CHƯƠNG 2

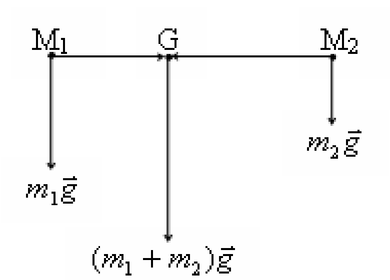
ĐỘNG LỰC HỌC HỆ CHẤT ĐIỂM – VẬT RẮN

Vật rắn là một hệ chất điểm trong đó khoảng cách giữa các chất điểm luôn không đổi. Chuyển động của vật rắn nói chung phức tạp, nhưng người ta chứng minh được rằng chuyển động bất kỳ của vật rắn là tổng hợp của hai loại chuyển động cơ bản: Chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay quanh một trục cố định

2.1. KHỐI TÂM

2.1.1. Định nghĩa

Giả sử có hệ gồm 2 chất điểm có khối lượng *m_1, m_2* đặt tại các điểm tương ứng *M_1, M_2* trong trọng trường. Trọng lực tác dụng lên các chất điểm *m_1* và *m_2* là 2 véctơ: $m_1\vec{g}$ và $m_2\vec{g}$ song song cùng chiều với nhau. Tổng hợp 2 lực này có điểm đặt tại G nằm trên phương *M_1M_2* thoả mãn điều kiện:



Hình 2-1. Khối tâm của hệ hai chất điểm

$$\frac{\overline{M_1G}}{\overline{M_2G}} = -\frac{m_2 g}{m_1 g} = -\frac{m_2}{m_1}$$

Từ đó ta suy ra:

$$m_1\overline{M_1G} + m_2\overline{M_2G} = 0$$

Ta đưa ra các vectơ nối từ các chất điểm *M_1, M_2* đến điểm *G*: $\overrightarrow{M_1G}, \overrightarrow{M_2G}$.

Khi đó có thể viết lại đẳng thức trên dưới dạng sau:

$$m_1\overrightarrow{M_1G} + m_2\overrightarrow{M_2G} = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

Điểm *G* thoả mãn (2-1) được gọi là *khối tâm* của hệ 2 chất điểm có khối lượng *m_1, m_2*.

Trường hợp tổng quát, người ta định nghĩa khối tâm của một hệ *n* chất điểm như sau: *Khối tâm của một hệ n chất điểm có khối lượng m_1, m_2 ...m_n là một điểm G được xác định bởi đẳng thức vectơ:*

$$m_1\overrightarrow{M_1G} + m_2\overrightarrow{M_2G} + ... + m_n\overrightarrow{M_nG} = 0$$

Hay có thể viết:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{M_iG} = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

Ta có thể xác định toạ độ của khối tâm G đối với một gốc toạ độ O nào đó. Toạ độ này có thể xác định theo cách sau đây đối với chất điểm thứ i (hình 2-2):

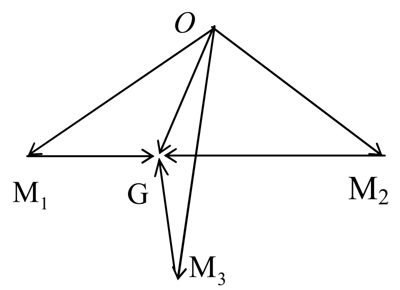
$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM_i} + \overrightarrow{M_iG} \qquad (2\text{-}3)$$

Nhân hai vế của (2-3) với m_i rồi cộng các phương trình nhận được theo vế với vế từ *1* đến n, ta được:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OM_i} + \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{M_iG}$$

Chú ý đến (2-2), đẳng thức này trở thành:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OM_i} \qquad (2\text{-}4)$$



Hình 2-2
Để xác định khối tâm
của hệ chất điểm

Từ đó, ta suy ra:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (2.5)$$

Đặt $\overrightarrow{OG} = \vec{R}$ có 3 toạ độ X,Y,Z; $\overrightarrow{OM_i} = \vec{r}_i$ có 3 toạ độ x_i, y_i, z_i, đẳng thức (2-5) trở thành:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (2\text{-}6)$$

Chiếu $\vec{R}$ lên 3 trục toạ độ, sẽ được:

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};\ Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};\ Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (2\text{-}7)$$

Các đẳng thức (2-6), (2-7) cho phép xác định được tọa độ khối tâm của một hệ chất điểm. Nhờ đó ta có thể khảo sát các tính chất của khối tâm về mặt động học và động lực học.

2.1.2. Vận tốc của khối tâm

Khi hệ chất điểm chuyển động, khối tâm có vận tốc: $\vec{V} = \dfrac{d\vec{R}}{dt}$ và theo (2-6) vận tốc này có biểu thức:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Trong đó $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$ là vectơ vận tốc của chất điểm thứ *i*. Do đó vận tốc của khối tâm của hệ chất điểm có biểu thức:

$$\vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{2-8}$$

Trong (2-8), $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{k}_i = \vec{K}$ là động lượng tổng hợp của hệ. Do đó theo (2-8) vận tốc của khối tâm có biểu thức:

$$\vec{V} = \frac{\vec{K}}{m} \tag{2-9}$$

Hay $\vec{K} = m\vec{V}$ (2-10)

Vậy: *Động lượng tổng hợp của một hệ chất điểm bằng động lượng của một chất điểm đặt tại khối tâm của hệ có khối lượng bằng khối lượng của cả hệ, có vận tốc bằng vận tốc khối tâm của hệ.*

2.1.3. Phương trình chuyển động của khối tâm

Giả sử hệ có *n* chất điểm, các chất điểm lần lượt chịu tác dụng của những lực: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n$ và chuyển động với gia tốc tương ứng: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...\vec{a}_n$ sao cho $m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1, m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2, ...m_n\vec{a}_n = \vec{F}_n$ .Từ (2-8) ta tìm được gia tốc của khối tâm:

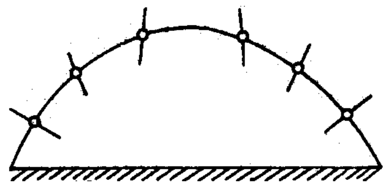
$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{2-11}$$

Hay $\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

Hay $\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ (2-12)

Phương trình (2-12) giống như phương trình chuyển động của một chất điểm. Từ đó ta kết luận:

Chuyển động của khối tâm của một hệ chất điểm giống như chuyển động của một chất điểm mang khối lượng bằng tổng khối lượng của cả hệ và chịu tác dụng của một lực bằng tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên hệ.



Hình 2-3
Chuyển động toàn thể của cây thước trong trọng tường

Chuyển động khối tâm của một hệ được gọi là *chuyển động toàn thể* của hệ. Ví dụ ném một cái thước lên cao, khối tâm của nó sẽ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng của thước chịu tác dụng của lực bằng tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên thước (ở đây là trọng lực). Đó chính là chuyển động của chất điểm trong trọng trường đều. Quỹ đạo là một parabol (xem hình 2-3).

2.2. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN ĐỘNG LƯỢNG

2.2.1. Định luật bảo toàn động lượng

Đối với một hệ chất điểm chuyển động, áp dụng định luật Newton *II* cho các chất điểm, ta có: $m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1, m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2, ... m_n\vec{a}_n = \vec{F}_n$. Từ các phương trình đó, ta suy ra phương trình của cả hệ:

Theo định lý về động lượng :

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n\right) = \vec{F}$$

Trong đó $\vec{F}$ là tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên hệ (tổng hợp các nội lực tương tác giữa các chất điểm của hệ bằng không). Nếu hệ là cô lập, $\vec{F} = 0$, thì:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n\right) = 0 \quad hay\ m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n = \overrightarrow{const} \qquad (2\text{-}13)$$

Định luật: Động lượng tổng hợp của một hệ cô lập luôn luôn được bảo toàn.

