VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Lý thuyết đồ thị I

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Bài tập 1. Vẽ các đồ thị sau

(a) K_7

(b) C_7

(c) $K_{1,8}$

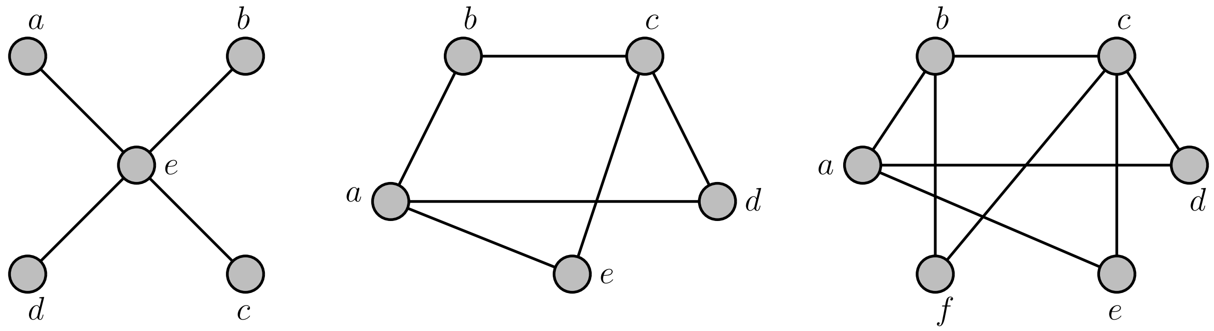
(d) W_7

(e) $K_{4,4}$

(f) Q_4

Bài tập 2. Chứng minh rằng một đơn đồ thị $G = (V, E)$ là một đồ thị hai phần khi và chỉ khi tồn tại một hàm $f : V \to \{0, 1\}$ thỏa mãn $f(u) \neq f(v)$ nếu $u \in N_G(v)$. Nói cách khác, G là đồ thị hai phần khi và chỉ khi ta có thể "tô màu" các đỉnh của đồ thị bằng hai "màu" 0 và 1 sao cho hai đỉnh kề nhau luôn có "màu" khác nhau.

Sử dụng phát biểu trên, hãy kiểm tra xem các đồ thị sau có phải đồ thị hai phần hay không



G_1 G_2 G_3

Bài tập 3. Các đồ thị sau có bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu cạnh?

(a) K_n

(b) C_n

(c) W_n

(d) $K_{m,n}$

(e) Q_n

Bài tập 4. Cho G là một đồ thị với n đỉnh và m cạnh. Gọi $\Delta(G)$ và $\delta(G)$ lần lượt là bậc lớn nhất và nhỏ nhất của một đỉnh của G. Chứng minh rằng $\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$.

Bài tập 5. Một đồ thị được gọi là *đồ thị chính quy (regular graph)* nếu các đỉnh của đồ thị có cùng bậc. Ta gọi một đồ thị là n-chính quy nếu nó là đồ thị chính quy trong đó các đỉnh có cùng bậc n. Với các giá trị nào của n thì các đồ thị sau là đồ thị chính quy

(a) K_n

(b) C_n

(c) W_n

(d) Q_n

Bài tập 6. Chứng minh rằng nếu một đồ thị hai phần $G = (V_1 \cup V_2, E)$ là đồ thị chính quy thì $|V_1| = |V_2|$.

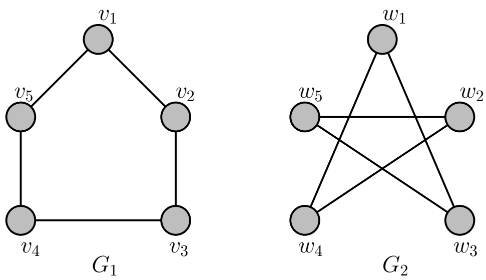
Bài tập 7. *Đồ thị bù (complement graph)* của một đồ thị G, ký hiệu $\overline{G}$, là một đồ thị có cùng tập đỉnh với G. Hai đỉnh trong $\overline{G}$ là liền kề khi và chỉ khi chúng không liền kề trong G. Hãy mô tả các đồ thị sau

