VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Các phương pháp đếm I

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Các nguyên lý đếm cơ bản
- Quy tắc song ánh
- Quy tắc nhân và Quy tắc cộng
- Nguyên lý bù trừ
- Quy tắc chia

Nguyên lý chuồng bồ câu

- *Quy tắc song ánh (The Bijection Rule):* Nếu $f : A \to B$ là một song ánh, trong đó A và B là các tập hữu hạn, thì $|A| = |B|$

Ví dụ 1

Cho tập hợp $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Mỗi tập con $A \subseteq U$ được biểu diễn bằng chuỗi nhị phân $x_1x_2 \dots x_n$ trong đó $x_i = 1$ nếu $u_i \in A$ và $x_i = 0$ nếu $u_i \notin A$. Số tập con của U bằng với số các chuỗi nhị phân độ dài n

- *Quy tắc nhân (The Product Rule):*
  - Giả sử một công việc được chia nhỏ ra thành n giai đoạn liên tiếp nhau
  - Giai đoạn thứ 1 có m_1 cách thực hiện, và sau khi chọn cách thực hiện cho giai đoạn thứ 1 ta có m_2 cách thực hiện giai đoạn thứ 2, v.v..., sau khi lựa chọn cách thực hiện cho các giai đoạn thứ $1, 2, \dots, n-1$, ta có m_n cách thực hiện giai đoạn thứ n
  - Ta có $m_1 m_2 \dots m_n$ cách thực hiện công việc
- *Quy tắc cộng (The Sum Rule):*
  - Có n biện pháp khác nhau để thực hiện một công việc
  - Cách thực hiện biện pháp thứ i luôn luôn khác cách thực hiện biện pháp thứ j với mọi $i \neq j$ và $1 \leq i, j \leq n$
  - Nếu biện pháp thứ i có m_i cách thực hiện $(1 \leq i \leq n)$ thì ta có $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ cách thực hiện công việc

4

Các quy tắc đếm cơ bản có thể được biểu diễn theo ngôn ngữ tập hợp

- *Quy tắc nhân (The Product Rule):* Cho các tập hữu hạn $A_1, A_2, \dots, A_n$ trong đó $|A_i| = m_i$ với $1 \leq i \leq n$. Ta có

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n| = m_1 m_2 \ldots m_n$$

- *Quy tắc cộng (The Sum Rule):* Cho các tập hữu hạn đôi một rời nhau $A_1, A_2, \dots, A_n$, ($A_i \cap A_j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$) và $|A_i| = m_i$ với $1 \leq i \leq n$. Ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

Ví dụ 2 (Quy tắc nhân)

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 7?

Ví dụ 2 (Quy tắc nhân)

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 7?

- Giả sử chuỗi $x = x_1x_2 \dots x_7$ là một chuỗi nhị phân độ dài 7
- Để xây dựng x, ta lần lượt chọn giá trị cho $x_1, x_2, \dots, x_7$
  - có 2 cách chọn x_1 (0 hoặc 1)
  - với mỗi giá trị của x_1, có 2 cách chọn x_2 (0 hoặc 1)
  - $\dots$
  - với mỗi giá trị của $x_1, \dots, x_6$, có 2 cách chọn x_7 (0 hoặc 1)
- Do đó có 2^7 chuỗi nhị phân độ dài 7

Ví dụ 3 (Quy tắc nhân)

Tập hợp n phần tử $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ có bao nhiêu tập con?

Ví dụ 3 (Quy tắc nhân)

Tập hợp n phần tử $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ có bao nhiêu tập con?

- Một tập con của S có thể được xây dựng thông qua n bước liên tiếp
  - chọn x_1 hoặc không chọn
  - chọn x_2 hoặc không chọn
  - $\dots$
  - chọn x_n hoặc không chọn
- Mỗi bước có thể được thực hiện bằng 2 cách
- Do đó có 2^n tập con của S

Ví dụ 4 (Quy tắc nhân)

Có bao nhiêu hàm $f : A \to B$ với A và B lần lượt là các tập hữu hạn gồm m và n phần tử?

Ví dụ 4 (Quy tắc nhân)

Có bao nhiêu hàm $f : A \to B$ với A và B lần lượt là các tập hữu hạn gồm m và n phần tử?

