CHƯƠNG I: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ XÁC SUẤT

Các hiện tượng trong tự nhiên hay xã hội xảy ra một cách ngẫu nhiên (không biết trước kết quả) hoặc tất định (biết trước kết quả sẽ xảy ra). Chẳng hạn một vật nặng được thả từ trên cao chắc chắn sẽ rơi xuống đất, trong điều kiện bình thường nước sôi ở 100^0C ... Đó là những hiện tượng diễn ra có tính quy luật, tất nhiên. Trái lại khi tung đồng xu ta không biết mặt sấp hay mặt ngửa sẽ xuất hiện. Ta không thể biết trước có bao nhiêu cuộc gọi đến tổng đài, có bao nhiêu khách hàng đến điểm phục vụ trong khoảng thời gian nào đó. Ta không thể xác định trước chỉ số chứng khoán trên thị trường chứng khoán… Đó là những hiện tượng ngẫu nhiên. Tuy nhiên, nếu tiến hành quan sát khá nhiều lần một hiện tượng ngẫu nhiên trong những hoàn cảnh như nhau, thì trong nhiều trường hợp ta có thể rút ra những kết luận có tính quy luật về những hiện tượng này. Lý thuyết xác suất nghiên cứu các qui luật của các hiện tượng ngẫu nhiên. Việc nắm bắt các quy luật này sẽ cho phép dự báo các hiện tượng ngẫu nhiên đó sẽ xảy ra như thế nào. Chính vì vậy các phương pháp của lý thuyết xác suất được ứng dụng rộng rãi trong việc giải quyết các bài toán thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học tự nhiên, kỹ thuật và kinh tế-xã hội.

Chương này trình bày một cách có hệ thống các khái niệm và các kết quả chính về lý thuyết xác suất

1.1 PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

1.1.1 Phép thử (Experiment)

Trong thực tế ta thường gặp nhiều thí nghiệm, quan sát mà các kết quả của nó không thể dự báo trước được. Ta gọi chúng là các phép thử ngẫu nhiên.

Với phép thử gieo con xúc xắc (6 mặt), tuy không biết kết quả sẽ xảy ra như thế nào, nhưng ta có thể liệt kê được hoặc biểu diễn tất cả các kết quả của phép thử này; đó là sự xuất hiện mặt có số chấm $1,2,3,4,5,6$. Ta xem các kết quả này là các *biến cố sơ cấp*. Tập hợp tất cả các biến cố sơ cấp của phép thử được gọi là *không gian mẫu*, ký hiệu Ω.

Không gian mẫu của phép thử gieo con xúc xắc là $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Ví dụ 1.1:

- Phép thử tung đồng xu có không gian mẫu là $\Omega = \{S, N\}$.
- Phép thử tung đồng thời 2 đồng xu có không gian mẫu là

$$\Omega = \{(S,S),(S,N),(N,S),(N,N)\}.$$

Chú ý rằng bản chất của các biến cố sơ cấp không có vai trò đặc biệt gì trong lý thuyết xác suất. Chẳng hạn có thể mã hóa các kết quả và xem không gian mẫu của phép thử tung đồng xu là $\Omega = \{0, 1\}$, trong đó 0 là biến cố sơ cấp chỉ mặt sấp xuất hiện và 1 để chỉ mặt ngửa xuất hiện.

1.1.2 Biến cố (Event)

Với phép thử $\mathcal{C}$ ta thường xét các biến cố (còn gọi là sự kiện) mà việc xảy ra hay không xảy ra biến cố đó hoàn toàn được xác định bởi kết quả của $\mathcal{C}$.

Mỗi kết quả ω của phép thử $\mathcal{C}$ được gọi là kết quả thuận lợi cho biến cố A nếu A xảy ra khi kết quả của phép thử $\mathcal{C}$ là ω.

Ví dụ 1.2: Nếu gọi A là biến cố "số chấm xuất hiện là chẵn" trong phép thử tung xúc xắc (6 mặt) thì A có các kết quả thuận lợi là 2, 4, 6.

Tung hai đồng xu, biến cố xuất hiện một mặt sấp một mặt ngửa (xin âm dương) có các kết quả thuận lợi là (S,N); (N,S).

Nhận xét 1.1:

1. Có thể đồng nhất mỗi biến cố A với một tập con của không gian mẫu Ω bao gồm các kết quả thuận lợi đối với A.

2. Mỗi biến cố chỉ có thể xảy ra khi một phép thử được thực hiện, nghĩa là gắn với không gian mẫu nào đó.

Có hai biến cố đặc biệt sau:

- *Biến cố chắc chắn* là biến cố luôn luôn xảy ra khi thực hiện phép thử. Không gian mẫu Ω là một biến cố chắc chắn.
- *Biến cố không thể* là biến cố nhất định không xảy ra khi thực hiện phép thử. Biến cố không thể được ký hiệu $\varnothing$.

Tung một con xúc xắc, biến cố xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn hay bằng 6 là biến chắc chắn, biến cố xuất hiện mặt có 7 chấm là biến cố không thể.

1.1.3 Quan hệ giữa các biến cố

Một cách tương ứng với các phép toán của tập hợp, trong lý thuyết xác suất người ta xét các quan hệ sau đây cho các biến cố trong cùng một phép thử.

a) Quan hệ kéo theo

Biến cố A kéo theo biến cố B, ký hiệu $A \subset B$, nếu khi A xảy ra thì B xảy ra.

Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói hai biến cố A, B trùng nhau, ký hiệu $A = B$.

b) Quan hệ biến cố đối

Với mỗi biến cố A, luôn có biến cố gọi là biến cố đối của A, ký hiệu $\overline{A}$ và được xác định như sau: A xảy ra khi và chỉ khi $\overline{A}$ không xảy ra.

Ví dụ 1.3: Bắn một phát đạn vào bia. Gọi A là biến cố "bắn trúng bia". Biến cố đối của A là $\overline{A}$ "bắn trượt bia".

c) Tổng của hai biến cố

Tổng của hai biến cố A, B là biến cố được ký hiệu $A \cup B$. Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi có ít nhất A hoặc B xảy ra.

Tổng của một dãy các biến cố $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là biến cố $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Biến cố này xảy ra khi có ít nhất một trong các biến cố A_i xảy ra ($i = 1, ..., n$).

Ví dụ 1.4: Một mạng điện gồm hai bóng đèn mắc nối tiếp. Gọi A_1 là biến cố "bóng đèn thứ nhất bị cháy", A_2 là biến cố "bóng đèn thứ hai bị cháy". Gọi A là biến cố "mạng mất điện". Ta thấy rằng mạng bị mất điện khi ít nhất một trong hai bóng bị cháy. Vậy $A = A_1 \cup A_2$.

d) Tích của hai biến cố

Tích của hai biến cố A, B là biến cố được ký hiệu AB. Biến cố AB xảy ra khi cả hai biến cố A, B cùng xảy ra.

Tích của một dãy các biến cố $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là biến cố $\prod_{i=1}^{n} A_i$. Biến cố này xảy ra khi tất cả các biến cố A_i cùng xảy ra ($i = 1, ..., n$).

Ví dụ 1.5: Một mạng điện gồm hai bóng đèn mắc song song. Gọi A_1 là biến cố "bóng đèn thứ nhất bị cháy", A_2 là biến cố "bóng đèn thứ hai bị cháy". Gọi A là biến cố "mạng mất điện".

Ta thấy rằng mạng bị mất điện khi cả hai bóng bị cháy. Vậy $A = A_1 A_2$.

Ví dụ 1.6: Hai xạ thủ A và B mỗi người bắn một viên đạn vào bia. Gọi A là biến cố "A bắn trúng bia", B là biến cố "B bắn trúng bia". Khi đó $A \cup B$ là biến cố "có ít nhất một người bắn trúng bia" và AB là biến cố "cả hai người cùng bắn trúng bia".

e) Biến cố xung khắc

Hai biến số A, B gọi là xung khắc nếu hai biến cố này không thể đồng thời cùng xảy ra. Nói cách khác hai biến số A, B xung khắc khi biến cố tích AB là biến cố không thể.

Ví dụ 1.7: Một bình có 3 loại cầu: cầu mầu trắng, mầu đỏ và mầu xanh. Lấy ngẫu nhiên 1 cầu từ bình. Gọi A_t, $A_đ$, A_x lần lượt là biến cố quả cầu rút được là cầu trắng, đỏ, xanh. Các biến cố này xung khắc từng đôi một, vì mỗi quả cầu chỉ có 1 mầu.

Nhận xét 1.2: Các biến cố trong cùng một phép thử với phép toán tổng, tích và lấy biến cố đối tạo thành đại số Boole, do đó các phép toán này có các tính chất như các phép toán hợp, giao, lấy phần bù đối với các tập con của không gian mẫu. Chẳng hạn

$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$; $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (luật De Morgan)

$A = A\left(B \cup \overline{B}\right) = AB \cup A\overline{B}$ …

f) Hệ đầy đủ các biến cố

Dãy các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là một hệ đầy đủ các biến cố nếu:

i. Xung khắc từng đôi một, nghĩa là $A_i A_j = \varnothing$ với mọi $i \neq j$; $i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., n$

ii. Tổng của chúng là biến cố chắc chắc, nghĩa là $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Đặc biệt với mọi biến cố A, hệ gồm hai biến cố $\{A, \overline{A}\}$ là hệ đầy đủ.

Ví dụ 1.8: Một nhà máy có ba phân xưởng sản xuất ra cùng một loại sản phẩm. Giả sử rằng mỗi sản phẩm của nhà máy chỉ do một trong ba phân xưởng này sản xuất. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm, gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là biến cố sản phẩm được chọn do phân xưởng thứ nhất, thứ hai, thứ ba sản xuất. Khi đó hệ ba biến cố $\{A_1, A_2, A_3\}$ là hệ đầy đủ.

g) Tính độc lập của các biến cố

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra biến cố này không ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra biến cố kia.

Tổng quát hơn, các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của một nhóm bất kỳ k biến cố, trong đó $1 \leq k \leq n$, không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của một nhóm nào đó các biến cố còn lại.

Nhận xét 1.3: Từ định nghĩa trên ta có thể suy ra rằng, nếu A, B độc lập thì các cặp biến cố sau: $A, \overline{B}$; $\overline{A}, B$; $\overline{A}, \overline{B}$ cũng độc lập.

Ví dụ 1.9: Ba xạ thủ A, B, C mỗi người bắn một viên đạn vào mục tiêu. Gọi A, B, C lần lượt là biến cố A, B, C bắn trúng mục tiêu.

a. Hãy mô tả các biến cố: ABC, $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, $A \cup B \cup C$.

b. Biểu diễn các biến cố sau theo A, B, C:

- D: Có ít nhất 2 xạ thủ bắn trúng.
- E: Có nhiều nhất 1 xạ thủ bắn trúng.
- F: Chỉ có xạ thủ C bắn trúng.
- G: Chỉ có 1 xạ thủ bắn trúng.

c. Các biến cố A, B, C có xung khắc, có độc lập không ?

Giải: a. ABC : cả 3 đều bắn trúng. $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$: cả 3 đều bắn trượt. $A \cup B \cup C$: có ít nhất 1 người bắn trúng.

b. $D = AB \cup BC \cup CA$.

Có nhiều nhất một xạ thủ bắn trúng có nghĩa là có ít nhất hai xạ thủ bắn trượt, vậy

$$E = \overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{C}\,\overline{A}.$$

$$F = \overline{A}\,\overline{B}C.$$

$$G = A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C.$$

c. Ba biến cố A, B, C độc lập vì biến cố bắn trúng mục tiêu của mỗi xạ thủ là độc lập nhau.

Ba biến cố A, B, C không xung khắc vì có thể cùng bắn trúng mục tiêu.

