VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Lôgic mệnh đề
- Mệnh đề
- Toán tử lôgic và bảng chân trị
- Lôgic và các toán tử bit

Các mệnh đề tương đương
- Phân loại mệnh đề
- Tương đương lôgic

Lôgic vị từ
- Vị từ
- Lượng từ
- Phủ định với lượng từ
- Lồng các lượng từ

Chứng minh
- Một số thuật ngữ
- Một số phương pháp chứng minh
- Ví dụ và Bài tập

Mệnh đề

Một *mệnh đề (proposition)* là một phát biểu đúng (True) hoặc sai (False), chứ không thể vừa đúng vừa sai

- ✔ Hà Nội là thủ đô của Việt Nam
- ✔ $1 = 2$
- ✔ $1^3 + \cdots + 9^3 = (20 + 25)^2 = 2025$
- ✔ Mọi số chẵn lớn hơn hoặc bằng 4 là tổng của hai số nguyên tố (Giả thuyết Goldbach)
- ✘ Mấy giờ rồi? [Câu hỏi]
- ✘ Hãy đọc quyển sách này [Mệnh lệnh]
- ✘ Thời tiết hôm nay lạnh quá [Ý kiến, Cảm thán]
- ✘ $x + 1 = 2$ [Đúng/sai tùy vào x]

Bài tập 1

Câu nào sau đây là một mệnh đề?

(1) Trái Đất là một hành tinh
(2) $1 + 2$
(3) $1 + 2 = 3$
(4) Hôm nay trời mưa
(5) Bạn có nói tiếng Anh không?
(6) $x + y = 5$
(7) A ha ha ha ha
(8) Hãy đưa cho tôi quyển sách kia
(9) Rất tốt!
(10) Nếu $x = 3, y = 4, z = 5$ thì $x^2 + y^2 = z^2$

Bài tập 2

Khẳng định "Phát biểu này là sai" có phải là một mệnh đề lôgic hay không? Vì sao?

- Ta thường sử dụng các chữ cái $p, q, r, s, \ldots$ để ký hiệu các mệnh đề
- Mệnh đề đúng có *giá trị chân lý đúng* T (True). Mệnh đề sai có *giá trị chân lý sai* F (False)
- *Mệnh đề phức hợp (compound proposition)* được xây dựng bằng cách tổ hợp một hoặc nhiều mệnh đề thông qua các *toán tử lôgic (logical operators)*. Ngược lại, *mệnh đề nguyên tử (atomic proposition)* không thể biểu diễn được qua các mệnh đề đơn giản hơn

Phủ định	NOT	$\neg$
Phép hội	AND	$\wedge$
Phép tuyển	OR	$\vee$
Phép tuyển loại	XOR	$\oplus$
Phép kéo theo	IMPLIES	$\rightarrow$
Phép tương đương	IFF	$\leftrightarrow$

- Mối quan hệ giữa các giá trị chân lý của các mệnh đề được thể hiện thông qua *bảng chân trị (truth table)*

Ví dụ 1

Xét các mệnh đề sau:

(1) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam [Mệnh đề nguyên tử]

(2) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam và Hà Nội là một trong hai đô thị loại đặc biệt của Việt Nam [Mệnh đề phức hợp]

(3) Hà Nội là thủ đô và đồng thời là một trong hai đô thị loại đặc biệt của Việt Nam [Mệnh đề phức hợp]

- *Phủ định (negation)* của mệnh đề p, ký hiệu $\neg p$ hoặc $\overline{p}$, là mệnh đề "không phải là p". Giá trị chân lý $\neg p =$ T khi và chỉ khi $p =$ F và $\neg p =$ F khi và chỉ khi $p =$ T
  - Với $p :=$ "2 là số chẵn" thì $\neg p :=$ "2 không là số chẵn"
- Bảng chân trị

p	$\neg p$
T	F
F	T

- *Hội (Conjunction)* của hai mệnh đề p và q, ký hiệu $p \wedge q$ hoặc pq, là mệnh đề "p và q". Giá trị chân lý $p \wedge q =$ T khi và chỉ khi cả p và q đều nhận giá trị T, và trong các trường hợp còn lại $p \wedge q =$ F
  - Với $p :=$ "2 là số chẵn" và $q :=$ "2 là số nguyên tố" thì $p \wedge q :=$ "2 là số chẵn và 2 là số nguyên tố"
- Bảng chân trị

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- *Tuyển (Disjunction/Inclusive Or)* của hai mệnh đề p và q, ký hiệu $p \vee q$ hoặc $p + q$, là mệnh đề "p hoặc q". Giá trị chân lý $p \vee q =$ F khi và chỉ khi cả p và q đều nhận giá trị F, và trong các trường hợp còn lại $p \vee q =$ T
  - Với $p :=$ "2 là số chẵn" và $q :=$ "2 là số nguyên tố" thì $p \vee q :=$ "2 là số chẵn hoặc 2 là số nguyên tố"
- Bảng chân trị

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- *Tuyển loại (Exclusive Or)* của hai mệnh đề p và q, ký hiệu $p \oplus q$, là mệnh đề "hoặc p hoặc q". Giá trị chân lý $p \oplus q =$ T khi và chỉ khi chính xác một trong hai mệnh đề p và q nhận giá trị T, và trong các trường hợp còn lại $p \oplus q =$ F
  - Với $p :=$ "2 là số chẵn" và $q :=$ "2 là số nguyên tố" thì $p \oplus q :=$ "Hoặc 2 là số chẵn hoặc 2 là số nguyên tố, nhưng không phải cả hai"
- Bảng chân trị

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- **Chú ý:** Khi $p =$ T và $q =$ T thì $p + q =$ T nhưng $p \oplus q =$ F

- Mệnh đề *kéo theo (implication)* $p \to q$, với p, q là hai mệnh đề cho trước, là mệnh đề "nếu p, thì q". Giá trị chân lý $p \to q =$ F khi và chỉ khi $p =$ T và $q =$ F, và trong mọi trường hợp còn lại $p \to q =$ T
  - Ta gọi p là "giả thiết (hypothesis)" và q là "kết luận (conclusion)". Ta cũng nói "p là điều kiện đủ (sufficient) cho q" và "q là điều kiện cần (necessary) cho p"
  - Với $p :=$ "2 là số chẵn" và $q :=$ "2 là số nguyên tố" thì $p \to q :=$ "Nếu 2 là số chẵn, thì 2 là số nguyên tố"
- Bảng chân trị

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- **Chú ý:** Giữa p và q *không nhất thiết có quan hệ nguyên nhân-kết quả*. Ví dụ, $p \to q =$ F không nhất thiết là "từ p không suy ra q" mà đơn giản chỉ là $p =$ T và $q =$ F

Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

- Từ $p \to q$ ta có thể xây dựng một số mệnh đề mới
  - $q \to p$ là *mệnh đề đảo (converse)* của $p \to q$
  - $\neg q \to \neg p$ là *mệnh đề phản đảo (contrapositive)* của $p \to q$
  - $\neg p \to \neg q$ là *mệnh đề nghịch đảo (inverse)* của $p \to q$
- Ví dụ với $p \to q :=$ “Nếu 2 là số chẵn, thì 2 là số nguyên tố”
  - $q \to p :=$ “Nếu 2 là số nguyên tố, thì 2 là số chẵn”
  - $\neg q \to \neg p :=$ “Nếu 2 không là số nguyên tố, thì 2 không là số chẵn”
  - $\neg p \to \neg q :=$ “Nếu 2 không là số chẵn, thì 2 không là số nguyên tố”

Bài tập 3

Xây dựng bảng chân trị cho các mệnh đề trên.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$q \to p$	$\neg q \to \neg p$	$\neg p \to \neg q$
T	T			T			
T	F			F			
F	T			T			
F	F			T			

- Mệnh đề *tương đương (bi-implication)* $p \leftrightarrow q$, với p, q là hai mệnh đề cho trước, là mệnh đề "p khi và chỉ khi q". Giá trị chân lý $p \leftrightarrow q =$ T khi và chỉ khi p và q nhận cùng giá trị, và trong các trường hợp khác $p \leftrightarrow q =$ F
  - Với $p :=$ "2 là số chẵn" và $q :=$ "2 là số nguyên tố", ta có $p \leftrightarrow q :=$ "2 là số chẵn khi và chỉ khi 2 là số nguyên tố"
- Bảng chân trị

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Lôgic mệnh đề

Toán tử lôgic và bảng chân trị

- Tổng kết các toán tử lôgic đã đề cập

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T

  - Toán tử $\neg$ được gọi là một *toán tử một ngôi (unary operator)*
  - Các toán tử $\wedge, \vee, \oplus, \to, \leftrightarrow$ được gọi là các *toán tử hai ngôi (binary operator)*
- *Thứ tự ưu tiên* của các toán tử lôgic trong một mệnh đề phức hợp: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. Nên sử dụng *ngoặc đơn* "(" và ")" để xác định thứ tự ưu tiên
  - $\neg p \wedge q$ nghĩa là $(\neg p) \wedge q$ chứ không phải $\neg(p \wedge q)$
  - $p \wedge q \to r$ nghĩa là $(p \wedge q) \to r$ chứ không phải $p \wedge (q \to r)$

Bài tập 4

Cho các mệnh đề $p :=$ "Tôi mua một vé xổ số Vietlott" và $q :=$ "Tôi trúng giải đặc biệt 200 tỷ VNĐ". Hãy mô tả bằng câu thông thường các mệnh đề phức hợp sau:

(a) $\neg p$

(b) $p \vee q$

(c) $p \rightarrow q$

(d) $p \wedge q$

(e) $p \leftrightarrow q$

(f) $\neg p \rightarrow \neg q$

(g) $\neg p \wedge \neg q$

(h) $\neg p \vee (p \wedge q)$

Ví dụ 2

Xây dựng bảng chân trị cho mệnh đề $(p \vee \neg q) \to q$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \to q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

Ví dụ 3

Xây dựng bảng chân trị cho mệnh đề $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \oplus q)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$	$\neg(p \oplus q)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \oplus q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T

- Một *bit* (**bi**nary digi**t** = chữ số nhị phân) có giá trị 0 hoặc 1
- Sử dụng bit để biểu diễn giá trị chân lý: 1 cho T và 0 cho F
- Một *chuỗi nhị phân độ dài n* là một dãy sắp thứ tự $x_1x_2\dots x_n$ trong đó mỗi x_i là một bit ($1 \leq i \leq n$).
  - Ví dụ, 1001101010 là một chuỗi nhị phân độ dài 10
- Các *toán tử bit*: $\overline{}$ (NOT), $\wedge$ (AND), $\vee$ (OR), $\oplus$ (XOR)

x	y	$\overline{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \oplus y$
1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0