Mặt khác ta biết rằng vận tốc chuyển động khối tâm của hệ :

$$\vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Vậy đối với hệ chất điểm cô lập:

$$\vec{V} = \overrightarrow{const}$$

Khối tâm của hệ chất điểm cô lập đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

2.2.2. Bảo toàn động lượng theo một phương

Trong trường hợp một hệ chất điểm không cô lập nhưng hình chiếu của $\vec{F}$ lên một phương *x* nào đó luôn luôn bằng không thì nếu chiếu phương trình vectơ:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n\right) = \vec{F}$$

lên phương *x,* ta được:

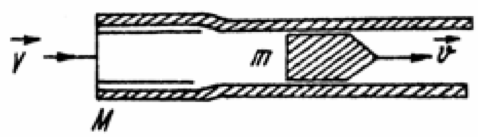
$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + ... + m_n v_{nx} = const \qquad (2\text{-}14)$$

Khi đó hình chiếu của vectơ động lượng tổng hợp của hệ lên phương Ox luôn luôn được bảo toàn.

Nếu tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên hệ chất điểm triệt tiêu thì vectơ động lượng tổng hợp của hệ cũng được bảo toàn.

2.2.3.Ứng dụng định luật bảo toàn động lượng

a. Giải thích hiện tượng súng giật lùi khi bắn



Hình.2-4
Súng giật lùi khi bắn

Giả sử có một khẩu súng khối lượng *M* đặt trên giá nằm ngang. Trong nòng có một viên đạn khối lượng *m*. Nếu bỏ qua lực ma sát thì tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên hệ (gồm súng và đạn) theo phương ngang bằng không. Do đó *tổng động lượng của hệ theo phương ngang được bảo toàn.* Trước khi bắn, động lượng của hệ bằng không. Khi bắn, đạn bay về phía trước với vận tốc $\vec{v}$, súng giật lùi về phía sau với vận tốc $\vec{V}$. Vì động lượng bảo toàn nên động lượng của hệ sau khi bắn sẽ là sẽ là:

$$m\vec{v} + M\vec{V} = 0$$

Do đó $\vec{V} = -\dfrac{m\vec{v}}{M}$ (2-15)

dấu trừ chứng tỏ $\vec{V}$ ngược chiều với $\vec{v}$. Nếu khối lượng M của súng càng lớn thì vận tốc giật lùi của nó càng nhỏ.

b. Chuyển động phản lực

Ta có thể vận dụng định luật Newton III và định luật bảo toàn động lượng để giải thích chuyển động phản lực của tên lửa.

Giả sử có một vật chứa một hỗn hợp khí nóng, ban đầu đứng yên. Nếu hỗn hợp khí phụt ra phía sau thì theo định luật bảo toàn động lượng, vật sẽ tiến về phía trước. Đó là nguyên tắc chuyển động của tên lửa.

Ta gọi khối lượng tổng cộng ban đầu của hệ tên lửa là M_o, đứng yên đối với hệ qui chiếu đã chọn. Trong quá trình chuyển động, tên lửa luôn phụt khí nóng ra phía sau, do đó khối lượng của nó giảm dần, vận tốc tăng dần. Ta gọi khối lượng của tên lửa tại thời điểm *t* là *M*, vận tốc của nó là $\vec{v}$. Động lượng của tên lửa lúc đó là $\vec{K}_1 = M\vec{v}$. Qua một khoảng thời gian *dt*, tên lửa phụt ra sau một khối lượng khí là dM_1.

Nếu vận tốc phụt khí đối với tên lửa luôn luôn không đổi và bằng $\vec{u}$ thì vận tốc phụt khí đối với hệ qui chiếu đang quan sát bằng $(\vec{u}+\vec{v})$ và động lượng của khối khí phụt ra là $dM_1(\vec{u}+\vec{v})$. Sau khi phụt khí một lượng dM_1, khối lượng của hệ tên lửa còn bằng $M-dM_1$, vận tốc của nó tăng lên thành $\vec{v}+d\vec{v}$. Đặt $dM_1 = -dM$ là độ giảm khối lượng hệ tên lửa. Vậy động lượng của tên lửa sau khi phụt khí là $(M+dM)(\vec{v}+d\vec{v})$. Động lượng của hệ sau khi phụt khí (ở thời điểm $t' = t+dt$) là:

$$\vec{K}_2 = -dM(\vec{u}+\vec{v}) + (M+dM)(\vec{v}+d\vec{v}) \qquad \text{(với } dM_1 = -dM\text{)}$$

Bỏ qua lực cản tác dụng lên phương chuyển động của tên lửa, theo định luật bảo toàn động lượng:

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_2$$

ta suy ra:

$$-dM(\vec{u}+\vec{v}) + (M+dM)(\vec{v}+d\vec{v}) = M\vec{v}$$

Khai triển các phép tính, bỏ qua số hạng vô cùng nhỏ bậc hai $-dM.d\vec{v}$, ta được:

$$Md\vec{v} = dM\vec{u}\,.$$

Chọn chiều chuyển động làm chiều dương, chiếu các vectơ lên phương chuyển động, ta được:

$$Mdv = -udM \quad (d\vec{v} \text{ và } \vec{u} \text{ ngược chiều nhau})$$

Ta suy ra:

$$dv = -u\frac{dM}{M}$$

Tích phân hai vế của phương trình trên từ lúc đầu có vận tốc bằng không, khối lượng M_o đến lúc có vận tốc *v*, khối lượng *M*, ta được:

$$v = u\ln\frac{M_0}{M} \tag{2-16}$$

Công thức (2-16) được gọi là công thức Xiôncôpxki. Theo công thức này, muốn cho vận tốc của tên lửa lớn thì vận tốc phụt khói *u* phải lớn và tỷ số M_o/M cũng phải lớn.

2.3. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN

Như đã định nghĩa, vật rắn là một hệ chất điểm mà trong đó khoảng cách giữa các chất điểm luôn luôn không đổi. Chuyển động của vật rắn nói chung phức tạp, nhưng người ta chứng minh được rằng mọi chuyển động của vật rắn bao giờ cũng có thể qui về tổng hợp của hai dạng chuyển động cơ bản: chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay. Sau đây ta sẽ xét riêng các dạng chuyển động đó.

2.3.1. Chuyển động của vật rắn

1. Chuyển động tịnh tiến

Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến mọi chất điểm của nó chuyển động theo những quỹ đạo giống nhau; tại mỗi thời điểm các chất điểm của vật rắn tịnh tiến đều có cùng véc tơ vận tốc và véc tơ gia tốc. Ví dụ: Chuyển động của ngăn kéo của bàn giấy, chuyển động của bàn đạp xe đạp….

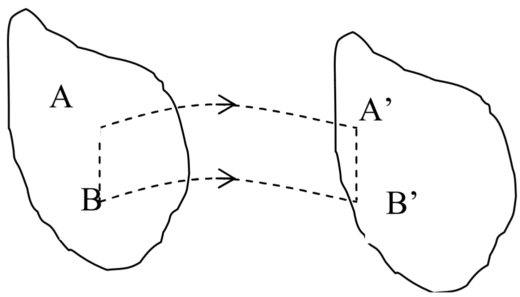
Giả sử các chất điểm có khối lượng $m_1, m_2, ..., m_n$ chịu tác dụng bởi các ngoại lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n$, khi đó các chất điểm của vật rắn sẽ có gia tốc $\vec{a}$ tuân theo định luật Newton II:

$$m_1\vec{a} = \vec{F}_1$$
$$m_2\vec{a} = \vec{F}_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_i\vec{a} = \vec{F}_i$$

Cộng vế với vế các phương trình trên ta được:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \qquad (2\text{-}17)$$

Trong đó, $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \vec{F}$ là tổng hợp tất cả các ngoại lực tác dụng lên vật rắn.Tổng hợp tất cả các nội lực triệt tiêu nhau; $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ là khối lượng của cả vật rắn.



Hình 2-5
Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

Phương trình (2-17) là phương trình động lực học của *vật rắn chuyển động tịnh tiến*; nó giống như phương trình chuyển động của một chất điểm có khối lượng *m* bằng khối lượng của cả vật rắn và chịu tác dụng một lực bằng tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên vật rắn. Như vậy, các kết quả nghiên cứu chuyển động của chất điểm có thể áp dụng cho vật rắn chuyển động tịnh tiến.