1.2 ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT VÀ CÁC TÍNH CHẤT

Một biến cố ngẫu nhiên xảy ra hay không trong kết quả của một phép thử là điều không thể biết hoặc đoán trước được. Tuy nhiên bằng những cách khác nhau ta có thể định lượng khả năng xuất hiện của biến cố, đó là xác suất xuất hiện của biến cố.

Xác suất của một biến cố là một con số đặc trưng khả năng khách quan xuất hiện biến cố đó khi thực hiện phép thử.

Xác suất của biến cố A ký hiệu $P(A)$. Trường hợp biến cố chỉ gồm một biến cố sơ cấp $\{a\}$ ta ký hiệu $P(a)$ thay cho $P(\{a\})$.

Dựa vào bản chất của phép thử (đồng khả năng) ta có thể suy luận về khả năng xuất hiện của biến cố, với cách tiếp cận này ta có *định nghĩa xác suất theo phương pháp cổ điển*.

Khi thực hiện nhiều lần lặp lại độc lập một phép thử ta có thể tính được tần suất xuất hiện của một biến cố nào đó. Tần suất thể hiện khả năng xuất hiện của biến cố, với cách tiếp cận này ta có *định nghĩa xác suất theo thống kê*.

1.2.1 Định nghĩa cổ điển về xác suất

Định nghĩa 1.1: *Giả sử phép thử* $\mathcal{C}$ *thoả mãn hai điều kiện sau:*

(i) Không gian mẫu có một số hữu hạn phần tử.

(ii) Các kết quả xảy ra đồng khả năng.

Khi đó ta định nghĩa xác suất của biến cố A *là*

$$P(A) = \frac{\text{sètr-êng hîp thuËn lîi ®èi víi } A}{\text{sètr-êng hîp cãthÓ}} \qquad \textbf{(1.1a)}$$

Nếu xem biến cố A như là tập con của không gian mẫu Ω thì

$$P(A) = \frac{\text{sèphÇn tö cña} A}{\text{sèphÇn tö cña} \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad \textbf{(1.1b)}$$

Ví dụ 1.10: Biến cố A xuất hiện mặt chẵn trong phép thử gieo con xúc xắc ở ví dụ 1.2 có 3 trường hợp thuận lợi ($|A| = 3$) và 6 trường hợp có thể ($|\Omega| = 6$). Vậy $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Biến cố xuất hiện một mặt sấp và một mặt ngửa khi gieo đồng thời hai đồng xu có 2 kết quả thuận lợi và 4 kết quả đồng khả năng có thể, vậy có xác suất xuất hiện của biến cố đó là $\frac{1}{2}$.

Ví dụ 1.11: Xét phép thử gieo liên tiếp 2 lần con xúc xắc 4 mặt (hình tứ diện). Tính xác xuất của các biến cố sau:

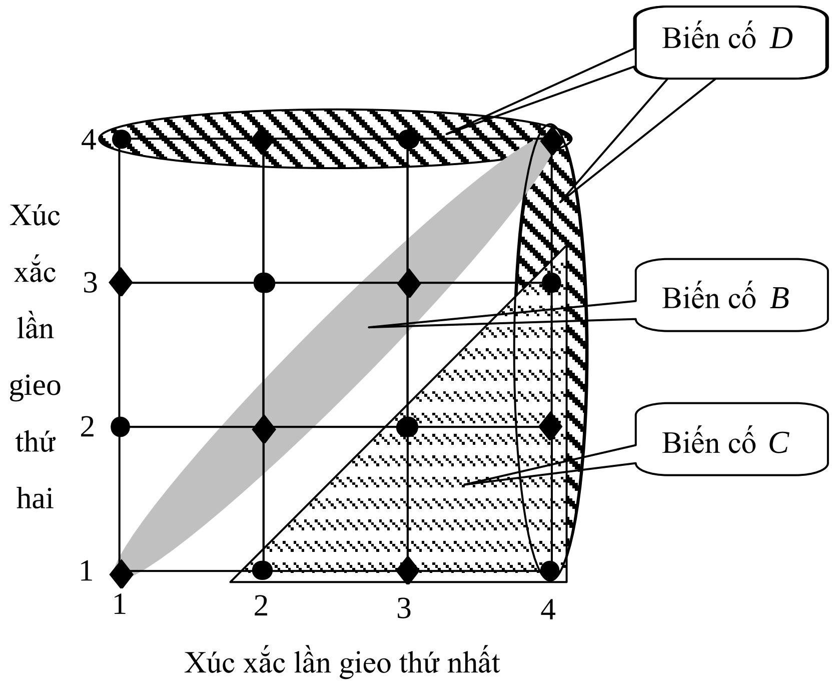
a. Tổng số chấm xuất hiện là chẵn (biến cố A).

b. Số chấm xuất hiện của hai con xúc xắc bằng nhau (biến cố B).

c. Số chấm của xúc xắc thứ nhất lớn hơn xúc xắc thứ hai (biến cố C).

d. Ít nhất một xúc xắc xuất hiện mặt 4 chấm (biến cố D).

Giải: Có thể biểu diễn không gian mẫu của phép thử và các biến cố tương ứng dưới dạng biểu đồ sau:



Hình 1.1: *Phép thử gieo 2 xúc xắc 4 mặt*

Các biến cố sơ cấp được biểu diễn bởi các chấm • hoặc ♦.

Các biến cố sơ cấp thuận lợi đối với biến cố A được ký hiệu bởi ♦.

Số trường hớp thuận lợi của các biến cố B, C, D là số các chấm • hoặc ♦ được đánh dấu tương ứng trong biểu đồ.

Theo định nghĩa xác suất (1.1a) ta có:

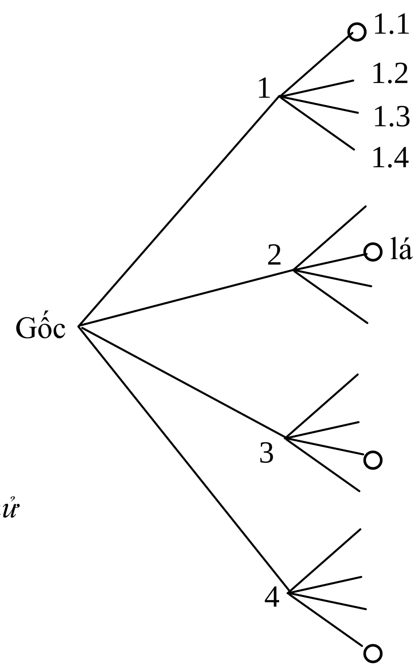
a. $P(A)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$. **b.** $P(B)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

c. $P(C) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. **d.** $P(D) = \frac{7}{16}$.

Ví dụ 1.12: *Sơ đồ cây*

Nhiều phép thử có tính chất nối tiếp lập thành dãy, chẳng hạn phép thử tung liên tiếp đồng xu ba lần, quan sát chỉ số chứng khoán trong năm ngày liên tiếp, hoặc tám ký số liên tiếp nhận được của một bộ nhận thông tin ... Trong trường hợp này ta có thể biểu diễn không gian mẫu và các biến cố tương ứng đưới dạng sơ đồ cây.

Không gian mẫu và biến cố B của ví dụ 1.11 được biểu diễn dạng sơ đồ cây như sau



Hình 1.2: *Sơ đồ cây của phép thử gieo 2 xúc xắc 4 mặt*

Để tính xác suất cổ điển ta sử dụng phương pháp đếm của giải tích tổ hợp.

1.2.2 Các qui tắc đếm

a) Qui tắc cộng

Nếu có m_1 cách chọn loại đối tượng x_1, m_2 cách chọn loại đối tượng x_2, ... , m_n cách chọn loại đối tượng x_n. Các cách chọn đối tượng x_i không trùng với cách chọn x_j nếu $i \neq j$ thì có $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ cách chọn một trong các đối tượng đã cho.

b) Qui tắc nhân

Giả sử công việc H gồm nhiều công đoạn liên tiếp $H_1, H_2, ..., H_k$ và mỗi công đoạn H_i có n_i cách thực hiện thì có tất cả $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ cách thực hiện công việc H .

c) Hoán vị

Mỗi phép đổi chỗ của n phần tử hoặc xếp n phần tử vào n vị trí được gọi là phép hoán vị n phần tử. Sử dụng quy tắc nhân ta có thể tính được:

Có $n!$ hoán vị n phần tử.

Quy ước $0! = 1$.

d) Chỉnh hợp có lặp

Chọn lần lượt k phần tử hoàn lại trong tập n phần tử ta được một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử. Sử dụng quy tắc nhân ta có thể tính được số các chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là n^k.

e) Chỉnh hợp

Chọn lần lượt k $(1 \le k \le n)$ phần tử không hoàn lại trong tập n phần tử ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Sử dụng quy tắc nhân ta có thể tính được số các chỉnh hợp chập k của n phần tử là

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \qquad \textbf{(1.2)}$$

f) Tổ hợp

Một tổ hợp chập k $(1 \le k \le n)$ của n phần tử là một cách chọn đồng thời k phần tử từ một tập có n phần tử. Vì vậy cũng có thể xem một tập con k phần tử của tập n phần tử là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Hai chỉnh hợp chập k của n phần tử là khác nhau nếu thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

- có ít nhất 1 phần tử của chỉnh hợp này không có trong chỉnh hợp kia.
- các phần tử đều như nhau nhưng thứ tự khác nhau.

Do đó với mỗi tổ hợp chập k của n phần tử có $k!$ chỉnh hợp tương ứng. Mặt khác hai chỉnh hợp khác nhau ứng với hai tổ hợp khác nhau là khác nhau.

Vậy số các tổ hợp chập k của n phần tử là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \textbf{(1.3)}$$

Ví dụ 1.13: Tung một con xúc xắc (6 mặt) hai lần. Tìm xác suất để trong đó chỉ có 1 lần ra 6 chấm.

Giải: Số các trường hợp có thể là 36. Gọi A là biến cố "trong 2 lần tung con xúc xắc chỉ có 1 lần được mặt 6". Nếu lần thứ nhất ra mặt 6 thì lần thứ hai chỉ có thể ra các mặt từ 1 đến 5, nghĩa là có 5 trường hợp. Tương tự cũng có 5 trường hợp chỉ xuất hiện mặt 6 ở lần tung thứ hai. Áp dụng quy tắc cộng ta suy ra xác suất để chỉ có một lần ra mặt 6 khi tung xúc xắc 2 lần là $\frac{10}{36}$.

Ví dụ 1.14: Bố trí một cách ngẫu nhiên n người ngồi xung quanh một ban tròn ($n \ge 3$), trong đó có hai người là anh em. Tìm xác suất để hai anh em ngồi cạnh nhau.

Giải: Chúng ta đánh số ghế ngồi từ 1 đến n và coi 2 cách ngồi là khác nhau nếu có ít nhất 1 chỗ lần lượt có 2 người ngồi khác nhau.

Số trường hợp có thể là số hoán vị n phần tử: $n!$

Ta xếp người anh ngồi tùy ý vào 1 trong n chỗ (có n cách); người em ngồi vào 1 trong 2 chỗ cạnh người anh (có 2 cách); $n-2$ người còn lại còn lại ngồi tùy ý vào $n-2$ chỗ còn lại (có $(n-2)!$ cách). Vậy số các trường hợp thuận lợi là $(n)(2)\left((n-2)!\right)$.

Xác suất cần tìm $P=\dfrac{(n)(2)\left((n-2)!\right)}{n!}=\dfrac{2}{n-1}$.

Ví dụ 1.15: Một người gọi điện thoại quên mất hai số cuối của số điện thoại và chỉ nhớ được rằng chúng khác nhau. Tìm xác suất để quay ngẫu nhiên một lần được đúng số cần gọi.