Tính toán với chuỗi nhị phân: thực hiện theo từng bit

- $\overline{x_1 \dots x_n} = (\overline{x_1}) \dots (\overline{x_n})$
- $x_1 \dots x_n \wedge y_1 \dots y_n = (x_1 \wedge y_1) \dots (x_n \wedge y_n)$
- $x_1 \dots x_n \vee y_1 \dots y_n = (x_1 \vee y_1) \dots (x_n \vee y_n)$
- $x_1 \dots x_n \oplus y_1 \dots y_n = (x_1 \oplus y_1) \dots (x_n \oplus y_n)$

Bài tập 5

(a) $\overline{11010} =$

(b) $11010 \vee 10001 =$

(c) $11010 \wedge 10001 =$

(d) $11010 \oplus 10001 =$

Các mệnh đề tương đương
Phân loại mệnh đề

- Một *hằng đúng (tautology)* là một mệnh đề phức hợp luôn luôn đúng với mọi giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần
  - Ký hiệu $\mathbf{T}$
  - $p \vee \neg p$
- Một *mâu thuẫn (contradiction)* là một mệnh đề phức hợp luôn luôn sai với mọi giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần
  - Ký hiệu $\mathbf{F}$
  - $p \wedge \neg p$
- Một *tiếp liên (contingency)* là một mệnh đề phức hợp không phải là hằng đúng cũng không phải là mâu thuẫn
  - $(p \vee q) \to r$

- Mệnh đề phức hợp p *tương đương lôgic (logically equivalent)* với mệnh đề phức hợp q, ký hiệu $p \equiv q$ hoặc $p \Leftrightarrow q$, khi và chỉ khi mệnh đề $p \leftrightarrow q$ là một hằng đúng
- **Chú ý:** p và q là tương đương lôgic khi và chỉ khi p và q cùng nhận một giá trị chân lý giống nhau trong mỗi hàng tương ứng của các bảng chân trị của chúng

Ví dụ 4

Chứng minh rằng $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (luật De Morgan)

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T

Bài tập 6

Chứng minh các tương đương lôgic sau bằng bảng chân trị

(a) $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ (b) $p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

Các mệnh đề tương đương
Tương đương lôgic

Một số tương đương lôgic quan trọng

Tên gọi	Tương đương lôgic
Luật đồng nhất (Identity laws)	$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$
Luật nuốt (Domination laws)	$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
Luật lũy đẳng (Idempotent laws)	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
Luật phủ định kép (Double negation laws)	$\neg(\neg p) \equiv p$
Luật giao hoán (Commutative laws)	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Luật kết hợp (Associative laws)	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Luật phân phối (Distributive laws)	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Các mệnh đề tương đương
Tương đương lôgic

Một số tương đương lôgic quan trọng (tiếp)

Tên gọi	Tương đương lôgic
Luật De Morgan (De Morgan's laws)	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Luật hấp thụ (Absorption laws)	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Luật phủ định (Negation laws)	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$

Chú ý: Trong bảng các tương đương lôgic quan trọng ở trên, $\mathbf{T}$ là một mệnh đề phức hợp luôn đúng (hằng đúng) và $\mathbf{F}$ là một mệnh đề phức hợp luôn sai (mâu thuẫn)

Bài tập 7

Chứng minh các tương đương lôgic quan trọng nêu trên bằng cách lập bảng chân trị

Ví dụ 5

Chứng minh $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ và $\neg p \wedge \neg q$ là tương đương lôgic bằng cách sử dụng các tương đương lôgic đã biết

$$
\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg((p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)) && \text{Luật phân phối} \\
&\equiv \neg(\mathbf{T} \wedge (p \vee q)) && \text{Luật phủ định} \\
&\equiv \neg((p \vee q) \wedge \mathbf{T}) && \text{Luật giao hoán} \\
&\equiv \neg(p \vee q) && \text{Luật đồng nhất} \\
&\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{Luật De Morgan}
\end{aligned}
$$

Bài tập 8

Kiểm tra lại ví dụ trên bằng cách lập bảng chân trị

Các mệnh đề tương đương
Tương đương lôgic

- Một số tương đương lôgic liên quan đến phép kéo theo

(1) $p \to q \equiv \neg p \vee q$

(2) $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

(3) $p \vee q \equiv \neg p \to q$

(4) $p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$

(5) $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

(6) $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$

(7) $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$

(8) $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$

(9) $(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

- Một số tương đương lôgic liên quan đến phép tương đương

(10) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

(11) $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$

(12) $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

(13) $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Bài tập 9

Chứng minh các tương đương lôgic trên bằng cách lập bảng chân trị hoặc sử dụng các tương đương lôgic đã biết

Ví dụ 6

Chứng minh $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ là một hằng đúng

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$	Từ $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$	Luật De Morgan
$\equiv (p \vee \neg p) \vee (q \vee \neg q)$	Luật giao hoán, kết hợp
$\equiv \mathbf{T} \vee \mathbf{T}$	Luật phủ định
$\equiv \mathbf{T}$	Luật nuốt

Các mệnh đề tương đương

Tương đương lôgic

- Một tập $\mathcal{C}$ các toán tử lôgic được gọi là *đầy đủ (functionally complete)* nếu mỗi mệnh đề phức hợp tương đương với một mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử trong $\mathcal{C}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee\}$ là một tập (các toán tử lôgic) đầy đủ

Ví dụ 7

Tìm một mệnh đề tương đương của $p \leftrightarrow q$ chỉ sử dụng các toán tử $\neg, \wedge, \vee$

- Ứng với *mỗi hàng có giá trị* T ở cột $p \leftrightarrow q$, ta tìm một biểu thức *chỉ đúng với các giá trị của p và q ở hàng đó, và sai với mọi giá trị khác*.

p	q	$p \leftrightarrow q$	
T	T	T	$p \wedge q$
T	F	F	
F	T	F	
F	F	T	$\neg p \wedge \neg q$

- $p \leftrightarrow q$ đúng khi *ít nhất một* biểu thức trên có giá trị T

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Chú ý: Phương pháp sử dụng trong ví dụ trên có thể áp dụng với mọi mệnh đề phức hợp. Mệnh đề thu được gọi là *dạng tuyển chuẩn tắc (disjunctive normal form - DNF)*

Các mệnh đề tương đương
Tương đương lôgic

- Một tập $\mathcal{C}$ các toán tử lôgic được gọi là *đầy đủ (functionally complete)* nếu mỗi mệnh đề phức hợp tương đương với một mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử trong $\mathcal{C}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee\}$ là một tập (các toán tử lôgic) đầy đủ

Ví dụ 7

Tìm một mệnh đề tương đương của $p \leftrightarrow q$ chỉ sử dụng các toán tử $\neg, \wedge, \vee$

- Ứng với *mỗi hàng có giá trị F* ở cột $p \leftrightarrow q$, ta tìm một biểu thức *chỉ sai với các giá trị của p và q ở hàng đó, và đúng với mọi giá trị khác*.
- $p \leftrightarrow q$ sai khi *tất cả* biểu thức trên có giá trị F

p	q	$p \leftrightarrow q$	
T	T	T	
T	F	F	$\neg p \vee q$
F	T	F	$p \vee \neg q$
F	F	T	

$$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$

Chú ý: Phương pháp sử dụng trong ví dụ trên có thể áp dụng với mọi mệnh đề phức hợp. Mệnh đề thu được gọi là *dạng hội chuẩn tắc (conjunctive normal form - CNF)*

Tìm CNF/DNF sử dụng các tương đương lôgic đã biết

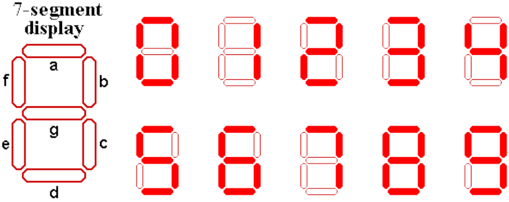
- "Khử" $\oplus$, $\to$, và $\leftrightarrow$ bằng các tương đương lôgic đã biết
  - $p \to q \equiv \neg p \vee q$
  - $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
  - $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
- Giảm "phạm vi" của các dấu phủ định $\neg$ thông qua luật De Morgan và luật phủ định kép
- Chuyển sang CNF hoặc DNF bằng cách sử dụng các luật phân phối và kết hợp

Ví dụ 8

Tìm CNF của $p \vee q \to r \wedge s$

$$\begin{aligned}
p \vee q \to r \wedge s &\equiv \neg(p \vee q) \vee (r \wedge s) && \text{Khử } \to \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s) && \text{Luật De Morgan} \\
&\equiv (\neg p \vee (r \wedge s)) \wedge (\neg q \vee (r \wedge s)) && \text{Luật phân phối} \\
&\equiv ((\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee s)) \wedge ((\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee s)) && \text{Luật phân phối} \\
&\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee s) && \text{Luật kết hợp}
\end{aligned}$$

Ví dụ 9 (Hiển thị LED 7 đoạn)



Hình: Hiển thị LED 7 đoạn (Seven-segment LED display) sử dụng rộng rãi trong nhiều thiết bị điện tử

- Ví dụ, $a =$ T nghĩa là thanh a được hiển thị (bật) và $a =$ F nghĩa là thanh a không được hiển thị (tắt)
- Số 0 tương ứng với mệnh đề lôgic F_0 thỏa mãn F_0 đúng khi và chỉ khi $a = b = c = d = e = f =$ T và $g =$ F [Tìm F_0?]
- Số 1 tương ứng với mệnh đề lôgic F_1 thỏa mãn F_1 đúng khi và chỉ khi $b = c =$ T và $a = d = e = f = g =$ F [Tìm F_1?]
- . . .

Bài tập 10

Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 và 0. (Nghĩa là, giá trị của x và y là 0 hoặc 1.) Mỗi đoạn mã sau đây bao gồm một điều kiện dựa trên x, y, và các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia). Hãy viết lại các điều kiện này sử dụng ngôn ngữ của lôgic mệnh đề.

