ít nhất ba mã giống nhau?

(A) 5040

(B) 10081

(C) 5041

(D) 10080

Câu 36. Có bao nhiêu hoán vị của chuỗi $ACEGHKLMNTU$ không chứa các chuỗi con $MATH$ và $CLEAN$?

(A) $11! - 9!$

(B) $11! - 8! - 7!$

(C) $11! - 8! - 7! + 9!$

(D) $11! - 8!$

Câu 37. Có bao nhiêu cách để đặt 12 quả bóng khác nhau vào 9 hộp khác nhau? Giả sử mỗi hộp có thể chứa bất kỳ số quả bóng nào.

(A) C_{12}^9

(B) 9^{12}

(C) 12^9

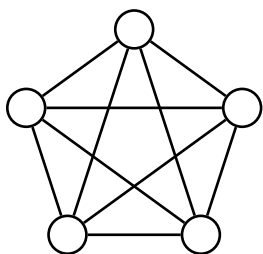
(D) C_{20}^8

Câu 38. Thành phố Mạng Lưới đang triển khai hệ thống WiFi miễn phí toàn thành phố. Để tránh nhiễu sóng, các khu vực tiếp giáp nhau phải được gán các tần số khác nhau.

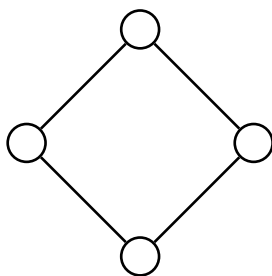
Mỗi khu vực được biểu diễn bằng một đỉnh trong đồ thị G , và có cạnh nối hai đỉnh nếu hai khu vực đó tiếp giáp với nhau. Bài toán phân bổ tần số tương đương với bài toán tô màu đồ thị: mỗi tần số ứng với một màu, và hai đỉnh kề nhau phải có màu khác nhau.

Gọi $\Delta(G)$ là bậc lớn nhất của một đỉnh trong đồ thị G . Một định lý cơ bản trong lý thuyết đồ thị khẳng định rằng chỉ cần tối đa $\Delta(G) + 1$ màu là đủ để tô màu cho đồ thị G sao cho không có hai đỉnh kề nhau có cùng màu. Nói cách khác, chỉ cần tối đa $\Delta(G) + 1$ tần số là đủ để phân bổ tần số cho các khu vực trong thành phố Mạng Lưới.

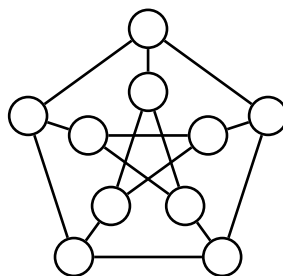
Trong số các mô hình khu vực (đồ thị G) được mô tả trong Hình 1, đâu là mô hình bắt buộc phải sử dụng **chính xác** $\Delta(G) + 1$ tần số để đảm bảo không có nhiễu sóng?



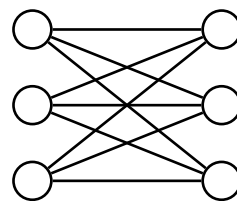
Khu trung tâm: K_5



Khu Tân Bình: C_4



Công viên Thế Kỷ: Petersen



Khu kinh doanh: $K_{3,3}$

Hình 1: Các mô hình đồ thị biểu diễn khu vực khác nhau trong thành phố Mạng Lưới

(A) Khu Tân Bình (mô hình C_4 , các khu vực được bố trí thành hình vuông)

(B) Công viên Thế Kỷ (mô hình đồ thị Petersen với 10 khu vực, mỗi khu tiếp giáp với 3 khu khác)

(C) Khu kinh doanh (mô hình $K_{3,3}$, với 6 khu vực chia thành hai nhóm, mỗi khu trong nhóm này tiếp giáp với mọi khu của nhóm kia)

(D) Khu trung tâm (mô hình K_5 , nơi mỗi khu vực tiếp giáp với tất cả khu vực khác)

Câu 39. Chọn phát biểu sai trong các phát biểu sau.

- ☐ (A) Đồ thị con của một đồ thị đầy đủ có thể không phải là một đồ thị đầy đủ
- ☐ (B) Đồ thị con của một đồ thị phẳng là một đồ thị phẳng
- ☐ (C) Đồ thị con của một cây là một cây
- ☐ (D) Đồ thị con của một đồ thị không phẳng có thể là một đồ thị phẳng

Câu 40. Giả sử G là một đơn đồ thị vô hướng có 25 đỉnh và 99 cạnh. Gọi ℓ là độ dài lớn nhất của một đường đi đơn trong G . Chọn đánh giá *chính xác nhất* về ℓ trong số các phát biểu sau.

- ☐ (A) $\ell \leq 24$
- ☐ (B) $\ell > 24$
- ☐ (C) $\ell \leq 25$
- ☐ (D) $\ell > 25$

Câu 41. Nhắc lại rằng một *đồ thị phẳng* (*planar graph*) là đồ thị có thể vẽ trên mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau ở các điểm không phải là đầu mút của cạnh. Không phải tất cả các đồ thị đều là phẳng.

Xét các đồ thị sau:

- G_1 : Đồ thị có 8 đỉnh và 20 cạnh
- G_2 : Đồ thị có 9 đỉnh và 18 cạnh
- G_3 : Đồ thị có 6 đỉnh và 12 cạnh
- G_4 : Đồ thị đầy đủ K_6

Trong số các đồ thị trên, đồ thị nào chắc chắn không phải là đồ thị phẳng?

