

COPYRIGHT NOTICE

THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-04-25

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-04-25



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

- Điền các thông tin về Họ Tên, Mã Sinh Viên, Lớp trước khi bắt đầu làm bài.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.
- Điểm bài kiểm tra này chiếm 20% tổng số điểm của môn học. Tổng điểm nhỏ hơn hoặc bằng 10 thì giữ nguyên, còn ngược lại thì tính là 10 điểm.

Họ và Tên: _____

Mã Sinh Viên: _____ Lớp: _____

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	3	3	3	3	12
Điểm:					

1. (3 điểm) Hãy chứng minh bằng ít nhất hai cách khác nhau rằng các mệnh đề $\neg p \vee (r \rightarrow \neg q)$ và $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ là tương đương logic.

Lời giải:

- Cách 1: Sử dụng các tương đương logic đã biết.**

$$\begin{aligned}\neg p \vee (r \rightarrow \neg q) &\equiv \neg p \vee (\neg r \vee \neg q) & p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q \\ &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee \neg r) & \text{Giao hoán} \\ &\equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r & \text{Kết hợp}\end{aligned}$$

- Cách 2: Lập bảng chân trị.**

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$r \rightarrow \neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee (r \rightarrow \neg q)$	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$
T	T	T	F	F	F	F	F	F	F
T	T	F	F	F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T	T

Do các hàng tương ứng của hai mệnh đề $\neg p \vee (r \rightarrow \neg q)$ và $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ đều có giá trị giống nhau, các mệnh đề đã cho là tương đương logic.

2. Chứng minh các tính chất sau của hàm trần và hàm sàn, trong đó $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{Z}$.

(a) ($1\frac{1}{2}$ điểm) $\lfloor x \rfloor = n$ khi và chỉ khi $n \leq x < n + 1$.

(b) ($1\frac{1}{2}$ điểm) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Lời giải:

(a) Ta chứng minh hai chiều:

(\Rightarrow) Giả sử $\lfloor x \rfloor = n$. Ta chứng minh $n \leq x < n + 1$.

Thật vậy, theo định nghĩa hàm sàn, $n \leq x$. Ta chứng minh $x < n + 1$ bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $x \geq n + 1$. Do đó $\lfloor x \rfloor \geq \lfloor n + 1 \rfloor = n + 1 > n$, mâu thuẫn với giả thiết $\lfloor x \rfloor = n$.

(\Leftarrow) Giả sử $n \leq x < n + 1$. Ta chứng minh $\lfloor x \rfloor = n$.

Thật vậy, từ giả thiết $n \leq x < n + 1$, ta có $n \leq \lfloor x \rfloor < n + 1$. Do $\lfloor x \rfloor$ là một số nguyên, ta có $\lfloor x \rfloor = n$.

(b) Giả sử $\lfloor x + n \rfloor = m$ với $m \in \mathbb{Z}$ nào đó. Kết hợp với câu (a), ta có $m \leq x + n < m + 1$. Do đó, $m - n \leq x < (m - n) + 1$. Kết hợp với câu (a), ta suy ra $\lfloor x \rfloor = m - n$, nghĩa là $\lfloor x \rfloor + n = m = \lfloor x + n \rfloor$.

3. (3 điểm) Sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh $6^{n+1} + 7^{2n-1}$ chia hết cho 43 với mọi số nguyên dương n .

Lời giải: Gọi $P(n)$ là vị từ “ $6^{n+1} + 7^{2n-1}$ chia hết cho 43”. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, với $n = 1$, ta có $6^{1+1} + 7^{2 \cdot 1 - 1} = 43$ chia hết cho 43.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, nghĩa là $6^{k+1} + 7^{2k-1}$ chia hết cho 43. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $6^{(k+1)+1} + 7^{2(k+1)-1} = 6^{k+2} + 7^{2k+1}$ chia hết cho 43. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} 6^{k+2} + 7^{2k+1} &= 6 \cdot 6^{k+1} + 7^2 \cdot 7^{2k-1} \\ &= 6 \cdot (6^{k+1} + 7^{2k-1}) + 43 \cdot 7^{2k-1}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp, $6^{k+1} + 7^{2k-1}$ chia hết cho 43, và do đó $6 \cdot (6^{k+1} + 7^{2k-1})$ cũng thế. Thêm vào đó, $43 \cdot 7^{2k-1}$ cũng chia hết cho 43. Do đó, ta có điều cần chứng minh.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $6^{n+1} + 7^{2n-1}$ chia hết cho 43 với mọi số nguyên dương n .

4. (3 điểm) Giải hệ thức truy hồi $a_n = 3a_{n-1} + 7$ ($n = 1, 2, \dots$) với điều kiện ban đầu $a_0 = 3$.

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned}
 a_n &= 3a_{n-1} + 7 \\
 &= 3(3a_{n-2} + 7) + 7 = 3^2a_{n-2} + (1+3) \cdot 7 \\
 &= 3^2(3a_{n-3} + 7) + (1+3) \cdot 7 = 3^3a_{n-3} + (1+3+3^2) \cdot 7 \\
 &= \dots \\
 &= 3^r a_{n-r} + (1+3+3^2+\dots+3^{r-1}) \cdot 7 \\
 &= \dots \\
 &= 3^n a_0 + (1+3+3^2+\dots+3^{n-1}) \cdot 7 \\
 &= 3^{n+1} + 7 \cdot \frac{3^n - 1}{2} \\
 &= \frac{13 \cdot 3^n - 7}{2}.
 \end{aligned}$$

Để kiểm tra dự đoán trên, ta chứng minh $a_n = \frac{13 \cdot 3^n - 7}{2}$ với mọi $n \geq 0$ bằng phương pháp quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Với $n = 0$, ta có $a_0 = \frac{13 \cdot 3^0 - 7}{2} = 3$. Do đó, $a_n = \frac{13 \cdot 3^n - 7}{2}$ đúng với $n = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $a_k = \frac{13 \cdot 3^k - 7}{2}$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó. Ta chứng minh $a_{k+1} = \frac{13 \cdot 3^{k+1} - 7}{2}$ cũng đúng. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
 a_{k+1} &= 3a_k + 7 && \text{Định nghĩa của dãy } \{a_n\} \\
 &= 3 \cdot \frac{13 \cdot 3^k - 7}{2} + 7 && \text{Giả thiết quy nạp} \\
 &= \frac{3(13 \cdot 3^k - 7) + 14}{2} \\
 &= \frac{13 \cdot 3^{k+1} - 7}{2}.
 \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp, $a_n = \frac{13 \cdot 3^n - 7}{2}$ với mọi $n \geq 0$.