

TOÁN RỜI RẠC. Đề 1.

Thời gian: 120 phút

(Sinh viên chỉ được dùng 1 tờ giấy A4 có ghi chép tùy ý. Ngoài ra không được dùng bất cứ tài liệu nào, không dùng máy tính nhỏ, và không dùng các thiết bị điện tử. Không trao đổi với nhau.
Điểm thi có tổng lớn hơn 10, sinh viên có thể chọn các bài để làm để đạt điểm 10.)

1 Chương trình Chuẩn

Bài 1. (2 điểm)

- 1) Hãy nêu một mệnh đề logic kéo theo trong thực tế. Sau đó hãy nêu mệnh đề phản, mệnh đề đảo và mệnh đề phản đảo của mệnh đề đó.
- 2) Hãy tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:
“Tồn tại hai số nguyên tố lớn hơn 1 tỷ sao cho chúng hơn kém nhau 2 đơn vị.”

Bài 2. (2 điểm)

- a) Có 5 bạn nam và 5 bạn nữ. Có bao nhiêu cách xếp hàng dọc để các bạn nam và nữ đứng xen kẽ nhau?
- b) Có 8 bạn nam và 5 bạn nữ. Có bao nhiêu cách xếp hàng dọc để không có hai bạn nữ nào đứng cạnh nhau?

Bài 3. (2 điểm) Cho dãy số $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ thỏa mãn

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Hãy tìm công thức tổng quát của a_n .

Bài 4. (2 điểm)

- 1) Hãy định nghĩa cây.
- 2) Một cây có 2022 đỉnh thì có bao nhiêu cạnh?
- 3) Một rừng (gồm các cây rời nhau) có 10000 đỉnh, gồm 2022 cây, thì có bao nhiêu cạnh?

Bài 5. (2 điểm) Chứng minh rằng một đồ thị là cây khi và chỉ khi nó liên thông và nếu bớt bất kỳ một cạnh nào thì đồ thị không còn liên thông nữa.

Bài 6. (2 điểm) Chứng minh rằng một đồ thị là đồ thị hai phần khi và chỉ khi mọi chu trình của nó đều có số cạnh là chẵn.

Bài 7. (2 điểm) Chứng minh rằng một đồ thị vô hướng là cây khi và chỉ khi giữa hai đỉnh bất kỳ luôn có một và chỉ một đường đi.

Bài 8. (2 điểm) Hãy cho biết số cây nhị phân đầy đủ 11 đỉnh.

— Hết —

2 Chương trình cử nhân tài năng.

Bài 1. (1.5 điểm) Hãy nêu một mệnh đề logic kéo theo trong toán học có chứa vị từ “*tồn tại*”. Sau đó hãy nêu mệnh đề phủ, mệnh đề đảo và mệnh đề phản đảo của mệnh đề đó. Xác định giá trị đúng/sai của từng mệnh đề.

Bài 2. (1.5 điểm) Chứng minh rằng chỉ cần ba phép toán logic cơ bản:

$$\neg \quad (\text{phủ định}), \quad \vee \quad (\text{tuyển}), \quad \wedge \quad (\text{hội})$$

là có thể biểu diễn được tất cả các mệnh đề logic với các phép toán phủ định, hội, tuyển, kéo theo (\Rightarrow) và tương đương (\Leftrightarrow).

Bài 3. Quân xe trên bàn cờ (2 điểm) Trên bàn cờ vua kích thước 8×8 , quân xe có thể ăn các quân khác trên cùng một hàng hoặc cùng một cột.

- a) Có bao nhiêu cách đặt 8 quân xe lên bàn cờ sao cho không quân nào ăn được quân nào?
- b) Có bao nhiêu cách đặt 6 quân xe lên bàn cờ sao cho không quân nào ăn được quân nào?

Bài 4. (1 điểm) Có bao nhiêu cách lát một dải kích thước $1 \times n$ bằng các ô vuông 1×1 và quân domino 1×2 .

Bài 5. (2 điểm)

- a) Có bao nhiêu cây nhị phân 6 đỉnh?
- b) Có bao nhiêu cây nhị phân 20 đỉnh?

Bài 6. (2 điểm) Nêu điều kiện cần và đủ để một đồ thị có hướng có một chu trình có hướng đi qua tất cả các cạnh, mỗi cạnh đúng một lần.

Bài 7. (1 điểm) Chứng minh rằng một đồ thị vô hướng là cây khi và chỉ khi nó giữa hai đỉnh bất kỳ luôn có một và chỉ một đường đi.

Bài 8. (2 điểm) Cho G là một đồ thị có hướng liên thông mạnh sao cho mọi đỉnh đều có bậc vào và bậc ra bằng nhau. Chứng minh rằng G có một cây bao trùm có gốc.

— Hết —