VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Các cấu trúc cơ bản

Tập hợp, Hàm, Dãy, Tổng

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
`hoanganhduc@hus.edu.vn`

Nội dung

Tập hợp
- Một số khái niệm và tính chất cơ bản
- Các phép toán trên tập hợp
- Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

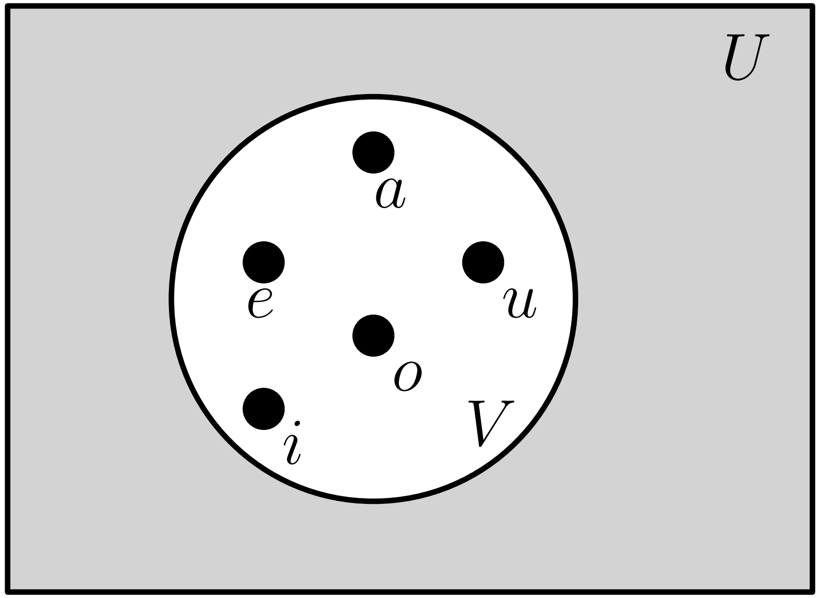
Hàm
- Quan hệ
- Định nghĩa hàm và một số khái niệm
- Một số hàm và toán tử

Dãy
- Định nghĩa dãy và một số khái niệm
- Một số dãy đặc biệt

Tổng
- Ký hiệu tổng và một số khái niệm
- Một số công thức tổng hữu ích

- Một *tập hợp (set)* là một tổng thể không sắp thứ tự các đối tượng phân biệt (gọi là các *phần tử (element)* hoặc *thành viên (member)* của tập hợp)
  - $x \in S$: x là phần tử của S
  - $x \notin S$: x không là phần tử của S
- Ta thường sử dụng các chữ in hoa $S, T, U, \dots$ để ký hiệu tập hợp
- Có thể mô tả một tập hợp bằng cách *liệt kê tất cả các phần tử* của tập đó giữa hai dấu ngoặc nhọn "{" và "}". Trong nhiều trường hợp, có thể *liệt kê thông qua "quy luật đơn giản"*
  - Tập các nguyên âm trong bảng chữ cái tiếng Anh $V = \{a, e, i, o, u\}$
  - Tập các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Có thể mô tả một tập hợp thông qua *quy tắc nhận biết*
  - Với vị từ $P(x)$ bất kỳ trên miền xác định nào đó, $\{x \mid P(x)\}$ là tập hợp tất cả x sao cho $P(x)$ đúng (có thể dùng ":" thay vì "|")
  - Tập các số tự nhiên chẵn $E = \{x \mid x = 2k$ với $k \in \mathbb{N}\}$

- Có thể mô tả một tập hợp thông qua *giản đồ Venn (Venn diagram)*
  - *Tập vũ trụ (universal set)* U gồm tất cả các đối tượng đang xét — Hình chữ nhật
  - Tập hợp cần mô tả — Hình tròn hoặc các hình khác
  - Phần tử của tập hợp — Điểm



Hình: Mô tả tập các nguyên âm trong bảng chữ cái tiếng Anh $V = \{a, e, i, o, u\}$ bằng giản đồ Venn

- *Tập hợp rỗng (empty set)*, ký hiệu $\emptyset$, là tập hợp duy nhất không chứa bất kỳ phần tử nào
- $\emptyset = \{\}$ hoặc $\emptyset = \{x \mid \mathbf{F}\}$ với $\mathbf{F}$ là một mệnh đề luôn luôn sai (mâu thuẫn)
- Bất kể miền xác định là gì, *mệnh đề* $\neg\exists x\,(x \in \emptyset)$ *luôn đúng*
- $\emptyset \neq \{\emptyset\}$
  - Tập $\{\emptyset\}$ không rỗng, vì nó chứa một phần tử—tập hợp rỗng

Cho hai tập hợp A và B. A là *tập con (subset)* của B, ký hiệu $A \subseteq B$ hoặc $B \supseteq A$, khi và chỉ khi mỗi phần tử của tập A cũng là một phần tử của B

- $(A \subseteq B) \equiv \forall x\,(x \in A \to x \in B)$
- $(A \not\subseteq B) \equiv \neg(A \subseteq B)$ (A *không* là tập con của B)
- $(A \subset B) \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \not\subseteq A)$ (A là *tập con thực sự (proper subset)* của B)

Bài tập 1

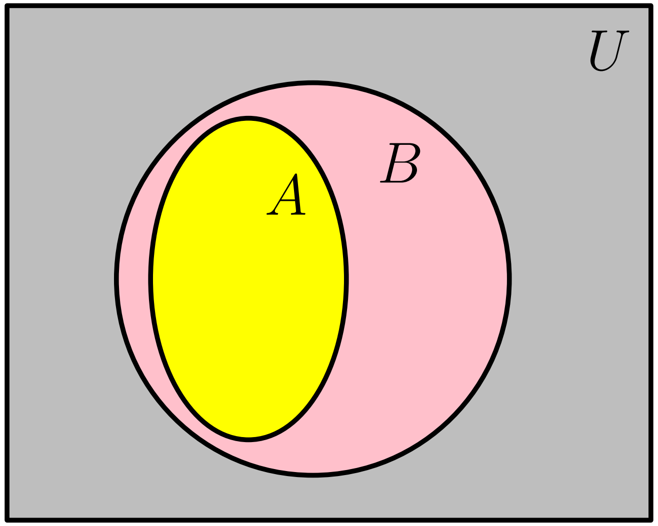
Cho $A = \{1, 2, 3\}$ và $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hãy liệt kê tất cả các tập hợp

(a) *là tập con của A*

(b) *là tập con thực sự của A*

(c) *vừa là tập con của A vừa là tập con của B*

(d) *là tập con của A nhưng không là tập con của B*



Hình: Giản đồ Venn mô tả $A \subset B$

Ví dụ 1

Ta chứng minh *với mọi tập A, ta có $\emptyset \subseteq A$*

- Nghĩa là, ta cần chứng minh $\forall A\,\forall x\,((x \in \emptyset) \to (x \in A))$
- Cụ thể, ta cần chỉ ra rằng với một tập A_0 và một phần tử x_0 cụ thể thuộc các miền xác định tương ứng, mệnh đề $(x_0 \in \emptyset) \to (x_0 \in A)$ đúng
- Thật vậy, theo định nghĩa của tập hợp rỗng, $(x_0 \in \emptyset) = \mathrm{F}$. Do đó, $(x_0 \in \emptyset) \to (x_0 \in A) = \mathrm{T}$

Bài tập 2

Chứng minh rằng với mọi tập hợp A, ta có $A \subseteq A$

Bài tập 3

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

(a) $1 \in \{1\}$

(b) $1 \subseteq \{1\}$

(c) $\{1\} \in \{\{1\}\}$

(d) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$

Bài tập 4

Chứng minh rằng nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$ thì $A \subseteq C$

Bài tập 5

Liệu có tồn tại các tập hợp A và B thỏa mãn $A \in B$ và $A \subseteq B$?

Cho hai tập hợp A và B. A và B là hai tập *bằng nhau*, ký hiệu $A = B$, khi và chỉ khi $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$

- $(A = B) \equiv (A \subseteq B) \land (B \subseteq A) \equiv \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
- Tất cả các phần tử trong một tập đều *phân biệt (distinct)*; liệt kê một phần tử nhiều lần là vô nghĩa
  - Nếu $a = b$ thì $\{a, b, c\} = \{a, c\} = \{b, c\} = \{a, a, b, c, a, c, c\}$
  - Ta nói rằng tập trên có (nhiều nhất) 2 phần tử
- Các phần tử của một tập hợp *không sắp thứ tự (unordered)*
  - Bất kể a, b, c là gì, $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$

- *Lực lượng (cardinality)* của một tập A, ký hiệu $|A|$, là số phần tử khác biệt mà A có
  - $|\emptyset| = 0$; $|\{1, 2, 3\}| = 3$; $|\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}| = 2$
- Nếu $|A| \in \mathbb{N}$, thì ta gọi A là *tập hữu hạn (finite set)*. Ngược lại, A là một *tập vô hạn (infinite set)*
- Một số tập vô hạn quan trọng
  - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ *Tập số tự nhiên (**n**atural numbers)*
  - $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ *Tập số nguyên (integers)*
  - $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$ *Tập số nguyên dương (positive integers)*
  - $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},$ và $q \neq 0\}$ *Tập số hữu tỷ (rational numbers)*
  - $\mathbb{R}$ *Tập số thực (**r**eal numbers)*
  - $\mathbb{R}^+$ *Tập số thực dương (positive real numbers)*
  - $\mathbb{C}$ *Tập số phức (**c**omplex numbers)*
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Bài tập 6

Tìm các tập hợp A, B thỏa mãn các điều kiện

(a) $A = \{3, |B|\}$ *và* (b) $B = \{1, |A|, |B|\}$

- *Tập lũy thừa (power set)* của một tập A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp gồm tất cả các tập con của A
  - $\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$
  - $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
  - $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
  - $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- Nếu A là tập hữu hạn, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. Do đó ký hiệu 2^A đôi khi cũng được sử dụng để chỉ tập lũy thừa của A

Bài tập 7

Cho $A = \{1, 2, 3\}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

(a) $2 \in A$ (c) $2 \in \mathcal{P}(A)$ (e) $\{2\} \in \mathcal{P}(A)$ (g) $\{\{2\}\} \in \mathcal{P}(A)$

(b) $2 \subseteq A$ (d) $2 \subseteq \mathcal{P}(A)$ (f) $\{2\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ (h) $\{\{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

Bài tập 8

*Chứng minh rằng nếu $A = B$ thì $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ với hai tập A, B bất kỳ. Ngược lại, nếu $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ thì A có bằng B không? (**Gợi ý:** $A = B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \equiv \forall x\, (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ và nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$ thì $A \subseteq C$)*

- Với $n \in \mathbb{N}$, một *bộ sắp thứ tự n phần tử (ordered n-tuples)* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là một dãy các phần tử có phần tử thứ nhất là a_1, phần tử thứ hai là a_2, ..., và phần tử thứ n là a_n
  - Một bộ sắp thứ tự 2 phần tử được gọi là một *cặp sắp thứ tự (order pair)*
- Hai bộ $(a_1, \ldots, a_n)$ và $(b_1, \ldots, b_n)$ là *bằng nhau* nếu với mọi $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i = b_i$
- **Chú ý:** $(1, 2) \neq (2, 1) \neq (2, 1, 1)$ nhưng $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{2, 1, 1\}$
- *Tích Đềcác (Cartesian product)* của hai tập A, B, ký hiệu $A \times B$, là tập tất cả các cặp sắp thứ tự (a, b) trong đó $a \in A$ và $b \in B$
  - $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
  - Chú ý rằng tích Đềcác *không* có tính chất giao hoán, nghĩa là $\neg\forall A, B\, (A \times B = B \times A)$
  - Tổng quát hóa $A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n\}$

