

COPYRIGHT NOTICE

THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2024 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2024-04-13

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2024-04-13



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

- Chọn 1 trong 2 câu. Nếu làm cả 2 câu thì tính câu điểm cao nhất
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.

Họ và Tên: _____

Mã Sinh Viên: _____ Lớp: _____

Câu:	1	2	Tổng
Điểm tối đa:	10	10	20
Điểm:			

1. (10 điểm) Giải hệ phương trình

$$x \equiv 2 \pmod{3} \quad (1)$$

$$x \equiv 1 \pmod{4} \quad (2)$$

$$x \equiv 3 \pmod{5} \quad (3)$$

Lời giải:

- Cách 1: Sử dụng chứng minh của Định lý phần dư Trung Hoa.

– Ta có $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 3, m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 5$, và $m = m_1 m_2 m_3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

– Ta tính $M_i = m/m_i$ với $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$M_1 = m/m_1 = 4 \cdot 5 = 20$$

$$M_2 = m/m_2 = 3 \cdot 5 = 15$$

$$M_3 = m/m_3 = 3 \cdot 4 = 12$$

– Tính một nghịch đảo y_i của M_i theo môđun m_i với $i \in \{1, 2, 3\}$.

* Tính một nghịch đảo y_1 của $M_1 = 20$ theo môđun $m_1 = 3$. Từ thuật toán Euclid, ta có

$$20 = 3 \cdot 6 + 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

Do đó, ta cũng có

$$\begin{aligned}1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\&= 3 - (20 - 3 \cdot 6) \cdot 1 \\&= -1 \cdot 20 + 7 \cdot 3\end{aligned}$$

Suy ra $y_1 = -1$.

* Tính một nghịch đảo y_2 của $M_2 = 15$ theo môđun $m_2 = 4$. Từ thuật toán Euclid, ta có

$$\begin{aligned}15 &= 4 \cdot 3 + 3 \\4 &= 3 \cdot 1 + 1 \\3 &= 1 \cdot 3 + 0\end{aligned}$$

Do đó, ta cũng có

$$\begin{aligned}1 &= 4 - 3 \cdot 1 \\&= 4 - (15 - 4 \cdot 3) \cdot 1 \\&= -1 \cdot 15 + 4 \cdot 4\end{aligned}$$

Suy ra $y_2 = -1$.

* Tính một nghịch đảo y_3 của $M_3 = 12$ theo môđun $m_3 = 5$. Từ thuật toán Euclid, ta có

$$\begin{aligned}12 &= 5 \cdot 2 + 2 \\5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\2 &= 1 \cdot 2 + 0\end{aligned}$$

Do đó, ta cũng có

$$\begin{aligned}1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\&= 5 - (12 - 5 \cdot 2) \cdot 2 \\&= -2 \cdot 12 + 5 \cdot 5\end{aligned}$$

Suy ra $y_3 = -2$.

– Tính nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{aligned}x &\equiv \sum_{i=1}^3 a_i y_i M_i \pmod{60} \\&= 2 \cdot (-1) \cdot 20 + 1 \cdot (-1) \cdot 15 + 3 \cdot (-2) \cdot 12 \pmod{60} \\&= -127 \pmod{60} \\&= 53 \pmod{60}.\end{aligned}$$

• **Cách 2: Sử dụng phương pháp thay ngược.**

Từ (1), tồn tại $t \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $x = 3t + 2$.

Thay vào (2), ta có $3t + 2 \equiv 1 \pmod{4}$. Do đó, $3t \equiv -1 \pmod{4}$. Do $1 = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 4$, một nghịch đảo của 3 theo môđun 4 là 3. Suy ra $t \equiv -3 \pmod{4}$. Do đó, tồn tại $u \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $t = 4u - 3$. Suy ra $x = 3t + 2 = 3(4u - 3) + 2 = 12u - 7$.

Thay vào (3), ta có $12u - 7 \equiv 3 \pmod{5}$. Do đó, $12u \equiv 10 \pmod{5} \equiv 0 \pmod{5}$. Do $\gcd(12, 5) = 1$, ta có $u \equiv 0 \pmod{5}$. Do đó, tồn tại $v \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $u = 5v$. Suy ra $x = 12u - 7 = 12 \cdot (5v) - 7 = 60v - 7$.

Do đó, $x \equiv -7 \pmod{60} \equiv 53 \pmod{60}$.

2. (10 điểm) Bằng phương pháp quy nạp, với mọi $n \geq 0$, hãy chứng minh

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad (4)$$

Lời giải:

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh (4) đúng với $n = 0$. Thật vậy, với $n = 0$, ta có

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = \sum_{k=0}^0 C_0^k = C_0^0 = 1 = 2^0 = 2^n.$$

- **Bước quy nạp:** Giả sử (4) đúng với số nguyên $n \geq 0$ nào đó, nghĩa là, $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$. Ta

chứng minh (4) đúng với $n + 1$, nghĩa là chứng minh $\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k = 2^{n+1}$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k &= C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \cdots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} \\ &= C_{n+1}^0 + (C_n^0 + C_n^1) + (C_n^1 + C_n^2) + \cdots + (C_n^{n-1} + C_n^n) + C_{n+1}^{n+1} && \text{Do } C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \\ &= 2(C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n) && \text{Do } C_n^0 = C_{n+1}^0 \text{ và } C_n^n = C_{n+1}^{n+1} \\ &= 2 \sum_{k=0}^n C_n^k \\ &= 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Giả thiết quy nạp

Theo nguyên lý quy nạp, với mọi $n \geq 0$, ta có $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$.