CHƯƠNG I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ PHÉP TÍNH XÁC SUẤT

Môn học: Xác suất Thống kê

Giảng viên: TS. Nguyễn Kiều Linh

Hà Nội, năm 2020

Nội dung

BÀI 1. NHẮC LẠI VỀ GIẢI TÍCH TỔ HỢP

BÀI 2. BIẾN CỐ VÀ QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ

1. Phép thử và biến cố
2. Các loại biến cố
3. Quan hệ giữa các biến cố

BÀI 3. KHÁI NIỆM VÀ CÁC ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

1. Khái niệm xác suất
2. Các định nghĩa xác suất
3. Một số tính chất cơ bản về xác suất

BÀI 4. CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

1 Công thức xác suất có điều kiện

2. Công thức nhân xác suất
3. Công thức cộng xác suất
4. Công thức Bernoulli
5. Công thức xác suất đầy đủ
6. Công thức Bayes

Nội dung

BÀI 1. NHẮC LẠI VỀ GIẢI TÍCH TỔ HỢP

BÀI 2. BIẾN CỐ VÀ QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ

1. Phép thử và biến cố
2. Các loại biến cố
3. Quan hệ giữa các biến cố

BÀI 3. KHÁI NIỆM VÀ CÁC ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

1. Khái niệm xác suất
2. Các định nghĩa xác suất
3. Một số tính chất cơ bản về xác suất

BÀI 4. CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

1 Công thức xác suất có điều kiện
2. Công thức nhân xác suất
3. Công thức cộng xác suất
4. Công thức Bernoulli
5. Công thức xác suất đầy đủ
6. Công thức Bayes

1. Quy tắc cộng

Ví dụ 1

Có bao nhiêu cách để sinh viên chọn ra một phương tiện đi từ nhà đến trường nhập học, biết rằng có hai loại phương tiện để lựa chọn: Phương tiện cá nhân và phương tiện công cộng.

- Phương tiện cá nhân: 3 loại (xe đạp, xe máy, xe hơi.)
- Phương tiện công cộng: 7 loại (xe khách, xe buýt, tàu điện trên cao, tàu hoả, taxi, xe ôm, xích lô).

1. Quy tắc cộng

Ví dụ 1

Có bao nhiêu cách để sinh viên chọn ra một phương tiện đi từ nhà đến trường nhập học, biết rằng có hai loại phương tiện để lựa chọn: Phương tiện cá nhân và phương tiện công cộng.

- Phương tiện cá nhân: 3 loại (xe đạp, xe máy, xe hơi.)
- Phương tiện công cộng: 7 loại (xe khách, xe buýt, tàu điện trên cao, tàu hoả, taxi, xe ôm, xích lô).

Trả lời: Có $3 + 7 = 10$ (cách).

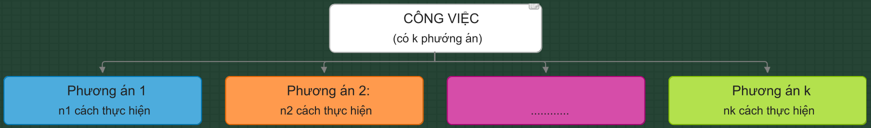
1. Quy tắc cộng

Quy tắc cộng

Một công việc có k phương án thực hiện khác nhau:

- Phương án 1 có n_1 cách thực hiện,
- Phương án 2 có n_2 cách thực hiện,
- ......
- Phương án k có n_k cách thực.

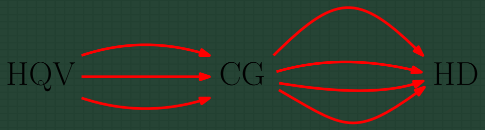
Khi đó có $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ cách thực hiện công việc trên.



2. Quy tắc nhân

Ví dụ 2

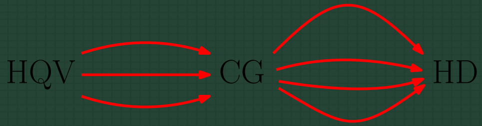
Cần đi xe buýt từ Hoàng Quốc Việt sang Hà Đông, giả sử cần bắt buộc phải đi qua Cầu Giấy. Có 3 tuyến xe buýt đi từ Hoàng Quốc Việt đến Cầu Giấy và 4 tuyến xe buýt từ Cầu Giấy đến Hà Đông. Hỏi có bao nhiêu cách đi xe buýt từ Hoàng Quốc Việt đến Hà Đông.



2. Quy tắc nhân

Ví dụ 2

Cần đi xe buýt từ Hoàng Quốc Việt sang Hà Đông, giả sử cần bắt buộc phải đi qua Cầu Giấy. Có 3 tuyến xe buýt đi từ Hoàng Quốc Việt đến Cầu Giấy và 4 tuyến xe buýt từ Cầu Giấy đến Hà Đông. Hỏi có bao nhiêu cách đi xe buýt từ Hoàng Quốc Việt đến Hà Đông.



Trả lời: Ta chia thành hai bước thực hiện công việc đi từ Hoàng Quốc Việt Đến Hà Đông.

- Bước 1: Đi từ Hoàng Quốc Việt đến Cầu giấy có 3 cách chọn.
- Bước 2: Đi từ Cầu Giấy đến Hà Đông có 4 cách chọn.

Số cách đi là $3.4 = 12$ (cách).

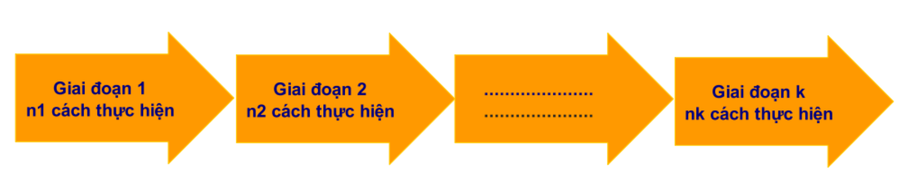
2. Quy tắc nhân

Quy tắc nhân

Một công việc chia thành k giai đoạn thực hiện khác nhau:

- Giai đoạn 1 có n_1 cách thực hiện,
- Giai đoạn 2 có n_2 cách thực hiện,
- ......
- Giai đoạn k có n_k cách thực.

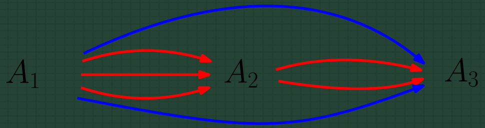
Khi đó có $n = n_1.n_2 \dots n_k$ cách thực hiện công việc trên.



Ví dụ tổng hợp

Ví dụ 3

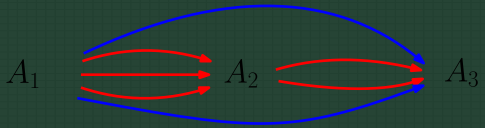
Có bao nhiêu cách đi từ nhà A_1 đến nhà $A3$?



Ví dụ tổng hợp

Ví dụ 3

Có bao nhiêu cách đi từ nhà A_1 đên nhà $A3$?



Trả lời: Đi từ nhà A_1 đến nhà A_3 chia thành hai phương án:

- Phương án 1: Đi trực tiếp từ nhà A_1 đến nhà A_3 có 2 cách,
- Phương án 2: Đi từ nhà A_1 đến nhà A_2 rồi đi từ nhà A_2 đến nhà A_3 có 3.2 $=$6 cách,

Do đó có tổng cộng $2+6=8$ cách đi từ nhà A_1 đến nhà A_3.

3. Chỉnh hợp

Định nghĩa

Chỉnh hợp chập k của n phần tử, ký hiệu A_n^k, là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho ($k \leq n$).

3. Chỉnh hợp

Định nghĩa

Chỉnh hợp chập k của n phần tử, ký hiệu A_n^k, là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho $(k \leq n)$.

Chú ý

Chỉnh hợp chập k của n phần tử là cách chọn k phần tử từ n phần tử đã cho sao cho:

- Có thứ tự;
- Các phần tử khác nhau.