Bài tập 9

Cho $A = \{1, \{2, 3\}\}$ *và* $B = \{4, 5, 6\}$*. Tìm các tập hợp* $A \times A$*,* $B \times B$*,* $A \times B$*, và* $B \times A$

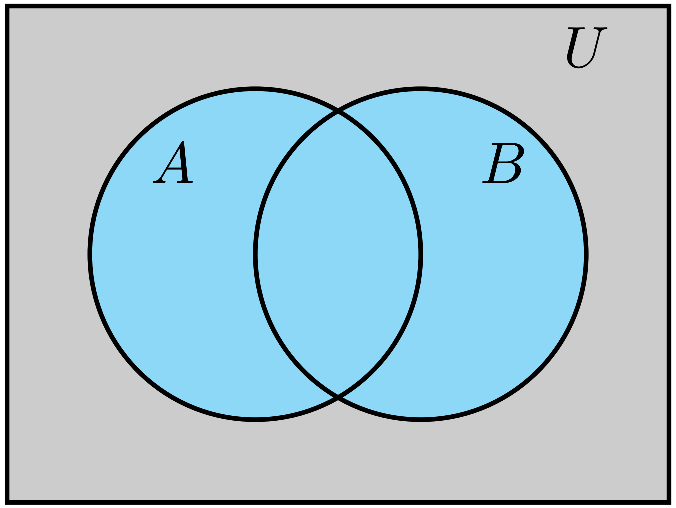
Bài tập 10

Chứng minh rằng $A \times B = \emptyset$ *khi và chỉ khi* $A = \emptyset$ *hoặc* $B = \emptyset$

Bài tập 11

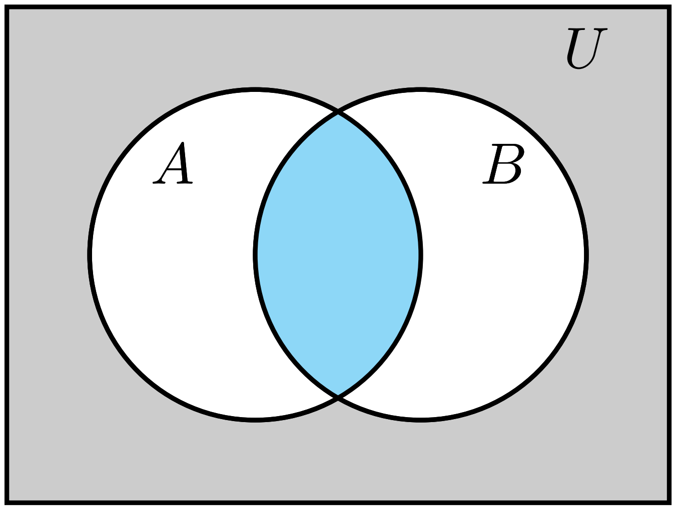
Chứng minh rằng $A \times B = B \times A$ *khi và chỉ khi* $A = \emptyset$ *hoặc* $B = \emptyset$ *hoặc* $A = B$

- *Hợp (union)* của hai tập hợp A, B, ký hiệu $A \cup B$, là tập chứa tất cả các phần tử hoặc thuộc A, hoặc thuộc B, hoặc thuộc cả hai
  - $\forall A, B\, (A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\})$
  - $A \cup B \supseteq A$ và $A \cup B \supseteq B$
  - $\{1, 3, 5\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



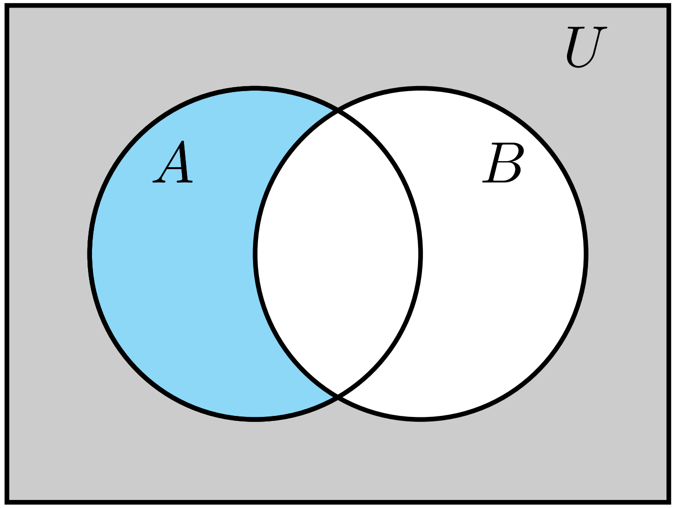
Hình: Giản đồ Venn mô tả $A \cup B$

- *Giao (intersection)* của hai tập hợp A, B, ký hiệu $A \cap B$, là tập chứa tất cả các phần tử đồng thời thuộc cả A và B
  - $\forall A, B\, (A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\})$
  - $A \cap B \subseteq A$ và $A \cap B \subseteq B$
  - $\{1, 3, 5\} \cap \{2, 3, 4\} = \{3\}$
- Hai tập A và B là *rời nhau (disjoint)* nếu $A \cap B = \emptyset$.
  - $\{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$

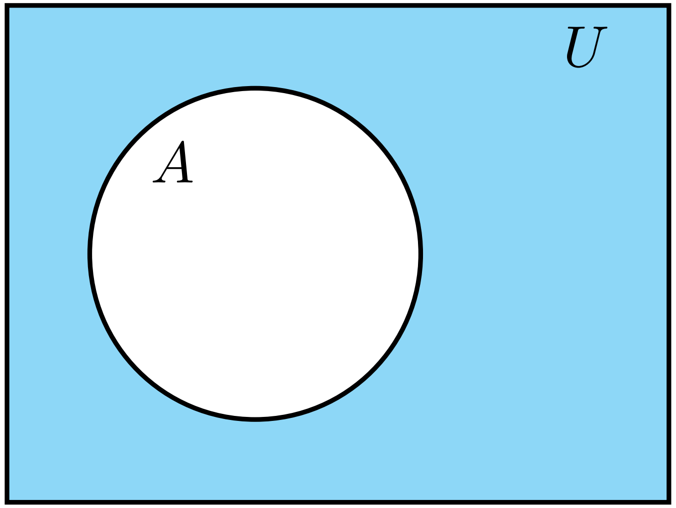


Hình: Giản đồ Venn mô tả $A \cap B$

- *Hiệu (difference)* của hai tập hợp A, B, ký hiệu $A - B$ hoặc $A \setminus B$, là tập chứa tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B
  - $\forall A, B\, (A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\})$
  - $\{1,3,5\} - \{2,3,4\} = \{1,5\}$
- Khi tập vũ trụ U được xác định, *phần bù (complement)* của tập A, ký hiệu $\overline{A}$, là tập $U - A$
  - $\forall A\, (\overline{A} = \{x \mid x \notin A\})$

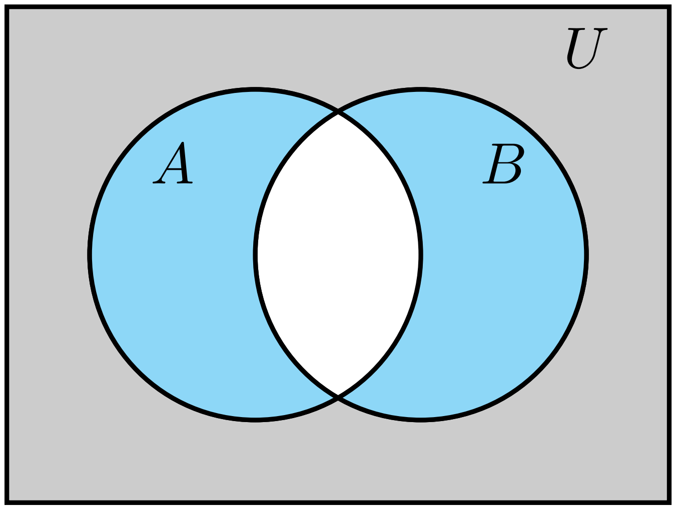


Hình: Giản đồ Venn mô tả $A - B$



Hình: Giản đồ Venn mô tả $\overline{A}$

- *Hiệu đối xứng (symmetric difference)* của hai tập hợp A, B, ký hiệu $A\Delta B$ hoặc $A \oplus B$, là tập chứa tất cả các phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc B nhưng không thuộc cả A và B
  - $\forall A, B\, (A\Delta B = \{x \mid x \in A \oplus x \in B\})$
  - $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
  - $\{1, 3, 5\}\Delta\{2, 3, 4\} = \{1, 2, 4, 5\}$



Hình: Giản đồ Venn mô tả $A\Delta B$

Bài tập 12

Tìm các tập A và B, biết rằng $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$, và $A \cap B = \{3, 6, 9\}$

Bài tập 13

Cho các tập hợp A, B. Chứng minh

(a) $A \cap B \subseteq A$ và $A \cap B \subseteq B$

(b) $A \subseteq (A \cup B)$

(c) $A - B \subseteq A$

Bảng tính thuộc (membership table) của các phép toán trên tập hợp

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$	$\overline{A}$	$A \Delta B$
1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0

Bài tập 14

Xây dựng bảng tính thuộc của

(a) $A \cup (B \cup C)$ và $(A \cup B) \cup C$

(b) $A \cap (B \cup C)$ và $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(c) $\overline{A \cup B}$ và $\overline{A} \cap \overline{B}$

Tập hợp
Các hằng đẳng thức tập hợp

Tên gọi	Đẳng thức
Luật đồng nhất (Identity laws)	$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$
Luật nuốt (Domination laws)	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Luật lũy đẳng (Idempotent laws)	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Luật bù kép (Double complement laws)	$\overline{\overline{A}} = A$
Luật giao hoán (Commutative laws)	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Luật kết hợp (Associative laws)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Luật phân phối (Distributive laws)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Tên gọi	Đẳng thức
Luật De Morgan (De Morgan's laws)	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Luật hấp thụ (Absorption laws)	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Luật bù (Complement laws)	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Với hai tập A, B bất kỳ,

Chứng minh $A = B$

(1) Chứng minh trực tiếp $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$

(2) Chứng minh thông qua định nghĩa tập hợp và các phép biến đổi lôgic

(3) Chứng minh bằng bảng tính thuộc

Ví dụ 2 (Dùng định nghĩa)

Chứng minh $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$
  - Giả sử $x \in \overline{A \cap B}$. Theo định nghĩa, $x \notin A \cap B$. Do đó, mệnh đề $\neg(x \in A \land x \in B)$ đúng. Áp dụng luật De Morgan, $\neg(x \in A) \lor \neg(x \in B)$ đúng. Theo định nghĩa, ta có $x \notin A$ hoặc $x \notin B$. Do đó, $x \in \overline{A}$ hoặc $x \in \overline{B}$, suy ra $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$
  - Giả sử $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Theo định nghĩa, $x \in \overline{A}$ hoặc $x \in \overline{B}$. Do đó, $x \notin A$ hoặc $x \notin B$. Như vậy, mệnh đề $(x \notin A) \lor (x \notin B)$ đúng. Theo định nghĩa, $\neg(x \in A) \lor \neg(x \in B)$ cũng đúng. Áp dụng luật De Morgan, mệnh đề $\neg(x \in A \land x \in B)$ đúng. Do đó, $\neg(x \in A \cap B)$ đúng, suy ra $x \in \overline{A \cap B}$

Ví dụ 3 (Dùng đẳng thức lôgic đã biết)

Chứng minh $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x \mid x \notin A \cap B\} && \text{định nghĩa phần bù} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \cap B)\} && \text{định nghĩa } \notin \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} && \text{định nghĩa } \cap \\
&= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} && \text{luật De Morgan} \\
&= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} && \text{định nghĩa } \notin \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} && \text{định nghĩa phần bù} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} && \text{định nghĩa } \cup \\
&= \overline{A} \cup \overline{B} && \text{mô tả tập hợp}
\end{aligned}
$$

Ví dụ 4 (Dùng bảng tính thuộc)

Chứng minh $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Bài tập 15

Chứng minh các hằng đẳng thức tập hợp đã đề cập (sử dụng các phương pháp đã trình bày)

Bài tập 16

Với các tập A, B bất kỳ, chứng minh

(a) $A \cap B = A - (A - B)$

(b) $A \cup (B - A) = A \cup B$

(c) $A \cap (B - A) = \emptyset$

(d) $A \Delta A = \emptyset$

(e) $A \Delta \emptyset = A$

(f) $A \Delta B = B \Delta A$

Bài tập 17

Với các tập A, B, C, có thể kết luận rằng $A = B$ nếu

(a) $A \cup C = B \cup C$?

(b) $A \cap C = B \cap C$?

(c) $A \cup C = B \cup C$ và $A \cap C = B \cap C$?

Bài tập 18

Có thể nói gì về các tập A, B nếu $A \Delta B = A$?

Bài tập 19

Với A là tập con của một tập vũ trụ U, chứng minh rằng

(a) $A \Delta U = \overline{A}$

(b) $A \Delta \overline{A} = U$

Bài tập 20

Với hai tập A, B bất kỳ, chứng minh

(a) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

(b) $A \Delta B = B \Delta A$

(c) $(A \Delta B) \Delta B = A$

Bài tập 21

Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho các đẳng thức sau

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times C) \cup (B \times C)$

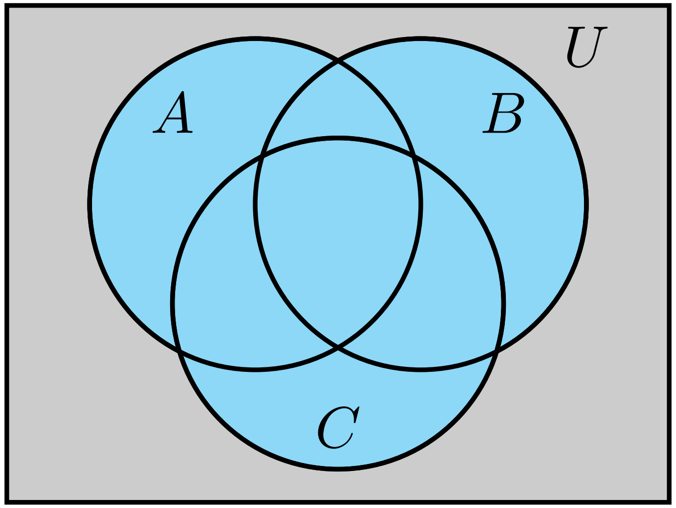
(b) $A \times (B \cap C) = (A \times C) \cap (B \times C)$

trong đó A, B, C là các tập bất kỳ

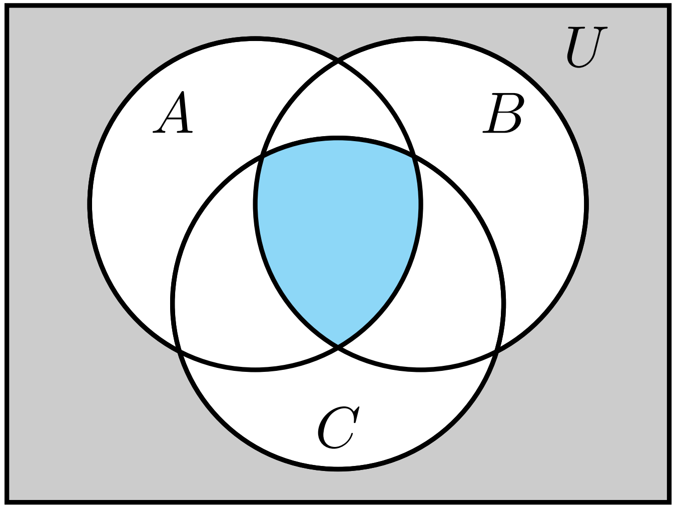
Tập hợp

Tổng quát hóa phép hợp và phép giao

- Do các phép hợp và giao thỏa mãn luật giao hoán và luật kết hợp, ta có thể mở rộng các khái niệm này cho dãy n tập $A_1, \ldots, A_n$ hoặc thậm chí dãy vô hạn các tập.
  - Cách nhóm và thứ tự thực hiện không quan trọng
  - $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = B \cup (A \cup C) = \ldots$
  - $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = B \cap (A \cap C) = \ldots$



Hình: Giản đồ Venn cho $A \cup B \cup C$



Hình: Giản đồ Venn cho $A \cap B \cap C$

Hợp (union) của một bộ (hữu hạn hoặc vô hạn) các tập hợp là một tập chứa tất cả các phần tử là thành viên của ít nhất một tập trong bộ

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \exists i \in \{1, \dots, n\}\, (x \in A_i)\} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$
- Tương tự với tập chỉ số I bất kỳ $\bigcup_{i \in I} A_i$ hay với vô hạn các tập hợp $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Ví dụ 5

Với $i = 1, 2, \dots$ nếu $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$ thì

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \dots\} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}^+$$

Tập hợp
Tổng quát hóa phép hợp và phép giao

Giao (intersection) của một bộ (hữu hạn hoặc vô hạn) các tập hợp là một tập chứa tất cả các phần tử là thành viên của tất cả các tập trong bộ

- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}\, (x \in A_i)\} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$
- Tương tự với tập chỉ số I bất kỳ $\bigcap_{i \in I} A_i$ hay với vô hạn các tập hợp $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

Ví dụ 6

Với $i = 1, 2, \dots$ nếu $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$ thì

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \dots\} = \{n, n+1, n+2, \dots\} = A_n$$

Bài tập 22

Với các tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 6, 8\}$, *và* $C = \{5, 7, 9, 10\}$, *tìm* $A \cap B \cap C$ *và* $A \cup B \cup C$

Bài tập 23

Với các tập hợp A, B, C *bất kỳ, chứng minh*

(a) $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

(b) $\overline{A \cup B \cap C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

Tập hợp

Biểu diễn tập hợp bằng chuỗi nhị phân

- Giả sử *tập vũ trụ U là hữu hạn* và các phần tử của U được liệt kê theo *thứ tự* $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$. Ta có thể biểu diễn một tập hữu hạn $A \subseteq U$ dưới dạng một chuỗi nhị phân $\mathcal{B}(A) = x_1 x_2 \dots x_n$ trong đó $x_i = 1$ *nếu* $u_i \in A$ và $x_i = 0$ *nếu* $u_i \notin A$.
  - Với $U = \{1, 2, \dots, 10\}$ $(u_1 = 1, \dots, u_{10} = 10)$ và $A = \{2, 3, 5, 7\}$ thì $\mathcal{B}(A) = 0110101000$

U	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathcal{B}(A)$	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0

- Các toán tử tập hợp *“$\cup$”, “$\cap$”, và “$\overline{\quad}$”* lần lượt tương ứng với các toán tử lôgic *“$\vee$”, “$\wedge$”, và “$\neg$”* thực hiện theo từng bit.

Bài tập 24

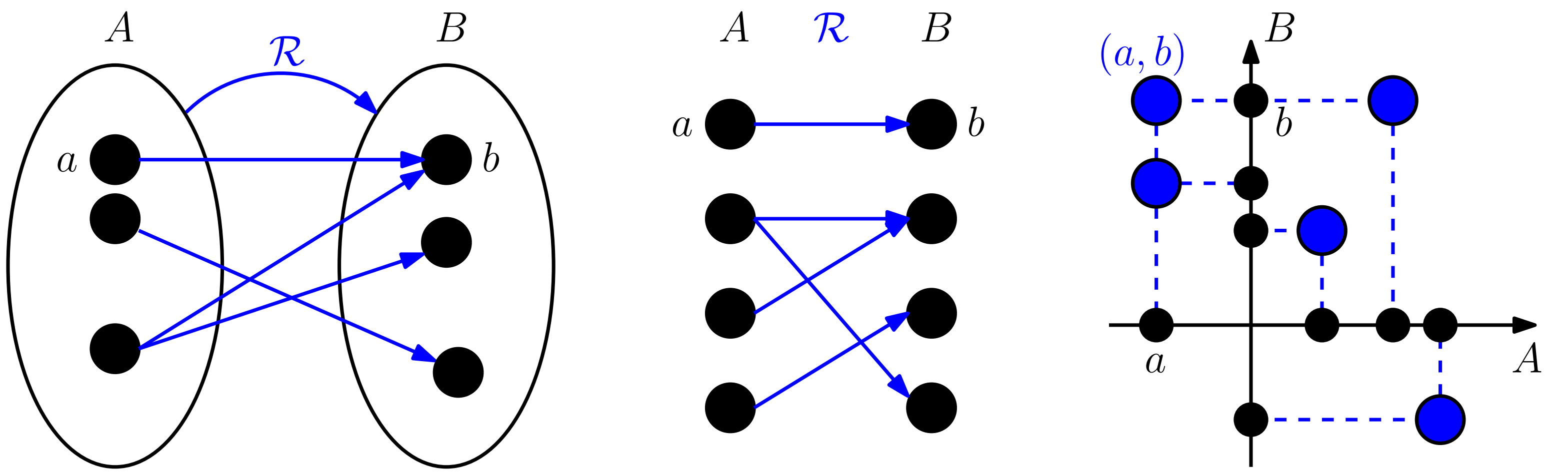
Với $U = \{1, 2, \dots, 10\}$ $(u_i = i)$, $A_1 = \{2, 3, 5, 7\}$, $A_2 = \{1, 3, 9\}$, hãy so sánh

(1) $\mathcal{B}(A_1 \cup A_2)$ *và* $\mathcal{B}(A_1) \vee \mathcal{B}(A_2)$

(2) $\mathcal{B}(A_1 \cap A_2)$ *và* $\mathcal{B}(A_1) \wedge \mathcal{B}(A_2)$

(3) $\mathcal{B}(\overline{A_1})$ *và* $\neg\mathcal{B}(A_1)$

- Cho hai tập hợp A và B. Một *quan hệ (relation)* $\mathcal{R}$ giữa A và B là một tập con của tích Đềcác $A \times B$. Ta viết $a\mathcal{R}b$ nếu $(a, b) \in \mathcal{R}$. Trong trường hợp $A = B$ thì $\mathcal{R}$ được gọi là một quan hệ trong A
  - A là tập các giảng viên. B là tập các lớp. $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ là quan hệ "phân công giảng viên dạy lớp học"
  - $\mathcal{R} = \emptyset$: không có giảng viên nào dạy bất kỳ lớp nào
  - $\mathcal{R} = A \times B$: mỗi giảng viên dạy tất cả các lớp
- Biểu diễn một quan hệ bằng hình vẽ



(a) (b) (c)

Hình: (a) tương tự giản đồ Venn, (b) đồ thị, (c) hệ tọa độ Đềcác

- Một quan hệ $\mathcal{R}$ trong A được gọi là *quan hệ tương đương (equivalence relation)* nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau

  Tính phản xạ (reflexive) Với mọi a thuộc A, ta có $a\mathcal{R}a$

  Tính đối xứng (symmetric) Với mọi a, b thuộc A, nếu ta có $a\mathcal{R}b$ thì ta cũng có $b\mathcal{R}a$

  Tính bắc cầu (transitive) Với mọi a, b, c thuộc A, nếu ta có $a\mathcal{R}b$ và $b\mathcal{R}c$ thì ta cũng có $a\mathcal{R}c$

Bài tập 25

Trong mỗi trường hợp sau, $\mathcal{R}$ có phải là quan hệ tương đương hay không?

(1) $\mathcal{R} = \{(p, q) \mid p \equiv q\}$ *với p, q là các mệnh đề lôgic*

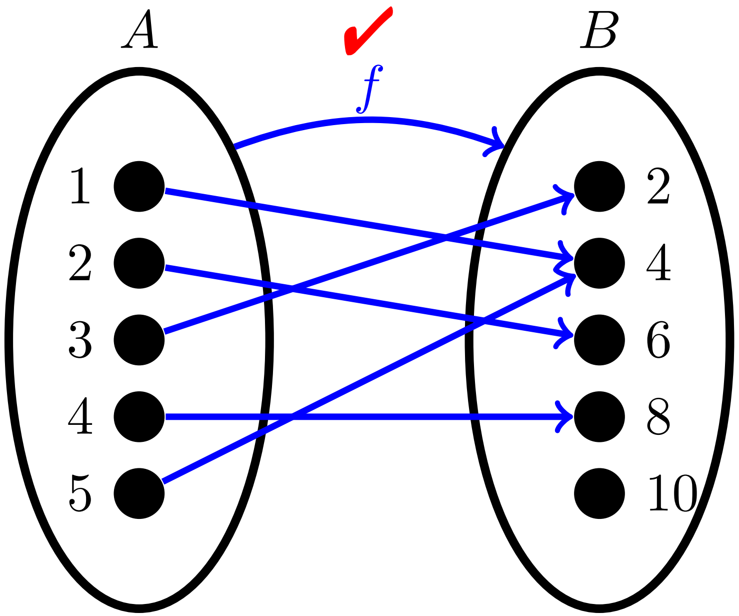
(2) $\mathcal{R} = \{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ *với A, B là các tập hợp*

(3) $\mathcal{R} = \{(A, B) \mid A = B\}$ *với A, B là các tập hợp*

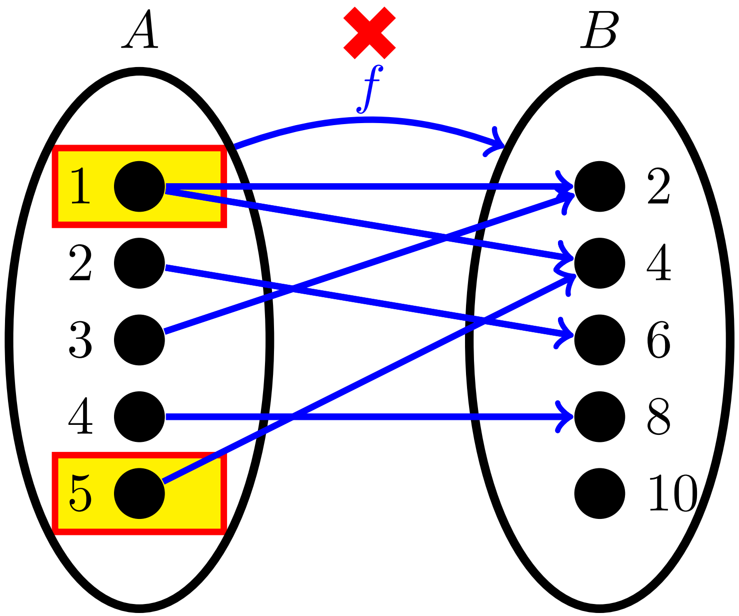
(4) $\mathcal{R} = \{(a, b) \mid b \text{ chia hết cho } a\}$ *với a, b là các số nguyên dương*

- Với hai tập khác rỗng A, B, một *hàm (function)* f từ A đến B, ký hiệu $f : A \to B$, là một quan hệ giữa A và B gán *chính xác một phần tử của B* cho *mỗi phần tử của A*
  (1) Với mọi $a \in A$, tồn tại $b \in B$ sao cho $(a, b) \in f$
  (2) Với b_1 và b_2 thuộc B sao cho $(a, b_1) \in f$ và $(a, b_2) \in f$, ta có $b_1 = b_2$

  Nếu b là phần tử duy nhất thuộc B được gán cho phần tử a thuộc A bởi f, ta viết $f(a) = b$



Hình: Hàm



Hình: Không phải hàm

Hàm
Định nghĩa hàm và một số khái niệm

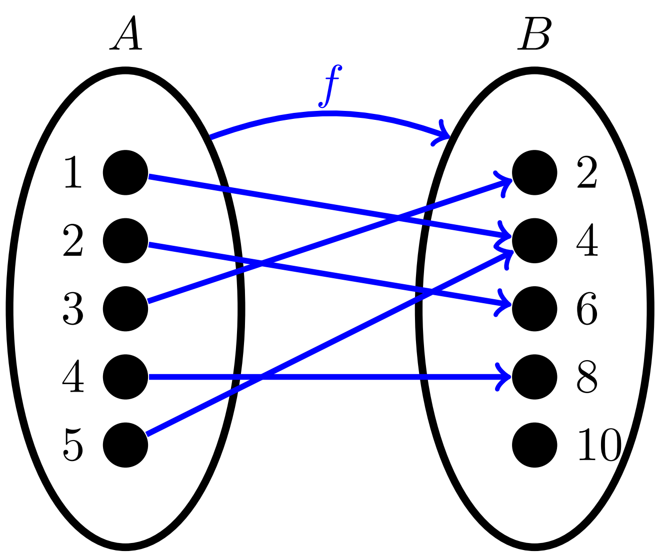
Giả sử f là một hàm từ A đến B

- A được gọi là *miền xác định (domain)* của f
- B được gọi là *miền giá trị (codomain)* của f
- Nếu $f(a) = b$, ta gọi b là *ảnh (image)* của a và a là một *nghịch ảnh (preimage)* của b
- Ta cũng nói rằng f *ánh xạ* A đến B

Ví dụ 7

Với hàm f cho bởi hình bên

- Tập xác định $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Tập giá trị $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- $4 \in B$ là ảnh của cả $1 \in A$ và $5 \in A$



Hình: $f : A \to B$

Hàm

Định nghĩa hàm và một số khái niệm

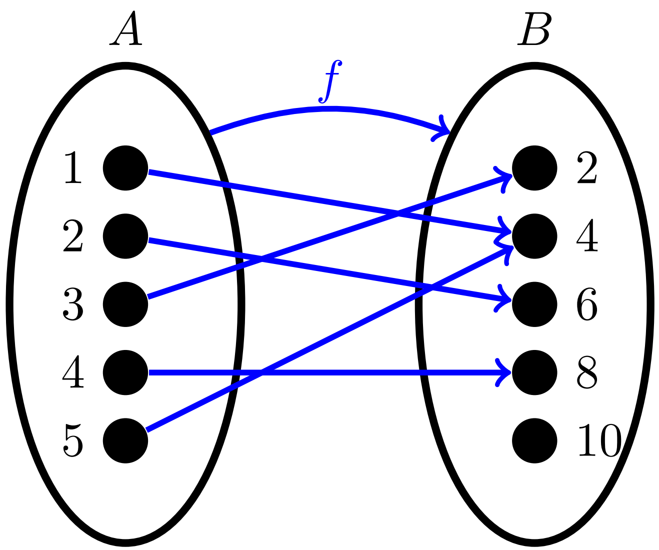
Giả sử f là hàm từ A đến B

- Tập hợp tất cả các ảnh của các phần tử thuộc A được gọi là *ảnh của A qua hàm f*, ký hiệu $f(A)$
  - $f(A) \subseteq B$
- Với tập con $S \subseteq A$, *ảnh của S qua hàm f*, ký hiệu $f(S)$, là tập tất cả các ảnh của các phần tử thuộc S
  - $f(S) = \{t \mid \exists s \in S\ (t = f(s))\} = \{f(s) \mid s \in S\}$
  - **Chú ý:** $f(s)$ là một phần tử của B và $f(S)$ là một tập con của B

Ví dụ 8

Với hàm f cho bởi hình bên

- $f(A) = \{2, 4, 6, 8\}$
- Với $S = \{1, 2, 5\}$, ta có $f(S) = \{4, 6\}$



Hình: $f : A \to B$

Cho *f_1 và f_2 là các hàm từ A đến $\mathbb{R}$*. Ta định nghĩa $f_1 + f_2$ và $f_1 f_2$ là các hàm từ A đến $\mathbb{R}$, gọi là các *hàm thực (real-valued function)*, như sau. Với mọi $x \in A$,

ký hiệu hàm

$$\boxed{(f_1 + f_2)}(x) = \boxed{f_1(x) + f_2(x)}$$
$$\boxed{(f_1 f_2)}(x) = \boxed{f_1(x) f_2(x)}$$

phép toán trong $\mathbb{R}$

Bài tập 26

Hãy kiểm tra lại rằng $f_1 + f_2$ và $f_1 f_2$ thực sự là các hàm

Bài tập 27

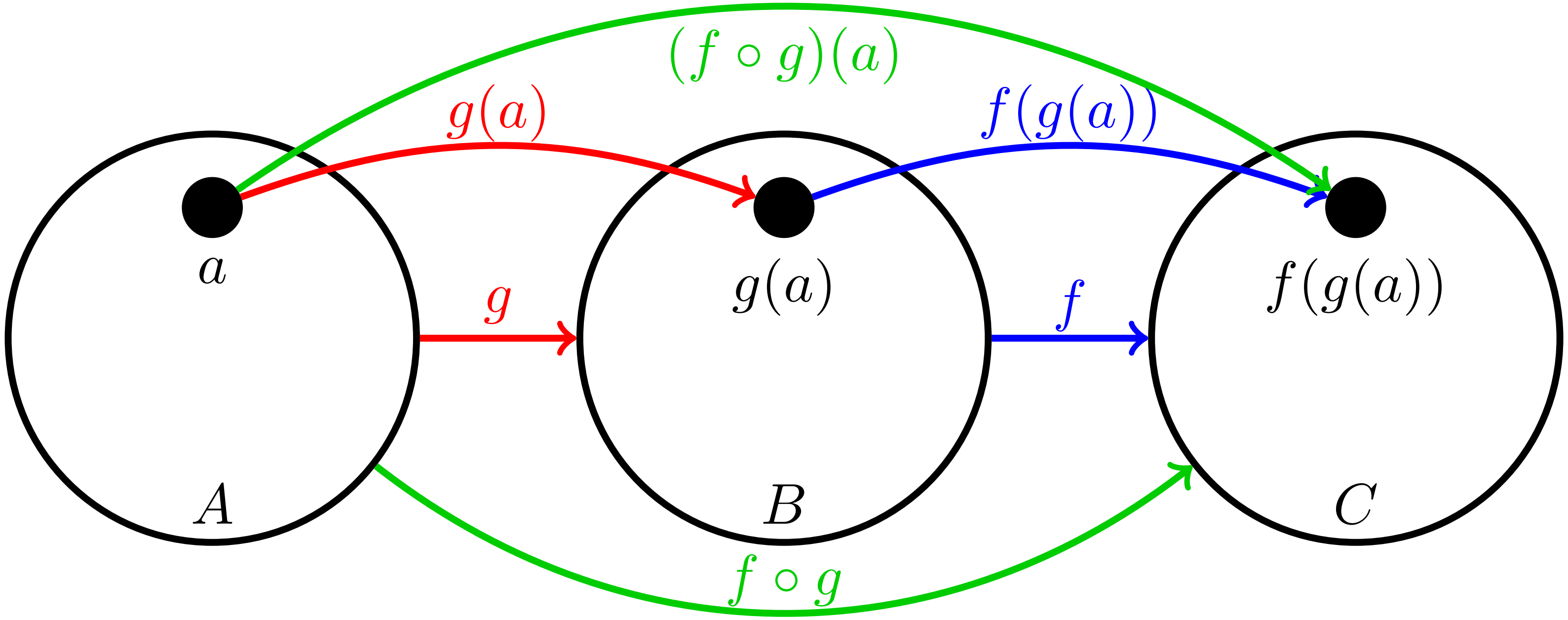
Gọi F là tập hợp tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với tập xác định và tập giá trị là tập các số thực. Các mệnh đề sau là đúng hay sai? Hãy giải thích đáp án của bạn

(a) $\forall c \in \mathbb{R}\ [\exists f \in F\ (f(0) = c)]$

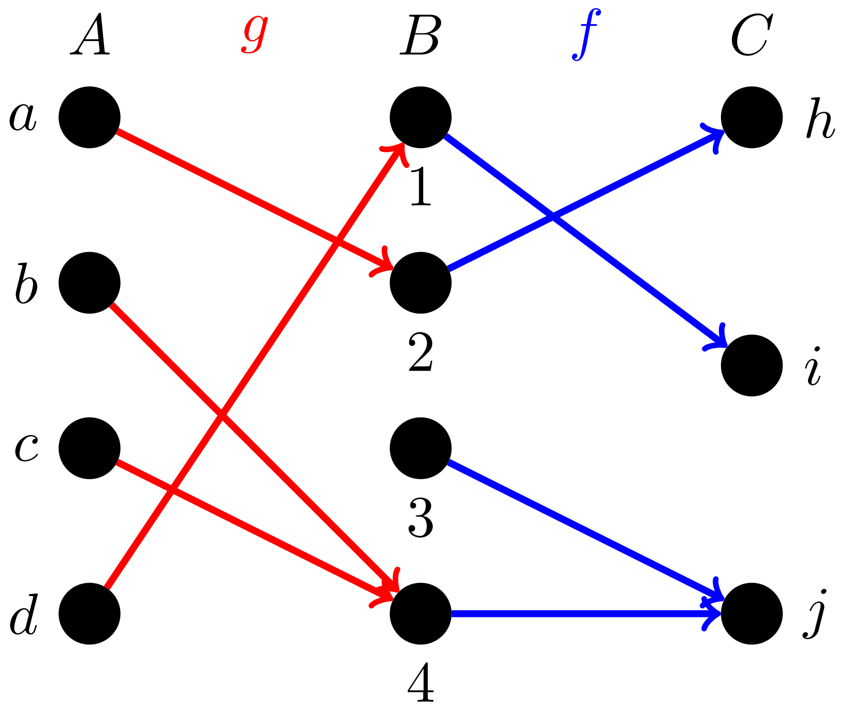
(b) $\exists f \in F\ [\forall c \in \mathbb{R}\ (f(0) = c)]$

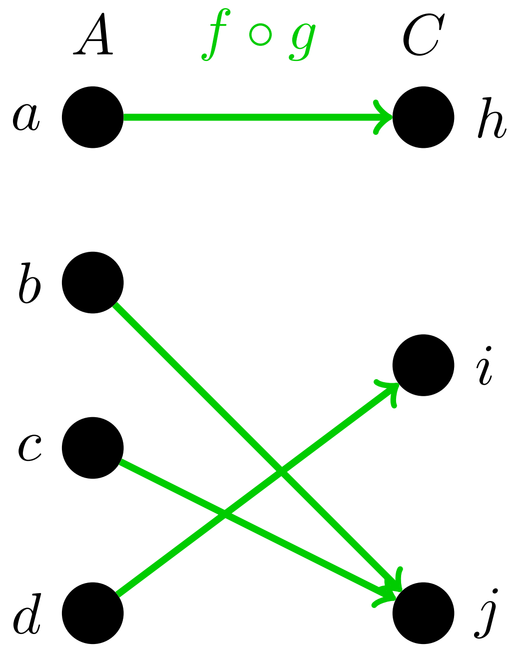
(c) $\exists f \in F\ [\forall c \in \mathbb{R}\ (f(c) = 0)]$

- Với các hàm $g : A \to B$ và $f : B \to C$, ta có thể định nghĩa *hợp (composition)* của f và g, ký hiệu $f \circ g : A \to C$, như sau
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
với mọi $x \in A$
- **Chú ý:** $f \circ g$ chỉ được định nghĩa khi *tập giá trị của g là tập con của tập xác định của f*
- **Chú ý:** Toán tử "$\circ$" không giao hoán, nghĩa là, *trong hầu hết mọi trường hợp, $f \circ g \neq g \circ f$*



Ví dụ 9



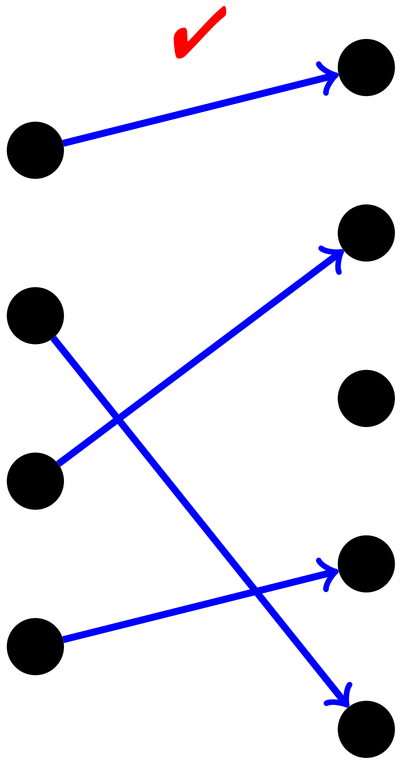


Bài tập 28

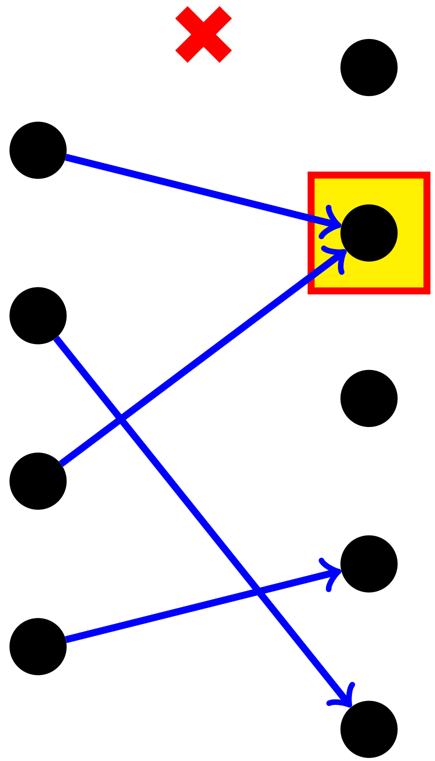
Cho $g : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ *với* $g(a) = b$, $g(b) = c$, *và* $g(c) = a$.
Cho $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ *với* $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, *và* $f(c) = 1$.
Hãy tìm $f \circ g$ *và* $g \circ f$

- Hàm $f : A \to B$ được gọi là một *đơn ánh (injection)* hay một *hàm một-một (one-to-one function)* khi và chỉ khi $f(a) = f(b)$ kéo theo $a = b$ với mọi a và b thuộc tập xác định A của f
  - $\forall a, b\,(f(a) = f(b) \to a = b) \equiv \forall a, b\,(a \neq b \to f(a) \neq f(b))$

Ví dụ 10



Hình: Đơn ánh



Hình: Không phải đơn ánh

Bài tập 29

Hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là đơn ánh không?

(a) $f(n) = n - 1$

(b) $f(n) = n^2 + 1$

(c) $f(n) = n^3$

(d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$

Cho $f : A \to B$ là một hàm trong đó *A, B là các tập con của $\mathbb{R}$*

- f được gọi là *tăng (increasing)* khi và chỉ khi với mọi x, y thuộc A thỏa mãn $x < y$, ta luôn có $f(x) \leq f(y)$
  - $\forall x \forall y\, (x < y \to f(x) \leq f(y))$
- f được gọi là *thực sự tăng (strictly increasing)* khi và chỉ khi với mọi x, y thuộc A thỏa mãn $x < y$, ta luôn có $f(x) < f(y)$
  - $\forall x \forall y\, (x < y \to f(x) < f(y))$
- f được gọi là *giảm (decreasing)* khi và chỉ khi với mọi x, y thuộc A thỏa mãn $x < y$, ta luôn có $f(x) \geq f(y)$
  - $\forall x \forall y\, (x < y \to f(x) \geq f(y))$
- f được gọi là *thực sự giảm (strictly decreasing)* khi và chỉ khi với mọi x, y thuộc A thỏa mãn $x < y$, ta luôn có $f(x) > f(y)$
  - $\forall x \forall y\, (x < y \to f(x) > f(y))$

Bài tập 30

(a) *Cho ví dụ về một hàm f là hàm thực sự giảm*

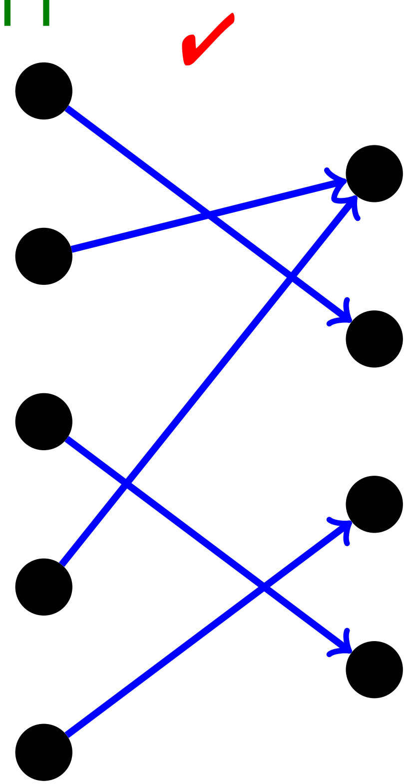
(b) *Cho ví dụ về một hàm f là hàm giảm nhưng không là thực sự giảm*

(c) *Chứng minh nếu f là hàm thực sự tăng hoặc thực sự giảm thì f là đơn ánh*

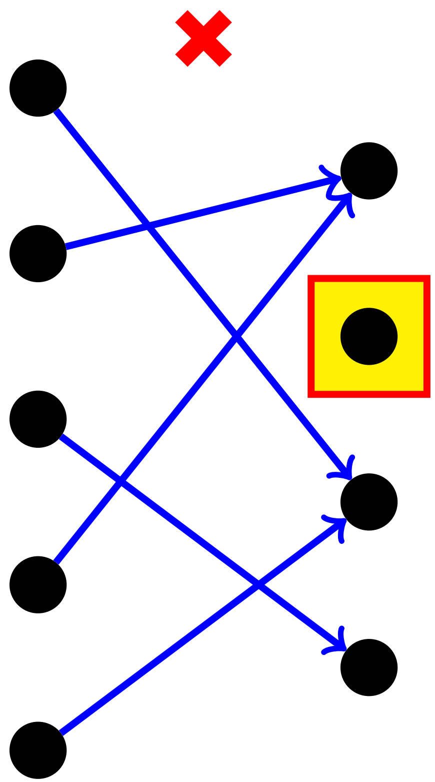
Hàm $f : A \to B$ được gọi là một *toàn ánh (surjection)* khi và chỉ khi với mọi phần tử b thuộc B tồn tại một phần tử a thuộc A sao cho $f(a) = b$

- $\forall b \in B\, \exists a \in A\, (f(a) = b)$
- $f(A) = B$ (ảnh của A qua f bằng với tập giá trị B)

Ví dụ 11



Hình: Toàn ánh



Hình: Không phải toàn ánh

Bài tập 31

Hàm $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là toàn ánh không?

(a) $f(m,n) = 2m - n$

(b) $f(m,n) = m^2 - n^2$

(c) $f(m,n) = m + n + 1$

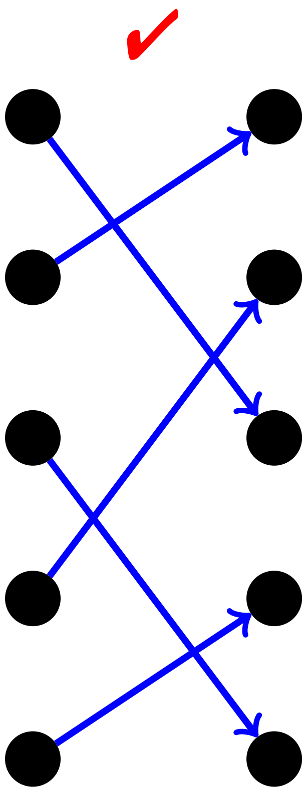
(d) $f(m,n) = m^2 - 4$

Bài tập 32

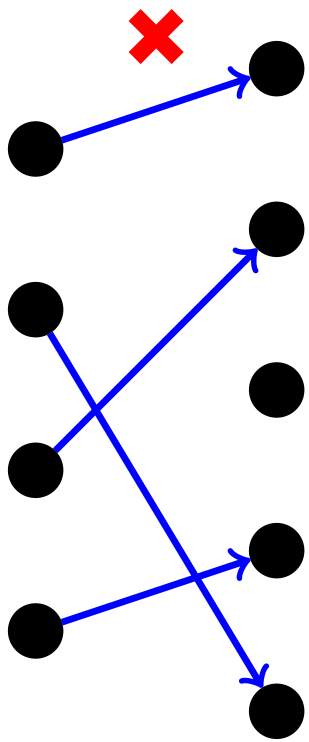
Chứng minh rằng $f : A \to B$ là toàn ánh khi và chỉ khi $f(A) = B$

Hàm $f : A \to B$ được gọi là một *song ánh (bijection)* khi và chỉ khi nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh

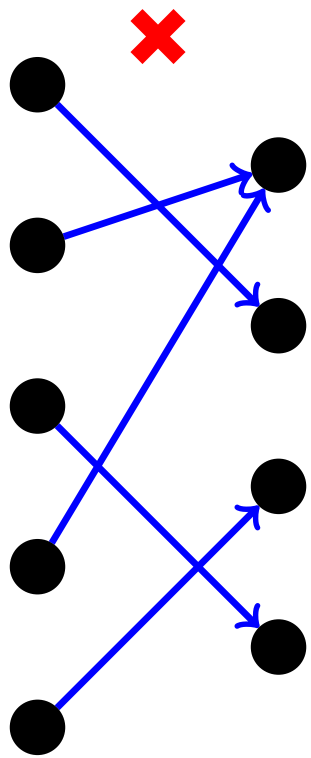
Ví dụ 12



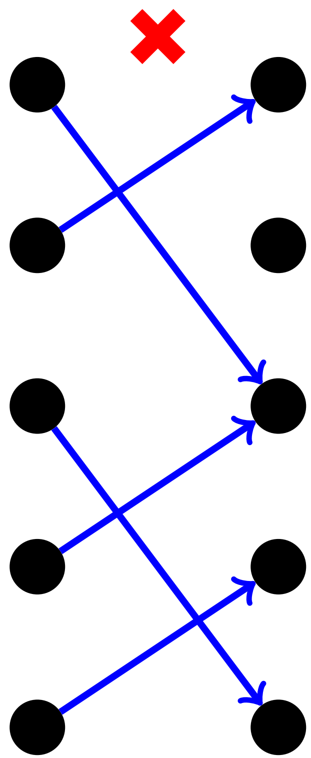
Hình: Song ánh



Hình: Đơn ánh, không toàn ánh



Hình: Toàn ánh, không đơn ánh



Hình: Không đơn ánh, không toàn ánh

Chú ý

Với các tập hợp A, B, ta có $|A| = |B|$ khi và chỉ khi tồn tại một song ánh $f : A \to B$

Bài tập 33

Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là song ánh không?

(a) $f(x) = -3x + 4$

(b) $f(x) = -3x^2 + 7$

(c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$

(d) $f(x) = x^5 + 1$

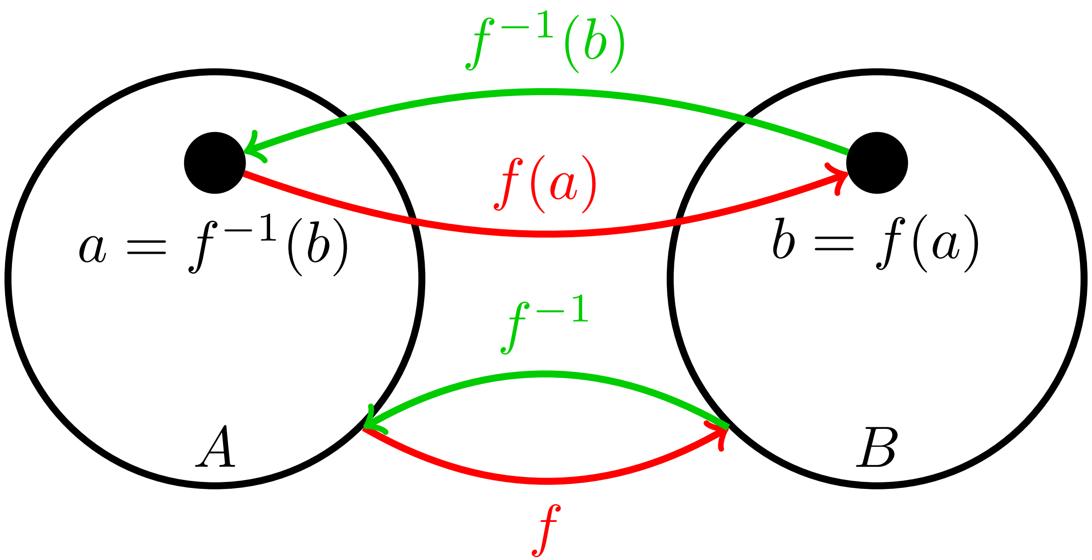
(e) $f(x) = 2x + 1$

(f) $f(x) = x^2 + 1$

(g) $f(x) = x^3$

(h) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2) + 2$

- Cho $f : A \to B$ là một song ánh. *Hàm ngược (inverse function)* của f là một hàm gán cho mỗi phần tử $b \in B$ một phần tử duy nhất $a \in A$ sao cho $f(a) = b$. Hàm ngược của f được ký hiệu là $f^{-1} : B \to A$
- Một song ánh còn được gọi là một *hàm khả nghịch (invertible function)*



Bài tập 34

Chứng minh rằng f^{-1} là một song ánh

Bài tập 35

Hàm ngược của các hàm sau có tồn tại hay không? Tại sao?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$

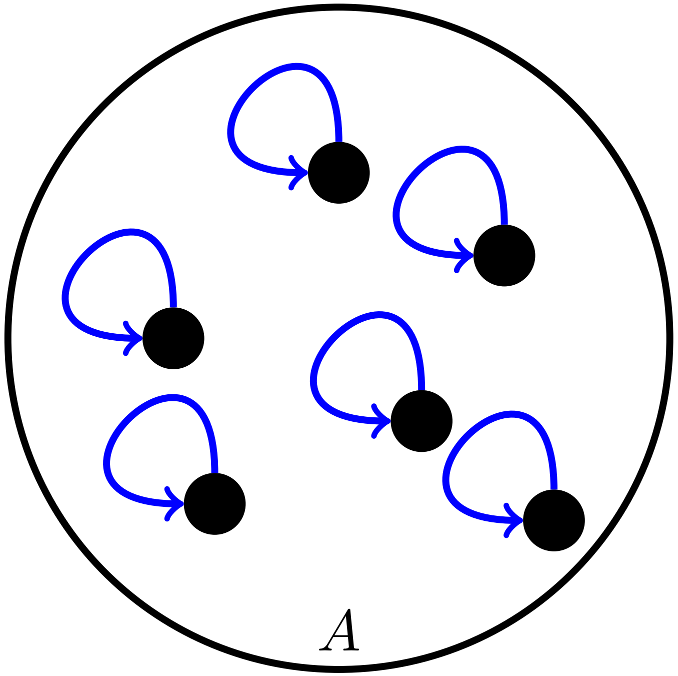
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$

(d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$

- Cho A là một tập hợp. *Hàm đồng nhất (identity function)* trên A là hàm $\mathrm{id}_A : A \to A$ trong đó $\mathrm{id}_A(x) = x$ với mọi $x \in A$
- id_A là song ánh với mọi tập A
- Với song ánh $f : A \to B$ và hàm ngược của nó $f^{-1} : B \to A$

$$f^{-1} \circ f = id_A$$



Hình: Hàm đồng nhất trên A

Bài tập 36

Hãy tìm ví dụ một hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn

(a) *f là đơn ánh nhưng không là toàn ánh*

(b) *f là toàn ánh nhưng không là đơn ánh*

(c) *f là song ánh và f khác hàm đồng nhất trên $\mathbb{N}$*

(d) *f vừa không là đơn ánh vừa không là toàn ánh*

Bài tập 37

Cho các hàm $g : A \to B$ và $f : B \to C$. Chứng minh rằng

(a) *Nếu cả g và f đều là đơn ánh thì $f \circ g$ cũng là đơn ánh.*

(b) *Nếu cả g và f đều là toàn ánh thì $f \circ g$ cũng là toàn ánh.*

(c) *Nếu $f \circ g$ là toàn ánh thì f cũng là toàn ánh*

(d) *Nếu $f \circ g$ là đơn ánh thì g cũng là đơn ánh*

(e) *Nếu $f \circ g$ là song ánh thì g là toàn ánh khi và chỉ khi f là đơn ánh*

Bài tập 38

Tìm ví dụ các hàm f và g thỏa mãn $f \circ g$ là song ánh, nhưng g không phải toàn ánh và f không phải đơn ánh.

Bài tập 39

Gọi $f : A \to B$ là một hàm với A, B là các tập hữu hạn thỏa mãn $|A| = |B|$. Chứng minh rằng f là đơn ánh khi và chỉ khi nó là toàn ánh.

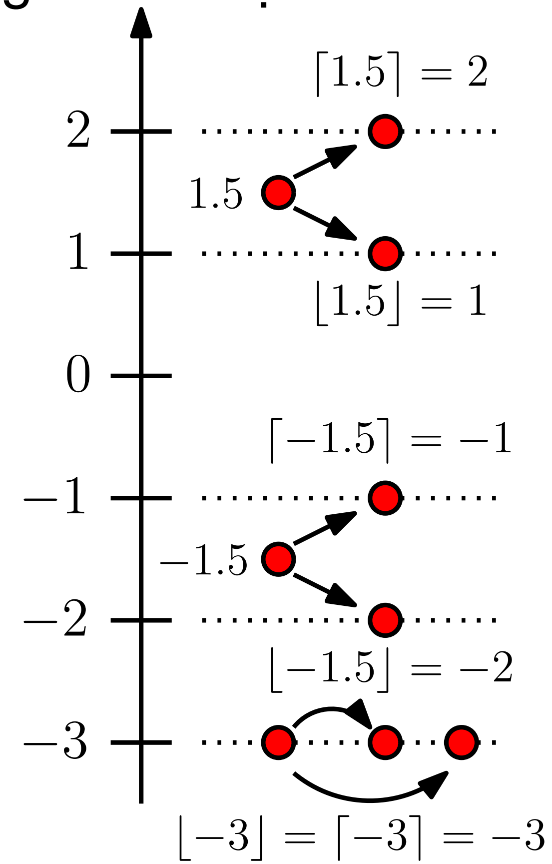
Trong toán rời rạc, ta thường dùng hai hàm sau

- *Hàm sàn (floor function)* gán cho số thực x số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x. Giá trị của hàm sàn được ký hiệu là $\lfloor x \rfloor$
- *Hàm trần (ceiling function)* gán cho số thực x số nguyên nhỏ nhất có giá trị lớn hơn hoặc bằng x. Giá trị của hàm trần được ký hiệu là $\lceil x \rceil$

- Nếu $x \notin \mathbb{Z}$ thì $\lfloor -x \rfloor \neq -\lfloor x \rfloor$ và $\lceil -x \rceil \neq -\lceil x \rceil$
- Nếu $x \in \mathbb{Z}$ thì $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$

Ví dụ 13

- $\lfloor 1.5 \rfloor = 1$, $\lceil 1.5 \rceil = 2$
- $\lfloor -1.5 \rfloor = -2$, $\lceil -1.5 \rceil = -1$
- $\lfloor -3 \rfloor = -3$, $\lceil -3 \rceil = -3$



Bài tập 40

Chứng minh các tính chất sau của hàm trần và hàm sàn, trong đó $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{Z}$

(1a) $\lfloor x \rfloor = n$ *khi và chỉ khi* $n \leq x < n + 1$

(1b) $\lceil x \rceil = n$ *khi và chỉ khi* $n - 1 < x \leq n$

(1c) $\lfloor x \rfloor = n$ *khi và chỉ khi* $x - 1 < n \leq x$

(1d) $\lceil x \rceil = n$ *khi và chỉ khi* $x \leq n < x + 1$

(2) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

(3a) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

(3b) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

(4a) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

(4b) $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$

Bài tập 41

Chứng minh rằng nếu $n \in \mathbb{N}$ *thì* $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$ *nếu* n *chẵn và* $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$ *nếu* n *lẻ*

Bài tập 42

Chứng minh rằng nếu $x \in \mathbb{R}$ *thì* $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor$. *(**Gợi ý:** Khi xét các bài toán liên quan đến hàm sàn, một cách tiếp cận hữu ích là đặt* $x = n + \epsilon$ *trong đó* $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ *và* ϵ *là một số thực thỏa mãn* $0 \leq \epsilon < 1$. *Tương tự, với hàm trần, có thể đặt* $x = n - \epsilon$*)*

- Một *dãy (sequence)* $\{a_n\}$ được xác định qua một hàm $f : I \to A$ trong đó $I \subseteq \mathbb{Z}$ là *tập các chỉ số (indices)* và A là tập bất kỳ
  - Thông thường, $I = \mathbb{N}$ hoặc $I = \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$
  - Ví dụ, dãy $\{a_n\}$ xác định bởi $f(n) = n^2$ với mọi số nguyên $n \geq 0$ có các phần tử $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$
- Với $i \in I$, a_i là ảnh của i qua f, nghĩa là $a_i = f(i)$
  - Ta gọi a_i là một *số hạng (term)* của dãy $\{a_n\}$
  - i là *chỉ số (index)* của a_i
- Đôi khi, thay vì ký hiệu $\{a_n\}$, có thể viết *"dãy $a_1, a_2, \ldots$"* để chắc chắn rằng tập các chỉ số I được xác định rõ ràng
- Có thể mô tả một dãy bằng cách liệt kê một vài số hạng đầu tiên hoặc cuối cùng của dãy và sử dụng "$\ldots$" cho phần còn lại
  - Ví dụ, có thể mô tả dãy $\{a_n\}$ ở trên bằng cách viết $\{a_n\} = 0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

Bài tập 43

Trong mỗi trường hợp sau, tìm các số hạng $a_0, a_1, \dots, a_5$ của dãy $\{a_n\}$ nếu

(a) $a_n = 2^{n-1}$

(b) $a_n = 1 + (-1)^n$

(c) $a_n = (n+1)^{n+1}$

(d) $a_n = 7$

(e) $a_n = -(-2)^n$

(f) $a_n = \lfloor n/2 \rfloor$

- Một *cấp số nhân (geometric progression)* là một dãy có dạng

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots$$

trong đó *số hạng đầu tiên (initial term)* a và *công bội (common ratio)* r là các số thực

- Ví dụ, với $n = 0, 1, 2, \dots$
  - $\{b_n\}$ với $b_n = (-1)^n$ — số hạng đầu tiên 1, công bội -1
  - $\{c_n\}$ với $c_n = 6 \cdot (1/3)^n$ — số hạng đầu tiên 6, công bội $1/3$
- Một *cấp số cộng (arithmetic progression)* là một dãy có dạng

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+nd, \dots$$

trong đó *số hạng đầu tiên (initial term)* a và *công sai (common difference)* d là các số thực

- Ví dụ, với $n = 0, 1, 2, \dots$
  - $\{d_n\}$ với $d_n = -1 + 4n$ — số hạng đầu tiên -1, công sai 4
  - $\{e_n\}$ với $e_n = 7 - 3n$ — số hạng đầu tiên 7, công sai -3

- Cho trước một vài phần tử của dãy
- Yêu cầu tìm
  - một công thức tường minh của các số hạng
  - hoặc một phương thức để liệt kê các phần tử của dãy

Ví dụ 14

Số tiếp theo trong dãy có thể là bao nhiêu?

- $1, 2, 3, 4, \dots$
- $1, 3, 5, 7, 9, \dots$
- $2, 3, 5, 7, 11, \dots$

Ví dụ 15

Các số hạng tiếp theo có thể là bao nhiêu?

- $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$
- $0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55$

- Một phương pháp hữu ích để tìm công thức tổng quát cho các số hạng của một dãy là *so sánh các số hạng của dãy cần tìm với các số hạng của một dãy đã biết* (ví dụ như cấp số cộng, cấp số nhân, dãy số chính phương, v.v...)

Công thức	**Mười số hạng đầu tiên**
n^2	$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \ldots$
n^3	$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, \ldots$
n^4	$1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000, \ldots$
f_n	$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$
2^n	$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots$
3^n	$3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, \ldots$
$n!$	$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, \ldots$

- Bảng Tra Cứu Dãy Số Nguyên Trực Tuyến (The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences - OEIS) `https://oeis.org/`

Bài tập 44

Với mỗi dãy số nguyên sau, hãy tìm một công thức đơn giản hoặc một cách để tìm các số hạng tiếp theo của dãy. Giả sử công thức bạn tìm ra là đúng, hãy tìm ba số hạng tiếp theo của dãy

(a) $1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, \dots$

(b) $1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, \dots$

(c) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \dots$

(d) $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \dots$

(e) $15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, \dots$

(f) $3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, \dots$

(g) $2, 16, 54, 128, 250, 432, 686, \dots$

(h) $2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321, \dots$

- Cho *dãy* $\{a_n\}$, một số nguyên *giới hạn dưới (lower limit)* m, và một số nguyên *giới hạn trên (upper limit)* $n \geq m$. *Tổng (summation)* của các số hạng $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ có thể được viết là

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j$$

$$\sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

- Ở đây, j được gọi là *chỉ số lấy tổng (index of summation)* và được chọn hoàn toàn tùy ý

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Ví dụ 16

Cho dãy $\{a_n\}$,

- Với tập chỉ số S bất kỳ, tổng các số hạng a_i với $i \in S$:

$$\sum_{i \in S} a_i$$

- Tổng các số hạng lớn hơn hoặc bằng a_j:

$$\sum_{i=j}^{\infty} a_i = a_j + a_{j+1} + \dots$$

Ví dụ 17

Với hàm $f : X \to \mathbb{R}$,

- Với $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, tổng các giá trị của hàm f:

$$\sum_{x \in X} f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \dots$$

- Với $X = \{x \mid P(x)\}$ trong đó $P(x)$ là vị từ cho trước, tổng các giá trị của hàm f:

$$\sum_{P(x)} f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \dots$$

Ví dụ 18

$$\sum_{j=1}^{4} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

$$\sum_{\substack{(0 \leq x \leq 10) \\ \wedge (x \text{ chẵn})}} x^2 = 0 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2$$

Bài tập 45

Sử dụng ký hiệu tổng để viết lại các công thức sau

(a) $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$

(b) $1 + 5 + 9 + 13 + \cdots + 425$

(c) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{50}$

Bài tập 46

Viết lại các tổng sau dưới dạng công thức dài hơn

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(3 + 4k)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{50}\frac{1}{k^2 - 1}$

- *Tổng hằng số:* Với hằng số c bất kỳ,

$$\sum_{n=i}^{j} c = (j - i + 1) \cdot c$$

- *Phân phối:* Với hằng số c bất kỳ,

$$\sum_{n=i}^{j} cf(n) = c \sum_{n=i}^{j} f(n)$$

- *Giao hoán:*

$$\sum_{n=i}^{j} (f(n) + g(n)) = \sum_{n=i}^{j} f(n) + \sum_{n=i}^{j} g(n)$$

- *Đổi chỉ số:*

$$\sum_{i=j}^{m} f(i) = \sum_{k=j+n}^{m+n} f(k-n)$$

  - Ví dụ $\sum_{i=1}^{4} i^2 = \sum_{k=3}^{6} (k-2)^2$ (đặt $k = i + 2$)

- *Tách tổng:* Với $j \leq m < k$

$$\sum_{i=j}^{k} f(i) = \sum_{i=j}^{m} f(i) + \sum_{i=m+1}^{k} f(i)$$

- *Đảo thứ tự:*

$$\sum_{i=0}^{k} f(i) = \sum_{i=0}^{k} f(k-i)$$

- Với $\{a_n\}$ là cấp số nhân có số hạng đầu tiên a và công bội r, tổng của $n+1$ số hạng đầu tiên của dãy là

$$S = \sum_{i=0}^{n} ar^i$$

- Công thức tường minh

$$S = \sum_{i=0}^{n} ar^i = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1} - a}{r-1} & \text{nếu } r \neq 1 \\ (n+1)a & \text{nếu } r = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \\ rS &= \quad\;\; ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} \\ rS - S &= ar^{n+1} - a \end{aligned}$$

Tổng

Một số công thức tổng hữu ích

$$\begin{aligned}
rS &= r\sum_{i=0}^{n} ar^i && \text{công thức của } S \\
&= \sum_{i=0}^{n} ar^{i+1} && \text{phân phối} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k && \text{đổi chỉ số, } k = i+1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} ar^k + \sum_{k=n+1}^{n+1} ar^k && \text{tách tổng} \\
&= (\sum_{k=1}^{n} ar^k + ar^0) + (ar^{n+1} - ar^0) && \text{thêm và bớt } ar^0 = a \\
&= \sum_{k=0}^{n} ar^k + (ar^{n+1} - a) && \text{tách tổng} \\
&= S + (ar^{n+1} - a) && \text{công thức của } S
\end{aligned}$$

Ví dụ 19

Tìm công thức tường minh cho tổng $T = \sum_{i=1}^{n} i$

$$
\begin{aligned}
T &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\
T &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\
2T &= (n+1) \cdot n
\end{aligned}
$$

Bài tập 47

Với $\{a_n\}$ là cấp số cộng có số hạng đầu tiên a và công sai d, tổng của $n+1$ số hạng đầu tiên của dãy là

$$T = \sum_{i=0}^{n} (a + id)$$

Hãy tìm công thức tường minh cho T

Ví dụ 20

Phương pháp của Gauss để tính $\sum_{i=1}^{100} i$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$

$$+$$

$$+$$

$$+$$

$$+$$

Bài tập 48

Tìm công thức tường minh cho $T = \sum_{i=1}^{n} i$ sử dụng phương pháp tương tự như ví dụ trên. Có thể áp dụng phương pháp tương tự cho Bài tập 47 không?

Ví dụ 21

Tìm công thức tường minh của $T = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ với x là số thực thỏa mãn $-1 < x < 1$

Ta đã chứng minh

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}.$$

Do $-1 < x < 1$, $x^{k+1} \to 0$ khi $k \to \infty$. Ta có

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} x^n = \lim_{k\to\infty} \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}$$

Tổng	Công thức tường minh
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \ (r \neq 0)$	$\dfrac{ar^{n+1} - a}{r - 1} \ (r \neq 1)$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \ (-1 < x < 1)$	$\dfrac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \ (-1 < x < 1)$	$\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Bài tập 49

Tính các tổng sau

(a) $\displaystyle\sum_{k=100}^{200} k$ (b) $\displaystyle\sum_{k=99}^{200} k^3$ (c) $\displaystyle\sum_{10}^{20} k^2(k-3)$

Bài tập 50

(a) *Chứng minh rằng* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$*, trong đó* $a_0, a_1, \dots, a_n$ *là một dãy gồm các số thực*

(b) *Sử dụng đẳng thức* $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ *và phần (a) để tính* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

Bài tập 51

Lấy tổng cả hai vế của đẳng thức $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$ *từ* $k = 1$ *đến* $k = n$ *và sử dụng Bài tập 50(a) để tìm một công thức tường minh cho* $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ *(tổng* n *số tự nhiên lẻ đầu tiên)*

Ngoài ký hiệu tổng, ta cũng có ký hiệu đặc biệt cho *tích (product)*. Cho dãy $\{a_n\}$ và các chỉ số giới hạm dưới m và giới hạn trên $n \geq m$. Tích của các số hạng $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ có thể được viết là

$$a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

$$\prod_{j=m}^{n} a_j$$

$$\prod_{m \leq j \leq n} a_j$$

Bài tập 52

Tính giá trị của các tích sau

(a) $\prod_{i=0}^{10} i$

(b) $\prod_{i=1}^{100} (-1)^i$

(c) $\prod_{i=5}^{8} i$

(d) $\prod_{i=1}^{10} 2$

Part I

Phụ lục

Nội dung

Tập hợp
- Nghịch lý

Lực lượng của tập vô hạn
- Định nghĩa
- Tập đếm được và không đếm được

- Chúng ta đang học một *lý thyết tập hợp ngây thơ (naive set theory)*
  - Định nghĩa bằng ngôn ngữ tự nhiên, không chặt chẽ về mặt toán học
  - Mô tả các khía cạnh của các tập hợp toán học quen thuộc trong toán rời rạc
  - Bản thân lý thuyết này có chứa các *nghịch lý (paradox)* (= một phát biểu tự phủ định chính nó mặc dù lúc đầu nhìn có vẻ đúng)
- *Nghịch lý Russell* (Đặt theo tên nhà triết học, nhà lôgic học, nhà toán học người Anh Bertrand Russell (1872–1970))
  - Gọi S là tập *tất cả các tập hợp không chứa chính nó như là một phần tử*, nghĩa là $S = \{A \mid A$ là một tập hợp và $A \notin A\}$
    - Chú ý rằng *theo định nghĩa tập hợp ta đã học, tồn tại một tập hợp chứa chính nó như là một phần tử*. Ví dụ xét *tập T các tập hợp có chứa ít nhất một phần tử*
  - *Liệu S có phải là một phần tử của chính nó hay không*, nói cách khác, liệu $S \in S$?

- **Nhắc lại:** *Lực lượng (cardinality)* của một tập A, ký hiệu $|A|$, là số phần tử khác biệt mà A có
- Các tập A và B *có cùng lực lượng*, ký hiệu $|A| = |B|$, khi và chỉ khi tồn tại một *song ánh* từ A đến B
- Nếu tồn tại một *đơn ánh* từ A đến B, ta nói "lực lượng của A nhỏ hơn hoặc bằng lực lượng của B", và ký hiệu $|A| \leq |B|$
- Khi $|A| \leq |B|$ và hai tập A, B có lực lượng khác nhau, ta nói "lực lượng của A nhỏ hơn lực lượng của B", và ký hiệu $|A| < |B|$

Bài tập 53

Chứng minh rằng $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ với mọi tập hợp A, trong đó $\mathcal{P}(A)$ là tập tất cả các tập hợp con của A

Bài tập 54

Tập $2\mathbb{Z}$ gồm các số nguyên chẵn có cùng lực lượng với tập số nguyên $\mathbb{Z}$ hay không?

Định lý 1: Định lý Cantor

Không tồn tại một toàn ánh $f : A \to \mathcal{P}(A)$ với A là một tập hợp bất kỳ và $\mathcal{P}(A)$ là tập tất cả các tập con của A

Chứng minh.

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng

- Giả sử tồn tại toàn ánh $f : A \to \mathcal{P}(A)$
- Ta định nghĩa tập con $G \subseteq A$ như sau

$$G := \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$$

- Do f là toàn ánh, tồn tại $a \in A$ sao cho $G = f(a)$
- Xét hai trường hợp
  - Nếu $a \in G$ thì theo định nghĩa của G, ta có $a \notin f(a) = G$. Đây là một mâu thuẫn
  - Nếu $a \notin G = f(a)$ thì $a \notin f(a)$. Do đó theo định nghĩa của G, ta có $a \in G$. Đây là một mâu thuẫn

Lực lượng của tập vô hạn

Tập đếm được và không đếm được

- Một tập có hữu hạn số phần tử hoặc có cùng lực lượng với tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ được gọi là *tập đếm được (countable set)* và ngược lại thì gọi là *tập không đếm được (uncountable set)*
  - Có thể liệt kê các phần tử của tập đếm được theo thứ tự: phần tử thứ 1, phần tử thứ 2, v.v...
- Khi một tập vô hạn S là tập đếm được, ta ký hiệu lực lượng của S là $\aleph_0$ ("aleph null") và viết $|S| = \aleph_0$

Ví dụ 22

Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ là tập đếm được

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array}$$

Ví dụ 23

Tập các số nguyên dương lẻ là tập đếm được

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots \end{array}$$

Ví dụ 24

Tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ là tập đếm được

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots \end{array}$$

Ví dụ 25

Tập các số hữu tỷ dương $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+\}$ là tập đếm được

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{\frac{1}{1}} & \boxed{\frac{2}{1}} & \boxed{\frac{3}{1}} & \boxed{\frac{4}{1}} & \boxed{\frac{5}{1}} & \cdots \\ \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{2}{2} & \boxed{\frac{3}{2}} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\ \boxed{\frac{1}{3}} & \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\ \boxed{\frac{1}{4}} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \cdots \\ \boxed{\frac{1}{5}} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \cdots \end{array}$$

Ta chứng minh *tập số thực $\mathbb{R}$ là tập không đếm được* bằng phương pháp phản chứng sử dụng *lập luận đường chéo của Cantor (Cantor diagonalization argument)*

- Giả sử $\mathbb{R}$ là tập đếm được. Do mọi tập con của một tập đếm được cũng là một tập đếm được (*tại sao?*), tập các số thực nằm giữa 0 và 1 cũng là tập đếm được
- Sắp thứ tự các số thực giữa 0 và 1: $r_1, r_2, \dots$

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}\dots \\
r_2 &= 0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}\dots \\
r_3 &= 0.d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}\dots \\
r_4 &= 0.d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}\dots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

trong đó $d_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

- Xây dựng một số thực $r = 0.d_1d_2d_3d_4\ldots$ mới trong đó

$$d_i = \begin{cases} 4 & \text{nếu } d_{ii} \neq 4 \\ 5 & \text{nếu } d_{ii} = 4 \end{cases}$$

- r không bằng bất cứ số nào trong các số $r_1, r_2, \ldots$ vì nó luôn khác r_i ở vị trí thứ i sau "$0.$"
- Do đó r là một số thực giữa 0 và 1 không nằm trong danh sách $r_1, r_2, \ldots$, do mỗi số thực có một biểu diễn thập phân duy nhất
- Tóm lại, không phải mọi số thực giữa 0 và 1 đều được liệt kê theo thứ tự $r_1, r_2, \ldots$, và do đó tập các số thực giữa 0 và 1 là tập không đếm được
- Nếu tập con của một tập là không đếm được thì tập đó cũng không đếm được (*tại sao?*), suy ra tập số thực $\mathbb{R}$ là không đếm được