- ☐ (A) Chỉ G_4
- ☐ (B) G_3 và G_4
- ☐ (C) Chỉ G_1
- ☐ (D) G_1 và G_4

Câu 42. Nhà nhân chủng học Robin Dunbar đã lập luận rằng khả năng tâm trí của con người chỉ duy trì được khoảng 150 mối quan hệ bạn bè¹. Lập luận của Dunbar dựa trên kích thước vật lý của não người và so sánh giữa các loài; 150 đôi khi được gọi là *số Dunbar* (*Dunbar's number*).

Giả sử rằng Alice có đúng 150 người bạn, và mỗi người bạn của Alice đều có đúng 150 người bạn—nghĩa là, một người bạn của Alice biết Alice và 149 người khác. (Lưu ý rằng các tập hợp bạn bè của các bạn của Alice có thể giao nhau.) Gọi S là tập hợp những người mà Alice biết trực tiếp hoặc có chung một người bạn với Alice, không tính bản thân Alice. Giá trị *lớn nhất* và *nhỏ nhất* có thể của $|S|$ lần lượt là?

- ☐ (A) $150 \cdot 149$ và 150
- ☐ (B) 150^2 và 150
- ☐ (C) 150^2 và 149
- ☐ (D) $150 \cdot 149$ và 149

Câu 43. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- ☐ (A) Hai đồ thị đẳng cấu luôn có hình dạng giống hệt nhau
- ☐ (B) Hai đồ thị đẳng cấu có cùng số đỉnh và cùng số cạnh
- ☐ (C) Hai đồ thị là đẳng cấu nếu chúng có cùng số đỉnh và cùng số cạnh
- ☐ (D) Nếu hai đồ thị có cùng số đỉnh và cùng số chu trình, thì chúng là đẳng cấu

Câu 44. Ethan Hunt và đội IMF đang thực hiện Nhiệm vụ bất khả thi: phá vỡ mạng lưới liên lạc của tổ chức khủng bố Syndicate. Trong Hình 2, mỗi đỉnh biểu diễn một trạm phát tín hiệu bí mật của Syndicate. Hai trạm có cạnh nối với nhau nếu chúng có thể trực tiếp trao đổi thông tin mã hóa.

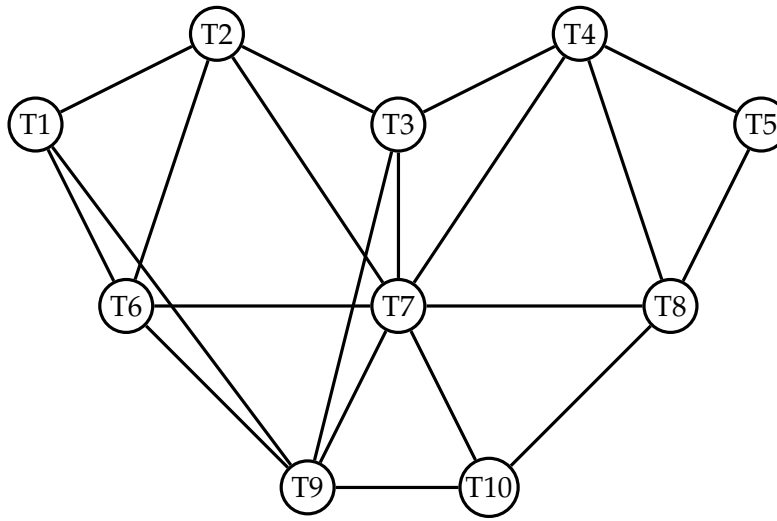
“Nhiệm vụ của anh, nếu anh chọn chấp nhận,” Bộ trưởng nói với Ethan qua một tin nhắn tự hủy, “là xác định số lượng trạm tối thiểu cần vô hiệu hóa để chia cắt mạng lưới liên lạc của Syndicate, khiến ít nhất hai trạm không thể trao đổi thông tin với nhau dù trực tiếp hay gián tiếp. Như thường lệ, nếu anh hoặc đội của anh bị bắt hoặc tiêu diệt, Bộ sẽ phủ nhận mọi liên quan đến anh.”

Ethan và các đồng đội cần phải vô hiệu hóa *ít nhất* bao nhiêu trạm?

- ☐ (A) 4
- ☐ (B) 5
- ☐ (C) 2
- ☐ (D) 3

Câu 45. Một nhà sinh học đang nghiên cứu quần thể thỏ hoang đã với mô hình sinh sản đặc biệt. Do đặc điểm di truyền độc đáo, mỗi con thỏ (cả đực lẫn cái) đều sinh ra tối đa 4 con thỏ đực trong suốt đời. Một cặp thỏ ban đầu, với một con đực, đã phát triển thành một quần thể lớn trải qua $n \geq 1$ thế hệ (tính thỏ đực đầu tiên là thế hệ thứ 1).

¹Robin Dunbar. *How Many Friends Does One Person Need?: Dunbar's Number and Other Evolutionary Quirks*. Harvard University Press, 2010.



Hình 2: Đồ thị biểu diễn mạng lưới liên lạc của Syndicate. Mỗi đỉnh biểu diễn một trạm phát tín hiệu bí mật và có cạnh nối giữa hai trạm nếu chúng có thể trực tiếp trao đổi thông tin mã hóa với nhau.

Giáo sư X đang nghiên cứu mô hình tăng trưởng quần thể này và muốn ước lượng tổng số thỏ được từ thế hệ đầu tiên đến thế hệ thứ n . Nếu tất cả thỏ được đều tuân theo quy luật sinh sản này thì có tối đa bao nhiêu thỏ được từ thế hệ đầu tiên đến thế hệ thứ n ?

- Ⓐ 4^{n-1} Ⓑ $\frac{4^{n+1} - 1}{3}$ Ⓒ $\frac{4^n - 1}{3}$ Ⓓ 4^n

Câu 46. Cho ma trận kề A của một đồ thị có hướng G :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chọn phát biểu đúng về đồ thị G .