Giải: Gọi A là biến cố "quay ngẫu nhiên một lần được đúng số cần gọi". Số các trường hợp có thể là số các cặp hai chữ số khác nhau từ 10 chữ số từ 0 đến 9. Số các cặp hai chữ số này bằng số các chỉnh hợp chập 2 của 10. Vậy số các trường hợp có thể là $A_{10}^2=10\cdot 9=90$.

Chỉ có 1 trường hợp thuận lợi đối với A. Do đó $P(A)=\dfrac{1}{90}$.

Ví dụ 1.16: Cho các từ mã 6 bit được tạo từ các chuỗi các bit 0 và bit 1 đồng khả năng. Hãy tìm xác suất của các từ có chứa k bit 1, với các trường hợp $k=0,\ldots,6$.

Giải: Số trường hợp có thể $|\Omega|=2^6$. Đặt A_k là biến cố "từ mã có chứa k bit 1". Có thể xem mỗi từ mã có chứa k bit 1 là một tổ hợp chập k của 6 phần tử, vậy số trường hợp thuận lợi đối với A_k là số các tổ hợp chập k của 6 phần tử. Do đó $|A_k|=C_6^k=\dfrac{6!}{k!(6-k)!}$

Vậy xác suất của các biến cố tương ứng $P\left(A_k\right)=\dfrac{6!}{k!(6-k)!2^6}$, $k=0,\ldots,6$.

Ví dụ 1.17: Một công ty cần tuyển 2 nhân viên. Có 6 người nộp đơn trong đó có 4 nữ và 2 nam. Giả sử khả năng trúng tuyển của cả 6 người là như nhau. Tính xác suất các biến cố:

a) Hai người trúng tuyển là nam

b) Hai người trúng tuyển là nữ

c) Có ít nhất 1 nữ trúng tuyển.

Giải: Số trường hợp có thể $|\Omega|=C_6^2=15$.

a) Chỉ có 1 trường hợp cả 2 nam đều trúng tuyển do đó xác suất tương ứng là $P=1/15$.

b) Có $C_4^2=6$ cách chọn 2 nữ trong 4 nữ, vậy xác suất tương ứng $P=6/15$.

c) Trong 15 trường hợp có thể chỉ có 1 trường hợp cả 2 nam được chọn, vậy có 14 trường hợp ít nhất 1 nữ được chọn. Do đo xác suất tương ứng $P=14/15$.

Có thể tính số trường hợp thuận lợi của biến cố "có ít nhất 1 nữ được chọn" như sau:

- Có $C_4^2 = 6$ cách chọn 2 nữ trong 4 nữ.
- Có $C_4^1 = 4$ cách chọn 1 nữ trong 4 nữ và có $C_2^1 = 2$ cách chọn 1 nam trong 2 nam.

Vậy có $6 + 4.2 = 14$ trường hợp thuận lợi của biến cố "có ít nhất 1 nữ được chọn".

1.2.3 Định nghĩa xác suất theo thống kê

Định nghĩa xác suất theo cổ điển trực quan, dễ hiểu. Tuy nhiên khi số các kết quả có thể vô hạn hoặc không đồng khả năng thì cách tính xác suất cổ điển không áp dụng được.

Giả sử phép thử $\mathcal{C}$ *có thể được thực hiện lặp lại nhiều lần độc lập trong những điều kiện giống hệt nhau. Nếu trong* n *lần thực hiện phép thử* $\mathcal{C}$*, biến cố* A *xuất hiện* $k_n(A)$ *lần thì tỉ số*

$$f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n} \qquad \textbf{(1.4)}$$

được gọi là tần suất xuất hiện của biến cố A *trong* n *phép thử.*

Người ta chứng minh được (định lý luật số lớn) khi n tăng lên vô hạn thì $f_n(A)$ tiến đến một giới hạn xác định.

Ta định nghĩa giới hạn này là xác suất của biến cố A*, ký hiệu* $P(A)$.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A) \qquad \textbf{(1.5)}$$

Trên thực tế các tần suất $f_n(A)$ xấp xỉ nhau khi n đủ lớn. $P(A)$ được chọn bằng giá trị xấp xỉ này.

Ví dụ 1.18: Một công ty bảo hiểm muốn xác định xác suất để một người Mỹ 25 tuổi sẽ bị chết trong năm tới, người ta theo dõi 100.000 thanh niên và thấy rằng có 798 người bị chết trong vòng 1 năm sau đó. Vậy xác suất cần tìm xấp xỉ bằng 0,008.

Ví dụ 1.19: Thống kê cho thấy tần suất sinh con trai xấp xỉ 0,513. Vậy xác suất để bé trai ra đời lớn hơn bé gái.

Nhận xét 1.4: Định nghĩa xác suất theo thống kê khắc phục được hạn chế của định nghĩa cổ điển, nó hoàn toàn dựa trên các thí nghiệm quan sát thực tế để tìm xác suất của biến cố. Tuy nhiên định nghĩa thống kê về xác suất cũng chỉ áp dụng cho các phép thử mà có thể lặp lại được nhiều lần một cách độc lập trong những điều kiện giống hệt nhau. Ngoài ra để xác định một cách tương đối chính xác giá trị của xác suất thì cần tiến hành một số n đủ lớn lần các phép thử, mà việc này đôi khi không thể làm được vì hạn chế về thời gian và kinh phí.

Ngày nay với sự trợ giúp của công nghệ thông tin, người ta có thể mô phỏng các phép thử ngẫu nhiên mà không cần thực hiện các phép thử trong thực tế. Điều này cho phép tính xác suất theo phương pháp thống kê thuận tiện hơn.

1.2.4 Định nghĩa xác suất theo hình học

Định nghĩa 1.2: *Giả sử không gian mẫu Ω có thể biểu diễn tương ứng với một miền nào đó có diện tích (thể tích, độ dài) hữu hạn và biến cố A tương ứng với một miền con của Ω thì xác suất của biến cố A được định nghĩa:*

$$P(A)=\frac{\text{diÖrtÝch}A}{\text{diÖrtÝch}\Omega}. \qquad \textbf{(1.6)}$$

Ví dụ 1.20: Hai người bạn X , Y hẹn gặp nhau ở một địa điểm trong khoảng thời gian từ 12h đến 13h. Mỗi người có thể đến điểm hẹn một cách ngẫu nhiên tại một thời điểm trong khoảng thời gian nói trên và họ quy ước rằng ai đến trước thì chỉ đợi người kia trong vòng 15 phút. Tính xác suất để hai người gặp nhau.

Giải: Giả sử $x,\ y$ lần lượt là thời điểm X và Y đến điểm hẹn thì:

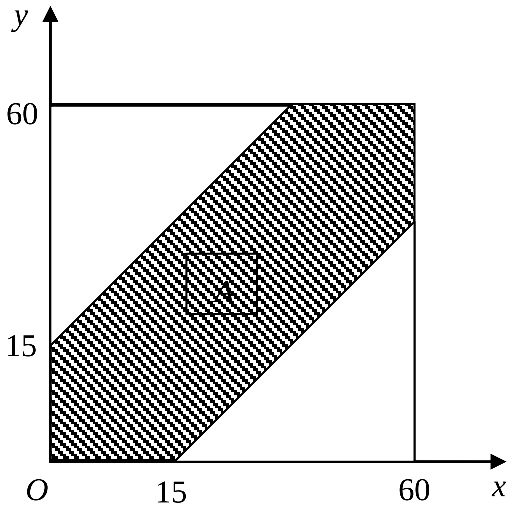
$$0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60.$$

Vậy mỗi cặp thời điểm đến $(x;y)$ là một điểm của hình vuông $\Omega=[0,60]^2$ (Hình 1.3).

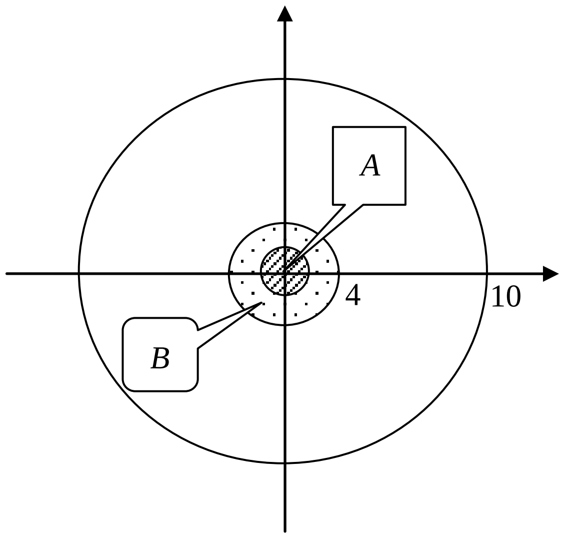
Gọi A là biến cố hai người gặp nhau thì

$$A=\left\{(x;y)\in\Omega\,\middle|\,|x-y|\le 15\right\}=\left\{(x;y)\in\Omega\,\middle|\,-15+x\le y\le x+15\right\}.$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{\text{diÖrtÝch}A}{\text{diÖrtÝch}\Omega}=1-\frac{45^2}{60^2}=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}.$$



Hình 1.3



Hình 1.4

Ví dụ 1.21: Xét trò chơi ném phi tiêu vào một đĩa hình tròn bán kính $10\,\text{cm}$. Nếu mũi phi tiêu cắm vào đĩa cách tâm $\le 2\,\text{cm}$ thì được giải nhất, nếu khoảng cách này ở trong khoảng $2\,\text{cm}$ đến

$\le 4\text{cm}$ nhận được giải thứ hai. Giả sử mũi phi tiêu luôn cắm vào trong đĩa và đồng khả năng. Tính xác suất để người chơi được giải nhất, được giải nhì.

Giải: Gọi A là biến cố người chơi nhận được giải nhất, B là biến cố người chơi nhận được giải nhì.

Có thể biểu diễn không gian mẫu Ω là hình tròn bán kính 10 (Hình 1.4). Khi đó biến cố A là hình tròn cùng tâm có bán kính 2 và biến cố B là hình vành khăn bán kính đường tròn trong bằng 2 và bán kính đường tròn ngoài bằng 4. Vậy xác suất để người chơi được giải nhất, được giải nhì lần lượt là:

$$P(A)=\frac{\text{diÖn tÝch } A}{\text{diÖn tÝch } \Omega}=\frac{\pi.2^2}{\pi.10^2}=\frac{2}{50},$$

$$P(B)=\frac{\pi.(4^2-2^2)}{\pi.10^2}=\frac{7}{50}.$$

Ta đã có ba cách tiếp cận khác nhau về xác suất một biến cố, tất cả các định nghĩa này cùng có các tính chất sau.

1.2.5 Các tính chất và định lý xác suất

1.2.5.1 Các tính chất của xác suất

Các định nghĩa trên của xác suất thoả mãn các tính chất sau:

1. Với mọi biến cố A:

$$0 \le P(A) \le 1. \qquad \textbf{(1.7)}$$

2. Xác suất của biến cố không thể bằng 0, xác suất của biến cố chắc chắn bằng 1.

$$P(\varnothing)=0,\ P(\Omega)=1 \qquad \textbf{(1.8)}$$

1.2.5.2 Qui tắc cộng xác suất

a. Trường hợp xung khắc

Nếu A, B là hai biến cố xung khắc thì

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B). \qquad \textbf{(1.9a)}$$

Tổng quát hơn, nếu $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là dãy các biến cố xung khắc từng đôi một thì

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad \textbf{(1.9b)}$$

Từ công thức (1.8) và (1.9b) ta có hệ quả: Nếu $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là một hệ đầy đủ thì

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1 \qquad \textbf{(1.10)}$$

b. Trường hợp tổng quát

- Nếu A, B là hai biến cố bất kỳ thì

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad \textbf{(1.11a)}$$

- Nếu A, B, C là ba biến cố bất kỳ thì

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC) \qquad \textbf{(1.11b)}$$

- Nếu $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là dãy các biến cố bất kỳ

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2...A_n)\,. \qquad \textbf{(1.11c)}$$

Ví dụ 1.22: Một lô hàng có 25% sản phẩm loại I, 55% sản phẩm loại II và các loại khác. Sản phẩm được cho là đạt chất lượng nếu thuộc loại I hoặc loại II. Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm tìm xác suất để sản phẩm này đạt tiêu chuẩn chất lượng.