2. Chuyển động quay

Khi một vật rắn chuyển động quay xung quanh một trục Δ thì:

- Mọi điểm của vật rắn sẽ có qũy đạo tròn, các đường tròn quỹ đạo của chúng có cùng trục, trục này trùng với trục quay *Δ* và có tâm nằm trên trục quay *Δ*, có bán kính r khác nhau

- Trong cùng một khoảng thời gian *Δt*, bán kính của mọi điểm của vật rắn đều quay được một góc như nhau.

- Mọi điểm của vật rắn có cùng vận tốc góc $\vec{\omega}$ và gia tốc góc $\vec{\beta}$.

- Tại mỗi thời điểm, vectơ vận tốc dài và gia tốc tiếp tuyến của một chất điểm bất kỳ của vật rắn cách trục quay một đoạn *r* liên hệ với vận tốc góc và gia tốc góc bởi các hệ thức:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\beta} \wedge \vec{r}$$

Sau đây ta sẽ xét chuyển động quay của vật rắn về mặt *động lực học* và thiết lập phương trình động lực học cơ bản của vật rắn quay quanh một trục cố định. Các đại lượng đặc trưng cho chuyển động quay của vật rắn về mặt động lực học là: *mômen lực, mômen động lượng và mômen quán tính.*

2.3.2. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quanh trục quay cố định

1. Mômen lực tác dụng lên vật rắn quay

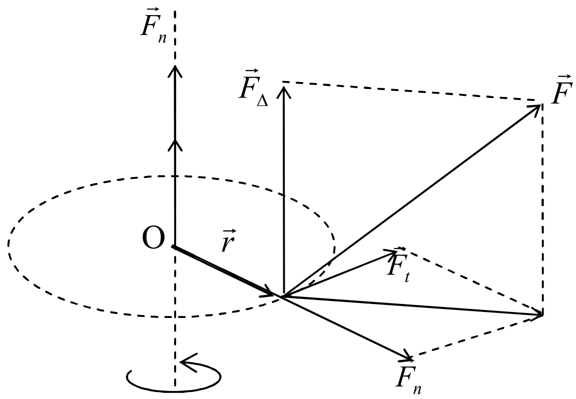
Giả sử có một vật rắn quay xung quanh một trục cố định *Δ* dưới tác dụng của ngoại lực $\vec{F}$.

Khi đó điểm đặt của lực $\vec{F}$ vạch một quỹ đạo tròn bán kính r nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục *Δ*, có tâm nằm trên trục này, và có thể phân tích lực $\vec{F}$ thành 3 thành phần (hình 2-6) $\vec{F}_t, \vec{F}_n, \vec{F}_\Delta$ sao cho:

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n + \vec{F}_\Delta$$

trong đó:

$\vec{F}_t$: thành phần tiếp tuyến vuông góc với bán kính $\vec{r}$ tức là cùng phương với tiếp tuyến của quỹ đạo, và cùng phương với vectơ vận tốc $\vec{v}$ tại điểm đó, nằm trong mặt phẳng quỹ đạo vuông góc với trục quay *Δ* . Lực này có tác dụng làm cho vật quay quanh trục quay *Δ*.



Hình 2-6

Phân tích lực $\vec{F}$ thành 3 thành phần

$\vec{F}_n$: thành phần xuyên trục cùng phương với bán kính $\vec{r}$ tại điểm đặt lực, nằm trong mặt phẳng quỹ đạo. Thành phần này chỉ có tác dụng kéo vật rắn dời khỏi trục *Δ*.

$\vec{F}_\Delta$: Thành phần song song với trục quay Δ không gây ra chuyển động quay, chỉ làm cho vật trượt dọc theo trục quay.

Như vậy: *Tác dụng của lực $\vec{F}$ làm cho vật rắn quay quanh trục cố định Δ chỉ tương đương với tác dụng của thành phần tiếp tuyến $\vec{F}_t$ của lực này.*

Mặt khác, thực nghiệm chứng tỏ rằng tác dụng của lực $\vec{F}$ làm vật rắn quay quanh trục Δ còn phụ thuộc vào khoảng cách r = OM từ điểm đặt M của lực đến trục Δ. Do đó, để đặc trưng cho tác dụng của lực $\vec{F}$, trong chuyển động quay của vật rắn quanh trục Δ, người ta đưa ra đại lượng vật lý gọi là mômen lực $\vec{M}$ đối với trục quay Δ. Vectơ mômen lực được định nghĩa:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}_t \tag{2-18}$$

Mômen lực $\vec{M}$ có phương vuông góc với mặt phẳng chứa $\vec{r}$ và $\vec{F}_t$ nghĩa là phương của trục quay, có chiều thuận đối với chiều quay từ $\vec{r}$ sang $\vec{F}_t$, có trị số:

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right|.\left|\vec{F}_t\right| \sin\left(\vec{r}, \vec{F}_t\right)$$

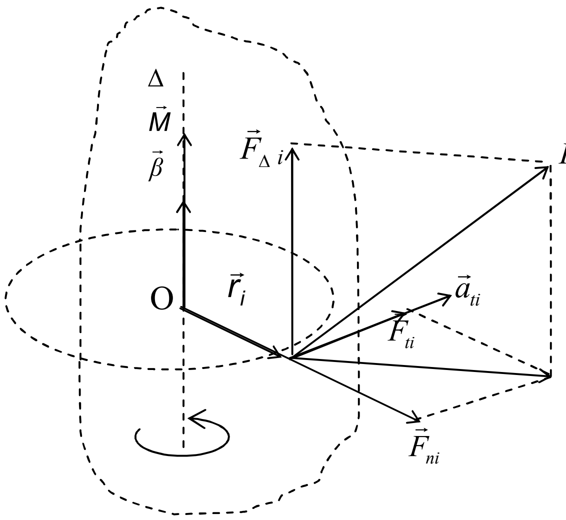
Chú ý: $\vec{M}$ = 0 khi $\vec{F}$ =0 hoặc khi $\vec{F}$ đồng phẳng với trục quay Δ, nghĩa là khi $\vec{F} /\!/ \Delta$ ($\vec{F}_t$ =0), hoặc $\vec{F}$ cắt trục Δ (r=0).

Đơn vị đo của mômen lực là *Newton.met (N.m).*

2. Phương trình cơ bản của động lực học vật rắn quay quanh một trục cố định

Ta xét một vật rắn chịu tác dụng của mômen lực $\vec{M}$, quay quanh trục cố định Δ với gia tốc góc $\vec{\beta}$ (Hình 2-7). Ta tìm mối liên hệ giữa $\vec{\beta}$ và $\vec{M}$.

Ta tưởng tượng chia vật rắn thành nhiều phần tử, mỗi phần tử có khối lượng m_i, cách trục quay một khoảng r_i, chịu tác dụng của ngoại lực tiếp tuyến $\vec{F}_{ti}$. *Khi đó có thể coi mỗi phần tử là một chất điểm,* khoảng cách giữa các chất điểm luôn luôn không đổi. Mỗi chất điểm sẽ vạch nên một quĩ đạo tròn bán kính r_i nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay Δ, có gia tốc tiếp tuyến $\vec{a}_{ti}$. Theo định luật Newton II, ta viết được:



Hình 2-7

Minh hoạ việc lập phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn

$$m_i\vec{a}_{ti} = \vec{F}_{ti}$$

Nhân hữu hướng bên trái của (4-17) với $\vec{r}_i$ và thay $\vec{a}_{ti}=\vec{\beta}\wedge\vec{r}_i$, ta được:

$$m_i.\vec{r}_i \wedge (\vec{\beta}\wedge\vec{r}_i) = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ti} \qquad (2\text{-}19)$$

Với chú ý là tích vô hướng $\vec{r}_i.\vec{\beta} = 0$ vì $\vec{r}_i$ và β vuông góc nhau, vế trái của (2-19) sẽ bằng:

$$m_i.\vec{r}_i \wedge (\vec{\beta}\wedge\vec{r}_i) = m_i\left\{\vec{\beta}(\vec{r}_i.\vec{r}) - \vec{r}_i(\vec{r}_i.\vec{\beta})\right\} = m_i r_i^2.\vec{\beta}$$

Vế phải của (2-19) sẽ bằng:

$$\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ti} = \vec{M}_i$$

Vậy (2-19) sẽ trở thành:

$$m_i r_i^2\vec{\beta} = \vec{M}_i \qquad (2\text{-}20)$$

Cộng các phương trình của (2-20) vế với vế theo i (tức là cộng theo tất cả các chất điểm của vật rắn) ta được:

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i r_i^2)\vec{\beta} = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}$$

$$\text{hay:} \qquad I\vec{\beta} = \vec{M} \qquad (2\text{-}21)$$

Trong đó, $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i = \vec{M}$ là mômen tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên vật rắn. Và đại lượng $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ là tổng mômen quán tính của mọi phần tử m_i đối với trục quay Δ và được gọi là *mômen* quán tính của vật rắn đối với trục quay Δ.