- Ⓐ G không phải là đồ thị liên thông mạnh Ⓑ G có chu trình đơn độ dài 5
Ⓒ Mọi đỉnh trong G đều có bậc vào bằng bậc ra Ⓓ G có đúng hai thành phần liên thông mạnh

Câu 47. Tại hội nghị thường niên của Hiệp hội Toán học Việt Nam, 21 nhà toán học trẻ tham dự phần giao lưu kết nối. Ban tổ chức đề xuất một hoạt động thú vị: mỗi người sẽ trao đổi danh thiếp với đúng 5 người khác để tạo cơ hội hợp tác trong tương lai. Tiến sĩ X, chuyên gia lý thuyết đồ thị, đang tự hỏi liệu kế hoạch này có thể thực hiện được không.

Liệu mỗi nhà toán học có thể trao đổi danh thiếp với đúng 5 người khác không?

- Ⓐ Không, vì điều này trái với Định lý bắt tay trong lý thuyết đồ thị
Ⓑ Có, vì có thể xếp thành vòng tròn và mỗi người trao đổi danh thiếp với 5 người tiếp theo tính theo chiều kim đồng hồ
Ⓒ Có, nếu mỗi người được gặp đúng 5 người khác
Ⓓ Không đủ thông tin để kết luận

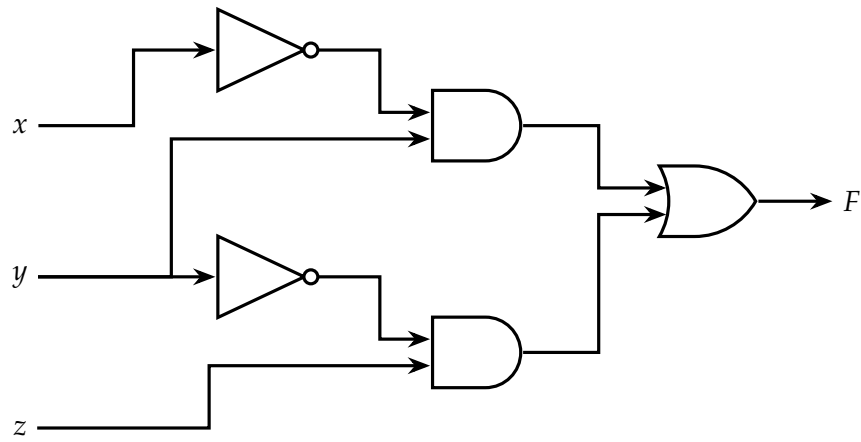
Câu 48. Trong đại số Boole, xét biểu thức $F(x, y, z) = (x + \bar{y})z$.

Biểu thức nào sau đây tương đương với $F(x, y, z)$?

- Ⓐ $x + \bar{y} + \bar{z}$ Ⓑ $x + \bar{y} + z$ Ⓒ $x + y + \bar{z}$ Ⓓ $x + \bar{y} + \bar{z}$

Câu 49. Cho một mạch logic với ba đầu vào x, y, z và một đầu ra F . Mạch này được thiết kế như sau:

Biểu thức đại số Boole nào sau đây mô tả chính xác đầu ra $F(x, y, z)$ của mạch logic này?



Hình 3: Mạch logic với ba đầu vào x, y, z và đầu ra F

A $(y \cdot \bar{x}) + (\bar{y} \cdot z)$

B $\bar{x} + \bar{y} + z$

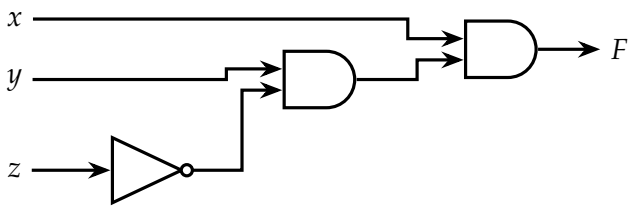
C $(\bar{y} \cdot z) + (y \cdot z)$

D $\bar{x} \cdot y + z$

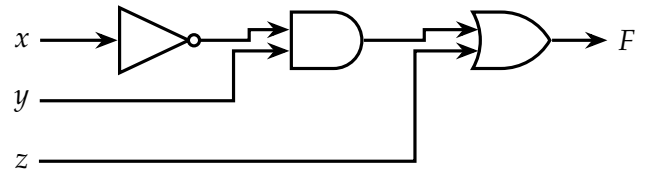
Câu 50. Cho bảng chân trị của hàm Boolean $F(x, y, z)$ như sau:

x	y	z	$F(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

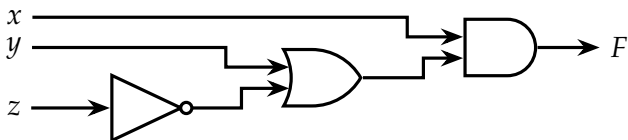
Hãy chọn mạch logic trong Hình 4 thể hiện đúng hàm $F(x, y, z)$.



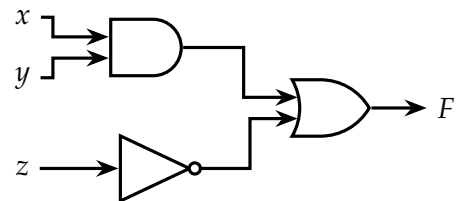
Mạch A



Mạch B



Mạch C



Mạch D

Hình 4: Các mạch logic

A Mạch A

B Mạch C

C Mạch D

D Mạch B

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 001

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. C	09. A	17. A	24. A	32. C	39. C	46. B
02. B	10. B	18. B	25. B	33. D	40. C	47. A
03. A	11. A	19. D	26. B	34. A	41. D	48. A
04. B	12. C	20. C	27. A	35. B	42. A	49. A
05. C	13. D	21. D	28. B	36. B	43. B	50. B
06. B	14. C	22. A	29. A	37. B	44. D	
07. C	15. C	23. A	30. A	38. D	45. C	
08. C	16. C		31. C			

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 002

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 50 câu/10 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 60% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

“Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19.”

