VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Lý thuyết đồ thị I

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Giới thiệu
- Một số ví dụ
- Định nghĩa và khái niệm
- Đồ thị mới từ đồ thị cũ
- Một số đơn đồ thị đặc biệt
- Đồ thị hai phần

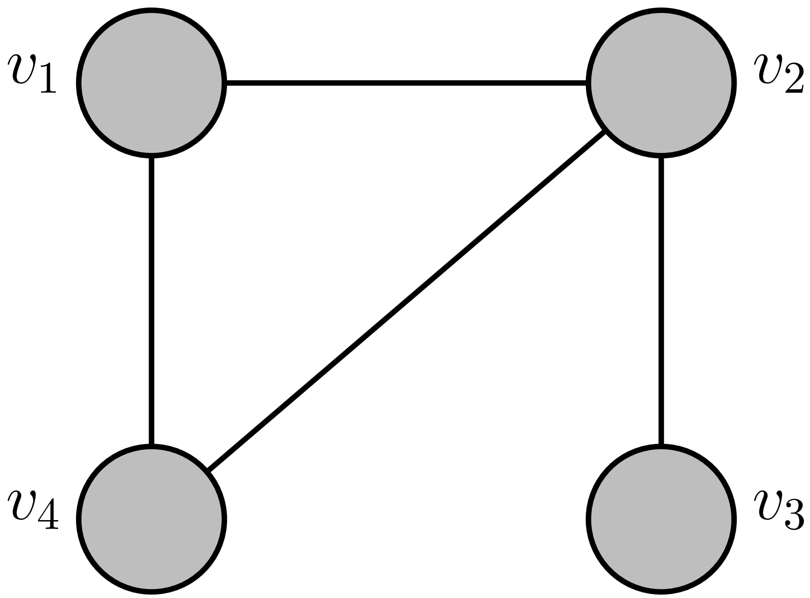
Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu
- Danh sách kề
- Ma trận kề
- Ma trận liên thuộc
- Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

- Một *đồ thị (graph)* G bao gồm một tập các *đỉnh (vertex)* hoặc *nút (node)* V và một tập cách cạnh E nối các (cặp) đỉnh với nhau
- Có nhiều loại đồ thị khác nhau (vô hướng, có hướng, đồ thị đơn giản, đa đồ thị, v.v...), mỗi loại có cách định nghĩa cụ thể khác nhau, tùy thuộc vào việc các loại cạnh nào cần được xét
- Điều này dẫn tới việc tồn tại nhiều thuật ngữ khác nhau (và thường không thống nhất)
- Trước khi đi vào định nghĩa đồ thị một cách cụ thể, chúng ta xét một số ví dụ

Ví dụ 1 (Đơn đồ thị vô hướng (simple undirected graph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$$

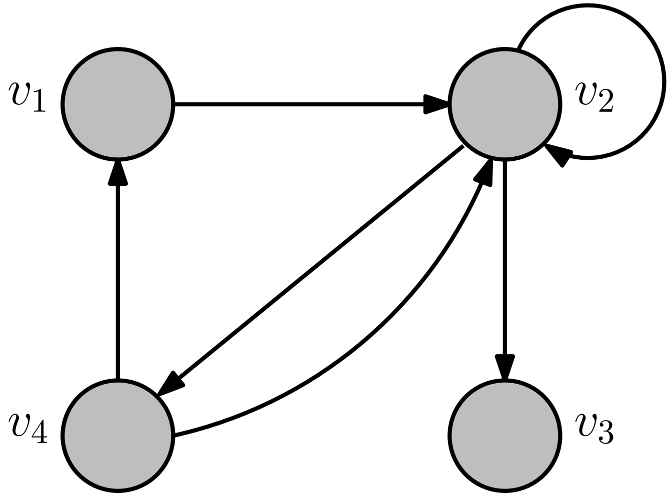


Hình: Chỉ có các cạnh *vô hướng*; có *nhiều nhất một cạnh* nối hai đỉnh phân biệt bất kỳ; và không có *khuyên (loop)*—cạnh nối giữa một đỉnh và chính nó

Ví dụ 2 (Đồ thị có hướng (và có khuyên) (directed graph (with loops)))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$

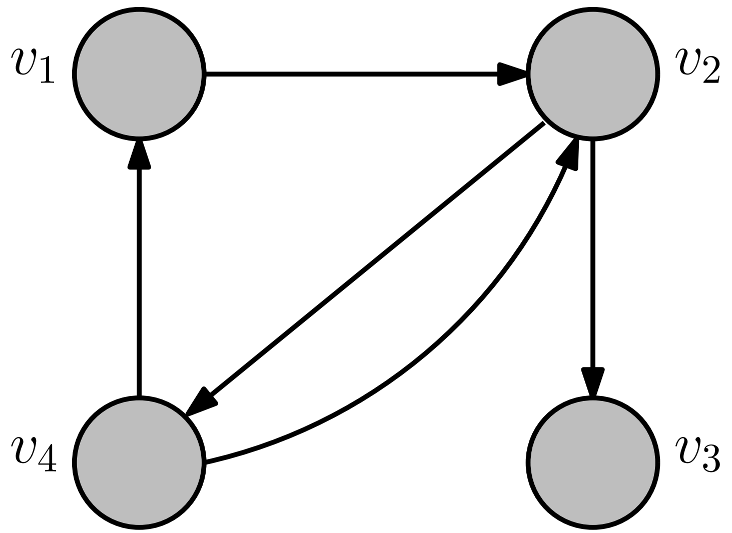


Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có *nhiều nhất một cạnh có hướng* nối từ một đỉnh bất kỳ sang một đỉnh khác bất kỳ; và *có khuyên*

Ví dụ 3 (Đơn đồ thị có hướng (simple directed graph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

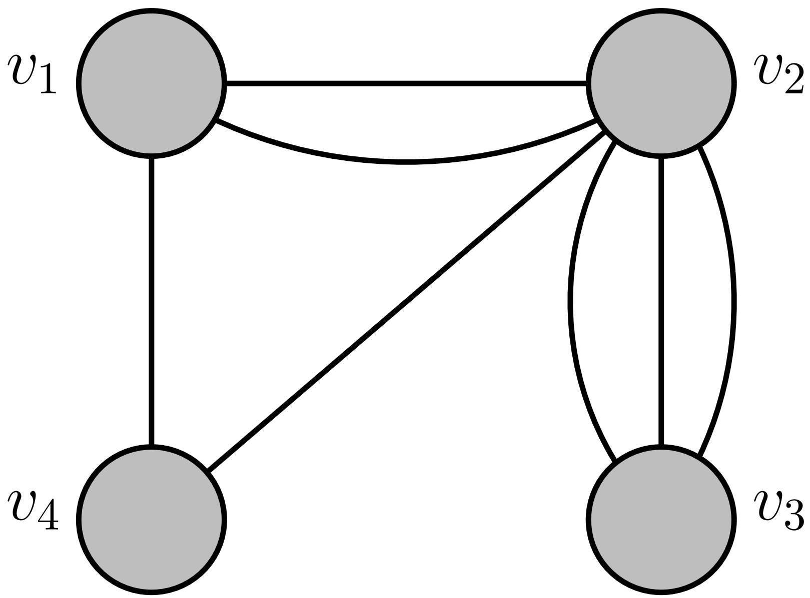
$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$



Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có *nhiều nhất một cạnh có hướng* nối từ một đỉnh bất kỳ sang một đỉnh khác bất kỳ; và *không có khuyên*

Ví dụ 4 (Đa đồ thị vô hướng (undirected multigraph))

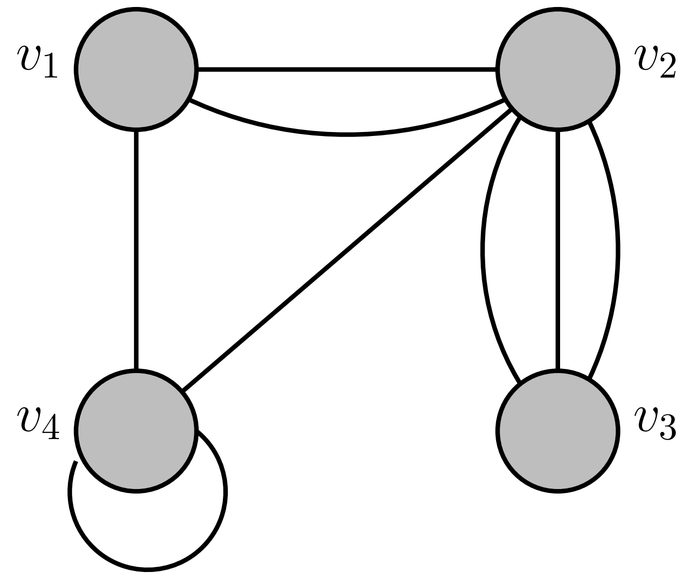
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$$
$$m(v_1v_2) = 2,\ m(v_2v_3) = 3$$
$$m(v_1v_4) = m(v_2v_4) = 1$$



