14 grudnia 2021

Laura i Hoang
Grupa 2

# Metoda siecznych wyznaczania zer wielomianu trygonometrycznego

Projekt nr 1

## 1 Opis metod

W tej sekcji opiszę metody, które wykorzystałam do rozwiązania zadania wyznaczenia miejsc zerowych wielomianu trygonometrycznego $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kt)$.

### 1.1 Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji jednej zmiennej

Zadaniem, którym się zajmuję to odnalezienie takich wartości $t \in \mathbb{R}$, że $p(t) = 0$. Dla takiej funkcji jak w treści mojego zadania, nie istnieją ogólne analityczne wzory określające jego pierwiastki na podstawie współczynników. Nie jest to możliwe w skończonej liczbie operacji arytmetycznych. Z tego powodu, możemy jedynie wyznaczyć te pierwiastki w sposób przybliżony - z pewną dokładnością, z zastosowaniem metod iteracyjnych. Polegają one na tym, że mając pewne przybliżenia początkowe $x_0 \in \mathbb{R}$, tworzymy ciąg kolejnych przybliżeń $(x_k)$, taki, że $x_k \to t$ przy $k \to \infty$.

### 1.2 Metoda siecznych

Jedną ze wspomnianych powyżej metod iteracyjnych jest metoda siecznych. W jej przypadku, potrzebujemy dwóch początkowych przybliżeń: $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ takich, że $f(x_0) \neq f(x_1)$. W k-tym kroku tej metody (gdzie $k = 1, 2, \ldots$) przez punkty $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ oraz $(x_k, f(x_k))$ prowadzimy sieczną, która przecina oś OX w pewnym punkcie, które będzie naszym kolejnym przybliżeniem, czyli $x_{k+1}$.

Sieczna ta jest wielomianem interpolacyjnym (Lagrange'a) opartym na węzłach $x_{k-1}$ i $x_k$.

Wzór iteracyjny tej metody jest następujący:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)(x_k - x_{k-1})/(f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

dla $k = 1, 2, \ldots$. Powyższy wzór to ten z metody Newtona, gdzie $f'(x_k)$ zastępujemy ilorazem różnicowym $(f(x_k) - f(x_{k-1}))/(x_k - x_{k-1})$.

## 1.3 Algorytm Goertzela

Do wyznaczania wartości funkcji $p(t)$ wykorzystałam algorytm Goertzela. Mając dany wielomian $w(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n$, gdzie $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ oraz $z = x + iy \in \mathbb{C}$, należy obliczyć $w(z)$.

Podzielmy $w(\lambda)$ przez trójmian $(\lambda - z)(\lambda - \overline{z}) = \lambda^2 - p\lambda - q$, gdzie $p = 2x$ i $q = -|z|^2$ (dla każdego $z$ sa to liczby rzeczywiste).

Możemy zapisać:

$$w(\lambda) = (\lambda - z)(\lambda - \overline{z}) \sum_{n=2}^{N} b_n \lambda^{n-2} + b_0 + b_1 \lambda$$

Stąd mamy, że $w(z) = b_0 + b_1 z$, czyli wartość wielomianu $w$ w punkcie z jest równa wartości reszty z dzielenia tego wielomianu przez trójmian $\lambda^2 - p\lambda - q$ w punkcie $z$.

Aby tym algorytmem obliczyć wartość funkcji $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kt)$, należy zastosować algorytm do wyznaczenia $w(\lambda)$, obliczając jego wartość w punkcie $z = \cos(t) + i \sin(t)$. Wówczas $p(t) = Re(w(z))$.