Giải: Gọi A_1, A_2 lần lượt là biến cố sản phẩm được chọn thuộc loại I, II. Hai biến cố này xung khắc. $P(A_1)=0{,}25$, $P(A_2)=0{,}55$. Gọi A là biến cố sản phẩm được chọn đạt tiêu chuẩn chất lượng. Vậy $A=A_1\cup A_2$.

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=0{,}25+0{,}55=0{,}8\,.$$

1.2.5.3 Quy tắc tính xác suất của biến cố đối

Áp dụng công thức (1.10) cho hệ đầy đủ $\{A, \overline{A}\}$ ta được quy tắc tính xác suất biến cố đối:

Với mọi biến cố A

$$P(\overline{A})=1-P(A);\ P(A)=1-P(\overline{A})\,. \qquad \textbf{(1.12)}$$

Ví dụ 1.23: Trong phòng có n người ($n<365$).

a) Tính xác suất có ít nhất hai người có cùng ngày sinh?

b) Tính xác suất này khi $n=10$.

Giải : a) Gọi A là biến cố có ít nhất hai người trong phòng có cùng ngày sinh. Biến cố đối $\overline{A}$ là biến cố mọi người không trùng ngày sinh. Ngày sinh của mỗi người đồng khả năng xảy ra tại 1 trong 365 ngày của năm.

Vậy

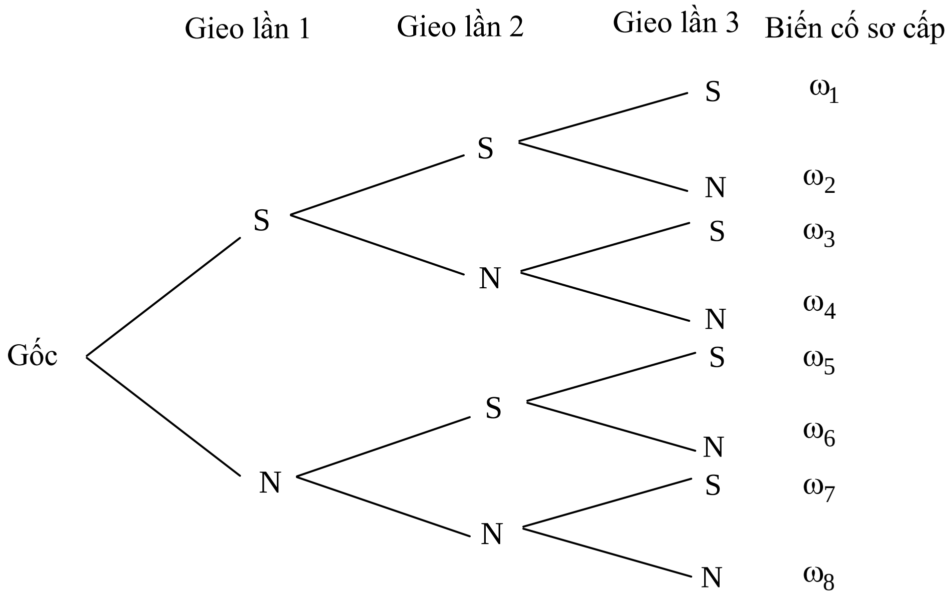
$$P(\overline{A})=\frac{A_{365}^{n}}{365^n}=\frac{(365)(364)...(365-n+1)}{365^n},\ P(A)=1-P(\overline{A})\,.$$

b) Khi $n=10$ thì

$$P(\overline{A})=\frac{A_{365}^{10}}{365^{10}}=0,883\,,\; P(A)=1-0,883=0,117\,.$$

Ví dụ 1.24: Gieo liên tiếp một đồng xu 3 lần.

Gọi A là biến cố lần thứ nhất ra mặt sấp. B là biến cố lần thứ hai ra mặt ngửa.



Hình 1.5: *Sơ đồ cây của phép thử gieo đồng xu liên tiếp 3 lần*

Từ sơ đồ ta có

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$$

Và $AB=\{\omega_3,\omega_4\}$, do đó $P(AB)=\frac{1}{4}$. Áp dụng quy tắc cộng ta được

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\,.$$

Ta cũng có thể tính trực tiếp bằng cách xác định $A\cup B=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_7,\omega_8\}$. Vậy cũng có

$$P(A\cup B)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\,.$$

Ví dụ 1.25: Giả sử phép thử $\mathcal{C}$ có không gian mẫu $\Omega=\{a,b,c,d\}$ với xác suất

$$P(a)=0,2\,,\; P(b)=0,3,\; P(c)=0,4\,,\; P(d)=0,1.$$

Xét hai biến cố $A=\{a,b\}$ và $B=\{b,c,d\}$.

Tính xác suất của các biến cố $P(A)$; $P(B)$; $P(\overline{A})$; $P(A\cup B)$ và $P(AB)$.

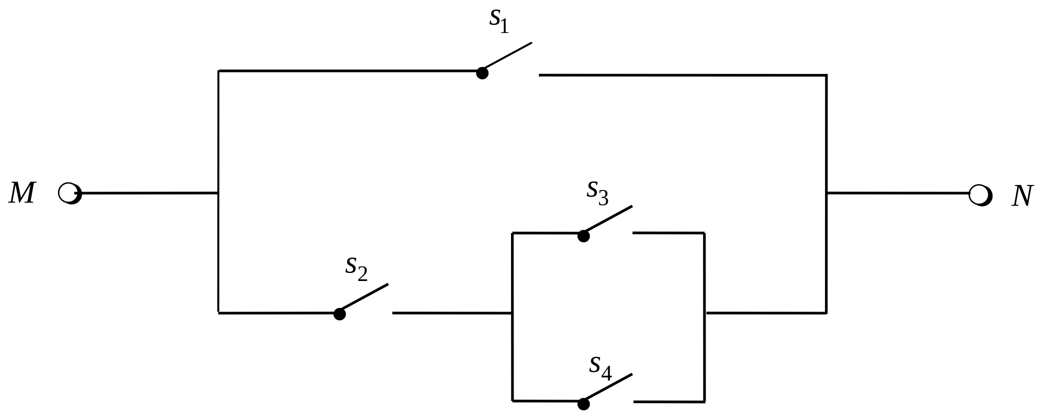
Giải: $P(A)=P(a)+P(b)=0,2+0,3=0,5$; $P(B)=P(b)+P(c)+P(d)=0,3+0,4+0,1=0,8$

$P(\overline{A})=P(c)+P(d)=0,4+0,1=0,5$ hoặc $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,5=0,5$

$A\cup B=\Omega$ do đó $P(A\cup B)=P(\Omega)=1$

$AB=\{b\}$ do đó $P(AB)=P(b)=0,3$.

Ví dụ 1.26: Xét mạng gồm 4 chuyển mạch như sơ đồ sau. Mỗi vị trí chuyển mạch đều có hai trạng thái đóng hoặc mở đồng khả năng. Tính xác suất đoạn mạch giữa M và N ở trạng thái đóng.



Hình 1.6

Giải: Đặt A_k là biến cố "chuyển mạch s_k ở trạng thái đóng". Gọi A là biến cố "đoạn mạch giữa M và N ở trạng thái đóng". Từ nhận xét 1.2 ta có

$$A=A_1\cup\left[A_2\left(A_3\cup A_4\right)\right]=A_1\cup\left(A_2A_3\right)\cup\left(A_2A_4\right).$$

Áp dụng công thức (1.11b) ta có

$$P(A)=P\left[A_1\cup\left(A_2A_3\right)\cup\left(A_2A_4\right)\right]=P\left(A_1\right)+P\left(A_2A_3\right)+P\left(A_2A_4\right)-P\left[A_1\left(A_2A_3\right)\right]$$
$$-P\left[A_1\left(A_2A_4\right)\right]-P\left[\left(A_2A_3\right)\left(A_2A_4\right)\right]+P\left(A_1A_2A_3A_4\right).$$

Mỗi chuyển mạch s_k có 2 trạng thái, vậy đoạn mạch giữa M và N có 16 trạng thái đồng khả năng. Nếu chuyển mạch ở trạng thái đóng ta ký hiệu 1 và ở trạng thái mở ta ký hiệu 0. Ta có thể liệt kê tất cả các trường hợp có thể và sự xuất hiện các biến cố theo bảng sau:

s_1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
s_2	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
s_3	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
s_4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Do đó

$$P(A_1)=\frac{8}{16},\ P(A_2A_3)=P(A_2A_4)=\frac{4}{16},$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2A_4)=P(A_2A_3A_4)=\frac{2}{16},\ P(A_1A_2A_3A_4)=\frac{1}{16}.$$

Vậy $P(A)=\frac{8}{16}+2.\frac{4}{16}-3.\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}\approx 0,688$.

1.2.6 Nguyên lý xác suất lớn, xác suất nhỏ

Biến cố không thể có xác suất bằng 0, một biến cố có xác suất gần bằng 0 vẫn có thể xảy ra khi thức hiện một số lớn các phép thử. Tuy nhiên qua thực nghiệm và quan sát thực tế, người ta thấy rằng các biến cố có xác suất nhỏ sẽ không xảy ra khi ta chỉ thực hiện một phép thử hay một vài phép thử. Từ đó ta thừa nhận nguyên lý sau đây, gọi là “Nguyên lý xác suất nhỏ”: *Nếu một biến cố có xác suất rất nhỏ thì thực tế có thể cho rằng trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra.*

Khi tung đồng xu, ngoài khả năng mặt sấp hay mặt ngửa xuất hiện còn có khả năng đồng xu ở trạng thái đứng. Tuy nhiên khả năng thứ ba rất khó xảy ra,vì vậy thực tế ta luôn công nhận chỉ có hai khả năng mặt sấp và mặt ngửa xuất hiện.

Mỗi chuyến bay đều có một xác suất rất nhỏ bị xảy ra tai nạn, nhưng trên thực tế ta vẫn không từ chối đi máy bay vì tin tưởng rằng trong chuyến bay ta đi sự kiện máy bay rơi không xảy ra.

Hiển nhiên việc quy định một mức xác suất thế nào được gọi là nhỏ sẽ phụ thuộc vào từng bài toán cụ thể. Chẳng hạn nếu xác suất để máy bay rơi là 0,01 thì xác suất đó chưa thể được coi là nhỏ. Song nếu xác suất một chuyến tàu khởi hành chậm là 0,01 thì có thể coi rằng xác suất này là nhỏ.

Mức xác suất nhỏ này được gọi là *mức ý nghĩa*. Nếu α là mức ý nghĩa thì số $\beta=1-\alpha$ gọi là *độ tin cậy*. Khi dựa trên nguyên lý xác suất nhỏ ta khẳng định rằng: “Biến cố A có xác suất nhỏ (tức là $P(A)\le\alpha$) sẽ không xảy ra trên thực tế” thì độ tin cậy của kết luận trên là β. Tính đúng đắn của kết luận chỉ xảy ra trong $100\cdot\beta\%$ trường hợp.

Tương tự như vậy ta có thể đưa ra “Nguyên lý xác suất lớn”: “*Nếu biến cố A có xác suất gần bằng 1 thì trên thực tế có thể cho rằng biến cố đó sẽ xảy ra trong một phép thử*”. Cũng như trên, việc quy định một mức xác suất thế nào được gọi là lớn sẽ tùy thuộc vào từng bài toán cụ thể.

1.3 XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

1.3.1 Định nghĩa và các tính chất của xác suất có điều kiện

Xác suất của biến cố B được tính trong điều kiện biến cố A xảy ra được gọi là xác suất của B với điều kiện A. Ký hiệu $P(B|A)$.

