

COPYRIGHT NOTICE

THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

© 2023 Duc A. Hoang (Hoàng Anh Đức)

COPYRIGHT (English):

This document is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-SA 4.0). You are free to share and adapt this material with appropriate attribution and under the same license.

This document is not up to date and may contain several errors or outdated information.

Last revision date: 2023-02-20

BẢN QUYỀN (Tiếng Việt):

Tài liệu này được cấp phép theo Giấy phép Quốc tế Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC-BY-SA 4.0). Bạn được tự do chia sẻ và chỉnh sửa tài liệu này với điều kiện ghi nguồn phù hợp và sử dụng cùng loại giấy phép.

Tài liệu này không được cập nhật và có thể chứa nhiều lỗi hoặc thông tin cũ.

Ngày sửa đổi cuối cùng: 2023-02-20



Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Các cấu trúc cơ bản II

Dãy và Tổng

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn



Nội dung



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm
Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm
Một số công thức tổng hữu ích

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

2

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Một **dãy (sequence)** $\{a_n\}$ được xác định qua một hàm $f : I \rightarrow A$ trong đó $I \subseteq \mathbb{Z}$ và A là tập bất kỳ
 - Thông thường, $I = \mathbb{N}$ hoặc $I = \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$
 - Ví dụ, dãy $\{a_n\}$ xác định bởi $f(n) = n^2$ với mọi số nguyên $n \geq 0$ có các phần tử $0, 1, 4, 9, 16, \dots$
- Với $n \in I$, ta **sử dụng a_n để chỉ ảnh của n** , nghĩa là $a_n = f(n)$.
 - a_n là một **số hạng (term)** của dãy $\{a_n\}$
 - n là **chỉ số (index)** của a_n (thông thường, ta sử dụng i thay vì n)
- Đôi khi, thay vì ký hiệu $\{a_n\}$, có thể viết **“dãy a_1, a_2, \dots ”** để chắc chắn rằng tập các chỉ số I được xác định rõ ràng
- Có thể mô tả một dãy bằng cách liệt kê một vài phần tử đầu tiên hoặc cuối cùng của dãy và sử dụng “...” cho phần còn lại
 - Ví dụ, có thể mô tả dãy $\{a_n\}$ ở trên bằng cách viết $\{a_n\} = 0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots$

Dãy

Cấp số nhân và cấp số cộng



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

3 Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Một **cấp số nhân (geometric progression)** là một dãy có dạng

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots$$

trong đó **số hạng đầu tiên (initial term)** a và **công bội (common ratio)** r là các số thực

- Ví dụ, với $n = 0, 1, 2, \dots$

- $\{b_n\}$ với $b_n = (-1)^n$

số hạng đầu tiên 1, công bội -1

- $\{c_n\}$ với $c_n = 6 \cdot (1/3)^n$

số hạng đầu tiên 6, công bội $1/3$

- Một **cấp số cộng (arithmetic progression)** là một dãy có dạng

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$$

trong đó **số hạng đầu tiên (initial term)** a và **công sai (common difference)** d là các số thực

- Ví dụ, với $n = 0, 1, 2, \dots$

- $\{d_n\}$ với $d_n = -1 + 4n$

số hạng đầu tiên -1 , công sai 4

- $\{e_n\}$ với $e_n = 7 - 3n$

số hạng đầu tiên 7, công sai -3

Dãy

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

4

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Một **hệ thức truy hồi (recurrence relation)** cho dãy $\{a_n\}$ là một phương trình biểu diễn a_n thông qua một hoặc nhiều số hạng trước đó của dãy với mọi số nguyên n thỏa mãn $n \geq n_0$ với n_0 là một số nguyên không âm.
 - Với dãy $\{a_n\} = 0, 1, 4, 9, 16 \dots (n \geq 0)$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ với $n \geq 1$ là một hệ thức truy hồi cho $\{a_n\}$ (ở đây $n_0 = 1$)
- Để định nghĩa một dãy $\{a_n\}$ thông qua hệ thức truy hồi, ta cần thêm **các điều kiện ban đầu (initial conditions)** bằng cách **định nghĩa các phần tử trước a_{n_0}** trong dãy
 - Để định nghĩa $\{a_n\}$ qua hệ thức $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ ($n \geq 1$), ta cần thêm **điều kiện ban đầu $a_0 = 0$**
- Một dãy được gọi là một **nghiệm (solution)** của một hệ thức truy hồi nếu các số hạng của dãy thỏa mãn hệ thức đó.
- **Giải hệ thức truy hồi với các điều kiện ban đầu** nghĩa là tìm một công thức tường minh cho các số hạng trong dãy
 - Một công thức tường minh cho dãy $\{a_n\}$ định nghĩa bởi $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ với $n \geq 1$ và điều kiện ban đầu $a_0 = 0$ là $a_n = n^2$ ($n \geq 0$)

