

# VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

## Các cấu trúc cơ bản Tập hợp, Hàm, Dãy, Tổng

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học  
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội  
[hoanganhduc@hus.edu.vn](mailto:hoanganhduc@hus.edu.vn)



# Nội dung



## Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản  
Các phép toán trên tập hợp  
Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ  
Định nghĩa hàm và một số khái niệm  
Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm  
Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm  
Một số công thức tổng hữu ích

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản  
Các phép toán trên tập hợp  
Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ  
Định nghĩa hàm và một số khái niệm  
Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm  
Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm  
Một số công thức tổng hữu ích

# Tập hợp

## Khái niệm và cách mô tả tập hợp



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

2

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Một **tập hợp (set)** là một tổng thể không sắp thứ tự các đối tượng phân biệt (gọi là các **phần tử (element)** hoặc **thành viên (member)** của tập hợp)
  - $x \in S$ :  $x$  là phần tử của  $S$
  - $x \notin S$ :  $x$  không là phần tử của  $S$
- Ta thường sử dụng các chữ in hoa  $S, T, U, \dots$  để ký hiệu tập hợp
- Có thể mô tả một tập hợp bằng cách **liệt kê tất cả các phần tử** của tập đó giữa hai dấu ngoặc nhọn “{” và “}”. Trong nhiều trường hợp, có thể **liệt kê thông qua “quy luật đơn giản”**
  - Tập các nguyên âm trong bảng chữ cái tiếng Anh  
 $V = \{a, e, i, o, u\}$
  - Tập các số tự nhiên  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Có thể mô tả một tập hợp thông qua **quy tắc nhận biết**
  - Với vị từ  $P(x)$  bất kỳ trên miền xác định nào đó,  $\{x \mid P(x)\}$  là tập hợp tất cả  $x$  sao cho  $P(x)$  đúng (có thể dùng “:” thay vì “|”)
  - Tập các số tự nhiên chẵn  $E = \{x \mid x = 2k \text{ với } k \in \mathbb{N}\}$

# Tập hợp

Khái niệm và cách mô tả tập hợp



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

3

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Có thể mô tả một tập hợp thông qua *giản đồ Venn (Venn diagram)*

- *Tập vũ trụ (universal set)*  $U$  gồm tất cả các đối tượng đang xét

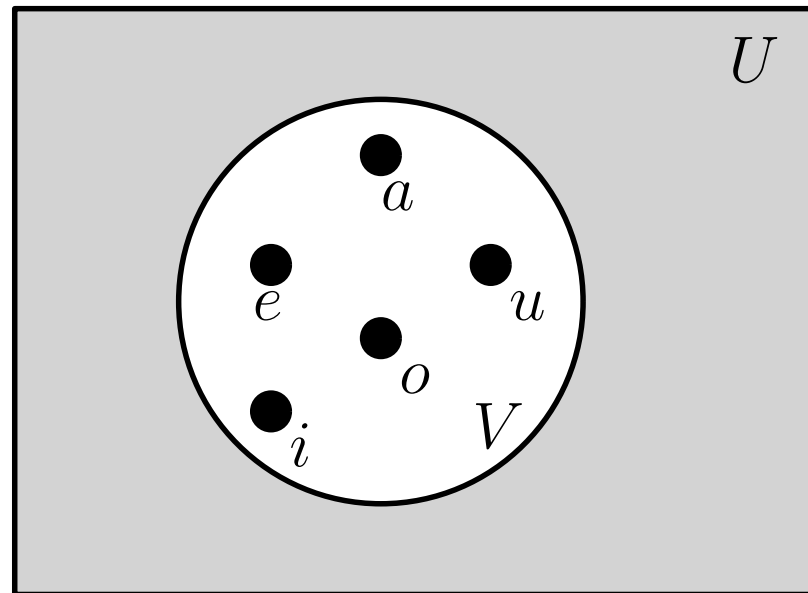
Hình chữ nhật

- Tập hợp cần mô tả

Hình tròn hoặc các hình khác

- Phần tử của tập hợp

Điểm



**Hình:** Mô tả tập các nguyên âm trong bảng chữ cái tiếng Anh  $V = \{a, e, i, o, u\}$  bằng giản đồ Venn



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

4

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- **Tập hợp rỗng (empty set)**, ký hiệu  $\emptyset$ , là tập hợp duy nhất không chứa bất kỳ phần tử nào
- $\emptyset = \{\}$  hoặc  $\emptyset = \{x \mid \mathbf{F}\}$  với  $\mathbf{F}$  là một mệnh đề luôn luôn sai (mâu thuẫn)
- Bất kể miền xác định là gì, **mệnh đề  $\neg \exists x (x \in \emptyset)$  luôn đúng**
- $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ 
  - Tập  $\{\emptyset\}$  không rỗng, vì nó chứa một phần tử—tập hợp rỗng

# Tập hợp

Tập hợp con và tập hợp bằng nhau



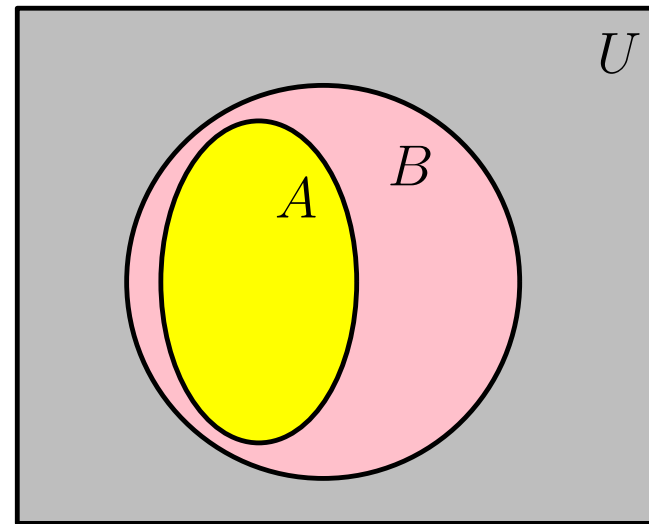
Cho hai tập hợp  $A$  và  $B$ .  $A$  là **tập con (subset)** của  $B$ , ký hiệu  $A \subseteq B$  hoặc  $B \supseteq A$ , khi và chỉ khi mỗi phần tử của tập  $A$  cũng là một phần tử của  $B$

- $(A \subseteq B) \equiv \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$
- $(A \not\subseteq B) \equiv \neg(A \subseteq B)$  ( $A$  **không** là tập con của  $B$ )
- $(A \subset B) \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \not\subseteq A)$  ( $A$  là **tập con thực sự (proper subset)** của  $B$ )

## Bài tập 1

Cho  $A = \{1, 2, 3\}$  và  $B = \{1, 3, 5, 7\}$ . Hãy liệt kê tất cả các tập hợp

- (a) là tập con của  $A$
- (b) là tập con thực sự của  $A$
- (c) vừa là tập con của  $A$  vừa là tập con của  $B$
- (d) là tập con của  $A$  nhưng không là tập con của  $B$



Hình: Giản đồ Venn mô tả  $A \subset B$

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

5

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

# Tập hợp

Tập hợp con và tập hợp bằng nhau



## Ví dụ 1

Ta chứng minh *với mọi tập  $A$ , ta có  $\emptyset \subseteq A$*

- Nghĩa là, ta cần chứng minh  $\forall A \forall x ((x \in \emptyset) \rightarrow (x \in A))$
- Cụ thể, ta cần chỉ ra rằng với một tập  $A_0$  và một phần tử  $x_0$  cụ thể thuộc các miền xác định tương ứng, mệnh đề  $(x_0 \in \emptyset) \rightarrow (x_0 \in A)$  đúng
- Thật vậy, theo định nghĩa của tập hợp rỗng,  $(x_0 \in \emptyset) = F$ . Do đó,  $(x_0 \in \emptyset) \rightarrow (x_0 \in A) = T$

## Bài tập 2

Chứng minh rằng với mọi tập hợp  $A$ , ta có  $A \subseteq A$

## Bài tập 3

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- (a)  $1 \in \{1\}$
- (b)  $1 \subseteq \{1\}$
- (c)  $\{1\} \in \{\{1\}\}$
- (d)  $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$

## Bài tập 4

Chứng minh rằng nếu  $A \subseteq B$  và  $B \subseteq C$  thì  $A \subseteq C$

## Bài tập 5

Liệu có tồn tại các tập hợp  $A$  và  $B$  thỏa mãn  $A \in B$  và  $A \subseteq B$ ?

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

6

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

# Tập hợp

Tập hợp con và tập hợp bằng nhau



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

7

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

Cho hai tập hợp  $A$  và  $B$ .  $A$  và  $B$  là hai tập **bằng nhau**, ký hiệu  $A = B$ , khi và chỉ khi  $A \subseteq B$  và  $B \subseteq A$

- $(A = B) \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \equiv \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$
- Tất cả các phần tử trong một tập đều **phân biệt (distinct)**; liệt kê một phần tử nhiều lần là vô nghĩa
  - Nếu  $a = b$  thì  $\{a, b, c\} = \{a, c\} = \{b, c\} = \{a, a, b, c, a, c, c\}$
  - Ta nói rằng tập trên có (nhiều nhất) 2 phần tử
- Các phần tử của một tập hợp **không sắp thứ tự (unordered)**
  - Bất kể  $a, b, c$  là gì,  $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$



# Tập hợp

## Lực lượng của một tập hợp



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

8

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- **Lực lượng (cardinality)** của một tập  $A$ , ký hiệu  $|A|$ , là số phần tử khác biệt mà  $A$  có
  - $|\emptyset| = 0$ ;  $|\{1, 2, 3\}| = 3$ ;  $|\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}| = 2$
- Nếu  $|A| \in \mathbb{N}$ , thì ta gọi  $A$  là **tập hữu hạn (finite set)**. Ngược lại,  $A$  là một **tập vô hạn (infinite set)**
- Một số tập vô hạn quan trọng
  - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  **Tập số tự nhiên (natural numbers)**
  - $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  **Tập số nguyên (integers)**
  - $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$  **Tập số nguyên dương (positive integers)**
  - $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, \text{ và } q \neq 0\}$  **Tập số hữu tỷ (rational numbers)**
  - $\mathbb{R}$  **Tập số thực (real numbers)**
  - $\mathbb{R}^+$  **Tập số thực dương (positive real numbers)**
  - $\mathbb{C}$  **Tập số phức (complex numbers)**
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

## Bài tập 6

Tìm các tập hợp  $A, B$  thỏa mãn các điều kiện

(a)  $A = \{3, |B|\}$  và (b)  $B = \{1, |A|, |B|\}$

- **Tập lũy thừa (power set)** của một tập  $A$ , ký hiệu  $\mathcal{P}(A)$ , là tập hợp gồm tất cả các tập con của  $A$

- $\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$
- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

- Nếu  $A$  là tập hữu hạn,  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ . Do đó ký hiệu  $2^A$  đôi khi cũng được sử dụng để chỉ tập lũy thừa của  $A$

## Bài tập 7

Cho  $A = \{1, 2, 3\}$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- |                     |                                  |                       |  |
|---------------------|----------------------------------|-----------------------|--|
|                     |                                  | (e) $\{2\} \in$       |  |
| (a) $2 \in A$       | (c) $2 \in \mathcal{P}(A)$       | $\mathcal{P}(A)$      | (g) $\{\{2\}\} \in \mathcal{P}(A)$       |
| (b) $2 \subseteq A$ | (d) $2 \subseteq \mathcal{P}(A)$ | (f) $\{2\} \subseteq$ | (h) $\{\{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ |
|                     |                                  | $\mathcal{P}(A)$      |  |

## Bài tập 8

Chứng minh rằng nếu  $A = B$  thì  $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$  với hai tập  $A, B$  bất kỳ. Ngược lại, nếu  $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$  thì  $A$  có bằng  $B$  không?