Tính chất

- Nếu $P(A)>0$ thì

$$P(B|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad \textbf{(1.13)}$$

- Khi cố định A với $P(A)>0$ thì xác suất có điều kiện $P(B|\,A)$ có tất cả các tính chất của xác suất thông thường (công thức (1.7)-(1.12)) đối với biến cố B.

Chẳng hạn:

$$P(\overline{B}|\,A)=1-P\left(B\,|\,A\right),\ P\left(B_1\cup B_2\,|\,A\right)=P\left(B_1|A\right)+P\left(B_2|A\right)-P\left(B_1B_2\,|\,A\right)\dots \qquad \textbf{(1.14)}$$

Nhận xét 1.5: Ta có thể tính xác suất có điều kiện $P(B\,|\,A)$ bằng cách áp dụng công thức (1.13) hoặc tính trực tiếp.

Ví dụ 1.27: Gieo đồng thời hai con xúc xắc (6 mặt) cân đối. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc ≥ 10 biết rằng ít nhất một con đã ra chấm 5.

Giải: Gọi A là biến cố "ít nhất một con ra chấm 5".

$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}.$$

Gọi B là biến cố "tổng số chấm trên hai con ≥ 10"

Biến cố AB có 3 kết quả thuận lợi là (5,6) , (5,5), (6,5).

Vậy $P(AB)=\dfrac{3}{36} \;\Rightarrow\; P\left(B|A\right)=\dfrac{3}{36}\Big/\dfrac{11}{36}=\dfrac{3}{11}$.

Ta cũng có thể tính trực tiếp như sau.

Có 11 trường hợp ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm:

$$(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(1,5);(2,5);(3,5);(4,5);(6,5)$$

trong đó có 3 trường hợp tổng số chấm ≥ 10.

Vậy $P(B\,|\,A)=\dfrac{3}{11}$

Ví dụ 1.28: Xét phép thử gieo đồng xu liên tiếp 3 lần ở ví dụ 1.12

Gọi A là biến cố lần thứ nhất ra mặt sấp.

B là biến cố lần thứ hai ra mặt ngửa.

C là biến cố số lần mặt sấp xuất hiện nhiều hơn hoặc bằng số lần mặt ngửa

$$P(A)=\frac{1}{2};\ P(AB)=\frac{1}{4}\ \Rightarrow P(B\,|\,A)=\frac{1}{4}\Big/\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

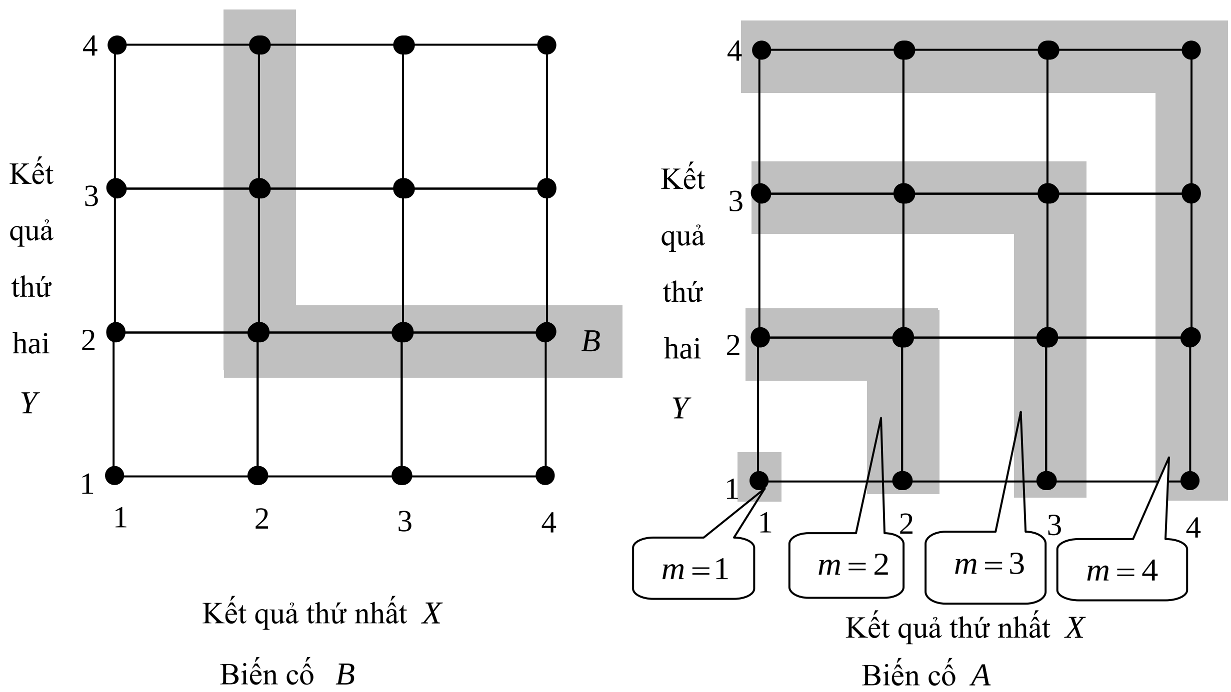
$$AC=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}\ \Rightarrow P(AC)=\frac{3}{8}\Rightarrow P(C\,|\,A)=\frac{3}{8}\Big/\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Ví dụ 1.29: Xét phép thử gieo liên tiếp 2 lần con xúc xắc 4 mặt trong ví dụ 1.11. Gọi X, Y lần lượt là số chấm xuất hiện khi gieo lần thứ nhất và lần thứ hai. Ta tính xác suất có điều kiện $P(B|A)$ trong đó

$$A=\{\max(X,Y)=m\},\quad B=\{\min(X,Y)=2\}$$

Và m nhận một trong các giá trị 1, 2, 3, 4.

Giải: Có thể biểu diễn không gian mẫu của phép thử và các biến cố tương ứng dưới dạng sau:



Hình 1.4: *Phép thử gieo liên tiếp 2 lần xúc xắc 4 mặt*

Từ hình 1.4 ta được: $$P(B)=\frac{5}{16};$$

$$P(AB)=\begin{cases}2/16 & \text{nÕu } m=3 \text{ hoÆc } m=4\\ 1/16 & \text{nÕu } m=2\\ 0 & \text{nÕu } m=1\end{cases}.$$

$$P(A|B)=\begin{cases}2/5 & \text{nÕu } m=3 \text{ hoÆc } m=4\\ 1/5 & \text{nÕu } m=2\\ 0 & \text{nÕu } m=1\end{cases}.$$

Ví dụ 1.30: Có hai phân xưởng của nhà máy sản xuất cùng một loại sản phẩm. Phân xưởng I sản xuất được 1000 sản phẩm trong đó có 100 phế phẩm. Phân xưởng II sản xuất được 2000 sản phẩm trong đó có 150 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm để kiểm tra và đó là phế phẩm. Tính xác suất phế phẩm này do phân xưởng thứ I sản xuất.

Giải: Gọi B là biến cố sản phẩm được chọn để kiểm tra là phế phẩm. Gọi A là biến cố sản phẩm được chọn để kiểm tra do phân xưởng I sản xuất. Ta cần tính xác suất có điều kiện $P(A|B)$.

Biến cố AB có 100 kết quả thuận lợi đồng khả năng do đó $P(AB)=\dfrac{100}{3000}=\dfrac{1}{30}$.

Trong 3000 sản phẩm sản xuất ra có 250 phế phẩm, do đó $P(B)=\dfrac{250}{3000}=\dfrac{1}{12}$.

Áp dụng công thức (1.13) ta được

$$P(A|B)=\frac{1/30}{1/12}=\frac{2}{5}=0,4.$$

Ta có thể tính trực tiếp xác suất $P(A|B)$ như sau:

Có 250 trường hợp đồng khả năng có thể lấy được phế phẩm của nhà máy nhưng chỉ có 100 kết quả thuận lợi đối với biến cố phế phẩm do phân xưởng I sản xuất. Vậy xác suất để lấy được phế phẩm do phân xưởng thứ I sản xuất trong số các phế phẩm là

$$P(A|B)=\frac{100}{250}=\frac{2}{5}=0,4.$$

1.3.2 Quy tắc nhân xác suất

1.3.2.1 Trường hợp độc lập:

- Nếu A,B là hai biến cố độc lập thì xác suất của biến cố B không phụ thuộc vào A có xảy ra hay không (xem mục 1.1.3–g), nghĩa là $P(B|A)=P(B)$. Theo (1.13) ta có

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad \textbf{(1.15)}$$

- Nếu $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là các biến cố độc lập thì

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n). \qquad \textbf{(1.16)}$$

Thông thường tính độc lập của các biến cố được suy ra từ ý nghĩa thực tế. Chẳng hạn nếu A và B là biến cố xạ thủ 1, 2 bắn trúng mục tiêu thì A,B là hai biến cố độc lập (xem ví dụ 1.11).

1.3.2.2 Trường hợp tổng quát:

- Với hai biến cố A,B bất kỳ, áp dụng công thức (1.13) ta có

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \qquad \textbf{(1.17)}$$

- Với n biến cố bất kỳ $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}) \qquad \textbf{(1.18)}$$

Ví dụ 1.31: Túi I chứa 3 bi trắng, 7 bi đỏ, 15 bi xanh.

Túi II chứa 10 bi trắng, 6 bi đỏ, 9 bi xanh.

Từ mỗi túi lấy ngẫu nhiên 1 bi. Tìm xác suất để 2 bi được rút từ 2 túi là cùng mầu.

Giải: Gọi A_t, $A_đ$, A_x lần lượt là biến cố bi được rút từ túi I là trắng, đỏ, xanh.

B_t, $B_đ$, B_x lần lượt là biến cố bi được rút từ túi II là trắng, đỏ, xanh.

Các biến cố A_t, $A_đ$, A_x xung khắc, B_t, $B_đ$, B_x xung khắc;

Các biến cố A_t, $A_đ$, A_x độc lập với các biến cố B_t, $B_đ$, B_x.

Biến cố 2 bi được rút cùng mầu là $A_tB_t \cup A_đB_đ \cup A_xB_x$

Vậy xác suất cần tìm:

$$P\left(A_tB_t \cup A_đB_đ \cup A_xB_x\right) = P\left(A_tB_t\right) + P\left(A_đB_đ\right) + P\left(A_xB_x\right)$$

$$= P\left(A_t\right)P\left(B_t\right) + P\left(A_đ\right)P\left(B_đ\right) + P\left(A_x\right)P\left(B_x\right)$$

$$= \frac{3}{25}\frac{10}{25} + \frac{7}{25}\frac{6}{25} + \frac{15}{25}\frac{9}{25} = \frac{207}{625} \approx 0{,}331.$$

Ví dụ 1.32: Hai máy bay ném bom 1 mục tiêu, mỗi máy bay ném 1 quả với xác suất trúng mục tiêu tương ứng là $0{,}7$ và $0{,}8$. Tìm xác suất để mục tiêu bị trúng bom.

Giải: Gọi A_1, A_2 lần lượt tương ứng là biến cố "máy bay thứ nhất và máy bay thứ hai ném trúng mục tiêu". A là biến cố "mục tiêu bị đánh trúng".

Rõ ràng $A = A_1 \cup A_2$ và A_1, A_2 độc lập. Do đó

$$P(A) = P\left(A_1 \cup A_2\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) - P\left(A_1\right)P\left(A_2\right) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7.0{,}8 = 0{,}96.$$

Ví dụ 1.33: Rút ngẫu nhiên 2 quân bài từ cỗ bài tú lơ khơ. Tính xác suất cả 2 quân bài rút được là 2 con át.

Giải: : Gọi A_1, A_2 lần lượt tương ứng là biến cố lần thứ nhất và lần thứ hai rút được con át.