Dãy

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

5 Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

Ví dụ 1

- Dãy $\{b_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi $b_n = -b_{n-1}$ với $n \geq 1$ và điều kiện ban đầu $b_0 = 1$
 - $\{b_n\} = 1, -1, 1, -1, \dots$
- Dãy $\{s_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi $s_n = s_{n-1} - s_{n-2}$ với $n \geq 2$ và điều kiện ban đầu $s_0 = 3$ và $s_1 = 5$
 - $\{s_n\} = 3, 5, 2, -3, -5, \dots$
- **Dãy Fibonacci (Fibonacci sequence)** $\{f_n\}$ ($n \geq 0$) được định nghĩa bởi điều kiện ban đầu $f_0 = 0, f_1 = 1$ và hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ với mọi số nguyên $n \geq 2$
 - $\{f_n\} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$
- **Dãy giai thừa (factorial sequence)** $\{g_n\}$ được định nghĩa bởi điều kiện ban đầu $g_0 = 1$ và hệ thức truy hồi $g_n = ng_{n-1}$ với mọi số nguyên $n \geq 1$
 - $\{g_n\} = 1, 1, 2, 6, 24, \dots$

Dãy

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

6 Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

Ví dụ 2

Giải hệ thức truy hồi $d_n = d_{n-1} + 4$ ($n \geq 1$) với điều kiện ban đầu $d_0 = -1$

Hướng suy luận

- (1) Từ hệ thức truy hồi, ta cũng có $d_{n-1} = d_{n-2} + 4$
- (2) Thay (2) vào hệ thức ban đầu
$$d_n = (d_{n-2} + 4) + 4 = d_{n-2} + 2 \cdot 4$$
- (3) Từ hệ thức truy hồi, ta cũng có $d_{n-2} = d_{n-3} + 4$
- (4) Thay (4) vào (3), ta thu được $d_n = d_{n-3} + 3 \cdot 4$
- (5) Lặp lại quá trình trên, ta “đoán” $d_n = d_{n-r} + r \cdot 4$
- (6) Để có một công thức tường minh cho d_n , ta cần $n - r = 0$, tức là $r = n$. Khi đó d_n được biểu diễn qua d_0 đã cho trước và $n = r$.
- (7) Tóm lại, ta có $d_n = -1 + 4n$

Dãy

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

7

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

Ví dụ 3

Giải hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ ($n \geq 1$) với điều kiện ban đầu $a_0 = 0$

(1) Từ hệ thức truy hồi, ta có $a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-1) - 1$

(2) Thay vào hệ thức ban đầu,

$$a_n = (a_{n-2} + 2(n-1) - 1) + 2n - 1 = a_{n-2} + 4n - 4$$

(3) Từ hệ thức truy hồi, ta có $a_{n-2} = a_{n-3} + 2(n-2) - 1$

(4) Thay vào (2),

$$a_n = (a_{n-3} + 2(n-2) - 1) + 4n - 4 = a_{n-3} + 6n - 9$$

(5) Từ hệ thức truy hồi, ta có $a_{n-3} = a_{n-4} + 2(n-3) - 1$

(6) Thay vào (4),

$$a_n = (a_{n-4} + 2(n-3) - 1) + 6n - 9 = a_{n-4} + 8n - 16$$

(7) Lặp lại quá trình trên, ta “đoán” $a_n =$

(8) Để có một công thức tường minh cho a_n , ta cần $n - r = 0$, tức là $r = n$. Khi đó a_n được biểu diễn qua a_0 đã cho trước và $n = r$

(9) Tóm lại $a_n =$

Dãy

Tìm công thức tường minh của một dãy



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

8

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Cho trước một vài phần tử của dãy
- Yêu cầu tìm
 - một công thức tường minh của các số hạng
 - hoặc một phương thức để liệt kê các phần tử của dãy

Ví dụ 4

Số tiếp theo trong dãy có thể là bao nhiêu?

- 1, 2, 3, 4, ...
- 1, 3, 5, 7, 9, ...
- 2, 3, 5, 7, 11, ...

Ví dụ 5

Các số hạng tiếp theo có thể là bao nhiêu?

- 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4
- 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55

Dãy

Tìm công thức tường minh của một dãy



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

9

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Một phương pháp hữu ích để tìm công thức tổng quát cho các số hạng của một dãy là *so sánh các số hạng của dãy cần tìm với các số hạng của một dãy đã biết* (ví dụ như cấp số cộng, cấp số nhân, dãy số chính phương, v.v...)

Công thức	Mười số hạng đầu tiên
n^2	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...
n^3	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ...
n^4	1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000, ...
f_n	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...
2^n	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...
3^n	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, ...
$n!$	1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, ...