Hình: Chỉ có các cạnh *vô hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *không có khuyên*

Ví dụ 5 (Đa đồ thị vô hướng có khuyên (undirected pseudograph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_4\}$$
$$m(v_1v_2) = 2,\ m(v_2v_3) = 3$$
$$m(v_1v_4) = m(v_2v_4) = m(v_4, v_4) = 1$$

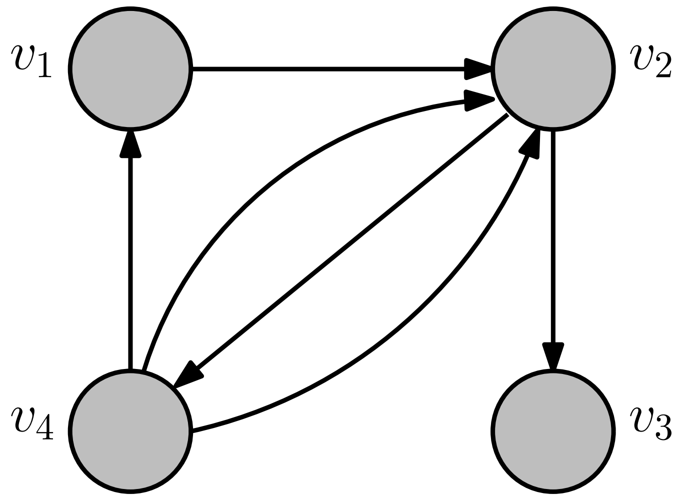


Hình: Chỉ có các cạnh *vô hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *có khuyên* (có thể có nhiều khuyên tại một đỉnh)

Ví dụ 6 (Đa đồ thị có hướng (directed multigraph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$
$$m(v_1, v_2) = m(v_2, v_3) = m(v_2, v_4) = m(v_4, v_1) = 1$$
$$m(v_4, v_2) = 2$$



Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *không có khuyên* (khác với định nghĩa trong sách của Rosen)

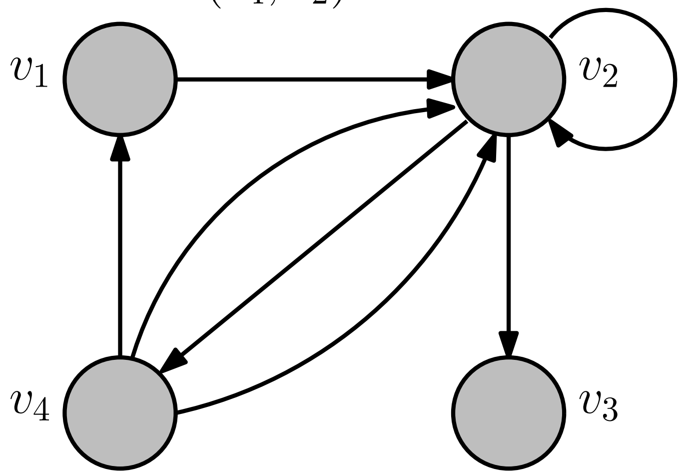
Ví dụ 7 (Đa đồ thị có hướng và có khuyên (directed pseudograph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$

$$m(v_1, v_2) = m(v_2, v_2) = m(v_2, v_3) = m(v_2, v_4) = m(v_4, v_1) = 1$$

$$m(v_4, v_2) = 2$$



Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *có khuyên* (có thể có nhiều khuyên tại một đỉnh)

	Loại	Cạnh	Có cạnh song song?	Có khuyên?
1	Đơn đồ thị vô hướng	Vô hướng	Không	Không
2	Đa đồ thị vô hướng	Vô hướng	Có	Không
3	Đa đồ thị vô hướng có khuyên	Vô hướng	Có	Có
4	Đồ thị có hướng	Có hướng	Không	Có
5	Đơn đồ thị có hướng	Có hướng	Không	Không
6	Đa đồ thị có hướng	Có hướng	Có	*Không*[1]
7	Đa đồ thị có hướng và có khuyên	Có hướng	Có	Có
8	Đồ thị hỗn hợp	Cả hai	Có	Có

- Định nghĩa đa đồ thị có hướng khác với định nghĩa trong sách của Rosen
- Các đồ thị sẽ được đề cập trong bài giảng
  - đơn đồ thị vô hướng ((simple, undirected) graph)
  - đồ thị có hướng (directed graph hoặc digraph)

[1] Khác với sách của Rosen

Đồ thị có hướng

Một *đồ thị có hướng (directed graph hoặc digraph)* $G = (V, E)$ bao gồm một tập khác rỗng V gồm các *đỉnh (vertex)* (hoặc *nút (node)*) và một tập $E \subseteq V \times V$ gồm các *cạnh có hướng (directed edge)* (hoặc *cung (arc)*). Mỗi cạnh có hướng $(u, v) \in E$ có một *đỉnh đầu (start vertex hoặc tail vertex)* u và *một đỉnh cuối (end vertex hoặc head vertex)* v

- Một đồ thị có hướng $G = (V, E)$ đơn giản là một tập hợp V cùng với một *quan hệ nhị phân (binary relation)* E trên V

- Với một tập V, gọi $[V]^k$ là *tập hợp tất cả các tập con k phần tử của V*. (Nói cách khác, $[V]^k$ là tập hợp tất cả các tổ hợp chập k của V)

Đồ thị vô hướng

Một *đơn đồ thị vô hướng (simple, undirected graph)* $G = (V, E)$ bao gồm một tập khác rỗng V gồm các *đỉnh (vertex)* (hoặc *nút (node)*), và một tập $E \subseteq [V]^2$ gồm cách *cạnh vô hướng (undirected edge)*. Mỗi cạnh $e = uv \in E$ (hoặc $e = \{u, v\} \in E$) có hai đỉnh phân biệt $u \neq v$ là các *đầu mút (endpoint)* của e. Ta nói các đỉnh u, v là *liền kề (adjacent)* trong đồ thị G, và cạnh e gọi là cạnh *liên thuộc (incident)* với các đỉnh u, v

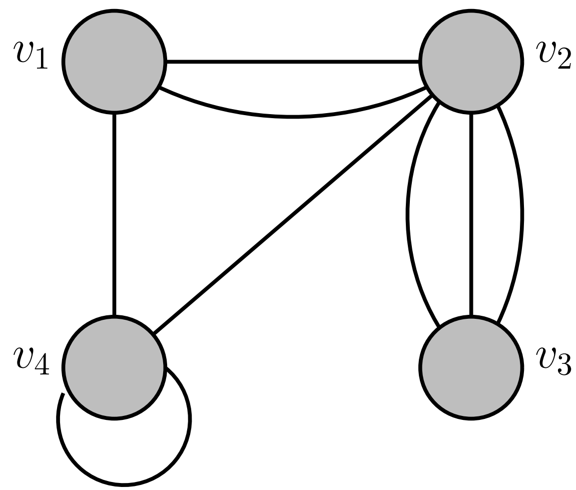
- Định nghĩa trên có thể áp dụng cho cả trường hợp V là tập có vô hạn phần tử (và đồ thị tương ứng được gọi là *đồ thị vô hạn (infinite graph)*). Tuy nhiên, trong bài giảng, chúng ta chỉ đề cập đến các *đồ thị hữu hạn (finite graph)*.

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng

- Tập hợp các đỉnh kề với đỉnh v của G, ký hiệu $N(v)$ hay $N_G(v)$, được gọi là *tập láng giềng (neighborhood)* của v.
- Với một tập các đỉnh $A \subseteq V$, ta ký hiệu $N(A)$ hoặc $N_G(A)$ để chỉ tập các đỉnh liền kề với ít nhất một đỉnh trong A. Nói cách khác, $N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$
- *Bậc (degree)* của một đỉnh v, ký hiệu $\deg(v)$, là số cạnh của G liên thuộc với đỉnh đó. Một khuyên tại đỉnh v (một cạnh nối v với chính nó) đóng góp 2 vào bậc của v

Ví dụ 8

- $N(v_1) = \{v_2, v_4\}$, $N(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}$, $N(v_3) = \{v_2\}$, $N(v_4) = \{v_1, v_2, v_4\}$
- $\deg(v_1) = \deg(v_3) = 3$, $\deg(v_2) = 6$, $\deg(v_4) = 4$



- Một đỉnh bậc 0 được gọi là một *đỉnh cô lập (isolated vertex)*
- Một đỉnh bậc 1 được gọi là một *đỉnh treo (pendant vertex)*

Định lý 1: Định lý bắt tay (Handshaking Lemma)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có m cạnh. Ta có

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Chứng minh.