Trong hệ SI, đơn vị đo mômen quán tính I là kg.m².

Phương trình (2-21) được gọi là *phương trình cơ bản của động lực học vật rắn quay quanh một trục cố định. Từ* (2-21) ta suy ra:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{M}}{I} \qquad (2\text{-}22)$$

Phương trình (2-21) có dạng tương tự phương trình cơ bản của động lực học vật rắn chuyển động tịnh tiến $m\vec{a} = \vec{F}$, trong đó:

- Mômen lực $\vec{M}$, đặc trưng cho tác dụng của ngoại lực lên vật rắn chuyển động quay, có vai trò giống như lực $\vec{F}$,

- Gia tốc góc $\vec{\beta}$ đặc trưng cho biến thiên trạng thái của vật rắn chuyển động quay, có vai trò giống như gia tốc $\vec{a}$,

- Mômen quán tính *I* đặc trưng cho quán tính của vật rắn chuyển động quay, đóng vai trò như khối lượng *m*. Thật vậy, cùng mômen lực $\vec{M}$ tác dụng, nếu mômen quán tính I càng lớn thì gia tốc góc $\vec{\beta}$ càng nhỏ, vận tốc góc $\vec{\omega}$ càng ít biến đổi, nghĩa là trạng thái chuyển động quay của vật rắn càng ít thay đổi.

c. Tính mômen quán tính của vật rắn quay

Trường hợp chung

Mômen quá tính *I* của vật rắn quay quanh trục cố định *Δ* được tính theo công thức

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Trong đó $m_i r_i^2$ là mômen quán tính của chất điểm thứ *i* đối với trục *Δ*, phép cộng lấy cho các chất điểm của vật rắn. Nếu khối lượng của vật phân bố liên tục trong toàn thể tích của nó, ta chia vật thành những phần tử có khối lượng vô cùng nhỏ *dm*, khi đó phép cộng trong tổng trở thành phép lấy tích phân cho toàn vật rắn:

$$I = \int_{\text{cả vật}} r^2 dm \qquad (2\text{-}23)$$

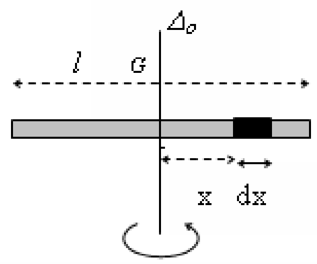
d. Mômen quán tính của vật rắn đối với trục đối xứng

Trường hợp vật rắn quay quanh trục đối xứng, ta có thể tính mômen quán tính của nó một cách thuận lợi.

Ví dụ 1. Tính mômen quán tính của một thanh đồng chất chiều dài ℓ, khối lượng *m* đối với trục quay Δ_o đi qua trung điểm G của thanh và vuông góc với thanh (Hình 2-8).

Ta xét một phần tử của thanh khối lượng *dm*, dài *dx*, cách *G* một đoạn *x*. Khi đó mômen quán tính của *dm* đối với trục Δ_o là

$$dI = x^2.dm$$



Hình 2-8. Minh hoạ việc tính mômen quán tính của thanh thẳng

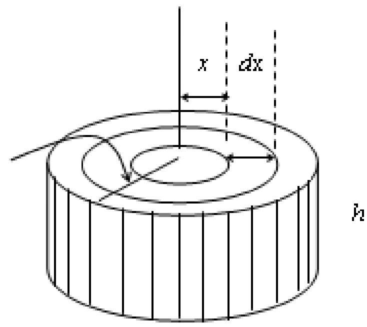
Vì thanh đồng chất nên khối lượng của một đơn vị dài là $\frac{m}{\ell}$. Khối lượng của dm là:

$$dm = \frac{m}{\ell}dx. \qquad \text{Do đó } dI = \frac{m}{\ell}x^2 dx$$

Để có I_o của cả thanh, ta lấy tích phân:

$$I_0 = \int_{\text{cả vật}} \mathrm{dI} = \int_{\text{cả vật}} \frac{\mathrm{m}}{\ell} x^2 dx$$

$$I_0 = \frac{ml^2}{12} \qquad (2\text{-}24)$$



Hình 2-9
Để tính mômen quán tính
của khối trụ đặc

Ví dụ 2. Tính mômen quán tính của khối trụ đặc đồng chất khối lượng *m*, bán kính *R,* quay quanh trục đối xứng Δ_o của khối trụ đó.

Ta chia khối trụ đặc thành nhiều phần tử có đáy *dS* là hình vành khăn bán kính *x* rộng *dx,* cao *h*. Mỗi phần tử có thể tích *dV* và có khối lượng *dm* (hình 2-9):

$$dm = \rho dV = \rho h 2\pi x dx_o$$

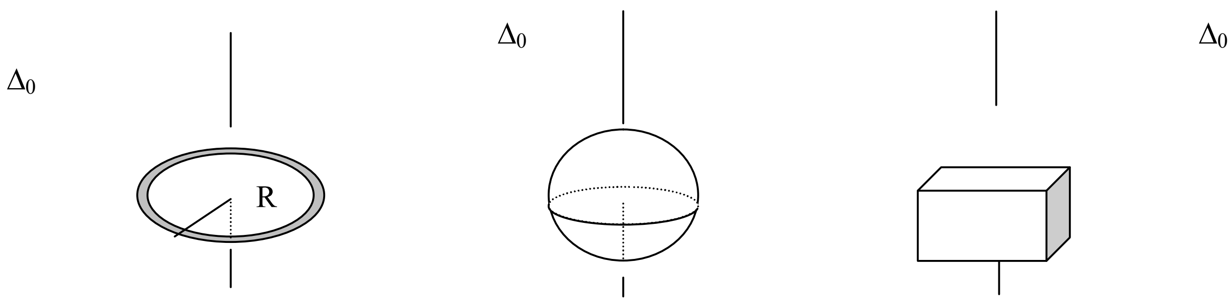
Thay vào (2-23) và thực hiện phép lấy tích phân ta được : $I_0 = \int_0^R \rho h 2\pi x^3 dx = \rho h \frac{\pi R^4}{2}$

$$\mathrm{I}_0 = \frac{mR^2}{2}, \qquad (2\text{-}25)$$

Trong đó, $m = \rho V = \rho h\pi R^2$ là khối lượng của hình trụ đặc. Kết quả cho thấy mômen quán tính của hình trụ đặc không phụ thuộc vào chiều cao *h* của khối trụ. Do đó, công thức (2-25) cũng áp dụng được cho đĩa tròn mỏng đồng chất có khối lượng *m,* bán kính *R.*

Bằng cách tương tự, ta tính được I_o cho các trường hợp khác.Cụ thể là:

- Vành tròn rỗng, trụ rỗng $I_o = mR^2$ (hình 2-10a)
- Khối cầu $I_0 = \frac{2}{5} mR^2$ (hình 2-10b)
- Tấm phẳng chữ nhật $I_0 = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right)$ (hình 2-10c)



a) vành tròn rỗng b) khối cầu c) mặt chữ nhật

Hình 2-10

e. Định lý Steiner-Huyghens

Nhiều trường hợp ta phải tìm mômen quán tính I đối với một trục quay bất kỳ, không trùng với trục đối xứng. Trong trường hợp trục quay Δ song song với trục đối xứng ta có thể áp dụng định lý Steiner- Huyghens như sau: *Mômen quán tính I của vật rắn đối với một trục Δ song song với trục đối xứng Δ_o bằng mômen quán tính của vật đối với trục đối xứng Δ_o cộng với tích khối lượng m của vật với bình phương khoảng cách d giữa hai trục đó:*

$$I = I_o + md^2 \tag{2-26}$$

Thí dụ. Mômen quán tính của một đĩa tròn đối với trục Δ đi qua mép đĩa và song song với trục đối xứng Δ_o đi qua khối tâm là:

$$\mathrm{I} = \frac{mR^2}{2} + mR^2$$

Định lý trên có thể chứng minh được, nhưng ta chỉ công nhận mà không chứng minh.