- Một hàm $f : A \to B$ có thể được xây dựng thông qua dãy m bước
  - Chọn một trong n phần tử của B là giá trị của $f(a_1)$
  - Chọn một trong n phần tử của B là giá trị của $f(a_2)$
  - $\dots$
  - Chọn một trong n phần tử của B là giá trị của $f(a_m)$
- Mỗi bước có n cách thực hiện
- Do đó có n^m hàm $f : A \to B$

Ví dụ 5 (Quy tắc cộng)

Một sinh viên có thể chọn một bài thực hành máy tính từ một trong ba danh sách tương ứng có 23, 15, và 19 bài. Giả thiết rằng không có hai bài nào giống nhau. Có bao nhiêu cách chọn bài thực hành?

Ví dụ 5 (Quy tắc cộng)

Một sinh viên có thể chọn một bài thực hành máy tính từ một trong ba danh sách tương ứng có 23, 15, và 19 bài. Giả thiết rằng không có hai bài nào giống nhau. Có bao nhiêu cách chọn bài thực hành?

- Có 23 cách chọn bài thực hành từ danh sách thứ nhất
- Có 15 cách chọn bài thực hành từ danh sách thứ hai
- Có 19 cách chọn bài thực hành từ danh sách thứ ba
- Do không có hai bài nào giống nhau, số cách chọn bài thực hành là $23 + 15 + 19 = 57$

Ví dụ 6

Giả sử tên các biến trong một ngôn ngữ lập trình chỉ có thể là một chữ cái viết hoa hoặc một chữ cái viết hoa theo sau bởi một chữ số. Giả sử ta sử dụng bảng chữ cái tiếng Anh và các chữ số trong hệ thập phân. Có tất cả bao nhiêu tên biến trong ngôn ngữ lập trình này?

Ví dụ 6

Giả sử tên các biến trong một ngôn ngữ lập trình chỉ có thể là một chữ cái viết hoa hoặc một chữ cái viết hoa theo sau bởi một chữ số. Giả sử ta sử dụng bảng chữ cái tiếng Anh và các chữ số trong hệ thập phân. Có tất cả bao nhiêu tên biến trong ngôn ngữ lập trình này?

- Một tên biến có dạng x hoặc $x\alpha$ với $x \in \{A, B, \dots, Z\}$ và $\alpha \in \{0, 1, \dots, 9\}$
- Nếu tên biến có dạng x, có 26 cách chọn giá trị của x
- Nếu tên biến có dạng $x\alpha$, có 26 cách chọn giá trị của x, và ứng với mỗi giá trị của x có 10 cách chọn giá trị của α. Theo quy tắc nhân, có $26 \times 10 = 260$ tên biến có dạng $x\alpha$
- Theo quy tắc cộng

$$
\begin{aligned}
\text{số tên biến} &= \text{số tên biến dạng } x + \text{số tên biến dạng } x\alpha \\
&= 26 + 260 = 286
\end{aligned}
$$

Ví dụ 7

Các *dịch vụ rút gọn đường dẫn (URL-shortening service)* như bit.ly hay tinyurl.com cho phép người dùng thu gọn một đường dẫn dài thành một dãy các ký tự ngắn hơn rất nhiều. Ví dụ đường dẫn tới bài giảng này trên trang web môn học `https://hoanganhduc.github.io/teaching/VNU-HUS/2023/MAT3500/Lectures/Counting_I.pdf` sau khi rút gọn thông qua bit.ly là `https://bit.ly/3M8xJpU`
Giả sử các đường dẫn sau khi rút gọn gồm có `https://bit.ly/` kèm theo một chuỗi 7 ký tự, mỗi ký tự chỉ có thể là một chữ số thập phân, một chữ cái viết hoa, hoặc một chữ cái viết thường trong bảng chữ cái tiếng Anh. Có tất cả bao nhiêu đường dẫn rút gọn?