(a) `if x * y ...`
(b) `if x + y ...`
(c) `if 2 - x - y ...`
(d) `if x * (1 - y) ...`
(e) `if x * (1 - y) + (1 - x) * y ...`

Bài tập 11

Tìm CNF hoặc DNF của các mệnh đề

(a) $p \oplus q$
(b) $p \to q$
(c) $\neg p \oplus \neg q$
(d) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$

Bài tập 12

Tập các toán tử lôgic $\mathcal{C}$ sau có đầy đủ không? Vì sao?

(a) $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge\}$
(b) $\mathcal{C} = \{\neg, \vee\}$
(c) $\mathcal{C} = \{\wedge, \vee\}$

Bài tập 13

Cho p, q, r là các mệnh đề nguyên tử. Hãy sử dụng các mệnh đề trên và các toán tử lôgic $\neg, \wedge, \vee$ để biểu diễn mệnh đề sau

"Ít nhất hai trong ba mệnh đề p, q, r là đúng"

Bài tập 14

Chứng minh các tương đương lôgic sau

(a) $\neg(p \oplus q) \equiv p \leftrightarrow q$
(b) $\neg p \to (q \to r) \equiv q \to (p \vee r)$

Vị từ

Một *vị từ (predicate)* là một *hàm mệnh đề (propositional function)* (từ tập các đối tượng đến tập các mệnh đề) mô tả thuộc tính của các đối tượng và mối quan hệ giữa chúng

- Các biến (đối tượng) thường được ký hiệu bởi các chữ cái $x, y, z, \dots$ và có thể được thay thế bằng các giá trị cụ thể từ một *miền xác định (domain)* $\mathcal{D}$ tương ứng cho trước
- Các chữ in hoa $P, Q, R, \dots$ thường được dùng để ký hiệu các hàm mệnh đề (vị từ)
- Với $n \geq 1$, ta gọi $P(x_1, \dots, x_n)$ là *vị từ (n-ngôi) ((n-place) predicate) xác định trên miền $\mathcal{D} = D_1 \times \cdots \times D_n$* nếu $P(a_1, \dots, a_n)$ là một mệnh đề với bộ $(a_1, \dots, a_n)$ bất kỳ trong $\mathcal{D}$ ($a_1 \in D_1, \dots, a_n \in D_n$)

Ví dụ 10

- $P(x) :=$ "x lớn hơn 3" ($P :=$ "lớn hơn 3" và x là một biến) với x là số tự nhiên. *$P(x)$ là vị từ xác định trên miền $\mathcal{D} = \mathbb{N}$*
- $Q(x, y, z) :=$ "x cho y điểm z" với x, y là tên riêng và z là số tự nhiên. *$Q(x, y, z)$ là vị từ xác định trên miền $\mathcal{D} = T \times T \times \mathbb{N}$ trong đó T là tập các tên riêng*
- *$P(x)$ không phải là mệnh đề* nhưng *$P(3)$ là mệnh đề*. *$Q(x, y, z)$ không phải là mệnh đề* nhưng *$Q($Tý, Tèo$, 10)$ là mệnh đề*

Bài tập 15

$P(x) :=$ "$x > 0$" là vị từ xác định trên miền $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$. Tìm giá trị chân lý của các mệnh đề sau

(a) $P(3) \vee P(-1)$

(b) $P(3) \wedge P(-1)$

(c) $P(3) \to P(-1)$

(d) $P(3) \to \neg P(-1)$

Lượng từ

Lượng từ (quantifier) (ví dụ như *tất cả*, *nhiều*, *một số*, *không có*, v.v...) thường được sử dụng với vị từ để định lượng (đếm) các đối tượng (biến) "thỏa mãn" vị từ đó

- Hai lượng từ quan trọng nhất

Lượng từ	Ký hiệu
với mọi (universal quantifier)	$\forall$
tồn tại (existential quantifier)	$\exists$

- $\forall x\, P(x)$ nghĩa là "*với mọi* giá trị của x trong miền xác định $\mathcal{D}$, $P(x)$ đúng"
- $\exists x\, P(x)$ nghĩa là "*tồn tại* giá trị của x trong miền xác định $\mathcal{D}$ (nghĩa là có thể có một hoặc nhiều giá trị thỏa mãn), $P(x)$ đúng"
- *$P(x)$ không phải là mệnh đề* nhưng *$\forall x\, P(x)$ và $\exists x\, P(x)$ là mệnh đề*

- $\forall x\, P(x)$: *với mọi* giá trị của x trong miền xác định $\mathcal{D}$, $P(x)$ đúng
- $\forall x\, P(x)$ là
  - *đúng* nếu $P(x)$ đúng với mọi x trong $\mathcal{D}$
  - *sai* nếu $P(x)$ sai với ít nhất một giá trị của x trong $\mathcal{D}$
  - Với $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và $P(x) :=$ "$x^2 \geq 0$", mệnh đề $\forall x\, P(x)$ đúng
  - Với $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và $P(x) :=$ "$x^2 - 1 \geq 0$", mệnh đề $\forall x\, P(x)$ sai
- Một *phản ví dụ (counterexample)* của mệnh đề $\forall x\, P(x)$ là một giá trị x trong miền $\mathcal{D}$ sao cho $P(x)$ sai
- Nếu $\mathcal{D} = \emptyset$ thì mệnh đề $\forall x\, P(x)$ đúng
- Nếu có thể liệt kê tất cả các phần tử của $\mathcal{D}$, ví dụ như $x_1, x_2, \dots, x_n$, thì $\forall x\, P(x)$ tương đương lôgic với

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$$

Lôgic vị từ

Lượng từ “tồn tại”

- $\exists x\, P(x)$: *tồn tại* giá trị của x trong miền xác định $\mathcal{D}$ (nghĩa là có thể có một hoặc nhiều giá trị thỏa mãn), $P(x)$ đúng
- $\exists x\, P(x)$
  - *đúng* nếu $P(x)$ đúng với ít nhất một x trong $\mathcal{D}$
  - *sai* nếu $P(x)$ sai với mọi x trong $\mathcal{D}$
  - Với $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và $P(x) :=$ “$x^2 = 2$”, mệnh đề $\exists x\, P(x)$ đúng
  - Với $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$ và $P(x) :=$ “$x^2 = 2$”, mệnh đề $\exists x\, P(x)$ sai
- Nếu $\mathcal{D} = \emptyset$ thì mệnh đề $\exists x\, P(x)$ sai
- Nếu có thể liệt kê tất cả các phần tử của $\mathcal{D}$, ví dụ như $x_1, x_2, \dots, x_n$, thì $\exists x\, P(x)$ tương đương lôgic với

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)$$

Ví dụ 11

Mô tả câu “Tất cả sinh viên trong lớp này đã học môn Lập trình Java” bằng vị từ và lượng từ

- $J(x) :=$ “x đã học môn Lập trình Java”
- Nếu $\mathcal{D}$ là tập *các sinh viên trong lớp này* $\forall x\, J(x)$
- Nếu $\mathcal{D}$ là tập *tất cả mọi người*. Đặt $S(x) :=$ “x là sinh viên trong lớp này” $\forall x\, (S(x) \rightarrow J(x))$

Chú ý: Tại sao không phải là $\forall x\, (S(x) \wedge J(x))$?

Ví dụ 12

Mô tả câu “Một số sinh viên trong lớp này đã học môn Lập trình Java” bằng vị từ và lượng từ

- $J(x) :=$ “x đã học môn Lập trình Java”
- Nếu $\mathcal{D}$ là tập *các sinh viên trong lớp này* $\exists x\, J(x)$
- Nếu $\mathcal{D}$ là tập *tất cả mọi người*. Đặt $S(x) :=$ “x là sinh viên trong lớp này” $\exists x\, (S(x) \wedge J(x))$

Ví dụ 13

Mô tả câu "*Tồn tại duy nhất* một giá trị của x (trong miền xác định $\mathcal{D}$) sao cho $P(x)$ đúng" (Ta cũng viết "$\exists! x\, P(x)$") bằng các lượng từ $\forall$ và $\exists$

- $\exists x\, P(x) \land \forall x_1 \forall x_2\, ((P(x_1) \land P(x_2)) \to (x_1 = x_2))$
- $\exists x\, (P(x) \land \forall y\, (P(y) \to (y = x)))$

Bài tập 16

Giả sử miền xác định của tất cả các biến là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Các mệnh đề sau là đúng hay sai?

(a) $\forall x\, (x^2 \neq x)$

(b) $\forall x\, (x^2 \geq x)$

(c) $\forall x\, (x^2 \neq 2)$

Bài tập 17

Hãy mô tả định nghĩa số chính phương sau bằng vị từ và lượng từ: "Một số tự nhiên được gọi là số chính phương nếu nó là bình phương của một số tự nhiên nào đó"

Chú ý

Các tương đương lôgic đã biết trong lôgic mệnh đề vẫn đúng trong lôgic vị từ

Ví dụ 14

Giả sử biến x nhận giá trị từ miền $\mathcal{D}$. Ta chứng minh $\forall x\,(P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x\,(Q(x) \land P(x))$. Cụ thể, ta chứng minh hai điều

(1) *Nếu* $\forall x\,(P(x) \land Q(x))$ *đúng thì* $\forall x\,(Q(x) \land P(x))$ *đúng*
- Giả sử $\forall x\,(P(x) \land Q(x))$ đúng. Do đó, với mọi $a \in \mathcal{D}$, mệnh đề $P(a) \land Q(a)$ đúng. Theo luật giao hoán, $Q(a) \land P(a)$ đúng. Suy ra $Q(a) \land P(a)$ đúng với mọi $a \in \mathcal{D}$. Do đó, $\forall x\,(Q(x) \land P(x))$ đúng

(2) *Nếu* $\forall x\,(Q(x) \land P(x))$ *đúng thì* $\forall x\,(P(x) \land Q(x))$ *đúng*
- Giả sử $\forall x\,(Q(x) \land P(x))$ đúng. Do đó, với mọi $a \in \mathcal{D}$, mệnh đề $Q(a) \land P(a)$ đúng. Theo luật giao hoán, $P(a) \land Q(a)$ đúng. Suy ra $P(a) \land Q(a)$ đúng với mọi $a \in \mathcal{D}$. Do đó, $\forall x\,(P(x) \land Q(x))$ đúng

Chú ý

Không nên sử dụng bảng chân trị để chứng minh hai mệnh đề có vị từ và lượng từ là tương đương lôgic

- Trong trường hợp miền xác định $\mathcal{D}$ là *vô hạn*, ta không xây dựng được bảng chân trị
- Với phần lớn các phát biểu có lượng từ và vị từ, miền xác định luôn là miền vô hạn
- Tất nhiên, khi miền xác định $\mathcal{D}$ là hữu hạn, có thể sử dụng bảng chân trị
  - Giả sử $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_n\}$
  - $\forall x\, P(x) \equiv P(x_1) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$
  - $\exists x\, P(x) \equiv P(x_1) \vee \cdots \vee P(x_n)$

Bài tập 18

Giả sử biến x nhận giá trị từ miền $\mathcal{D}$. Chứng minh

(a) $\forall x\,(P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x))) \equiv$
$\forall x\,((P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(x) \vee R(x)))$

(b) $\forall x\,\neg(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$

Bài tập 19

Giả sử biến x nhận giá trị từ miền $\mathcal{D}$.