2.4. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

2.4.1. Mômen động lượng của hệ chất điểm

1. Định nghĩa

Xét hệ chất điểm $M_1, M_2, ..., M_n$, có khối lượng lần lượt $m_1, m_2, ... m_n$ và chuyển động với vận tốc $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ đối với một hệ qui chiếu gốc O. Tại thời điểm t vị trí những chất điểm ấy xác định bởi các véc tơ bán kính $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$

Mômen động lượng của hệ đối với điểm O là:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

Nếu hệ chất điểm quay xung quanh trục quay cố định Δ thì mômen động lượng của hệ đối với trục quay Δ:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} I_i \vec{\omega}_i \tag{2-27}$$

Trường hợp vật rắn quay xung quanh trục quay cố định Δ khi đó mọi chất điểm của vật rắn quay có cùng vận tốc góc: $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = ... = \vec{\omega}_n = \vec{\omega}$

Vậy:

$$\vec{L} = \left(\sum_{i=1}^{n} I_i \right) \vec{\omega} = I \vec{\omega} \tag{2-28}$$

Trong đó I là mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay Δ.

2. Định lý về mômen động lượng của hệ chất điểm

Định lý về mômen động lượng của chất điểm m_i:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_{/O(\vec{F}_i)}$$

Cộng các phương trình trên theo i ta được:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{/O(\vec{F}_i)}$$

Trong đó: $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt}\right) = \frac{d\vec{L}}{dt}$ là đạo hàm theo thời gian của tổng mômen động lượng của hệ

$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{/O(\vec{F}_i)} = \vec{M}$ là tổng mômen đối với điểm O của các ngoại lực tác dụng lên hệ.

Do đó:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (2\text{-}29)$$

Định lí: *Đạo hàm theo thời gian của mômen động lượng của một hệ bằng tổng mômen ngoại lực tác dụng lên hệ (đối với điểm O).*

Trường hợp riêng: Hệ chất điểm là vật rắn quay xung quanh trục quay cố định Δ

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Định lý về mômen động lượng có thể viết:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{M} \qquad (2\text{-}30)$$

Trong đó $\vec{M}$ là tổng mômen ngoại lực tác dụng lên vật rắn.

Để tìm độ biến thiên mômen động lượng $\Delta\vec{L} = \vec{L} - \vec{L}$ trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 ta thực hiện phép tích phân đối với (2-30), và được:

$$\Delta\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt \qquad (2\text{-}31)$$

"Độ biến thiên mômen động lượng của vât rắn quay quanh một trục cố định trong khoảng thời gian $\Delta t = t_2 - t_1$ bằng xung lượng của vectơ mômen động lượng tổng hợp của các ngoại lực tác dụng lên vật rắn trong cùng khoảng thời gian đó".

Nếu $\vec{M} = \overrightarrow{const}$ thì ta được:

$$\Delta\vec{L} = \vec{M}.\Delta t \tag{2-32}$$

2.4.2. Định luật bảo toàn mômen động lượng

1. Định luật

Gỉa sử có hệ chất điểm không chịu tác dụng của ngoại lực hoặc có chịu tác dụng của ngoại lực nhưng tổng mômen của ngoại lực ấy đối với điểm O bằng không. Khi đó định lý về mômen động lượng:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0$$

Nghĩa là:

$$\vec{L} = \overrightarrow{const}$$

Định luật: Vậy tổng mômen động lượng của hệ chất điểm được bảo toàn khi hệ là:

* Hệ cô lập

* Hệ chịu tác dụng của ngoại lực sao cho tổng mômen ngoại lực đối với điểm O bằng không

Trường hợp vật rắn quay xung quanh trục quay cố định:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \vec{M}$$

Khi $\vec{M} = 0$ thì:

$$\vec{L} = \overrightarrow{const}$$

2. Thí dụ về bảo toàn mômen động lượng

** Vật rắn quay xung quanh một trục có mômen I thay đổi*

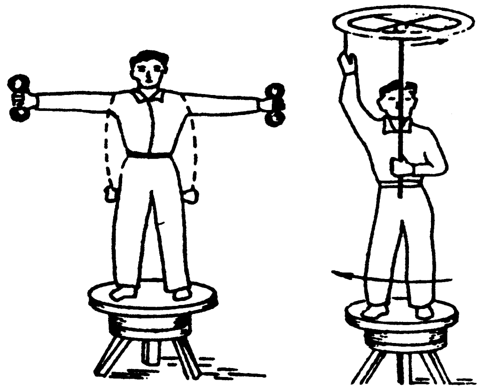
Trong một số trường hợp, một số phần của vật rắn dịch chuyển đối với nhau nên mômen quán tính của vật thay đổi, nhưng nếu mômen ngoại lực tác dụng lên vật rắn quay quanh một trục bằng không ($\vec{M} = 0$) thì dù *I* thay đổi, vectơ mômen động lượng của vật rắn cũng được bảo toàn:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \overrightarrow{const}$$

Từ đó nếu *I* tăng thì $\vec{\omega}$ giảm và ngược lại nếu *I* giảm thì $\vec{\omega}$ tăng.

Ví dụ 1. Khi diễn viên múa balê quay người trên đầu mũi giày, nếu bỏ qua ma sát thì trọng lực và phản lực của sàn diễn tác dụng lên người đều có phương hoặc cắt hoặc trùng với trục quay đi qua khối tâm của người nên mômen tổng hợp của chúng đối với trục quay bằng không do đó mômen động lượng của người được bảo toàn. Vì thế khi diễn viên hạ tay xuống thì *I* giảm nên vận tốc quay ω tăng (diễn viên quay nhanh), nếu giang tay ra thì I tăng nên vận tốc quay giảm (diễn viên quay ch ậm lại)... Tương tự như vậy diễn viên xiếc nhào lộn người trên không, vận động viên nhảy cầu bơi … muốn quay nhanh hơn thì phải cuộn người lại, còn nếu muốn quay chậm lại thì phải duỗi thẳng người.

Ví dụ 2. Một người cầm ở mỗi tay một quả tạ đứng trên ghế Giucôxki đang quay (Hình 2-11a). Nếu người đó hạ tay xuống (I giảm), ghế quay nhanh lên (ω tăng); nếu người đó giang ngang tay ra (I tăng), ghế sẽ quay chậm lại (ω giảm).



(a) (b)

Hình 2-11

(a) Hình ví dụ 2, (b) Hệ gồm nhiều phần quay

Xét hệ gồm hai vật quay có momen quán tính I_1, I_2 và vận tốc góc $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$. Nếu mômen ngoại lực tác dụng lên hệ bằng không, thì mômen động lượng của hệ được bảo toàn:

$$\vec{L} = I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 = \overrightarrow{const}$$

Nếu lúc đầu hệ đứng yên, $\vec{L}_0 = 0$, thì mômen động lượng của hệ sẽ bằng không tại thời điểm t bất kỳ sau đó.

$$\vec{L} = \vec{L}_0 = I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 = 0$$

hay $$I_1\vec{\omega}_1 = -I_2\vec{\omega}_2$$

Ta suy ra $\vec{\omega}_2 = -\dfrac{I_1}{I_2}\vec{\omega}_1$, tức là hai phần của hệ sẽ quay ngược chiều nhau.

Có thể quan sát hiện tượng này nhờ thí nghiệm trên ghế Giucôpxki ở hình (2-11b). Một người đứng trên ghế Giucôpxki, một tay giữ trục thẳng đứng của một bánh xe. Lúc đầu, hệ (gồm người, bánh xe, ghế) đứng yên, nên mômen động lượng của hệ bằng không. Sau đó, người này cho bánh xe quay với vận tốc góc $\vec{\omega}_1$ thì ghế sẽ quay với vận tốc góc $\vec{\omega}_2$ ngược chiều $\vec{\omega}_1$.