Ví dụ 7

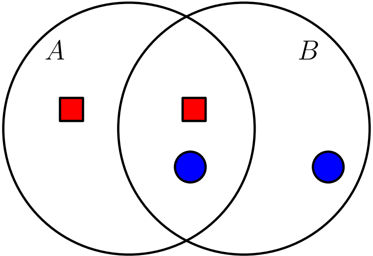
Các *dịch vụ rút gọn đường dẫn (URL-shortening service)* như bit.ly hay tinyurl.com cho phép người dùng thu gọn một đường dẫn dài thành một dãy các ký tự ngắn hơn rất nhiều. Ví dụ đường dẫn tới bài giảng này trên trang web môn học `https://hoanganhduc.github.io/teaching/VNU-HUS/2023/MAT3500/Lectures/Counting_I.pdf` sau khi rút gọn thông qua bit.ly là `https://bit.ly/3M8xJpU`

Giả sử các đường dẫn sau khi rút gọn gồm có `https://bit.ly/` kèm theo một chuỗi 7 ký tự, mỗi ký tự chỉ có thể là một chữ số thập phân, một chữ cái viết hoa, hoặc một chữ cái viết thường trong bảng chữ cái tiếng Anh. Có tất cả bao nhiêu đường dẫn rút gọn?

- Mỗi đường dẫn tương ứng với một chuỗi ký tự $x_1x_2\dots x_7$ trong đó $x_i \in C = \{0,\dots,9\} \cup \{A,\dots,Z\} \cup \{a,\dots,z\}$, $1 \leq i \leq 7$
  - Có $|C|$ cách chọn giá trị cho x_1
  - Với mỗi giá trị của x_1, có $|C|$ cách chọn giá trị cho x_2
  - $\dots$
  - Với mỗi giá trị của $x_1,\dots,x_6$, có $|C|$ cách chọn giá trị cho x_7
- Theo quy tắc nhân, có $|C|^7 = (10+26+26)^7 = 62^7 = 3\,521\,614\,606\,208$ đường dẫn rút gọn

- *Nguyên lý bù trừ (Inclusion-Exclusion Principle):* (hay *Quy tắc trừ (The Subtraction Rule)*)
  - Có hai biện pháp khác nhau để thực hiện một công việc
  - Biện pháp thứ nhất có m cách thực hiện
  - Biện pháp thứ hai có n cách thực hiện
  - Có k cách thực hiện đồng thời hai biện pháp
  - Số cách thực hiện công việc là $m + n - k$
- *Nguyên lý bù trừ (Inclusion-Exclusion Principle):* Cho các tập hữu hạn A, B trong đó $|A| = m$ và $|B| = n$. Ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Ví dụ 8

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 8 bắt đầu với 1 hoặc kết thúc với 00?

Ví dụ 8

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 8 bắt đầu với 1 hoặc kết thúc với 00?

- Gọi A là tập các chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng $1x_2 \dots x_8$ (bắt đầu với 1) và B là tập các chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng $x_1x_2 \dots x_6 00$ (kết thúc với 00)
- Tập các chuỗi nhị phân độ dài 8 bắt đầu với 1 hoặc kết thúc với 00 là $A \cup B$
- Theo nguyên lý bù trừ, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  - $|A|$: Số chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng $1x_2 \dots x_8$ là 2^7
  - $|B|$: Số chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng $x_1x_2 \dots x_6 00$ là 2^6
  - $|A \cap B|$: Số chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng $1x_2 \dots x_6 00$ là 2^5

Số chuỗi nhị phân độ dài 8 bắt đầu với 1 hoặc kết thúc với 00 là $|A \cup B| = 2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$

Ví dụ 9

Ở ngân hàng X, khách hàng có thể sử dụng mã *PIN (Personal Identification Number)* gồm 4 chữ số thập phân để truy cập tài khoản từ máy rút tiền tự động thông qua thẻ rút tiền. Ngân hàng X đặc biệt yêu cầu các mã PIN không thể bắt đầu hoặc kết thúc với ba chữ số liên tiếp giống nhau (ví dụ, dãy 7770 hoặc 0111 là không hợp lệ). Có tất cả bao nhiêu dãy PIN không hợp lệ?