3. Chỉnh hợp

Định nghĩa

Chỉnh hợp chập k của n phần tử, ký hiệu A_n^k, là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho $(k \leq n)$.

Chú ý

Chỉnh hợp chập k của n phần tử là cách chọn k phần tử từ n phần tử đã cho sao cho:

- Có thứ tự;
- Các phần tử khác nhau.

Công thức tính

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1). \tag{1}$$

3. Chỉnh hợp

Ví dụ 4

Lớp học có 50 sinh viên, có bao nhiêu cách chọn một lớp trưởng, một lớp phó và một bí thư?

3. Chỉnh hợp

Ví dụ 4

Lớp học có 50 sinh viên, có bao nhiêu cách chọn một lớp trưởng, một lớp phó và một bí thư?

Lời giải

Chọn 3 người trong 50 người có thứ tự và không lặp lại nên số cách chọn là $A_{50}^{3} = 50.49.48 = 117600$ cách.

3. Chỉnh hợp

Ví dụ 4

Lớp học có 50 sinh viên, có bao nhiêu cách chọn một lớp trưởng, một lớp phó và một bí thư?

Lời giải

Chọn 3 người trong 50 người có thứ tự và không lặp lại nên số cách chọn là $A_{50}^{3} = 50.49.48 = 117600$ cách.

Ví dụ 5

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau?

3. Chỉnh hợp

Ví dụ 4

Lớp học có 50 sinh viên, có bao nhiêu cách chọn một lớp trưởng, một lớp phó và một bí thư?

Lời giải

Chọn 3 người trong 50 người có thứ tự và không lặp lại nên số cách chọn là $A_{50}^{3} = 50.49.48 = 117600$ cách.

Ví dụ 5

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau?

Lời giải

Chọn 4 chữ số trong 6 chữ số có thứ tự và không lặp lại nên số các số là $A_{6}^{4} = 6.5.4.3 = 360$.

4. Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa

Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử, ký hiệu $\bar{A}_n^k$, là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử không nhất thiết khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

4. Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa

Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử, ký hiệu $\bar{A}_n^k$, là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử không nhất thiết khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Chú ý

Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là cách chọn k phần tử từ n phần tử đã cho sao cho:

- Có thứ tự;
- Các phần tử không nhất thiết khác nhau.

4. Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa

Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử, ký hiệu $\bar{A}_n^k$, là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử không nhất thiết khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Chú ý

Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là cách chọn k phần tử từ n phần tử đã cho sao cho:

- Có thứ tự;
- Các phần tử không nhất thiết khác nhau.

Công thức tính

$$\bar{A}_n^k = n^k. \quad (2)$$

4. Chỉnh hợp lặp

Ví dụ 6

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 4 chữ số?

4. Chỉnh hợp lặp

Ví dụ 6

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 4 chữ số?

Lời giải

Chọn 4 chữ số trong 6 chữ số có thứ tự và có thể lặp lại nên số các số cần tìm là $\bar{A}_6^4 = 6^4 = 1296$.

4. Chỉnh hợp lặp

Ví dụ 6

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 4 chữ số?

Lời giải

Chọn 4 chữ số trong 6 chữ số có thứ tự và có thể lặp lại nên số các số cần tìm là $\bar{A}_6^4 = 6^4 = 1296$.

Ví dụ 7

Có 4 cửa hàng cạnh nhau, 5 người khách đến, mỗi khách chọn ngẫu nhiên một cửa hàng. Tính số trường hợp chọn cửa hàng.

4. Chỉnh hợp lặp

Ví dụ 6

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 4 chữ số?

Lời giải

Chọn 4 chữ số trong 6 chữ số có thứ tự và có thể lặp lại nên số các số cần tìm là $\bar{A}_6^4 = 6^4 = 1296$.

Ví dụ 7

Có 4 cửa hàng cạnh nhau, 5 người khách đến, mỗi khách chọn ngẫu nhiên một cửa hàng. Tính số trường hợp chọn cửa hàng.

Lời giải

Mỗi khách có 4 cách chọn cửa hàng, có 5 khách nên số cách chọn cửa hàng là $\bar{A}_4^5 = 4^5 = 1024$.

5. Hoán vị

Định nghĩa

Hoán vị của n phần tử, ký hiệu P_n, là một nhóm có thứ tự có đủ mặt cả n phần tử đã cho.

5. Hoán vị

Định nghĩa

Hoán vị của n phần tử, ký hiệu P_n, là một nhóm có thứ tự có đủ mặt cả n phần tử đã cho.

Chú ý

Hoán vị là một chỉnh hợp chập n của n phần tử. Như vậy một hoán vị của n phần tử là một nhóm thoả mãn:

- Có thứ tự;
- Các phần tử khác nhau.

5. Hoán vị

Định nghĩa

Hoán vị của n phần tử, ký hiệu P_n, là một nhóm có thứ tự có đủ mặt cả n phần tử đã cho.

Chú ý

Hoán vị là một chỉnh hợp chập n của n phần tử. Như vậy một hoán vị của n phần tử là một nhóm thoả mãn:

- Có thứ tự;
- Các phần tử khác nhau.

Công thức tính

$$P_n = A_n^n = n!. \tag{3}$$

5. Hoán vị

Ví dụ 8

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác?

5. Hoán vị

Ví dụ 8

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác?

Lời giải

Mỗi số cần tìm là một hoán vị của 6 chữ số đã cho, dó đó số chữ số cần tìm là $P_6 = 6! = 720$.

5. Hoán vị

Ví dụ 8

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác?

Lời giải

Mỗi số cần tìm là một hoán vị của 6 chữ số đã cho, dó đó số chữ số cần tìm là $P_6 = 6! = 720$.

Ví dụ 9

Một bàn dài có 10 ghế và có 10 sinh viên. Tính số cách sắp xếp tuỳ ý 10 sinh bàn dài này?

5. Hoán vị

Ví dụ 8

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác?

Lời giải

Mỗi số cần tìm là một hoán vị của 6 chữ số đã cho, dó đó số chữ số cần tìm là $P_6 = 6! = 720$.

Ví dụ 9

Một bàn dài có 10 ghế và có 10 sinh viên. Tính số cách sắp xếp tuỳ ý 10 sinh bàn dài này?

Lời giải

Mỗi cách xếp 10 sinh viên vào bàn dài là một hoán vị của 10, do đó số cách xếp tuỳ ý 10 sinh viên vào bàn là $P_{10} = 10! = 3628800$.

6. Tổ hợp

Định nghĩa

Tổ hợp chập k của n phần tử, ký hiệu C_n^k, là một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho $(k \leq n)$.

6. Tổ hợp

Định nghĩa

Tổ hợp chập k của n phần tử, ký hiệu C_n^k, là một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho ($k \leq n$).

Chú ý

Tổ hợp chập k của n phần tử là một nhóm

- Không có thứ tự;
- Các phần tử khác nhau.

6. Tổ hợp

Định nghĩa

Tổ hợp chập k của n phần tử, ký hiệu C_n^k, là một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho $(k \leq n)$.

Chú ý

Tổ hợp chập k của n phần tử là một nhóm

- Không có thứ tự;
- Các phần tử khác nhau.

Công thức tính

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{4}$$

6. Tổ hợp

Tính chất

- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

6. Tổ hợp

Tính chất

- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Ví dụ 9

Ngân hàng đề thi có 100 câu hỏi cho trước. Mỗi đề thi có 5 câu hỏi được lấy ngẫu nhiên trong ngân hàng đề thi. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi có nội dung khác nhau?