W uproszczeniu, możemy w algorytmie zastosować podstawienia: $x = \cos(t)$ i $y = \sin(t)$, a na końcu, nie musimy wyliczać wartości $w(z)$ - wiemy, że $Re(w(z)) = u := a_0 + xb_1 + qb_2$, więc $p(t) = a_0 + xb_1 + qb_2$. Zatem, moja wersja algorytmu Goertzela do wyznaczania wartości $p(t)$ wygląda następująco:

**Algorytm Goertzela**

$x \leftarrow \cos t$
$y \leftarrow \sin t$
$p \leftarrow 2x$
$q \leftarrow -(x^2 + y^2)$
$b_{N+1} \leftarrow 0$
$b_N \leftarrow a_N$
**for** $n = N - 1, \ldots, 1$ **do**
    $b_n \leftarrow a_n + qb_{n+1} + qb_{n+2}$
**end for**
$p(t) \leftarrow a_0 + xb_1 + qb_2$

# 2 Opis programu obliczeniowego

## 2.1 Omówienie funkcji

Do rozwiązania zadania stworzyłam 3 funkcje:

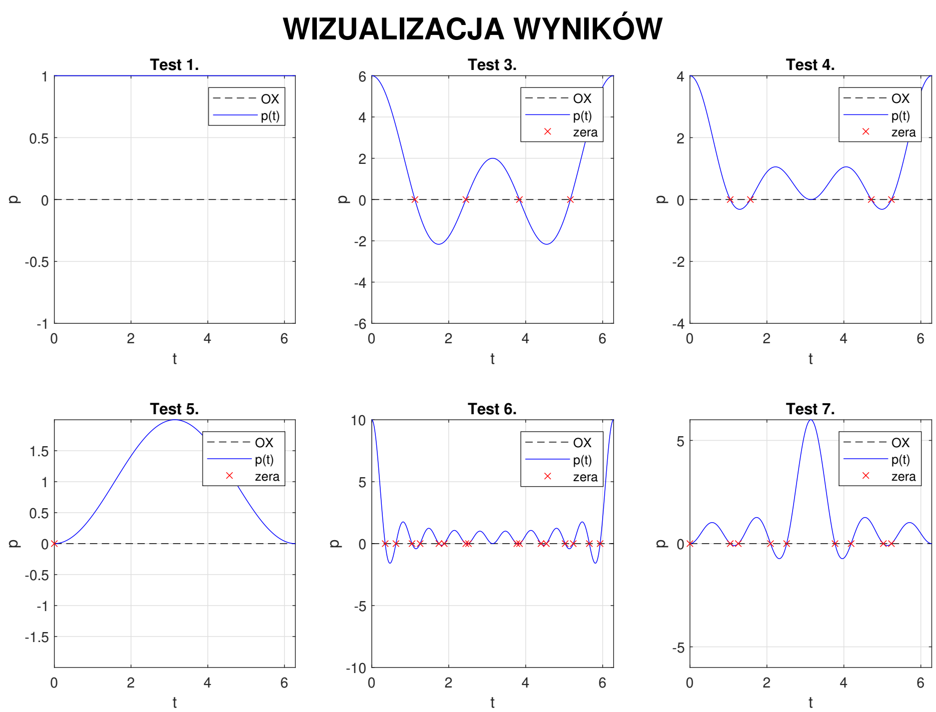
- **fun** - funkcja, która (przy pomocy algorytmu Goertzela) zwraca nam wartość $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k cos(kt)$ w punkcie $t$, z ciągiem $a = (a_0, a_1, ..., a_N)$. Dane wejściowe: t - argument, a - ciąg $(a_0, a_1, ..., a_N)$. Dane wyjściowe: pt - przybliżona wartość $p(t)$.

- **secant** - funkcja przybliżająca wartość rzeczywistego punktu zerowego ciągłej funkcji (za pomocą metody siecznych), przy zadanych przybliżeniach początkowych $x_0$ i $x_1$. Dane wejściowe: f - rozpatrywana funkcja, a - ciąg $(a_0, a_1, ..., a_N)$, x0 - pierwsze przybliżenie początkowe, x1 - drugie przybliżenie początkowe. Dane wyjściowe: found - czy znaleziono odpowiednie przybliżenie (1-tak, 0-nie), new - znalezione przybliżenie miejsca zerowego

- **zerafun** - funkcja znajdująca rzeczywiste miejsca zerowe zadanej funkcji (z wykorzystaniem funkcji secant) na przedziale $[0, 2\pi]$ [1]. Dane wejściowe: f - rozpatrywana funkcja, a - ciąg $(a_0, a_1, ..., a_N)$. Dane wyjściowe: r - wektor zawierający znalezione miejsca zerowe

Aby przetestować poprawność mojego rozwiania wygenerowałam kilka testów w pliku **testy.m** oraz stworzyłam funkcję **wizualizacja**, która tworzy nam wykresy funkcji $p(t)$ w zależności od podanego ciągu $a = (a_0, a_1, ..., a_N)$ z zaznaczonymi punktami zerowymi (które zostały znalezione za pomocą zeraFun).