HƯỚNG DẪN HỌC CHƯƠNG 2

I. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Nắm được khái niệm khối tâm và các đại lượng đặc trưng cho chuyển động của khối tâm, qui luật chuyển động của khối tâm.

2. Thiết lập được phương trình chuyển động của vật rắn quanh một trục cố định.

3. Khái niệm động lượng, định luật bảo toàn động lượng, định lý mômen động lượng , định luật bảo toàn mômen động lượng.

II. TÓM TẮT NỘI DUNG

1. Việc xét chuyển động của hệ chất điểm được qui về việc xét chuyển động khối tâm của nó. Kết quả cho thấy: chuyển động của khối tâm của hệ chất điểm giống như chuyển động của một chất điểm mang khối lượng bằng tổng khối lượng của cả hệ và chịu tác dụng của một ngoại lực bằng tổng hợp tất cả các ngoại lực tác dụng lên hệ.

Thật vậy, phương trình động lực học cơ bản của chuyển động của khối tâm của hệ chất điểm có dạng giống như phương trình động lực học cơ bản của chất điểm:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

trong đó $\vec{a}$,m tương ứng là gia tốc của khối tâm và tổng khối lượng của cả hệ, $\vec{F}$ là tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên hệ.

Đối với một hệ chất điểm chuyển động, áp dụng định luật Newton *II* cho các chất điểm :

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n\right) = \vec{F}$$

Nếu hệ là cô lập, $\vec{F} = 0$, thì:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n\right) = 0 \quad hay\ m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n = \overrightarrow{const}$$

2. Vật rắn là một hệ chất điểm trong đó khoảng cách giữa các chất điểm luôn không đổi. Mọi chuyển động của vật rắn đều có thể phân tích thành hai dạng chuyển động cơ bản: chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay quanh một trục.

Phương trình cơ bản của vật rắn chuyển động tịnh tiến có dạng giống như phương trình cơ bản của chuyển động của chất điểm đặt tại khối tâm của hệ, mang khối lượng của cả vật rắn và chịu tác dụng của một lực bằng tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên chất điểm đó.

3. Trong chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định Δ, trong cùng khoảng thời gian Δt mọi chất điểm của vật rắn đều quay được một góc Δθ như nhau, vạch nên những đường tròn nằm trong những mặt phẳng vuông góc với trục quay Δ và có tâm nằm trên trục đó. Tại mỗi thời điểm t, mọi chất điểm của vật rắn đều có cùng vận tốc góc $\vec{\omega}$ và gia tốc góc $\vec{\beta}$.

Khi vật rắn chịu tác dụng một ngoại lực $\vec{F}$, chỉ có thành phần $\vec{F}_t$ tiếp tuyến với quỹ đạo tròn vuông góc với *Δ*, nằm trong mặt phẳng quỹ đạo này là có tác dụng làm cho vật rắn quay quanh trục *Δ*.

Thực nghiệm chứng tỏ tác dụng của lực $\vec{F}_t$ làm quay vật rắn không những phụ thuộc vào độ lớn của $\vec{F}_t$ mà còn phụ thuộc vào điểm đặt của lực $\vec{F}_t$, nghĩa là phụ thuộc vào bán kính r của quỹ đạo của điểm đặt lực $\vec{F}_t$. Đại lượng có thể hiện những phụ thuộc này là vectơ mômen lực đối với trục quay

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}_t$$

trong đó, bán kính vectơ $\vec{r}$ tính từ tâm quỹ đạo đến điểm đặt lực $\vec{F}_t$, và cũng hướng từ tâm quỹ đạo đến điểm đặt lực $\vec{F}_t$. Vectơ momen lực có:

– *phương:* vuông góc với 2 vectơ $\vec{r}$ và $\vec{F}_t$

– *chiều*: sao cho ba vectơ $\vec{r}, \vec{F}_t, \vec{M}$ theo thứ tự đó hợp thành tam diên thuận,

– *độ lớn*: $\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}_t\right|\sin\left(\vec{r}, \vec{F}_t\right)$.

4. Phương trình cơ bản của vật rắn quay quanh trục quay cố định :

$$\vec{M} = I\vec{\beta}\ .$$

Trong đó $\vec{\beta}$ là gia tốc góc, *I* là mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay *Δ*. Phương trình này có dạng giống như phương trình $\vec{F} = m\vec{a}$ đối với chuyển động của chất điểm. Ba đại lượng $\vec{M}$, $\vec{\beta}$, *I* có vai trò tương tự như ba đại lượng $\vec{F}$, $\vec{a}$, m trong chuyển động của chất điểm.

5. Mômen quán tính được tính *I* theo công thức $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ nếu các phần tử của vật rắn phân bố rời rạc. Còn nếu các phần tử của vật rắn phân bố liên tục thì

$$I = \int_{toan\ vat} r^2 dm$$

Dựa vào các công thức này, ta có thể tính mômen quán tính của các vật rắn quay quanh một trục cố định Δ_o trùng với trục đối xứng của vật rắn và đi qua khối tâm của nó. Ví dụ, với

- khối cầu: $I_0 = \dfrac{2}{5} mR^2$

- vành tròn rỗng (hoặc trụ rỗng): $I_o = m\,R^2$,

- thanh dài đồng chất: $I_0 = \dfrac{m\ell^2}{12}$

- khối trụ đặc, đĩa đặc: $I_0 = \dfrac{mR^2}{2}$

Nếu trục quay Δ không trùng với trục đối xứng Δ_o và không đi qua khối tâm của vật mà cách khối tâm một đoạn d và song song với trục Δ thì theo định lý Steiner-Huyghens:

$$I = I_o + md^2$$

6. Vectơ mômen động lượng $\vec{L} = I\vec{\omega}$ đặc trưng cho chuyển động quay về mặt động lực học và từ phương trình cơ bản của vật rắn quay quanh một trục cố định ta rút ra 2 định lý về mômen động lượng:

Định lý 1: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

Định lý 2: $\Delta\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt$

7. Từ hai định lý trên ta suy ra định luật bảo toàn mômen động lượng: Vật rắn quay cô lập hoặc không cô lập nhưng tổng hợp các mômen ngoại lực tác dụng lên vật rắn bằng không, thì mômen động lượng của vật rắn được bảo toàn: $\vec{L} = const$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Khái niệm về khối tâm của hệ chất điểm? So sánh chuyển động của khối tâm với chuyển động tịnh tiến của vật rắn và chuyển động của chất điểm.

2. Định nghĩa động lượng. Phát biểu định luật bảo toàn động lượng cho hệ chất điểm.

3. Thành phần nào của lực có tác dụng thực sự gây ra chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định? Phân tích tại sao?

4. Thiết lập phương trình cơ bản của chuyển động quay, nêu ý nghĩa của các đại lượng trong công thức.

5. Định nghĩa mômen quán tính của vật rắn, nêu cách tính mômen quán tính của một số vật rắn. Viết công thức tính mômen quán tính của một vật rắn đồng chất quay quanh trục đối xứng và đi qua khối tâm của nó.

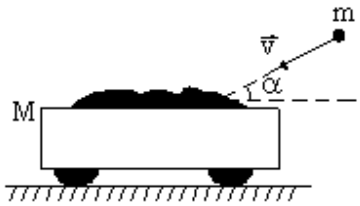
6. Khái niệm về mômen động lượng và chứng minh các định lý về mômen động lượng đối với vật rắn quay xung quanh một trục cố định.

7. Nếu các đại lượng trong chuyển động quay có vai trò tương tự với các đại lượng trong chuyển động tịnh tiến. Sự tương tự này thể hiện như thế nào (ở những công thức nào).

8. Chứng minh và phát biểu định luật bảo toàn mômen động lượng. Cho vài ví dụ ứng dụng và giải thích. Định luật này được thoả mãn trong những điều kiện nào?

IV. BÀI TẬP

Thí dụ 1: Một xe chở đầy cát có khối lượng M = 5000kg đang đỗ trên đường ray nằm ngang. Một viên đạn khối lượng m = 5kg bay dọc đường ray theo phương hợp với mặt phẳng ngang một góc $\alpha = 36^0$ với vận tốc v = 400m/s, tới xuyên vào xe cát và nằm ngập trong cát. Bỏ qua ma sát giữa xe và mặt đường. Hãy tìm vận tốc của xe cát sau khi viên đạn xuyên vào cát.