(a) Chứng minh $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$

(b) Các mệnh đề $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ và $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$ có tương đương lôgic hay không? Vì sao?

Bài tập 20

Giả sử biến x nhận giá trị từ miền $\mathcal{D}$.

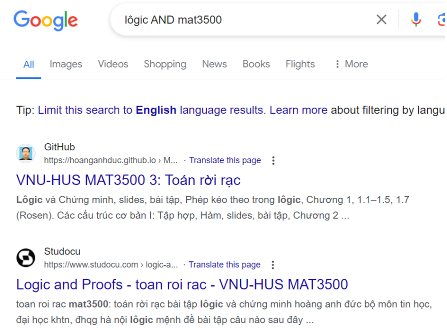
(a) Chứng minh $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x\,P(x)) \vee (\exists x\,Q(x))$

(b) Các mệnh đề $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ và $(\exists x\,P(x)) \wedge (\exists x\,Q(x))$ có tương đương lôgic hay không? Vì sao?

Ví dụ 15

Các *cộng cụ tìm kiếm (search engine)* như Google, Bing, Yahoo, v.v... *cho phép người dùng sử dụng các toán tử lôgic (AND, OR, NOT) trong yêu cầu tìm kiếm (query)* của họ.

Ví dụ, yêu cầu (query) *"lôgic AND mat3500"* sẽ trả lại kết quả là các trang web có *chứa đồng thời từ "lôgic" và từ "mat3500"*. Nói một cách đơn giản, *một yêu cầu tìm kiếm có thể được coi như là một vị từ Q* (với tập xác định là tập hợp tất cả các trang web có trong cơ sở dữ liệu); công cụ tìm kiếm sẽ *trả lại (theo một thứ tự nào đó) một danh sách các trang web p sao cho mệnh đề $Q(p)$ đúng*



Bài tập 21

Tìm hiểu một số cách tìm kiếm với Google sử dụng các toán tử lôgic

Bài tập 22 ($\star$)

Xét các yêu cầu tìm kiếm sau:

Q_A: "python AND algorithm AND NOT computer"
Q_B: "(computer OR algorithm) AND python"
Q_C: "python AND NOT (computer OR algorithm OR program)"

Hãy mô tả hoặc lấy ví dụ (một trang web, một câu nào đó, v.v...) về kết quả trả lại trong các trường hợp sau:

(a) Kết quả trả lại thỏa mãn yêu cầu Q_A
(b) Kết quả trả lại thỏa mãn yêu cầu Q_A và không thỏa mãn yêu cầu Q_B
(c) Kết quả trả lại thỏa mãn yêu cầu Q_A và Q_B nhưng không thỏa mãn yêu cầu Q_C

Ví dụ 16

- Ở mức độ nào đó, chúng ta có thể coi một *cơ sở dữ liệu (database)* như là một bảng
  - Các hàng tương ứng với các *cá thể (individual entity)* nào đó
  - Các cột tương ứng với các *trường (field)* mô tả dữ liệu liên quan đến các cá thể
- Một *truy vấn cơ sở dữ liệu (database query)* có thể xem như là một vị từ $Q(x)$ có chứa các điều kiện để kiểm tra các giá trị từ các cột và các toán tử lôgic liên kết các điều kiện này.
- Khi một truy vấn cơ sở dữ liệu được đưa vào, *hệ quản trị cơ sở dữ liệu (database management system)* sẽ trả lại một danh sách các hàng (ứng với các thực thể) trong cơ sở dữ liệu thỏa mãn điều kiện đề ra trong truy vấn
- Chúng ta có thể nghĩ về hình thức truy cập cơ sở dữ liệu này *từ góc nhìn của lôgic vị từ*: *để phản hồi truy vấn (query) Q, hệ thống trả lại một danh sách các hàng, trong đó mỗi hàng x thỏa mãn điều kiện $Q(x)$ đúng*

Bảng: Ví dụ một cơ sở dữ liệu. Nếu muốn tìm danh sách tất cả các sinh viên có GPA (grade point averages - điểm trung bình) tối thiểu 3.4 và nếu đã học ít nhất một khóa học về khoa học máy tính (computer science - CS) thì phải đến từ Hawaii, ta có thể truy vấn $[\mathit{GPA}(x) \geq 3.4] \land [\mathit{takenCS}(x) \to (\mathit{home}(x) = \text{Hawaii})]$. Kết quả trả lại với cơ sở dữ liệu này là Charlie.

name	**GPA**	**CS taken?**	**home**	**age**
Alice	4.0	yes	Alberta	20
Bob	3.14	yes	Bermuda	19
Charlie	3.54	no	Cornwall	18
Desdemona	3.8	yes	Delaware	17

- Trước đó, ta thường phải chỉ rõ miền xác định $\mathcal{D}$ có chứa các giá trị của biến trước khi phát biểu mệnh đề với vị từ và lượng từ. Để thuận tiện, *có thể chỉ ra $\mathcal{D}$ ngay trong mệnh đề*
  - $\forall x > 0\, P(x)$ nghĩa là "Với mọi số $x > 0$, $P(x)$ đúng". ($\mathcal{D}$ là tập tất cả các số lớn hơn không.) Thực ra, đây là cách viết ngắn gọn của mệnh đề $\forall x\, Q(x)$ trong đó $Q(x) := (x > 0) \to P(x)$
  - $\exists x > 0\, P(x)$ nghĩa là "Tồn tại số $x > 0$, $P(x)$ đúng". ($\mathcal{D}$ là tập tất cả các số lớn hơn không.) Thực ra, đây là cách viết ngắn gọn của mệnh đề $\exists x\, Q(x)$ trong đó $Q(x) := (x > 0) \wedge P(x)$
  - Chú ý:
    - $\forall x > 0\, P(x) \not\equiv \forall x\, (x > 0 \wedge P(x))$
    - $\exists x > 0\, P(x) \not\equiv \exists x\, (x > 0 \to P(x))$
- Các lượng từ $\forall$ và $\exists$ có *thứ tự ưu tiên cao hơn tất cả các toán tử lôgic* đã đề cập
  - $\forall x\, P(x) \vee Q(x)$ *nghĩa là* $(\forall x\, P(x)) \vee Q(x)$ chứ không phải $\forall x\, (P(x) \vee Q(x))$

- Vị từ $P(x)$ có *biến tự do (free variable)* x (nghĩa là, giá trị của x không xác định)
- Lượng từ ($\forall$ hoặc $\exists$) sử dụng với một vị từ có một hoặc nhiều biến tự do "ràng buộc" những biến này, tạo thành một biểu thức có một hoặc nhiều *biến ràng buộc (bound variable)*

Ví dụ 17

- $P(x, y)$ có hai biến tự do: x và y
- $\forall x\, P(x, y)$ có một biến tự do y và một biến ràng buộc x

- Biểu thức *không có bất kỳ biến tự do nào*, ví dụ $\forall x\, P(x)$, là mệnh đề
- Biểu thức *có một hoặc nhiều biến tự do*, ví dụ $\forall x\, P(x, y)$, không là mệnh đề

- *Phủ định* của mệnh đề có lượng từ
  - $\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$
  - $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$
- Hai tương đương lôgic trên được gọi là *Luật De Morgan cho lượng từ (De Morgan's Laws for Quantifiers)*. Lý do của tên gọi này là nếu ta có thể liệt kê toàn bộ các phần tử trong miền $\mathcal{D}$, ví dụ như $x_1, \dots, x_n$, thì

$$
\begin{aligned}
\neg\forall x\, P(x) &\equiv \neg(P(x_1) \land P(x_2) \land \dots \land P(x_n)) \\
&\equiv \neg P(x_1) \lor \neg P(x_2) \lor \dots \lor \neg P(x_n) \quad \text{Luật De Morgan} \\
&\equiv \exists x\, \neg P(x) \\
\neg\exists x\, P(x) &\equiv \neg(P(x_1) \lor P(x_2) \lor \dots \lor P(x_n)) \\
&\equiv \neg P(x_1) \land \neg P(x_2) \land \dots \land \neg P(x_n) \quad \text{Luật De Morgan} \\
&\equiv \forall x\, \neg P(x)
\end{aligned}
$$

Bài tập 23

Giả sử A là một mệnh đề thỏa mãn điều kiện A đúng hay sai không phụ thuộc vào x. Giả sử miền xác định của các biến là không rỗng. Hãy chứng minh các tương đương lôgic sau

(a) $(\forall x\, P(x)) \lor A \equiv \forall x\, (P(x) \lor A)$
(b) $(\exists x\, P(x)) \lor A \equiv \exists x\, (P(x) \lor A)$
(c) $(\forall x\, P(x)) \land A \equiv \forall x\, (P(x) \land A)$
(d) $(\exists x\, P(x)) \land A \equiv \exists x\, (P(x) \land A)$
(e) $A \to \forall x\, P(x) \equiv \forall x\, (A \to P(x))$
(f) $\exists x\, P(x) \to A \equiv \forall x\, (P(x) \to A)$
(g) $A \to \exists x\, P(x) \equiv \exists x\, (A \to P(x))$
(h) $\forall x\, P(x) \to A \equiv \exists x\, (P(x) \to A)$

(**Gợi ý:** Xét từng trường hợp $A =$ T và $A =$ F)