- Với mỗi cạnh $e = uv \in E$, e được đếm chính xác hai lần trong $\sum_{v \in V} \deg(v)$: một lần trong $\deg(u)$ và một lần trong $\deg(v)$
- Do đó, cả hai vế của đẳng thức trên đều bằng hai lần số cạnh của G $\square$

Định lý 2

Một đồ thị vô hướng có một số chẵn các đỉnh có bậc lẻ

Chứng minh.

- Gọi V_1 là tập các đỉnh bậc chẵn và V_2 là tập các đỉnh bậc lẻ trong đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có m cạnh
- Ta có

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

  - $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ là một số chẵn, vì V_1 là tập tất cả các đỉnh có bậc chẵn
  - Do đó, $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ là một số chẵn, do $2m$ và $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ đều là số chẵn
  - Do V_2 là tập các đỉnh bậc lẻ, để $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ chẵn, cần phải có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ

Ví dụ 9

Có bao nhiêu cạnh trong một đồ thị vô hướng có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc 6?

- Tổng bậc của các đỉnh trong đồ thị là $6 \cdot 10 = 60$
- Theo Định lý bắt tay, nếu m là số cạnh của đồ thị thì $2m = 60$, và do đó $m = 30$

Ví dụ 10

Nếu một đồ thị vô hướng có 5 đỉnh thì liệu mỗi đỉnh có thể có bậc 3 hay không?

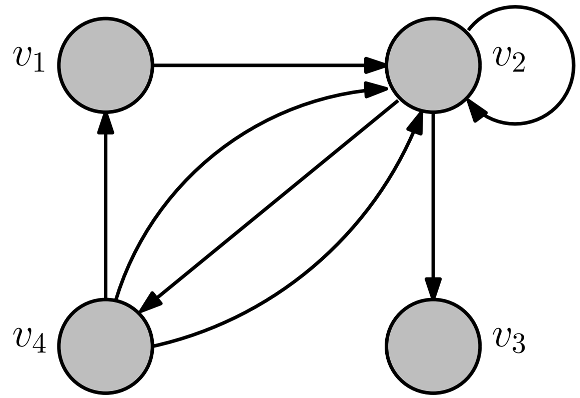
- Không. Vì nếu mỗi đỉnh có bậc 3 thì tổng bậc của các đỉnh là $3 \cdot 5 = 15$. Điều này mâu thuẫn với Định lý bắt tay: tổng bậc của các đỉnh phải là một số chẵn

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng

- *Bậc vào (in-degree)* của một đỉnh v, ký hiệu $\deg^-(v)$ là số các cạnh có đỉnh cuối (tail vertex) là v
- *Bậc ra (out-degree)* của một đỉnh v, ký hiệu $\deg^+(v)$ là số các cạnh có đỉnh đầu (head vertex) là v
- Một khuyên ở đỉnh v đóng góp 1 vào bậc vào và 1 vào bậc ra của v

Ví dụ 11

- $\deg^-(v_1) = \deg^-(v_3) = \deg^-(v_4) = 1$, $\deg^-(v_2) = 4$
- $\deg^+(v_1) = 1$, $\deg^+(v_2) = \deg^+(v_4) = 3$, $\deg^+(v_3) = 0$



Định lý 3

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Ta có

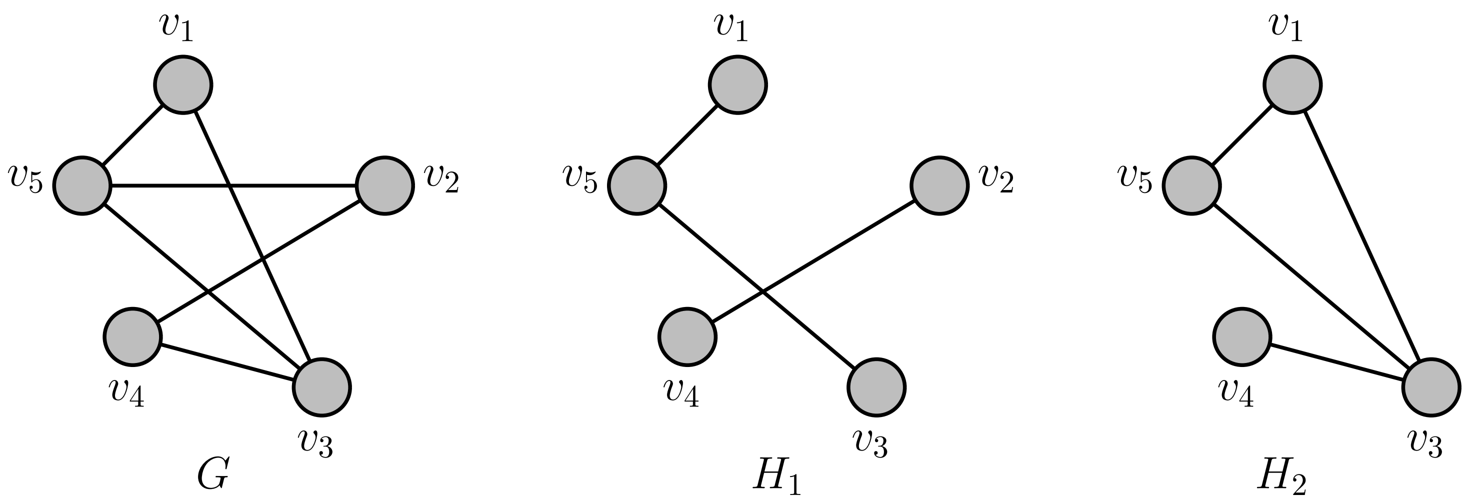
$$|E| = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v)$$

Chứng minh.

- Mỗi cạnh có hướng $e = (u, v) \in E$ đóng góp 1 vào $\deg^-(v)$ và 1 vào $\deg^+(u)$, với $u, v \in V$
- Do đó, $|E|$ = tổng các bậc vào = tổng các bậc ra

$\square$

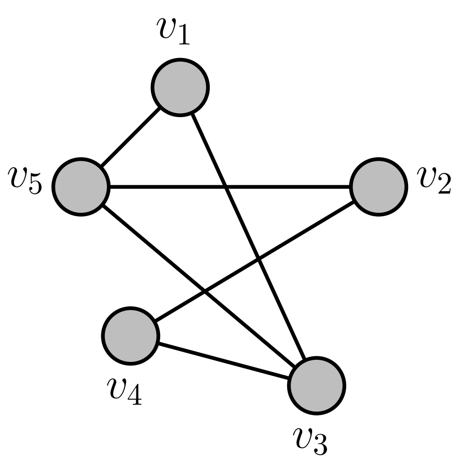
- Một *đồ thị con (subgraph)* của một đồ thị $G = (V, E)$ là một đồ thị $H = (W, F)$ trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$
- $H = (W, F)$ là một *đồ thị con thực sự (proper subgraph)* của $G = (V, E)$ nếu H là đồ thị con của G và $H \neq G$
- $H = (W, F)$ là một *đồ thị con cảm sinh (induced subgraph)* của $G = (V, E)$ nếu H là đồ thị con của G và với mọi cặp đỉnh $u, v \in W$, $uv \in F$ khi và chỉ khi $uv \in E$. Ta cũng nói *H là đồ thị con của G cảm sinh bởi W* và viết $H = G[W]$



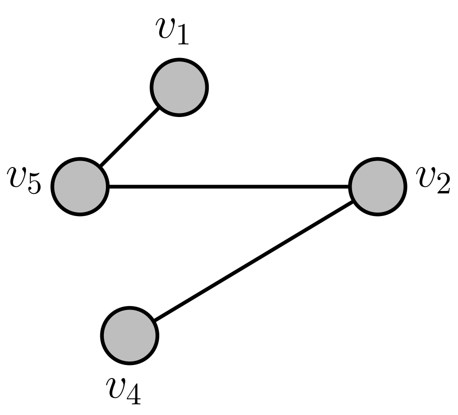
Hình: H_1 là đồ thị con thực sự của G nhưng không phải đồ thị con cảm sinh. H_2 là đồ thị con cảm sinh của G