Ví dụ 9

Ở ngân hàng X, khách hàng có thể sử dụng mã *PIN (Personal Identification Number)* gồm 4 chữ số thập phân để truy cập tài khoản từ máy rút tiền tự động thông qua thẻ rút tiền. Ngân hàng X đặc biệt yêu cầu các mã PIN không thể bắt đầu hoặc kết thúc với ba chữ số liên tiếp giống nhau (ví dụ, dãy 7770 hoặc 0111 là không hợp lệ). Có tất cả bao nhiêu dãy PIN không hợp lệ?

- Gọi S là tập hợp tất cả các dãy PIN bắt đầu với ba chữ số giống nhau và E là tập hợp tất cả các dãy PIN kết thúc với ba chữ số giống nhau. Tập hợp các dãy PIN không hợp lệ là $S \cup E$
- Theo nguyên lý bù trừ, $|S \cup E| = |S| + |E| - |S \cap E|$
  - $|S|$: Số dãy PIN có dạng $xxxy$ với $x, y \in \{0, \dots, 9\}$ là 10^2 (có 10 cách chọn x, và ứng với mỗi giá trị của x có 10 cách chọn y)
  - $|E|$: Số dãy PIN có dạng $xyyy$ với $x, y \in \{0, \dots, 9\}$ là 10^2 (có 10 cách chọn x, và ứng với mỗi giá trị của x có 10 cách chọn y)
  - $|S \cap E|$: Một dãy PIN $xyzt$ thuộc $S \cap E$ khi và chỉ khi $x = y = z$ (thuộc S) và $y = z = t$ (thuộc E), nghĩa là $x = y = z = t$. Mỗi dãy thuộc $S \cap E$ do đó có dạng $xxxx$ và có 10 dãy dạng này (có 10 cách chọn x)
- Số dãy PIN không hợp lệ là $|S \cup E| = 10^2 + 10^2 - 10 = 190$

Ví dụ 10

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 00000 hoặc 11111?

Ví dụ 10

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 00000 hoặc 11111?

- Gọi A là tập các chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 00000 và B là tập các chuỗi nhị phân độ dài 8 có chứa 11111. $A \cup B$ là tập chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 00000 hoặc 11111
- Theo nguyên lý bù trừ, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Trước tiên, ta tính $|A|$. Các chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 00000 thuộc một trong các dạng: $00000x_6x_7x_8x_9x_{10}$, $100000x_7x_8x_9x_{10}$, $x_1100000x_8x_9x_{10}$, $x_1x_2100000x_9x_{10}$, $x_1x_2x_3100000x_{10}$, và $x_1x_2x_3x_4100000$ (lần lượt ứng với các vị trí bắt đầu dãy 00000)
  - Có 2^5 chuỗi dạng $00000x_6x_7x_8x_9x_{10}$
  - Với mỗi dạng còn lại, có 2^4 chuỗi
  - Do đó $|A| = 2^5 + 5 \cdot 2^4$
- Tương tự, $|B| = 2^5 + 5 \cdot 2^4$
- Tập $A \cap B$ có chính xác hai phần tử: 0000011111 và 1111100000
- Do đó, $|A \cup B| = 2(2^5 + 5 \cdot 2^4) - 2 = 222$

Bài tập 1

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 7 bắt đầu với 00 hoặc kết thúc với 111?

Bài tập 2

Một chuỗi đối xứng là một chuỗi ký tự mà khi viết ngược lại từ phải sang trái thì chuỗi không thay đổi. Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài n là chuỗi đối xứng?

Bài tập 3

Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 1000 thỏa mãn

(a) *là bội của 7*

(b) *là bội của cả 7 và 11*

(c) *là bội của 7 nhưng không là bội của 11*

(d) *là bội của 7 hoặc là bội của 11*

(e) *không là bội của 7 và không là bội của 11*

Bài tập 4

Có tất cả bao nhiêu số nguyên không vượt quá 1000 *là bình phương hoặc lập phương của một số nguyên dương?*

Bài tập 5 ($\star$)

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 8 *có chứa* 000 *hoặc* 1111*?* *(**Đáp án:** 147)*