- Bảng Tra Cứu Dãy Số Nguyên Trực Tuyến (The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences - OEIS)

<https://oeis.org/>

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

10

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Cho **dãy** $\{a_n\}$, một số nguyên **giới hạn dưới (lower limit)** m , và một số nguyên **giới hạn trên (upper limit)** $n \geq m$. **Tổng (summation)** của các số hạng a_m, a_{m+1}, \dots, a_n có thể được viết là

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

$$\sum_{j=m}^n a_j$$

$$\sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

- Ở đây, j được gọi là **chỉ số lấy tổng (index of summation)** và được chọn hoàn toàn tùy ý

$$\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{k=m}^n a_k$$

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

11

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

- Với tập chỉ số S bất kỳ, ta có thể viết

$$\sum_{j \in S} a_j$$

- Với $\{a_n\}$ là dãy vô hạn, ta có thể viết

$$\sum_{i=j}^{\infty} a_i = a_j + a_{j+1} + \dots$$

- Tổng các giá trị của một hàm trên tập $X = \{x_1, x_2, \dots\}$

$$\sum_{x \in X} f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \dots$$

- Nếu $X = \{x \mid P(x)\}$ với vị từ $P(x)$ nào đó

$$\sum_{P(x)} f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \dots$$

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

12

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

Ví dụ 6

$$\sum_{j=1}^4 j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$$

$$\sum_{\substack{(0 \leq x \leq 10) \\ \wedge (x \text{ chẵn})}} x^2 = 0 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2$$

Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

13

- **Tổng hằng số:** Với hằng số c bất kỳ,

$$\sum_{n=i}^j c = (j - i + 1) \cdot c$$

- **Phân phối:** Với hằng số c bất kỳ,

$$\sum_{n=i}^j c f(n) = c \sum_{n=i}^j f(n)$$

- **Giao hoán:**

$$\sum_{n=i}^j (f(n) + g(n)) = \sum_{n=i}^j f(n) + \sum_{n=i}^j g(n)$$

20

Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

14

■ Đổi chỉ số:

$$\sum_{i=j}^m f(i) = \sum_{k=j+n}^{m+n} f(k-n)$$

■ Ví dụ $\sum_{i=1}^4 i^2 = \sum_{k=3}^6 (k-2)^2$ (đặt $k = i + 2$)

■ Tách tổng: Với $j \leq m < k$

$$\sum_{i=j}^k f(i) = \sum_{i=j}^m f(i) + \sum_{i=m+1}^k f(i)$$

■ Đảo thứ tự:

$$\sum_{i=0}^k f(i) = \sum_{i=0}^k f(k-i)$$

Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

15

Một số công thức tổng hữu ích

- Với $\{a_n\}$ là cấp số nhân có số hạng đầu tiên a và công bội r , tổng của $n + 1$ số hạng đầu tiên của dãy là

$$S = \sum_{i=0}^n ar^i$$

- Công thức tường minh

$$S = \sum_{i=0}^n ar^i = \begin{cases} \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} & \text{nếu } r \neq 1 \\ (n + 1)a & \text{nếu } r = 1 \end{cases}$$

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + ar^{n+1}$$

$$rS - S = ar^{n+1} - a$$

Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

16

20

$$rS = r \sum_{i=0}^n ar^i$$

$$= \sum_{i=0}^n ar^{i+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k$$

$$= \sum_{k=1}^n ar^k + \sum_{k=n+1}^{n+1} ar^k$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n ar^k + ar^0 \right) + (ar^{n+1} - ar^0)$$

$$= \sum_{k=0}^n ar^k + (ar^{n+1} - a)$$

$$= S + (ar^{n+1} - a)$$

công thức của S

phân phối

đổi chỉ số, $k = i + 1$

tách tổng

thêm và bớt $ar^0 = a$

tách tổng

công thức của S

Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

17

Một số công thức tổng hữu ích

Ví dụ 7

Tìm công thức tường minh cho tổng $T = \sum_{i=1}^n i$

$$T = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$T = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1$$

$$2T = (n + 1) \cdot n$$

Bài tập 1

Với $\{a_n\}$ là cấp số cộng có số hạng đầu tiên a và công sai d , tổng của $n + 1$ số hạng đầu tiên của dãy là

$$T = \sum_{i=0}^n (a + id)$$

Hãy tìm công thức tường minh cho T

20

Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

Ví dụ 8

Phương pháp của Gauss để tính $\sum_{i=1}^{100} i$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

Bài tập 2

Tìm công thức tường minh cho $T = \sum_{i=1}^n i$ sử dụng phương pháp

tương tự như ví dụ trên. Có thể áp dụng phương pháp tương tự cho Bài tập 1 không?

18

20

Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

Ví dụ 9

Tìm công thức tường minh của $T = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ với x là số thực thỏa

mãn $-1 < x < 1$

Ta đã chứng minh

$$\sum_{n=0}^k x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}.$$

Do $-1 < x < 1$, $x^{k+1} \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$. Ta có

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k x^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}$$

19

20

Tổng

Một số công thức tổng hữu ích



Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Dãy

Định nghĩa dãy và một số khái niệm

Một số dãy đặc biệt

Tổng

Ký hiệu tổng và một số khái niệm

Một số công thức tổng hữu ích

Tổng	Công thức tương minh
$\sum_{k=0}^n ar^k \ (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} \ (r \neq 1)$
$\sum_{k=1}^n k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^n k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^n k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \ (-1 < x < 1)$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \ (-1 < x < 1)$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

20

20