Cho đơn đồ thị $G = (V, E)$ vô hướng và các tập $V' \subseteq V$ $E' \subseteq E$

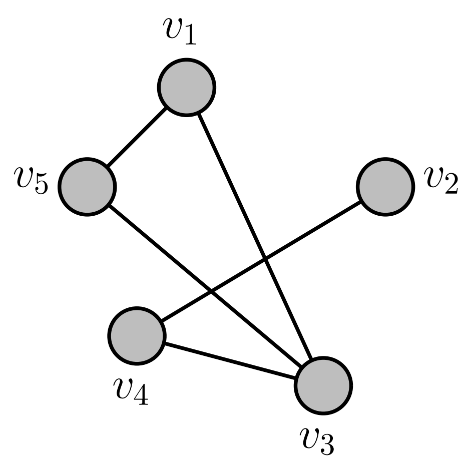
- Đồ thị $G - V'$ là đồ thị thu được bằng cách *xóa các đỉnh trong V' và các cạnh liên thuộc với chúng*. Với một đỉnh $v \in V'$, ta viết $G - v$ thay vì $G - \{v\}$
- Đồ thị $G - E'$ là đồ thị thu được bằng cách *xóa các cạnh trong E'*. Với một cạnh $e \in E'$, ta viết $G - e$ thay vì $G - \{e\}$



G



$G - v_3$

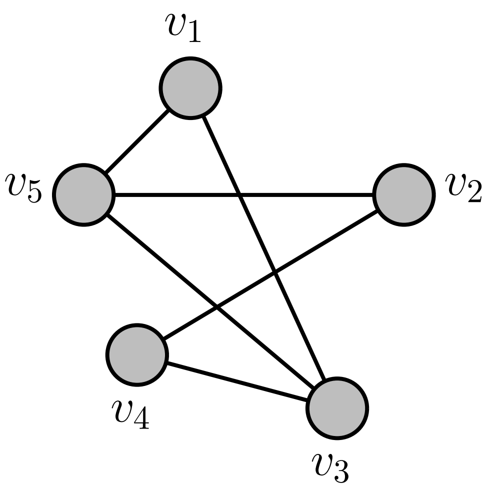


$G - v_2v_5$

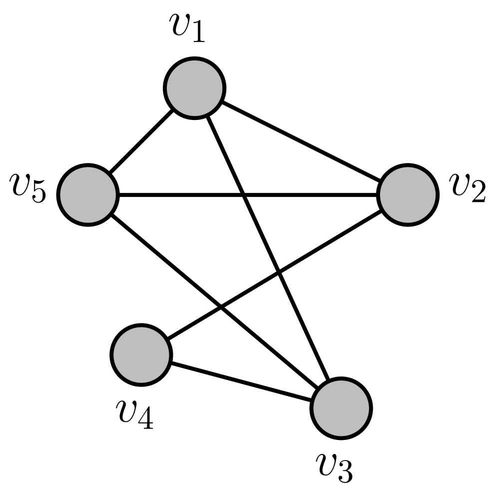
Giới thiệu
Đồ thị mới từ đồ thị cũ

Cho đơn đồ thị $G = (V, E)$ vô hướng với tập $E' \subseteq [V]^2 - E$

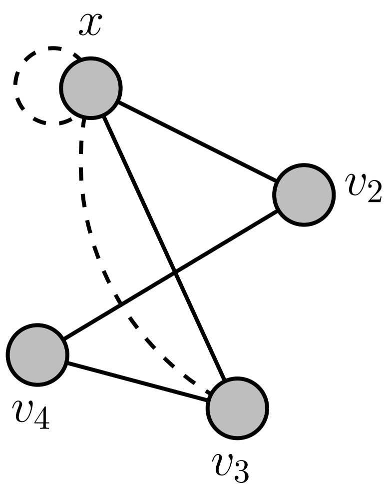
- Đồ thị $G + E'$ là đồ thị thu được bằng cách *thêm các cạnh trong E'*. Với $f \in E'$, ta viết $G + f$ thay vì $G + \{f\}$
- Đồ thị G/e là đồ thị thu được bằng *phép co (contraction) cạnh $e = uv \in E$*
  - gộp hai đỉnh u, v thành một đỉnh mới x, các cạnh kề với u và kề với v chuyển thành cạnh kề với x
  - xóa các khuyên tạo thành sau phép gộp
  - giữ lại một cạnh duy nhất trong số các cạnh song song



G



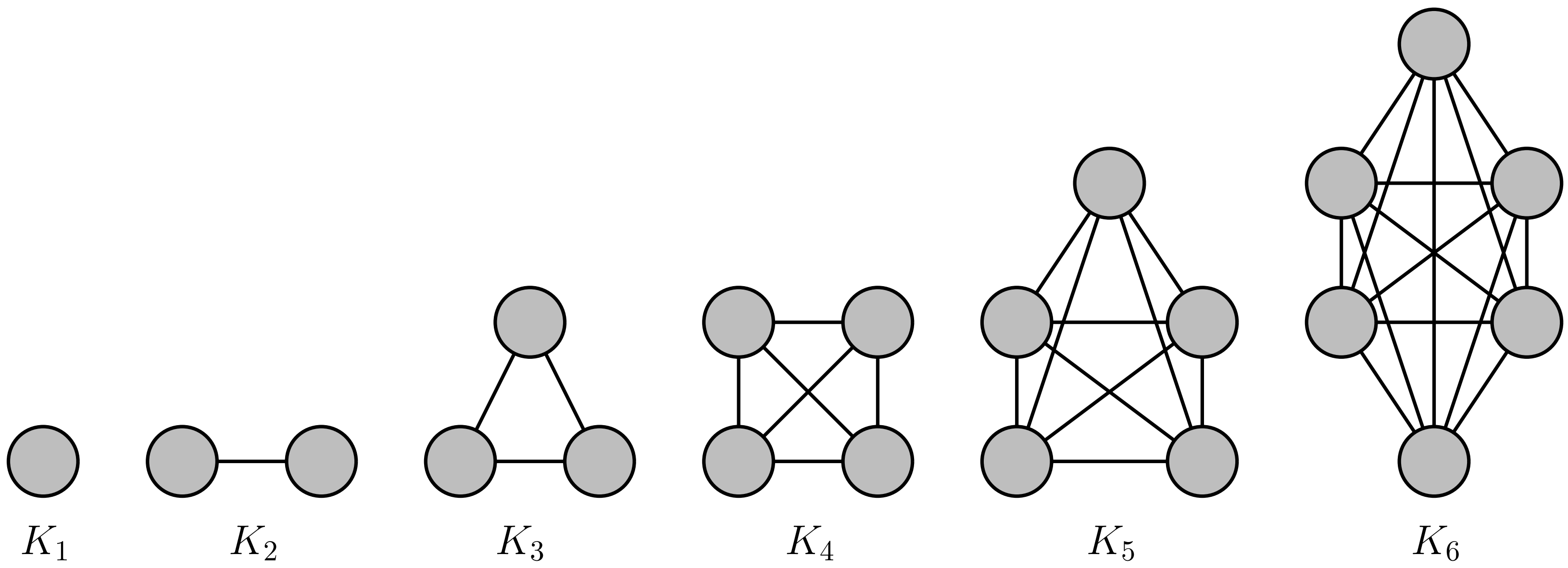
$G + v_1v_2$



G/v_1v_5

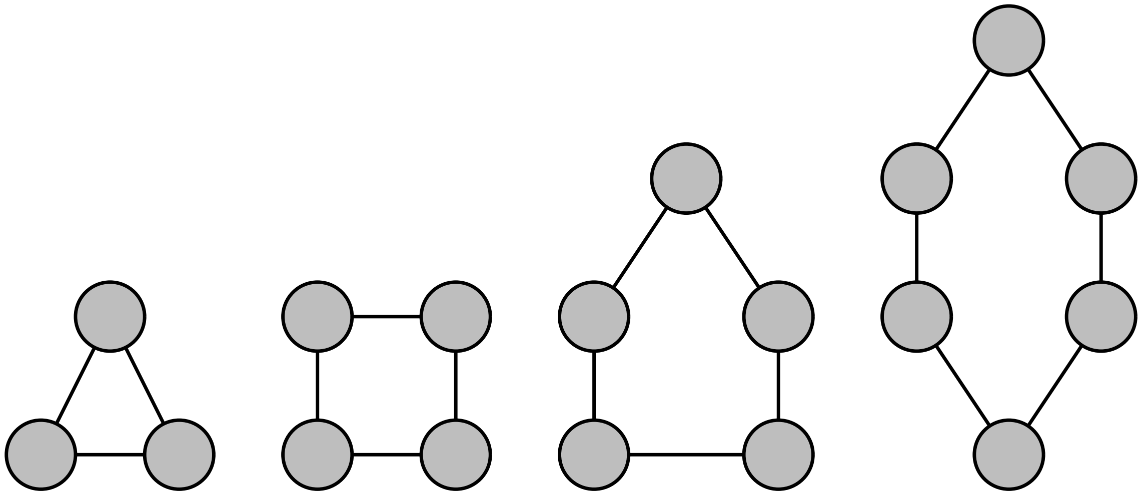
Đồ thị đầy đủ

Đồ thị đầy đủ (complete graph) n đỉnh, ký hiệu K_n, là một đơn đồ thị chứa đúng một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt



Chu trình

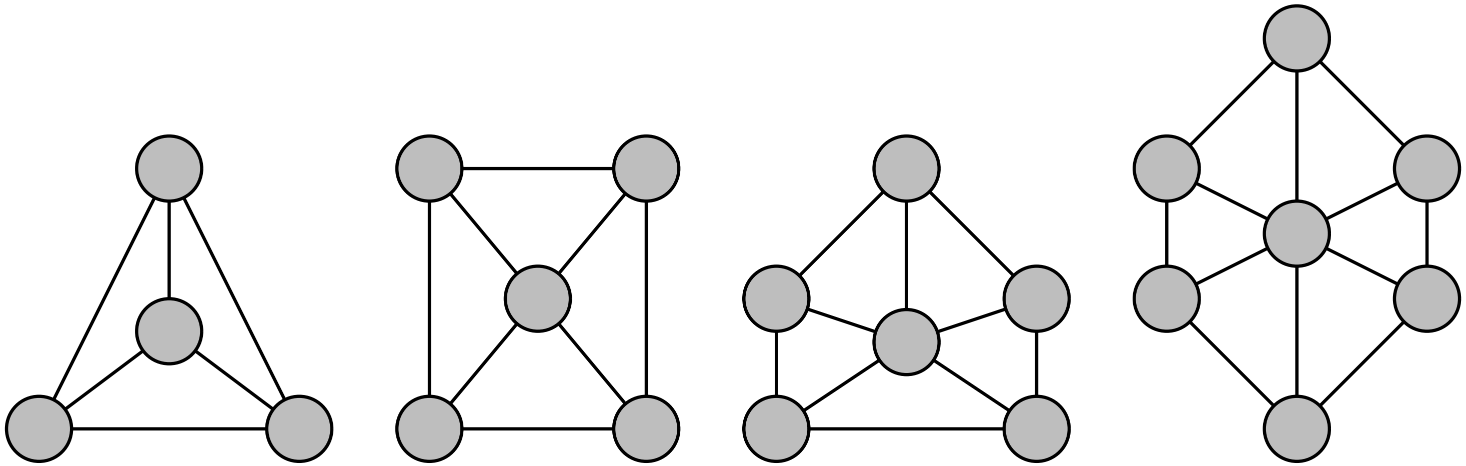
Một *chu trình (cycle)* n đỉnh với $n \geq 3$, ký hiệu C_n, là một đồ thị với các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ và các cạnh $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$, và v_nv_1



C_3 C_4 C_5 C_6

Đồ thị bánh xe

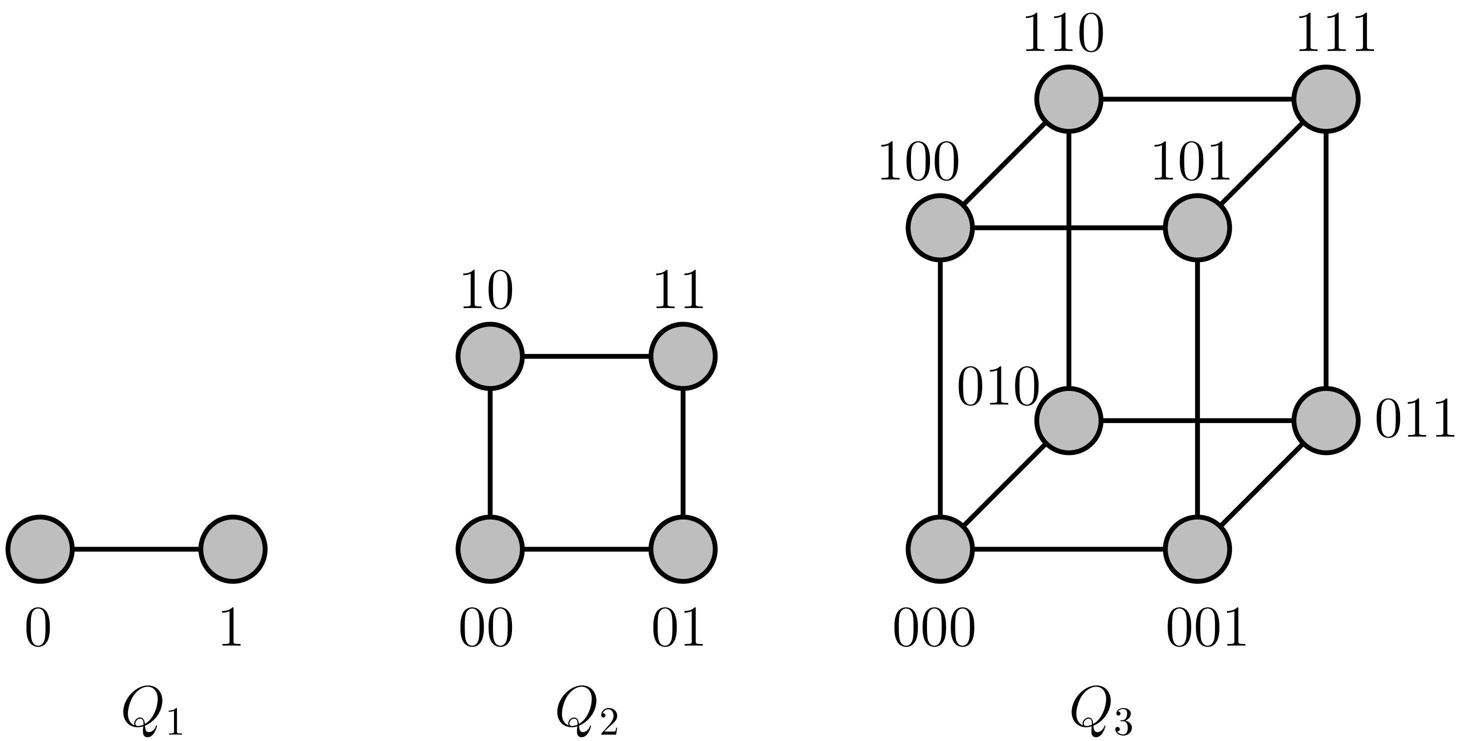
Một *đồ thị bánh xe (wheel)* gồm $n+1$ đỉnh với $n \geq 3$, ký hiệu W_n, là một đồ thị thu được bằng cách thêm một đỉnh mới vào C_n và nối đỉnh đó với mọi đỉnh của C_n bằng các cạnh mới



W_3 W_4 W_5 W_6

Các khối n chiều

Một *khối n chiều (n-dimensional cube)*, ký hiệu Q_n, là một đồ thị có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng một chuỗi nhị phân độ dài n, và hai đỉnh là liền kề khi và chỉ khi các xâu nhị phân biểu diễn chúng khác nhau đúng một bit