- ☐ A Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
☐ B Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
☐ C Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
☐ D Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 02. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tôi đi bơi.”}$

$q = \text{“Trời mưa.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Tôi không đi bơi khi trời mưa.”

- ☐ A $\neg q \rightarrow p$ ☐ B $q \rightarrow \neg p$ ☐ C $p \rightarrow q$ ☐ D $\neg p \rightarrow q$

Câu 03. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

- ☐ A $1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$ ☐ B $1 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3$
☐ C $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3$ ☐ D $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3$

Câu 04. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 05. Cho $P(x, y)$ là vị từ “ $x + 3y = xy$ ” với các biến xác định trên tập số nguyên \mathbb{Z} . Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

- ☐ A $\forall y \exists x P(x, y)$ ☐ B $\forall x \forall y P(x, y)$ ☐ C $\exists y P(4, y)$ ☐ D $P(0, 3)$

Câu 06. Biểu thức nào là sai?

- ☐ A $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$ ☐ B $\emptyset = \{\{\}\}$
☐ C $\emptyset = \{\}$ ☐ D $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Câu 07. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, \dots$ ($n \geq 1$) là đúng?

- ☒ A $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
- ☐ B $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
- ☐ C $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
- ☐ D $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng

Câu 08. Cho các tập hợp X và Y bất kỳ và hàm $f : X \rightarrow Y$. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu dưới đây.

- ☒ A Với mọi $A \subseteq X$ và $B \subseteq X$, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
- ☐ B Với mọi $A \subseteq X$ và $B \subseteq X$, $f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B)$
- ☐ C Với mọi $A \subseteq X$ và $B \subseteq X$, $f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$
- ☐ D Với mọi $A \subseteq X$ và $B \subseteq X$, $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$

Câu 09. Nhiều ngôn ngữ lập trình cung cấp tính năng biểu diễn số thực x được *cắt ngắn* (truncated) đến k chữ số sau dấu thập phân, tức là loại bỏ các chữ số từ vị trí thứ $(k + 1)$ trở đi. Ví dụ, 3.1415926 khi cắt ngắn đến 3 chữ số sau dấu thập phân sẽ thành 3.141, và khi cắt ngắn đến 4 chữ số sau dấu thập phân sẽ thành 3.1415.

Trong các ngôn ngữ như C, Java, Python, lệnh `printf("%.3f", 3.1415926)` sẽ in ra 3.141 – giá trị của 3.1415926 với chỉ 3 chữ số sau dấu thập phân. (Chữ “f” trong “printf” là viết tắt của formatted; chữ “f” trong “%.3f” là viết tắt của float.)

Hãy chọn biểu thức chính xác để biểu diễn một số thực x được cắt ngắn đến k chữ số sau dấu thập phân, tức là bỏ đi chữ số thứ $(k + 1)$ trở đi.

- ☒ A $\lfloor x \cdot 10^k \rfloor / 10^k$
- ☐ B $\lfloor x \rfloor / 10^k$
- ☐ C $\lceil x \cdot 10^k \rceil / 10^k$
- ☐ D $\lceil x \cdot 10^k \rceil - \lfloor x \cdot 10^k \rfloor$

Câu 10. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

- ☒ A $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- ☐ B $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
- ☐ C $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
- ☐ D $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Câu 11. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

- ☒ A $f(x) = 2x$
- ☐ B $f(x) = 2^x$
- ☐ C $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$
- ☐ D $f(x) = 4/x$

Câu 12. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \quad (1)$$

$$((x, y, z), x + y + z) \in g \quad (2)$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- ☒ A $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
- ☐ B $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
- ☐ C $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
- ☐ D $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 13. Cho hàm $f : A \rightarrow B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A f là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi $a, b \in A$, nếu $f(a) \neq f(b)$ thì $a \neq b$
- ☐ B f là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi $a, b \in A$, nếu $a \neq b$ thì $f(a) \neq f(b)$
- ☐ C f là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi $a, b \in A$, nếu $a = b$ thì $f(a) = f(b)$
- ☐ D Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 14. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

$$\text{“Tồn tại } a, b \in \mathbb{N} \text{ sao cho } n = 3a + 4b.”$$

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

- Ⓐ Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
- Ⓑ Có thể sử dụng quy nạp mạnh
- Ⓒ Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
- Ⓓ Có vẻ như $P(k) \rightarrow P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6), P(7), P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 15. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- Ⓐ -4 Ⓑ -5 Ⓒ 1 Ⓓ -2

Câu 16. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

- Ⓐ 26 Ⓑ 22 Ⓒ 18 Ⓓ 14

Câu 17. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- Ⓐ Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- Ⓑ Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
- Ⓒ Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
- Ⓓ Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 18. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

- Ⓐ Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
- Ⓑ Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
- Ⓒ Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
- Ⓓ Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 19. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

- Ⓐ Không thể tính được Ⓑ 0 Ⓒ -1 Ⓓ -2

Câu 20. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

“(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \dots, k\}$.”