Bài giải:

Ngoại lực tác dụng lên hệ xe cát + đạn gồm trọng lực và phản lực pháp tuyến của ray. Nếu chiếu lên phương nằm ngang thì ngoại lực tác dụng lên hệ bằng không. Vậy động lượng của hệ theo phương ngang được bảo toàn. Ta có:

$$mv\cos\alpha = (M+m)v_x \rightarrow v_x = \frac{mv\cos\alpha}{M+m} = \frac{5.400\cos 36^0}{5000+5} = 0{,}32m/s$$

Thí dụ 2: Một vô lăng hình đĩa tròn đồng chất có khối lượng m = 500kg, bán kính r = 20cm đang quay xung quanh trục của nó với vận tốc 480vòng/phút. Tác dụng một mômen hãm lên vôlăng. Tìm mômen hãm trong hai trường hợp:

a. Vôlăng dừng lại sau khi hãm 50s.

b. Vôlăng dừng lại sau khi đã quay thêm được 200vòng.

Bài giải:

a. Theo định lý về mômen động lượng:

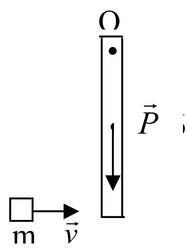
$$M.\Delta t = \Delta L = I\omega_2 - I\omega_1\text{, trong đó } \omega_2 = 0,\ \omega_1 = \omega,\ I = \frac{mr^2}{2}$$

Nên $M = -\dfrac{I\omega}{\Delta t} = -\dfrac{mr^2\omega}{2\Delta t} = -\dfrac{500.(0{,}2)^2.50{,}24}{2.50} = -10N.m$

b. áp dụng công thức:

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\beta\theta\text{, với } \omega_2 = 0\text{, nên } \beta = -\frac{\omega_1^2}{2\theta}$$

Mà $M = I\beta = -\dfrac{mr^2\omega_1^2}{4\theta} = -10N.m$



Thí dụ 3: Một thanh gỗ mỏng dài 0,5m có thể quay tự do quanh một trục nằm ngang đi qua đầu trên thanh. Một viên đạn khối lượng 10g bay theo phương ngang với vận tốc 400m/s tới xuyên vào đầu dưới của thanh gỗ và mắc lại ở đó. Khối lượng của thanh gỗ bằng 6kg phân bố đều theo chiều dài của thanh. Bỏ qua ma sát của trục quay và lực cản của không khí. Xác định vận tốc góc của thanh gỗ sau khi viên đạn đâm xuyên vào nó.

Bài giải:

Có thể coi khi viên đạn vừa chạm vào gỗ, các trọng lực tác dụng lên hệ viên đạn và thanh gỗ đều có phương đi qua trục quay. Như vậy tổng mômen ngoại lực tác dụng lên hệ vật đối với trục quay O có giá trị bằng không. Do đó, tổng mômen động lượng của hệ đối với trục quay O được bảo toàn.

$$\vec{L}_{\text{trước va chạm}} = \vec{L}_{\text{sau va chạm}}$$

$$L_{\text{trước va chạm}} = mv\ell$$

$$L_{\text{sau va chạm}} = (I_1+I_2)\omega$$

$$I_1 = m\ell^2,\ I_2 = \frac{M\ell^2}{12} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{M\ell^2}{3}$$

Vậy ta có:

$$\left(m\ell^2 + \frac{M\ell^2}{3}\right)\omega = mv\ell$$

Suy ra:

$$\omega = \frac{mv}{\left(m + \frac{M}{3}\right)\ell} = \frac{10.10^{-3}.400}{\left(10.10^{-3} + \frac{6}{3}\right).0,5} \approx 4 rad/s$$

Bài tập tự giải

1. Một bệ súng có khối lượng 10 tấn có thể chuyển động không ma sát trên đường ray. Trên bệ súng có gắn một khẩu đại bác khối lượng 5 tấn. Gỉa sử khẩu đại bác nhả đạn theo phương đường ray. Viên đạn có khối lượng 100kg và có vận tốc đầu nòng 500m/s. Xác định vận tốc của bệ súng ngay sau khi bắn, biết rằng;

1. lúc đầu bệ súng đứng yên.

2. Trước khi bắn, bệ súng chuyển động với vận tốc 18km/h theo chiều bắn.

3. Trước khi bắn, bệ súng chuyển động với vận tốc 18km/h ngược chiều bắn.

Đáp số: 1. v = 3,33 m/s

2. Theo chiều bắn: v = 1,7 m/s

3. Ngược chiều bắn: v = 8,37 m/s

2. Một xe chở đầy cát chuyển động không ma sát với vận tốc v_1 = 1m/s trên mặt đường nằm ngang. Toàn bộ xe cát có khối lượng m = 10kg. Một quả cầu khối lượng m_2 = 2kg bay theo chiều ngược lại với vận tốc nằm ngang v_2 = 7m/s. Sau khi gặp xe, quả cầu nằm ngập trong cát. Hỏi sau đó xe chuyển động theo chiều nào, với vận tốc bằng bao nhiêu?

Đáp số: v = 1,42 m/s theo chiều quả cầu.

3. Một khẩu đại bác không có bộ phận chống giật, nhả đạn dưới một góc 45^0 so với mặt phẳng nằm ngang. Viên đạn có khối lượng m = 10kg và vận tốc v_0 = 200m/s. Đại bác có khối lượng M = 500kg. Hỏi vận tốc giật của súng nếu bỏ qua ma sát.

Đáp số: v = 2,82 m/s

4. Một đĩa tròn đồng chất khối lượng m = 0,3kg, có bán kính R = 0,4m, đang quay với vận tốc góc 1500vòng/phút. Tác dụng lên đĩa một mômen hãm, đĩa quay chậm dần và sau thời gian 20giây thì dừng lại. Tìm mômen lực hãm.

Đáp số: M = 0,19 N.m

5. Một trụ đặc đồng chất, khối lượng m = 100kg, bán kính R = 0,5m đang quay quanh trục của nó. Tác dụng lên trụ một lực hãm tiếp tuyến với mặt trụ và vuông góc với trục quay F_h = 243,3N. Sau thời gian 31,4giây trụ dừng lại. Tính vận tốc góc của trụ lúc bắt đầu tác dụng lực hãm.

Đáp số: β = 9,7 rad/s^2

ω = 97,3π rad/s

6. Tác dụng lên bánh xe bán kính R = 0,5m và có mômen quán tính I = 20kg.m^2, một lực tiếp tuyến với vành bánh F_t = 100N. Tìm:

1. Gia tốc của bánh xe.

2. Vận tốc dài của một điểm trên vành bánh sau khi tác dụng một lực 10giây biết rằng lúc đầu bánh xe đứng yên.

Đáp số: β = 2,5 rad/s^2; ω = 25 rad/s ; v = 12,5 m/s

7. Một bánh xe bán kính 50cm đang quay dưới tác dụng của mômen lực 980N. Hỏi phải cho mỗi má phanh tác dụng lên vành bánh một lực bằng bao nhiêu để vành bánh xe quay chậm dần đều với gia tốc góc 2,5rad/s^2. Biết hệ số ma sát 0,25, mômen quán tính của bánh xe đối với trục quay 50kg.m^2.

HD: Gọi lực mà mỗi má phanh tác dụng lên vành bánh xe là F. Lực ma sát gây hãm xe có phương tiếp tuyến với bánh xe và có độ lớn 2kF

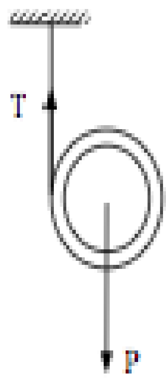
$$\beta = \frac{M - M_{ms}}{I} = \frac{M - 2kFR}{I} \rightarrow F = 4420(N)$$

Đáp số: F = 4420N

8. Trên một trụ rỗng khối lượng 1kg, người ta cuộn một sợi dây không giãn có khối lượng và đường kính nhỏ không đáng kể. Đầu tự do của dây được gắn trên một giá cố định. Để trụ rơi dưới tác dụng của trọng lực. Tìm gia tốc của trụ và sức căng của dây treo. Cho g = 10m/s^2.