(Gợi ý:  $A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \iff \forall x (x \in A \iff x \in B)$  và

- Với  $n \in \mathbb{N}$ , một **bộ sắp thứ tự  $n$  phần tử (ordered  $n$ -tuples)**  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là một dãy các phần tử có phần tử thứ nhất là  $a_1$ , phần tử thứ hai là  $a_2, \dots$ , và phần tử thứ  $n$  là  $a_n$ 
  - Một bộ sắp thứ tự 2 phần tử được gọi là một **cặp sắp thứ tự (order pair)**
- Hai bộ  $(a_1, \dots, a_n)$  và  $(b_1, \dots, b_n)$  là **bằng nhau** nếu với mọi  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_i = b_i$
- **Chú ý:**  $(1, 2) \neq (2, 1) \neq (2, 1, 1)$  nhưng  $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{2, 1, 1\}$
- **Tích Đề các (Cartesian product)** của hai tập  $A, B$ , ký hiệu  $A \times B$ , là tập tất cả các cặp sắp thứ tự  $(a, b)$  trong đó  $a \in A$  và  $b \in B$ 
  - $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
  - Chú ý rằng tích Đề các **không** có tính chất giao hoán, nghĩa là  $\neg \forall A, B (A \times B = B \times A)$
  - Tổng quát hóa
$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$$



## Tập hợp

11

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 9

Cho  $A = \{1, \{2, 3\}\}$  và  $B = \{4, 5, 6\}$ . Tìm các tập hợp  $A \times A$ ,  $B \times B$ ,  $A \times B$ , và  $B \times A$

## Bài tập 10

Chứng minh rằng  $A \times B = \emptyset$  khi và chỉ khi  $A = \emptyset$  hoặc  $B = \emptyset$

## Bài tập 11

Chứng minh rằng  $A \times B = B \times A$  khi và chỉ khi  $A = \emptyset$  hoặc  $B = \emptyset$  hoặc  $A = B$

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

12

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

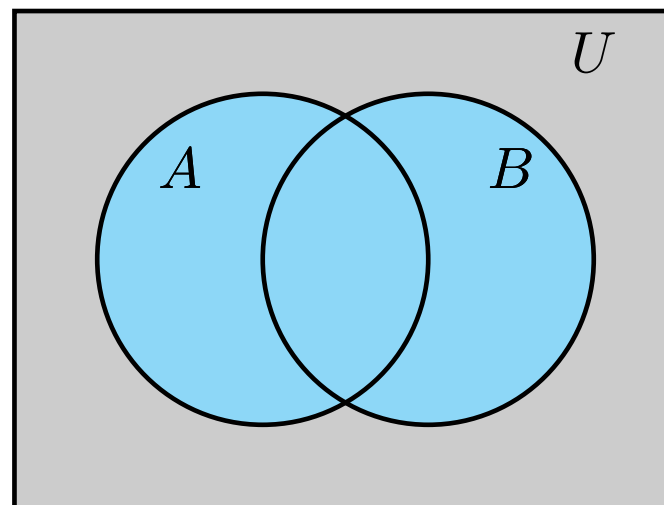
### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- **Hợp (union)** của hai tập hợp  $A, B$ , ký hiệu  $A \cup B$ , là tập chứa tất cả các phần tử hoặc thuộc  $A$ , hoặc thuộc  $B$ , hoặc thuộc cả hai

- $\forall A, B (A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\})$
- $A \cup B \supseteq A$  và  $A \cup B \supseteq B$
- $\{1, 3, 5\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Hình: Giản đồ Venn mô tả  $A \cup B$

- **Giao (intersection)** của hai tập hợp  $A, B$ , ký hiệu  $A \cap B$ , là tập chứa tất cả các phần tử đồng thời thuộc cả  $A$  và  $B$

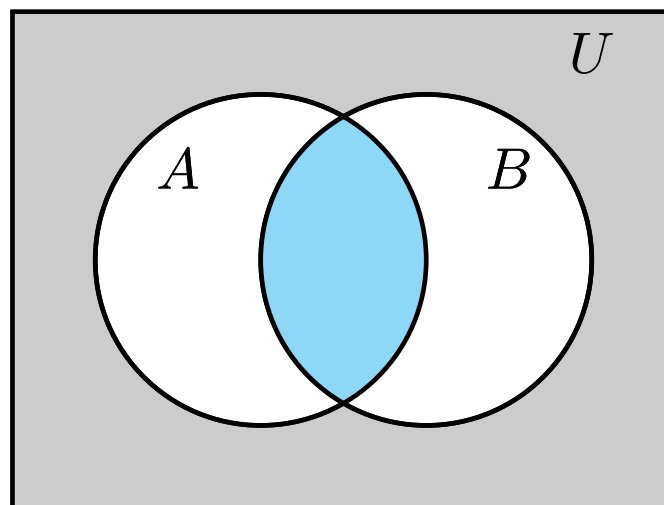
- $\forall A, B (A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\})$

- $A \cap B \subseteq A$  và  $A \cap B \subseteq B$

- $\{1, 3, 5\} \cap \{2, 3, 4\} = \{3\}$

- Hai tập  $A$  và  $B$  là **rời nhau (disjoint)** nếu  $A \cap B = \emptyset$ .

- $\{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$



Hình: Giản đồ Venn mô tả  $A \cap B$

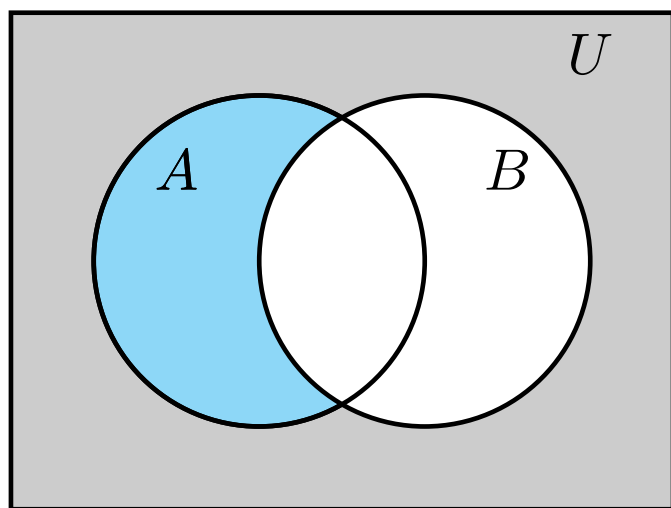
- **Hiệu (difference)** của hai tập hợp  $A, B$ , ký hiệu  $A - B$  hoặc  $A \setminus B$ , là tập chứa tất cả các phần tử thuộc  $A$  nhưng không thuộc  $B$

- $\forall A, B (A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\})$

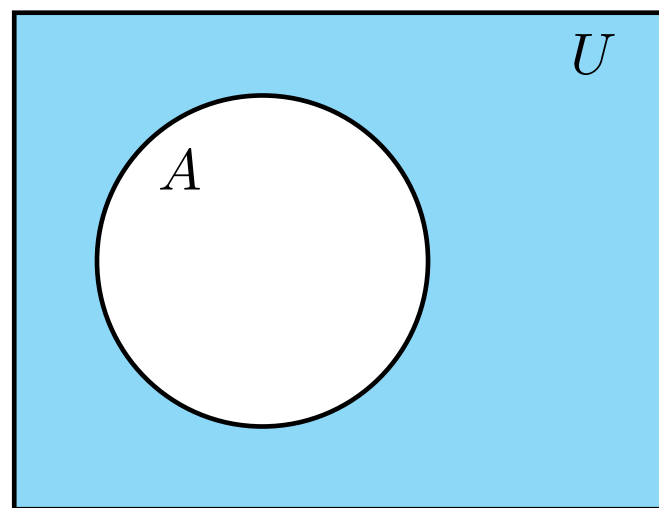
- $\{1, 3, 5\} - \{2, 3, 4\} = \{1, 5\}$

- Khi tập vũ trụ  $U$  được xác định, **phần bù (complement)** của tập  $A$ , ký hiệu  $\bar{A}$ , là tập  $U - A$

- $\forall A (\bar{A} = \{x \mid x \notin A\})$



Hình: Biểu đồ Venn mô tả  $A - B$



Hình: Biểu đồ Venn mô tả  $\bar{A}$

# Tập hợp

## Phép hiệu đối xứng



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

15

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

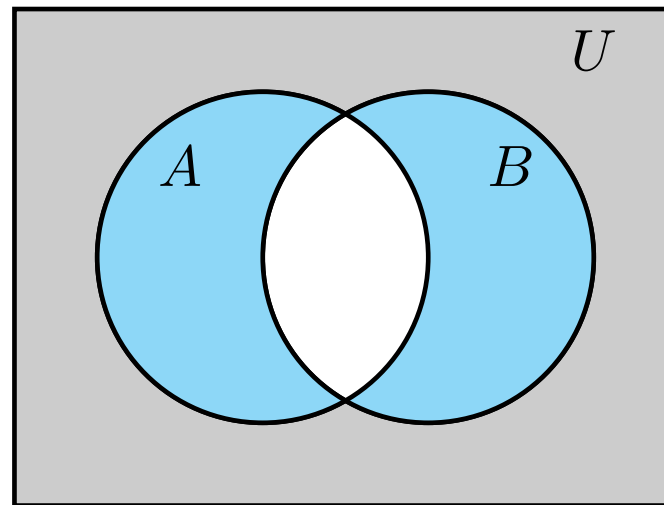
### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- **Hiệu đối xứng (symmetric difference)** của hai tập hợp  $A, B$ , ký hiệu  $A \Delta B$  hoặc  $A \oplus B$ , là tập chứa tất cả các phần tử hoặc thuộc  $A$  hoặc thuộc  $B$  nhưng không thuộc cả  $A$  và  $B$

- $\forall A, B (A \Delta B = \{x \mid x \in A \oplus x \in B\})$
- $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
- $\{1, 3, 5\} \Delta \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 4, 5\}$



Hình: Giản đồ Venn mô tả  $A \Delta B$



# Tập hợp

## Các phép toán trên tập hợp



### Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

#### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

16

#### Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

#### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

#### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

#### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 12

*Tìm các tập  $A$  và  $B$ , biết rằng  $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$ ,  $B - A = \{2, 10\}$ , và  $A \cap B = \{3, 6, 9\}$*

## Bài tập 13

*Cho các tập hợp  $A, B$ . Chứng minh*

(a)  $A \cap B \subseteq A$  và  $A \cap B \subseteq B$

(b)  $A \subseteq (A \cup B)$

(c)  $A - B \subseteq A$

*Bảng tính thuộc (membership table)* của các phép toán trên tập hợp

$A$	$B$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$	$\overline{A}$	$A \Delta B$
1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0

## Bài tập 14

*Xây dựng bảng tính thuộc của*

- (a)  $A \cup (B \cup C)$  và  $(A \cup B) \cup C$
- (b)  $A \cap (B \cup C)$  và  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (c)  $\overline{A \cup B}$  và  $\overline{A} \cap \overline{B}$

# Tập hợp

## Các hằng đẳng thức tập hợp



### Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

18

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

Tên gọi	Đẳng thức
Luật đồng nhất (Identity laws)	$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$
Luật nuốt (Domination laws)	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Luật lũy đẳng (Idempotent laws)	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Luật bù kép (Double complement laws)	$\overline{\overline{A}} = A$
Luật giao hoán (Commutative laws)	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Luật kết hợp (Associative laws)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Luật phân phối (Distributive laws)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

# Tập hợp

## Các hằng đẳng thức tập hợp



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

19

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

Tên gọi	Đẳng thức
Luật De Morgan (De Morgan's laws)	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Luật hấp thụ (Absorption laws)	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Luật bù (Complement laws)	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Với hai tập  $A, B$  bất kỳ,

### Chứng minh $A = B$

- (1) Chứng minh trực tiếp  $A \subseteq B$  và  $B \subseteq A$
- (2) Chứng minh thông qua định nghĩa tập hợp và các phép biến đổi logic
- (3) Chứng minh bằng bảng tính thuộc

# Tập hợp

## Các hằng đẳng thức tập hợp



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

20

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Ví dụ 2 (Dùng định nghĩa)

Chứng minh  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

■  $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

- Giả sử  $x \in \overline{A \cap B}$ . Theo định nghĩa,  $x \notin A \cap B$ . Do đó, mệnh đề  $\neg(x \in A \wedge x \in B)$  đúng. Áp dụng luật De Morgan,  $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$  đúng. Theo định nghĩa, ta có  $x \notin A$  hoặc  $x \notin B$ . Do đó,  $x \in \overline{A}$  hoặc  $x \in \overline{B}$ , suy ra  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

■  $\overline{A \cap B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

- Giả sử  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ . Theo định nghĩa,  $x \in \overline{A}$  hoặc  $x \in \overline{B}$ . Do đó,  $x \notin A$  hoặc  $x \notin B$ . Như vậy, mệnh đề  $(x \notin A) \vee (x \notin B)$  đúng. Theo định nghĩa,  $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$  cũng đúng. Áp dụng luật De Morgan, mệnh đề  $\neg(x \in A \wedge x \in B)$  đúng. Do đó,  $\neg(x \in A \cap B)$  đúng, suy ra  $x \in \overline{A \cap B}$

# Tập hợp

## Các hằng đẳng thức tập hợp



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

21

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Ví dụ 3 (Dùng đẳng thức logic đã biết)

Chứng minh  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\begin{aligned}\overline{A \cap B} &= \{x \mid x \notin A \cap B\} \\ &= \{x \mid \neg(x \in A \cap B)\} \\ &= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} \\ &= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} \\ &= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} \\ &= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} \\ &= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} \\ &= \overline{A} \cup \overline{B}\end{aligned}$$

định nghĩa phần bù

định nghĩa  $\neg$

định nghĩa  $\cap$

luật De Morgan

định nghĩa  $\vee$

định nghĩa phần bù

định nghĩa  $\cup$

mô tả tập hợp

# Tập hợp

## Các hằng đẳng thức tập hợp



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

22

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng bảng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Ví dụ 4 (Dùng bảng tính thuộc)

Chứng minh  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$A$	$B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

# Tập hợp

## Các hằng đẳng thức tập hợp



### Bài tập 15

Chứng minh các hằng đẳng thức tập hợp đã đề cập (sử dụng các phương pháp đã trình bày)

### Bài tập 16

Với các tập  $A, B$  bất kỳ, chứng minh

(a)  $A \cap B = A - (A - B)$

(d)  $A \Delta A = \emptyset$

(b)  $A \cup (B - A) = A \cup B$

(e)  $A \Delta \emptyset = A$

(c)  $A \cap (B - A) = \emptyset$

(f)  $A \Delta B = B \Delta A$

### Bài tập 17

Với các tập  $A, B, C$ , có thể kết luận rằng  $A = B$  nếu

(a)  $A \cup C = B \cup C$ ?

(b)  $A \cap C = B \cap C$ ?

(c)  $A \cup C = B \cup C$  và  $A \cap C = B \cap C$ ?

### Bài tập 18

Có thể nói gì về các tập  $A, B$  nếu  $A \Delta B = A$ ?

#### Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

#### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

23

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

#### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

#### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

#### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích



# Tập hợp

## Các hằng đẳng thức tập hợp



### Bài tập 19

Với  $A$  là tập con của một tập vũ trụ  $U$ , chứng minh rằng

(a)  $A \Delta U = \overline{A}$

(b)  $A \Delta \overline{A} = U$

### Bài tập 20

Với hai tập  $A, B$  bất kỳ, chứng minh

(a)  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

(b)  $A \Delta B = B \Delta A$

(c)  $(A \Delta B) \Delta B = A$

### Bài tập 21

Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho các đẳng thức sau

(a)  $A \times (B \cup C) = (A \times C) \cup (B \times C)$

(b)  $A \times (B \cap C) = (A \times C) \cap (B \times C)$

trong đó  $A, B, C$  là các tập bất kỳ

#### Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

#### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

24

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

#### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

#### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

#### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

# Tập hợp

## Tổng quát hóa phép hợp và phép giao



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

25

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

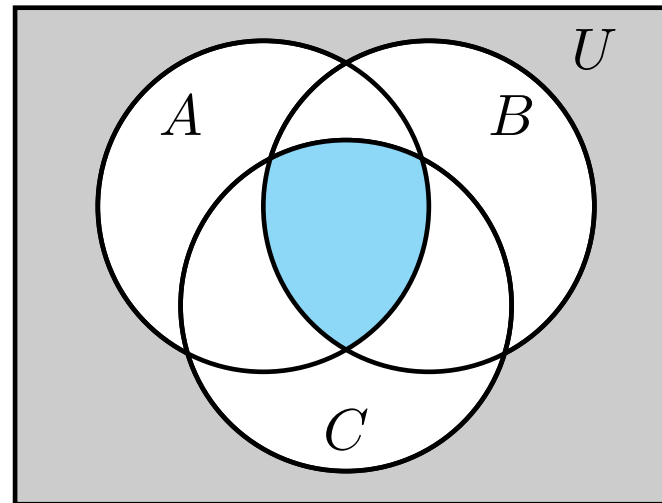
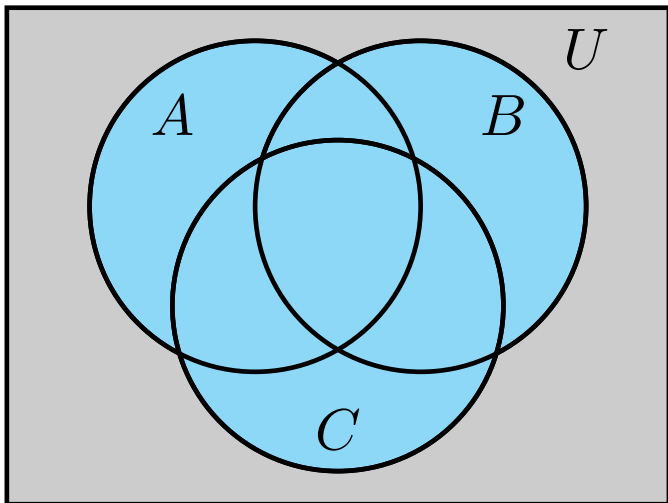
### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Do các phép hợp và giao thỏa mãn luật giao hoán và luật kết hợp, ta có thể mở rộng các khái niệm này cho dãy  $n$  tập  $A_1, \dots, A_n$  hoặc thậm chí dãy vô hạn các tập.

- Cách nhóm và thứ tự thực hiện không quan trọng
- $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = B \cup (A \cup C) = \dots$
- $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = B \cap (A \cap C) = \dots$



Hình: Biểu đồ Venn cho  $A \cup B \cup C$  Hình: Biểu đồ Venn cho  $A \cap B \cap C$

# Tập hợp

## Tổng quát hóa phép hợp và phép giao



### Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

26

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

**Hợp (union)** của một bộ (hữu hạn hoặc vô hạn) các tập hợp là một tập chứa tất cả các phần tử là thành viên của ít nhất một tập trong bộ

$$\blacksquare \bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} (x \in A_i)\} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

■ Tương tự với tập chỉ số  $I$  bất kỳ  $\bigcup_{i \in I} A_i$  hay với vô hạn các

$$\text{tập hợp } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

## Ví dụ 5

Với  $i = 1, 2, \dots$  nếu  $A_i = \{i, i + 1, i + 2, \dots\}$  thì

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \{i, i + 1, i + 2, \dots\} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}^+$$

# Tập hợp

## Tổng quát hóa phép hợp và phép giao



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

27

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

**Giao (intersection)** của một bộ (hữu hạn hoặc vô hạn) các tập hợp là một tập chứa tất cả các phần tử là thành viên của tất cả các tập trong bộ

$$\blacksquare \bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} (x \in A_i)\} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

■ Tương tự với tập chỉ số  $I$  bất kỳ  $\bigcap_{i \in I} A_i$  hay với vô hạn các

$$\text{tập hợp } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

## Ví dụ 6

Với  $i = 1, 2, \dots$  nếu  $A_i = \{i, i + 1, i + 2, \dots\}$  thì

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \{i, i + 1, i + 2, \dots\} = \{n, n + 1, n + 2, \dots\} = A_n$$

# Tập hợp

## Tổng quát hóa phép hợp và phép giao



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

28

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 22

Với các tập hợp  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 4, 6, 8\}$ , và  $C = \{5, 7, 9, 10\}$ , tìm  $A \cap B \cap C$  và  $A \cup B \cup C$

## Bài tập 23

Với các tập hợp  $A, B, C$  bất kỳ, chứng minh

(a)  $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

(b)  $\overline{A \cup B \cap C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

# Tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

29

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Giả sử **tập vũ trụ  $U$  là hữu hạn** và các phần tử của  $U$  được liệt kê theo **thứ tự**  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ . Ta có thể biểu diễn một tập hữu hạn  $A \subseteq U$  dưới dạng một chuỗi nhị phân  $\mathcal{B}(A) = x_1 x_2 \dots x_n$  trong đó  $x_i = 1$  **nếu**  $u_i \in A$  và  $x_i = 0$  **nếu**  $u_i \notin A$ .

- Với  $U = \{1, 2, \dots, 10\}$  ( $u_1 = 1, \dots, u_{10} = 10$ ) và  $A = \{2, 3, 5, 7\}$  thì  $\mathcal{B}(A) = 0110101000$

$U$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathcal{B}(A)$	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0

- Các toán tử tập hợp **“ $\cup$ ”, “ $\cap$ ”, và “ $\overline{\phantom{x}}$ ”** lần lượt tương ứng với các toán tử logic **“ $\vee$ ”, “ $\wedge$ ”, và “ $\neg$ ”** thực hiện theo từng bit.

## Bài tập 24

Với  $U = \{1, 2, \dots, 10\}$  ( $u_i = i$ ),  $A_1 = \{2, 3, 5, 7\}$ ,  $A_2 = \{1, 3, 9\}$ , hãy so sánh

- (1)  $\mathcal{B}(A_1 \cup A_2)$  và  $\mathcal{B}(A_1) \vee \mathcal{B}(A_2)$
- (2)  $\mathcal{B}(A_1 \cap A_2)$  và  $\mathcal{B}(A_1) \wedge \mathcal{B}(A_2)$
- (3)  $\mathcal{B}(\overline{A_1})$  và  $\neg \mathcal{B}(A_1)$

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

30

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

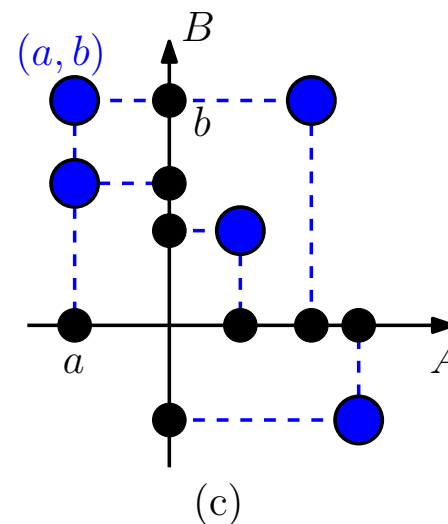
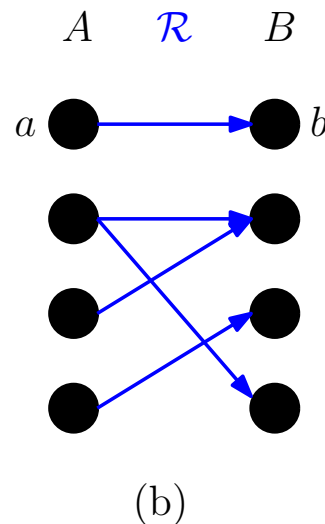
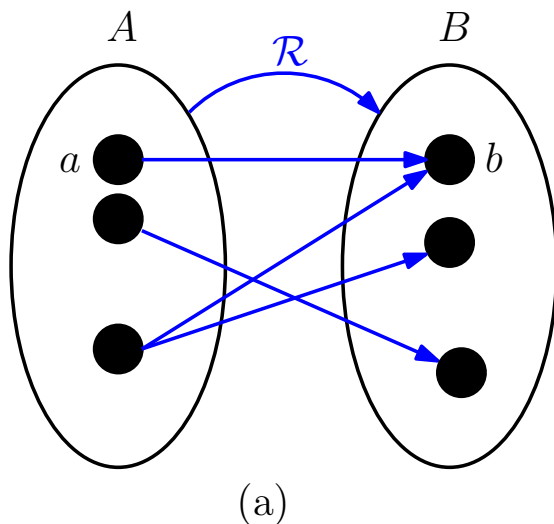
Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Cho hai tập hợp  $A$  và  $B$ . Một **quan hệ (relation)**  $\mathcal{R}$  giữa  $A$  và  $B$  là một tập con của tích Đề các  $A \times B$ . Ta viết  $a\mathcal{R}b$  nếu  $(a, b) \in \mathcal{R}$ . Trong trường hợp  $A = B$  thì  $\mathcal{R}$  được gọi là một quan hệ trong  $A$ 
  - $A$  là tập các giảng viên.  $B$  là tập các lớp.  $\mathcal{R} \subseteq A \times B$  là quan hệ “phân công giảng viên dạy lớp học”
  - $\mathcal{R} = \emptyset$ : không có giảng viên nào dạy bất kỳ lớp nào
  - $\mathcal{R} = A \times B$ : mỗi giảng viên dạy tất cả các lớp
- Biểu diễn một quan hệ bằng hình vẽ



**Hình:** (a) tương tự giản đồ Venn, (b) đồ thị, (c) hệ tọa độ Đề các

- Một quan hệ  $\mathcal{R}$  trong  $A$  được gọi là **quan hệ tương đương** (*equivalence relation*) nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau
  - Tính phản xạ (reflexive) Với mọi  $a$  thuộc  $A$ , ta có  $a\mathcal{R}a$
  - Tính đối xứng (symmetric) Với mọi  $a, b$  thuộc  $A$ , nếu ta có  $a\mathcal{R}b$  thì ta cũng có  $b\mathcal{R}a$
  - Tính bắc cầu (transitive) Với mọi  $a, b, c$  thuộc  $A$ , nếu ta có  $a\mathcal{R}b$  và  $b\mathcal{R}c$  thì ta cũng có  $a\mathcal{R}c$

## Bài tập 25

Trong mỗi trường hợp sau,  $\mathcal{R}$  có phải là quan hệ tương đương hay không?

- (1)  $\mathcal{R} = \{(p, q) \mid p \equiv q\}$  với  $p, q$  là các mệnh đề logic
- (2)  $\mathcal{R} = \{(A, B) \mid A \subseteq B\}$  với  $A, B$  là các tập hợp
- (3)  $\mathcal{R} = \{(A, B) \mid A = B\}$  với  $A, B$  là các tập hợp
- (4)  $\mathcal{R} = \{(a, b) \mid b \text{ chia hết cho } a\}$  với  $a, b$  là các số nguyên dương



# Hàm

## Định nghĩa hàm và một số khái niệm



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

32

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

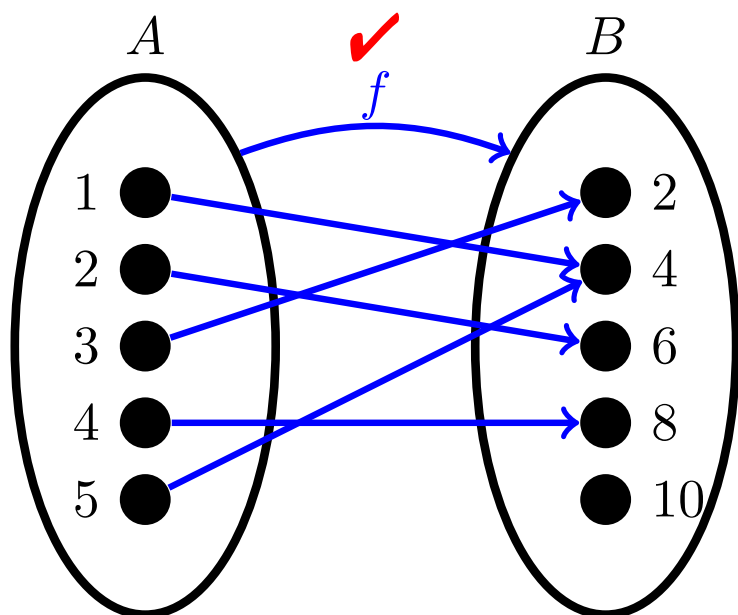
Một số công thức tổng hữu ích

- Với hai tập khác rỗng  $A, B$ , một **hàm (function)**  $f$  từ  $A$  đến  $B$ , ký hiệu  $f : A \rightarrow B$ , là một quan hệ giữa  $A$  và  $B$  gán **chính xác một phần tử của  $B$**  cho **mỗi phần tử của  $A$**