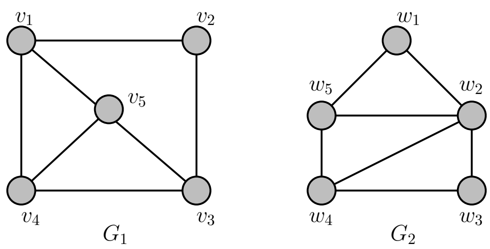
(a) $\overline{K_n}$

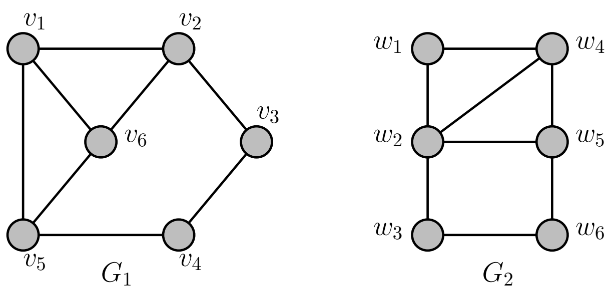
(b) $\overline{K_{m,n}}$

(c) $\overline{C_n}$

Bài tập 8. Các cặp đồ thị sau có đẳng cấu hay không? Vì sao?



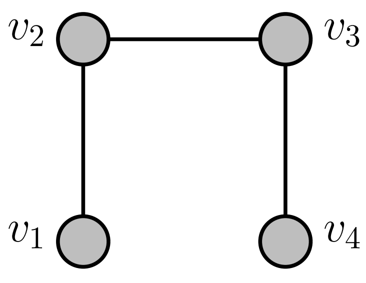




Bài tập 9. Giả sử G và H là các đơn đồ thị thỏa mãn $G \simeq H$. Chứng minh rằng $\overline{G} \simeq \overline{H}$.

Bài tập 10. Một đơn đồ thị G được gọi là *tự bù (self-complementary)* nếu $G \simeq \overline{G}$.

(a) Chứng minh rằng đồ thị sau là một đồ thị tự bù



(b) Tìm một đồ thị tự bù có 5 đỉnh.

Bài tập 11. Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Một đỉnh $w \in V$ được gọi là *hướng tới được (reachable)* từ đỉnh $v \in V(G)$ nếu tồn tại một đường đi có hướng từ v đến w. Hai đỉnh v, w là *lẫn nhau hướng tới được (mutually reachable)* nếu như w hướng tới được từ v và v hướng tới được từ w.

(a) Chứng minh rằng nếu u, v là lẫn nhau hướng tới được và v, w là lẫn nhau hướng tới được thì u, w là lẫn nhau hướng tới được.

(b) Sử dụng phần (a), chứng minh rằng nếu H và K lần lượt là các thành phần liên thông mạnh chứa u và v thì $H = K$ hoặc H và K không có đỉnh chung, trong đó u, v là các đỉnh bất kỳ.

Bài tập 12. Chứng minh rằng mỗi đồ thị sau không có đỉnh cắt

(a) C_n với $n \geq 3$

(b) W_n với $n \geq 3$

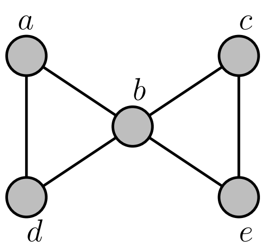
(c) $K_{m,n}$ với $m \geq 2$ và $n \geq 2$

(d) Q_n với $n \geq 2$

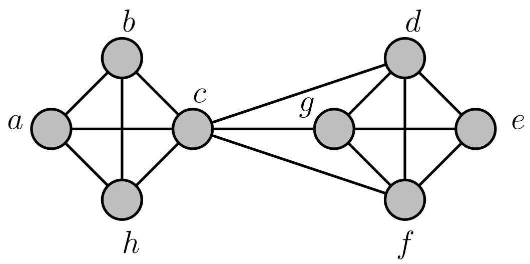
Bài tập 13. Chứng minh rằng một đồ thị vô hướng liên thông bất kỳ gồm $n \geq 1$ đỉnh có ít nhất $n - 1$ cạnh. (**Gợi ý:** Quy nạp mạnh theo số đỉnh n của đồ thị.)

Bài tập 14. Với mỗi đồ thị trong các trường hợp sau, tìm $\kappa(G), \lambda(G)$, và $\min_{v \in V} \deg(v)$.

(a)



(b)



Bài tập 15. Tìm số đường đi độ dài n giữa hai đỉnh phân biệt của K_4 với n bằng

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 5