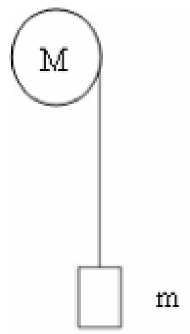
HD: Thiết lập các phương trình lực và mômen lực

$$mg - T = m\gamma$$
$$TR = I\beta$$
$$v = \varpi R$$
$$\gamma = \beta R$$



Đáp số: a = 5 m/s^2 ;   T = 5 N

9. Một trụ quay hình trụ đặc khối lượng 100kg có thể quay quanh trục quay nằm ngang. Một sợi dây không giãn, khối lượng không đáng kể được cuốn thành một lớp xít nhau trên thân trụ và đầu tự do của sợi dây treo vật nặng khối lượng 20kg (hình 2 – 2bt). Để vật nặng tự nó chuyển động. Tìm:

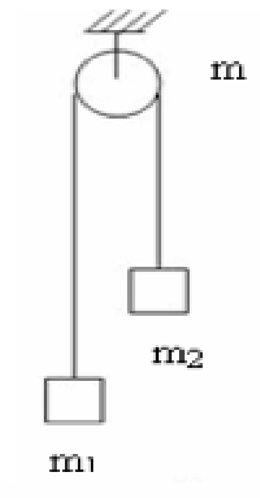


1. Gia tốc của vật nặng.

2. Lực căng của dây treo. Cho g = 10m/s^2

Đáp số: a = 2,86 m/s^2 ;   T = 142,8 N

10. Hai vật khối lượng lần lượt m_1, m_2, ($m_1 > m_2$) được nối với nhau bằng một sợi dây không giãn, khối lượng không đáng kể, vắt qua ròng rọc , ròng rọc khối lượng m . Tìm:



1. Gia tốc chuyển động của các vật.

2. Sức căng của các dây treo. Coi ròng rọc là một đĩa tròn, ma sát không đáng kể. áp dụng bằng số m_1 = 2kg, m_2 = 1kg, m = 1kg. Cho g = 10m/s^2.

HD: Phương trình lực và mômen lực:

$$m_1 g - T_1 = m_1 \gamma$$
$$T_2 - m_2 g = m_1 \gamma$$
$$(T_1 - T_2)R = I\beta = \frac{mR^2}{2}\frac{\gamma}{R}$$

Đáp số: $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} = 2{,}86 m/s^2$; $T_1 = 14{,}28N$; $T_2 = 12{,}86N$

11. Một thanh có chiều dài 1m có thể quay xung quanh một trục nằm ngang đi qua một đầu thanh. Lúc đầu, thanh ở vị trí nằm ngang, sau đó được thả ra. Tìm gia tốc góc của thanh lúc bắt đầu thả rơi và lúc thanh đi qua vị trí thẳng đứng. Cho g = 10m/s^2.

HD: Mômen lực do trọng lực gây ra quanh trục quay là:

M = F(l/2)sinα

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{mgl\sin\alpha}{2(\frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4})} = \frac{3g\sin\alpha}{2l}$$

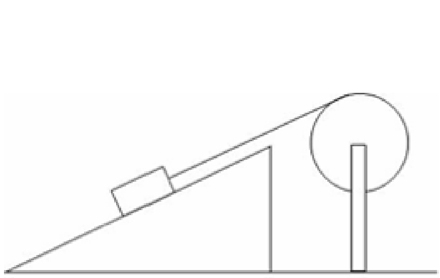
Đáp số: β = 0 ; β = $\dfrac{3g}{2\ell} = 15 m/s^2$

12. Một vật khối lượng 100kg trượt trên mặt phẳng nghiêng hợp với mặt phẳng ngang một góc 30^0 và làm quay một bánh xe có dạng một trụ tròn đặc bán kính 0,26m và khối lượng 25kg. Hệ số ma sát giữa vật và mặt nghiêng 0,25. Bỏ qua ma sát của ổ trục của ròng rọc và khối lượng của dây. Tìm:

1. Gia tốc góc của bánh xe.

2. Lực căng của sợi dây. Cho g = 10m/s^2.

HD:

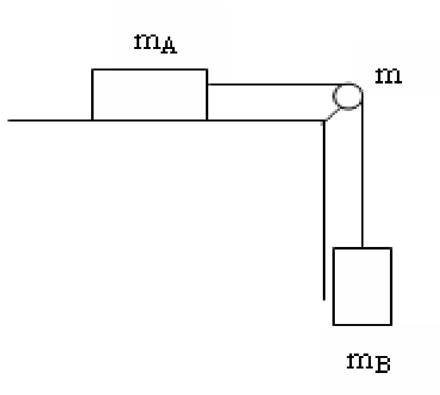


$$TR = I\beta$$
$$T - mg\sin\alpha + kmg\sin\alpha = mR\beta$$
$$\rightarrow \beta = \frac{mgr(\sin\alpha - k\cos\alpha)}{I - mR^2}$$

Đáp số:

$$a = \frac{mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha}{m + \frac{M}{2}} = 2{,}52m/s^2 \;;\; \beta = \frac{a}{R} = 9{,}7\,rad/s^2 \;;\; T = \frac{Ma}{2} = 31{,}5\,N$$

13. Có hai vật khối lượng $m_A = m_B = 1$kg được nối với nhau bằng một sợi dây không giãn, khối lượng không đáng kể, sợi dây vắt qua ròng rọc có khối lượng m = 1kg. Coi ròng rọc là một đĩa tròn. Hệ số ma sát giữa vật m_1 và mặt ngang là k = 0,2 (hình 2-5bt). Tìm:



1. Gia tốc của vật m_1, m_2.

2. Sức căng của các dây nối.

3. Cũng câu hỏi như trên, xét trường hợp khối lượng của ròng rọc không đáng kể. Cho g = 10m/s^2.

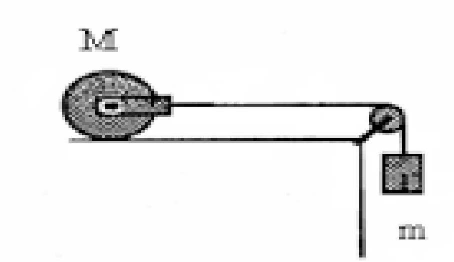
HD: Gọi O' là điểm tiếp xúc của đĩa tròn đối với mặt bàn

$$m_2g - T_2 = m_2a$$
$$T_1 - km_1g = m_1a$$
$$T_2 - T_1 = I_{(o')}\beta$$
$$\beta = \frac{a}{R}$$
$$\rightarrow a = \frac{m_2 - km_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}g = 3{,}2m/s^2$$

Đáp số: 1. a = 3,2 m/s^2 ; T_1 = 5,2 N; T_2 = 6,8N

2. a = 4 m/s^2 ; $T_1 = T_2$ = 6N

14. Một trụ đặc khối lượng M = 2,5kg và một vật nặng khối lượng m = 0,5kg được nối với nhau bằng một sợi dây không giãn vắt qua ròng rọc (hình 2-6bt). Bỏ qua khối lượng của sợi dây, của ròng rọc. Khi thả vật nặng để nó tự chuyển động thì trụ đặc lăn không trượt trên mặt phẳng ngang. Hệ số ma sát giữa trụ đặc và mặt ngang bằng 0,1.Tìm:



1. Gia tốc chuyển động của vật nặng.
2. Lực căng của sợi dây. Cho g = 10m/s^2.

HD:

$$mg - T = ma$$

$$TR = I_{(O')}\beta = \left(\frac{mR^2}{2} + mR^2\right)\frac{a}{R}$$

$$\rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{3}{2}M}; T = \frac{3}{2}Ma$$

Đáp số: a = 1,18 m/s^2 ; T = 4,43 N

15. Một đĩa tròn khối lượng m_1 = 100kg quay với vận tốc góc ω_1 = 10vòng/phút. Một người khối lượng m_2 = 60kg đứng ở mép đĩa. Hỏi vận tốc góc của đĩa khi người đi vào đứng ở tâm của đĩa. Coi người như một chất điểm.

Đáp số: $\omega_2 = \dfrac{2m_2 + m_1}{m_1}\omega_1 = 22$ vòng/phút