- *Quy tắc chia (The Division Rule):*
  - Một công việc có thể được thực hiện bằng n cách
  - Với mỗi cách thực hiện w, có chính xác d trong n cách thực hiện tương đương với nó
  - Số cách khác nhau để thực hiện công việc là n/d
- *Quy tắc chia (The Division Rule):* Nếu A là hợp của m tập con đôi một không giao nhau, mỗi tập con có d phần tử, thì $m = |A|/d$
- *Quy tắc chia (The Division Rule):* Nếu B là một tập hữu hạn và hàm $f : A \to B$ gán chính xác k phần tử của A cho mỗi phần tử của B, thì $|A| = k \cdot |B|$

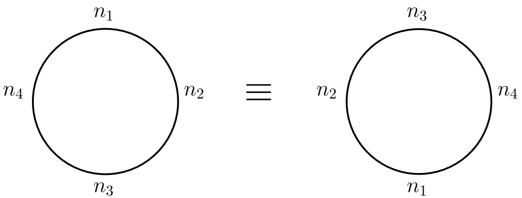
Ví dụ 11

Có bao nhiêu cách sắp xếp các số $1, 1, 2, 3, 4$?

- Đầu tiên, giả sử hai số 1 là phân biệt: 1_a và 1_b
- Có $5!$ cách sắp xếp 5 số phân biệt
  - Có 5 cách chọn số ở vị trí thứ nhất
  - Với mỗi số ở vị trí thứ nhất, có 4 cách chọn số ở vị trí thứ hai
  - $\dots$
  - Với mỗi số ở các vị trí từ thứ nhất đến thứ tư, có 1 cách chọn số ở vị trí thứ 5
- Tuy nhiên, khi coi 1_a và 1_b là cùng một số 1, với mỗi cách sắp xếp, có chính xác 2 trong $5!$ cách tương đương với nó, ví dụ
  - $(1_a, 1_b, 2, 3, 4)$ và $(2, 1_b, 3, 4, 1_a)$ là tương đương: cùng chỉ dãy $(1, 1, 2, 3, 4)$
  - $(2, 1_a, 3, 4, 1_b)$ và $(2, 1_b, 3, 4, 1_a)$ là tương đương: cùng chỉ dãy $(2, 1, 3, 4, 1)$
- Do đó, số cách sắp xếp các số $1, 1, 2, 3, 4$ là $5!/2 = 60$

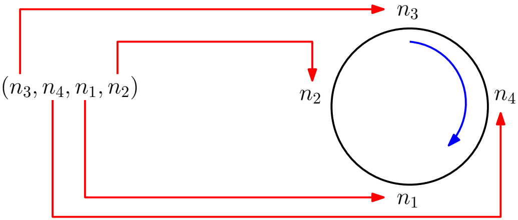
Ví dụ 12

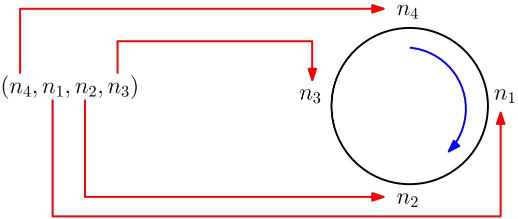
Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 4 người ngồi quanh một bàn tròn? Biết rằng hai cách sắp xếp là giống nhau nếu mỗi người có người ngồi bên trái giống nhau và người ngồi bên phải giống nhau trong cả hai cách sắp xếp. Ví dụ, hai cách sắp xếp sau là giống nhau



Các nguyên lý đếm cơ bản
Quy tắc chia

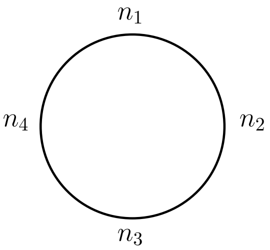
Xây dựng hàm f từ tập các bộ 4 phần tử sang tập các cách xếp chỗ quanh bàn tròn





Hai cách sắp xếp giống nhau nếu khi ta xoay bàn sao cho n_1 nằm ở trên đỉnh thì chúng giống nhau. Ví dụ, các bộ 4 phần tử sau tương ứng với cùng một cách sắp xếp