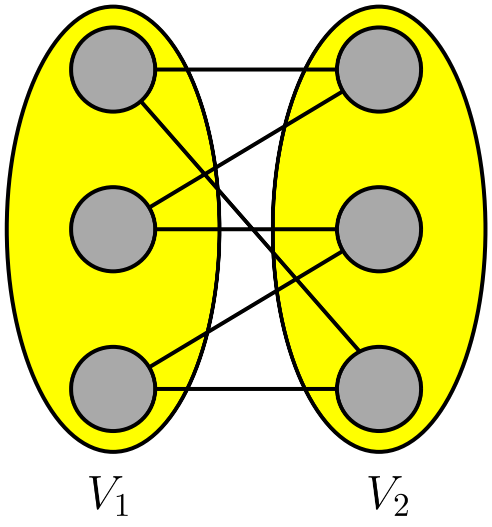


Đồ thị hai phần

Một đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được gọi là một *đồ thị hai phần (bipartite graph)* nếu tồn tại các tập $V_1 \subseteq V$ và $V_2 \subseteq V$ thỏa mãn $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, và mỗi cạnh của G nối một đỉnh thuộc V_1 và một đỉnh thuộc V_2. Ta cũng ký hiệu $G = (V_1 \cup V_2, E)$

Ví dụ 12

C_6 là một đồ thị hai phần



Bài tập 1

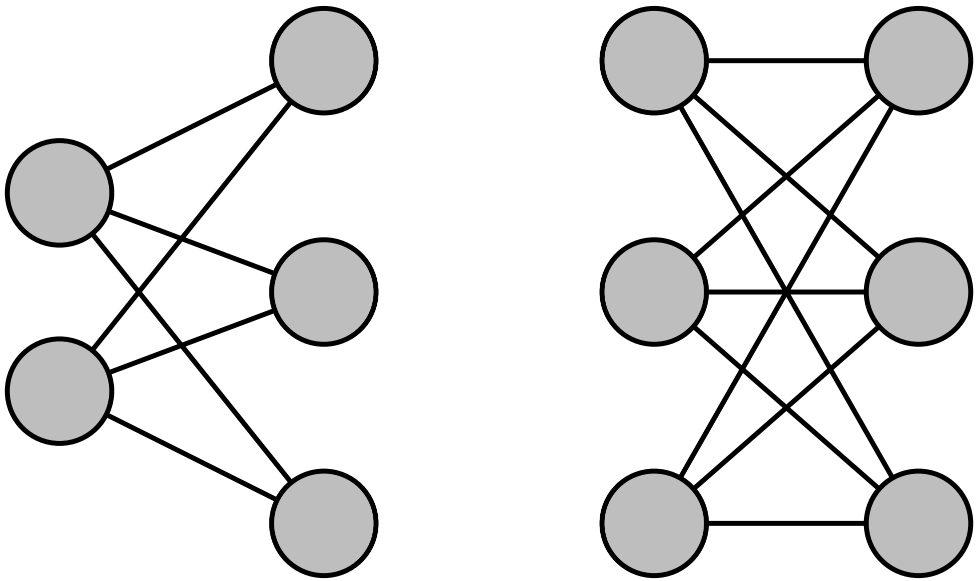
*Chứng minh K_n không là đồ thị hai phần với mọi $n \geq 3$. (**Gợi ý:** Sử dụng phương pháp phản chứng)*

Bài tập 2

*Chứng minh W_n không là đồ thị hai phần với mọi $n \geq 3$. (**Gợi ý:** K_3 không là đồ thị hai phần)*

Đồ thị hai phần đầy đủ

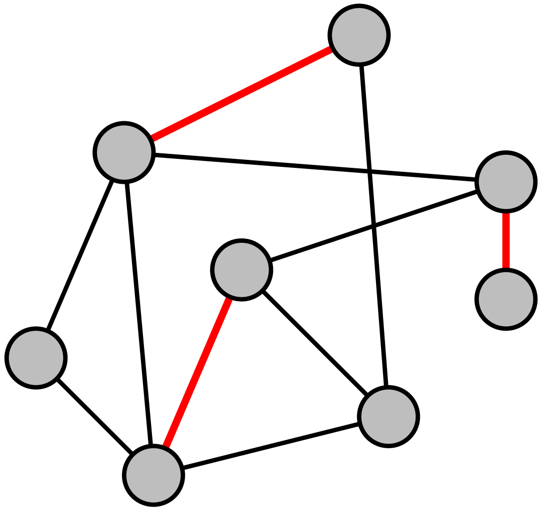
Một *đồ thị hai phần đầy đủ (complete bipartite graph)* là một đồ thị hai phần $G = (V_1 \cup V_2, E)$ thỏa mãn điều kiện với mọi $v_1 \in V_1$ và $v_2 \in V_2$ ta có $v_1v_2 \in E$. Nếu $|V_1| = m$ và $|V_2| = n$, ta ký hiệu đồ thị G bằng $K_{m,n}$.



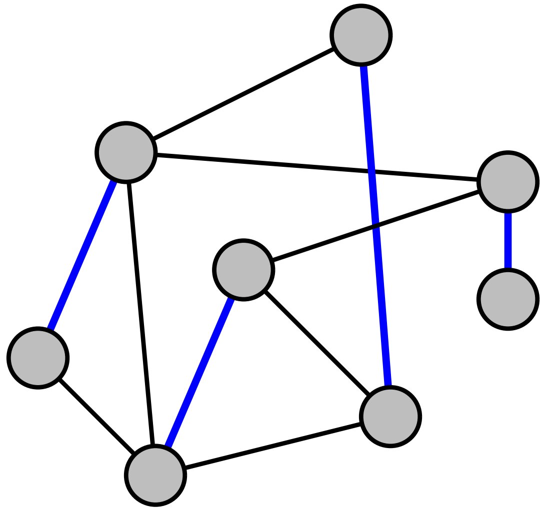
$K_{2,3}$ $K_{3,3}$

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng

- Một *ghép cặp (matching)* M trong G là một tập con của E thỏa mãn điều kiện không có hai cạnh nào trong M có cùng một đỉnh liên thuộc. Nói cách khác, nếu $uv, st \in M \subseteq E$ thì $\{u, v\} = \{s, t\}$ hoặc $\{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset$
- Một *ghép cặp cực đại (maximum matching)* trong G là một ghép cặp có số cạnh lớn nhất có thể



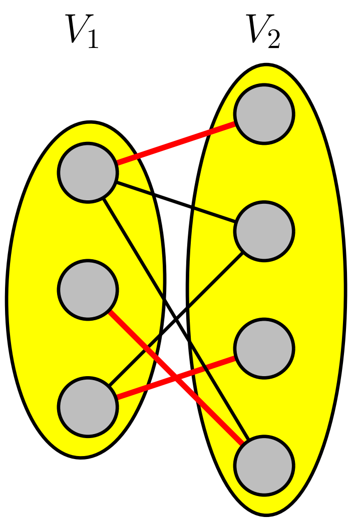
M là một ghép cặp



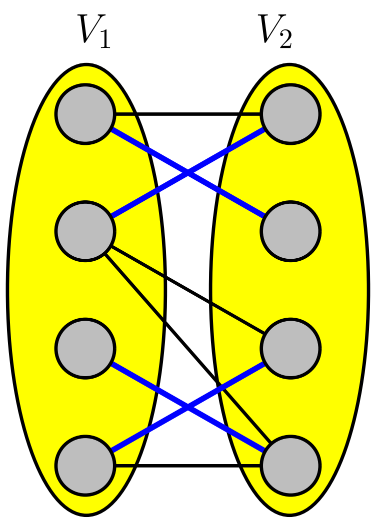
M là một ghép cặp cực đại

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng

- Ta nói rằng một tập cạnh $W \subseteq E$ *bao phủ (cover)* một tập đỉnh $A \subseteq V$ nếu với mọi đỉnh $u \in A$, tồn tại một cạnh $e \in W$ sao cho e liên thuộc với u, nghĩa là $e = uv$ với đỉnh $v \in V$ nào đó
- Trong một đồ thị hai phần $G = (V_1 \cup V_2, E)$, một *ghép cặp đầy đủ (complete matching)* ứng với V_1 là một ghép cặp $M' \subseteq E$ bao phủ V_1, và một *ghép cặp hoàn hảo (perfect matching)* là một ghép cặp $M^\star \subseteq E$ bao phủ $V = V_1 \cup V_2$



M là một ghép cặp bao phủ V_1



M là một ghép cặp bao phủ V

Định lý 4: Định lý Hall (Hall's Marriage Theorem)

Cho $G = (V_1 \cup V_2, E)$ *là một đồ thị hai phần. Tồn tại một ghép cặp* $M \subseteq E$ *bao phủ* V_1 *khi và chỉ khi với mọi* $S \subseteq V_1$*,* $|S| \leq |N_G(S)|$

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử tồn tại một ghép cặp M bao phủ V_1. Do đó, M cũng bao phủ mọi tập con S của V_1. Do đó, với mỗi $v \in S$, tồn tại $w_v \in N_G(v)$ sao cho $vw_v \in M$. Do M là một ghép cặp, với hai đỉnh v, v' phân biệt thuộc $S \subseteq V_1$, ta có $\{v, w_v\} \cap \{v', w_{v'}\} = \emptyset$. Do đó, $\bigcup_{v \in S}\{w_v\} \subseteq \bigcup_{v \in S} N_G(v) = N_G(S)$. Suy ra

$$|N_G(S)| \geq |\bigcup_{v \in S}\{w_v\}| = |\bigcup_{v \in S}\{v\}| = |S|$$

Chứng minh (tiếp).