Po uruchomieniu skryptu testy.m na ekranie pojawia się okienko:




Rysunek 1: Przedstawia wizualizację wyników przykładowych testów.

[1]Rozpatruję tylko ten przedział, ponieważ $p(t)$ jest zawsze funkcją okresową, której okres jest równy $2\pi$.

## 3 Przykłady obliczeniowe

W pliku testy.m zawarłam 7 przykładów:

1. $a = (1)$
2. $a = (0)$
3. $a = (1, 2, 3)$
4. $a = (1, 1, 1, 1)$
5. $a = (1, -1)$
6. $a = (a_0, a_1, \ldots, a_9) = (1, \ldots, 1)$
7. $a = (a_0, a_1, \ldots, a_5) = (1, -1, 1, -1, 1, -1)$

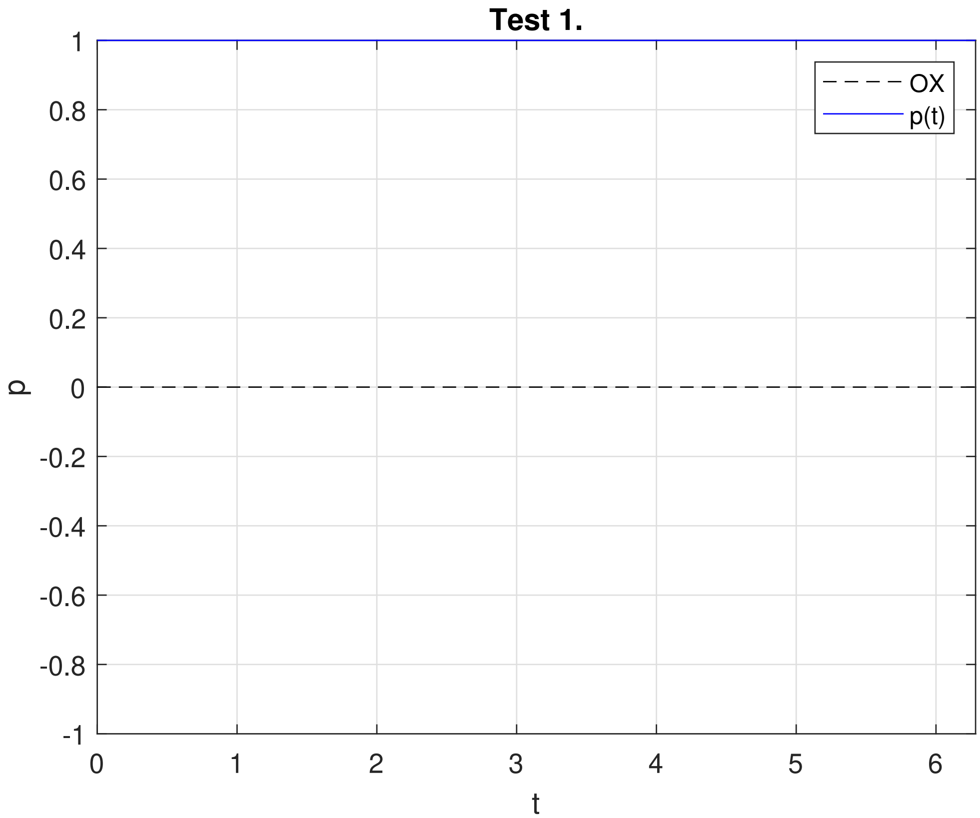
Podstawiając różne ciągi $a_{0,\ldots,N}$ do danego wzoru z zadania, otrzymujemy różne funkcje $p(t)$, dla których odnajduję miejsca zerowe. Przykładowe testy i wyniki zestawiłam poniżej, każdy z nich omówię i przeanalizuję osobno [2].