6. Tổ hợp

Tính chất

- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

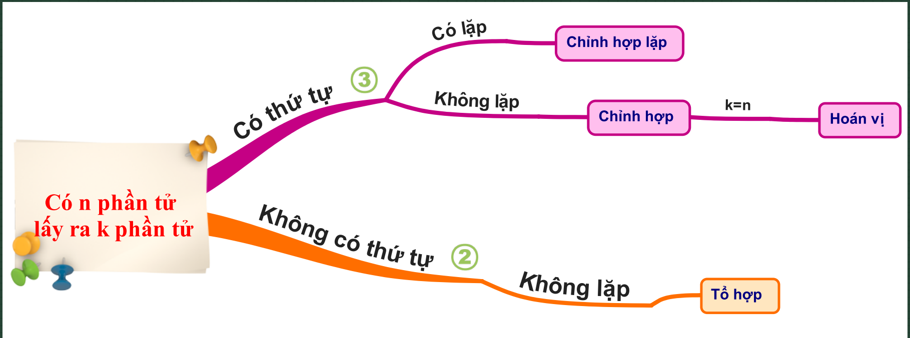
Ví dụ 9

Ngân hàng đề thi có 100 câu hỏi cho trước. Mỗi đề thi có 5 câu hỏi được lấy ngẫu nhiên trong ngân hàng đề thi. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi có nội dung khác nhau?

Lời giải

Số đề thi có thể lập được là $C_{100}^5 = \dfrac{100!}{95!5!} = 75287520$.

Kết luận



Có n phần tử
lấy ra k phần tử
Có thứ tự
3
Có lặp
Chỉnh hợp lặp
Không lặp
Chỉnh hợp
k=n
Hoán vị
Không có thứ tự
2
Không lặp
Tổ hợp

Nội dung

BÀI 1. NHẮC LẠI VỀ GIẢI TÍCH TỔ HỢP

BÀI 2. BIẾN CỐ VÀ QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ

1. Phép thử và biến cố
2. Các loại biến cố
3. Quan hệ giữa các biến cố

BÀI 3. KHÁI NIỆM VÀ CÁC ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

1. Khái niệm xác suất
2. Các định nghĩa xác suất
3. Một số tính chất cơ bản về xác suất

BÀI 4. CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

1 Công thức xác suất có điều kiện

2. Công thức nhân xác suất
3. Công thức cộng xác suất
4. Công thức Bernoulli
5. Công thức xác suất đầy đủ
6. Công thức Bayes

1. Phép thử và biến cố

Định nghĩa

- Phép thử ngẫu nhiên hay phép thử là một thí nghiệm hay một quan sát nào đó mà ta biết tất cả các kết quả có khả năng xảy ra. Tuy nhiên ta không biết kết quả nào sẽ xảy ra trong các kết quả đó trước khi thực hiện thí nghiệm hay quan sát đó.
- Hiện tượng, kết quả xét trong phép thử gọi là biến cố.
- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử ngẫu nhiên được gọi là không gian mẫu và được ký hiệu là Ω.

Ví dụ 1

- Gieo một con súc sắc (cân đối, đồng chất trên mặt phẳng cứng) là một phép thử. Súc sắc xuất hiện mặt 1, 2, 3, 4, 5, 6 chấm là các biến cố. Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Tung một đồng xu (cân đối, đồng chất trên mặt phẳng cứng) là một phép thử. Đồng xu xuất hiện mặt sấp, mặt ngửa là các sự kiện. Không gian mẫu $\Omega = \{S, N\}$.

2. Các loại biến cố

Các loại biến cố

- Biến cố chắc chắn là biến cố nhất định sẽ xảy ra khi thực hiện một phép thử. Ký hiệu là U hoặc Ω.
- Biến cố không thể là biến cố nhất định không xảy ra khi thực hiện một phép thử. Ký hiệu là V hoặc $\varnothing$.
- Biến cố ngẫu nhiên là biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi thực hiện một phép thử. Thường ký hiệu là các chữ cái in như $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$.

Ví dụ 2

Gieo một con súc sắc khi đó

- Biến cố U "xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 0 và nhỏ hơn 7" là biến cố chắc chắn.
- Biến cố V "xuất hiện mặt 7 chấm" là biến cố không thể.
- Biến cố A "xuất hiện mặt chấm chẵn" là biến cố ngẫu nhiên.

2. Các loại biến cố

Xét dưới góc độ phân tích nhỏ các biến cố

- Biến cố sơ cấp là biến cố không thể phân tích thành các biến cố nhỏ hơn.
- Biến cố phức hợp là biến cố có thể phân tích thành các biến cố nhỏ hơn.

Ví dụ 3

Gieo một con súc sắc khi đó

- Biến cố A_i "xuất hiện mặt có i chấm", $i = 1, 2, \dots, 6$ là biến cố sơ cấp.
- Biến cố A "xuất hiện mặt chấm chẵn" là biến cố phức hợp vì có thể phân tích nó thành các biến cố A_2, A_4, A_6.

2. Các loại biến cố

Ví dụ 4

Một hộp có 10 viên bi, trong đó có 7 đỏ và 3 xanh. Lấy ngẫu nhiên ra 4 viên bi và quan sát màu. Gọi

- A là biến cố "lấy được 4 bi đỏ".
- B là biến cố "lấy được 4 xanh".
- C là biến cố "lấy được 4 viên bi".

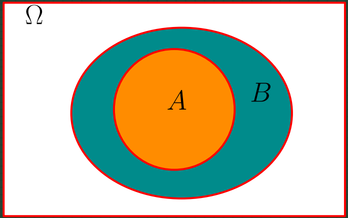
Hỏi biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

3. Quan hệ giữa các biến cố

3.1. Quan hệ kéo theo, quan hệ tương đương

Quan hệ kéo theo

Biến cố A được gọi là *kéo theo* biến cố B, ký hiệu $A \subseteq B$ (hoặc $A \Rightarrow B$), nếu A xảy ra thì B xảy ra.



Quan hệ tương đương

Biến cố A được gọi là *tương đương* với biến cố B, ký hiệu $A = B$ (hoặc $A \Leftrightarrow B$), nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$.

3.1. Quan hệ kéo theo, quan hệ tương đương

Ví dụ 5

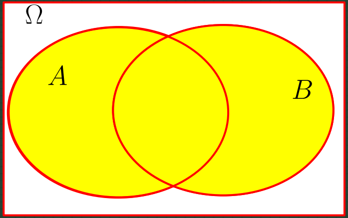
Tung một con xúc xắc một lần. Gọi A là biến cố "xúc xắc ra mặt có số chấm chẵn", B là biến cố "xúc xắc ra mặt có số chấm 2 hoặc 4", C là biến cố "xúc xắc có số chấm 2, 4, 6", D là biến cố "xúc xắc ra mặt có số chấm nhỏ hơn 4".

- $A \Rightarrow B$ hay $B \Rightarrow A$.
- $A \Rightarrow C$ hay $C \Rightarrow A$.
- $A \Rightarrow D$ hay $D \Rightarrow A$.

3.2. Biến cố tổng

Biến cố tổng

Biến cố C được gọi là *tổng của hai biến cố* A và B, ký hiệu $C = A + B$ (hoặc $A \cup B$), nếu C xảy ra khi và chỉ khi ít nhất một trong hai biến cố Avà B xảy ra.



$A + B$

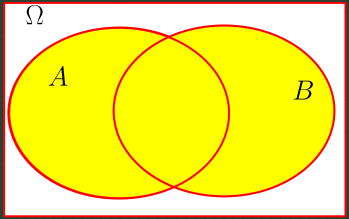
Ví dụ 6

Hai người thợ săn cùng bắn một con thú. Nếu gọi A là biến cố "người thứ nhất bắn trúng con thú" và B là biến cố "người thứ hai bắn trúng con thú" thì biến cố "con thú bị bắn trúng" là biến cố

3.2. Biến cố tổng

Biến cố tổng

Biến cố C được gọi là *tổng của hai biến cố* A và B, ký hiệu $C = A + B$ (hoặc $A \cup B$), nếu C xảy ra khi và chỉ khi ít nhất một trong hai biến cố Avà B xảy ra.