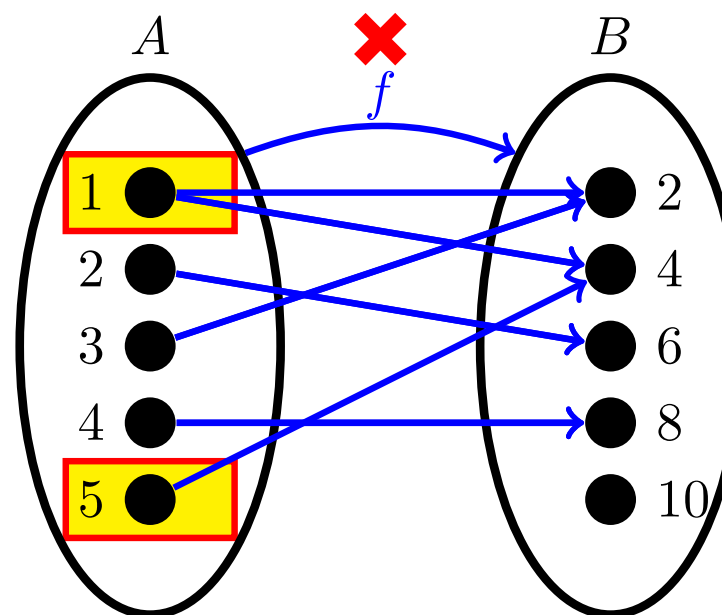
(1) Với mọi  $a \in A$ , tồn tại  $b \in B$  sao cho  $(a, b) \in f$

(2) Với  $b_1$  và  $b_2$  thuộc  $B$  sao cho  $(a, b_1) \in f$  và  $(a, b_2) \in f$ , ta có  $b_1 = b_2$

Nếu  $b$  là phần tử duy nhất thuộc  $B$  được gán cho phần tử  $a$  thuộc  $A$  bởi  $f$ , ta viết  $f(a) = b$



Hình: Hàm



Hình: Không phải hàm

# Hàm

Định nghĩa hàm và một số khái niệm



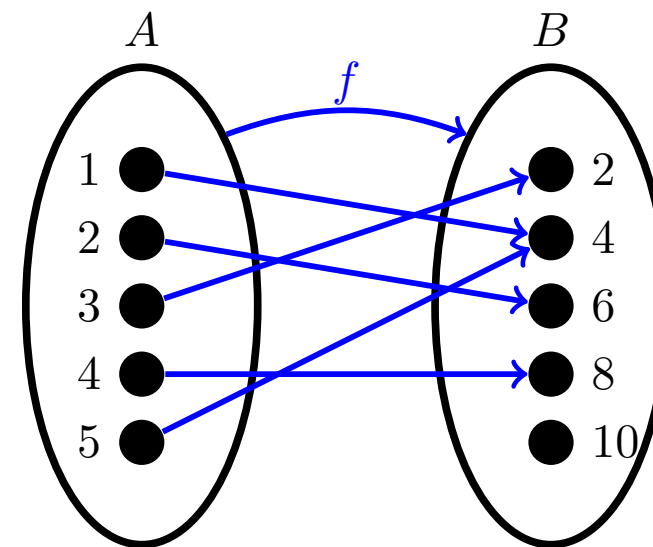
Giả sử  $f$  là một hàm từ  $A$  đến  $B$

- $A$  được gọi là **miền xác định (domain)** của  $f$
- $B$  được gọi là **miền giá trị (codomain)** của  $f$
- Nếu  $f(a) = b$ , ta gọi  $b$  là **ảnh (image)** của  $a$  và  $a$  là một **ngược ảnh (preimage)** của  $b$
- Ta cũng nói rằng  $f$  **ánh xạ**  $A$  đến  $B$

## Ví dụ 7

Với hàm  $f$  cho bởi hình bên

- Tập xác định  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Tập giá trị  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- $4 \in B$  là ảnh của cả  $1 \in A$  và  $5 \in A$



Hình:  $f : A \rightarrow B$

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

Hàm

Quan hệ

33

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

# Hàm

Định nghĩa hàm và một số khái niệm



Giả sử  $f$  là hàm từ  $A$  đến  $B$

- Tập hợp tất cả các ảnh của các phần tử thuộc  $A$  được gọi là **ảnh của  $A$  qua hàm  $f$** , ký hiệu  $f(A)$

- $f(A) \subseteq B$

- Với tập con  $S \subseteq A$ , **ảnh của  $S$  qua hàm  $f$** , ký hiệu  $f(S)$ , là tập tất cả các ảnh của các phần tử thuộc  $S$

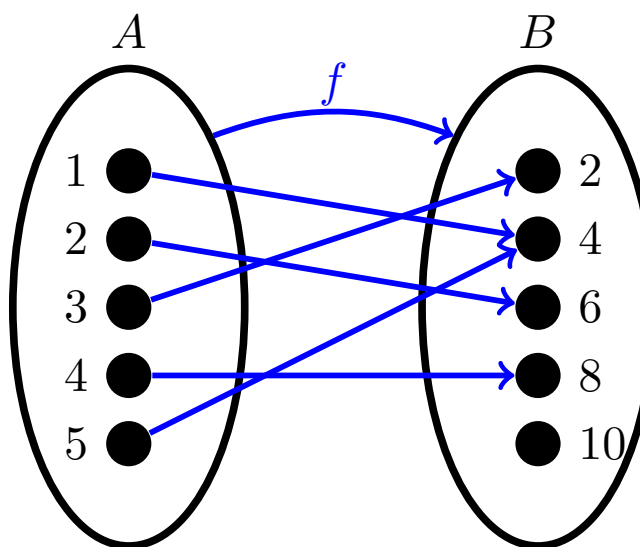
- $f(S) = \{t \mid \exists s \in S (t = f(s))\} = \{f(s) \mid s \in S\}$

- **Chú ý:**  $f(s)$  là một phần tử của  $B$  và  $f(S)$  là một tập con của  $B$

## Ví dụ 8

Với hàm  $f$  cho bởi hình bên

- $f(A) = \{2, 4, 6, 8\}$
- Với  $S = \{1, 2, 5\}$ , ta có  $f(S) = \{4, 6\}$



Hình:  $f : A \rightarrow B$

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

34

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

# Hàm

## Hàm tổng và hàm tích của hai hàm thực



Cho  $f_1$  và  $f_2$  là các hàm từ  $A$  đến  $\mathbb{R}$ . Ta định nghĩa  $f_1 + f_2$  và  $f_1 f_2$  là các hàm từ  $A$  đến  $\mathbb{R}$ , gọi là các **hàm thực (real-valued function)**, như sau. Với mọi  $x \in A$ ,

ký hiệu hàm

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ (f_1 f_2)(x) &= f_1(x) f_2(x)\end{aligned}$$

phép toán trong  $\mathbb{R}$

## Bài tập 26

Hãy kiểm tra lại rằng  $f_1 + f_2$  và  $f_1 f_2$  thực sự là các hàm

## Bài tập 27

Gọi  $F$  là tập hợp tất cả các hàm  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  với tập xác định và tập giá trị là tập các số thực. Các mệnh đề sau là đúng hay sai? Hãy giải thích đáp án của bạn

- (a)  $\forall c \in \mathbb{R} [\exists f \in F (f(0) = c)]$
- (b)  $\exists f \in F [\forall c \in \mathbb{R} (f(0) = c)]$
- (c)  $\exists f \in F [\forall c \in \mathbb{R} (f(c) = 0)]$

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

35

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

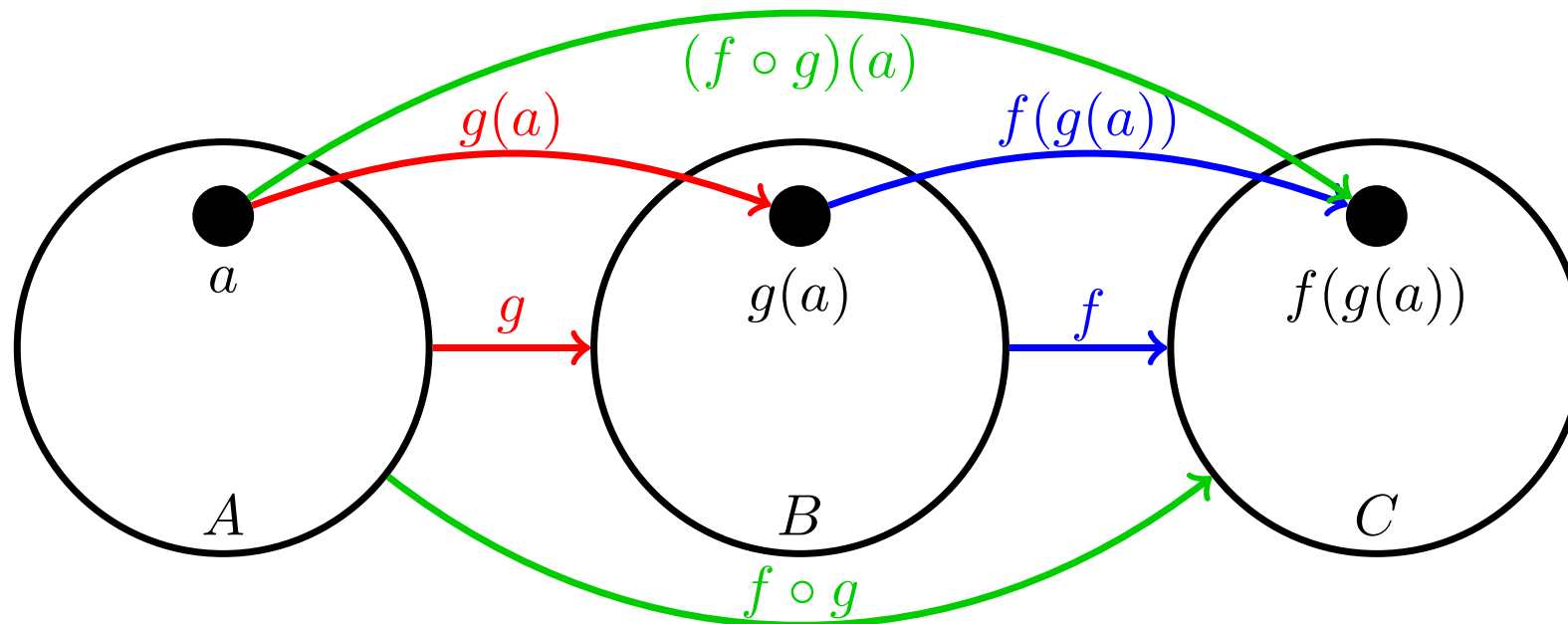
Một số công thức tổng hữu ích

- Với các hàm  $g : A \rightarrow B$  và  $f : B \rightarrow C$ , ta có thể định nghĩa **hợp (composition)** của  $f$  và  $g$ , ký hiệu  $f \circ g : A \rightarrow C$ , như sau

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

với mọi  $x \in A$

- **Chú ý:**  $f \circ g$  chỉ được định nghĩa khi **tập giá trị của  $g$  là tập con của tập xác định của  $f$**
- **Chú ý:** Toán tử “ $\circ$ ” không giao hoán, nghĩa là, **trong hầu hết mọi trường hợp,  $f \circ g \neq g \circ f$**



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

36

Một số hàm và toán tử

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

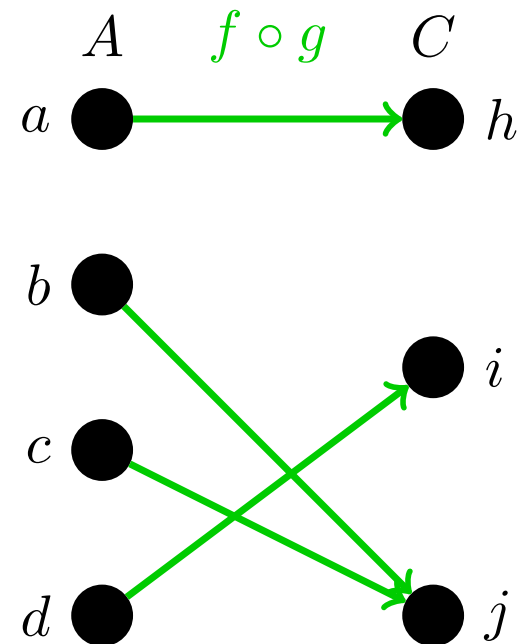
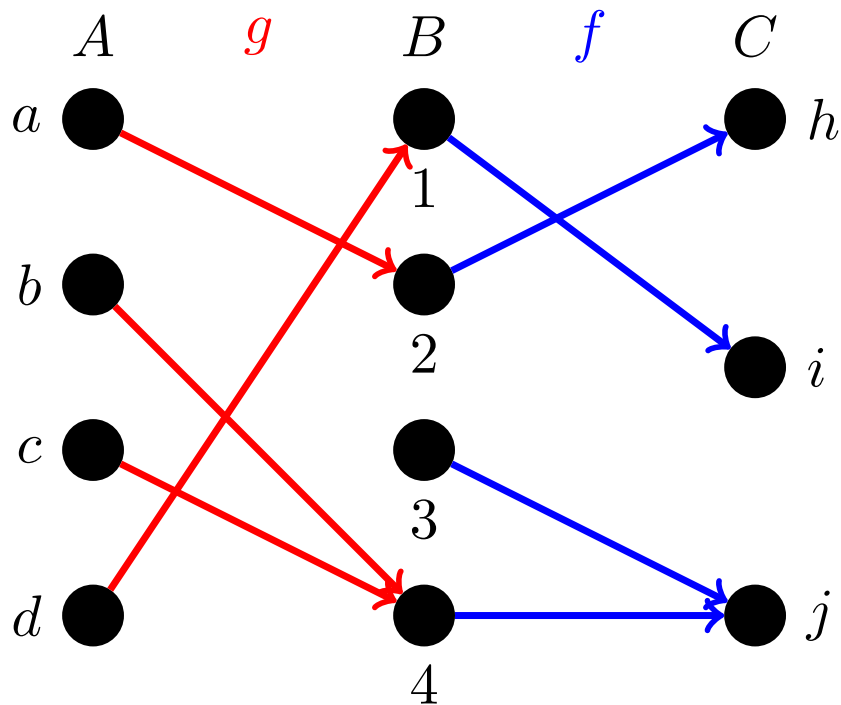
Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Ví dụ 9



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

37

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 28

Cho  $g : \{a, b, c\} \rightarrow \{a, b, c\}$  với  $g(a) = b$ ,  $g(b) = c$ , và  $g(c) = a$ .