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

- Ⓐ $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
- Ⓑ $P(k-1), P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
- Ⓒ $P(k-1), P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
- Ⓓ $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 21. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề “ $P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$ ” sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$T(k+1) = T(k) + O(1) \quad (\text{Giả thiết}) \quad (3)$$

$$= O(1) + O(1) \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (4)$$

$$= O(1). \quad (5)$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

- ☒ A Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ B Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
- ☐ C Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
- ☐ D Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 22. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ A $f(n) = O(n)$
- ☐ B $f(n) = O(n^2)$
- ☐ C $f(n) = O(n^{2.58})$
- ☐ D $f(n) = O(n \log n)$

Câu 23. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

- ☐ A $O(n^d \log n)$
- ☐ B $O(n^{d+1})$
- ☐ C $O(n \log n)$
- ☐ D $O(n^d)$

Câu 24. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy a_1, a_2, \dots, a_n gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x .

```

i := 1
while ( $x^2 \neq a_i$ ) và ( $i < n$ ) do
    i := i + 1
if  $x^2 = a_i$  then
    return i
return -1

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

- ☐ A $O(n^2)$
- ☐ B $O(n)$
- ☐ C $O(1)$
- ☐ D $O(n^3)$

Câu 25. Cho hệ phương trình sau.

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 5 \pmod{6} \end{cases}$$

Giá trị của $x \bmod 24$ là bao nhiêu? Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ A 15
- ☐ B 23
- ☐ C 12
- ☐ D Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng

Câu 26. Biểu diễn thập phân của $(A70)_{16}$ là?

- (A) 2560 (B) 2567 (C) 2672 (D) 167

Câu 27. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $3^{3n+1} + 2^{n+1}$ luôn chia hết cho?

- (A) 3
(B) 4
(C) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(D) 5

Câu 28. Có bao nhiêu cách chọn ra một số nguyên không âm n sao cho $n \leq 100$ và n chia hết cho 3 hoặc 5?

- (A) $\lceil 100/3 \rceil + \lceil 100/5 \rceil - \lceil 100/15 \rceil + 1$ (B) $\lfloor 100/3 \rfloor + \lfloor 100/5 \rfloor - \lfloor 100/15 \rfloor + 1$
(C) $\lfloor 100/3 \rfloor + \lfloor 100/5 \rfloor - \lfloor 100/15 \rfloor$ (D) $\lceil 100/3 \rceil + \lceil 100/5 \rceil - \lceil 100/15 \rceil$

Câu 29. Có bao nhiêu chuỗi ký tự độ dài 14 tạo thành từ các ký tự trong tập hợp $\{a, b, c, d\}$ và có đúng ba ký tự a hoặc đúng ba ký tự b hoặc cả hai?

- (A) $2C_{14}^3 \cdot 3^{11} - C_{14}^3 \cdot C_{11}^3 \cdot 2^8$ (B) $2C_{14}^3 \cdot 3^{11} - C_{14}^3 \cdot C_{11}^3 \cdot 3^8$
(C) $2C_{14}^3 \cdot 4^{11} - C_{14}^6 \cdot 2^8$ (D) $2C_{14}^3 \cdot 3^{11} - C_{14}^6 \cdot 3^8$

Câu 30. Nếu biết rằng $C_{15}^2 = 105$ và $C_{15}^3 = 455$, thì C_{16}^3 bằng bao nhiêu?

- (A) 560 (B) 4.333 (C) 350 (D) 47775

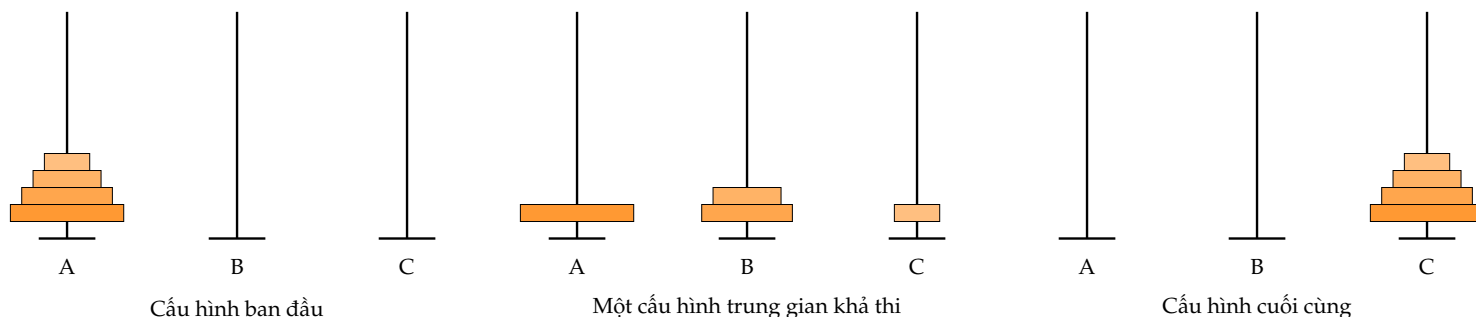
Câu 31. Có bao nhiêu hoán vị của chuỗi $ACEGHKLMNTU$ không chứa các chuỗi con $MATH$ và $CLEAN$?