[2] Dokładność (części) z moich rozwiązań zbadam w 4. sekcji - Analiza wyników.

### 3.1 Przykład 1

$$a = (1) \Rightarrow p(t) = \cos(0) = 1$$

W tym przykładzie, funkcja $p(t)$ jest funkcją stała przyjmującą tylko wartość 1,




Rysunek 2: Przedstawia wizualizację wyniku testu 1.

zatem nie ma ona żadnych miejsc zerowych. Tak też wyszło za pomocą mojego programu - nie ma na rysunku zaznaczonych miejsc zerowych. Wynik jest więc poprawny dla tego testu.

## 3.2 Przykład 2

$$a = (0) \Rightarrow p(t) = 0$$

W tym przykładzie, funkcja $p(t)$ jest funkcją stała przyjmującą tylko wartość 0,

```
>> r = zeraFun(@fun,[0])
Index in position 2 exceeds array bounds. Index must not exceed 2.

Error in fun (line 32)
    pt = a(1) + x'.*b(:,2) + q.*b(:,3);

Error in zeraFun (line 22)
        if ( f(x0,a)*f(x1,a) <= 0 )
```

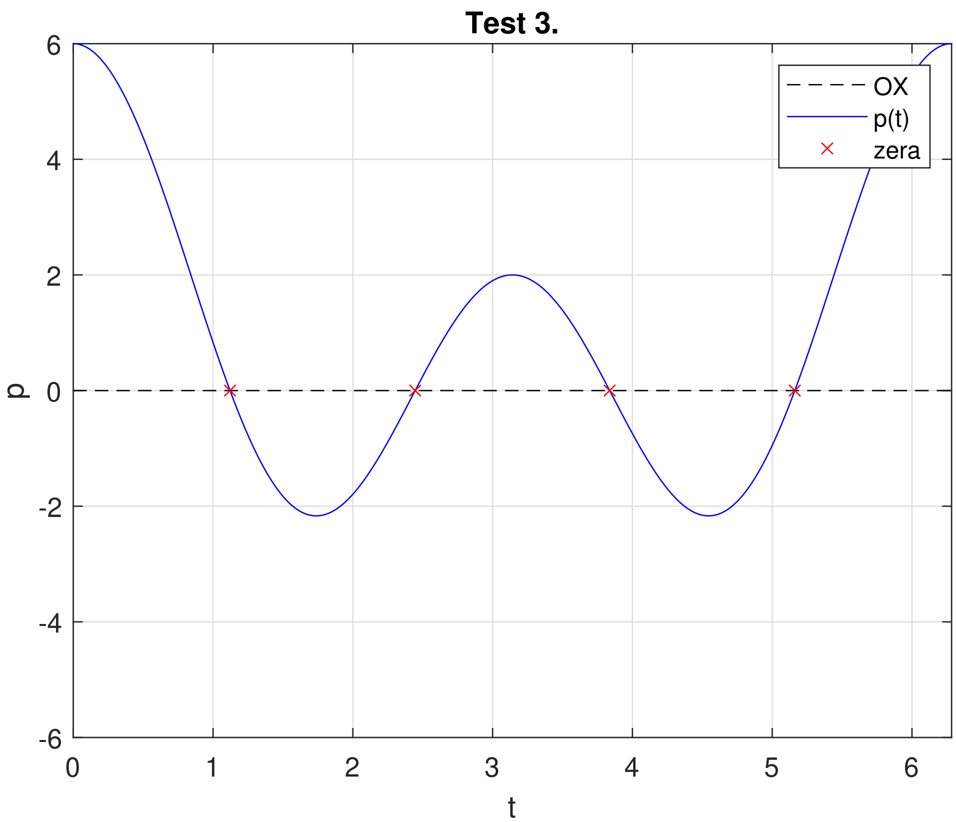
Rysunek 3: Przedstawia wynik testu 2.

czyli poniekąd ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. W tym wypadku funkcja secant (a w efekcie i zeraFun) nie zadziała - program zwróci nam błąd.