$A + B$

Ví dụ 6

Hai người thợ săn cùng bắn một con thú. Nếu gọi A là biến cố "người thứ nhất bắn trúng con thú" và B là biến cố "người thứ hai bắn trúng con thú" thì biến cố "con thú bị bắn trúng" là biến cố $C = A + B$.

3.2. Biến cố tổng

Mở rộng

Biến cố A được gọi là tổng của các biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$, ký hiệu $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ (hoặc $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$), nếu A xảy ra khi và chỉ khi ít nhất một trong các biện cố A_i xảy ra, $i = 1, 2, \dots, n$.

Chú ý

- Mọi biến cố ngẫu nhiên đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của một số biến cố sơ cấp nào đó.
- Biến cố chắc chắn Ω là tổng của mọi biến cố sơ cấp có thể. Do đó Ω còn được gọi là không gian các biến cố sơ cấp.

Ví dụ 7

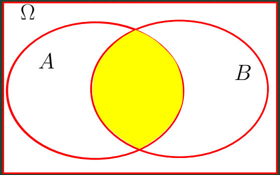
Tung một con xúc xắc. Ta có 6 biến cố sơ cấp $A_1, A_2, \dots, A_6$, trong đó A_i là biến cố xuất hiện mặt i chấm, $i = 1, 2, \dots, 6$.

- Biến cố A "xuất hiện mặt có số chấm lẻ", thì $A = A_1 + A_3 + A_5$.
- Biến cố B "xuất hiện mặt có số chấm chẵn", thì $A = A_2 + A_4 + A_6$.

3.3. Biến cố tích

Biến cố tích

- Biến cố C được gọi là *tích của hai biến cố* A và B, ký hiệu $C = AB$ (hoặc $A \cap B$), nếu C xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố Avà B cùng xảy ra.
- Biến cố A được gọi là tích của các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ký hiệu $A = A_1 A_2 \ldots A_n$ (hoặc $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$), nếu A xảy ra khi và chỉ khi tất cả các biến cố A_i xảy ra, $i = 1, 2, \ldots, n$.



AB

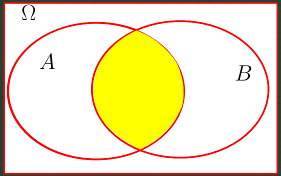
Ví dụ 8

Hai người thợ săn cùng bắn một con thú. Nếu gọi A là biến cố "người thứ nhất không bắn trúng con thú" và B là biến cố "người thứ hai không bắn trúng con thú" thì biến cố "con thú không bị bắn trúng" là

3.3. Biến cố tích

Biến cố tích

- Biến cố C được gọi là *tích của hai biến cố* A và B, ký hiệu $C = AB$ (hoặc $A \cap B$), nếu C xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố Avà B cùng xảy ra.
- Biến cố A được gọi là tích của các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ký hiệu $A = A_1 A_2 \ldots A_n$ (hoặc $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$), nếu A xảy ra khi và chỉ khi tất cả các biến cố A_i xảy ra, $i = 1, 2, \ldots, n$.



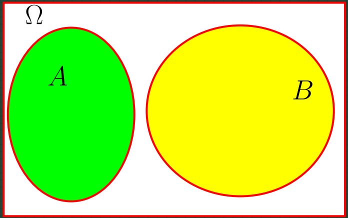
AB

Ví dụ 8

Hai người thợ săn cùng bắn một con thú. Nếu gọi A là biến cố "người thứ nhất không bắn trúng con thú" và B là biến cố "người thứ hai không bắn trúng con thú" thì biến cố "con thú không bị bắn trúng" là $C = AB$.

3.4. Hai biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B được gọi là *xung khắc* với nhau nếu chúng không đồng thời xảy ra trong cùng một phép thử. Như vậy, nếu A và B xung khắc thì $AB = \varnothing$.



$AB = \emptyset$

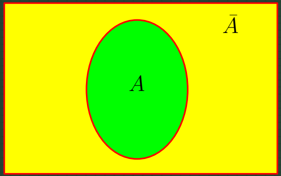
Ví dụ 9

Chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Gọi A là biến cố "sinh viên đó là nữ", B là biến cố "sinh viên đó là nam". Khi đó $AB = \varnothing$, tức là A, B là hai biến cố xung khắc.

3.5. Biến cố đối lập

Biến cố đối lập

- Biến cố không xảy ra biến cố A được gọi là *biến cố đối lập* (hay *biến cố đối*) của A, ký hiệu là $\bar{A}$.
- Biến cố A và $\bar{A}$ thoả mãn tính chất $A + \bar{A} = \Omega$ và $A\bar{A} = \varnothing$.



Ví dụ 10

Gieo một con xúc xắc một lần, khi đó

- A là biến cố "giao được mặt chẵn" thì $\bar{A}$ là biến cố "gieo được mặt lẻ".
- A là biến cố "giao được mặt một chấm" thì $\bar{A}$ là biến cố "gieo được mặt từ 2 chấm đến 6 chấm".

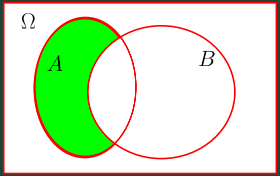
3.6. Biến cố hiệu

Biến cố hiệu

Biến cố C được gọi là *hiệu của hai biến cố* A và B, ký hiệu $C = A - B$, nếu C xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra nhưng B không xảy ra.

Chú ý

Biến cố hiệu biến đổi thành biến cố tích như sau: $A - B = A\bar{B}$.



$A - B$

3.7. Hệ đầy đủ các biến cố

Hệ đầy đủ các biến cố

Hệ n biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là *hệ đầy đủ các biến* cố nếu nhất định phải xảy ra một và chỉ một trong các biến cố ấy sau phép thử. Tức là $A_iA_j = \varnothing$ với $\forall i \neq j$ và $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$.

Chú ý

- Hệ gồm hai biến cố $\{A, \bar{A}\}$ là một hệ đầy đủ;
- Hệ gồm bốn biến cố $\{AB, \bar{A}B, A\bar{B}, \bar{A}\bar{B}\}$ là một hệ đầy đủ.

Chú ý

Xét phép thử gieo một con xúc xắc một lần.

- Gọi A_i là biến cố "gieo được mặt i chấm" với $i = 1, 2, \ldots, 6$. Khi đó hệ $\{A_1, A_2, \ldots, A_6\}$ là một hệ đầy đủ.
- Gọi A là biến cố "con xúc xắc xuất hiện mặt chẵn", B là biến cố "con xúc sắc xuất hiện mặt lẻ". Khi đó $\{A, B\}$ là một hệ đầy đủ.

Nội dung

BÀI 1. NHẮC LẠI VỀ GIẢI TÍCH TỔ HỢP

BÀI 2. BIẾN CỐ VÀ QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ

1. Phép thử và biến cố
2. Các loại biến cố
3. Quan hệ giữa các biến cố

BÀI 3. KHÁI NIỆM VÀ CÁC ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

1. Khái niệm xác suất
2. Các định nghĩa xác suất
3. Một số tính chất cơ bản về xác suất

BÀI 4. CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

1 Công thức xác suất có điều kiện

2. Công thức nhân xác suất
3. Công thức cộng xác suất
4. Công thức Bernoulli
5. Công thức xác suất đầy đủ
6. Công thức Bayes

1. Khái niệm xác suất

Nhận xét

- Mọi biến cố ngẫu nhiên đều giống nhau ở chỗ chúng có thể xảy ra hoặc không xảy ra (không chắc chắn) nhưng khả năng xảy ra của từng biến cố lại có khả năng khác nhau.
- Để đặc trưng cho khả năng xảy ra của các biến cố người ta dùng con số, biến cố nào có khả năng xảy ra nhiều hơn được đặc trưng bởi con số lớn hơn và ngược lại. Con số đặc trưng cho khả năng xuất hiện của một biến cố gọi là xác suất (probability) của biến cố đó.