- (A) $11! - 8!$ (B) $11! - 8! - 7! + 9!$ (C) $11! - 8! - 7!$ (D) $11! - 9!$

Câu 32. Khi trò chuyện với một giáo sư X , bạn biết được rằng ông ấy đã giảng dạy tại Đại học Z trong 20 năm, mỗi học kỳ dạy 2 môn học khác nhau. Bạn cũng được biết rằng Đại học Z chỉ có hai học kỳ mỗi năm và Giáo sư X chỉ dạy tổng cộng 9 môn học khác nhau trong suốt thời gian giảng dạy ở Đại học Z . Một người bạn của bạn ngay lập tức kết luận rằng chắc chắn có ít nhất hai học kỳ mà giáo sư dạy cùng một cặp môn học. Nhận định của bạn bạn có đúng không? Hãy chọn đánh giá chính xác nhất có thể.

- (A) Đúng, vì 9 môn học không đủ để dạy trong 20 năm
(B) Sai, vì cần biết thêm thông tin về việc luân chuyển môn học theo học kỳ
(C) Đúng, vì có tối đa $C_9^2 = 36$ cặp môn học khác nhau có thể, trong khi đó có $2 \cdot 20 = 40$ học kỳ
(D) Sai, vì giáo sư có thể đã dạy mỗi cặp môn học đúng một lần

Câu 33. Trong bài toán Tháp Hà Nội (Towers of Hanoi problem), ta cần di chuyển n đĩa từ cọc A sang cọc C với sự trợ giúp của cọc B . Giả sử n đĩa có kích thước khác nhau. Mỗi cách đặt n đĩa này vào ba cọc phân biệt A, B, C sao cho không có đĩa nào đặt trên đĩa nhỏ hơn nó được gọi là một *cấu hình* (configuration) của bài toán. (Xem Hình 1.) Có bao nhiêu cấu hình khác nhau trong bài toán Tháp Hà Nội với n đĩa?



Hình 1: Minh họa các cấu hình trong bài toán Tháp Hà Nội ($n = 4$).

- (A) $n!$ (B) $2^n - 1$ (C) $3^n - 1$ (D) 3^n

Câu 34. Một máy tính tạo ra mã gồm một chữ số, một chữ cái, một chữ số khác và một chữ cái khác, với các chữ số và chữ cái khác nhau trong mỗi mã, ví dụ như 0A2B, 2B9D, 0E5B v.v. Các chữ cái được chọn từ tập hợp $L = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$. Cần tạo ra ít nhất bao nhiêu mã để đảm bảo rằng có ít nhất ba mã giống nhau?

- (A) 10081 (B) 5040 (C) 10080 (D) 5041

Câu 35. Một nhà xuất bản sách có 3000 bản sách toán rời rạc. Có bao nhiêu cách để lưu trữ những quyển sách này vào ba kho của họ nếu các bản sách là giống nhau?

- (A) C_{3003}^3 (B) C_{3002}^2 (C) C_{3002}^3 (D) 3^{3000}

Câu 36. Có bao nhiêu cách chọn ra 8 quân bài từ một bộ bài 52 quân thông thường sao cho trong số các quân bài đã chọn có ít nhất một quân là J, Q, hoặc K?

- (A) $C_{12}^3 \cdot C_{40}^5$ (B) $C_{52}^8 - C_{40}^8$ (C) $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{40}^5$ (D) $C_{12}^1 \cdot C_{40}^7$

Câu 37. Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái của từ REAPING sao cho các nguyên âm luôn đứng cạnh nhau? (Chú ý: Nguyên âm trong từ REAPING là các chữ cái A, E, I.)

- (A) $4! \cdot 3!$ (B) $7!/3!$ (C) $7!/(3! \cdot 4!)$ (D) $3! \cdot 5!$

Câu 38. Giả sử G là một đơn đồ thị vô hướng có 25 đỉnh và 99 cạnh. Gọi ℓ là độ dài lớn nhất của một đường đi đơn trong G . Chọn đánh giá chính xác nhất về ℓ trong số các phát biểu sau.

- (A) $\ell > 25$ (B) $\ell > 24$ (C) $\ell \leq 24$ (D) $\ell \leq 25$

Câu 39. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- (A) Hai đồ thị đẳng cấu luôn có hình dạng giống hệt nhau
(B) Nếu hai đồ thị có cùng số đỉnh và cùng số chu trình, thì chúng là đẳng cấu
(C) Hai đồ thị đẳng cấu có cùng số đỉnh và cùng số cạnh
(D) Hai đồ thị là đẳng cấu nếu chúng có cùng số đỉnh và cùng số cạnh