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}.$$

Ví dụ 1.34: Một hộp đựng 100 con chíp bán dẫn trong đó có 20 chíp là phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại 2 chíp bán dẫn ở trong hộp.

a) Tính xác suất con chíp lấy được lần đầu là phế phẩm.

b) Tính xác suất con chíp lấy được lần thứ hai là phế phẩm biết rằng con chíp lấy lần đầu cũng là phế phẩm.

c) Tính xác suất cả hai con chíp lấy được đều là phế phẩm.

***Giải*:** a) Gọi A_1 là biến cố con chíp lấy được lần đầu là phế phẩm, ta có

$$P(A_1) = \frac{20}{100} = 0{,}2.$$

b) Gọi A_2 là biến cố con chíp lấy được lần thứ hai là phế phẩm. Vậy xác suất con chíp lấy được lần thứ hai là phế phẩm biết rằng con chíp lấy lần đầu cũng là phế phẩm:

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{19}{99} = 0,192.$$

c) $$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} = 0,0384.$$

Ví dụ 1.35: Một thủ kho có một chùm chìa khóa gồm 9 chiếc, bề ngoài chúng giống hệt nhau nhưng trong đó chỉ có đúng 2 chiếc mở được kho. Anh ta thử ngẫu nhiên từng chìa (chìa nào không trúng thì bỏ ra). Tính xác suất để mở được kho ở lần thứ ba.

Giải: Ký hiệu A_i là biến cố "thử đúng chìa ở lần thứ i". $i = 1,...,8$

Ký hiệu B là biến cố "mở được kho ở lần thử thứ ba".

Ta có $$B = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3.$$

Vậy xác suất cần tìm là $P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3\right) = P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\middle|\overline{A_1}\right)P\left(A_3\middle|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)$.

Có thể tính được $$P\left(\overline{A_1}\right) = \frac{7}{9},\ P\left(\overline{A_2}\middle|\overline{A_1}\right) = \frac{6}{8},\ P\left(A_3\middle|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right) = \frac{2}{7}$$

Do đó $$P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3\right) = \frac{7}{9}\frac{6}{8}\frac{2}{7} = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 1.36: Rút lần lượt ngẫu nhiên không hoàn lại 3 quân bài từ cỗ bài tú lơ khơ. Tính xác suất trong các trường hợp sau:

a) Cả 3 quân bài rút được không phải là quân bích.

b) Lần thứ nhất rút được không phải quân bích và lần thứ hai rút được quân bích.

c) Hai lần đầu rút được không phải quân bích và lần thứ ba rút được quân bích.

Giải: : Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt tương ứng là biến cố lần thứ nhất, lần thứ hai và lần thứ ba rút được quân bài không phải là bích.

a) Biến cố cả 3 quân bài rút được không phải là quân bích là $A_1A_2A_3$.

Vậy xác suất cần tìm là $$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2).$$

$$P(A_1) = \frac{39}{52},\ P(A_2 \mid A_1) = \frac{38}{51},\ P(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{37}{50}.$$

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{37}{50}.$$

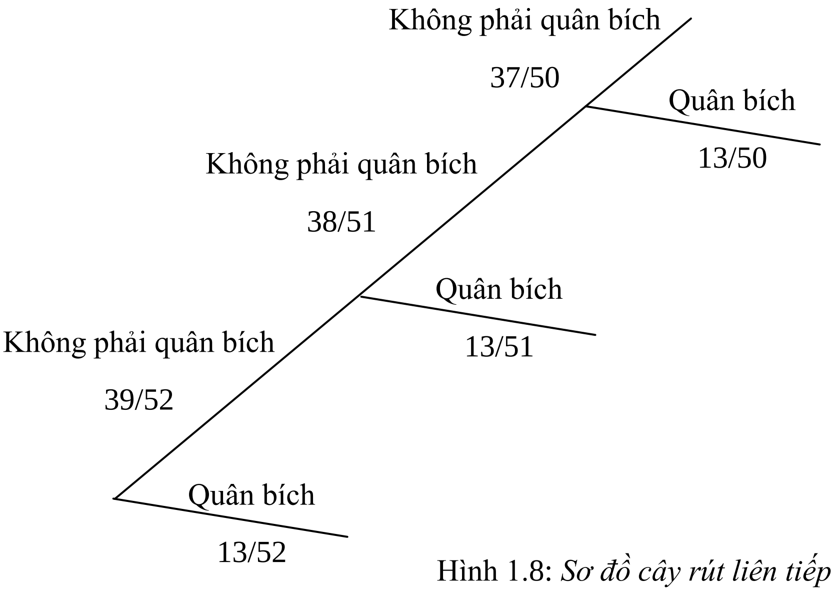
b) Xác suất lần thứ nhất rút được không phải quân bích và lần thứ hai rút được quân bích là

$$P\left(A_1\overline{A_2}\right) = P\left(A_1\right)P\left(\overline{A_2} \mid A_1\right) = \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51}.$$

c) Xác suất hai lần đầu rút được không phải quân bích và lần thứ ba rút được quân bích là

$$P\left(A_1A_2\overline{A_3}\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2\,|\,A_1\right)P\left(\overline{A_3}\,|\,A_1A_2\right)=\frac{39}{52}\cdot\frac{38}{51}\cdot\frac{13}{50}.$$

Tương tự ví dụ 1.12 và ví dụ 1.24 ta có thể biểu diễn các biến cố và xác suất tương ứng của phép thử rút liên tiếp 3 quân bài dưới dạng sơ đồ cây



Hình 1.8: *Sơ đồ cây rút liên tiếp 3 quân bài*

1.3.3 Công thức xác suất đầy đủ

Định lý 1.2: Giả sử $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là một hệ đầy đủ các biến cố. Khi đó, với mọi biến cố B của cùng một phép thử ta có

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P\left(B\,|\,A_i\right) \tag{1.19}$$

Ví dụ 1.37: Một túi đựng 4 bi trắng và 6 bi đen. Người thứ nhất lấy ngẫu nhiên từ túi 3 bi (không hoàn lại), người thứ hai lấy tiếp 2 bi. Tính xác suất để người thứ hai lấy được 1 bi trắng.

Giải: Gọi lần lượt A_0, A_1, A_2, A_3 là biến cố người thứ nhất lấy được 0, 1, 2, 3 bi trắng.

Gọi B là biến cố người thứ hai lấy được 1 bi trắng.

Ta có: $P(A_0)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$, $P(A_1)=\dfrac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$, $P(A_2)=\dfrac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$, $P(A_3)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$.

Ta có bảng tổng hợp của các kết quả sau khi người thứ nhất chọn ngẫu nhiên 3 bi:

Biến cố A_k xảy ra	A_0	A_1	A_2	A_3
Số bi màu trắng người thứ nhất lấy được	0	1	2	3
Số bi màu trắng còn lại sau khi người thứ nhất lấy	4	3	2	1
Số bi màu đen còn lại sau khi người thứ nhất lấy	3	4	5	6

Từ đó ta tính được các xác suất có điều kiện

$$P(B|A_0)=\frac{C_4^1C_3^1}{C_7^2}=\frac{12}{21},\ P(B|A_1)=\frac{C_3^1C_4^1}{C_7^2}=\frac{12}{21},\ P(B|A_2)=\frac{C_2^1C_5^1}{C_7^2}=\frac{10}{21},\ P(B|A_3)=\frac{C_1^1C_6^1}{C_7^2}=\frac{6}{21}.$$

Vậy $P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{12}{21}+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{21}+\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{21}+\frac{1}{30}\cdot\frac{6}{21}=\frac{56}{105}$.

Ví dụ 1.38: Gieo xúc xắc 4 mặt (xem ví dụ 1.11). Nếu mặt 1 chấm hoặc 2 chấm xuất hiện ta gieo tiếp lần nửa và ngừng nếu ngược lại. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện ít nhất là 4.

Giải: Gọi A_k là biến cố lần gieo thứ nhất xuất hiện k chấm, ta có

$$P(A_k)=\frac{1}{4} \text{ với mọi } k=1,2,3,4.$$

Gọi B là biến cố tổng số chấm xuất hiện ít nhất là 4.

Giả sử biến cố A_1 xảy ra, khi đó tổng số chấm ít nhất là 4 khi kết quả của lần gieo thứ hai là 3 hoặc 4. Tương tự, nếu biến cố A_2 xảy ra, khi đó tổng số chấm ít nhất là 4 khi kết quả của lần gieo thứ hai là 2, 3 hoặc 4. Vậy

$$P(B\,|\,A_1)=\frac{1}{2},\qquad P(B\,|\,A_2)=\frac{3}{4}$$

Nếu biến cố A_3 hoặc A_4 xảy ra thì dừng lại không gieo tiếp lần thứ hai, do đó

$$P(B\,|\,A_3)=0,\qquad P(B\,|\,A_4)=1.$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta được

$$P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{9}{16}.$$

1.3.4 Công thức Bayes

Định lý 1.3: Giả sử $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là một hệ đầy đủ các biến cố. Khi đó, với mọi biến cố B của cùng một phép thử và $P(B)>0$ ta có:

$$P\left(A_k\middle|B\right)=\frac{P(A_kB)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P\left(B\middle|A_k\right)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P\left(B\middle|A_k\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P\left(B\middle|A_i\right)}. \qquad \textbf{(1.20)}$$

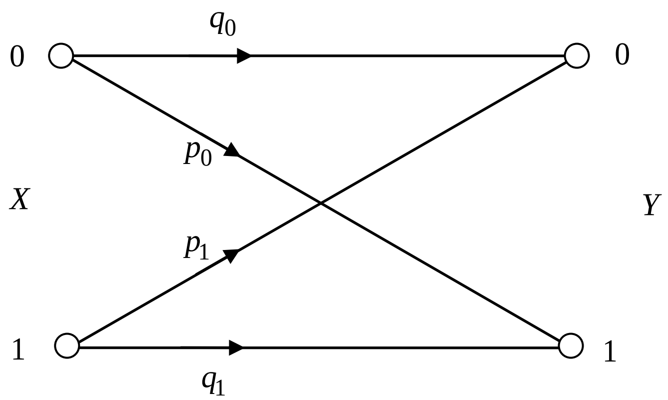
Nhận xét 1.6: Trong thực tế các xác suất $\{P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)\}$ đã biết và được gọi là các *xác suất tiền nghiệm*. Sau khi quan sát biết được biến cố B xảy ra, các xác suất của A_k được tính trên thông tin này (xác suất có điều kiện $P\left(A_k\middle|B\right)$) được gọi là *xác suất hậu nghiệm*. Vì vậy công thức Bayes còn được gọi là công thức xác suất hậu nghiệm.

Ví dụ 1.39: Xét kênh viễn thông nhị phân được biểu diễn như sơ đồ Hình 1.9.

Đầu vào của kênh ký hiệu là X và giả thiết rằng chỉ có hai trạng thái 0 và 1, tương tự đầu ra ký hiệu là Y và cũng chỉ có hai trạng thái 0 và 1. Do bị nhiễu kênh nên đầu vào 0 có thể chuyển thành đầu ra là 1 và ngược lại.

Gọi là X_0 biến cố " X có trạng thái 0" và X_1 là biến cố " X có trạng thái 1".

Gọi là Y_0 biến cố "đầu ra Y có trạng thái 0" và là Y_1 biến cố "đầu ra Y có trạng thái 1". Khi đó $\{X_0, X_1\}$ và $\{Y_0, Y_1\}$ là hai hệ đầy đủ.