Ví dụ 18

Ta chứng minh câu (h) trong Bài tập 23:
$\forall x\, P(x) \to A \equiv \exists x\, (P(x) \to A)$, trong đó A là mệnh đề có giá trị chân lý không phụ thuộc vào biến x

$$
\begin{aligned}
\exists x\, (P(x) \to A) &\equiv \exists x\, (\neg P(x) \lor A) && p \to q \equiv \neg p \lor q \\
&\equiv \exists x\, \neg P(x) \lor \exists x\, A && \text{Bài 20(a)} \\
&\equiv \exists x\, \neg P(x) \lor A && \text{Định nghĩa của } A \\
&\equiv \neg \forall x\, P(x) \lor A && \text{De Morgan cho lượng từ} \\
&\equiv \forall x\, P(x) \to A && p \to q \equiv \neg p \lor q
\end{aligned}
$$

Ví dụ 19

$P(x,y) :=$ "x nhỏ hơn y" xác định trên miền $\mathcal{D} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- $\exists y\, P(x,y) :=$ "có số nguyên y sao cho x nhỏ hơn y" (Biểu thức với 1 biến tự do—không phải mệnh đề)
- $\forall x\, (\exists y\, P(x,y)) :=$ "với mọi số nguyên x có số nguyên y sao cho x nhỏ hơn y" (Biểu thức với 0 biến tự do—là mệnh đề)

Bài tập 24

Cho $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \mathbb{Z}$ và $P(x,y) := x < y$. Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau

(a) $\forall x \forall y\, P(x,y)$

(b) $\forall x \exists y\, P(x,y)$

(c) $\exists x \forall y\, P(x,y)$

(d) $\exists x \exists y\, P(x,y)$

- Một số tương đương lôgic:
  - $\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y)$
  - $\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y)$
  - Để thuận tiện, có thể nối các lượng từ cùng loại
    - $\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall x, y\, P(x,y)$
- Trừ khi tất cả các lượng từ đều là $\forall$ hoặc đều là $\exists$, *thứ tự các lượng từ là quan trọng*
  - $\forall x \exists y\, P(x,y)$ *khác với* $\exists y \forall x\, P(x,y)$
  - Ví dụ, với x, y *là các số nguyên*, mệnh đề $\forall x \exists y\, (x < y)$ *đúng*, vì với mỗi x ta có thể chọn $y = x + 1$ và hiển nhiên $x < y$. Ngược lại, mệnh đề $\exists y \forall x\, (x < y)$ *sai*, vì không tồn tại số nguyên lớn nhất

Bài tập 25

Các mệnh đề sau khi nào đúng và khi nào sai?

(1) $\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y)$

(2) $\forall x \exists y\, P(x,y)$

(3) $\exists y \forall x\, P(x,y)$

(4) $\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y)$

Bài tập 26

Hãy biểu diễn phủ định của các mệnh đề sau sao cho tất cả các ký tự phủ định $\neg$ đứng ngay trước các vị từ

(a) $\forall x \exists y \forall z\, T(x, y, z)$

(b) $\forall x \exists y\, P(x, y) \lor \forall x \exists y\, Q(x, y)$

(c) $\forall x \exists y\, (P(x, y) \land \exists z\, R(x, y, z))$

(d) $\forall x \exists y\, (P(x, y) \to Q(x, y))$

Chứng minh

Một số thuật ngữ

- *Chứng minh (proof)*: một lý luận hợp lý chỉ ra tính đúng đắn của một mệnh đề toán học.
- *Tiên đề (axiom/postulate)*: một mệnh đề được giả thiết là đúng
- *Định lý (theorem)*: một mệnh đề đã được chứng minh là đúng
- *Mệnh đề (proposition)*: một định lý "không quá quan trọng"
- *Bổ đề (lemma)*: một định lý nhỏ có thể được sử dụng như một công cụ hỗ trợ chứng minh các định lý khác lớn hơn
- *Hệ quả (corollary)*: một định lý nhỏ thu được bằng cách trực tiếp áp dụng một định lý khác lớn hơn
- *Giả thuyết (conjecture)*: một mệnh đề mà tính đúng/sai của nó chưa được xác định, nhưng thường được "tin là đúng" thông qua một số bằng chứng hoặc qua kinh nghiệm, dự đoán của một chuyên gia

Mục tiêu

Chứng minh p đúng

- **Chứng minh trực tiếp (direct proof)**
- **Chứng minh gián tiếp (indirect proof):** Giả thiết $\neg p$ đúng, chứng minh $\neg p \to \mathbf{F}$ (phương pháp *Chứng minh phản chứng (Proof by Contradiction)*)
- **Chứng minh bằng cách chia trường hợp (proof by cases):** Tìm $p_1, \dots, p_n$ thỏa mãn $p \equiv p_1 \land p_2 \land \dots \land p_n$ và chứng minh p_i đúng với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. (Chia điều cần chứng minh p thành các phần nhỏ (trường hợp) $p_1, \dots, p_n$ và xét từng phần một cách riêng biệt)

Mục tiêu

Chứng minh $p \to q$ đúng

- **Chứng minh hiển nhiên (trivial proof):** Chứng minh q đúng mà không cần giả thiết gì khác
- **Chứng minh trực tiếp (direct proof):** Giả thiết p đúng, chứng minh q
- **Chứng minh gián tiếp (indirect proof)**
  - **Chứng minh phản đảo (Proof by Contraposition) ($\neg q \to \neg p$):** Giả thiết $\neg q$ đúng, chứng minh $\neg p$
  - **Chứng minh phản chứng (Proof by Contradiction):** Giả thiết $p \land \neg q$ đúng, và chỉ ra rằng điều này dẫn đến một mâu thuẫn (nghĩa là, chứng minh $(p \land \neg q) \to \mathbf{F}$)
- **Chứng minh rỗng (vacuous proof):** Chứng minh $\neg p$ đúng mà không cần giả thiết gì khác
- **Chứng minh bằng cách chia trường hợp (proof by cases):** Tìm $p_1, p_2, \dots, p_n$ thỏa mãn $p \to q \equiv (p_1 \to q) \land (p_2 \to q) \land \dots \land (p_n \to q)$ và chứng minh $p_i \to q$ đúng với từng giá trị $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Mục tiêu

Chứng minh $p \leftrightarrow q$ đúng

- $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
- Chứng minh $p \to q$ đúng và $q \to p$ đúng

Một số nguyên n là số *chẵn (even)* khi và chỉ khi $n = 2k$ với k là số nguyên nào đó; n là số *lẻ (odd)* khi và chỉ khi $n = 2k + 1$ với k là số nguyên nào đó

Định lý 1

Với mọi số nguyên n, n không thể vừa chẵn vừa lẻ

Chứng minh phản chứng.

(1) **Nhắc lại:** Để chứng minh p, ta chứng minh $\neg p \to \mathbf{F}$

(2) Giả sử tồn tại một số nguyên n vừa chẵn vừa lẻ. Ta chứng minh tồn tại mâu thuẫn

(3) Do n chẵn, $n = 2k$ với số nguyên k nào đó

(4) Do n lẻ, $n = 2j + 1$ với số nguyên j nào đó

(5) Do đó, $2k = 2j + 1$, suy ra $k - j = \frac{1}{2}$. Mệnh đề này sai với mọi số nguyên k và j, đây là một mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh

> Chứng minh sau của Định lý 1
>
> Với mọi số nguyên n, n không thể vừa chẵn vừa lẻ
>
> là sai? Tại sao?

Chứng minh phản chứng.

(1) Giả sử tồn tại một số nguyên n vừa chẵn vừa lẻ. Ta chứng minh tồn tại mâu thuẫn

(2) Do n chẵn, $n = 2k$ với số nguyên k nào đó

(3) Do n lẻ, $n = 2k + 1$ với số nguyên k nào đó

(4) Do đó, $2k = 2k + 1$, suy ra $0 = 1$. Mệnh đề này sai với mọi số nguyên k, đây là một mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh

$\square$

Bài tập 27

Chứng minh bằng phương pháp phản chứng rằng

(a) Tổng của một số vô tỷ và một số hữu tỷ là một số vô tỷ

(b) Với mọi số nguyên n, nếu $n^3 + 5$ lẻ, thì n chẵn

(c) Với mọi số nguyên n, nếu $3n + 2$ chẵn, thì n chẵn

Bài tập 28

Chứng minh rằng

(a) Có ít nhất mười ngày trong 64 ngày bất kỳ rơi vào cùng một ngày của một tuần (nghĩa là, có ít nhất mười ngày cùng là Thứ Hai, hoặc cùng là Thứ Ba, v.v...)

(b) Có ít nhất ba ngày trong 25 ngày bất kỳ rơi vào cùng một tháng của năm

Bài tập 29

Sử dụng phương pháp phản chứng, hãy chứng minh rằng $\sqrt{2}$ không phải là một số hữu tỷ

Định lý 2

Với mọi số nguyên n, nếu n là số lẻ, thì n^2 cũng là số lẻ

Chứng minh trực tiếp.

(1) Nếu n lẻ, thì $n = 2k + 1$ với k là số nguyên nào đó

(2) Do đó, $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

(3) Do đó, $n^2 = 2j + 1$ với $j = 2k^2 + 2k$ là số nguyên

(4) Theo định nghĩa, n^2 lẻ

□

Bài tập 30

Chứng minh trực tiếp các mệnh đề sau

(a) Tổng của hai số lẻ là một số chẵn
(b) Tổng của hai số chẵn là một số chẵn
(c) Bình phương của một số chẵn là một số chẵn
(d) Tích của hai số lẻ là một số lẻ

Định lý 3

Với mọi số nguyên n, nếu $3n+2$ là số lẻ, thì n cũng là số lẻ

Chứng minh phản đảo.

- **Nhắc lại:** để chứng minh $p \to q$, ta chứng minh $\neg q \to \neg p$
- *Ta chứng minh mệnh đề phản đảo: Nếu n chẵn, thì $3n+2$ cũng chẵn)*

(1) Giả sử n chẵn

(2) Do đó $n = 2k$ với số nguyên k nào đó

(3) Suy ra $3n+2 = 3(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1)$

(4) Từ đó, $3n+2 = 2j$ với $j = 3k+1$ là số nguyên, và do đó là số chẵn. Ta có điều phải chứng minh

□

Định lý 4

Với mọi số nguyên n, $n(n+1)^2$ là một số chẵn

Chứng minh bằng cách chia trường hợp.

- **Nếu n chẵn,** thì $n = 2k$ với số nguyên k nào đó. Suy ra $n(n+1)^2 = 2j$ với $j = k(2k+1)^2$ là số nguyên. Do đó, $n(n+1)^2$ là một số chẵn
- **Nếu n lẻ,** thì $n = 2k+1$ với số nguyên k nào đó. Suy ra $n(n+1)^2 = 2\ell$ với $\ell = (2k+1)2(k+1)^2$ là số nguyên. Do đó, $n(n+1)^2$ là một số chẵn

$\square$

Chứng minh sau của mệnh đề

(Với mọi số nguyên n) Ta có $-|n| \leq n \leq |n|$

là sai. Tại sao?