### 3.3 Przykład 3

$$a = (1, 2, 3) \Rightarrow p(t) = \cos(0) + 2\cos(t) + 3\cos(2t)$$

Dla tego przykładu, program działa poprawnie. Jak widać z wykresu,

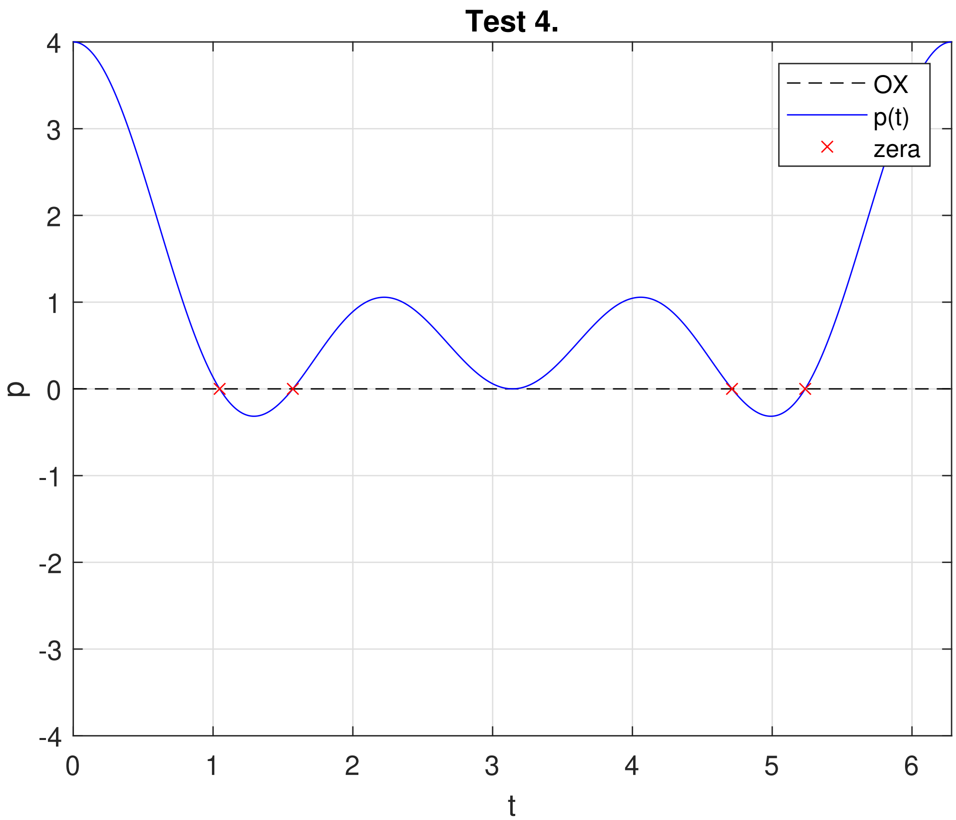



Rysunek 4: Przedstawia wizualizację wyniku testu 3.

odnalezione miejsca zerowe są blisko tych prawdziwych. Zatem wyniki wydają się być poprawne (ich dokładność zbadam później).