Hình 1.9

Kênh được đặc trưng bởi các xác suất chuyển p_0, q_0, p_1 và q_1, trong đó

$$p_0 = P(Y_1|X_0) \text{ và } p_1 = P(Y_0|X_1)$$

$$q_0 = P(Y_0|X_0) \text{ và } q_1 = P(Y_1|X_1)$$

$$p_0 + q_0 = 1 = p_1 + q_1.$$

p_0, p_1 được gọi là xác suất lỗi

Giả sử $P(X_0) = 0,5$ (hai tín hiệu 0, 1 đầu vào đồng khả năng), $p_0 = 0,1$ và $p_1 = 0,2$.

a. Tìm xác suất đầu ra của kênh là 0 và xác suất đầu ra của kênh là 1.

b. Giả sử đầu ra của kênh nhận được là 0. Tìm xác suất nhận đúng tín hiệu đầu vào.

c. Tính xác suất lỗi P_e

Giải: $P(X_1) = 1 - P(X_0) = 0,5$; $q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0,1 = 0,9$; $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,2 = 0,8$

a. Áp dụng công thức xác suất đầy đủ với hệ đầy đủ $\{X_0, X_1\}$ ta được:

$$P(Y_0) = P(X_0)P(Y_0|X_0) + P(X_1)P(Y_0|X_1) = 0,5 \times 0,9 + 0,5 \times 0,2 = 0,55$$

$$P(Y_1) = P(X_0)P(Y_1|X_0) + P(X_1)P(Y_1|X_1) = 0,5 \times 0,1 + 0,5 \times 0,8 = 0,45.$$

b. Áp dụng công thức Bayes ta có

$$P\left(X_0|Y_0\right)=\frac{P\left(X_0\right)P\left(Y_0|X_0\right)}{P\left(Y_0\right)}=\frac{0,5\times 0,9}{0,55}=0,818.$$

c. Xác suất lỗi là xác suất của biến cố đầu vào 0 và đầu ra 1 hoặc biến cố đầu vào 1 và đầu ra 0. Vậy

$$P_e=P\left(X_0Y_1\cup X_1Y_0\right)=P(X_0)P\left(Y_1|X_0\right)+P(X_1)P\left(Y_0|X_1\right)=0,5\times 0,1+0,5\times 0,2=0,15.$$

Ví dụ 1.40: Một nhà máy có ba phân xưởng I, II, III cùng sản xuất ra một loại sản phẩm. Phân xưởng I, II, III sản xuất tương ứng 36%, 34%, 30% sản lượng của nhà máy, với tỷ lệ phế phẩm tương ứng là 0,12; 0,1; 0,08.

a. Tìm tỷ lệ phế phẩm chung của nhà máy.

b. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm kiểm tra và đó là phế phẩm. Tính xác suất để phế phẩm đó là do phân xưởng I sản xuất.

Giải: Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy để kiểm tra. Gọi B là biến cố "sản phẩm kiểm tra là phế phẩm".

Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là biến cố sản phẩm lấy ra kiểm tra do phân xưởng I, II, III sản xuất.

Theo giả thiết ta có: hệ 3 biến cố $\{A_1, A_2, A_3\}$ đầy đủ (xem ví dụ 1.8).

$$P\left(A_1\right)=0,36;\ P\left(A_2\right)=0,34;\ P\left(A_3\right)=0,30.$$

$$P\left(B|A_1\right)=0,12;\ P\left(B|A_2\right)=0,10;\ P\left(B|A_3\right)=0,08.$$

a. Xác suất của biến cố B cũng là tỉ lệ phế phẩm chung của nhà máy. Áp dụng công thức xác suất đầy đủ (1.19) ta có

$$P(B)=P\left(A_1\right)P\left(B|A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(B|A_2\right)+P\left(A_3\right)P\left(B|A_3\right)=0,1012$$

b. Áp dụng công thức Bayes ta được

$$P\left(A_1|B\right)=\frac{P\left(A_1\right)P\left(B|A_1\right)}{P(B)}=\frac{0,36\cdot 0,12}{0,1012}=0,427$$

Ví dụ 1.41: Người ta dùng một thiết bị để kiểm tra một loại sản phẩm nhằm xác định sản phẩm có đạt yêu cầu không. Biết rằng sản phẩm có tỉ lệ phế phẩm là p. Thiết bị có khả năng phát hiện đúng sản phẩm là phế phẩm với xác suất α và phát hiện đúng sản phẩm đạt chất lượng với xác suất β. Kiểm tra ngẫu nhiên một sản phẩm, tìm xác suất sao cho sản phẩm này:

a. Được kết luận là phế phẩm (biến cố A).

b. Được kết luận là đạt chất lượng thì lại là phế phẩm.

c. Được kết luận đúng với thực chất của nó.

Giải: Gọi H là biến cố "sản phẩm được chọn là phế phẩm". Theo giả thiết ta có:

$P(H) = p,\ P(A|H) = \alpha,\ P(\overline{A}|\overline{H}) = \beta$.

a. Áp dụng công thức đầy đủ cho hệ đầy đủ $\{H, \overline{H}\}$ ta có:

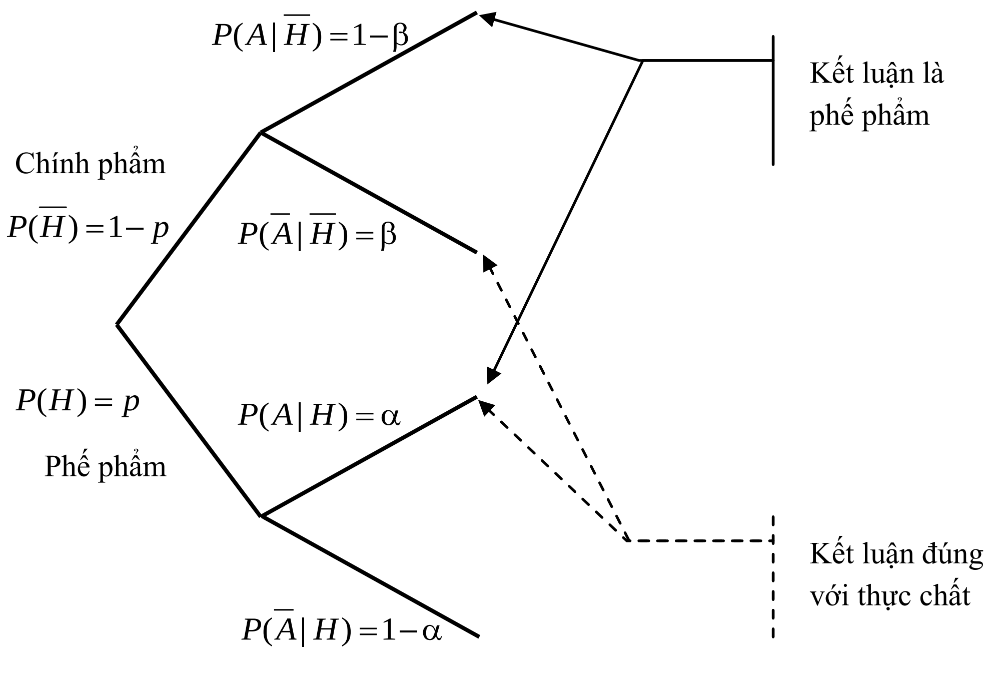
$$P(A) = P(H)P(A|H) + P(\overline{H})P(A|\overline{H}) = p\alpha + (1-p)(1-\beta).$$

b. $P(\overline{A}) = P(H)P(\overline{A}|H) + P(\overline{H})P(\overline{A}|\overline{H}) = p(1-\alpha) + (1-p)\beta$.

$$\Rightarrow P(H|\overline{A}) = \frac{P(H\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(H)P(\overline{A}|H)}{P(\overline{A})} = \frac{p(1-\alpha)}{p(1-\alpha)+(1-p)\beta}.$$

c. $P(AH) + P(\overline{A}\,\overline{H}) = P(H)P(A|H) + P(\overline{H})P(\overline{A}|\overline{H}) = p\alpha + (1-p)\beta$.

Ta có thể biểu diễn kết quả dưới dạng cây biểu đồ như sau



Hình 1.10: *Sơ đồ cây xác suất đầy đủ*

1.4 DÃY PHÉP THỬ BERNOULLI

Một phép thử có thể lặp lại, độc lập và trong mỗi phép thử xác suất xuất hiện của biến cố A *không đổi* $P(A) = p$, $(0 < p < 1)$ *được gọi là phép thử Bernoulli.*

p là xác suất thành công trong mỗi lần thử.

Một dãy lặp lại cùng một phép thử Bernoulli được gọi là dãy phép thử Bernoulli.

Kí hiệu H_k là biến cố "A xuất hiện ra đúng k lần trong n phép thử".

Đặt $P_n(k;p) = P(H_k)$.

Định lý 1.4: Xác suất của biến cố "A xuất hiện ra đúng k lần trong n phép thử" là:

$$P_n(k;p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k};\ k = 0,1,...,n. \qquad \textbf{(1.21)}$$

Chứng minh: H_k là tổng của C_n^k các biến cố xung khắc từng đôi nhận được bằng cách hoán vị các chữ A và $\overline{A}$ trong biến cố tích sau:

$$\underbrace{A...A}_{k \text{ lần}}\ \underbrace{\overline{A}...\overline{A}}_{n-k \text{ lần}}$$

Mỗi biến cố này có xác suất $P(\underbrace{A...A}_{k \text{ lần}}\underbrace{\overline{A}...\overline{A}}_{n-k \text{ lần}}) = p^k(1-p)^{n-k}$.

Vậy $P_n(k;p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Ta cần tìm giá trị $k, 0 \le k \le n$ sao cho xác suất $P_n(k;p)$ đạt giá trị lớn nhất.

Định lý 1.5:

(i). $$P_n(k;p) = \frac{(n-k+1)p}{kq} P_n(k-1;p) \qquad \textbf{(1.22)}$$

(ii). Khi k tăng từ 0 đến n thì $P_n(k;p)$ mới đầu tăng sau đó giảm và đạt giá trị lớn nhất tại $k = m$ thoả mãn:

$$(n+1)p - 1 \le m \le (n+1)p \qquad \textbf{(1.23a)}$$

Như vậy, $P_{\max} = P_n(m;p)$

- Khi $(n+1)p$ không nguyên thì $m = [(n+1)p]$ (là phần nguyên của $(n+1)p$).
- Khi $(n+1)p$ nguyên thì $m = (n+1)p - 1$ hoặc $m = (n+1)p$

$$P_{\max} = P_n(m-1;p) = P_n(m;p) \qquad \textbf{(1.23b)}$$

Chứng minh: $\dfrac{P_n(k;p)}{P_n(k-1;p)} = \dfrac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}}{\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \dfrac{(n-k+1)p}{kq}$, từ đó có (1.22).

(1.22) $\Rightarrow$ $\dfrac{P_n(k;p)}{P_n(k+1;p)} = \dfrac{(k+1)(1-p)}{(n-k)p}$. Do đó $\dfrac{P_n(k;p)}{P_n(k+1;p)} < 1 \Leftrightarrow k+1 < (n+1)p$.

Vậy: $P_n(k;p) < P_n(k+1;p)$ khi $k < (n+1)p - 1 \Rightarrow P_n(k;p) < P_n(m;p)$, $\forall k < (n+1)p - 1$.

và $P_n(k;p) > P_n(k+1;p)$ khi $k \ge (n+1)p \Rightarrow P_n(k;p) < P_n(m;p)$, $\forall k > (n+1)p$,

trong đó m là số tự nhiên thỏa mãn $(n+1)p - 1 \le m \le (n+1)p$.

Khi $m = (n+1)p$ thì $\dfrac{P_n(m-1;p)}{P_n(m;p)} = \dfrac{(n+1)(1-p)p}{\big(n-(n+1)p+1\big)p} = \dfrac{(n+1)(1-p)p}{\big(n+1-(n+1)p\big)p} = 1$

$$\Rightarrow P_n(m-1;p) = P_n(m;p).$$

Định nghĩa 1.3: *m xác định bởi công thức* (1.23a) *hoặc* (1.23b) *được gọi là số lần xuất hiện có khả năng nhất hay giá trị có khả năng xảy ra lớn nhất.*

Ví dụ 1.42: Bắn 7 viên đạn vào bia. Xác suất trúng đích của mỗi viên là $0,6$. Tìm xác suất trong các trường hợp sau:

a. Có đúng 3 viên trúng bia.

b. Có ít nhất 6 viên trúng bia.

c. Có ít nhất 1 viên trúng bia.

d. Tìm số viên đạn trúng bia có khả năng lớn nhất.