Chứng minh bằng cách chia trường hợp.

(1) Nếu $n > 0$, ta có $-n \leq 0 \leq n$. Theo định nghĩa, $|n| = n$ và do đó $-|n| = -n$. Suy ra $-|n| = -n \leq 0 \leq n = |n|$

(2) Nếu $n < 0$, ta có $n \leq 0 \leq -n$. Theo định nghĩa, $|n| = -n$ và do đó $-|n| = n$. Suy ra $-|n| = n \leq 0 \leq -n = |n|$

□

Định lý 5

Với mọi số nguyên n, nếu n vừa chẵn vừa lẻ, thì $n^2 = n + n$

Chứng minh rỗng.

- **Nhắc lại:** để chứng minh $p \to q$, ta chứng minh $\neg p$ mà không cần bất cứ giả thiết nào

(1) Mệnh đề "n vừa chẵn vừa lẻ" sai với mọi số nguyên n

(2) Ta có điều phải chứng minh (Tập các giả thiết là rỗng)

□

Định lý 6

Với mọi số nguyên n, nếu n là tổng của hai số nguyên tố, thì hoặc n chẵn hoặc n lẻ

Chứng minh hiển nhiên.

- **Nhắc lại:** để chứng minh $p \to q$, ta chứng minh q mà không cần bất cứ giả thiết nào

(1) Với mọi số nguyên n, mệnh đề "hoặc n chẵn hoặc n lẻ" đúng

(2) Do đó, kết luận của mệnh đề cần chứng minh luôn đúng, bất luận giả thiết là đúng hay sai

(3) Hiển nhiên là mệnh đề cần chứng minh luôn đúng

□

Chứng minh sau của mệnh đề

$$1 = 2$$

là sai. Tại sao?

Chứng minh.

Gọi a, b là hai số nguyên dương bằng nhau.

(1) $a = b$ Giả thiết

(2) $a^2 = ab$ Nhân hai vế của (1) với a

(3) $a^2 - b^2 = ab - b^2$ Trừ b^2 từ cả hai vế của (2)

(4) $(a - b)(a + b) = (a - b)b$ Phân tích hai vế của (3) thành nhân tử

(5) $a + b = b$ Chia cả hai vế của (4) cho $a - b$

(6) $2b = b$ Thay a bởi b trong (5) vì $a = b$, và đơn giản hóa

(7) $2 = 1$ Chia cả hai vế của (6) cho b

Chứng minh sau của mệnh đề

(Với mọi số nguyên n) Nếu n^2 chẵn, thì n cũng chẵn

là sai. Tại sao?

Chứng minh.

(1) Mệnh đề đúng với $n = 0$. Do đó ta chỉ xét $n \neq 0$
(2) Giả sử n^2 chẵn. Do đó $n^2 = 2k$ với số nguyên k nào đó
(3) Chia cả hai vế cho n, ta có $n = (2k)/n = 2(k/n)$
(4) Do đó, tồn tại số $j = k/n$ sao cho $n = 2j$
(5) Do tích của j và một số nguyên (2) là một số nguyên (n), nên j cũng là số nguyên
(6) Do đó n chẵn

□

Bài tập 31

Chứng minh các mệnh đề sau. Nêu rõ phương pháp chứng minh bạn sử dụng

(a) Với mọi số nguyên n, nếu n chẵn thì $(-1)^n = 1$

(b) Với mọi số nguyên x, y, z, nếu $x + y + z$ lẻ, thì ít nhất một trong ba số x, y, z là lẻ

(c) Với mọi số nguyên m và n, nếu $m \cdot n$ chẵn, thì m chẵn hoặc n chẵn

(d) Với mọi số nguyên dương n, n chẵn khi và chỉ khi $7n + 4$ chẵn

(e) Với mọi số nguyên dương n, n lẻ khi và chỉ khi $5n + 6$ lẻ

(f) Với mọi số nguyên dương m và n, $m^2 = n^2$ khi và chỉ khi $m = n$ hoặc $m = -n$

Part I

Phụ lục

Các quy tắc suy luận
Giới thiệu

- *Một lập luận (argument)* là một dãy các phát biểu kết thúc bằng một kết luận
- Một số dạng lập luận ("hợp lý (valid)") không bao giờ dẫn tới một kết luận sai từ các phát biểu đúng. Một số dạng lập luận khác ("ngụy biện (fallacies)") có thể dẫn tới một kết luận sai từ các phát biểu đúng
- *Một lập luận lôgic (logical argument)* bao gồm một dãy các mệnh đề (có thể là mệnh đề phức hợp) được gọi là *các tiền đề (premises)*/*các giả thiết (hypotheses)* và một mệnh đề duy nhất gọi là *kết luận (conclusion)*
- *Các quy tắc suy luận lôgic (logical rules of inference)* là các phương pháp chỉ phụ thuộc vào lôgic để suy ra một phát biểu mới từ một tập hợp các phát biểu khác. (Có thể coi các quy tắc này như là các mẫu (templates) cho việc xây dựng các lập luận hợp lý (valid arguments))

- Một lập luận lôgic được gọi là *hợp lý (valid)* nếu *khi mọi giả thiết đúng thì kết luận cũng đúng*. Một lập luận lôgic không hợp lý được gọi là một *ngụy biện (fallacy)*
- Một *quy tắc suy luận (inference rule)* là một khuôn mẫu thiết lập rằng nếu chúng ta *biết một tập các giả thiết nào đó là đúng*, thì chúng ta có thể *suy luận một cách hợp lý rằng một phát biểu kết luận liên quan nào đó là đúng*
- Mỗi *quy tắc suy luận lôgic hợp lý (valid inference rule)* tương ứng với một *hằng đúng (tautology)*
  - Ký hiệu $\therefore$ nghĩa là *"do đó"*
  - Hằng đúng (tautology) tương ứng (nếu quy tắc hợp lý)

$$\begin{array}{rl} & \text{Giả thiết 1} \\ & \text{Giả thiết 2} \\ & \dots \\ \hline \therefore & \text{Kết luận} \end{array}$$

$$((\text{Giả thiết 1}) \wedge (\text{Giả thiết 2}) \wedge \cdots) \to (\text{Kết luận})$$

Ví dụ 20

- Một lập luận lôgic
  - **Giả thiết 1:** Nếu tôi làm việc suốt đêm, thì tôi mệt mỏi
  - **Giả thiết 2:** Tôi làm việc suốt đêm
  - **Kết luận:** Do đó, tôi mệt mỏi
- Biểu diễn các biến lôgic
  - $p =$ "Tôi làm việc suốt đêm"
  - $q =$ "Tôi mệt mỏi"
- Theo góc nhìn của lôgic, lập luận trên có thể được viết lại như sau:

$$\begin{array}{rll} & p \rightarrow q & \text{Giả thiết 1} \\ & p & \text{Giả thiết 2} \\ \hline \therefore & q & \text{Kết luận} \end{array}$$

- Quy tắc *Modus Ponens* (tiếng Latin của "phương pháp khẳng định (method of affirming)")

$$\boxed{\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}} \qquad \boxed{(p \land (p \to q)) \to q}$$

Modus Ponens — Hằng đúng tương ứng

- Chú ý rằng hàng đầu tiên là hàng duy nhất mà giả thiết luôn đúng

Ví dụ 21

$$\text{Nếu } \left\{ \begin{array}{ll} p \to q & \text{"Nếu } n \text{ chia hết cho } 3, \text{ thì } n^2 \text{ chia hết cho } 3\text{"} \\ p & \text{"} n \text{ chia hết cho } 3\text{"} \end{array} \right\} \text{ là ĐÚNG}$$

$$\text{thì } \therefore\ q \quad \text{"} n^2 \text{ chia hết cho } 3\text{"} \quad \text{cũng ĐÚNG}$$

- Quy tắc *Modus Tollens* (tiếng Latin của “phương pháp phủ định (method of denying)”)

$$\boxed{\begin{array}{rl} & \neg q \\ & p \to q \\ \hline \therefore & \neg p \end{array}}$$

Modus Tollens

$$\boxed{(\neg q \land (p \to q)) \to \neg p}$$

Hằng đúng tương ứng

Ví dụ 22

Nếu $\left\{ \begin{array}{ll} p \to q & \text{“Nếu chiếc nhẫn làm bằng kim cương, thì nó có thể làm xước được tấm kính”} \\ \neg q & \text{“Chiếc nhẫn không làm xước tấm kính”} \end{array} \right\}$ là ĐÚNG

thì $\therefore \neg p$ “Chiếc nhẫn không làm bằng kim cương” cũng ĐÚNG

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

- Quy tắc *Cộng (Addition)*

$$\begin{array}{rl} & p \\ \hline \therefore & p \vee q \end{array}$$

Quy tắc Cộng (Addition)

$$p \to (p \vee q)$$

Hằng đúng tương ứng

- Quy tắc *Rút gọn (Simplification)*

$$\begin{array}{rl} & p \wedge q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Quy tắc Rút gọn (Simplification)

$$(p \wedge q) \to p$$

Hằng đúng tương ứng

- Quy tắc *Hội (Conjunction)*

$$\begin{array}{rl} & p \\ & q \\ \hline \therefore & p \wedge q \end{array}$$

Quy tắc Hội (Conjunction)

$$((p) \wedge (q)) \to p \wedge q$$

Hằng đúng tương ứng

Ví dụ 23

Các lập luận sau sử dụng các quy tắc suy luận nào?