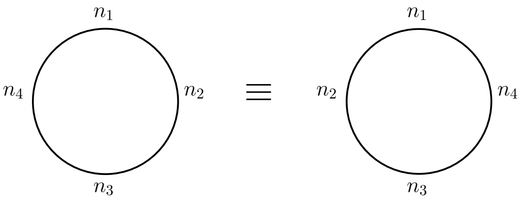
$$(n_1, n_2, n_3, n_4)$$
$$(n_4, n_1, n_2, n_3)$$
$$(n_3, n_4, n_1, n_2)$$
$$(n_2, n_3, n_4, n_1)$$



Do đó, số cách khác nhau để sắp xếp 4 người quanh một bàn tròn là $\dfrac{4!}{4} = 6$

Bài tập 6

Giả sử hai cách sắp xếp 4 người quanh một bàn tròn là giống nhau khi mỗi người có hai người ngồi cạnh giống nhau trong cả hai cách sắp xếp không quan tâm là ngồi bên trái hay bên phải, ví dụ như hai cách sắp xếp trong hình sau là giống nhau với giả thiết hiện tại



nhưng không giống nhau với giả thiết trong Ví dụ 12. Trong trường hợp này, có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 4 người quanh một bàn tròn?

Bài tập 7

Giả thiết rằng hai cách sắp xếp là giống nhau nếu mỗi người có người ngồi bên trái và người ngồi bên phải giống nhau trong mỗi cách sắp xếp

(a) *Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp* 5 *bạn nam và* 5 *bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn?*

(b) *Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp* 5 *bạn nam và* 5 *bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?*

Nguyên lý chuồng bồ câu

- *Nguyên lý chuồng bồ câu (The Pigeonhole Principle)* (hay *Nguyên lý Dirichlet (The Dirichlet Drawer Principle)*): Nếu k là một số nguyên dương và có $k+1$ hoặc nhiều hơn các vật thể được đặt trong k hộp, thì có ít nhất một hộp có hai vật thể hoặc nhiều hơn
- *Nguyên lý chuồng bồ câu (The Pigeonhole Principle)*: Nếu một hàm $f : A \to B$ ánh xạ một tập hữu hạn A với $|A| \geq k+1$ đến một tập hữu hạn B với $|B| = k$, thì f không là một đơn ánh (**Nhắc lại:** f là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi $x_1, x_2 \in A$, nếu $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$)

Nguyên lý chuồng bồ câu

Ví dụ 13

Trong một nhóm bất kỳ có 367 người, luôn có hai người trong nhóm có cùng ngày sinh

Nguyên lý chuồng bồ câu

Ví dụ 13

Trong một nhóm bất kỳ có 367 người, luôn có hai người trong nhóm có cùng ngày sinh

- Mỗi ngày sinh ứng với một "hộp", mỗi người ứng với một "vật thể"
- Đặt "người" vào "hộp" theo ngày sinh tương ứng
- Có tất cả 366 ngày sinh nhật (= "hộp") và 367 người, do đó có ít nhất hai người có cùng ngày sinh nhật

Ví dụ 13

Trong một nhóm bất kỳ có 367 người, luôn có hai người trong nhóm có cùng ngày sinh

- Mỗi ngày sinh ứng với một "hộp", mỗi người ứng với một "vật thể"
- Đặt "người" vào "hộp" theo ngày sinh tương ứng
- Có tất cả 366 ngày sinh nhật (= "hộp") và 367 người, do đó có ít nhất hai người có cùng ngày sinh nhật

Ví dụ 14

Giả sử một kỳ thi tính các điểm số từ 0 đến 100, và mọi điểm số đều là số nguyên. Cần bao nhiêu sinh viên tham gia kỳ thi để chắc chắn có hai sinh viên có cùng điểm số?

Nguyên lý chuồng bồ câu

Ví dụ 13

Trong một nhóm bất kỳ có 367 người, luôn có hai người trong nhóm có cùng ngày sinh

- Mỗi ngày sinh ứng với một "hộp", mỗi người ứng với một "vật thể"
- Đặt "người" vào "hộp" theo ngày sinh tương ứng
- Có tất cả 366 ngày sinh nhật (= "hộp") và 367 người, do đó có ít nhất hai người có cùng ngày sinh nhật

Ví dụ 14

Giả sử một kỳ thi tính các điểm số từ 0 đến 100, và mọi điểm số đều là số nguyên. Cần bao nhiêu sinh viên tham gia kỳ thi để chắc chắn có hai sinh viên có cùng điểm số?