Cho  $f : \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  với  $f(a) = 3$ ,  $f(b) = 2$ , và  $f(c) = 1$ .

Hãy tìm  $f \circ g$  và  $g \circ f$

# Hàm

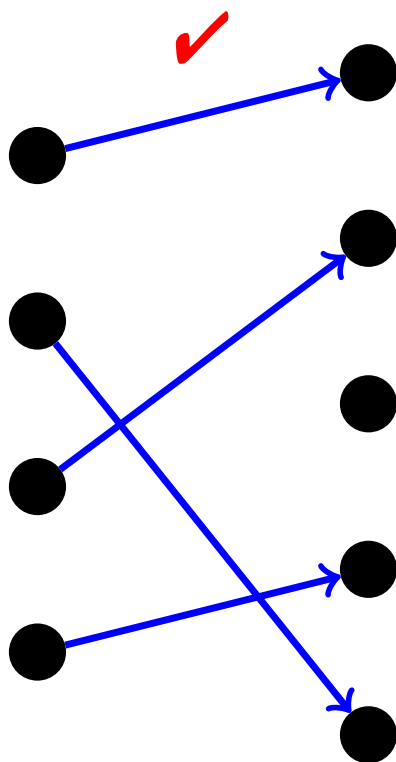
## Đơn ánh



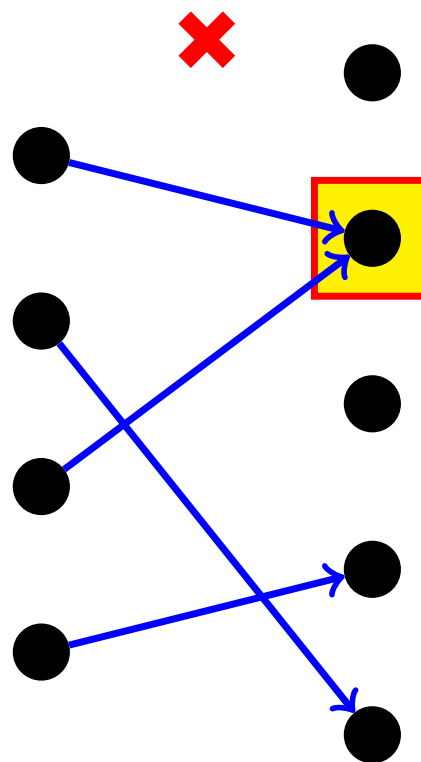
- Hàm  $f : A \rightarrow B$  được gọi là một **đơn ánh (injection)** hay một **hàm một-một (one-to-one function)** khi và chỉ khi  $f(a) = f(b)$  kéo theo  $a = b$  với mọi  $a$  và  $b$  thuộc tập xác định  $A$  của  $f$

$$\blacksquare \forall a, b (f(a) = f(b) \rightarrow a = b) \equiv \forall a, b (a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b))$$

## Ví dụ 10



Hình: Đơn ánh



Hình: Không phải đơn ánh

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

38

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

39

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 29

Hàm  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  trong mỗi trường hợp sau đây có phải là đơn ánh không?

(a)  $f(n) = n - 1$

(b)  $f(n) = n^2 + 1$

(c)  $f(n) = n^3$

(d)  $f(n) = \lceil n/2 \rceil$



Cho  $f : A \rightarrow B$  là một hàm trong đó  $A, B$  là các tập con của  $\mathbb{R}$

- $f$  được gọi là **tăng (increasing)** khi và chỉ khi với mọi  $x, y$  thuộc  $A$  thỏa mãn  $x < y$ , ta luôn có  $f(x) \leq f(y)$ 
  - $\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) \leq f(y))$
- $f$  được gọi là **thực sự tăng (strictly increasing)** khi và chỉ khi với mọi  $x, y$  thuộc  $A$  thỏa mãn  $x < y$ , ta luôn có  $f(x) < f(y)$ 
  - $\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) < f(y))$
- $f$  được gọi là **giảm (decreasing)** khi và chỉ khi với mọi  $x, y$  thuộc  $A$  thỏa mãn  $x < y$ , ta luôn có  $f(x) \geq f(y)$ 
  - $\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) \geq f(y))$
- $f$  được gọi là **thực sự giảm (strictly decreasing)** khi và chỉ khi với mọi  $x, y$  thuộc  $A$  thỏa mãn  $x < y$ , ta luôn có  $f(x) > f(y)$ 
  - $\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) > f(y))$

## Bài tập 30

Chứng minh nếu  $f$  là hàm thực sự tăng hoặc thực sự giảm thì  $f$  là đơn ánh

### Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

40

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

# Hàm

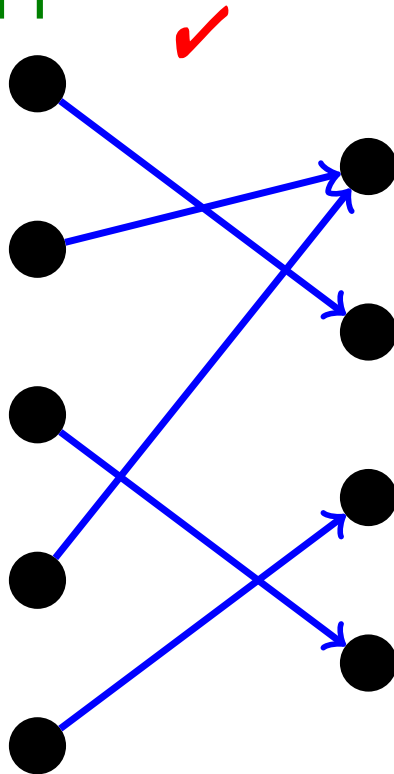
## Toàn ánh



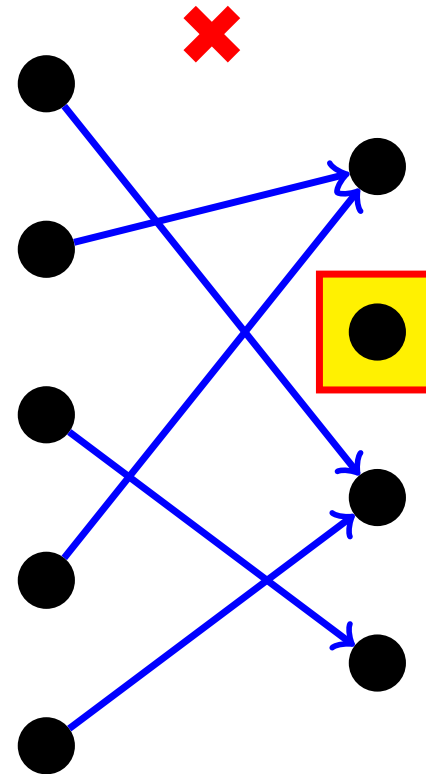
Hàm  $f : A \rightarrow B$  được gọi là một **toàn ánh (surjection)** khi và chỉ khi với mọi phần tử  $b$  thuộc  $B$  tồn tại một phần tử  $a$  thuộc  $A$  sao cho  $f(a) = b$

- $\forall b \in B \exists a \in A (f(a) = b)$
- $f(A) = B$  (ảnh của  $A$  qua  $f$  bằng với tập giá trị  $B$ )

### Ví dụ 11



Hình: Toàn ánh



Hình: Không phải toàn ánh

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

41

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

42

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 31

Hàm  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  trong mỗi trường hợp sau đây có phải là toàn ánh không?

(a)  $f(m, n) = 2m - n$

(b)  $f(m, n) = m^2 - n^2$

(c)  $f(m, n) = m + n + 1$

(d)  $f(m, n) = m^2 - 4$

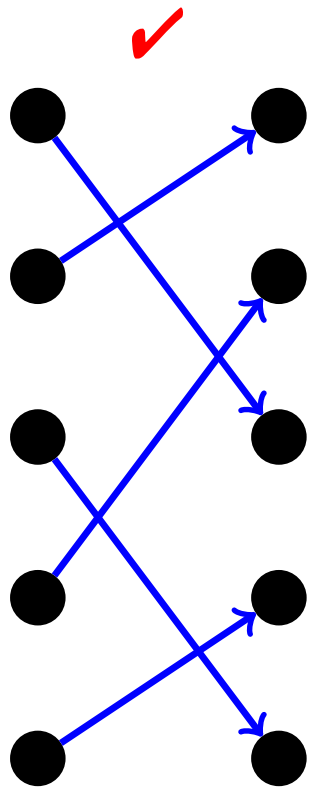
# Hàm

## Song ánh

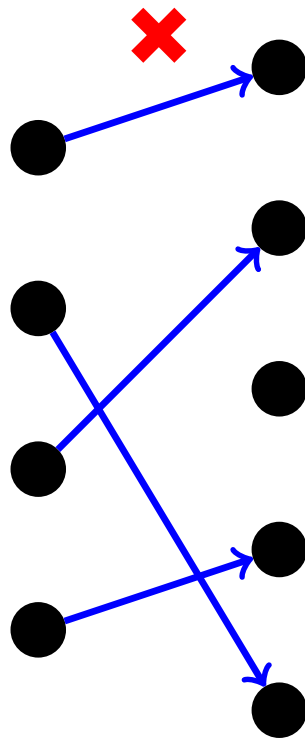


Hàm  $f : A \rightarrow B$  được gọi là một **song ánh (bijection)** khi và chỉ khi nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh

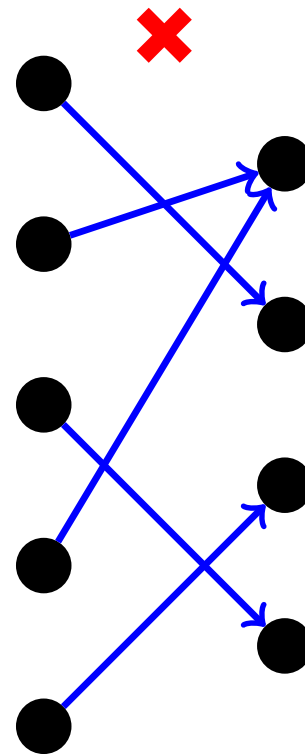
### Ví dụ 12



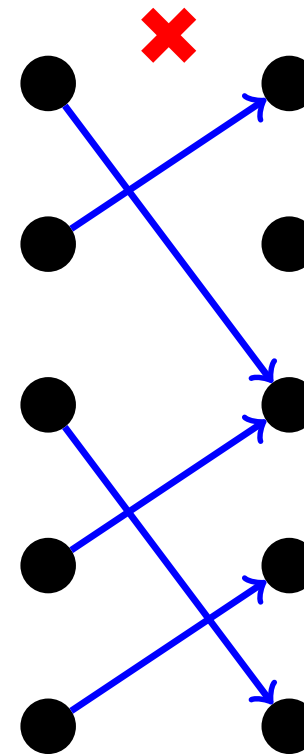
Hình: Song ánh



Hình: Đơn ánh, không toàn ánh



Hình: Toàn ánh, không đơn ánh



Hình: Không đơn ánh, không toàn ánh

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

#### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

#### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

43

Một số hàm và toán tử

#### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

#### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

44

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 32

Hàm  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  trong mỗi trường hợp sau đây có phải là song ánh không?