### 3.4 Przykład 4

$$a = (1, 1, 1, 1) \Rightarrow p(t) = \cos(0) + \cos(t) + \cos(2t) + \cos(3t)$$

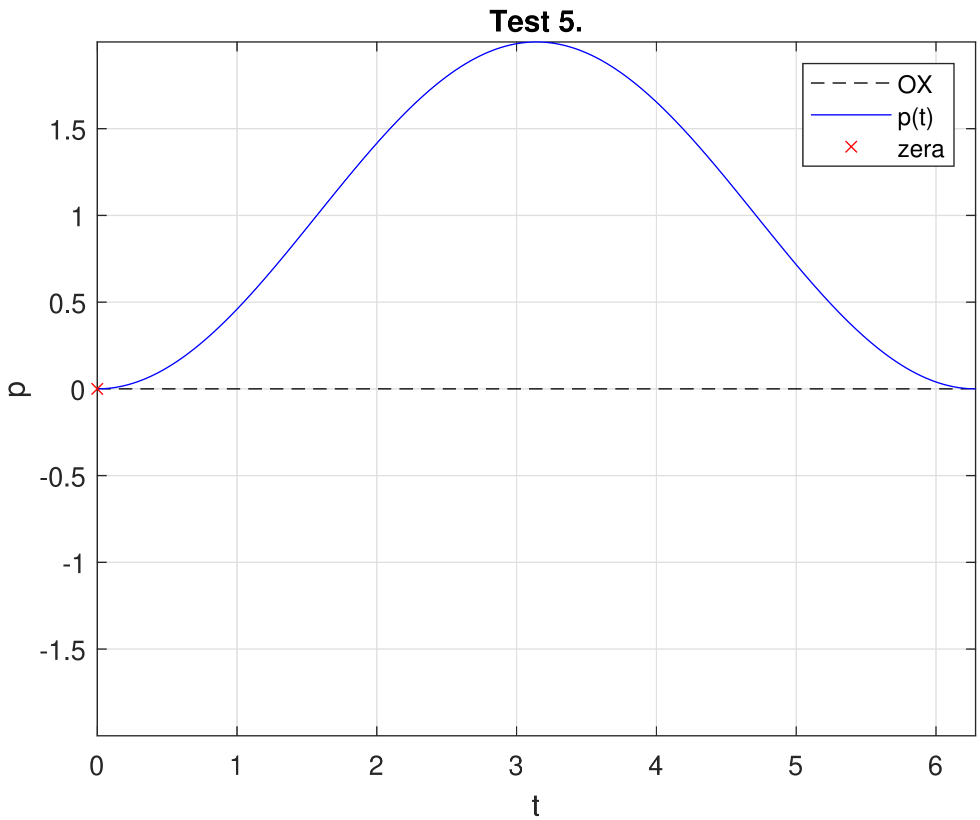



Rysunek 5: Przedstawia wizualizację wyniku testu 4.

W tym wypadku widzimy, że brakuje miejsca zerowego w $t = \pi$ - tam gdzie wykres jest styczny do OX. Poza nim, pozostałe odnalezione miejsca zerowe są jak w poprzednim przykładzie blisko prawdziwych pierwiastków $p(t)$.