- Mỗi điểm số ứng với một "hộp", mỗi sinh viên ứng với một "vật thể"
- Có tất cả 101 "hộp" (= điểm số)
- Cần ít nhất 102 sinh viên để chắc chắn có hai sinh viên có cùng điểm số

Nguyên lý chuồng bồ câu

- *Nguyên lý chuồng bồ câu tổng quát (The Generalized Pigeonhole Principle)*: Nếu N vật thể được đặt vào k hộp, với k là số nguyên dương nào đó, thì tồn tại một hộp có ít nhất $\lceil N/k \rceil$ vật thể

Ví dụ 15

Nguyên lý chuồng bồ câu

- *Nguyên lý chuồng bồ câu tổng quát (The Generalized Pigeonhole Principle)*: Nếu N vật thể được đặt vào k hộp, với k là số nguyên dương nào đó, thì tồn tại một hộp có ít nhất $\lceil N/k \rceil$ vật thể

Ví dụ 15

- Có $N = 280$ sinh viên trong một lớp học. Một năm có $k = 52$ tuần. Do đó có một tuần mà ít nhất $\lceil 280/52 \rceil = \lceil 5.38 \rceil = 6$ sinh viên có ngày sinh nhật trong tuần đó

Nguyên lý chuồng bồ câu

- *Nguyên lý chuồng bồ câu tổng quát (The Generalized Pigeonhole Principle)*: Nếu N vật thể được đặt vào k hộp, với k là số nguyên dương nào đó, thì tồn tại một hộp có ít nhất $\lceil N/k \rceil$ vật thể

Ví dụ 15

- Có $N = 280$ sinh viên trong một lớp học. Một năm có $k = 52$ tuần. Do đó có một tuần mà ít nhất $\lceil 280/52 \rceil = \lceil 5.38 \rceil = 6$ sinh viên có ngày sinh nhật trong tuần đó
- Giá trị lớn nhất của d là bao nhiêu để *chắc chắn* rằng phát biểu "Trong tất cả 145 sinh viên, có ít nhất d sinh viên sinh ra vào cùng một tháng"?

- *Nguyên lý chuồng bồ câu tổng quát (The Generalized Pigeonhole Principle)*: Nếu N vật thể được đặt vào k hộp, với k là số nguyên dương nào đó, thì tồn tại một hộp có ít nhất $\lceil N/k \rceil$ vật thể

Ví dụ 15

- Có $N = 280$ sinh viên trong một lớp học. Một năm có $k = 52$ tuần. Do đó có một tuần mà ít nhất $\lceil 280/52 \rceil = \lceil 5.38 \rceil = 6$ sinh viên có ngày sinh nhật trong tuần đó
- Giá trị lớn nhất của d là bao nhiêu để *chắc chắn* rằng phát biểu "Trong tất cả 145 sinh viên, có ít nhất d sinh viên sinh ra vào cùng một tháng"?
  Trong 145 sinh viên, có ít nhất $\lceil 145/12 \rceil = 13$ sinh viên sinh ra vào cùng một tháng. Thêm vào đó, phát biểu với $d = 14$ *không đúng* khi có 13 sinh viên sinh ra vào cùng một tháng và các tháng còn lại mỗi tháng có 12 sinh viên sinh vào tháng đó. Do đó $d = 13$ là giá trị lớn nhất thỏa mãn đề bài

Nguyên lý chuồng bồ câu

Ví dụ 16

Chứng minh rằng trong một tập $n+1$ số nguyên dương bất kỳ nhỏ hơn hoặc bằng $2n$, tồn tại một số là ước của một số khác trong tập đó

Nguyên lý chuồng bồ câu

Ví dụ 16

Chứng minh rằng trong một tập $n+1$ số nguyên dương bất kỳ nhỏ hơn hoặc bằng $2n$, tồn tại một số là ước của một số khác trong tập đó