Câu 40. Nhắc lại rằng một đồ thị phẳng (planar graph) là đồ thị có thể vẽ trên mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau ở các điểm không phải là đầu mút của cạnh. Không phải tất cả các đồ thị đều là phẳng.

Xét các đồ thị sau:

- G_1 : Đồ thị có 8 đỉnh và 20 cạnh
- G_2 : Đồ thị có 9 đỉnh và 18 cạnh
- G_3 : Đồ thị có 6 đỉnh và 12 cạnh
- G_4 : Đồ thị đầy đủ K_6

Trong số các đồ thị trên, đồ thị nào chắc chắn không phải là đồ thị phẳng?

- (A) G_3 và G_4 (B) Chỉ G_4 (C) G_1 và G_4 (D) Chỉ G_1

Câu 41. Tại hội nghị thường niên của Hiệp hội Toán học Việt Nam, 21 nhà toán học trẻ tham dự phần giao lưu kết nối. Ban tổ chức đề xuất một hoạt động thú vị: mỗi người sẽ trao đổi danh thiếp với đúng 5 người khác để tạo cơ hội hợp tác trong tương lai. Tiến sĩ X, chuyên gia lý thuyết đồ thị, đang tự hỏi liệu kế hoạch này có thể thực hiện được không.

Liệu mỗi nhà toán học có thể trao đổi danh thiếp với đúng 5 người khác không?

- (A) Không đủ thông tin để kết luận
(B) Có, nếu mỗi người được gặp đúng 5 người khác
(C) Có, vì có thể xếp thành vòng tròn và mỗi người trao đổi danh thiếp với 5 người tiếp theo tính theo chiều kim đồng hồ
(D) Không, vì điều này trái với Định lý bắt tay trong lý thuyết đồ thị

Câu 42. Cho G là một đơn đồ thị vô hướng có n đỉnh và m cạnh. Giả sử G không có chu trình. Hãy chọn phát biểu đúng về n và m trong số các phát biểu sau.

- (A) $m \leq n - 1$ (B) $m \geq n - 1$ (C) $m = n$ (D) $m = n - 1$

Câu 43. Nhà nhân chủng học Robin Dunbar đã lập luận rằng khả năng tâm trí của con người chỉ duy trì được khoảng 150 mối quan hệ bạn bè¹. Lập luận của Dunbar dựa trên kích thước vật lý của não người và so sánh giữa các loài; 150 đôi khi được gọi là *số Dunbar* (*Dunbar's number*).

Giả sử rằng Alice có đúng 150 người bạn, và mỗi người bạn của Alice đều có đúng 150 người bạn—nghĩa là, một người bạn của Alice biết Alice và 149 người khác. (Lưu ý rằng các tập hợp bạn bè của các bạn của Alice có thể giao nhau.) Gọi S là tập hợp những người mà Alice biết trực tiếp hoặc có chung một người bạn với Alice, không tính bản thân Alice. Giá trị *lớn nhất* và *nhỏ nhất* có thể của $|S|$ lần lượt là?

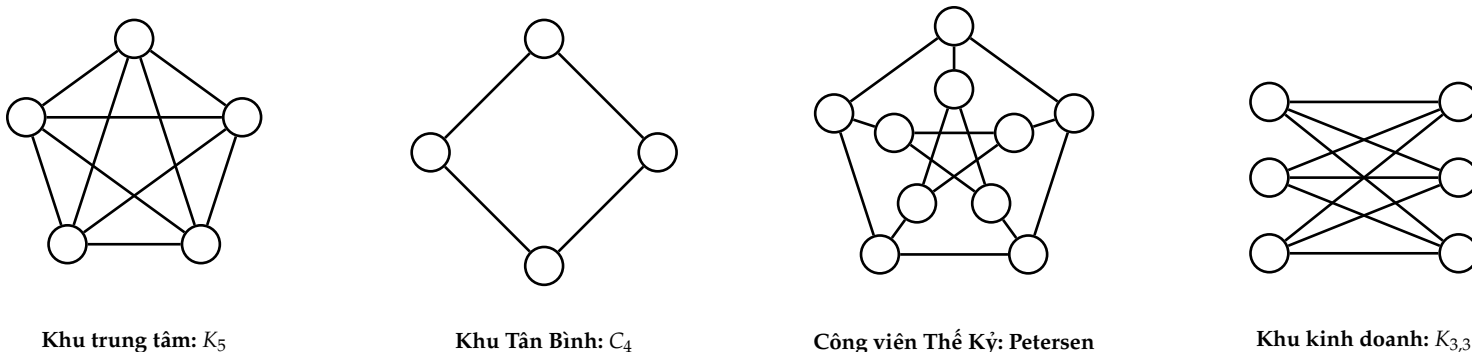
- (A) 150^2 và 150 (B) $150 \cdot 149$ và 150 (C) 150^2 và 149 (D) $150 \cdot 149$ và 149

Câu 44. Thành phố Mạng Lưới đang triển khai hệ thống WiFi miễn phí toàn thành phố. Để tránh nhiễu sóng, các khu vực tiếp giáp nhau phải được gán các tần số khác nhau.

Mỗi khu vực được biểu diễn bằng một đỉnh trong đồ thị G , và có cạnh nối hai đỉnh nếu hai khu vực đó tiếp giáp với nhau. Bài toán phân bổ tần số tương đương với bài toán tô màu đồ thị: mỗi tần số ứng với một màu, và hai đỉnh kề nhau phải có màu khác nhau.

Gọi $\Delta(G)$ là bậc lớn nhất của một đỉnh trong đồ thị G . Một định lý cơ bản trong lý thuyết đồ thị khẳng định rằng chỉ cần tối đa $\Delta(G) + 1$ màu là đủ để tô màu cho đồ thị G sao cho không có hai đỉnh kề nhau có cùng màu. Nói cách khác, chỉ cần tối đa $\Delta(G) + 1$ tần số là đủ để phân bổ tần số cho các khu vực trong thành phố Mạng Lưới.

Trong số các mô hình khu vực (đồ thị G) được mô tả trong Hình 2, đâu là mô hình bắt buộc phải sử dụng *chính xác* $\Delta(G) + 1$ tần số để đảm bảo không có nhiễu sóng?