($\Leftarrow$) Ta chứng minh phát biểu $P(m)$ sau đúng với mọi $m = |V_1| \geq 1$ bằng quy nạp mạnh

Nếu với mọi $S \subseteq V_1$, $|S| \leq |N_G(S)|$ thì tồn tại một ghép cặp $M \subseteq E$ bao phủ V_1

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, do $m = 1$, ta có thể giả sử $V_1 = \{u\}$. Theo giả thiết, $|N_G(u)| \geq |\{u\}| = |V_1| = 1$. Do đó, tồn tại, $v \in N_G(u) \subseteq V_2$, nghĩa là $M = \{uv\}$ là một ghép cặp bao phủ V_1
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(j)$ đúng với mọi $1 \leq j \leq k$, trong đó $k \geq 1$ là số nguyên nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Ta xét hai trường hợp
  (1) **Với mọi tập con thự sự $S \neq \emptyset$ của V_1, $|N_G(S)| > |S|$**
  (2) **Tồn tại một tập con thực sự $T \neq \emptyset$ của V_1, $|N_G(T)| = |T|$**

$\square$

Chứng minh (tiếp).

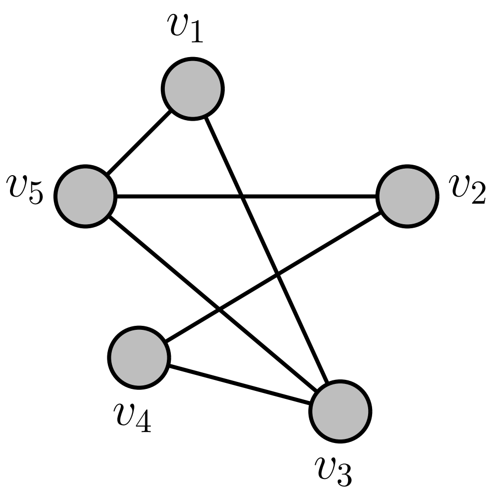
(1) **Với mọi tập con thực sự $S \neq \emptyset$ của V_1, $|N_G(S)| > |S|$**
- Lấy một cạnh bất kỳ $e = uv \in E$ với $u \in V_1$ và $v \in V_2$
- Gọi $G' = G - \{u, v\}$. Áp dụng giả thiết quy nạp, tồn tại một ghép cặp M' trong G' bao phủ V_1'. (Tại sao?) Do đó, $M = M' \cup \{uv\}$ là một ghép cặp trong G bao phủ $V_1 = V_1' \cup \{u\}$

(2) **Tồn tại một tập con thực sự $T \neq \emptyset$ của V_1, $|N_G(T)| = |T|$**
- Xét các đồ thị hai phần $H = G[T \cup N_G(T)]$ và $K = G[V_1 - T, V_2 - N_G(T)]$
- Áp dụng giả thiết quy nạp với H và K (Tại sao?), tồn tại một ghép cặp M_1 trong H bao phủ T và một ghép cặp M_2 trong K bao phủ $V_1 - T$. Do đó, $M = M_1 \cup M_2$ là một ghép cặp bao phủ $V_1 = T \cup (V_1 - T)$

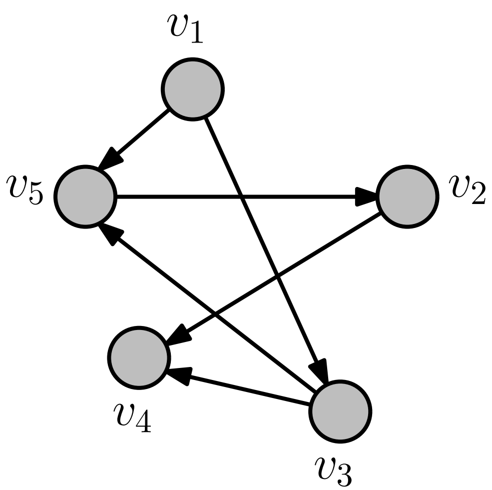
$\square$

Chú ý:
- Chứng minh trên không cho ta một thuật toán (hiệu quả) để xây dựng một ghép cặp cực đại
- Một chứng minh khác của Định lý Hall (mà chúng ta không thảo luận ở đây) cho ta một thuật toán hiệu quả (trong thời gian đa thức) để tìm một ghép cặp cực đại

Một *danh sách kề (adjacency list)* biểu diễn một đồ thị không có cạnh song song bằng cách liệt kê các đỉnh liền kề với mỗi đỉnh trong đồ thị



Đỉnh	Các đỉnh liền kề
v_1	v_3, v_5
v_2	v_4, v_5
v_3	v_1, v_4, v_5
v_4	v_2, v_3
v_5	v_1, v_2, v_3



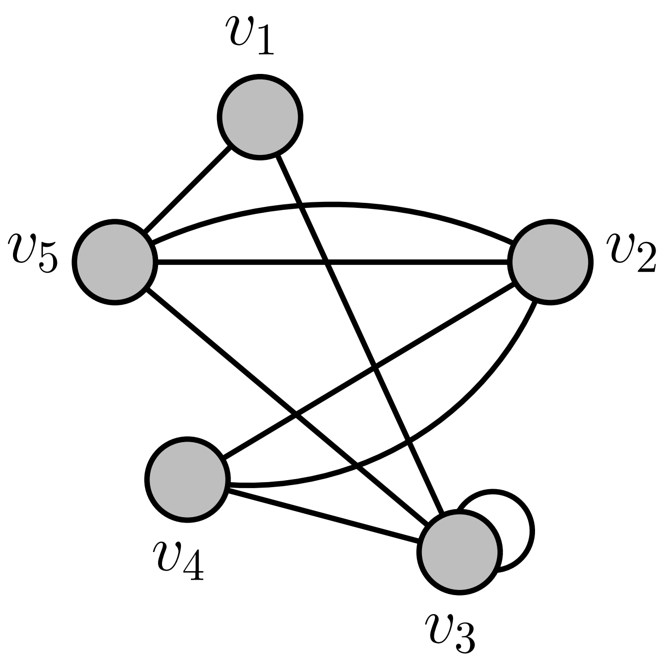
Đỉnh bắt đầu	Đỉnh kết thúc
v_1	v_3, v_5
v_2	v_4
v_3	v_4, v_5
v_4	
v_5	v_2

Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu

Ma trận kề

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$. *Ma trận kề (adjacency matrix)* A của G ứng với thứ tự các đỉnh như trên là một ma trận kích thước $n \times n$ trong đó mỗi phần tử a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ được định nghĩa như sau

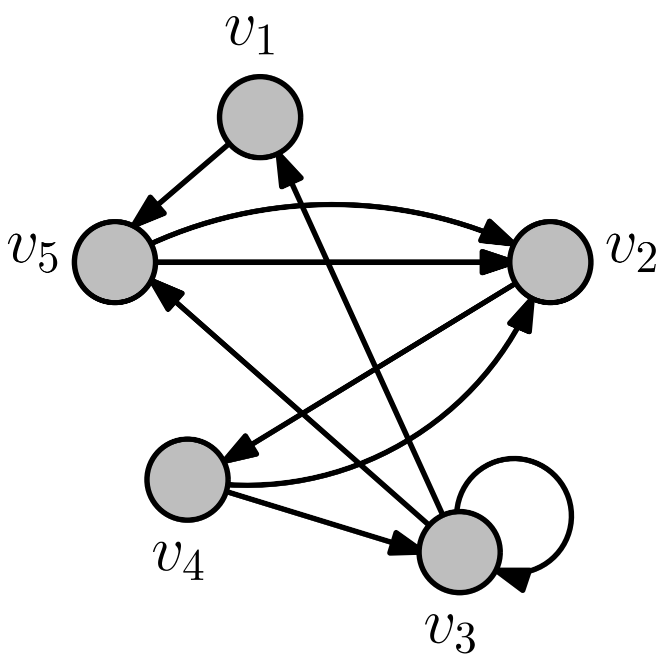
$$a_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{nếu có } m_{ij} \text{ cạnh } v_iv_j \\ 0 & \text{nếu } v_iv_j \notin E \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng có n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$. *Ma trận kề (adjacency matrix)* A của G ứng với thứ tự các đỉnh như trên là một ma trận kích thước $n \times n$ trong đó mỗi phần tử a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ được định nghĩa như sau