(a)  $f(x) = -3x + 4$

(b)  $f(x) = -3x^2 + 7$

(c)  $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$

(d)  $f(x) = x^5 + 1$

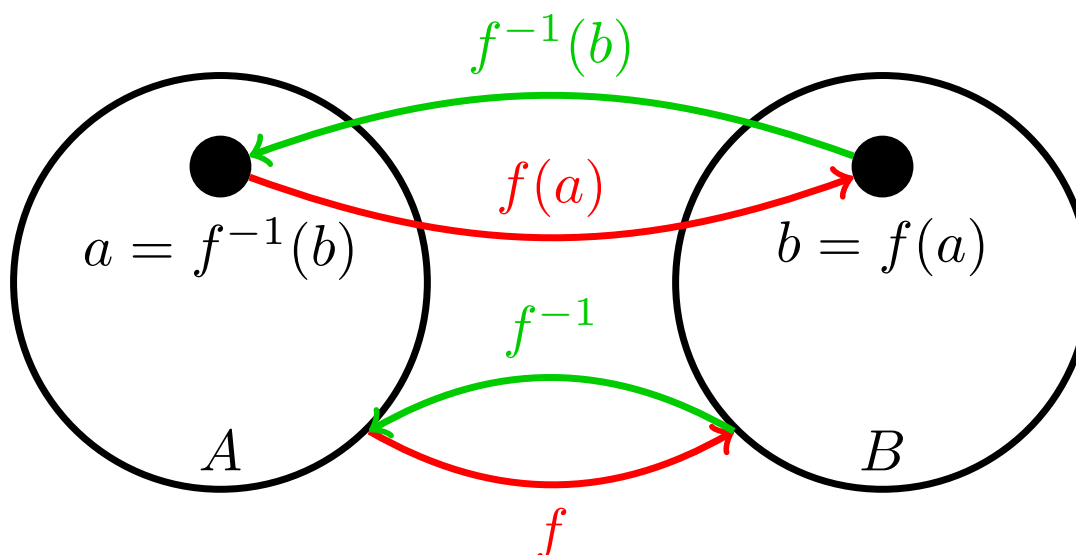
(e)  $f(x) = 2x + 1$

(f)  $f(x) = x^2 + 1$

(g)  $f(x) = x^3$

(h)  $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2) + 2$

- Cho  $f : A \rightarrow B$  là một song ánh. **Hàm ngược (inverse function)** của  $f$  là một hàm gán cho mỗi phần tử  $b \in B$  một phần tử duy nhất  $a \in A$  sao cho  $f(a) = b$ . Hàm ngược của  $f$  được ký hiệu là  $f^{-1} : B \rightarrow A$
- Một song ánh còn được gọi là một **hàm khả nghịch (invertible function)**





Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

46

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 33

*Chứng minh rằng  $f^{-1}$  là một song ánh*

## Bài tập 34

*Hàm ngược của các hàm sau có tồn tại hay không? Tại sao?*

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$

(b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

(c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x$

(d)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$

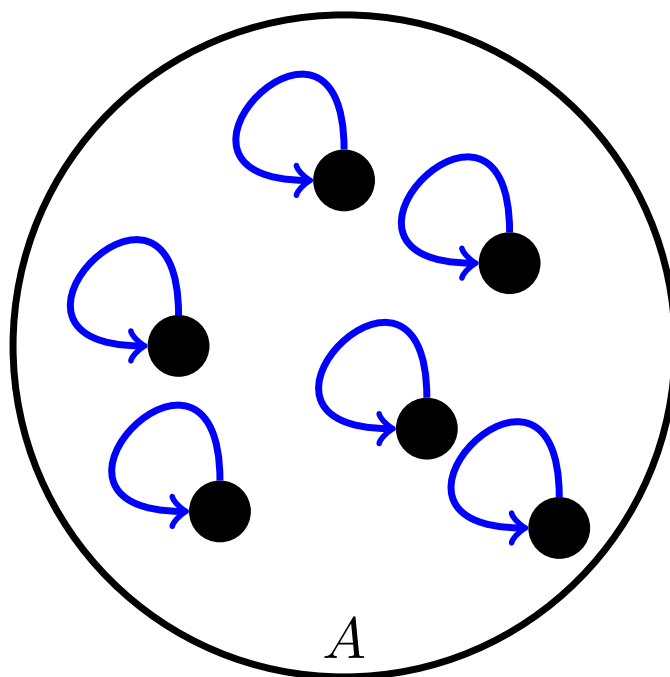
# Hàm

## Hàm đồng nhất



- Cho  $A$  là một tập hợp. **Hàm đồng nhất (identity function)** trên  $A$  là hàm  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  trong đó  $\text{id}_A(x) = x$  với mọi  $x \in A$
- $\text{id}_A$  là song ánh với mọi tập  $A$
- Với song ánh  $f : A \rightarrow B$  và hàm ngược của nó  $f^{-1} : B \rightarrow A$

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A$$



**Hình:** Hàm đồng nhất trên  $A$

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

47

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích



## Bài tập 35

Hãy tìm ví dụ một hàm  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  thỏa mãn

- (a)  $f$  là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
- (b)  $f$  là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
- (c)  $f$  là song ánh và  $f$  khác hàm đồng nhất trên  $\mathbb{N}$
- (d)  $f$  vừa không là đơn ánh vừa không là toàn ánh

## Bài tập 36

Cho các hàm  $g : A \rightarrow B$  và  $f : B \rightarrow C$ . Chứng minh rằng

- (a) Nếu cả  $g$  và  $f$  đều là đơn ánh thì  $f \circ g$  cũng là đơn ánh.
- (b) Nếu cả  $g$  và  $f$  đều là toàn ánh thì  $f \circ g$  cũng là toàn ánh.
- (c) Nếu  $f \circ g$  là toàn ánh thì  $f$  cũng là toàn ánh
- (d) Nếu  $f \circ g$  là đơn ánh thì  $g$  cũng là đơn ánh
- (e) Nếu  $f \circ g$  là song ánh thì  $g$  là toàn ánh khi và chỉ khi  $f$  là đơn ánh

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

48

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

49

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 37

*Tìm ví dụ các hàm  $f$  và  $g$  thỏa mãn  $f \circ g$  là song ánh, nhưng  $g$  không phải toàn ánh và  $f$  không phải đơn ánh.*

## Bài tập 38

*Gọi  $f : A \rightarrow B$  là một hàm với  $A, B$  là các tập hữu hạn thỏa mãn  $|A| = |B|$ . Chứng minh rằng  $f$  là đơn ánh khi và chỉ khi nó là toàn ánh*

# Hàm

## Hàm sàn và hàm trần



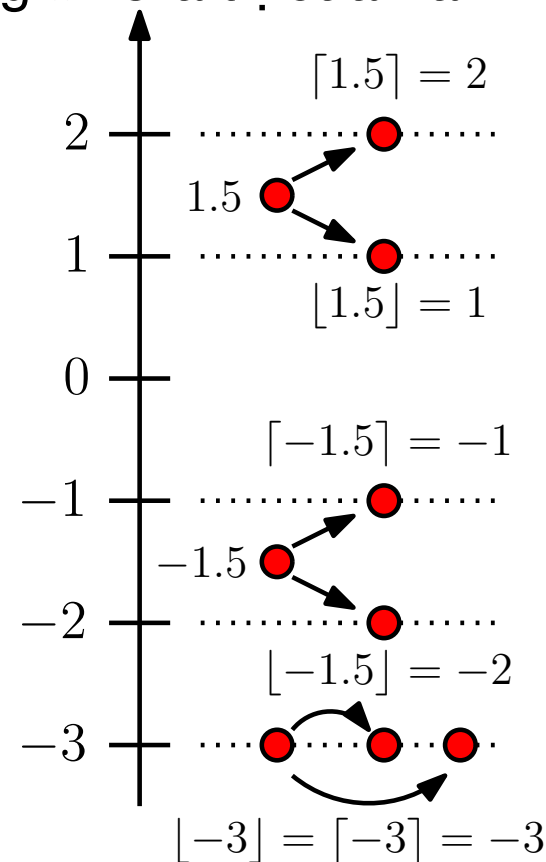
Trong toán rời rạc, ta thường dùng hai hàm sau

- **Hàm sàn (floor function)** gán cho số thực  $x$  số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng  $x$ . Giá trị của hàm sàn được ký hiệu là  $\lfloor x \rfloor$
- **Hàm trần (ceiling function)** gán cho số thực  $x$  số nguyên nhỏ nhất có giá trị lớn hơn hoặc bằng  $x$ . Giá trị của hàm trần được ký hiệu là  $\lceil x \rceil$

- Nếu  $x \notin \mathbb{Z}$  thì  $\lfloor -x \rfloor \neq -\lfloor x \rfloor$  và  $\lceil -x \rceil \neq -\lceil x \rceil$
- Nếu  $x \in \mathbb{Z}$  thì  $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$

### Ví dụ 13

- $\lfloor 1.5 \rfloor = 1, \lceil 1.5 \rceil = 2$
- $\lfloor -1.5 \rfloor = -2, \lceil -1.5 \rceil = -1$
- $\lfloor -3 \rfloor = -3, \lceil -3 \rceil = -3$



### Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản  
Các phép toán trên tập hợp  
Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ  
Định nghĩa hàm và một số khái niệm

50

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm  
Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm  
Một số công thức tổng hữu ích

76



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

51

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 39

Chứng minh các tính chất sau của hàm trần và hàm sàn, trong đó  $x \in \mathbb{R}$  và  $n \in \mathbb{Z}$

(1a)  $\lfloor x \rfloor = n$  khi và chỉ khi  $n \leq x < n + 1$

(1b)  $\lceil x \rceil = n$  khi và chỉ khi  $n - 1 < x \leq n$

(1c)  $\lfloor x \rfloor = n$  khi và chỉ khi  $x - 1 < n \leq x$

(1d)  $\lceil x \rceil = n$  khi và chỉ khi  $x \leq n < x + 1$

(2)  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

(3a)  $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

(3b)  $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

(4a)  $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

(4b)  $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

52

Một số hàm và toán tử

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 40

Chứng minh rằng nếu  $n \in \mathbb{N}$  thì  $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$  nếu  $n$  chẵn và  $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$  nếu  $n$  lẻ

## Bài tập 41

Chứng minh rằng nếu  $x \in \mathbb{R}$  thì  $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor$ . (**Gợi ý:** Khi xét các bài toán liên quan đến hàm sàn, một cách tiếp cận hữu ích là đặt  $x = n + \epsilon$  trong đó  $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$  và  $\epsilon$  là một số thực thỏa mãn  $0 \leq \epsilon < 1$ . Tương tự, với hàm trần, có thể đặt  $x = n - \epsilon$ )

# Dãy

## Định nghĩa dãy và một số khái niệm



### Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

#### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

#### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

#### Dãy

53

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

#### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Một **dãy (sequence)**  $\{a_n\}$  được xác định qua một hàm  $f : I \rightarrow A$  trong đó  $I \subseteq \mathbb{Z}$  là **tập các chỉ số (indices)** và  $A$  là tập bất kỳ
  - Thông thường,  $I = \mathbb{N}$  hoặc  $I = \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$
  - Ví dụ, dãy  $\{a_n\}$  xác định bởi  $f(n) = n^2$  với mọi số nguyên  $n \geq 0$  có các phần tử  $0, 1, 4, 9, 16, \dots$
- Với  $i \in I$ ,  $a_i$  là ảnh của  $i$  qua  $f$ , nghĩa là  $a_i = f(i)$ 
  - Ta gọi  $a_i$  là một **số hạng (term)** của dãy  $\{a_n\}$
  - $i$  là **chỉ số (index)** của  $a_i$
- Đôi khi, thay vì ký hiệu  $\{a_n\}$ , có thể viết **“dãy  $a_1, a_2, \dots$ ”** để chắc chắn rằng tập các chỉ số  $I$  được xác định rõ ràng
- Có thể mô tả một dãy bằng cách liệt kê một vài số hạng đầu tiên hoặc cuối cùng của dãy và sử dụng “...” cho phần còn lại
  - Ví dụ, có thể mô tả dãy  $\{a_n\}$  ở trên bằng cách viết  $\{a_n\} = 0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots$

# Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

54

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 42

Trong mỗi trường hợp sau, tìm các số hạng  $a_0, a_1, \dots, a_5$  của dãy  $\{a_n\}$  nếu

(a)  $a_n = 2^{n-1}$

(b)  $a_n = 1 + (-1)^n$

(c)  $a_n = (n + 1)^{n+1}$

(d)  $a_n = 7$

(e)  $a_n = -(-2)^n$

(f)  $a_n = \lfloor n/2 \rfloor$

# Dãy

## Cấp số nhân và cấp số cộng



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

55

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

76

- Một **cấp số nhân (geometric progression)** là một dãy có dạng

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots$$

trong đó **số hạng đầu tiên (initial term)**  $a$  và **công bội (common ratio)**  $r$  là các số thực

- Ví dụ, với  $n = 0, 1, 2, \dots$

- $\{b_n\}$  với  $b_n = (-1)^n$

số hạng đầu tiên 1, công bội  $-1$

- $\{c_n\}$  với  $c_n = 6 \cdot (1/3)^n$

số hạng đầu tiên 6, công bội  $1/3$

- Một **cấp số cộng (arithmetic progression)** là một dãy có dạng

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$$

trong đó **số hạng đầu tiên (initial term)**  $a$  và **công sai (common difference)**  $d$  là các số thực

