

COPYRIGHT NOTICE

THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-07-19

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-07-19



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

- Điền các thông tin về Họ Tên, Mã Sinh Viên, Lớp trước khi bắt đầu làm bài.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.
- Điểm bài kiểm tra này chiếm 20% tổng số điểm của môn học.

Họ và Tên: _____

Mã Sinh Viên: _____ Lớp: _____

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	2	2	3	3	10
Điểm:					

1. Cho các mệnh đề p , q , và r .

- (a) (1 điểm) Chứng minh rằng các mệnh đề $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ và $(p \vee q) \rightarrow r$ là tương đương logic.
- (b) (1 điểm) Chứng minh rằng các mệnh đề $(p \wedge q) \rightarrow r$ và $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ là tương đương logic.

Lời giải:

(a) Ta có

$$\begin{aligned}(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) & p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r & \text{Luật phân phối} \\ &\equiv \neg(p \vee q) \vee r & \text{Luật De Morgan} \\ &\equiv (p \vee q) \rightarrow r & p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q\end{aligned}$$

(b) Ta có

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow r &\equiv \neg(p \wedge q) \vee r & p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r & \text{Luật De Morgan} \\ &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee r) & \text{Luật kết hợp} \\ &\equiv p \rightarrow (\neg q \vee r) & p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q \\ &\equiv p \rightarrow (q \rightarrow r) & p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q\end{aligned}$$

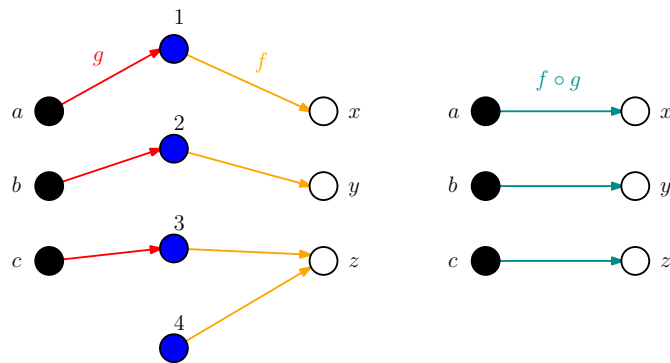
2. (a) (1 điểm) Hãy cho ví dụ về các hàm f và g thỏa mãn điều kiện $f \circ g$ là song ánh nhưng f không là đơn ánh và g không là toàn ánh.
- (b) (1 điểm) Tìm các tập hợp A, B thỏa mãn hai điều kiện sau

$$A = \{3, |B|\}, \quad (1)$$

$$B = \{1, |A|, |B|\}. \quad (2)$$

Lời giải:

- (a) Ví dụ, ta định nghĩa các hàm f và g như hình sau



- (b) Chú ý rằng $1 \leq |A| \leq 2$ và $1 \leq |B| \leq 3$.

Trước tiên, ta xét trường hợp $|A| = 1$. Từ $|A| = 1$ và (1), ta có $|B| = 3$. Từ $|A| = 1$ và (2), ta có $|B| \leq 2$. Đây là một mâu thuẫn. Do đó, $|A| = 2$.

Từ $|A| = 2$ và (1), ta có $|B| \neq 3$, nghĩa là $1 \leq |B| \leq 2$. Từ $|A| = 2$ và (2), ta có $B = \{1, 2, |B|\}$, nghĩa là $|B| \geq 2$. Do đó, $|B| = 2$.

Tóm lại, ta có $A = \{3, 2\}$ và $B = \{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$.

3. (3 điểm) Dãy Fibonacci $\{f_n\}$ được cho bởi hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ($n \geq 2$) và điều kiện ban đầu $f_0 = 0$ và $f_1 = 1$. Sử dụng phương pháp quy nạp, chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$,

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}. \quad (3)$$

Lời giải: Ta chứng minh (3) đúng với mọi $n \geq 1$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh với $n = 1$, (3) đúng.

Thật vậy, với $n = 1$, (3) tương đương với $f_1^2 = f_1 f_2$. Do $f_1 = f_2 = 1$, ta có $f_1^2 = f_1 f_2 = 1$. Do đó, (3) đúng.

- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, (3) đúng với $n = k$, nghĩa là $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_k^2 = f_k f_{k+1}$. Ta chứng minh (3) đúng với $n = k + 1$, nghĩa là chứng minh $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_{k+1} f_{k+2}$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_k^2 + f_{k+1}^2 &= f_k f_{k+1} + f_{k+1}^2 && \text{Giả thiết quy nạp} \\ &= f_{k+1}(f_k + f_{k+1}) \\ &= f_{k+1} f_{k+2}. && \text{Định nghĩa dãy Fibonacci} \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

4. (3 điểm) Sử dụng phương pháp quy nạp yếu, hãy chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 6$, tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 2a + 7b$. (**Chú ý:** Chứng minh bằng quy nạp mạnh cũng được chấp nhận, nhưng sẽ chỉ được tính tối đa 2 điểm.)

Lời giải: Ta chứng minh phát biểu $P(n) := \text{“tồn tại } a, b \in \mathbb{N} \text{ sao cho } n = 2a + 7b\text{”}$ bằng quy nạp yếu.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(6)$ đúng. Thật vậy, $6 = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, nghĩa là tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $k = 2a + 7b$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh tồn tại $c, d \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $k+1 = 2c + 7d$.

Từ giả thiết quy nạp, ta có $k+1 = 2a + 7b + 1 = 2(a-3) + 7(b+1)$.

Với $a \geq 3$, $P(k+1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a-3 \in \mathbb{N}$ và $d = b+1 \in \mathbb{N}$.

Với $0 \leq a \leq 2$, do $6 \leq k = 2a + 7b \leq 4 + 7b$ và $b \in \mathbb{N}$, ta có $b \geq 1$, hay $b-1 \in \mathbb{N}$. Ta cũng có $k+1 = 2a + 7b + 1 = 2(a+4) + 7(b-1)$. Suy ra $P(k+1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a+4 \in \mathbb{N}$ và $d = b-1 \in \mathbb{N}$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Chú ý: Một phương án khác để chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ là như sau:

Từ giả thiết quy nạp, ta có $k+1 = 2(a+4) + 7(b-1)$.

Với $b \geq 1$, $P(k+1)$ đúng do ta có thể chọn $c = a+4 \in \mathbb{N}$ và $d = b-1 \in \mathbb{N}$.

Với $b = 0$, do $6 \leq k = 2a + 7b = 2a$, ta có $a \geq 3$, hay $a-3 \in \mathbb{N}$. Ta cũng có $k+1 = 2a + 7b + 1 = 2(a-3) + 7 \cdot 1$. Suy ra $P(k+1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a-3 \in \mathbb{N}$ và $d = 1 \in \mathbb{N}$.