Định nghĩa

Xác suất của một biến cố A là một số nằm giữa 0 và 1, số này đặc trưng cho khả năng xuất hiện của biến cố đó khi phép thử được thực hiện. Ký hiệu là $P(A)$.

2. Các định nghĩa xác suất

2.1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Định nghĩa

Giả sử trong một phép thử có n kết quả đồng khả năng có thể xảy ra, trong đó có m kết quả thuận lợi cho biến cố A. Khi đó

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{số kết quả thuận lợi cho biến cố } A}{\text{tổng số kết quả có thể}} \tag{5}$$

2.1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Ví dụ 1

Một nhóm sinh viên có 4 nam và 3 nữ. Giảng viên cần chọn ra 3 em. Tính xác xuất để chọn ra được 2 em nam và 1 em nữ.

2.1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Ví dụ 1

Một nhóm sinh viên có 4 nam và 3 nữ. Giảng viên cần chọn ra 3 em. Tính xác xuất để chọn ra được 2 em nam và 1 em nữ.

Lời giải

Số kết quả đồng khả năng có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là:
$|\Omega| = C_7^3 = 35.$

2.1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Ví dụ 1

Một nhóm sinh viên có 4 nam và 3 nữ. Giảng viên cần chọn ra 3 em. Tính xác xuất để chọn ra được 2 em nam và 1 em nữ.

Lời giải

Số kết quả đồng khả năng có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là: $|\Omega| = C_7^3 = 35$. Số kết quả thuận lợi cho biến cố A "chọn ra được 2 em nam và 1 em nữ" là: $|A| = C_4^2 \times C_3^1 = 18$.

2.1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Ví dụ 1

Một nhóm sinh viên có 4 nam và 3 nữ. Giảng viên cần chọn ra 3 em. Tính xác xuất để chọn ra được 2 em nam và 1 em nữ.

Lời giải

Số kết quả đồng khả năng có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là: $|\Omega| = C_7^3 = 35$. Số kết quả thuận lợi cho biến cố A "chọn ra được 2 em nam và 1 em nữ" là: $|A| = C_4^2 \times C_3^1 = 18$. Do đó $P(A) = \dfrac{18}{35}$.

2.1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Ví dụ 2

Ba nữ nhân viên phục vụ thay nhau rửa bát đĩa và giả sử ba người này đều "khéo léo" như nhau. Trong một tháng có 4 bát bị vỡ. Tìm xác suất để

- Nhân viên ít tuổi nhất đánh vỡ 3 bát và chị nhân viên nhiều tuổi nhất đánh vỡ 1 bát;
- Một trong ba nhân viên đánh vỡ cả 4 bát.

2.1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Lời giải

Số kết quả đồng khả năng có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là:
$|\Omega| = 3^4 = 81.$

2.1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Lời giải

Số kết quả đồng khả năng có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là:
$|\Omega| = 3^4 = 81.$

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố A "nhân viên ít tuổi nhất đánh vỡ 3 bát và chị nhân viên nhiều tuổi nhất đánh vỡ 1 bát" là

2.1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Lời giải

Số kết quả đồng khả năng có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là:
$|\Omega| = 3^4 = 81.$

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố A "nhân viên ít tuổi nhất đánh vỡ 3 bát và chị nhân viên nhiều tuổi nhất đánh vỡ 1 bát" là $|A| = C_4^3 \times 1 = 4.$

2.1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Lời giải

Số kết quả đồng khả năng có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là:
$|\Omega| = 3^4 = 81.$

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố A "nhân viên ít tuổi nhất đánh vỡ 3 bát và chị nhân viên nhiều tuổi nhất đánh vỡ 1 bát" là $|A| = C_4^3 \times 1 = 4$. Do đó $P(A) = \dfrac{4}{81}$.

2.1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Lời giải

Số kết quả đồng khả năng có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là:
$|\Omega| = 3^4 = 81$.

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố A "nhân viên ít tuổi nhất đánh vỡ 3 bát và chị nhân viên nhiều tuổi nhất đánh vỡ 1 bát" là $|A| = C_4^3 \times 1 = 4$. Do đó $P(A) = \dfrac{4}{81}$.
- Số kết quả thuận lợi cho biến cố B "một trong ba nhân viên đánh vỡ cả 4 bát" là

2.1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Lời giải

Số kết quả đồng khả năng có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là: $|\Omega| = 3^4 = 81$.

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố A "nhân viên ít tuổi nhất đánh vỡ 3 bát và chị nhân viên nhiều tuổi nhất đánh vỡ 1 bát" là $|A| = C_4^3 \times 1 = 4$. Do đó $P(A) = \dfrac{4}{81}$.
- Số kết quả thuận lợi cho biến cố B "một trong ba nhân viên đánh vỡ cả 4 bát" là $|B| = C_3^1 \times C_4^4 = 3$.

2.1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển

Lời giải

Số kết quả đồng khả năng có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là:
$|\Omega| = 3^4 = 81$.

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố A "nhân viên ít tuổi nhất đánh vỡ 3 bát và chị nhân viên nhiều tuổi nhất đánh vỡ 1 bát" là $|A| = C_4^3 \times 1 = 4$. Do đó $P(A) = \dfrac{4}{81}$.
- Số kết quả thuận lợi cho biến cố B "một trong ba nhân viên đánh vỡ cả 4 bát" là $|B| = C_3^1 \times C_4^4 = 3$. Do đó $P(B) = \dfrac{1}{27}$.

2.2. Định nghĩa thống kê về xác suất

Nhận xét

- Định nghĩa xác suất cổ điển có hai hạn chế, thứ nhất là số kết quả của phép thử là hữu hạn, thứ hai các kết quả của phép thử phải đồng khả năng xuất hiện.
- Trong nhiều bài toán thực tế điều kiện các kết quả của phép thử đồng khả năng thường khó khăn. Trong trường hợp này ra dùng định nghĩa xác xuất theo quan điểm thống kê.

2.2. Định nghĩa thống kê về xác suất

Định nghĩa

Giả sử trong một điều kiện nào đó ta có thể lặp lại n lần một phép thử và thấy có m lần xuất hiện biến cố A thì khi đó tỉ số $\dfrac{m}{n}$ được gọi là tần suất xuất hiện A, ký hiệu là $f(A)$. Như vậy

$$f(A) = \frac{m}{m}. \tag{6}$$

Khi $n \to \infty$, tần xuất f đạt giá trị ổn định và giá trị đó được xem là xác suất của biến cố A.

2.2. Định nghĩa thống kê về xác suất

Ví dụ 5

Để xác định tần suất xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu nhiều lần, người ta ghi lại kết quả sau:

Người thí nghiệm	Số lần tung n	Số lần xuất hiện mặt sấp m	Tần suất f
Magan	2048	1061	0,5181
Phổ Phong	4040	2048	0,5069
K.Borsun	12000	6019	0,5016
K.Borsun	24000	12012	0,5005

2.2. Định nghĩa thống kê về xác suất

Ví dụ 5

Để xác định tần suất xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu nhiều lần, người ta ghi lại kết quả sau:

Người thí nghiệm	Số lần tung n	Số lần xuất hiện mặt sấp m	Tần suất f
Magan	2048	1061	0,5181
Phổ Phong	4040	2048	0,5069
K.Borsun	12000	6019	0,5016
K.Borsun	24000	12012	0,5005

Ví dụ 6

Để xác định xác xuất của một người đàn ông 25 tuổi sẽ bị chết trong vòng một năm sắp tới, người ta theo dõi 100.000 nam thanh niên 25 tuổi và thấy có 138 người chết. Vậy xác suất cần tìm xấp xỉ bằng

$$\frac{138}{100.000} = 0,00138.$$

3. Một số tính chất cơ bản về xác suất

Một số tính chất cơ bản về xác suất

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(\Omega) = 1$;
- $P(\varnothing) = 0$;
- Nếu $A \subseteq B$ thì $P(A) \leq P(B)$.
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

3. Một số tính chất cơ bản về xác suất

Ví dụ

Nếu hai tung hai viên xúc xắc cân đối, tính xác suất chênh lệch kết quả giữa hai lần tung nhỏ hơn 3.