- Ví dụ, với  $n = 0, 1, 2, \dots$

- $\{d_n\}$  với  $d_n = -1 + 4n$

số hạng đầu tiên  $-1$ , công sai 4

- $\{e_n\}$  với  $e_n = 7 - 3n$

số hạng đầu tiên 7, công sai  $-3$



# Dãy

## Dãy cho bởi hệ thức truy hồi



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

56

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Một **hệ thức truy hồi (recurrence relation)** cho dãy  $\{a_n\}$  là một **phương trình biểu diễn  $a_n$  thông qua một hoặc nhiều số hạng trước đó của dãy** với mọi số nguyên  $n$  thỏa mãn  $n \geq n_0$  với  $n_0$  là một số nguyên không âm.
  - Với dãy  $\{a_n\} = 0, 1, 4, 9, 16 \dots (n \geq 0)$ ,  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  với  $n \geq 1$  là một hệ thức truy hồi cho  $\{a_n\}$  (ở đây  $n_0 = 1$ )
- Để **định nghĩa một dãy  $\{a_n\}$  thông qua hệ thức truy hồi**, ta cần thêm **các điều kiện ban đầu (initial conditions)** bằng cách định nghĩa các phần tử trước  $a_{n_0}$  trong dãy
  - Để **định nghĩa  $\{a_n\}$  qua hệ thức  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  ( $n \geq 1$ )**, ta cần thêm **điều kiện ban đầu  $a_0 = 0$**
- Một dãy được gọi là một **nghiệm (solution)** của một hệ thức truy hồi nếu **các số hạng của dãy thỏa mãn hệ thức đó**
- **Giải hệ thức truy hồi với các điều kiện ban đầu** nghĩa là **tìm một công thức tường minh cho các số hạng của dãy**
  - Một công thức tường minh cho dãy  $\{a_n\}$  định nghĩa bởi  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  với  $n \geq 1$  và điều kiện ban đầu  $a_0 = 0$  là  $a_n = n^2 (n \geq 0)$

### Ví dụ 14

- **Dãy  $\{b_n\}$  thỏa mãn hệ thức truy hồi  $b_n = -b_{n-1}$  với  $n \geq 1$  và điều kiện ban đầu  $b_0 = 1$** 
  - $\{b_n\} = 1, -1, 1, -1, \dots$
- **Dãy  $\{s_n\}$  thỏa mãn hệ thức truy hồi  $s_n = s_{n-1} - s_{n-2}$  với  $n \geq 2$  và điều kiện ban đầu  $s_0 = 3$  và  $s_1 = 5$** 
  - $\{s_n\} = 3, 5, 2, -3, -5, \dots$
- ***Dãy Fibonacci (Fibonacci sequence)*  $\{f_n\}$  ( $n \geq 0$ ) được định nghĩa bởi điều kiện ban đầu  $f_0 = 0, f_1 = 1$  và hệ thức truy hồi  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  với mọi số nguyên  $n \geq 2$** 
  - $\{f_n\} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$
- ***Dãy giai thừa (factorial sequence)*  $\{g_n\}$  được định nghĩa bởi điều kiện ban đầu  $g_0 = 1$  và hệ thức truy hồi  $g_n = ng_{n-1}$  với mọi số nguyên  $n \geq 1$** 
  - $\{g_n\} = 1, 1, 2, 6, 24, \dots$

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

#### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

#### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

#### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

57

Một số dãy đặc biệt

#### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

# Dãy

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

58

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Ví dụ 15

Giải hệ thức truy hồi  $d_n = d_{n-1} + 4$  ( $n \geq 1$ ) với điều kiện ban đầu  $d_0 = -1$

### Hướng suy luận

- (1) Từ hệ thức truy hồi, ta cũng có  $d_{n-1} = d_{n-2} + 4$
- (2) Thay (2) vào hệ thức ban đầu  
$$d_n = (d_{n-2} + 4) + 4 = d_{n-2} + 2 \cdot 4$$
- (3) Từ hệ thức truy hồi, ta cũng có  $d_{n-2} = d_{n-3} + 4$
- (4) Thay (4) vào (3), ta thu được  $d_n = d_{n-3} + 3 \cdot 4$
- (5) Lặp lại quá trình trên, ta “đoán”  $d_n = d_{n-r} + r \cdot 4$
- (6) Để có một công thức tường minh cho  $d_n$ , ta cần  $n - r = 0$ , tức là  $r = n$ . Khi đó  $d_n$  được biểu diễn qua  $d_0$  đã cho trước và  $n = r$ .
- (7) Tóm lại, ta có  $d_n = -1 + 4n$



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

59

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

### Ví dụ 16

Giải hệ thức truy hồi  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  ( $n \geq 1$ ) với điều kiện ban đầu  $a_0 = 0$

(1) Từ hệ thức truy hồi, ta có  $a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-1) - 1$

(2) Thay vào hệ thức ban đầu,

$$a_n = (a_{n-2} + 2(n-1) - 1) + 2n - 1 = a_{n-2} + 4n - 4$$

(3) Từ hệ thức truy hồi, ta có  $a_{n-2} = a_{n-3} + 2(n-2) - 1$

(4) Thay vào (2),

$$a_n = (a_{n-3} + 2(n-2) - 1) + 4n - 4 = a_{n-3} + 6n - 9$$

(5) Từ hệ thức truy hồi, ta có  $a_{n-3} = a_{n-4} + 2(n-3) - 1$

(6) Thay vào (4),

$$a_n = (a_{n-4} + 2(n-3) - 1) + 6n - 9 = a_{n-4} + 8n - 16$$

(7) Lặp lại quá trình trên, ta “đoán”  $a_n =$

(8) Để có một công thức tường minh cho  $a_n$ , ta cần  $n - r = 0$ , tức là  $r = n$ . Khi đó  $a_n$  được biểu diễn qua  $a_0$  đã cho trước và  $n = r$

(9) Tóm lại  $a_n =$



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

60

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 43

Giải các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau

(a)  $a_n = -a_{n-1}, a_0 = 5$

(e)  $a_n = 2a_{n-1} - 3, a_0 = -1$

(b)  $a_n = a_{n-1} + 3, a_0 = 1$

(f)  $a_n = (n+1)a_{n-1}, a_0 = 2$

(c)  $a_n = a_{n-1} - n, a_0 = 4$

(g)  $a_n = 2na_{n-1}, a_0 = 3$

(d)  $a_n = 5a_{n-1}, a_0 = 1$

(h)  $a_n = -a_{n-1} + n - 1, a_0 = 7$

## Bài tập 44

Giả thiết dân số thế giới năm 2023 là 8 tỷ người và tăng theo tỷ lệ 0.8%/năm. Với  $n \geq 1$ ,

(a) Xây dựng hệ thức truy hồi để tính dân số thế giới  $n$  năm sau 2023

(b) Tìm công thức tường minh để tính dân số thế giới  $n$  năm sau 2023

(c) Dân số thế giới năm 2057 sẽ là bao nhiêu?

# Dãy

Tìm công thức tường minh của một dãy



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

61

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

76

- Cho trước một vài phần tử của dãy
- Yêu cầu tìm
  - một công thức tường minh của các số hạng
  - hoặc một phương thức để liệt kê các phần tử của dãy

## Ví dụ 17

Số tiếp theo trong dãy có thể là bao nhiêu?

- 1, 2, 3, 4, ...
- 1, 3, 5, 7, 9, ...
- 2, 3, 5, 7, 11, ...

## Ví dụ 18

Các số hạng tiếp theo có thể là bao nhiêu?

- 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4
- 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55

# Dãy

Tìm công thức tường minh của một dãy



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

62

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Một phương pháp hữu ích để tìm công thức tổng quát cho các số hạng của một dãy là *so sánh các số hạng của dãy cần tìm với các số hạng của một dãy đã biết* (ví dụ như cấp số cộng, cấp số nhân, dãy số chính phương, v.v...)

Công thức	Mười số hạng đầu tiên
$n^2$	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...
$n^3$	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ...
$n^4$	1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000, ...
$f_n$	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...
$2^n$	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...
$3^n$	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, ...
$n!$	1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, ...

- Bảng Tra Cứu Dãy Số Nguyên Trực Tuyến (The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences - OEIS)

<https://oeis.org/>

# Dãy

Tìm công thức tường minh của một dãy



## Bài tập 45

Với mỗi dãy số nguyên sau, hãy tìm một công thức đơn giản hoặc một cách để tìm các số hạng tiếp theo của dãy. Giả sử công thức bạn tìm ra là đúng, hãy tìm ba số hạng tiếp theo của dãy

- (a)  $1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, \dots$
- (b)  $1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, \dots$
- (c)  $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \dots$
- (d)  $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \dots$
- (e)  $15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, \dots$
- (f)  $3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, \dots$
- (g)  $2, 16, 54, 128, 250, 432, 686, \dots$
- (h)  $2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321, \dots$

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

63

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích



# Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

64

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

76

- Cho **dãy**  $\{a_n\}$ , một số nguyên **giới hạn dưới (lower limit)**  $m$ , và một số nguyên **giới hạn trên (upper limit)**  $n \geq m$ . **Tổng (summation)** của các số hạng  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$  có thể được viết là

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

$$\sum_{j=m}^n a_j$$

$$\sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

- Ở đây,  $j$  được gọi là **chỉ số lấy tổng (index of summation)** và được chọn hoàn toàn tùy ý

$$\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{k=m}^n a_k$$

# Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

65 Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Với tập chỉ số  $S$  bất kỳ, ta có thể viết

$$\sum_{j \in S} a_j$$

- Với  $\{a_n\}$  là dãy vô hạn, ta có thể viết

$$\sum_{i=j}^{\infty} a_i = a_j + a_{j+1} + \dots$$

- Tổng các giá trị của một hàm  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  với  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$

$$\sum_{x \in X} f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \dots$$

- Nếu  $X = \{x \mid P(x)\}$  với vị từ  $P(x)$  nào đó, ta cũng có thể viết

$$\sum_{P(x)} f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \dots$$

# Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

66

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Ví dụ 19

$$\sum_{j=1}^4 j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

$$\sum_{\substack{(0 \leq x \leq 10) \\ \wedge (x \text{ chẵn})}} x^2 = 0 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2$$

76

# Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

67 Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Bài tập 46

Sử dụng ký hiệu tổng để viết lại các công thức sau

(a)  $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$

(b)  $1 + 5 + 9 + 13 + \cdots + 425$

(c)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{50}$

## Bài tập 47

Viết lại các tổng sau dưới dạng công thức dài hơn

(a)  $\sum_{k=1}^{100} (3 + 4k)$

(b)  $\sum_{k=2}^{50} \frac{1}{k^2 - 1}$

# Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

68

76

- **Tổng hằng số:** Với hằng số  $c$  bất kỳ,

$$\sum_{n=i}^j c = (j - i + 1) \cdot c$$

- **Phân phối:** Với hằng số  $c$  bất kỳ,

$$\sum_{n=i}^j c f(n) = c \sum_{n=i}^j f(n)$$

- **Giao hoán:**

$$\sum_{n=i}^j (f(n) + g(n)) = \sum_{n=i}^j f(n) + \sum_{n=i}^j g(n)$$

# Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

69

76

## ■ Đổi chỉ số:

$$\sum_{i=j}^m f(i) = \sum_{k=j+n}^{m+n} f(k-n)$$

■ Ví dụ  $\sum_{i=1}^4 i^2 = \sum_{k=3}^6 (k-2)^2$  (đặt  $k = i + 2$ )

## ■ Tách tổng: Với $j \leq m < k$

$$\sum_{i=j}^k f(i) = \sum_{i=j}^m f(i) + \sum_{i=m+1}^k f(i)$$

## ■ Đảo thứ tự:

$$\sum_{i=0}^k f(i) = \sum_{i=0}^k f(k-i)$$

# Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

70

76

- Với  $\{a_n\}$  là cấp số nhân có số hạng đầu tiên  $a$  và công bội  $r$ , tổng của  $n + 1$  số hạng đầu tiên của dãy là

$$S = \sum_{i=0}^n ar^i$$

- Công thức tường minh

$$S = \sum_{i=0}^n ar^i = \begin{cases} \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} & \text{nếu } r \neq 1 \\ (n + 1)a & \text{nếu } r = 1 \end{cases}$$

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + ar^{n+1}$$

$$rS - S = ar^{n+1} - a$$

# Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

71

76

$$rS = r \sum_{i=0}^n ar^i$$

$$= \sum_{i=0}^n ar^{i+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k$$

$$= \sum_{k=1}^n ar^k + \sum_{k=n+1}^{n+1} ar^k$$

$$= \left( \sum_{k=1}^n ar^k + ar^0 \right) + (ar^{n+1} - ar^0)$$

$$= \sum_{k=0}^n ar^k + (ar^{n+1} - a)$$

$$= S + (ar^{n+1} - a)$$

công thức của  $S$

phân phối

đổi chỉ số,  $k = i + 1$

tách tổng

thêm và bớt  $ar^0 = a$

tách tổng

công thức của  $S$



# Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



## Ví dụ 20

Tìm công thức tường minh cho tổng  $T = \sum_{i=1}^n i$

$$T = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$T = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1$$

$$2T = (n + 1) \cdot n$$

## Bài tập 48

Với  $\{a_n\}$  là cấp số cộng có số hạng đầu tiên  $a$  và công sai  $d$ , tổng của  $n + 1$  số hạng đầu tiên của dãy là

$$T = \sum_{i=0}^n (a + id)$$

Hãy tìm công thức tường minh cho  $T$

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

72

76

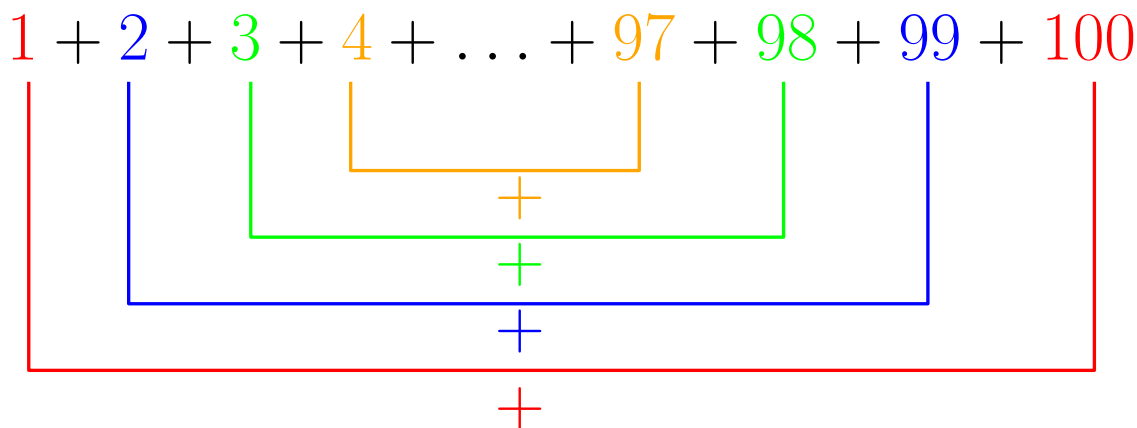
# Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



## Ví dụ 21

Phương pháp của Gauss để tính  $\sum_{i=1}^{100} i$



## Bài tập 49

Tìm công thức tường minh cho  $T = \sum_{i=1}^n i$  sử dụng phương pháp

tương tự như ví dụ trên. Có thể áp dụng phương pháp tương tự cho Bài tập 48 không?