- Viết các số trong $n+1$ số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ dưới dạng tích của một lũy thừa của 2 và một số nguyên dương lẻ, nghĩa là, $a_i = 2^{b_i} c_i$ trong đó $b_i \geq 0$ và $c_i \leq 2n$ là một số nguyên dương lẻ, với $1 \leq i \leq n+1$
- Có tối đa n số nguyên dương lẻ nhỏ hơn $2n$. Do đó, theo nguyên lý chuồng bồ câu, có hai số c_i, c_j thỏa mãn $c_i = c_j$, với $1 \leq i, j \leq n+1$
- Suy ra, $a_i = 2^{b_i} c_i$ và $a_j = 2^{b_j} c_j$. Do đó, nếu $b_i \leq b_j$ thì $a_i \mid a_j$ và ngược lại thì $a_j \mid a_i$

Nguyên lý chuồng bồ câu

Ví dụ 17

Mọi dãy số gồm $n^2 + 1$ số thực phân biệt có một dãy con gồm $n + 1$ phần tử và là dãy thực sự tăng hoặc thực sự giảm

Nguyên lý chuồng bồ câu

Ví dụ 17

Mọi dãy số gồm $n^2 + 1$ số thực phân biệt có một dãy con gồm $n + 1$ phần tử và là dãy thực sự tăng hoặc thực sự giảm

- Gọi dãy $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ là một dãy gồm $n^2 + 1$ số thực phân biệt. Với mỗi $k \in \{1, 2, \dots, n^2 + 1\}$, gọi (i_k, d_k) là một cặp số tương ứng với a_k, trong đó i_k là độ dài của dãy thực sự tăng dài nhất bắt đầu từ a_k, và d_k là độ dài của dãy thực sự giảm dài nhất bắt đầu từ a_k
- Giả sử không có dãy thực sự tăng hoặc thực sự giảm nào có $n + 1$ phần tử, nghĩa là, $1 \leq i_k, d_k \leq n$. Do đó, có tối đa n^2 cặp (i_k, d_k) phân biệt
- Theo nguyên lý chuồng bồ câu, tồn tại $s, t \in \{1, 2, \dots, n^2 + 1\}$ thỏa mãn $(i_s, d_s) = (i_t, d_t)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $s < t$
- Do các phần tử trong dãy đều phân biệt, ta có $a_s < a_t$ hoặc $a_t < a_s$
  - Nếu $a_s < a_t$, ta có thể xây dựng một dãy con thực sự tăng bắt đầu từ a_s gồm $i_s + 1 = i_t + 1$ phần tử bằng cách lấy a_s và dãy thực sự tăng bắt đầu từ a_t có i_t phần tử. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của i_s
  - Tương tự với $a_s > a_t$

Bài tập 8

Giả sử một ngăn tủ chỉ có hai loại tất màu đen và trắng, mỗi loại có 12 *chiếc. Một người lấy tất trong ngăn tủ một cách ngẫu nhiên trong bóng tối*

(a) *Cần lấy bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn có một đôi cùng màu? hai đôi cùng màu?*

(b) *Cần lấy bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn có một đôi màu đen?*

Bài tập 9

Chứng minh rằng trong một nhóm 5 *số nguyên bất kỳ, có hai số nguyên có cùng số dư khi chia cho* 4

Bài tập 10 ($\star$)

Chứng minh rằng với bất kỳ cách xếp 5 *bạn nam và* 5 *bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn, luôn tìm được một bạn ngồi giữa hai bạn nam*

Bài tập 11

(a) *Chứng minh rằng nếu 7 số nguyên được chọn từ tập $\{1, 2, \dots, 10\}$ thì có ít nhất hai cặp trong số các số được chọn có tổng bằng 11. Nếu ta chọn 6 số nguyên thay vì 7 thì kết luận trên còn đúng không?*

(b) *Cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ để chắc chắn rằng trong tập các số đã chọn có hai số có tổng bằng 7?*

Bài tập 12 ($\star$)

Chứng minh rằng trong một nhóm n người ($n \geq 2$) có ít nhất hai người có cùng số người quen biết trong nhóm

Bài tập 13

Chứng minh rằng trong một nhóm 6 người bất kỳ, luôn có ít nhất ba người đôi một biết nhau hoặc đôi một không biết nhau