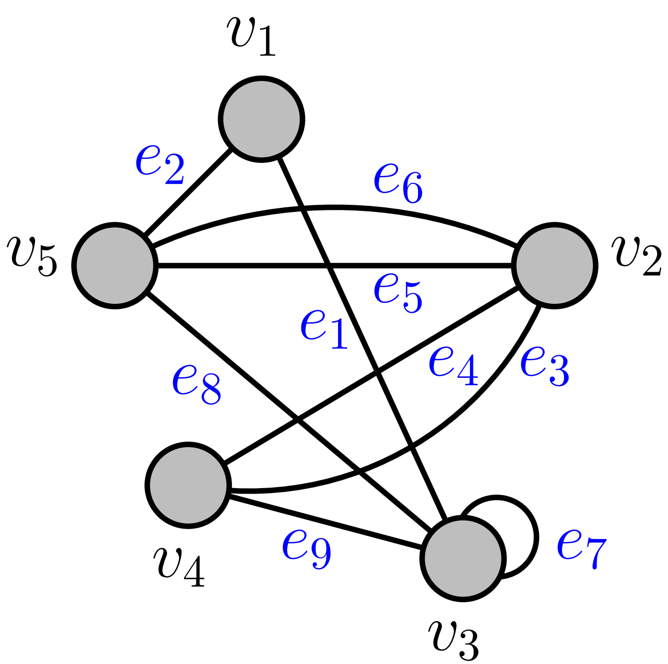
$$a_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{nếu có } m_{ij} \text{ cạnh } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{nếu } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ và m cạnh $e_1, e_2, \dots, e_m$. *Ma trận liên thuộc (incidence matrix)* A của G tương ứng với thứ tự các đỉnh và cạnh như trên là một ma trận kích thước $n \times m$ trong đó các phần tử a_{ij} ($1 \leq i \leq n$ và $1 \leq j \leq m$) được định nghĩa như sau

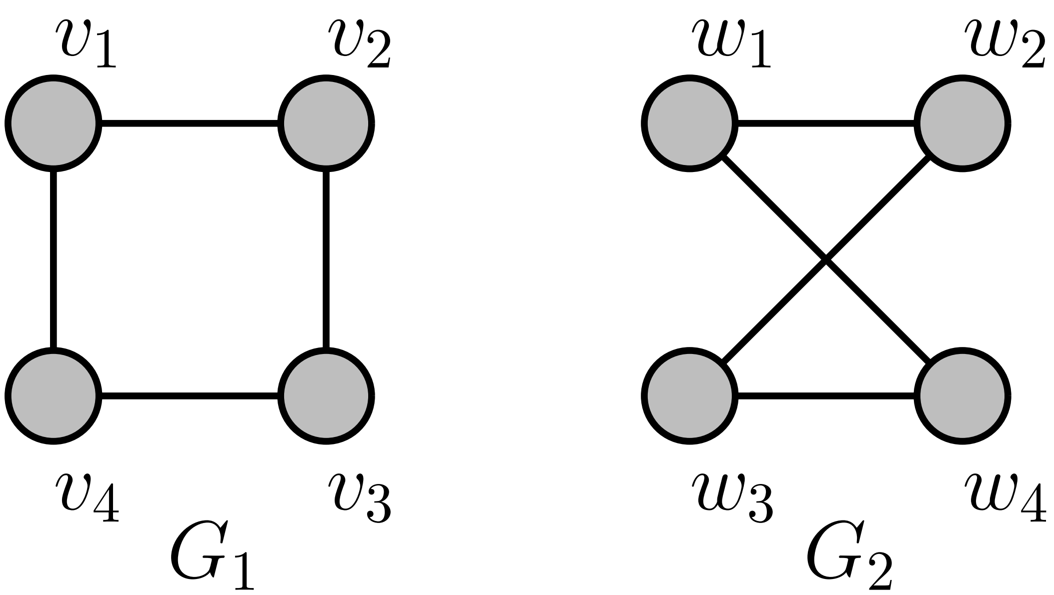
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ liên thuộc với đỉnh } v_i \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sự đẳng cấu

Hai đồ thị vô hướng $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là *đẳng cấu (isomorphic)*, ký hiệu $G_1 \simeq G_2$, nếu tồn tại một song ánh $f : V_1 \to V_2$ thỏa mãn điều kiện: với mọi đỉnh $u, v \in V_1$, $uv \in E_1$ khi và chỉ khi $f(u)f(v) \in E_2$



Hình: $G_1 \simeq G_2$ do tồn tại song ánh $f : V_1 \to V_2$ định nghĩa bởi $f(v_i) = w_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ thỏa mãn điều kiện đề ra

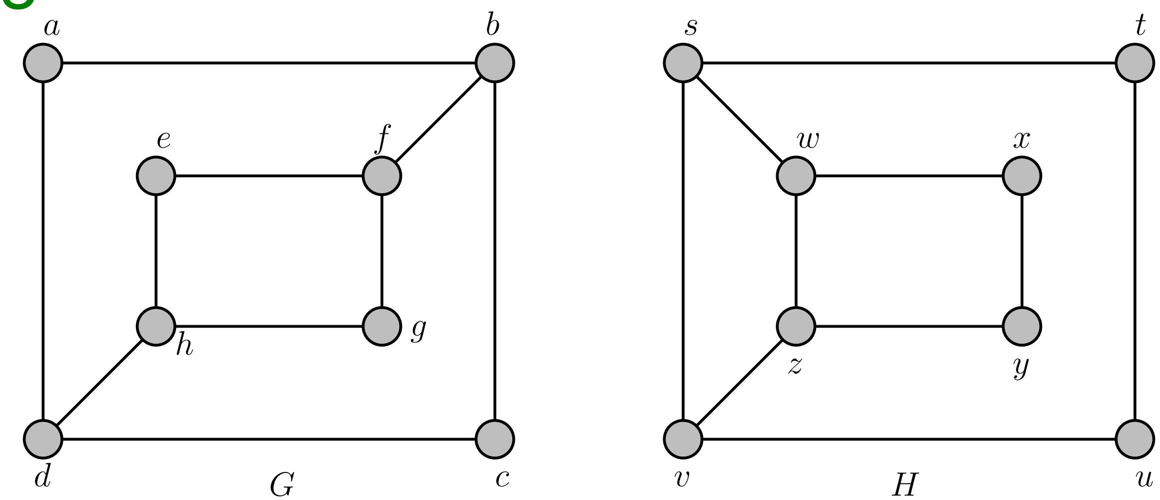
Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu

Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

- Một số tính chất hiển nhiên mà các đồ thị đẳng cấu $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ cần có
  - $|V_1| = |V_2|$
  - $|E_1| = |E_2|$
  - Với mỗi d, số đỉnh bậc d trong G_1 bằng số đỉnh bậc d trong G_2
  - v.v...
- Thông thường, việc kiểm tra tất cả các song ánh có thể giữa hai tập đỉnh của hai đồ thị G_1, G_2 để xác định xem chúng có đẳng cấu hay không là rất khó khăn: có $n!$ song ánh giữa hai đồ thị n đỉnh
  - Đến hiện tại, *chưa biết* có hay không một *thuật toán trong thời gian đa thức* để kiểm tra xem hai đồ thị là đẳng cấu hay không

- Để chứng minh hai đồ thị là *không đẳng cấu*, chúng ta thường tìm một tính chất mà chỉ một trong hai đồ thị có. Một tính chất như thế được gọi là một *bất biến đồ thị (graph invariant)* (ví dụ như số các đỉnh có bậc cho trước nào đó, danh sách bậc các đỉnh của đồ thị, v.v...)

Ví dụ 13



G và H không đẳng cấu

- Do $\deg(a) = 2$, nếu tồn tại một đẳng cấu giữa G và H, a phải tương ứng với một trong bốn đỉnh bậc 2 của H: t, u, x, hoặc y
- Tuy nhiên, mỗi đỉnh trong bốn đỉnh t, u, x, y đều liền kề với một đỉnh bậc hai, trong khi a không thỏa mãn tính chất này trong G