Giải: Có thể xem bắn mỗi viên đạn vào bia là thực hiện một phép thử Bernoulli mà xác suất thành công của phép thử là xác suất bắn trúng bia, theo giả thiết là 0,6. Bắn 7 viên là thực hiện 7 lần phép thử. Vậy:

a. Xác suất để có đúng 3 viên trúng bia là

$$P_7(3;0,6) = C_7^3\left(0,6\right)^3\left(0,4\right)^4 = 0,1935.$$

b. Xác suất để có ít nhất 6 viên trúng bia là

$$P_7(6;0,6) + P_7(7;0,6) = C_7^6\left(0,6\right)^6\left(0,4\right) + C_7^7\left(0,6\right)^7 = 0,1586.$$

c. Xác suất để có ít nhất 1 viên trúng bia là

$$1 - P_7(0;0,6) = 1 - C_7^0\left(0,6\right)^0\left(0,4\right)^7 = 1 - (0,4)^7 = 0,998.$$

d. $(n+1)p = (7+1)(0,6) = 4,8$. Vậy số viên đạn có khả năng trúng bia nhất là 4.

Ví dụ 1.43: Tín hiệu thông tin được phát đi 3 lần độc lập nhau. Xác suất thu được mỗi lần là 0.4.

a) Tìm xác suất để nguồn thu nhận được thông tin đúng 2 lần.

b) Tìm xác suất để nguồn thu nhận được thông tin đó.

c) Nếu muốn xác suất thu được tin $\ge 0,9$ thì phải phát đi ít nhất bao nhiêu lần.

Giải: Có thể xem mỗi lần phát tin là một phép thử Bernoulli mà sự thành công của phép thử là nguồn thu nhận được tin, theo giả thiết xác suất thành công của mỗi lần thử là 0,4. Vậy:

a) Xác suất để nguồn thu nhận được thông tin đúng 2 lần là

$$P_3(2;0,4) = C_3^2 \left(0,4\right)^2 \left(0,6\right) = 0,288\,.$$

b) Xác suất để nguồn thu nhận được thông tin là

$$P = 1 - P_3(0;0,4) = 1 - \left(0,6\right)^3 = 0,784\,.$$

c) Xác suất để nguồn thu nhận được thông tin khi phát n lần là $P = 1 - \left(0,6\right)^n$.

Vậy nếu muốn xác suất thu được tin $\geq 0,9$ thì phải phát đi ít nhất n lần sao cho:

$1 - \left(0,6\right)^n \geq 0,9 \Leftrightarrow \left(0,6\right)^n \leq 0,1 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\lg\left(0,1\right)}{\lg\left(0,6\right)} = \dfrac{-1}{-1+0,778} = 4,504$. Chọn $n = 5$.

TÓM TẮT

Trong chương này ta xét đến phép thử, biến cố và xác suất của biến cố.

Có thể xem biến cố của một phép thử là tập con của không gian mẫu của phép thử này. Do đó ta có các quan hệ giữa các biến cố tương tự với các phép toán giữa các tập hợp, đó là phép toán hợp, giao và lấy phần bù của tập hợp.

Để tính xác suất của biến cố trường hợp đồng khả năng ta sử dụng phương pháp xác suất cổ điển (công thức 1.1a) và các quy tắc đếm.

Trường hợp đã biết xác suất các biến cố nào đó và cần tính xác suất của các biến cố mới có liên quan ta sử dụng các quy tắc tính xác suất, trong đó có các công thức sau:

- Công thức cộng xác suất (1.9a-1.11c)
- Công thức xác suất biến cố đối (1.12)
- Công thức nhân xác suất (1.15-1.18)
- Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes (1.19-1.20)
- Công thức xác suất của dãy phép thử Bernoulli (1.21).

CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP

1.1 Ta có thể có hai không gian mẫu Ω các biến cố sơ cấp cho cùng một phép thử $\mathcal{C}$?

Đúng ☐ Sai ☐.

1.2 Các biến cố A và $\overline{A} \cup \overline{B}$ là xung khắc.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.3 Hai biến cố A và B xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.4 Hệ hai biến cố $\left\{A, \overline{A}\right\}$ là một hệ đầy đủ.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.5 Hai biến cố xung khắc là hai biến cố độc lập.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.6 Các biến cố đối của hai biến cố độc lập cũng là độc lập.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.7 Xác suất của tổng hai biến cố độc lập bằng tổng xác suất của hai biến cố này.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.8 Xác suất của tích 2 biến cố xung khắc bằng tích 2 xác suất.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.9 Khi áp dụng công thức xác suất đầy đủ để tính xác suất biến cố B dựa vào hệ đầy đủ $\{A_1,...,A_n\}$ thì các biến cố B và $A_1,...,A_n$ phải trong cùng một phép thử.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.10 Cho $\Omega=\{a,b,c,d\}$ trong đó các biến cố sơ cấp là đồng khả năng. Biến cố $A=\{a,b\}$ và $B=\{a,c\}$ là phụ thuộc vì chúng cùng xảy ra khi biến cố sơ cấp a xảy ra.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.11 Trong một hòm đựng 10 chi tiết đạt tiêu chuẩn và 5 chi tiết là phế phẩm**.** Lấy đồng thời 3 chi tiết. Tính xác suất:

a) Cả 3 chi tiết lấy ra thuộc loại đạt tiêu chuẩn.

b) Trong số 3 chi tiết lấy ra có 2 chi tiết đạt tiêu chuẩn.

1.12 Thang máy của một tòa nhà 7 tầng xuất phát từ tầng một với 3 khách. Tìm xác suất để:

a) Tất cả cùng ra ở tầng bốn.

b) Tất cả cùng ra ở một tầng

c) Mỗi người ra một tầng khác nhau.

1.13 Một người gọi điện thoại cho bạn nhưng lại quên mất 3 chữ số cuối và chỉ nhớ rằng chúng khác nhau. Tìm xác suất để người đó quay số một lần được đúng số điện thoại của bạn.

1.14 Ta kiểm tra theo thứ tự một lô hàng có 10 sản phẩm. Mỗi sản phẩm thuộc một trong hai loại: Tốt hoặc Xấu. Ký hiệu A_k $(k=1,...,10)$ là biến cố chỉ sản phẩm kiểm tra thứ k thuộc loại xấu. Biểu diễn các biến cố sau theo A_k:

a) Cả 10 sản phẩm đều xấu.

b) Có ít nhất một sản phẩm xấu.

c) Có 6 sản phẩm kiểm tra đầu là tốt, các sản phẩm còn lại là xấu.

d) Có 6 sản phẩm kiểm tra đầu là xấu.

1.15 Hai người cùng bắn vào một mục tiêu. Khả năng bắn trúng của từng người là 0,8 và 0,9. Tìm xác suất:

a) Chỉ có một người bắn trúng mục tiêu.

b) Có người bắn trúng mục tiêu.

c) Cả hai người bắn trượt.

1.16 Cơ cấu chất lượng sản phẩm của nhà máy như sau: 40% sản phẩm là loại I, 50% sản phẩm là loại II, còn lại là phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy. Tính xác suất sản phẩm lấy ra là phế phẩm.

1.17 Có 1000 vé số trong đó có 20 vé trúng thưởng. Một người mua 30 vé, tìm xác suất để người đó trúng 5 vé.

1.18 Để được nhập kho, sản phẩm của nhà máy phải qua 3 vòng kiểm tra chất lượng độc lập nhau. Xác suất phát hiện ra phế phẩm ở các vòng lần lượt theo thứ tự là 0,8; 0,9 và 0,99. Tính xác suất phế phẩm được nhập kho.

1.19 Một thủ kho có một chùm chìa khóa gồm 9 chiếc trông giống hệt nhau trong đó chỉ có một chiếc mở được kho. Anh ta thử ngẫu nhiên từng chìa khóa một, chiếc nào được thử thì không thử lại. Tính xác suất anh ta mở được cửa ở lần thử thứ 4.

1.20 Hai biến cố A, B có xác suất $P(A)=0,3$, $P(A\cup B)=0,65$. Giả sử A, B độc lập nhưng không xung khắc. Tính $P(B)$.

1.21 Giả sử hai biến cố A, B có xác suất $P(A)=1/2$, $P(B)=1/3$ và $P(AB)=1/4$. Hãy tính

a) $P(A|B)$ b) $P(B|A)$ c) $P(A\cup B)$ d) $P(A\overline{B})$

e) $P(\overline{A}B)$ f) $P(\overline{B}|\overline{A})$ g) $P(\overline{A}|\overline{B})$ h) $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

1.22 Chọn ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại 2 số từ các số $\{0,1,...,9\}$. Tính xác suất số thứ hai chọn được là số 4.

1.23 Một nhà máy ôtô có ba phân xưởng I, II, III cùng sản xuất ra một loại pít-tông. Phân xưởng I, II, III sản xuất tương ứng 36%, 34%, 30% sản lượng của nhà máy, với tỷ lệ phế phẩm tương ứng là 0,12; 0,1; 0,08.

a) Tìm tỷ lệ phế phẩm chung của nhà máy.

b) Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm kiểm tra và được sản phẩm là phế phẩm. Tính xác suất để phế phẩm đó là do phân xưởng I, II, III sản xuất.

1.24 Có bốn nhóm xạ thủ tập bắn. Nhóm thứ nhất có 5 người, nhóm thứ hai có 7 người, nhóm thứ ba có 4 người và nhóm thứ tư có 2 người. Xác suất bắn trúng đích của mỗi người trong nhóm thứ nhất, nhóm thứ hai, nhóm thứ ba và nhóm thứ tư theo thứ tự là 0,8; 0,7; 0,6 và 0,5. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và biết rằng xạ thủ này bắn trượt. Hãy xác định xem xạ thủ này có khả năng ở trong nhóm nào nhất.

1.25 Bắn hai lần độc lập với nhau mỗi lần một viên đạn vào cùng một bia. Xác suất trúng đích của viên đạn thứ nhất là $0,7$ và của viên đạn thứ hai là $0,4$. Tìm xác suất để chỉ có một viên đạn trúng bia (biến cố A). Sau khi bắn, quan trắc viên báo có một vết đạn ở bia. Tìm xác suất để vết đạn đó là vết đạn của viên đạn thứ nhất.

1.26 Một nhà máy sản xuất một chi tiết của điện thoại di động có tỷ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn chất lượng là 85%. Trước khi xuất xưởng người ta dùng một thiết bị kiểm tra để kết luận sản phẩm có đạt yêu cầu chất lượng hay không. Thiết bị có khả năng phát hiện đúng sản phẩm đạt tiêu chuẩn với xác suất là 0,9 và phát hiện đúng sản phẩm không đạt tiêu chuẩn với xác suất là 0,95. Tìm xác suất để 1 sản phẩm được chọn ngẫu nhiên sau khi kiểm tra:

a) Được kết luận là đạt tiêu chuẩn.

b) Được kết luận là đạt tiêu chuẩn thì lại không đạt tiêu chuẩn.

c) Được kết luận đúng với thực chất của nó.

1.27 Giả sử phép thử C có thể thực hiện lặp lại, độc lập. Không gian mẫu của phép thử là $\{A, B, C\}$ với xác suất tương ứng $P(A) = p$, $P(B) = q$, $P(C) = r$. Tính xác suất biến cố A xảy ra trước biến cố B.

1.28 Chứng minh rằng nếu $P(A \mid B) > P(A)$ thì $P(B \mid A) > P(B)$.