(a) Nếu có ca nhiễm COVID-19 mới, thì trường sẽ đóng cửa. Trường không đóng cửa hôm nay. Do đó, không có ca nhiễm COVID-19 mới hôm nay [Quy tắc Modus Tollens]

(b) Nhiệt độ hiện tại là dưới $0°C$. Do đó, nhiệt độ hiện tại là dưới $0°C$ hoặc trời đang mưa [Quy tắc Cộng]

(c) Nhiệt độ hiện tại là dưới $0°C$ và trời đang mưa. Do đó, nhiệt độ hiện tại là dưới $0°C$ [Quy tắc Rút gọn]

- Quy tắc *Tam đoạn luận giả định (Hypothetical syllogism)*

$$\boxed{\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ \hline \therefore & p \to r \end{array}}$$

Tam đoạn luận giả định
(Hypothetical syllogism)

$$\boxed{((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)}$$

Hằng đúng tương ứng

Ví dụ 24

p q

"Nếu trời mưa hôm nay, thì chúng ta sẽ không tổ chức tiệc nướng hôm nay. Nếu chúng ta không tổ chức tiệc nướng hôm nay, q thì

r chúng ta sẽ tổ chức tiệc nướng vào ngày mai. Do đó nếu trời mưa hôm nay, thì chúng ta sẽ tổ chức tiệc nướng vào ngày mai."

p r

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

- Quy tắc *Tam đoạn luận tuyển (Disjunctive syllogism)*

$$\boxed{\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & q \end{array}}$$

Tam đoạn luận tuyển
(Disjunctive syllogism)

$$\boxed{((p \vee q) \wedge (\neg p)) \to q}$$

Hằng đúng tương ứng

Ví dụ 25

"$\overbrace{\underline{\text{Ví của tôi nằm trong túi áo khoác}}}^{p}$ hoặc $\overbrace{\underline{\text{nó nằm trên bàn}}}^{q}$. $\underbrace{\text{Ví của tôi không nằm trong túi áo khoác}}_{\neg p}$. Do đó, $\underbrace{\text{nó nằm trên bàn}}_{q}$."

Các quy tắc suy luận

Một số quy tắc suy luận trong lôgic mệnh đề

- Quy tắc *Hợp giải (Resolution)*

$$\begin{array}{rl} & p \lor q \\ & \neg p \lor r \\ \hline \therefore & q \lor r \end{array}$$

Hợp giải (Resolution)

$$\boxed{((p \lor q) \land (\neg p \lor r)) \to (q \lor r)}$$

Hằng đúng tương ứng

- Khi $q = r$, ta có

$$\boxed{((p \lor q) \land (\neg p \lor q)) \to q}$$

- Khi $r = \mathbf{F}$, ta có *Quy tắc tam đoạn luận tuyển*

$$\boxed{((p \lor q) \land (\neg p)) \to q}$$

Ví dụ 26

q p $\neg p$

"Tôi đang đi trên đường hoặc trời mưa. Trời không mưa hoặc tôi đang ở nhà. Do đó, tôi đang đi trên đường hoặc tôi đang ở nhà."

r q r

- Cho trước các tiền đề (premises) $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Một *chứng minh hình thức (formal proof)* của một *kết luận C* là một dãy *các bước (steps)*, trong đó *mỗi bước áp dụng một quy tắc suy luận nào đó cho các tiền đề hoặc các phát biểu đã được chứng minh trước đó* để suy luận ra một phát biểu mới đúng (kết luận)
- Một chứng minh cho thấy rằng *nếu* các tiền đề là đúng, *thì* kết luận là đúng

Ví dụ 27

- Giả sử chúng ta có các tiền đề sau:
  - Trời không nắng và thời tiết lạnh
  - Chúng ta sẽ đi bơi chỉ khi trời nắng
  - Nếu chúng ta không đi bơi, thì chúng ta sẽ đi chèo xuồng
  - Nếu chúng ta đi chèo xuồng, chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn
- Với các tiền đề đã cho, chứng minh kết luận "Chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn" bằng cách sử dụng các quy tắc suy luận

- **Bước 1: Xác định các mệnh đề** Chúng ta sẽ dùng các ký hiệu sau:
  - *sunny* = "Trời nắng"; *cold* = "Thời tiết lạnh"; *swim* = "Chúng ta sẽ đi bơi"; *canoe* = "Chúng ta sẽ đi chèo xuồng"; *sunset* = "Chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn"
- **Bước 2: Xác định lập luận** (Xây dựng dạng cho lập luận)

p_1	$\neg sunny \land cold$	Trời không nắng và thời tiết lạnh
p_2	$swim \rightarrow sunny$	Chúng ta sẽ đi bơi chỉ khi trời nắng
p_3	$\neg swim \rightarrow canoe$	Nếu chúng ta không đi bơi, thì chúng ta sẽ đi chèo xuồng
p_4	$canoe \rightarrow sunset$	Nếu chúng ta đi chèo xuồng, chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn
$\therefore$	$sunset$	Chúng ta sẽ về đến nhà lúc hoàng hôn

- **Bước 3: Xây dựng chứng minh hoàn chỉnh dựa trên các quy tắc suy luận**

Bước	Chứng minh bởi
1. $\neg$*sunny* $\wedge$ *cold*	Tiền đề p_1
2. $\neg$*sunny*	Quy tắc Rút gọn
3. *swim* $\rightarrow$ *sunny*	Tiền đề p_2
4. $\neg$*swim*	Modus Tollens cho 2 và 3
5. $\neg$*swim* $\rightarrow$ *canoe*	Tiền đề p_3
6. *canoe*	Modus Ponens cho 4 và 5
7. *canoe* $\rightarrow$ *sunset*	Tiền đề p_4
8. *sunset*	Modus Ponens cho 6 và 7

p_1	$\neg$*sunny* $\wedge$ *cold*
p_2	*swim* $\rightarrow$ *sunny*
p_3	$\neg$*swim* $\rightarrow$ *canoe*
p_4	*canoe* $\rightarrow$ *sunset*
$\therefore$	*sunset*

- Một *ngụy biện (fallacy)* là một quy tắc suy luận hoặc một phương pháp chứng minh không hợp lý về mặt lôgic
  - Một ngụy biện có thể dẫn tới một kết luận sai
- *Ngụy biện khẳng định hậu kiện (Fallacy of affirming the conclusion)*
  - *$p \to q$ là đúng, và q là đúng. Do đó, p là đúng* (Sai. Bởi vì $\mathbf{F} \to \mathbf{T}$ đúng)

Ví dụ 28

- Nếu David Cameron là Tổng thống Hoa Kỳ, thì ông ta ít nhất là bốn mươi tuổi $(p \to q)$
- David Cameron ít nhất là bốn mươi tuổi (q)
- Do đó, David Cameron là Tổng thống Hoa Kỳ (p)

- *Ngụy biện phủ định giả thiết (Fallacy of denying the hypothesis)*
  - *$p \to q$ là đúng, và p sai. Do đó q là sai* (Sai. Bởi vì $\mathbf{F} \to \mathbf{T}$ đúng)

Ví dụ 29

- Nếu trời mưa, thì đường lầy lội $(p \to q)$
- Trời không mưa $(\neg p)$
- Do đó đường không lầy lội $(\neg q)$

- Quy tắc *Khởi tạo phổ quát (Universal instantiation)*

$$\begin{array}{rl} & \forall x\, P(x) \\ \hline \therefore & P(c) \end{array}$$

Với *bất kỳ một phần tử* c *cụ thể* trong miền xác định

- Quy tắc *Tổng quát hóa phổ quát (Universal generalization)*

$$\begin{array}{rl} & P(c) \\ \hline \therefore & \forall x\, P(x) \end{array}$$

Với *bất kỳ một phần tử* c *nào đó* trong miền xác định

- Quy tắc *Khởi tạo hiện sinh (Existential instantiation)*

$$\begin{array}{rl} & \exists x\, P(x) \\ \hline \therefore & P(c) \end{array}$$

Với *phần tử* c *nào đó* trong miền xác định sao cho $P(c)$ *đúng*

- Quy tắc *Tổng quát hóa hiện sinh (Existential generalization)*

$$\begin{array}{rl} & P(c) \\ \hline \therefore & \exists x\, P(x) \end{array}$$

Với *phần tử* c *nào đó* trong miền xác định

Ví dụ 30

- Ta chứng minh lập luận sau: "Mỗi người đều sẽ chết. Socrates là người. Do đó, Socrates sẽ chết"
- **Xác định các vị từ**
  - $M(x) =$ "x là người"
  - $D(x) =$ "x sẽ chết"
  - $S =$ "Socrates" – một phần tử trong vũ trụ
- **Xác định lập luận**

p_1	$\forall x\,(M(x) \to D(x))$	Mỗi người đều sẽ chết
p_2	$M(S)$	Socrates là người
$\therefore$	$D(S)$	Socrates sẽ chết

- **Xây dựng chứng minh**

Bước	Chứng minh bởi
1. $\forall x\,(M(x) \to D(x))$	Tiền đề p_1
2. $M(S) \to D(S)$	Quy tắc Khởi tạo phổ quát cho 1
3. $M(S)$	Tiền đề p_2
4. $D(S)$	Modus Ponens cho 2 và 3

Các quy tắc suy luận
Một số quy tắc suy luận trong lôgic vị từ

Ví dụ 31

- Lý luận sau đây là đúng hay sai: "Ít nhất một trong số các sinh viên trong lớp rất thông minh. John là một sinh viên trong lớp. Do đó, John rất thông minh"?
- **Xác định các vị từ**
  - Giả sử *miền xác định* là *tập tất cả mọi người*
  - $S(x) =$ "x là sinh viên trong lớp"
  - $I(x) =$ "x rất thông minh"
  - $J =$ "John" – một thành viên trong tập tất cả mọi người
- **Xác định lập luận**

p_1	$\exists x\,(S(x) \wedge I(x))$	Ít nhất một trong số các sinh viên trong lớp rất thông minh
p_2	$S(J)$	John là một sinh viên trong lớp
$\therefore$	$I(J)$	John rất thông minh

- **Lập luận có hợp lý không?** KHÔNG
  - **Phản ví dụ:** Xét trường hợp *có chính xác một sinh viên A trong lớp rất thông minh và A không phải là John*, nghĩa là, $S(A) \wedge I(A)$ đúng, $S(B) \wedge I(B)$ sai với mọi $B \neq A$, và $A \neq J$
  - Áp dụng Quy tắc Tổng quát hóa hiện sinh cho $S(A) \wedge I(A)$, *tiền đề $p_1 = \exists x\,(S(x) \cap I(x))$ đúng*. *Tiền đề $p_2 = S(J)$ luôn đúng*
  - Tuy nhiên, do $S(B) \wedge I(B)$ sai với mọi $B \neq A$ và $A \neq J$, Quy tắc Khởi tạo phổ quát cho ta *kết luận $I(J)$ là sai*

Bài tập 32

Lập luận sau là đúng hay sai: "Mọi giảng viên đều ra đề bài kiểm tra khó. Tôi là một giảng viên. Do đó, tôi ra đề bài kiểm tra khó"

Bài tập 33

Với mỗi lập luận sau, hãy giải thích quy tắc suy luận nào được sử dụng trong mỗi bước

(a) Doug là một sinh viên trong lớp biết cách sử dụng ngôn ngữ lập trình Java. Mỗi người biết sử dụng ngôn ngữ lập trình Java đều có thể tìm được một công việc trả lương cao. Do đó, một sinh viên nào đó trong lớp có thể tìm được một công việc trả lương cao

(b) Ai đó trong lớp thích xem cá voi. Mỗi người thích xem cá voi đều quan tâm đến vấn đề ô nhiễm đại dương. Do đó, tồn tại một sinh viên trong lớp quan tâm đến vấn đề ô nhiễm đại dương

(c) Mỗi sinh viên trong lớp có một máy tính cá nhân. Mỗi người có máy tính cá nhân có thể sử dụng một trình soạn thảo văn bản. Do đó, Zeke, một sinh viên trong lớp, có thể sử dụng một trình soạn thảo văn bản

Bài tập 34

Lập luận sau để chứng minh nếu $\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ đúng thì $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ cũng đúng có hợp lý hay không?