Giải

$S = \{(a, b) \mid a = 1, 2, \ldots, 6, b = 1, 2, \ldots, b\}, |S| = 36.$

3. Một số tính chất cơ bản về xác suất

Ví dụ

Nếu hai tung hai viên xúc xắc cân đối, tính xác suất chênh lệch kết quả giữa hai lần tung nhỏ hơn 3.

Giải

$S = \{(a, b) \mid a = 1, 2, \ldots, 6, b = 1, 2, \ldots, b\}, |S| = 36$. Đặt A là biến cố "chênh lệch giữa hai lần tung nhỏ hơn 3" (tức là bằng 0, 1 hoặc 2).

3. Một số tính chất cơ bản về xác suất

Ví dụ

Nếu hai tung hai viên xúc xắc cân đối, tính xác suất chênh lệch kết quả giữa hai lần tung nhỏ hơn 3.

Giải

$S = \{(a, b) \mid a = 1, 2, \dots, 6, b = 1, 2, \dots, b\}, |S| = 36$. Đặt A là biến cố "chênh lệch giữa hai lần tung nhỏ hơn 3" (tức là bằng 0, 1 hoặc 2).

$$\begin{aligned} A = &\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)(5,5),(6,6) \\ &(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(1,3),(2,4),(3,5),(4,6) \\ &(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5),(3,1),(4,2),(5,3),(6,4)\} \end{aligned}$$

3. Một số tính chất cơ bản về xác suất

Ví dụ

Nếu hai tung hai viên xúc xắc cân đối, tính xác suất chênh lệch kết quả giữa hai lần tung nhỏ hơn 3.

Giải

$S = \{(a, b) \mid a = 1, 2, \ldots, 6, b = 1, 2, \ldots, b\}, |S| = 36$. Đặt A là biến cố "chênh lệch giữa hai lần tung nhỏ hơn 3" (tức là bằng 0, 1 hoặc 2).

$$\begin{aligned} A = &\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)(5,5),(6,6)\\ &(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\\ &(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5),(3,1),(4,2),(5,3),(6,4)\} \end{aligned}$$

Suy ra $|A| = 24$, $P(A) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

Nội dung

BÀI 1. NHẮC LẠI VỀ GIẢI TÍCH TỔ HỢP

BÀI 2. BIẾN CỐ VÀ QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ

1. Phép thử và biến cố
2. Các loại biến cố
3. Quan hệ giữa các biến cố

BÀI 3. KHÁI NIỆM VÀ CÁC ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

1. Khái niệm xác suất
2. Các định nghĩa xác suất
3. Một số tính chất cơ bản về xác suất

BÀI 4. CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

1 Công thức xác suất có điều kiện

2. Công thức nhân xác suất
3. Công thức cộng xác suất
4. Công thức Bernoulli
5. Công thức xác suất đầy đủ
6. Công thức Bayes

1. Công thức xác suất có điều kiện

Định nghĩa

Giả sử trong một phép thử ta có $P(B) > 0$. Khi đó *xác suất có điều kiện* của biến cố A nào đó xảy ra, biết rằng đã xảy ra biến cố B là ký hiệu là $P(A|B)$ và được tính bởi

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{7}$$

Tương tự

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \text{ với } P(A) > 0. \tag{8}$$

1. Công thức xác suất có điều kiện

Ví dụ 1

Trong một thùng có 10 chi tiết máy, trong đó có 3 chi tiết hỏng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại 2 chi tiết máy. Tính xác suất để chi tiết máy thứ hai lấy ra là hỏng biết rằng chi tiết máy thứ nhất lấy ra là hỏng.

1. Công thức xác suất có điều kiện

Ví dụ 1

Trong một thùng có 10 chi tiết máy, trong đó có 3 chi tiết hỏng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại 2 chi tiết máy. Tính xác suất để chi tiết máy thứ hai lấy ra là hỏng biết rằng chi tiết máy thứ nhất lấy ra là hỏng.

Lời giải

Gọi A_i là biến cố "chi tiết máy thứ i lấy ra là hỏng", $i = 1, 2$. Khi đó

$$P(A_2|A_1) = \frac{C_2^1}{C_9^1} = \frac{2}{9}.$$

2. Công thức nhân xác suất

Tính độc lập của các biến cố

- Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu biến cố này xảy ra hay không xảy ra không làm ảnh hưởng tới khả năng xảy ra của biến cố kia, tức là

$$P(A|B) = P(A|\bar{B}) = P(A), \qquad P(B|A) = P(B|\bar{A}) = P(B).$$

- Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập từng đôi một với nhau nếu mỗi cặp 2 trong các biến cố đó độc lập với nhau.
- Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập trong tổng thể nếu mỗi biến cố trong chúng độc lập với tích của một số bất kỳ biến cố trong các biến cố còn lại.
- Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì các cặp sau cũng độc lập: A và $\bar{B}$; $\bar{A}$ và $\bar{B}$; $\bar{A}$ và B.

2. Công thức nhân xác suất

2. Công thức nhân xác suất

(i) Nếu A và B là hai biến cố bất kỳ:

$$P(AB) = P(A)P(A|B) = P(B)P(A|B). \tag{9}$$

(ii) Nếu A và B là hai biến cố độc lập:

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{10}$$

(iii) Mở rộng cho các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}). \tag{11}$$

(iii) Nếu các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ độc lập trong tổng thể:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \tag{12}$$

2. Công thức nhân xác suất

Ví dụ 2

Có 4 quả cầu trong thùng kín trong đó có 3 quả cầu trắng và một quả cầu đỏ. Bốn người lần lượt lên lấy ngẫu nhiên một quả cầu. Tính xác suất để người thứ i lấy được cầu đỏ ($i = 1, 2, 3, 4$.)

2. Công thức nhân xác suất

Ví dụ 2

Có 4 quả cầu trong thùng kín trong đó có 3 quả cầu trắng và một quả cầu đỏ. Bốn người lần lượt lên lấy ngẫu nhiên một quả cầu. Tính xác suất để người thứ i lấy được cầu đỏ ($i = 1, 2, 3, 4.$)

Lời giải

Gọi A_i là biến cố "người thứ i lấy được cầu đỏ",$i = 1, 2, 3, 4$. Khi đó,

$$P(A_1) = \frac{1}{4};$$

$$P(A_2) = P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{3}{4}\frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$

$$P(A_3) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2) = \frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$P(A_4) = \frac{1}{4}.$$

Vậy xác suất 4 người lấy được cầu đỏ là như nhau và bằng $\frac{1}{4}$.

2. Công thức nhân xác suất

Ví dụ 3

Một người tung đồng xu cân đối và đồng chất ba lần. Tính xác xuất để cả ba lần đều xuất hiện mặt ngửa.

2. Công thức nhân xác suất

Ví dụ 3

Một người tung đồng xu cân đối và đồng chất ba lần. Tính xác xuất để cả ba lần đều xuất hiện mặt ngửa.

Lời giải

Gọi A_i là biến cố "lần tung đồng xu thứ i xuất hiện mặt ngửa", $i = 1, 2, 3$. $P(A_i) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, 3$. Gọi A là biến cố "cả ba lần tung đều xuất hiện mặt ngửa". Vì A_1, A_2, A_3 độc lập trong tổng thể nên

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

3. Công thức cộng xác suất

Công thức cộng xác suất

(i) Nếu A và B là hai biến cố bất kỳ:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{13}$$

(ii) Nếu A và B là hai biến cố xung khắc:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{14}$$

(iii) Mở rộng cho các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\ldots A_n). \tag{15}$$

(iii) Nếu các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xung khắc từng đôi một:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{16}$$

3. Công thức cộng xác suất

Ví dụ 4

Một lô hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên đồng thời lô hàng ra 6 sản phẩm. Tìm xác suất để có không quá 1 phế phẩm trong 6 sản phẩm được lấy ra.