### 3.5 Przykład 5

$$a = (1, -1) \Rightarrow p(t) = \cos(0) - \cos(t)$$

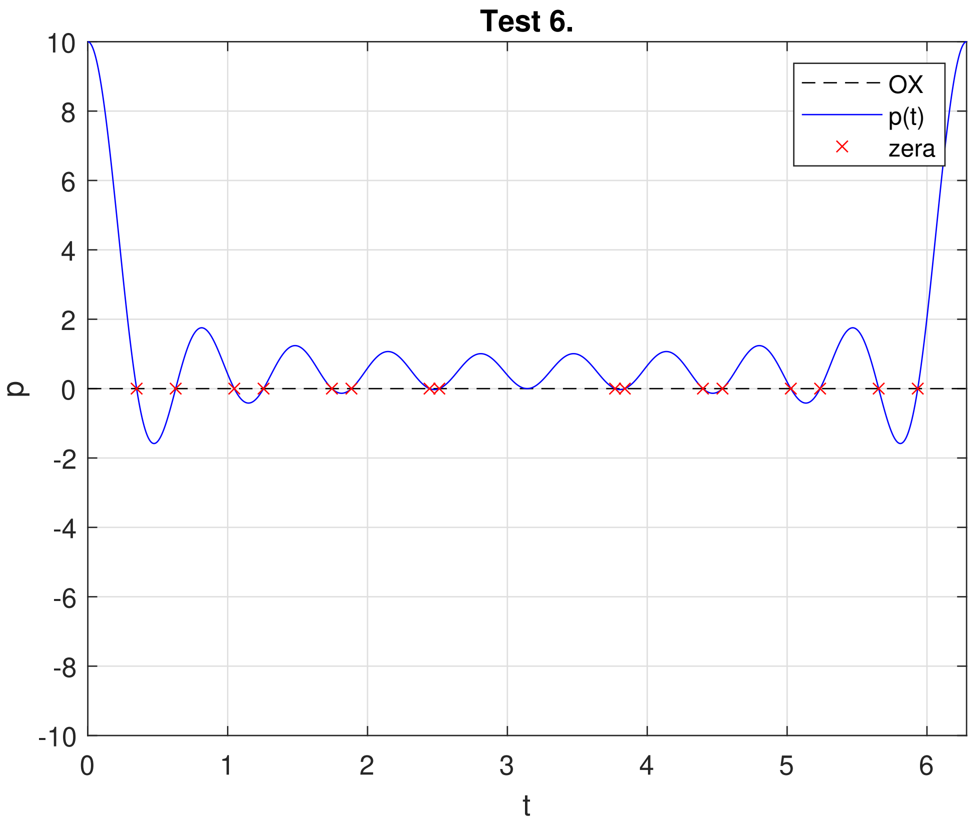



Rysunek 6: Przedstawia wizualizację wyniku testu 5.

Tutaj, podobnie jak w poprzednim przykładzie, brakuje pierwiastka w $t = 2\pi$, dla którego $p(t)$ jest styczna do OX. Jednak, pierwiastek w $t = 0$ został odnaleziony, mimo że w tym punkcie $p(t)$ też jest styczna do OX.

## 3.6 Przykład 6

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_9) = (1, \ldots, 1) \Rightarrow p(t) = \sum_{k=0}^{9} cos(kt)$$

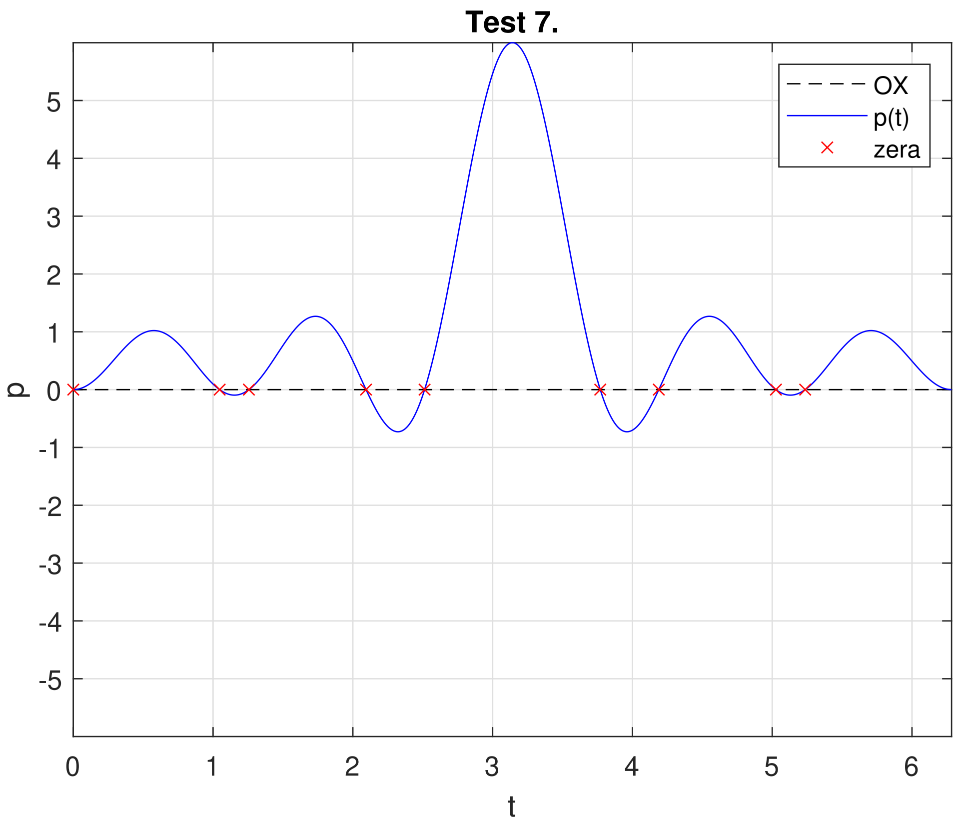



Rysunek 7: Przedstawia wizualizację wyniku testu 6.