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

### Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

### Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

### Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

### Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

73

76

# Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

## Ví dụ 22

Tìm công thức tường minh của  $T = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  với  $x$  là số thực thỏa

mãn  $-1 < x < 1$

Ta đã chứng minh

$$\sum_{n=0}^k x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}.$$

Do  $-1 < x < 1$ ,  $x^{k+1} \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Ta có

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k x^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}$$

74

76

# Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

## Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

## Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

## Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

## Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

Tổng	Công thức tương minh
$\sum_{k=0}^n ar^k \ (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} \ (r \neq 1)$
$\sum_{k=1}^n k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^n k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^n k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \ (-1 < x < 1)$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \ (-1 < x < 1)$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

75

76

# Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



## Bài tập 50

Tính các tổng sau

$$(a) \sum_{k=100}^{200} k \quad (b) \sum_{k=99}^{200} k^3 \quad (c) \sum_{10}^{20} k^2(k-3)$$

## Bài tập 51

(a) Chứng minh rằng  $\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ , trong đó

$a_0, a_1, \dots, a_n$  là một dãy gồm các số thực

(b) Sử dụng đẳng thức  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  và phần (a) để

$$\text{tính } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

## Bài tập 52

Lấy tổng cả hai vế của đẳng thức  $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$  từ  $k = 1$  đến  $k = n$  và sử dụng Bài tập ??(a) để tìm một công thức tường minh cho  $\sum_{k=1}^n (2k - 1)$  (tổng  $n$  số tự nhiên lẻ đầu tiên)

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Các phép toán trên tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

Hàm

Quan hệ

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

Một số hàm và toán tử

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

76

Một số công thức tổng hữu ích

76

Part I

Phụ lục

# Nội dung



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Nghịch lý

Lực lượng của tập vô hạn

Định nghĩa

Tập đếm được và không đếm được

Tập hợp  
Nghịch lý

Lực lượng của tập vô hạn  
Định nghĩa  
Tập đếm được và không đếm được

- Chúng ta đang học một *lý thuyết tập hợp ngây thơ (naive set theory)*
  - Định nghĩa bằng ngôn ngữ tự nhiên, không chặt chẽ về mặt toán học
  - Mô tả các khía cạnh của các tập hợp toán học quen thuộc trong toán rời rạc
  - Bản thân lý thuyết này có chứa các *nghịch lý (paradox)* (= một phát biểu tự phủ định chính nó mặc dù lúc đầu nhìn có vẻ đúng)
- *Nghịch lý Russell* (Đặt theo tên nhà triết học, nhà logic học, nhà toán học người Anh Bertrand Russell (1872–1970))
  - Gọi  $S$  là tập *tất cả các tập hợp không chứa chính nó như là một phần tử*, nghĩa là  $S = \{A \mid A \text{ là một tập hợp và } A \notin A\}$ 
    - Chú ý rằng *theo định nghĩa tập hợp ta đã học, tồn tại một tập hợp chứa chính nó như là một phần tử*. Ví dụ xét *tập  $T$  các tập hợp có chứa ít nhất một phần tử*
  - *Liệu  $S$  có phải là một phần tử của chính nó hay không*, nói cách khác, liệu  $S \in S$ ?



# Lực lượng của tập vô hạn

## Định nghĩa



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Nghịch lý

Lực lượng của tập vô hạn

3

Định nghĩa

Tập đếm được và không đếm được

- **Nhắc lại:** *Lực lượng (cardinality)* của một tập  $A$ , ký hiệu  $|A|$ , là số phần tử khác biệt mà  $A$  có
- Các tập  $A$  và  $B$  *có cùng lực lượng*, ký hiệu  $|A| = |B|$ , khi và chỉ khi tồn tại một *song ánh* từ  $A$  đến  $B$
- Nếu tồn tại một *đơn ánh* từ  $A$  đến  $B$ , ta nói “lực lượng của  $A$  nhỏ hơn hoặc bằng lực lượng của  $B$ ”, và ký hiệu  $|A| \leq |B|$
- Khi  $|A| \leq |B|$  và hai tập  $A, B$  có lực lượng khác nhau, ta nói “lực lượng của  $A$  nhỏ hơn lực lượng của  $B$ ”, và ký hiệu  $|A| < |B|$

## Bài tập 53

Chứng minh rằng  $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$  với mọi tập hợp  $A$ , trong đó  $\mathcal{P}(A)$  là tập tất cả các tập hợp con của  $A$

## Bài tập 54

Tập  $2\mathbb{Z}$  gồm các số nguyên chẵn có cùng lực lượng với tập số nguyên  $\mathbb{Z}$  hay không?

8

# Lực lượng của tập vô hạn

## Định nghĩa



### Định lý 1: Định lý Cantor

*Không tồn tại một toàn ánh  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  với  $A$  là một tập hợp bất kỳ và  $\mathcal{P}(A)$  là tập tất cả các tập con của  $A$*

### Chứng minh.

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng

- Giả sử tồn tại toàn ánh  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$
- Ta định nghĩa tập con  $G \subseteq A$  như sau

$$G := \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$$

- Do  $f$  là toàn ánh, tồn tại  $a \in A$  sao cho  $G = f(a)$
- Xét hai trường hợp
  - Nếu  $a \in G$  thì theo định nghĩa của  $G$ , ta có  $a \notin f(a) = G$ . Đây là một mâu thuẫn
  - Nếu  $a \notin G = f(a)$  thì  $a \in f(a)$ . Do đó theo định nghĩa của  $G$ , ta có  $a \in G$ . Đây là một mâu thuẫn

Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Nghịch lý

Lực lượng của tập vô hạn

4

Định nghĩa

Tập đếm được và không đếm được

8

# Lực lượng của tập vô hạn

Tập đếm được và không đếm được



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Nghịch lý

Lực lượng của tập vô hạn

Định nghĩa

Tập đếm được và không đếm được

5

- Một tập có hữu hạn số phần tử hoặc có cùng lực lượng với tập các số nguyên dương  $\mathbb{Z}^+$  được gọi là **tập đếm được** (*countable set*) và ngược lại thì gọi là **tập không đếm được** (*uncountable set*)
  - Có thể liệt kê các phần tử của tập đếm được theo thứ tự: phần tử thứ 1, phần tử thứ 2, v.v...
- Khi một tập vô hạn  $S$  là tập đếm được, ta ký hiệu lực lượng của  $S$  là  $\aleph_0$  ("aleph null") và viết  $|S| = \aleph_0$

## Ví dụ 23

Tập các số tự nhiên  $\mathbb{N}$  là tập đếm được

0	1	2	3	4	...
↕	↕	↕	↕	↕	
1	2	3	4	5	...

## Ví dụ 24

Tập các số nguyên dương lẻ là tập đếm được

1	2	3	4	5	...
↕	↕	↕	↕	↕	
1	3	5	7	9	...

8

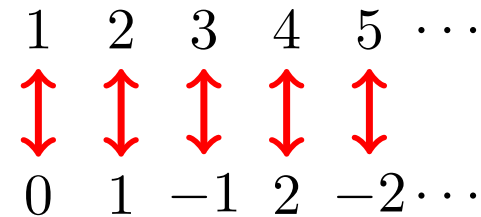
# Lực lượng của tập vô hạn

Tập đếm được và không đếm được



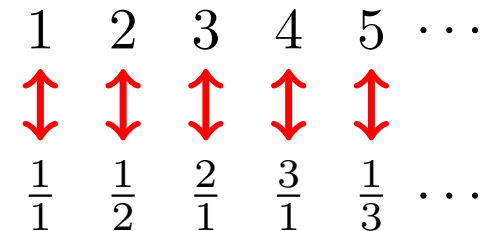
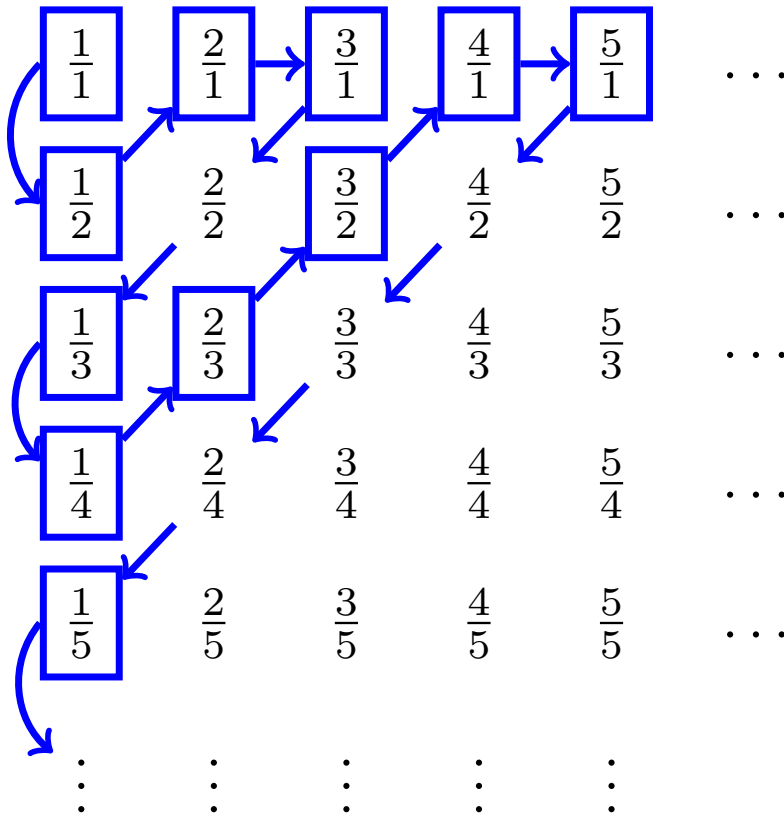
## Ví dụ 25

Tập các số nguyên  $\mathbb{Z}$  là tập đếm được



## Ví dụ 26

Tập các số hữu tỷ dương  $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+\}$  là tập đếm được



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Nghịch lý

Lực lượng của tập vô hạn

Định nghĩa

Tập đếm được và không đếm được

6

8

# Lực lượng của tập vô hạn

Tập đếm được và không đếm được



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Nghịch lý

Lực lượng của tập vô hạn

Định nghĩa

Tập đếm được và không đếm được

Ta chứng minh *tập số thực  $\mathbb{R}$  là tập không đếm được* bằng phương pháp phản chứng sử dụng *lập luận đường chéo của Cantor (Cantor diagonalization argument)*

- Giả sử  $\mathbb{R}$  là tập đếm được. Do mọi tập con của một tập đếm được cũng là một tập đếm được (*tại sao?*), tập các số thực nằm giữa 0 và 1 cũng là tập đếm được
- Sắp thứ tự các số thực giữa 0 và 1:  $r_1, r_2, \dots$

$$r_1 = 0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14} \dots$$

$$r_2 = 0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{24} \dots$$

$$r_3 = 0.d_{31}d_{32}d_{33}d_{34} \dots$$

$$r_4 = 0.d_{41}d_{42}d_{43}d_{44} \dots$$

$\vdots$

trong đó  $d_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

7

8

# Lực lượng của tập vô hạn

Tập đếm được và không đếm được



Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Tập hợp

Nghịch lý

Lực lượng của tập vô hạn

Định nghĩa

Tập đếm được và không đếm được

8

- Xây dựng một số thực  $r = 0.d_1d_2d_3d_4 \dots$  mới trong đó

$$d_i = \begin{cases} 4 & \text{nếu } d_{ii} \neq 4 \\ 5 & \text{nếu } d_{ii} = 4 \end{cases}$$

- $r$  không bằng bất cứ số nào trong các số  $r_1, r_2, \dots$  vì nó luôn khác  $r_i$  ở vị trí thứ  $i$  sau “0.”
- Do đó  $r$  là một số thực giữa 0 và 1 không nằm trong danh sách  $r_1, r_2, \dots$ , do mỗi số thực có một biểu diễn thập phân duy nhất
- Tóm lại, không phải mọi số thực giữa 0 và 1 đều được liệt kê theo thứ tự  $r_1, r_2, \dots$ , và do đó tập các số thực giữa 0 và 1 là tập không đếm được
- Nếu tập con của một tập là không đếm được thì tập đó cũng không đếm được (*tại sao?*), suy ra tập số thực  $\mathbb{R}$  là không đếm được

8