3. Công thức cộng xác suất

Ví dụ 4

Một lô hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên đồng thời lô hàng ra 6 sản phẩm. Tìm xác suất để có không quá 1 phế phẩm trong 6 sản phẩm được lấy ra.

Lời giải

Gọi A là biến cố "không có phế phẩm trong 6 sản phẩm";
B là biến cố "có đúng 1 phế phẩm trong 6 sản phẩm";
C là biến cố "có không quá 1 phế phẩm trong 6 sản phẩm". Khi đó ta có $C = A + B$, A, B là hai biến cố xung khắc. Do đó

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{C_8^6}{C_{10}^6} + \frac{C_2^1 C_8^5}{C_{10}^6} = \frac{2}{15} + \frac{8}{15} = \frac{2}{3}.$$

3. Công thức cộng xác suất

Ví dụ 5

Một lớp có 100 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên giỏi ngoại ngữ, 30 sinh viên giỏi toán, 20 sinh viên giỏi cả hai môn. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên, tính xác suất để sinh viên đó giỏi ít nhất 1 trong hai môn trên.

3. Công thức cộng xác suất

Ví dụ 5

Một lớp có 100 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên giỏi ngoại ngữ, 30 sinh viên giỏi toán, 20 sinh viên giỏi cả hai môn. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên, tính xác suất để sinh viên đó giỏi ít nhất 1 trong hai môn trên.

Lời giải

Gọi A là biến cố "sinh viên chọn ra giỏi ngoại ngữ";
B là biến cố "sinh viên chọn ra giỏi toán";
C là biến cố "sinh viên chọn ra giỏi ít nhất 1 trong 2 môn". Khi đó ta có $C = A + B$, Do đó

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{40}{100} + \frac{30}{100} - \frac{20}{100} = \frac{1}{2}.$$

4. Công thức Bernoulli

Định nghĩa

Những bài toán thoả mãn cả ba điều kiện sau đây được gọi là tuân theo lược đồ Bernoulli hay dãy phép thử Bernoulli:

(i) Xét một dãy n phép thử độc lập giống nhau;

(ii) Mỗi phép thử chỉ có hai khả năng: Hoặc xảy ra biến cố A hoặc xảy ra biến cố $\bar{A}$;

(iii) $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ không phụ thuộc vào thứ tự của phép thử.

4. Công thức Bernoulli

Định nghĩa

Những bài toán thoả mãn cả ba điều kiện sau đây được gọi là tuân theo lược đồ Bernoulli hay dãy phép thử Bernoulli:

(i) Xét một dãy n phép thử độc lập giống nhau;

(ii) Mỗi phép thử chỉ có hai khả năng: Hoặc xảy ra biến cố A hoặc xảy ra biến cố $\bar{A}$;

(iii) $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ không phụ thuộc vào thứ tự của phép thử.

Ví dụ 6

(i) Gieo một đồng xu liên tiếp 50 lần, quan tâm biến cố ra mặt sấp.

(ii) 5 xạ thủ, mỗi người bắn 1 viên đạn vào mục tiêu. Quan tâm đến số viên đạn trúng mục tiêu.

(iii) Gieo một con xúc xắc 20 lần, quan tâm đến biến cố ra mặt 1 chấm.

4. Công thức Bernoulli

Công thức Bernoulli

Trong dãy n phép thử Bernoulli

(i) Xác suất để biến cố A xuất hiện đúng k lần, ký hiệu là $P_n(k)$, được xác định bởi

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \ \ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{17}$$

(ii) Xác suất để biến cố A xuất hiện từ k_1 đến k_2 lần, ký hiệu là $P_n(k_1, k_2)$:

$$P_n(k_1, k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = \sum C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{18}$$

Nhận xét

Một bài toán thoả mãn lược đồ Bernoulli thì việc sử dụng công thức Bernoulli sẽ đơn giản hơn rất nhiều so với việc dùng công thức nhân và cộng xác suất.

4. Công thức Bernoulli

Ví dụ 7

Có một nhóm 9 xạ thủ bắn độc lập vào bia, xác xuất bắn trúng của mỗi xạ thủ là 0,7. Tìm xác suất để:

(i) Có đúng 5 xạ thủ bắn trúng bia.

(ii) Có ít nhất 1 xạ thủ bắn trúng bia.

4. Công thức Bernoulli

Lời giải

Gọi A là biến cố "xạ thủ bắn trúng bia". Bài toán thoả mãn lược đồ Bernoulli với $n = 9$, $p = P(A) = 0,7$, $q = 0,3$. Khi đó

(i) Gọi B là biến cố "Có đúng 5 xạ thủ bắn trúng bia". Khi đó

$$P(B) = P_9(5) = C_9^5 p^5 q^4 = C_9^5 (0,7)^5 (0,3)^4 = 0,17.$$

(ii) Gọi C là biến cố "có ít nhất 1 xạ thủ bắn trúng bia" thì $\bar{B}$ là biến cố "không có xạ thủ nào bắn trúng bia". Ta có

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P_9(0) = 1 - (0,3)^9 = 0,9999.$$

4. Công thức Bernoulli

Số có khả năng nhất trong lược đồ Bernoulli

Trong lược đồ Bernoulli, số x_0 mà tại đó xác suất đạt giá trị lớn nhất gọi là số có khả năng nhất (hay số có lần xuất hiện chắc chắn nhất).

(i) Nếu $np - q \in \mathbb{Z}$ thì có hai số có khả năng nhất là $x_0 = np - q$ và $x_0 = np - q + 1$.

(ii) Nếu $np - q \notin \mathbb{Z}$ thì $x_0 = [np - q] + 1$.

4. Công thức Bernoulli

Số có khả năng nhất trong lược đồ Bernoulli

Trong lược đồ Bernoulli, số x_0 mà tại đó xác suất đạt giá trị lớn nhất gọi là số có khả năng nhất (hay số có lần xuất hiện chắc chắn nhất).

(i) Nếu $np - q \in \mathbb{Z}$ thì có hai số có khả năng nhất là $x_0 = np - q$ và $x_0 = np - q + 1$.

(ii) Nếu $np - q \notin \mathbb{Z}$ thì $x_0 = [np - q] + 1$.

Ví dụ 8

Tỷ lệ có phế phẩm của một lô hàng là 10%. Người ta kiểm tra 100 sản phẩm. Tìm số sản phẩm là phế phẩm có khả năng nhất? Tính xác suất tương ứng.

4. Công thức Bernoulli

Số có khả năng nhất trong lược đồ Bernoulli

Trong lược đồ Bernoulli, số x_0 mà tại đó xác suất đạt giá trị lớn nhất gọi là số có khả năng nhất (hay số có lần xuất hiện chắc chắn nhất).

(i) Nếu $np - q \in \mathbb{Z}$ thì có hai số có khả năng nhất là $x_0 = np - q$ và $x_0 = np - q + 1$.

(ii) Nếu $np - q \notin \mathbb{Z}$ thì $x_0 = [np - q] + 1$.

Ví dụ 8

Tỷ lệ có phế phẩm của một lô hàng là 10%. Người ta kiểm tra 100 sản phẩm. Tìm số sản phẩm là phế phẩm có khả năng nhất? Tính xác suất tương ứng.

Lời giải

Bài toán thoả mãn lược đồ Bernoulli với $n = 100$; $p = 0,1$; $q = 0,9$. Theo bài ra ta có $np - q = 100.0,1 - 0,9 = 9,1 \notin \mathbb{Z}$. Vậy số sản phẩm có khả năng nhất khi kiểm tra 100 sản phẩm là [9,1] $+\ 1 = 10$. Xác suất tương ứng là $P_{100}(10) = C_{100}^{10}(0,1)^{10}(0,9)^{90}$.