W tym wypadku również zostały odnalezione wszystkie pierwiastki poza tym w $t = \pi$.

### 3.7 Przykład 7

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_5) = (1, -1, 1, -1, 1, -1) \Rightarrow p(t) = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \cos(kt)$$




Rysunek 8: Przedstawia wizualizację wyniku testu 7.

W tym wypadku również zostały odnalezione wszystkie pierwiastki poza tym w $t = 2\pi$.

# 4 Analiza wyników

## 4.1 Brakujące pierwiastki

Metoda działa dla wszystkich przypadków, poza tymi w których miejsce zerowe jest jednocześnie punktem styczności $p(t)$ z OX. Dlaczego tak się dzieje?
Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy lepiej przyjrzeć się metodzie siecznych do wyznaczania zer funkcji, a w szczególności jego wzorowi iteracyjnemu:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)(x_k - x_{k-1})/(f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

dla $k = 1, 2, \dots$ .

Zauważmy, że dzieląc przez iloraz różnicowy $(f(x_k) - f(x_{k-1}))/(x_k - x_{k-1})$, dokonujemy dzielenia przez różnicę $f(x_k) - f(x_{k-1})$. Zatem, dla każdego $k = 1, 2, \ldots$ musi być zachowany warunek $f(x_k) \neq f(x_{k-1})$, więc w konsekwencji, nie otrzymamy nigdy stycznej, bo kolejne punkty przez które przechodzi sieczna w tej metodzie nie mogą się ze sobą pokryć. Z tego powodu program nie odnajduje miejsc zerowych w punktach styczności z OX [3].

## 4.2 Badanie dokładności

Na koniec chciałam zbadać dokładność wyliczeń moich programów. Moje wyniki porównałam z wynikami z kalkulatora WolframAlpha (Test 3) oraz z prawdziwymi wynikami, które otrzymałam wyliczając je analitycznie [4] (Test 4).

Tabela 1: Porównanie wartości $t_k$ dla Testu 3

| k | rozwiązanie dokładne | rozwiązanie przybliżone | błąd bezwzględny |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.1216 | 1.1216 | $1.3304e-06$ |
| 2 | 2.4458 | 2.4459 | $7.1802e-05$ |
| 3 | 3.8373 | 3.8373 | $3.5055e-06$ |
| 4 | 5.1616 | 5.1616 | $3.9767e-06$ |

Tabela 2: Porównanie wartości $t_k$ dla Testu 4

| k | rozwiązanie dokładne | rozwiązanie przybliżone | błąd bezwzględny |
|---|---|---|---|
| 1 | $\pi/3 \approx 1.0472$ | 1.0472 | $4.4409e-16$ |
| 2 | $\pi/2 \approx 1.5708$ | 1.5708 | $2.2204e-16$ |
| 4 | $3\pi/2 \approx 4.7124$ | 4.7124 | $0.0000e+00$ |
| 5 | $5\pi/3 \approx 5.2360$ | 5.2360 | $6.0574e-13$ |

Jak widać, dokładność jest dosyć duża dla odnalezionych pierwiastków.

[3] W niektórych przykładach (np. 5. i 7.) program znajdywał pierwiastek w $t = 0$, działo się to dlatego, ponieważ iterację po kolejnych fragmentach dziedziny w funkcji zeraFun rozpoczynam od $x_0 = 0$.

[4] To był szczególny przypadek $p(t)$, dla którego otrzymaliśmy "ładne"wyniki.

# 5 Podsumowanie

Choć metoda siecznych nie sprawdza się przy wyliczaniu pierwiastków w punktach stycznych z OX, dla pozostałych przypadków otrzymujemy dosyć dokładne wyniki. Zatem, przy korzystaniu z tej metody trzeba zwracać uwagę na funkcję, jaką badamy (czy często występują takie pierwiastki, które opisane zostały powyżej).