Bước	Chứng minh bởi
1. $\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$	Tiền đề
2. $\exists x\, P(x)$	Quy tắc Rút gọn cho 1
3. $P(c)$	Quy tắc khởi tạo hiện sinh cho 2
4. $\exists x\, Q(x)$	Quy tắc Rút gọn cho 1
5. $Q(c)$	Quy tắc khởi tạo hiện sinh cho 4
6. $P(c) \wedge Q(c)$	Quy tắc hội cho 3 và 5
7. $\exists x\, P(x) \wedge Q(x)$	Quy tắc Tổng quát hóa hiện sinh

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh

Chú ý

Đây là bản dịch tài liệu *Proof Techniques* của Dana Angluin (SIGACT News, Winter-Spring 1983, Volume 15 #1). Bản dịch này tuân theo một bản sao của tài liệu ở `https://mfleck.cs.illinois.edu/proof.html`.
Mọi sai sót trong bản dịch này hoàn toàn là do hạn chế về kiến thức của người dịch. Mọi góp ý xin gửi về `hoanganhduc@hus.edu.vn`.

Chứng minh bằng ví dụ Các tác giả đưa ra chứng minh cho $n = 2$ và đề nghị rằng nó có chứa phần lớn các ý tưởng của chứng minh cho trường hợp tổng quát.

Chứng minh bằng hăm dọa “Tầm thường” hoặc “hiển nhiên”.

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

Chứng minh bằng cách liệt kê tất cả mọi thứ Một hoặc hai số của một tạp chí chỉ dành riêng cho chứng minh của bạn là một điều có ích.

Chứng minh bằng cách bớt xén "Độc giả có thể dễ dàng đưa ra các chi tiết", "253 trường hợp còn lại được tiến hành tương tự".

Chứng minh bằng cách giấu giếm Một chuỗi dài các phát biểu liên quan đúng và/hoặc vô nghĩa về mặt cú pháp.

Chứng minh bằng cách trích dẫn đầy ước muốn Tác giả trích dẫn phủ định, đảo, hoặc tổng quát của một định lý đã biết để hỗ trợ cho khẳng định của mình.

Chứng minh bằng hỗ trợ tài chính Làm sao mà ba tổ chức chính phủ khác nhau có thể sai được? Hoặc theo một góc nhìn đối lập: làm sao mà bất cứ thứ gì hỗ trợ tài chính bởi những tổ chức tầm thường này có thể đúng được?

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

Chứng minh bằng dân chủ Rất nhiều người tin rằng điều này đúng: làm sao mà tất cả bọn họ đều sai được?

Chứng minh bằng kinh tế thị trường Lý thuyết của tôi là lý thuyết duy nhất trên thị trường sẽ xử lý các dữ liệu.

Chứng minh bằng sự hiểu biết sâu sắc “Tôi thấy Ruzena ở trong thang máy và cô ấy nói rằng điều đó đã được thử nghiệm ở những năm 1970 và không dùng được”.

Chứng minh bằng vũ trụ Phủ định của mệnh đề này là không tưởng hoặc vô nghĩa. Phổ biến cho các chứng minh về sự tồn tại của Chúa và cho các chứng minh rằng máy tính không thể suy nghĩ.

Chứng minh bằng liên hệ cá nhân “Bài toán Eight-dimensional colored cycle stripping là NP-đầy đủ [Karp, liên hệ cá nhân]”.

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

Chứng minh bằng cách liên hệ đến các bài nói chuyện "Ở một buổi hội thảo đặc biệt của NSA về lĩnh vực thị giác máy tính, Binford đã chứng minh rằng SHGC không thể nhận biết được trong thời gian đa thức".

Chứng minh bằng cách đưa về sai bài toán "Để thấy rằng bài toán infinite-dimensional coloured cycle stripping có thể giải được, ta đưa nó về bài toán halting".

Chứng minh bằng cách trích dẫn các nguồn không truy cập được Tác giả trích dẫn một hệ quả đơn giản của một định lý được tìm ra trong một bản ghi nhớ lưu hành nội bộ của Hiệp hội Triết học Slovenia năm 1883. Phương pháp này thậm chí còn hiệu quả hơn nếu tài liệu này chưa bao giờ được dịch từ bản gốc tiếng Iceland.

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

Chứng minh bằng cách trích dẫn các nguồn không tồn tại Không có điều gì thậm chí hơi giống với định lý đã được trích dẫn xuất hiện ở trong tài liệu được đề cập. Tốt hơn là kết hợp với phương pháp chứng minh bằng cách trích dẫn các nguồn không truy cập được.

Chứng minh bằng cách trích dẫn một tài liệu sẽ xuất bản Thông thường tác giả sẽ trích dẫn một bài báo sắp xuất bản của chính mình, và tài liệu này thường không còn sắp xuất bản như lúc đầu.

Chứng minh bằng tính quan trọng Một lượng lớn các hệ quả hữu ích đều suy ra từ mệnh đề trong câu hỏi.

Chứng minh bằng việc tích lũy bằng chứng Việc tìm kiếm lâu dài và siêng năng không cho ta bất kỳ một phản ví dụ nào.

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

Chứng minh bằng các tài liệu tham khảo lẫn nhau Trong tài liệu A, Định lý 5 được cho là suy ra từ Định lý 3 của tài liệu B, và định lý này được suy ra từ Hệ quả 6.2 trong tài liệu C, và hệ quả này là một hệ quả dễ dàng suy ra được từ Định lý 5 của tài liệu A.

Chứng minh bằng siêu chứng minh Một phương pháp được đưa ra để xây dựng chứng minh. Tính đúng đắn của phương pháp này được chứng minh bằng bất kể một kỹ thuật nào trong số các kỹ thuật này. Sự hiểu biết sâu sắc về ngữ nghĩa ngôn ngữ lập trình sẽ giúp ích ở đây.

Chứng minh bằng hình vẽ Một hình thức thuyết phục hơn của Chứng minh bằng ví dụ. Kết hợp tốt với Chứng minh bằng cách bớt xén.

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

Chứng minh bằng đồ họa hào nhoáng Còn được gọi là phương pháp Jabberwocky. Chỉ có một kết quả thực sự mạnh mẽ mới có thể làm nền tảng cho một màn trình diễn âm thanh và ánh sáng tuyệt vời như vậy. "Sản phẩm dành cho những người không có bài thuyết trình."

Chứng minh bằng các biểu đồ dễ gây nhầm lẫn hoặc không giải thích được Hầu như bất kỳ đường cong nào cũng có thể được tạo ra để trông giống như kết quả mong muốn bằng cách chuyển đổi phù hợp các biến và thao tác với các tỷ lệ trục. Thường gặp trong công việc thí nghiệm.

Chứng minh bằng việc khẳng định một cách kịch liệt Tốt nhất là khi có một loại quan hệ quyền hạn nào đó với khán giả, và do đó phương pháp này đặc biệt hữu ích trong một lớp học.

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

Chứng minh bằng cách lặp lại Cũng được biết đến như là chứng minh của Bellman: "Điều gì tôi nói ba lần là đúng."

Chứng minh bằng cách kêu gọi trực giác Các hình vẽ theo dạng đám mây thường giúp ích ở đây.

Chứng minh bằng cách vẫy tay một cách mạnh mẽ Hoạt động tốt trong môi trường lớp học, xêmina hoặc hội thảo.

Chứng minh bằng cách thay đổi ngữ nghĩa Một số định nghĩa cơ bản nhưng bất tiện được thay đổi để phù hợp với phát biểu của kết quả.

Chứng minh bằng ký hiệu rườm rà Tốt nhất là thực hiện với việc sử dụng ít nhất bốn bảng chữ cái, các ký tự đặc biệt, và phiên bản mới nhất của LaTeX.

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

Chứng minh bằng sự trừu tượng vô nghĩa Một phiên bản của Chứng minh bằng hăm dọa. Tác giả sử dụng các thuật ngữ hoặc định lý từ toán học cao cấp trông rất ấn tượng nhưng chỉ liên quan trực tiếp đến vấn đề hiện tại. Một vài tích phân ở đây, một vài dãy số chính xác ở kia, và ai sẽ biết liệu bạn có thực sự có chứng minh hay không?

Phản chứng bằng cách tìm ra một quả táo xấu Một quả táo xấu làm hỏng cả chùm[1]. Trong số nhiều người ủng hộ lý thuyết này, chúng tôi đã tìm thấy một người rõ ràng là điên rồ; vì vậy chúng ta có thể làm mất uy tín của toàn bộ lý thuyết. (Thường sử dụng trong ngữ cảnh chính trị.)

Các kỹ thuật chứng minh (Proof Techniques) bạn nên tránh (tiếp)

Chứng minh bằng con đường dốc trơn trượt Nếu chúng tôi chấp nhận [đề xuất ban đầu], chúng tôi sẽ phải chấp nhận [đề xuất được sửa đổi một chút] và cuối cùng điều này sẽ dẫn đến [đề xuất hoàn toàn khác biệt và rõ ràng là có thể bị phản đối].

Chứng minh bằng "không phát minh ở đây" Chúng tôi có kinh nghiệm làm việc với thiết bị này trong nhiều năm ở MIT và chúng tôi chưa bao giờ nhận ra hiệu quả này.

[1] Con sâu làm rầu nồi canh