5. Công thức xác suất đầy đủ

Công thức xác suất đầy đủ

Bài toán chia thành hai công đoạn, công đoạn 1 chia thành n biến cố A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, công đoạn 2 có một kết quả là biến cố H. Mỗi biến cố của công đoạn 1 sẽ có ảnh hưởng giống nhau lên khả năng xảy ra H.

- Mục tiêu: Tính xác suất xảy ra kết quả H sau 2 công đoạn.
- Khó khăn: Kết quả của công đoạn 2 phụ thuộc vào kết quả của công đoạn 1.

5. Công thức xác suất đầy đủ

Công thức xác suất đầy đủ

Giả sử các biến cố A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ lập thành một hệ đầy đủ và H là một biến cố nào đó. Khi đó

$$P(H) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(H|A_i) \tag{19}$$

Công thức (19) được gọi là công thức xác suất đầy đủ. Công thức này cho ta tính được xác suất $P(H)$ nếu biết các xác suất $P(A_i)$ và $P(H|A_i)$ với $i = 1, 2, \ldots, n$.

5. Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ 9

Xét một lô sản phẩm có số lượng rất lớn trong số sản phẩm do phân xưởng I sản xuất chiếm 20%, phân xưởng II sản xuất chiếm 30%, phân xưởng III sản xuất chiếm 50%. Xác suất phế phẩm của phân xưởng I là 0,001; phan xưởng 2 là 0,005; phân xưởng III là 0,006. Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm của lô hàng. Tìm xác suất để sản phẩm đó là phế phẩm.

Lời giải

Gọi H là biến cố "sản phẩm lấy ra là phế phẩm"; A_i là biến cố "sản phẩm lấy ra do phân xưởng i sản xuất" với $i = 1, 2, 3$. Ta có hệ $\{A_1, A_2, A_3\}$ là một hệ đầy đủ và

$$P(A_1) = 0,2; P(A_2) = 0,3; P(A_3) = 0,5.$$
$$P(H|A_1) = 0,001; P(H|A_2) = 0,005; P(H|A_3) = 0,006.$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có

$$P(H) = P(A_1)P(H|A_1) + P(A_2)P(H|A_2) + P(A_3)P(H|A_3) = 0,0047.$$

Ý nghĩa của xác suất này là tỉ lệ phế phẩm của cả nhà máy.

5. Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ 10

Thùng thứ nhất đựng 9 sách Toán và 1 sách Lý, thùng thứ hai đựng 1 sách Toán và 5 sách Lý.

(i) Từ mỗi thùng lấy ngẫu nhiên ra 1 quyển sách, tính xác suất lấy được 2 cuốn sách toán.

(ii) Sau khi lấy ngẫu nhiên từ mỗi thùng một cuốn sách, các sách còn lại dồn hết về thùng thứ ba. Từ thùng thứ ba lấy ngẫu nhiên 1 quyển sách. Tính xác suất sách lấy ra từ thùng ba là sách Lý.

6. Công thức Bayes

Nhận xét

(i) Trong công thức xác suất đầy đủ, H là biến cố kết quả, còn các biến cố A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ là nguyên nhân. Nếu biết nguyên nhân nào xảy ra thì ta xác định được xác suất xảy ra H.

(ii) Bây giờ ngược lại, ta đã biết được kết quả xảy ra H, muốn tính xác suất để nguyên nhân thứ i xảy ra là bao nhiêu, tức là tính $P(A_k|H)$. Các $P(A_i)$ được gọi là xác suất tiên nghiệm còn $P(A_k|H)$ được gọi là xác suất hậu nghiệm. Công thức Bayes cho phép đánh giá lại xác suất xảy ra của các biến cố A_i sau khi đã có thông tin về H.

6. Công thức Bayes

Công thức Bayes

Giả sử các biến cố A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ lập thành một hệ đầy đủ và H là một biến cố nào đó. Khi đó

$$P(A_k|H) = \frac{P(A_k)P(H|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(H|A_i)} = \frac{P(A_k)P(H|A_k)}{P(H)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Công thức (20) được gọi là công Bayes.

6. Công thức Bayes

Ví dụ 11

Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn tốt là 90%. Trước khi xuất ra thị trường mỗi bóng đèn dều được kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không tuyệt đối nên một bóng đèn tốt có xác xuất 0,9 được công nhận tốt, còn một bóng đèn hỏng có xác suất 0,95 bị loại bỏ.

(i) Tính tỉ lệ bóng qua được kiểm tra chất lượng.

(ii) Tính tỉ lệ bóng qua được kiểm tra chất lượng mà lại là bóng hỏng.

6. Công thức Bayes

Lời giải

Gọi A là biến cố "bóng đèn thuộc loại tốt"; B là biến cố "bóng đèn thuộc loại hỏng"; H là biến cố "bóng qua được kiểm tra chất lượng". Ta có A, B là một hệ đầy đủ và $P(A) = 0,9$; $P(B) = 0,1$; $P(H|A) = 0,9$, $P(H|B) = 0,05$.

6. Công thức Bayes

Lời giải

Gọi A là biến cố "bóng đèn thuộc loại tốt"; B là biến cố "bóng đèn thuộc loại hỏng"; H là biến cố "bóng qua được kiểm tra chất lượng". Ta có A, B là một hệ đầy đủ và $P(A) = 0,9$; $P(B) = 0,1$; $P(H|A) = 0,9$, $P(H|B) = 0,05$.

(i) Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có

$$P(H) = P(A)P(H|A) + P(B)P(H|B) = 0,815.$$

6. Công thức Bayes

Lời giải

Gọi A là biến cố "bóng đèn thuộc loại tốt"; B là biến cố "bóng đèn thuộc loại hỏng"; H là biến cố "bóng qua được kiểm tra chất lượng". Ta có A, B là một hệ đầy đủ và $P(A) = 0,9; P(B) = 0,1;\ P(H|A) = 0,9, P(H|B) = 0,05.$

(i) Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có

$$P(H) = P(A)P(H|A) + P(B)P(H|B) = 0,815.$$

(ii) Áp dụng công thức Bayes ta có tỉ lệ bóng qua được kiểm tra chất lượng mà lại là bóng hỏng là

$$P(B|H) = \frac{P(B)P(H|B)}{P(H)} = 0,0061.$$

6. Công thức Bayes

Ví dụ 12

Một trạm phát 2 loại tín hiệu A và Bvowis xác suất tương ứng là 0,84; 0,16. Do có nhiều tín hiệu trên đường truyền nên 1/7 tín hiệu A bị méo thành tín hiệu B, còn 1/9 tín hiệu B bị méo thành tín hiệu A.

(i) Tìm xác suất thu được tín hiệu A

(ii) Giả sử tín hiệu thu được là A, tìm xác suất để thu được tín hiệu A lúc phát.

6. Công thức Bayes

Lời giải

- Gọi P_A là biến cố "Trạm phát ra tín hiệu A", P_B là biến cố "Trạm phát ra tín hiệu B".
- Gọi T_A là biến cố "Thu được tín hiệu A", T_B là biến cố "Thu được tín hiệu B".

Theo giả thiết: $P(P_A) = 0,84; P(P_B) = 0,16, P(T_A|P_B) = 1/9, P(T_B|P_A) = 1/7$. Vì $P(P_A)P(T_A|P_A) = P(1 - \bar{P}_A|P_A) = P(1 - P(T_B|P_A)) = 1 - 1/7 = 6/7$. i) Áp dụng công thức xác suất đầy đủ cho hệ đầy đủ $\{P_A, P_B\}$ ta có:

$$P(T_A) = P(P_A)P(T_A|P_A) + P(P_B)P(T_A|P_B) = 0,84.6/7 + 0,16.1/9 \simeq 0,74.$$

ii) Xác suất cần tìm là $P(T_A|P_A)$ được tính theo công thức Bayes như sau:

$$P(P_A|T_A) = \frac{P(P_A)P(T_A|P_A)}{P(T_A)} = \frac{0,84.6/7}{0,74} \simeq 0,98.$$