Hình 2: Các mô hình đồ thị biểu diễn khu vực khác nhau trong thành phố Mạng Lưới

- (A) Khu Tân Bình (mô hình C_4 , các khu vực được bố trí thành hình vuông)
 (B) Khu kinh doanh (mô hình $K_{3,3}$, với 6 khu vực chia thành hai nhóm, mỗi khu trong nhóm này tiếp giáp với mọi khu của nhóm kia)
 (C) Công viên Thế Kỷ (mô hình đồ thị Petersen với 10 khu vực, mỗi khu tiếp giáp với 3 khu khác)
 (D) Khu trung tâm (mô hình K_5 , nơi mỗi khu vực tiếp giáp với tất cả khu vực khác)

Câu 45. Cho ma trận kề A của một đồ thị vô hướng G :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chọn phát biểu đúng về đồ thị G .

¹Robin Dunbar. *How Many Friends Does One Person Need?: Dunbar's Number and Other Evolutionary Quirks*. Harvard University Press, 2010.

- ☒ A Mọi đỉnh trong đồ thị G đều có cùng bậc
☐ B Đồ thị G là đồ thị hai phần
☐ C Đồ thị G có chu trình Hamilton
☐ D Đồ thị G có chu trình Euler

Câu 46. Chọn phát biểu sai trong các phát biểu sau.

- ☒ A Đồ thị con của một đồ thị phẳng là một đồ thị phẳng
☐ B Đồ thị con của một cây là một cây
☐ C Đồ thị con của một đồ thị đầy đủ có thể không phải là một đồ thị đầy đủ
☐ D Đồ thị con của một đồ thị không phẳng có thể là một đồ thị phẳng

Câu 47. Cho ma trận kề A của một đồ thị có hướng G :

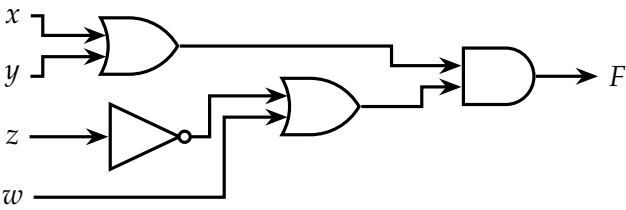
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chọn phát biểu đúng về đồ thị G .

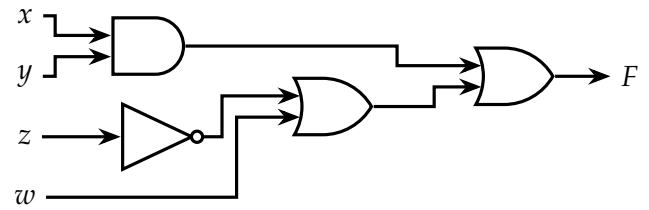
- ☒ A G có chu trình đơn độ dài 5
☐ B G không phải là đồ thị liên thông mạnh
☐ C G có đúng hai thành phần liên thông mạnh
☐ D Mọi đỉnh trong G đều có bậc vào bằng bậc ra

Câu 48. Cho biểu thức đại số Boole $F(x, y, z, w) = (x + y) \cdot (\bar{z} + w)$.

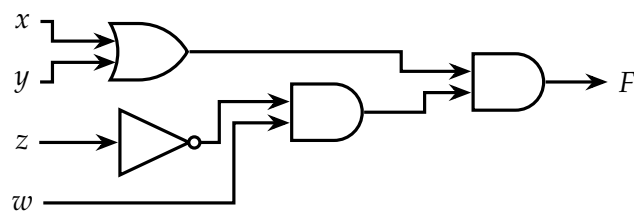
Hãy chọn mạch logic trong Hình 3 thể hiện đúng biểu thức $F(x, y, z, w)$.



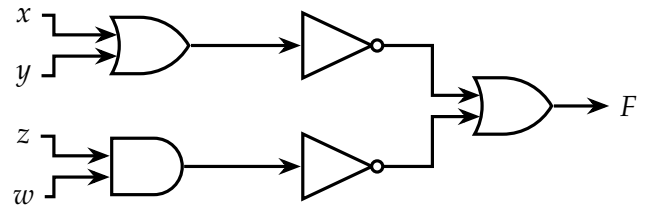
Mạch A



Mạch B



Mạch C



Mạch D

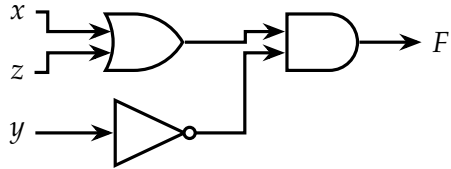
Hình 3: Các mạch logic

- ☒ A Mạch A
☐ B Mạch C
☐ C Mạch B
☐ D Mạch D

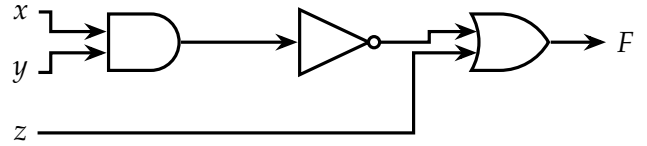
Câu 49. Cho bảng chân trị của hàm Boolean $F(x, y, z)$ như sau:

x	y	z	$F(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

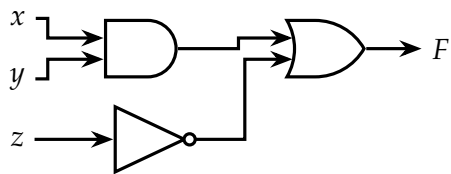
Hãy chọn mạch logic trong Hình 4 thể hiện đúng hàm $F(x, y, z)$.



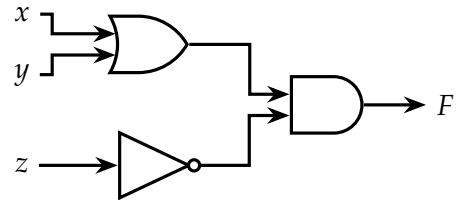
Mạch A



Mạch B



Mạch C



Mạch D

Hình 4: Các mạch logic

☒ A Mạch C

☐ B Mạch D

☐ C Mạch B

☐ D Mạch A

Câu 50. Trong đại số Boole, xét biểu thức $F(x, y, z) = (x + y) \cdot (\bar{x} + z)$.

Biểu thức nào sau đây tương đương với $F(x, y, z)$?

☒ A $x \cdot z + y \cdot \bar{x} + y \cdot z$

☐ B $x \cdot \bar{x} + y \cdot z$

☐ C $x \cdot \bar{x} + y + z$

☐ D $x \cdot z + y \cdot \bar{x}$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 002

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. B	08. C	16. A	24. B	32. C	39. C	46. B
02. B	09. A	17. C	25. B	33. D	40. C	47. A
03. A	10. C	18. C	26. C	34. A	41. D	48. A
04. D	11. C	19. A	27. D	35. B	42. A	49. B
05. C	12. A	20. A	28. B	36. B	43. B	50. A
06. B	13. B	21. B	29. A	37. D	44. D	
07. C	14. A	22. C	30. A	38. D	45. C	
	15. A	23. A	31. C			

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức