VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

- *Quy tắc song ánh (The Bijection Rule):* Nếu $f : A \to B$ là một song ánh, trong đó A và B là các tập hữu hạn, thì $|A| = |B|$

Ví dụ 1

- Cho tập hợp $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ gồm n phần tử và tập hợp Σ_n^* các chuỗi nhị phân độ dài n
- $f : \mathcal{P}(U) \to \Sigma_n^*$ được định nghĩa như sau: Với mỗi $A \in \mathcal{P}(U)$, $f(A) = x_1 x_2 \dots x_n$ trong đó $x_i = 1$ nếu $u_i \in A$ và $x_i = 0$ nếu $u_i \notin A$
- Do f là song ánh (*Tại sao?*), $|\mathcal{P}(U)| = |\Sigma_n^*|$ (số tập con của U bằng với số chuỗi nhị phân độ dài n)

- *Quy tắc nhân (The Product Rule):*
  - Giả sử một công việc được chia nhỏ ra thành n giai đoạn liên tiếp nhau
    - Giai đoạn thứ 1 có m_1 cách thực hiện
    - Với mỗi cách thực hiện giai đoạn thứ 1, có m_2 cách thực hiện giai đoạn thứ 2
    - Với mỗi cách thực hiện các giai đoạn thứ 1 và 2, có m_3 cách thực hiện giai đoạn thứ 3
    - $\dots$
    - Với mỗi cách thực hiện các giai đoạn thứ $1, 2, \dots, n-1$, có m_n cách thực hiện giai đoạn thứ n
  - Có $m_1 m_2 \dots m_n$ cách thực hiện công việc
- *Quy tắc cộng (The Sum Rule):*
  - Có n biện pháp khác nhau để thực hiện một công việc
  - Cách thực hiện biện pháp thứ i luôn luôn khác cách thực hiện biện pháp thứ j với mọi $i \neq j$ và $1 \leq i, j \leq n$
  - Nếu biện pháp thứ i có m_i cách thực hiện ($1 \leq i \leq n$) thì ta có $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ cách thực hiện công việc

Các quy tắc đếm cơ bản có thể được biểu diễn theo ngôn ngữ tập hợp

- *Quy tắc nhân (The Product Rule):* Cho các tập hữu hạn $A_1, A_2, \dots, A_n$ trong đó $|A_i| = m_i$ với $1 \leq i \leq n$. Ta có

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n| = m_1 m_2 \dots m_n$$

- *Quy tắc cộng (The Sum Rule):* Cho các tập hữu hạn đôi một rời nhau $A_1, A_2, \dots, A_n$, ($A_i \cap A_j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$) và $|A_i| = m_i$ với $1 \leq i \leq n$. Ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

Ví dụ 2 (Quy tắc nhân)

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 7?

- Giả sử chuỗi $x = x_1x_2 \dots x_7$ là một chuỗi nhị phân độ dài 7
- Để xây dựng x, ta lần lượt chọn giá trị cho $x_1, x_2, \dots, x_7$
  - có 2 cách chọn x_1 (0 hoặc 1)
  - với mỗi giá trị của x_1, có 2 cách chọn x_2 (0 hoặc 1)
  - $\dots$
  - với mỗi giá trị của $x_1, \dots, x_6$, có 2 cách chọn x_7 (0 hoặc 1)
- Do đó có 2^7 chuỗi nhị phân độ dài 7

Ví dụ 3 (Quy tắc nhân)

Tập hợp n phần tử $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ có bao nhiêu tập con?

- Một tập con của S có thể được xây dựng thông qua n bước liên tiếp
  - chọn x_1 hoặc không chọn
  - chọn x_2 hoặc không chọn
  - $\dots$
  - chọn x_n hoặc không chọn
- Mỗi bước có thể được thực hiện bằng 2 cách
- Do đó có 2^n tập con của S

Bài tập 1

Có bao nhiêu hàm $f : A \to B$ với A và B lần lượt là các tập hữu hạn gồm m và n phần tử?

Ví dụ 4 (Quy tắc cộng)

Một sinh viên có thể chọn một bài thực hành máy tính từ một trong ba danh sách tương ứng có 23, 15, và 19 bài. Giả thiết rằng không có hai bài nào giống nhau. Có bao nhiêu cách chọn bài thực hành?

- Có 23 cách chọn bài thực hành từ danh sách thứ nhất
- Có 15 cách chọn bài thực hành từ danh sách thứ hai
- Có 19 cách chọn bài thực hành từ danh sách thứ ba
- Do không có hai bài nào giống nhau, số cách chọn bài thực hành là $23 + 15 + 19 = 57$

Ví dụ 5 (Quy tắc cộng)

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 7 có chính xác hai số 1?

- Trong một chuỗi nhị phân $x_1x_2\dots x_7$ độ dài 7 có chính xác hai số 1
  - Ở các vị trí i và j nào đó với $1 \leq i < j \leq 7$, $x_i = x_j = 1$
  - Ở các vị trí $k \notin \{i, j\}$, $x_k = 0$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	1	0	1	0	0
		i		j		

- Ứng với mỗi vị trí i của số 1 đầu tiên, có $7 - i$ vị trí j có thể cho số 1 thứ hai
  - Với $i = 1$, có $7 - 1 = 6$ lựa chọn cho j
  - ...
  - Với $i = 7$, có $7 - 7 = 0$ lựa chọn cho j
  - Theo quy tắc cộng, số các chuỗi nhị phân độ dài 7 có chính xác hai số 1 là $\sum_{i=1}^{7}(7-i) = \sum_{i=0}^{6} i = 6(6+1)/2 = 21$

Ví dụ 6

Giả sử tên các biến trong một ngôn ngữ lập trình chỉ có thể là một chữ cái viết hoa hoặc một chữ cái viết hoa theo sau bởi một chữ số. Giả sử ta sử dụng bảng chữ cái tiếng Anh và các chữ số trong hệ thập phân. Có tất cả bao nhiêu tên biến trong ngôn ngữ lập trình này?

- Một tên biến có dạng x hoặc $x\alpha$ với $x \in \{A, B, \dots, Z\}$ và $\alpha \in \{0, 1, \dots, 9\}$
- Nếu tên biến có dạng x, có 26 cách chọn giá trị của x
- Nếu tên biến có dạng $x\alpha$, có 26 cách chọn giá trị của x, và ứng với mỗi giá trị của x có 10 cách chọn giá trị của α. Theo quy tắc nhân, có $26 \times 10 = 260$ tên biến có dạng $x\alpha$
- Theo quy tắc cộng

$$\begin{aligned}\text{số tên biến} &= \text{số tên biến dạng } x + \text{số tên biến dạng } x\alpha \\ &= 26 + 260 = 286\end{aligned}$$

Ví dụ 7

Các *dịch vụ rút gọn đường dẫn (URL-shortening service)* như bit.ly hay tinyurl.com cho phép người dùng thu gọn một đường dẫn dài thành một dãy các ký tự ngắn hơn rất nhiều. Ví dụ đường dẫn tới bài giảng này trên trang web môn học `https://hoanganhduc.github.io/teaching/VNU-HUS/2025/spring/MAT3500/Counting.pdf` sau khi rút gọn thông qua bit.ly là `https://bit.ly/3YEv1JK`.
Giả sử các đường dẫn sau khi rút gọn gồm có `https://bit.ly/` kèm theo một chuỗi 7 ký tự, mỗi ký tự chỉ có thể là một chữ số thập phân, một chữ cái viết hoa, hoặc một chữ cái viết thường trong bảng chữ cái tiếng Anh. Dịch vụ bit.ly có thể cung cấp tối đa bao nhiêu đường dẫn rút gọn?

- Mỗi đường dẫn tương ứng với một chuỗi ký tự $x_1x_2\dots x_7$ trong đó $x_i \in C = \{0,\dots,9\} \cup \{A,\dots,Z\} \cup \{a,\dots,z\}$, $1 \leq i \leq 7$ (Quy tắc song ánh)
  - Có $|C| = 10 + 26 + 26 = 62$ cách chọn giá trị cho x_1 (Quy tắc cộng)
  - Với mỗi giá trị của x_1, có $|C| = 62$ cách chọn giá trị cho x_2
  - $\dots$
  - Với mỗi giá trị của $x_1,\dots,x_6$, có $|C| = 62$ cách chọn giá trị cho x_7
- Theo quy tắc nhân, có $|C|^7 = 62^7 = 3\,521\,614\,606\,208$ đường dẫn rút gọn

Bài tập 2

Địa chỉ kiểm soát truy cập phương tiện truyền thông (MAC (media access control) address), hay còn gọi là *địa chỉ MAC*, là một định danh duy nhất được gán cho một card mạng (network adapter), ví dụ như card mạng có dây (ethernet card) hoặc card mạng không dây (wireless card). Địa chỉ này gồm một dãy sáu cặp các chữ số thập lục phân (nghĩa là các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F). Ví dụ, F7:DE:A1:B6:C4:33 là một địa chỉ MAC. (Các cặp số thường được phân tách bởi dấu hai chấm.) Có tất cả bao nhiêu địa chỉ MAC?

Bài tập 3

Theo quy định của Bộ Thông Tin & Truyền Thông Việt Nam, tất cả các số thuê bao điện thoại di động cần có 10 chữ số, trong đó ba chữ số đầu tiên đại biểu cho nhà mạng cung cấp dịch vụ. Ví dụ, nhà mạng Viettel hiện tại sở hữu 12 đầu số di động: 086, 096 – 098, và 032 – 039. Viettel có thể cung cấp tối đa bao nhiêu số điện thoại di động?

Bài tập 4

Giả sử một mật khẩu cho một hệ thống máy tính phải có ít nhất 8, nhưng không quá 12 ký tự, trong đó mỗi ký tự trong mật khẩu là một chữ cái tiếng Anh viết thường, một chữ cái tiếng Anh viết hoa, một chữ số, hoặc một trong sáu ký tự đặc biệt $*$, $>$, $<$, $!$, $+$, và $=$.

(a) Có bao nhiêu mật khẩu khác nhau có sẵn cho hệ thống máy tính này?

(b) Có bao nhiêu mật khẩu trong số này chứa ít nhất một lần xuất hiện của ít nhất một trong sáu ký tự đặc biệt?

(c) Sử dụng câu trả lời của bạn cho phần (a), hãy xác định xem một hacker sẽ mất bao lâu để thử tất cả các mật khẩu có thể, giả sử rằng hacker mất một nano giây (nanosecond) để kiểm tra mỗi mật khẩu có thể. (Một nano giây là một phần tỷ giây, hoặc 10^{-9} giây)

Bài tập 5

Tên của một biến trong ngôn ngữ lập trình C là một chuỗi có thể chứa các chữ cái viết hoa, chữ cái viết thường, chữ số, hoặc dấu gạch dưới. Hơn nữa, ký tự đầu tiên trong chuỗi phải là một chữ cái, viết hoa hoặc viết thường, hoặc dấu gạch dưới. Nếu tên của một biến được xác định bởi tám ký tự đầu tiên, có bao nhiêu biến khác nhau có thể được đặt tên trong C? (Lưu ý rằng tên của một biến có thể chứa ít hơn tám ký tự.)

Bài tập 6

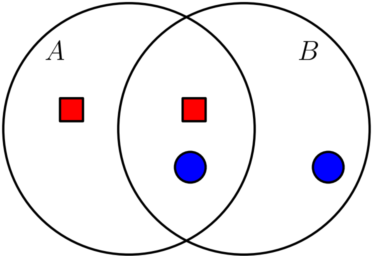
Tên của một biến trong ngôn ngữ lập trình JAVA là một chuỗi có độ dài từ 1 đến 65535 ký tự (bao gồm cả hai giá trị), trong đó mỗi ký tự có thể là một chữ cái viết hoa, một chữ cái viết thường, dấu đô la ($), dấu gạch dưới, hoặc một chữ số, ngoại trừ ký tự đầu tiên không được là một chữ số. Xác định số lượng tên biến khác nhau trong JAVA

Các nguyên lý đếm cơ bản

Nguyên lý bù trừ

- *Nguyên lý bù trừ (Inclusion-Exclusion Principle):* (hay *Quy tắc trừ (The Subtraction Rule)*)
  - Có hai biện pháp khác nhau để thực hiện một công việc
  - Biện pháp thứ nhất có m cách thực hiện
  - Biện pháp thứ hai có n cách thực hiện
  - Có k cách thực hiện đồng thời hai biện pháp
  - Số cách thực hiện công việc là $m + n - k$
- *Nguyên lý bù trừ (Inclusion-Exclusion Principle):* Cho các tập hữu hạn A, B trong đó $|A| = m$ và $|B| = n$. Ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Ví dụ 8

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 8 bắt đầu với 1 hoặc kết thúc với 00?

- Gọi A là tập các chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng $1x_2\dots x_8$ (bắt đầu với 1) và B là tập các chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng $x_1x_2\dots x_6 00$ (kết thúc với 00)
- Tập các chuỗi nhị phân độ dài 8 bắt đầu với 1 hoặc kết thúc với 00 là $A \cup B$
- Theo nguyên lý bù trừ, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  - $|A|$: Số chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng $1x_2\dots x_8$ là 2^7
  - $|B|$: Số chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng $x_1x_2\dots x_6 00$ là 2^6
  - $|A \cap B|$: Số chuỗi nhị phân độ dài 8 có dạng $1x_2\dots x_6 00$ là 2^5

Số chuỗi nhị phân độ dài 8 bắt đầu với 1 hoặc kết thúc với 00 là $|A \cup B| = 2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$

Ví dụ 9

Ở ngân hàng X, khách hàng có thể sử dụng mã *PIN (Personal Identification Number)* gồm 4 chữ số thập phân để truy cập tài khoản từ máy rút tiền tự động thông qua thẻ rút tiền. Ngân hàng X đặc biệt yêu cầu các mã PIN không thể bắt đầu hoặc kết thúc với ba chữ số liên tiếp giống nhau (ví dụ, dãy 7770 hoặc 0111 là không hợp lệ). Có tất cả bao nhiêu dãy PIN không hợp lệ?

- Gọi S là tập hợp tất cả các dãy PIN bắt đầu với ba chữ số giống nhau và E là tập hợp tất cả các dãy PIN kết thúc với ba chữ số giống nhau. Tập hợp các dãy PIN không hợp lệ là $S \cup E$
- Theo nguyên lý bù trừ, $|S \cup E| = |S| + |E| - |S \cap E|$
  - $|S|$: Số dãy PIN có dạng $xxxy$ với $x, y \in \{0, \dots, 9\}$ là 10^2 (có 10 cách chọn x, và ứng với mỗi giá trị của x có 10 cách chọn y)
  - $|E|$: Số dãy PIN có dạng $xyyy$ với $x, y \in \{0, \dots, 9\}$ là 10^2 (có 10 cách chọn x, và ứng với mỗi giá trị của x có 10 cách chọn y)
  - $|S \cap E|$: Một dãy PIN $xyzt$ thuộc $S \cap E$ khi và chỉ khi $x = y = z$ (thuộc S) và $y = z = t$ (thuộc E), nghĩa là $x = y = z = t$. Mỗi dãy thuộc $S \cap E$ do đó có dạng $xxxx$ và có 10 dãy dạng này (có 10 cách chọn x)
- Số dãy PIN không hợp lệ là $|S \cup E| = 10^2 + 10^2 - 10 = 190$

Ví dụ 10

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 00000 hoặc 11111?

- Gọi A là tập các chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 00000 và B là tập các chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 11111. $A \cup B$ là tập chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 00000 hoặc 11111
- Theo nguyên lý bù trừ, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Trước tiên, ta tính $|A|$. Mỗi chuỗi nhị phân độ dài 10 có chứa 00000 thuộc chính xác một trong các dạng: $00000x_6x_7x_8x_9x_{10}$, $100000x_7x_8x_9x_{10}$, $x_1100000x_8x_9x_{10}$, $x_1x_2100000x_9x_{10}$, $x_1x_2x_3100000x_{10}$, và $x_1x_2x_3x_4100000$ (lần lượt ứng với các vị trí bắt đầu dãy 00000) (*Tại sao?*)
  - Có 2^5 chuỗi dạng $00000x_6x_7x_8x_9x_{10}$
  - Với mỗi dạng còn lại, có 2^4 chuỗi
  - Do đó $|A| = 2^5 + 5 \cdot 2^4$
- Tương tự, $|B| = 2^5 + 5 \cdot 2^4$
- Tập $A \cap B$ có chính xác hai phần tử: 0000011111 và 1111100000
- Do đó, $|A \cup B| = 2(2^5 + 5 \cdot 2^4) - 2 = 222$

Bài tập 7

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 7 bắt đầu với 00 hoặc kết thúc với 111?

Bài tập 8

Một *chuỗi đối xứng (palindrome)* là một chuỗi ký tự mà khi viết ngược lại từ phải sang trái thì chuỗi không thay đổi. Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài n là chuỗi đối xứng?

Bài tập 9

Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 1000 thỏa mãn

(a) là bội của 7

(b) là bội của cả 7 và 11

(c) là bội của 7 nhưng không là bội của 11

(d) là bội của 7 hoặc là bội của 11

(e) không là bội của 7 và không là bội của 11

Bài tập 10

Có tất cả bao nhiêu số nguyên không vượt quá 1000 là bình phương hoặc lập phương của một số nguyên dương?

Bài tập 11 ($\star$)

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 8 có chứa 000 hoặc 1111? (**Đáp án:** 147)

- *Quy tắc chia (The Division Rule):*
  - Một công việc có thể được thực hiện bằng n cách
  - Với mỗi cách thực hiện w, có chính xác d trong n cách thực hiện tương đương/cùng loại với nó
  - Số cách *khác nhau* để thực hiện công việc là n/d
- *Quy tắc chia (The Division Rule):* Nếu A là hợp của m tập con đôi một không giao nhau, mỗi tập con có d phần tử, thì $m = |A|/d$
- *Quy tắc chia (The Division Rule):* Nếu B là một tập hữu hạn và hàm $f : A \to B$ gán chính xác k phần tử của A cho mỗi phần tử của B, thì $|A| = k \cdot |B|$

Ví dụ 11

- Trong một đàn cừu, người ta đếm được $n = 280$ chân cừu
- Mỗi con cừu w có chính xác $d = 4$ chân
- Số con cừu trong đàn cừu là $n/d = 280/4 = 70$

Ví dụ 12

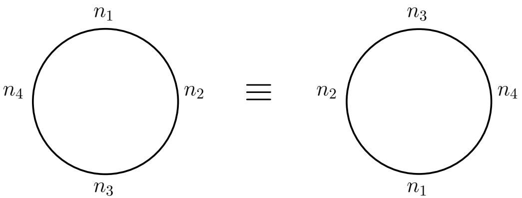
Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp các số $1, 1, 2$?

- Đầu tiên, giả sử hai số 1 là phân biệt: 1_a và 1_b
- Có $3!$ cách sắp xếp 3 số phân biệt
- Tuy nhiên, khi coi 1_a và 1_b là cùng một số 1, *với mỗi cách sắp xếp các số $1, 1, 2$, có chính xác 2 trong $3!$ cách "cùng loại"*, ví dụ
  - Với cách sắp xếp $1, 1, 2$, có hai cách sắp xếp tương đương là $(1_a, 1_b, 2)$ và $(1_b, 1_a, 2)$
- Do đó, số cách sắp xếp khác nhau của dãy $1, 1, 2$ là $3!/2 = 3$

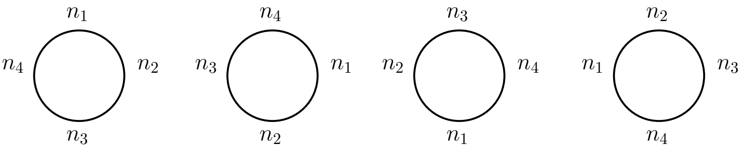
$1_a, 1_b, 2$	$1_b, 1_a, 2$	$1, 1, 2$
$1_a, 2, 1_b$	$1_b, 2, 1_a$	$1, 2, 1$
$2, 1_a, 1_b$	$2, 1_b, 1_a$	$2, 1, 1$

Ví dụ 13

Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 4 người ngồi quanh một bàn tròn? Biết rằng *hai cách sắp xếp là giống nhau nếu mỗi người có người ngồi bên trái giống nhau và người ngồi bên phải giống nhau trong cả hai cách sắp xếp*. Ví dụ, hai cách sắp xếp sau là giống nhau



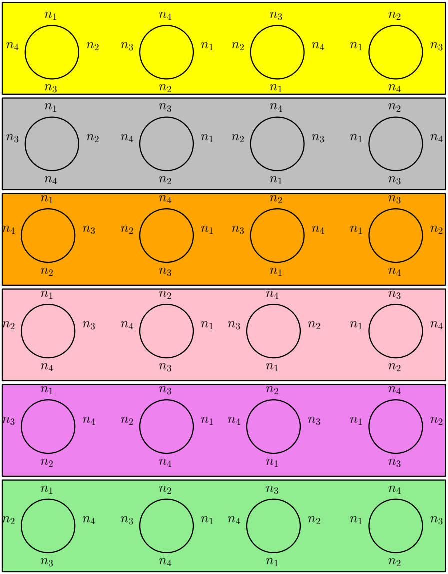
- Nếu *không có điều kiện gì* thì có tất cả $4!$ cách sắp xếp
- Chú ý rằng hai cách sắp xếp là giống nhau nếu khi ta xoay bàn sao cho n_1 nằm ở trên đỉnh thì chúng giống nhau
- Do đó, *với mỗi cách sắp xếp 4 người quanh bàn tròn, có chính xác 4 trong $4!$ cách sắp xếp "cùng loại"*
- Theo quy tắc chia, số cách khác nhau để xếp 4 người quanh bàn tròn là $4!/4 = 6$



Hình: Bốn cách sắp xếp giống nhau

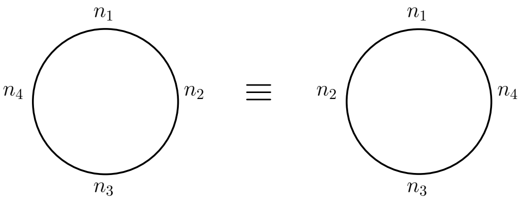
Các nguyên lý đếm cơ bản

Quy tắc chia



Bài tập 12

Giả sử hai cách sắp xếp 4 người quanh một bàn tròn là giống nhau khi mỗi người có hai người ngồi cạnh giống nhau trong cả hai cách sắp xếp không quan tâm là ngồi bên trái hay bên phải, ví dụ như hai cách sắp xếp trong hình sau là giống nhau với giả thiết hiện tại



nhưng không giống nhau với giả thiết trong Ví dụ 13. Trong trường hợp này, có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 4 người quanh một bàn tròn?

Bài tập 13

Giả thiết rằng hai cách sắp xếp là giống nhau nếu mỗi người có người ngồi bên trái và người ngồi bên phải giống nhau trong mỗi cách sắp xếp

(a) Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn?

(b) Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?

Nguyên lý chuồng bồ câu

- *Nguyên lý chuồng bồ câu (The Pigeonhole Principle)* (hay *Nguyên lý Dirichlet (The Dirichlet Drawer Principle)*): Nếu k là một số nguyên dương và có $k+1$ con chim bồ câu hoặc nhiều hơn được đặt trong k chuồng bồ câu, thì có ít nhất một chuồng có hai con chim bồ câu hoặc nhiều hơn
- *Nguyên lý chuồng bồ câu (The Pigeonhole Principle)*: Nếu một hàm $f : A \to B$ ánh xạ một tập hữu hạn A với $|A| \geq k+1$ đến một tập hữu hạn B với $|B| = k$, thì f không là một đơn ánh (**Nhắc lại:** f là đơn ánh khi và chỉ khi với mọi $x_1, x_2 \in A$, nếu $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$)

Cách áp dụng nguyên lý chuồng bồ câu

- Xác định xem cái gì đại diện cho "bồ câu (pigeon)"
- Xác định xem cái gì đại diện cho "chuồng bồ câu (pigeonhole)"
- Xác định cách "bồ câu" được chia vào các "chuồng bồ câu"

Nguyên lý chuồng bồ câu

Ví dụ 14

Trong một nhóm bất kỳ có 367 người, tại sao luôn có hai người trong nhóm có cùng ngày sinh?

- Có tất cả 366 ngày sinh nhật (= "chuồng bồ câu") và 367 người (= "bồ câu"), do đó có ít nhất hai người có cùng ngày sinh nhật

Ví dụ 15

Giả sử một kỳ thi tính các điểm số từ 0 đến 100, và mọi điểm số đều là số nguyên. Cần bao nhiêu sinh viên tham gia kỳ thi để *chắc chắn* có hai sinh viên có cùng điểm số?

- Có tất cả 101 điểm số (= "chuồng"). Cần ít nhất 102 sinh viên (= "bồ câu") để chắc chắn có hai sinh viên có cùng điểm số

Nguyên lý chuồng bồ câu

- *Nguyên lý chuồng bồ câu tổng quát (The Generalized Pigeonhole Principle)*: Nếu N con chim bồ câu được đặt vào k chuồng bồ câu, với k là số nguyên dương nào đó, thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\lceil N/k \rceil$ con

Ví dụ 16

- Có $N = 280$ sinh viên (= "bồ câu") trong một lớp học. Một năm có $k = 52$ tuần (= "chuồng"). Do đó có một tuần mà ít nhất $\lceil 280/52 \rceil = \lceil 5.38 \rceil = 6$ sinh viên có ngày sinh nhật trong tuần đó
- Giá trị *lớn nhất* của d là bao nhiêu để *chắc chắn* rằng phát biểu "Trong tất cả 145 sinh viên, có ít nhất d sinh viên sinh ra vào cùng một tháng" là đúng?
  - Theo Nguyên lý chuồng bồ câu tổng quát, trong 145 sinh viên (= "bồ câu"), có ít nhất $\lceil 145/12 \rceil = 13$ sinh viên sinh ra vào cùng một tháng (= "chuồng"). Do đó, $d = 13$ *thỏa mãn yêu cầu đề ra*
  - Thêm vào đó, *phát biểu với $d \geq 14$ không đúng* vì có thể xảy ra trường hợp có 13 sinh viên sinh ra vào cùng một tháng và các tháng còn lại mỗi tháng có 12 sinh viên sinh vào tháng đó
  - Do đó $d = 13$ *là giá trị lớn nhất thỏa mãn yêu cầu đề ra*

Nguyên lý chuồng bồ câu

Ví dụ 17

Chứng minh rằng trong một tập $n+1$ số nguyên dương bất kỳ nhỏ hơn hoặc bằng $2n$, tồn tại một số là ước của một số khác trong tập đó

- Viết các số trong $n+1$ số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ dưới dạng tích của một lũy thừa của 2 và một số nguyên dương lẻ, nghĩa là, $a_i = 2^{b_i} c_i$ trong đó $b_i \geq 0$ và $c_i \leq 2n$ (= "bồ câu") là một số nguyên dương lẻ, với $1 \leq i \leq n+1$ (*Tại sao?*)
- Có tối đa n số nguyên dương lẻ (= "chuồng") nhỏ hơn $2n$. (*Tại sao?*) Do đó, theo nguyên lý chuồng bồ câu, có hai số c_i, c_j thỏa mãn $c_i = c_j$, với $1 \leq i, j \leq n+1$
- Suy ra, $a_i = 2^{b_i} c_i$ và $a_j = 2^{b_j} c_j$. Do đó, nếu $b_i \leq b_j$ thì $a_i \mid a_j$ và ngược lại thì $a_j \mid a_i$

Bài tập 14

Giả sử một ngăn tủ chỉ có hai loại tất màu đen và trắng, mỗi loại có 12 chiếc. Một người lấy tất trong ngăn tủ một cách ngẫu nhiên trong bóng tối

(a) Cần lấy ít nhất bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn có hai chiếc cùng màu? bốn chiếc cùng màu?

(b) Cần lấy ít nhất bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn có hai chiếc màu đen?

(c) Nếu có thêm 12 chiếc tất màu nâu nữa trong ngăn tủ thì cần lấy ít nhất bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn có hai chiếc cùng màu?

Bài tập 15

Chứng minh rằng trong một nhóm n số nguyên bất kỳ, có hai số nguyên có cùng số dư khi chia cho $n-1$

Bài tập 16

Có sáu giáo sư dạy toán rời rạc cơ bản tại một trường đại học. Tất cả sáu giáo sư đều sử dụng cùng một đề thi cuối kỳ. Nếu điểm thấp nhất có thể đạt được trong kỳ thi cuối kỳ là 0 và điểm cao nhất có thể là 100 và các điểm số đều là số nguyên, thì cần có ít nhất bao nhiêu sinh viên để đảm bảo rằng có hai sinh viên học cùng một giáo sư đạt được cùng một điểm thi cuối kỳ?

Bài tập 17 ($\star$)

Chứng minh rằng với bất kỳ cách xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn, luôn tìm được một bạn (có thể là nam hoặc nữ) ngồi giữa hai bạn nam (**Gợi ý:** Chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử có cách xếp thỏa mãn điều kiện không có bạn nào ngồi giữa hai bạn nam. Nếu chia nhóm các bạn nam thì mỗi nhóm có tối đa bao nhiêu thành viên? Giữa các nhóm này cần sắp xếp tối thiểu bao nhiêu bạn nữ để không có bạn nào ngồi giữa hai bạn nam?)

Nguyên lý chuồng bồ câu

Bài tập 18

(a) Chứng minh rằng nếu 7 số nguyên được chọn từ tập $\{1, 2, \dots, 10\}$ thì có ít nhất hai cặp trong số các số được chọn có tổng bằng 11. Nếu ta chọn 6 số nguyên thay vì 7 thì kết luận trên còn đúng không?

(b) Cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ để chắc chắn rằng trong tập các số đã chọn có hai số có tổng bằng 7?

Bài tập 19 ($\star$)

Chứng minh rằng trong một nhóm n người ($n \geq 2$) có ít nhất hai người có cùng số người quen biết trong nhóm

Bài tập 20

Chứng minh rằng trong một nhóm 6 người bất kỳ, luôn có ít nhất ba người đôi một biết nhau hoặc đôi một không biết nhau

- Một *hoán vị (permutation)* của một tập S gồm các phần tử phân biệt là một dãy sắp thứ tự (ordered sequence) chứa mỗi phần tử trong S chính xác một lần
  - Tập $S = \{1, 2, 3\}$ có tất cả sáu hoán vị: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$
- Một *chỉnh hợp chập k (k-permutation)* của một tập S là một dãy *sắp thứ tự* k phần tử *phân biệt* của S, trong đó k là một số nguyên thỏa mãn $0 \leq k \leq |S|$
  - Tập S có tất cả sáu chỉnh hợp chập 2: $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$
- Ký hiệu $P(n, k)$ hoặc P^k_n là *số chỉnh hợp chập k của (một tập) n phần tử*

Định lý 1

Với mọi số nguyên $n \geq 1$ và mọi số nguyên k thỏa mãn $0 \leq k \leq n$

$$P^k_n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Chứng minh Định lý 1.

Để xây dựng một chỉnh hợp chập k của một tập S gồm n phần tử, ta thực hiện một dãy k bước chọn các phần tử phân biệt trong S để xếp vào k vị trí:

- Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 1: có n cách chọn
- Với vị trí thứ nhất đã được xác định, chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 2: có $n-1$ cách chọn
- Với hai vị trí đầu đã được xác định, chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 3: có $n-2$ cách chọn
- $\dots$
- Với $k-1$ vị trí đầu đã được xác định, chọn phần tử xếp vào vị trí thứ k: có $n-k+1$ cách chọn

Theo quy tắc nhân, có tất cả

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ chỉnh hợp chập k của một tập n phần tử. □

Ví dụ 18

Có bao nhiêu hoán vị của các chữ cái $ABCDEFGH$ có chứa chuỗi ký tự liên tiếp ABC?

- Số hoán vị có chứa chuỗi ký tự ABC bằng với số hoán vị của tập gồm sáu phần tử: ABC, D, E, F, G, H
- Do đó, đáp án là $6! = 720$

Ví dụ 19

Giả sử bạn cần đến 8 địa điểm khác nhau trong một thành phố nào đó. Bạn bắt buộc phải xuất phát từ một địa điểm định sẵn, nhưng có thể chọn lần lượt các địa điểm còn lại theo thứ tự bất kỳ. Có bao nhiêu thứ tự bạn có thể chọn để đến các địa điểm này?

- Địa điểm đầu tiên là cố định, còn 7 địa điểm còn lại có thể được sắp thứ tự tùy ý
- Do đó, đáp án là $7! = 5040$

Ví dụ 20

Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 4 người ngồi quanh một bàn tròn? Biết rằng hai cách sắp xếp là giống nhau nếu mỗi người có người ngồi bên trái giống nhau và người ngồi bên phải giống nhau trong cả hai cách sắp xếp.

- Giả sử ta muốn sắp xếp n_1, n_2, n_3, n_4 quanh bàn tròn
- Để người ngồi bên trái luôn giống nhau và người ngồi bên phải luôn giống nhau trong cả hai cách sắp xếp, cách duy nhất để thu được một cách sắp xếp từ một cách khác giống nó là xoay bàn theo chiều kim đồng hồ hoặc ngược chiều kim đồng hồ.
- Do đó, để sắp xếp n_1, n_2, n_3, n_4 quanh bàn tròn:
    - Cố định vị trí của n_1: có 1 cách (Chọn n_1 ở bất kỳ vị trí nào đều giống nhau, do nếu có một cách sắp xếp giống cách bạn sử dụng nhưng vị trí của n_1 không giống, ta có thể xoay bàn để vị trí của n_1 giống nhau trong cả hai cách sắp xếp)
    - Sắp xếp n_2, n_3, n_4 vào các vị trí còn lại: có $3! = 6$ cách
- Tóm lại, đáp án là $1 \cdot 3! = 6$

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

- Một *tổ hợp chập k (k-combination)* của một tập hợp S là một dãy *không sắp thứ tự* k phần tử *phân biệt* của S, trong đó k là một số nguyên thỏa mãn $0 \leq k \leq |S|$
  - Một tổ hợp chập k của S cũng là một tập con k phần tử của S
  - Tập $S = \{1, 2, 3\}$ có ba tổ hợp chập 2: $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$
- Ký hiệu $C(n, k)$, C_n^k, hoặc $\binom{n}{k}$ (đọc là "n chọn k") là *số tổ hợp chập k của (một tập) n phần tử*

Định lý 2

Với mọi số nguyên $n \geq 1$ và mọi số nguyên k thỏa mãn $0 \leq k \leq n$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Chứng minh Định lý 2.

Để xây dựng một tổ hợp chập k của một tập S gồm n phần tử:

- Đầu tiên, ta giả thiết rằng thứ tự các phần tử là quan trọng, và xây dựng một chỉnh hợp chập k của S: có P_n^k cách
- Theo định nghĩa, trong mỗi tổ hợp chập k của S, thứ tự giữa các phần tử là không quan trọng. Nói cách khác, mỗi tổ hợp chập k của S ứng với chính xác $P_k^k = k!$ chỉnh hợp chập k có chứa cùng các phần tử và chỉ khác nhau bởi thứ tự sắp xếp các phần tử
- Theo quy tắc chia, số tổ hợp chập k của S là

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{P_k^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

□

Ví dụ 21

Có bao nhiêu cách chọn ra 7 quân bài khác nhau từ một bộ bài 52 quân?

- Thứ tự lựa chọn các quân bài là không quan trọng
- Do đó, đáp án là $C^7_{52} = \dfrac{52!}{7!45!} = 133\,784\,560$

Ví dụ 22

Có bao nhiêu cách chọn ra 3 bạn nam và 3 bạn nữ trong một nhóm gồm 10 bạn nam và 7 bạn nữ để đại diện tham gia một buổi họp mặt?

- Đầu tiên ta chọn 3 bạn nam từ nhóm 10 bạn nam, sau đó chọn 3 bạn nữ từ nhóm 7 bạn nữ
- Có C^3_{10} cách chọn ra 3 bạn nam, và C^3_7 cách chọn ra 3 bạn nữ
- Áp dụng quy tắc nhân, có tổng cộng $C^3_{10} \cdot C^3_7 = 120 \cdot 35 = 4200$ cách

Định lý 3

Với các số nguyên n, k thỏa mãn $0 \leq k \leq n$, ta có

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Chứng minh.

- Giả sử $\mathcal{A}$ là tập các tập con k phần tử và $\mathcal{B}$ là tập các tập con $n-k$ phần tử của một tập n phần tử X. Hàm $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ cho bởi $f(A) = X \setminus A$ với $A \in \mathcal{A}$ là một song ánh (*Tại sao?*)
- Do đó, $C_n^k = C_n^{n-k}$

$\square$

Bài tập 21

Chứng minh Định lý 3 bằng công thức đã biết.

Ta có thể chứng minh hai vế của một đẳng thức bằng cách chỉ ra chúng *đếm cùng một đối tượng thông qua các phương pháp khác nhau*. Phương pháp chứng minh này gọi là *phương pháp đếm bằng hai cách (double counting proof)*

Trong Ví dụ 23, với $n, k \geq 2$ và $n \geq k + 2$, ta sử dụng phương pháp đếm bằng hai cách để chứng minh đẳng thức

$$C_n^k - C_{n-2}^{k-2} = 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k$$

Ví dụ 23 (Đếm bằng hai cách)

Giả sử $n, k \geq 2$ và $n \geq k + 2$. Ta đếm số cách chọn k số nguyên từ tập $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho 1 và 2 không đồng thời được chọn

- **Cách 1:**
  - Có C_n^k tập con k phần tử và không có hạn chế gì
  - Có C_{n-2}^{k-2} tập con k phần tử có chứa đồng thời cả 1 và 2
    - Cố định 1 và 2, chọn $k - 2$ phần tử còn lại từ tập $\{3, \dots, n\}$
  - Do đó đáp án là $C_n^k - C_{n-2}^{k-2}$
- **Cách 2:**
  - Có C_{n-2}^{k-1} tập con k phần tử chứa 1 nhưng không chứa 2
    - Cố định 1, chọn $k - 1$ phần tử còn lại từ tập $\{3, \dots, n\}$
  - Tương tự, có C_{n-2}^{k-1} tập con k phần tử chứa 2 nhưng không chứa 1
  - Có C_{n-2}^k tập con k phần tử không chứa cả 1 và 2
    - Chọn k phần tử từ tập $\{3, \dots, n\}$
  - Do đó đáp án là $2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k$

Do đó, $C_n^k - C_{n-2}^{k-2} = 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k$

Định lý 4

Giả sử $n > k \geq 1$. Ta có $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Chứng minh.

- C_n^k là số cách chọn k phần tử từ tập n phần tử $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Để chọn k phần tử từ $\{1, 2, \ldots, n\}$, ta cũng có thể:
  - Chọn 1, và chọn $k-1$ phần tử còn lại từ tập $\{2, \ldots, n\}$: có C_{n-1}^{k-1} cách chọn
  - Không chọn 1, và chọn k phần tử từ tập $\{2, \ldots, n\}$: có C_{n-1}^k cách chọn

  Do đó, theo quy tắc cộng, có $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ tập con k phần tử của tập n phần tử
- Do đó, $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

□

Bài tập 22

Chứng minh Định lý 4 bằng công thức đã biết

Bài tập 23

Sử dụng Định lý 4, chứng minh đẳng thức thu được từ Ví dụ 23 sau

$$C_n^k - C_{n-2}^{k-2} = 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k$$

Bắt đầu với $n = 0$, hàng thứ n có $n+1$ phần tử: $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$

$$C_0^0 = 1$$

$$C_1^0 = 1 \qquad C_1^1 = 1$$

$$C_2^0 = 1 \qquad C_2^1 = 2 \qquad C_2^2 = 1$$

$$C_3^0 = 1 \qquad C_3^1 = 3 \qquad C_3^2 = 3 \qquad C_3^3 = 1$$

$$C_4^0 = 1 \qquad C_4^1 = 4 \qquad C_4^2 = 6 \qquad C_4^3 = 4 \qquad C_4^4 = 1$$

Hình: Tam giác Pascal

Định lý 3 và 4 có thể được minh họa bằng tam giác Pascal

Một tính chất khác của tam giác Pascal là

Định lý 5

Với mọi $n \geq 0$, tổng các phần tử ở hàng thứ n là

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Chứng minh.

- C_n^k là số cách chọn tập con k phần tử từ một tập n phần tử
- Do đó, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$ là số tập con của một tập n phần tử
- Như ta đã đề cập trong phần quy tắc nhân, số tập con của một tập n phần tử là 2^n

$\square$

Bài tập 24

Chứng minh Định lý 5 bằng phương pháp quy nạp. (**Gợi ý:** Sử dụng Định lý 4)

Bài toán: Khai triển $(x+y)^n$

Ví dụ 24

$$
\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1\\
(x+y)^1 &= 1\cdot x + 1\cdot y\\
(x+y)^2 &= 1\cdot x^2 + 2\cdot xy + 1\cdot y^2\\
(x+y)^3 &= 1\cdot x^3 + 3\cdot x^2y + 3\cdot xy^2 + 1\cdot y^3\\
(x+y)^4 &= 1\cdot x^4 + 4\cdot x^3y + 6\cdot x^2y^2 + 4\cdot xy^3 + 1\cdot y^4
\end{aligned}
$$

Nhận xét: Các hệ số khi khai triển $(x+y)^n$ $(0 \leq n \leq 4)$ giống với các hàng tương ứng trong tam giác Pascal

Định lý 6: Định lý nhị thức

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$$

Chứng minh.

- Để nhận được một số hạng $x^{n-k}y^k$ trong khai triển của $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$, ta cần chọn chính xác $n-k$ số x và k số y từ n thừa số $(x+y)$. (Với mỗi thừa số, chọn chính xác một phần tử: hoặc x hoặc y)
    - Có C_n^{n-k} cách chọn chính xác $n-k$ số x
    - Ứng với mỗi cách chọn $n-k$ số x, có chính xác 1 cách chọn k số y từ k thừa số $(x+y)$ còn lại
- Do đó, hệ số của $x^{n-k}y^k$ là $C_n^{n-k} = C_n^k$

$\square$

Bài tập 25

Chứng minh Định lý 5 bằng cách sử dụng Định lý 6

Ví dụ 25

Khai triển $(x+2)^4$

$$
\begin{aligned}
(x+2)^4 &= C_4^0 \cdot x^4 + C_4^2 \cdot x^3 \cdot 2^1 + C_4^3 \cdot x^2 \cdot 2^2 + \\
&+ C_4^1 \cdot x^1 \cdot 2^3 + C_4^4 \cdot x^0 \cdot y^4 \\
&= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16
\end{aligned}
$$

Ví dụ 26

Tính $(1.02)^7$ làm tròn đến chữ số thập phân thứ 4

$$
\begin{aligned}
(1+0.02)^7 &= C_7^0 \cdot 1^7 + C_7^1 \cdot 1^6 \cdot (0.02) + C_7^2 \cdot 1^5 \cdot (0.0004) \\
&+ C_7^3 \cdot 1^4 \cdot (0.000008) + \ldots \\
&= 1 + 1.14 + 0.0084 + 0.00028 + \ldots \\
&\approx 1.14868 \approx 1.1487
\end{aligned}
$$

Chú ý: Để làm tròn đến chữ số thập phân thứ 4, ta cần tính toán đến chữ số thập phân thứ 5

Bài tập 26

Chứng minh rằng với mọi $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k = 3^n$

(a) bằng cách áp dụng Định lý nhị thức (Định lý 6)

(b) ($\star$) bằng phương pháp đếm hai lần (**Gợi ý:** Có bao nhiêu cách xây dựng một chuỗi n ký tự chỉ sử dụng các ký tự A, B, C thỏa mãn điều kiện có chính xác $n - k$ ký tự A?)

Bài tập 27

Tìm hệ số

(a) của x^7 trong khai triển của $(1 + x)^{11}$

(b) của x^9 trong khai triển của $(2 - x)^{19}$

(c) ($\star$) của x^k trong khai triển của $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{100}$, trong đó k là một số nguyên

Định lý 7: Nguyên lý bù trừ tổng quát

Với các tập hữu hạn $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\{I \mid I\subseteq\{1,\dots,n\}\wedge|I|=k\}} (-1)^{k-1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|\right)$$

$$= (-1)^0|A_1| + (-1)^0|A_2| + \cdots + (-1)^0|A_n|$$

$$+ (-1)^1|A_1 \cap A_2| + \cdots + (-1)^1|A_{n-1} \cap A_n|$$

$$+ \dots$$

$$+ (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

Bài tập 28

(a) Khai triển $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$ theo nguyên lý bù trừ tổng quát, với $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

(b) Theo nguyên lý bù trừ tổng quát, $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$ được khai triển thành tổng của bao nhiêu số hạng?

Chứng minh.

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\{I \mid I\subseteq\{1,\dots,n\}\wedge|I|=k\}} (-1)^{k-1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|\right)$$

- Cho $a \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ và giả thiết rằng a xuất hiện trong chính xác m tập $A_{a_1}, A_{a_2}, \dots, A_{a_m}$, với $1 \leq a_1, a_2, \dots, a_m \leq n$
- a được đếm một lần ở vế trái
- Có bao nhiêu lần a được đếm ở vế phải?
  - a xuất hiện trong C_m^1 tập $A_{a_1}, A_{a_2}, \dots, A_{a_m}$
  - a xuất hiện trong C_m^2 tập $A_{a_i} \cap A_{a_j}$ với $1 \leq i < j \leq m$
  - a xuất hiện trong C_m^3 tập $A_{a_i} \cap A_{a_j} \cap A_{a_k}$ với $1 \leq i < j < k \leq m$
  - $\dots$

Do đó, ở vế phải, a được đếm $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}C_m^k$ lần

Chứng minh (tiếp).

- Để chứng minh vế trái bằng vế phải, ta cần chỉ ra a cũng được đếm một lần ở vế phải, nghĩa là

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}C_m^k = 1$$

- Theo Định lý 6, ta có

$$\begin{aligned} 0 &= (-1+1)^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k(-1)^k 1^{m-k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k C_m^k \end{aligned}$$

Do đó, $\sum_{k=1}^{m}(-1)^k C_m^k = -1$. Suy ra $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}C_m^k = 1$ (Chia hai vế cho -1)

Bài tập 29

(a) Chứng minh rằng với mọi $n > 0$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

(b) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng với mọi $m > 0$, $\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} C_m^k = 1$. (**Gợi ý:** $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$)

Bài tập 30

Chứng minh *đẳng thức Vandermonde (Vandermonde's Identity)* sau

$$C_{m+n}^r = \sum_{k=0}^{r} C_m^{r-k} C_n^k,$$

trong đó m, n, r là các số nguyên không âm và $r \leq \min(m, n)$. (**Gợi ý:** Có bao nhiêu cách chọn ra một ban đại diện gồm r thành viên từ một lớp học có m nam và n nữ?)

Bài tập 31

Chứng minh rằng với mọi $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$. (**Gợi ý:** Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài $2n$ có chính xác n số 0?)

Bài tập 32

Chứng minh rằng với mọi $n \geq 3$, $\sum_{k=2}^{n-1} C_k^2 = C_n^3$. (**Gợi ý:** Có bao nhiêu cách chọn một tập con gồm 3 phần tử a, b, c từ tập $\{1, \dots, n\}$ với $a < b < c$? Xét các trường hợp có thể xảy ra với a)

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

- Một *chỉnh hợp lặp chập r (r-permutation with repetition)* của một tập S là một dãy *sắp thứ tự* r phần tử của S trong đó các phần tử *có thể lặp lại*
- Một *tổ hợp lặp chập r của một tập S (r-combination with repetition)* của một tập S là một dãy *không sắp thứ tự* r phần tử của S trong đó các phần tử *có thể lặp lại*

Định lý 8

Số chỉnh hợp lặp chập r của một tập n phần tử là n^r

Chứng minh.

- Có n lựa chọn cho vị trí thứ nhất
- $\ldots$
- Với mỗi lựa chọn cho các vị trí thứ nhất, thứ hai, $\ldots$, thứ $(r-1)$, có n lựa chọn cho vị trí thứ r
- Theo quy tắc nhân, có n^r cách xây dựng một chỉnh hợp lặp chập r của một tập n phần tử

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Định lý 9

Số tổ hợp lặp chập r của một tập n phần tử là C^{n-1}_{n+r-1}

Chứng minh.

- Mỗi tổ hợp lặp chập r từ tập n phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy $n-1$ thanh đứng và r ngôi sao
  - Ta dùng $n-1$ thanh đứng để phân cách các ngăn
  - Ngăn thứ i chứa thêm một ngôi sao mỗi lần khi phần tử thứ i của tập xuất hiện trong tổ hợp
  - Ví dụ, một tổ hợp lặp chập 6 của tập 4 phần tử được biểu diễn bởi

    $$** \mid * \mid\mid ***$$

    là một tổ hợp chứa đúng hai phần tử thứ nhất, một phần tử thứ hai, không phần tử thứ ba, và ba phần tử thứ tư của tập 4 phần tử
- Mỗi dãy $n-1$ thanh đứng và r ngôi sao ứng với một chuỗi nhị phân độ dài $n+r-1$ có chính xác r số 1. Do đó, số các dãy thanh đứng và ngôi sao là $C^r_{n+r-1} = C^{n-1}_{n+r-1}$ □

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Ví dụ 27

Có bao nhiêu cách để 6 quả bóng vào một túi, biết rằng mỗi quả bóng chỉ có thể có màu đỏ (R), xanh lá cây (G), hoặc xanh da trời (B)?

- 6 quả bóng ứng với 6 ngôi sao, và 2 thanh đứng phân cách thành ba ngăn ứng với các màu đỏ, xanh lá cây, xanh da trời
  - Lựa chọn [R, R, G, G, G, B] ứng với dãy $** \mid *** \mid *$
  - Lựa chọn [R, B, R, R, B, R] ứng với dãy $* * ** \mid\mid **$
- Số cách để 6 quả bóng vào túi là $C^{3-1}_{3+6-1} = 28$

Ví dụ 28

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, và $x_3 \geq 0$?

- Mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách để 11 quả bóng vào 3 hộp gán nhãn x_1, x_2, x_3
- Số nghiệm nguyên không âm của phương trình chính là tổ hợp lặp chập 11 của tập 3 phần tử: $C^{3-1}_{3+11-1} = 78$

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Định lý 10

Cho phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ *với* $k \geq 1$ *và* $n \geq 0$, *số nghiệm nguyên không âm của phương trình này (hay số bộ* $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ *thỏa mãn phương trình, trong đó* $x_i \in \mathbb{N}$*) là* C^{n-1}_{n+r-1}

- Mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách để n quả bóng vào r hộp gán nhãn $x_1, x_2, \dots, x_r$
- Số nghiệm nguyên không âm của phương trình chính là tổ hợp lặp chập r của tập n phần tử: C^{n-1}_{n+r-1}
- **Chú ý:** $x_1, x_2, \dots, x_r$ là các *số nguyên không âm*

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Ví dụ 29

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn $x_1 \geq -2$, $x_2 \geq 1$, và $x_3 \geq 0$?

- Ta *xây dựng một phương trình mới có dạng tổng của các số nguyên không âm* như ở ví dụ trước
  - Ta có $x_1 + 2 \geq 0$ và $x_2 - 1 \geq 0$
  - Đặt $x_1' = x_1 + 2 \geq 0$ và $x_2' = x_2 - 1 \geq 0$
  - Số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ thỏa mãn $x_1 \geq -2$, $x_2 \geq 1$, và $x_3 \geq 0$ cũng là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1' + x_2' + x_3 = 11 + 2 - 1 = 12$
- Số nghiệm thỏa mãn điều kiện là $C^{3-1}_{3+12-1} = 91$

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Ví dụ 30

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 2$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$?

- Ta đếm số nghiệm thỏa mãn
  - $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$
  - $x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

  Số nghiệm thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 2$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ sẽ là hiệu của hai số trên
- Có $C^{11}_{3+11-1} = 78$ nghiệm nguyên thỏa mãn $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$. Có $C^{8}_{3+8-1} = 45$ nghiệm nguyên thỏa mãn $x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$. Do đó, kết quả là $C^{11}_{3+11-1} - C^{8}_{3+8-1} = 78 - 45 = 33$

Bài tập 33

Đếm số nghiệm nguyên của $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 2$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ một cách trực tiếp bằng cách xét từng trường hợp $x_1 = 0$, $x_1 = 1$, và $x_1 = 2$

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Định lý 11

Số hoán vị phân biệt của n phần tử trong đó có n_1 phần tử giống nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử giống nhau thuộc loại 2, $\dots$, và n_k phần tử giống nhau thuộc loại k, là $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

Chứng minh.

- Nếu coi tất cả n phần tử đều khác nhau, có $n!$ hoán vị
- Với mỗi hoán vị trong $n!$ hoán vị này, có thể xây dựng một hoán vị giống nó bằng một chuỗi k bước:
  - Hoán vị n_1 phần tử loại 1: có $n_1!$ cách
  - ...
  - Với mỗi cách hoán vị các phần tử loại $1, \dots, k-1$, hoán vị n_k phần tử loại k: có $n_k!$ cách

  Theo quy tắc nhân, mỗi hoán vị có $n_1!n_2!\dots n_k!$ hoán vị giống nó trong số $n!$ hoán vị
- Theo quy tắc chia, số hoán vị phân biệt là $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Ví dụ 31

Có bao nhiêu chuỗi ký tự phân biệt thu được bằng cách sắp xếp lại thứ tự các chữ cái trong chuỗi **SUCCESS**?

- Số chuỗi ký tự chính là số hoán vị phân biệt của 7 ký tự, trong đó có 3 ký tự **S**, 2 ký tự **C**, 1 ký tự **U**, và 1 ký tự **E**
- Do đó kết quả là $\dfrac{7!}{3!2!1!1!} = 420$

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Định lý 12

Số cách chia n vật khác nhau vào trong k hộp sao cho có n_i đồ vật được đặt vào hộp thứ i, với $i = 1, 2, \dots, k$ là

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Với các số nguyên $n, n_1, n_2, \dots, n_k \geq 0$ thỏa mãn $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, ta định nghĩa

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Định lý 13: Định lý đa thức

Với mọi $n \geq 0$ và $k \geq 1$

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{0 \leq n_1, \dots, n_k \leq n \\ n_1 + \cdots + n_k = n}} C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$$

Hàm sinh

Hàm sinh

Hàm sinh (generating function) $G(x)$ của một *dãy vô hạn* $\{a_n\}$ $(n \geq 0)$ được định nghĩa bởi $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nói cách khác, a_n là hệ số của x^n trong $G_a(x)$

- Để thuận tiện, ta viết dãy $\{a_n\} = \langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$
- Lưu ý rằng biến x trong hàm sinh không biểu diễn bất kỳ đại lượng nào mà chỉ đóng vai trò như một ký hiệu để thuận tiện cho việc đề cập đến "hệ số của x^n"

Ví dụ 32

(a) Hàm sinh của dãy $\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$ là $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(b) Hàm sinh của dãy $\langle 1, -1, 1, -1, \dots \rangle$ là $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

Hàm sinh

Hàm sinh

Hàm sinh (generating function) $G(x)$ của một *lớp (tập hợp) các đối tượng $\mathcal{A}$* được định nghĩa bởi $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, trong đó a_n là số phần tử có kích thước n trong lớp (tập hợp) $\mathcal{A}$

Ví dụ 33

(a) Hàm sinh của lớp các chuỗi nhị phân $\{0,1\}^\star$ là

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

- Có 2^n chuỗi nhị phân có độ dài n

(b) Hàm sinh của lớp giá trị các mặt của một xúc xắc thông thường là $G(x) = \sum_{n=1}^{6} x^n$

- Có 1 mặt giá trị 1, 1 mặt giá trị 2, 1 mặt giá trị 3, 1 mặt giá trị 4, 1 mặt giá trị 5, và 1 mặt giá trị 6

Hàm sinh

Đếm bằng cách sử dụng hàm sinh

Các bài toán liên quan đến việc *đếm số cách chọn các phần tử trong một tập hợp* có thể được giải bằng cách sử dụng hàm sinh thông qua các lý luận để *đồng nhất số cách chọn n phần tử với hệ số của x^n trong hàm sinh*

- Hàm sinh cho phép làm việc với các hàm thay vì đếm một cách trực tiếp
- Khi làm việc với các hàm, có thể ứng dụng các thao tác biến đổi đại số (algebraic manipulation)

Hàm sinh

Tổng hai hàm sinh

Giả sử $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là các lớp đối tượng không giao nhau, và $\mathcal{C} = \mathcal{A} \uplus \mathcal{B}$ là hợp của chúng (ký hiệu $\uplus$ biểu thị hợp không giao nhau). Nếu $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ lần lượt là các hàm sinh của $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$, thì hàm sinh của $\mathcal{C}$ là $C(x) = A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$

- Có a_n đối tượng trong lớp $\mathcal{A}$ có kích thước n và b_n đối tượng trong lớp $\mathcal{B}$ có kích thước n, do đó tổng số đối tượng trong lớp $\mathcal{C}$ có kích thước n là $a_n + b_n$
- **Ví dụ:**
  - $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 5\}\}$, $\mathcal{B} = \{\{4\}, \{5\}, \{6\}, \{4, 5\}\}$ (Chú ý là $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$)
  - Kích thước của các phần tử (tập hợp) trong $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là số thành viên trong phần tử (tập hợp) đó
  - Hàm sinh của $\mathcal{A}$ là $A(x) = 2x^1 + 1x^2 + 1x^3$ (có 2 phần tử có kích thước 1, 1 phần tử có kích thước 2, và 1 phần tử có kích thước 3)
  - Hàm sinh của $\mathcal{B}$ là $B(x) = 3x^1 + 1x^2$ (có 3 phần tử có kích thước 1, và 1 phần tử có kích thước 2)
  - Hàm sinh của $\mathcal{C} = \mathcal{A} \uplus \mathcal{B}$ là $C(x) = A(x) + B(x) = 5x^1 + 2x^2 + 1x^3$

Hàm sinh

Tích hai hàm sinh

Giả sử $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là các lớp đối tượng và $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ là tích Đềcác của chúng. Nếu $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ lần lượt là các hàm sinh của $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$, thì hàm sinh của $\mathcal{C}$ là $C(x) = A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ trong đó $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

- Với $0 \leq k \leq n$ bất kỳ, có a_k đối tượng trong lớp $\mathcal{A}$ có kích thước k và b_{n-k} đối tượng trong lớp $\mathcal{B}$ có kích thước $n-k$. Do đó tổng số đối tượng trong lớp $\mathcal{C}$ có kích thước n là $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. (Kích thước của một cặp (a, b) là tổng kích thước của a và b)
- **Ví dụ:**
  - $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \{1, 2, \dots, 6\}$: tập hợp giá trị các mặt của một xúc xắc thông thường
  - Hàm sinh của cả $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ đều là $G(x) = 1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6$ (có 1 mặt giá trị 1, 1 mặt giá trị 2, $\dots$, 1 mặt giá trị 6)
  - $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ là tập hợp các cặp (x, y) trong đó $x \in \mathcal{A}$ và $y \in \mathcal{B}$. Kích thước của mỗi cặp (x, y) là $x + y$
  - Hàm sinh của $\mathcal{C}$ là $G(x)^2 = (1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6)^2$

Hàm sinh

Ví dụ 34

Có bao nhiêu cách chọn k phần tử từ một tập hợp gồm n phần tử?

- Ta muốn xây dựng một hàm sinh $G(x)$ cho phương trình sao cho *hệ số của x^k trong $G(x)$ là số cách chọn k phần tử từ một tập hợp gồm n phần tử $S = \{p_1, \dots, p_n\}$*
- Gọi $\mathcal{A}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ là tập hợp các tập con của $\{p_i\}$. Hàm sinh của $\mathcal{A}_i$ là $G_i(x) = 1 + x$
  - Có 1 tập con của $\{p_i\}$ có kích thước 0 (tập rỗng) $\Leftrightarrow$ Hệ số của x^0 là 1
  - Có 1 tập con của $\{p_i\}$ có kích thước 1 ($\{p_i\}$) $\Leftrightarrow$ Hệ số của x^1 là 1
  - Có 0 tập con của $\{p_i\}$ có kích thước $k \geq 2$ $\Leftrightarrow$ Hệ số của x^k với $k \geq 2$ là 0
- Xét $\mathcal{C} = \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$.
  - $\mathcal{C}$ là tập hợp các bộ n phần tử $(S_1, \dots, S_n)$ trong đó $S_i \subseteq \{p_i\}$ với $1 \leq i \leq n$. Kích thước của mỗi bộ n phần tử là $\sum_{i=1}^{n} |S_i|$
  - Hàm sinh của $\mathcal{C}$ là $G(x) = G_1(x) \cdot \ldots \cdot G_n(x) = (1 + x)^n$
  - Tồn tại một song ánh $f : \mathcal{C} \to \mathcal{P}(S)$ cho bởi $f(S_1, \dots, S_n) = S_1 \cup \cdots \cup S_n$
- Do đó, số cách chọn k phần tử từ một tập hợp gồm n phần tử (= số tập con k phần tử của S = số phần tử thuộc $\mathcal{C}$ có kích thước k) là hệ số của x^k trong khai triển của $G(x) = (1 + x)^n$, và bằng C_n^k (Định lý nhị thức)

Ví dụ 35

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, và $x_3 \geq 0$?

- Ta muốn xây dựng một hàm sinh $G(x)$ cho phương trình sao cho *hệ số của x^{11} trong $G(x)$ là số nghiệm thỏa mãn phương trình*
- Gọi $\mathcal{A}_i$ $(1 \leq i \leq 3)$ là tập hợp các giá trị có thể của x_i. Hàm sinh của $\mathcal{A}_i$ là $G_i(x) = 1 + x + \cdots + x^{11}$
- Xét $\mathcal{C} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3$
  - $\mathcal{C}$ là tập hợp các bộ ba (x_1, x_2, x_3) trong đó $x_i \in \mathcal{A}_i$ với $1 \leq i \leq 3$. Kích thước của mỗi bộ ba là $\sum_{i=1}^{3} x_i$
  - Hàm sinh của $\mathcal{C}$ là $G(x) = G_1(x) \cdot G_2(x) \cdot G_3(x) = (1 + x + \cdots + x^{11})^3$
  - Mỗi nghiệm của phương trình ứng với một bộ có kích thước $11 \Leftrightarrow$ Hệ số của x^{11} trong $G(x)$

Ví dụ 35 (tiếp)

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, và $x_3 \geq 0$?

- Số nghiệm của phương trình là hệ số của x^{11} trong khai triển của $G(x) = (1 + x + \cdots + x^{11})^3$
- Ta có

$$\begin{aligned} G(x) &= (1 + x + \cdots + x^{11})^3 \\ &= \left(\frac{1 - x^{12}}{1 - x}\right)^3 \\ &= (1 - x^{12})^3 (1 - x)^{-3} \end{aligned}$$

Để tìm hệ số của x^{11} trong khai triển của $G(x)$ ở Ví dụ 35, ta cần một số định nghĩa và định lý

Hàm sinh

Hệ số nhị thức mở rộng

Với $n \in \mathbb{R}$ bất kỳ và $r \geq 0$, *hệ số nhị thức tổng quát (generalized binomial coefficient)* C_n^r được định nghĩa như sau

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}$$

- Ví dụ, $C_{-2}^5 = \frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)}{5!} = -6$

Mệnh đề 14

Nếu n là một số nguyên dương thì

$$C_{-n}^r = (-1)^r C_{n+r-1}^r$$

Định lý 15: Định lý nhị thức tổng quát

Với mọi $n \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} C_n^r x^r$$

Ví dụ 36

Tìm hệ số của x^{11} trong khai triển của $(1-x)^{-3}$

- Hệ số của x^r trong khai triển của $(1-x)^{-3}$ là

$$(-1)^r C^r_{-3} = (-1^r)\left[(-1)^r \cdot C^r_{3+r-1}\right] = \frac{(r+2)(r+1)}{2}$$

- Suy ra, hệ số của x^{11} trong khai triển của $(1-x)^{-3}$ là $(11+2)(11+1)/2 = 78$

Ví dụ 37 (Tiếp tục Ví dụ 35)

Tìm hệ số của x^{11} trong khai triển của $G(x) = (1-x^{12})^3(1-x)^{-3}$

- Ta có $(1-x^{12})^3 = 1 - 3x^{12} + 3x^{24} - x^{36}$
- Cách duy nhất để thu được x^{11} là lấy x^0 trong khai triển của $(1-x^{12})^3$ nhân với x^{11} trong khai triển của $(1-x)^{-3}$
- Do đó, hệ số của x^{11} trong khai triển của $G(x)$ là hệ số của x^{11} trong khai triển của $(1-x)^{-3}$, và bằng 78 (Ví dụ 36)

Hàm sinh

Ví dụ 38

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn $-1 \leq x_1 \leq 2$ và $1 \leq x_2, x_3 \leq 4$?

- Hàm sinh

$$G(x) = (x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^2$$

- Số nghiệm nguyên của phương trình thỏa mãn điều kiện đề ra là hệ số của x^6 trong khai triển của $G(x)$
- Ta có

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^2 \\ &= \frac{1}{x^2}(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^3 \\ &= \frac{x^3}{x^2}(1 + x + x^2 + x^3)^3 \\ &= x(1 + x + x^2 + x^3)^3 \end{aligned}$$

Bài tập 34

Hoàn thành Ví dụ 38 bằng cách tìm hệ số của x^5 trong khai triển của $(1 + x + x^2 + x^3)^3$

Ví dụ 39

Có bao nhiêu cách để bỏ n quả vào một túi thỏa mãn các ràng buộc sau?

- Các quả này chỉ thuộc bốn loại: táo, chuối, cam, lê
- Số lượng táo phải là số chẵn
- Số lượng chuối phải là bội số của 5
- Có nhiều nhất bốn quả cam
- Có nhiều nhất một quả lê

- Ví dụ, có 7 cách thực hiện với 6 quả:

Táo	6	4	4	2	2	0	0
Chuối	0	0	0	0	0	5	5
Cam	0	2	1	4	3	1	0
Lê	0	0	1	0	1	0	1

- Có *quá nhiều điều kiện*. Có vẻ như rất khó nếu đếm theo cách thông thường?

Ví dụ 39 (tiếp)

- Hàm sinh cho việc lựa chọn các loại quả
  - Táo: $G_T(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \dfrac{1}{1-x^2}$
  - Chuối: $G_C(x) = 1 + x^5 + x^{10} + \cdots = \dfrac{1}{1-x^5}$
  - Cam: $G_M(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \dfrac{1-x^5}{1-x}$
  - Lê: $G_L(x) = 1 + x = \dfrac{1-x^2}{1-x}$
- Hàm sinh cho tổng số quả

$$G(x) = G_T(x) \cdot G_C(x) \cdot G_M(x) \cdot G_L(x)$$
$$= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Bài tập 35

Hoàn thành Ví dụ 39 bằng cách tìm hệ số của x^n trong khai triển của $G(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Bài tập 36

Tìm hệ số

(a) của x^4 trong khai triển của $(1-x)^{-2}$
(b) của x^n trong khai triển của $(1+x)^{-4}$
(c) của x^n trong khai triển của $\dfrac{1+x}{(1-2x)^5}$

(**Gợi ý:** $(1+x)/((1-2x)^5)) = (1-2x)^{-5} + x(1-2x)^{-5}$. Tìm hệ số của x^n trong khai triển của từng số hạng và cộng các kết quả tìm được)

Bài tập 37

Sử dụng hàm sinh để đếm số nghiệm nguyên của $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 2$, $x_2 \geq 0$, và $x_3 \geq 0$

Bài tập 38

Xác định số cách để có được tổng 12 khi tung 3 viên xúc xắc bình thường bằng cách sử dụng hàm sinh

Bài tập 39 ($\star$)

Sử dụng hàm sinh để đếm số nghiệm nguyên của $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ thỏa mãn $x_1 \geq -2$, $x_2 \geq 1$, và $x_3 \geq 0$

Một số ví dụ khác

Ví dụ 40

Có bao nhiêu cách phân phối 4 nhân viên khác nhau A, B, C, D vào 3 văn phòng hoàn toàn giống hệt nhau? (Chú ý là xếp A, B vào phòng thứ nhất và C, D vào phòng thứ hai hoàn toàn giống với việc xếp A, B vào phòng thứ hai và C, D vào phòng thứ ba. *Điều quan trọng là A, B cùng phòng và C, D cùng phòng*.) Giả sử rằng mỗi văn phòng có thể chứa được bất kỳ một số lượng nhân viên nào

- Cả 4 người chung một văn phòng: có $C_4^4 = 1$ cách
  - Xếp 4 người vào bất kỳ phòng nào đều được
- ba + một: có $C_4^3 = 4$ cách
  - Chọn 3 người xếp vào một phòng, người còn lại tự động xếp vào một trong hai phòng còn lại, phòng nào đều được
- hai + hai: có $C_4^2/2 = 3$ cách
  - Chọn 2 người để xếp vào một phòng, hai người còn lại tự động vào một trong hai phòng còn lại. Mỗi cách chọn này có một cách tương đương với nó, ví dụ như chọn A, B xếp vào một phòng tương đương với chọn C, D xếp vào một phòng, vì đều cho kết quả là $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}$
- hai + một + một: có C_4^2 cách
  - Chọn 2 người để xếp vào một phòng, hai người còn lại tự động xếp vào hai phòng còn lại

Một số ví dụ khác

Ví dụ 41

Có bao nhiêu cách để đặt 6 quyển sách hoàn toàn giống nhau vào 4 hộp hoàn toàn giống nhau, trong đó mỗi hộp có thể chứa nhiều nhất 6 quyển sách?

- Ta liệt kê các cách sắp xếp bằng cách liệt kê số sách lớn nhất trong một hộp, theo sau bởi các số sách nhỏ hơn trong các hộp có chứa ít nhất một quyển sách khác, theo thứ tự giảm dần của số sách. Ví dụ, $4, 1, 1$ mô tả cách xếp sách vào 3 hộp, một hộp có 4 quyển, hai hộp khác mỗi hộp có 1 quyển
- Các cách sắp xếp là:
  - 6
  - $5, 1$
  - $4, 2 \quad 4, 1, 1$
  - $3, 3 \quad 3, 2, 1 \quad 3, 1, 1, 1$
  - $2, 2, 2 \quad 2, 2, 1, 1$

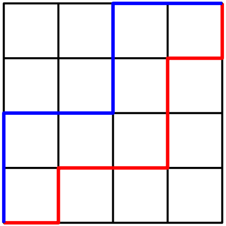
Một số ví dụ khác

Bài tập 40 ($\star$)

Alice và Bob chơi trò chơi sau: Bob chọn 10 số nguyên bất kỳ trong khoảng từ 1 đến 40. Alice cần tìm hai tập số nguyên khác nhau trong các số mà Bob chọn, mỗi tập có 3 phần tử, sao cho tổng các số nguyên trong hai tập là bằng nhau. Hãy chứng minh rằng Alice luôn luôn thắng. (**Gợi ý:** Áp dụng nguyên lý chuồng bồ câu)

Bài tập 41

Có bao nhiêu cách đi từ góc dưới cùng bên trái đến góc trên cùng bên phải của một lưới kích thước $n \times n$? Giả sử rằng trong mỗi bước từ một đỉnh sang đỉnh khác của lưới, bạn chỉ có thể đi sang phải một bước hoặc đi lên trên một bước



Hình: Một lưới 4×4 và ví dụ một số đường đi

Part I

Phụ lục

Nội dung

Một số lỗi thường gặp

Một số lỗi thường gặp

Chú ý

Tham khảo từ tài liệu "Common Mistakes in Discrete Mathematics" (https://highered.mheducation.com/sites/dl/free/125967651x/1106131/Common_Mistakes_in_Discrete_Math.pdf)

(a) **Vẽ sơ đồ không chính xác khi giải quyết các bài toán đếm**

- Sơ đồ rất hữu ích trong toàn bộ toán học, và việc vẽ sơ đồ hầu như luôn là cách tốt để bắt đầu giải quyết một bài toán; do đó việc không vẽ sơ đồ cũng có thể được coi là một lỗi phổ biến.
- Ví dụ, bạn nên vẽ một hàng gồm sáu ô trống (không phải năm) làm khuôn mẫu để xây dựng các từ có độ dài 6 mà các ký hiệu được chọn từ một tập hợp gồm năm phần tử. Sơ đồ cây đôi khi cũng rất hữu ích

Một số lỗi thường gặp (tiếp)

(b) **Không xác định liệu thứ tự có quan trọng hay không trong việc giải quyết bài toán đếm**

- Ví dụ, nếu chúng ta được hỏi số cách để viết 7 dưới dạng tổng các số nguyên dương, thì chúng ta cần biết liệu $3+2+2$ và $2+3+2$ có được coi là cùng một cách hay là các cách khác nhau
- Hãy đọc kỹ đề bài để hiểu rõ những gì đang được đếm. Giải quyết mọi điểm không rõ ràng bằng cách nêu rõ các giả định dường như thiếu từ đề bài

(c) **Không xác định liệu có cho phép lặp lại hay không trong việc giải quyết bài toán đếm**

- Ví dụ, nếu chúng ta được hỏi số cách để chọn năm chiếc bánh donut từ một cửa hàng bán tám loại bánh donut khác nhau, chúng ta cần biết liệu có được phép chọn nhiều hơn một bánh donut cùng loại hay không

Một số lỗi thường gặp (tiếp)

- Hãy đọc kỹ đề bài để hiểu rõ những gì đang được đếm. Giải quyết mọi điểm không rõ ràng bằng cách nêu rõ các giả định dường như thiếu từ đề bài

(d) **Đếm mỗi phần tử trong tập hợp đang xét nhiều hơn một lần, không nhận ra rằng cần phải điều chỉnh cho việc đếm hai lần**

- Ví dụ, nếu chúng ta đếm số cái bắt tay theo từng người, thì chúng ta cần nhận ra rằng mỗi cái bắt tay đã được đếm hai lần, mỗi lần cho một người tham gia

(e) **Đếm mỗi phần tử trong tập hợp đang xét nhiều hơn một lần, không nhận ra rằng cần sử dụng nguyên tắc bù-trừ (inclusion-exclusion principle)**

Một số lỗi thường gặp (tiếp)

- Ví dụ, nếu chúng ta được biết có 26 sinh viên chuyên ngành khoa học máy tính và 34 sinh viên chuyên ngành toán học tại một trường đại học, thì có thể không có $26 + 34 = 60$ người học chuyên ngành khoa học máy tính hoặc toán học, vì hai con số này có thể bao gồm cả những người học đồng thời cả hai ngành
- Để tính chính xác tổng số người học các chuyên ngành này, chúng ta cần trừ đi số lượng người học cả hai ngành từ tổng này

(f) **Sử dụng nguyên lý chuồng bồ câu hoặc nguyên lý chuồng bồ câu tổng quát không chính xác**

- Nên xác định rõ đâu là "chim bồ câu" và đâu là "chuồng"
- Ví dụ, để tìm số quân bài tối thiểu phải chọn để đảm bảo có ít nhất sáu quân bài cùng chất, các "chuồng" là các chất bài và các quân bài là các "chim bồ câu" (câu trả lời là 21).

(g) **Lỗi khi áp dụng nguyên lý bù-trừ**

Một số lỗi thường gặp (tiếp)

- Việc tin rằng $|A \cup B| = |A| + |B|$ luôn đúng liên quan đến suy nghĩ mong muốn rằng mọi phép toán đều phân phối (hoặc có hành vi đơn giản, dễ chịu nào đó) đối với mọi phép toán khác. Đẳng thức này chỉ đúng khi A và B rời nhau
- Nhầm lẫn dấu của các số hạng khi áp dụng nguyên lý bù-trừ. Lưu ý rằng các dấu thay đổi xen kẽ khi chúng ta xét hợp của càng nhiều tập hợp
- Không đưa đầy đủ các số hạng khi áp dụng nguyên lý bù-trừ. Nếu có n tập hợp được xét, thì có gần 2^n số hạng khác nhau trong phương trình