Học viện công nghệ Bưu chính Viễn Thông

P★T★I★T★

http://www.ptit.edu.vn

PTIT COSA Mail

BÀI GIẢNG MÔN

GIẢI TÍCH 2

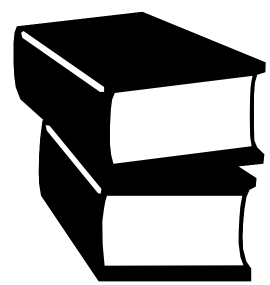
CHƯƠNG I CHƯƠNG II CHƯƠNG III CHƯƠNG IV

Giảng viên: Nguyễn Thị Dung

E-mail: dungnt@ptit.edu.vn

Bộ môn: Toán

biên soạn: 2014



1.TÀI LIỆU HỌC:

- Giáo trình Giải tích 2 (Thầy Vũ Gia Tê)

-Toán cao cấp tập 3 (Nguyễn Đình Trí)

CHƯƠNG 1: PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Tập hợp $\mathbb{R}^n$, khoảng cách, lân cận, tập mở, tập đóng, tập bị chặn

2. Định nghĩa hàm nhiều biến, miền xác định và đồ thị của của hàm nhiều biến

3. Giới hạn của hàm số nhiều biến

4. Sự liên tục của hàm số nhiều biến số

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Tập hợp $\mathbb{R}^n$, khoảng cách, lân cận, tập mở, tập đóng, tập bị chặn

* $\mathbb{R}^n = \left\{ M(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n} \right\}$

* Cho $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, N(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$

Khoảng cách giữa M và N kí hiệu là $d(M, N)$

$$d(M,N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

* Cho $M_0 \in \mathbb{R}^n$ và $\varepsilon > 0$

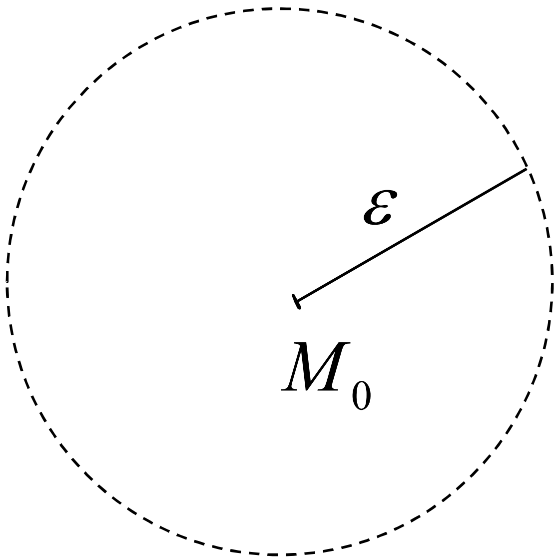
Tập $\left\{M \in \mathbb{R}^n : d(M, M_0) < \varepsilon\right\}$

được gọi là ε - lân cận của M_0.

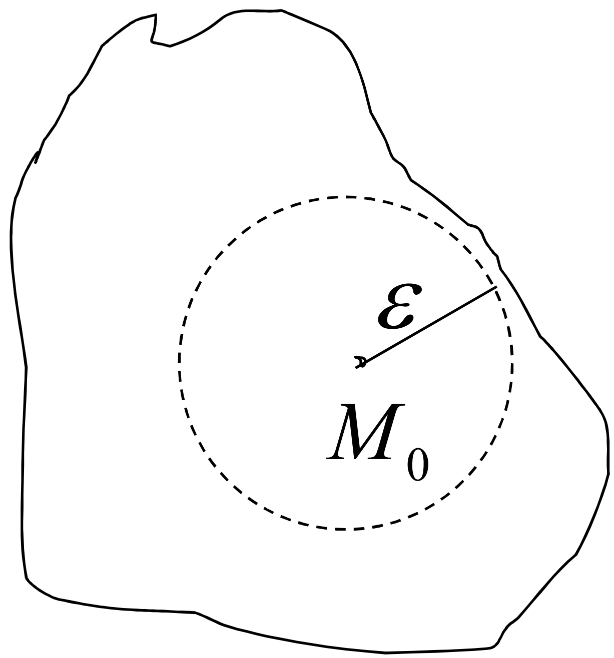
* Tập $V \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một lân cận của M_0

nếu V chứa một ε - lân cận nào đó của M_0.

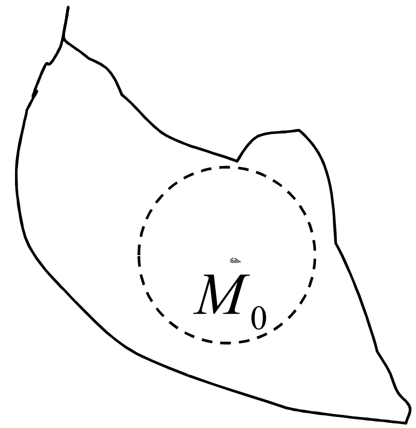
§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN



$\varepsilon -$ **lân cận của** M_0



lân cận của M_0



lân cận của M_0

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

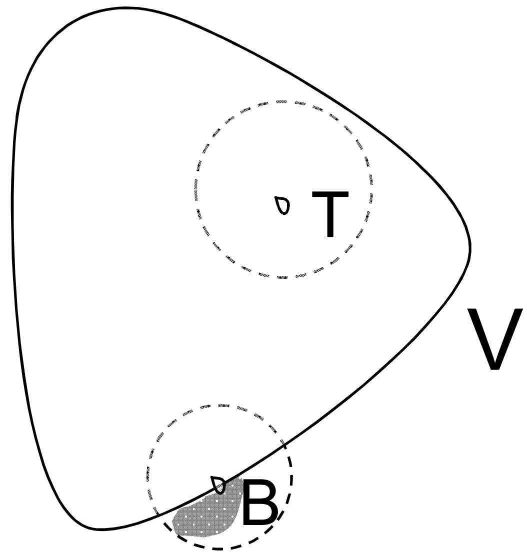
* Điểm trong?

* Điểm biên?

* Biên?

* Tập mở?

* Tập đóng?



T: Điểm trong của V

B: Điểm biên của V

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Ví dụ: Cho $M_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0$

* Tập $\{M \in \mathbb{R}^n : d(M, M_0) < r\}$

là tập mở (gọi là quả cầu mở tâm M_0, bán kính r)

* Tập $\{M \in \mathbb{R}^n : d(M, M_0) \leq r\}$

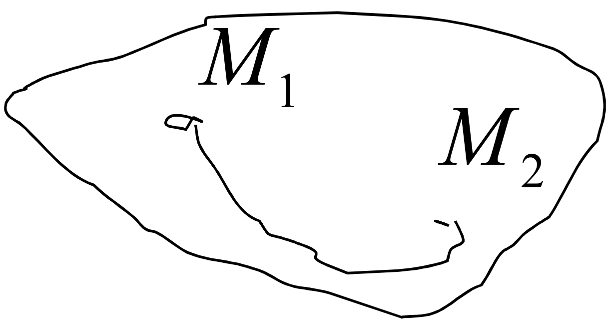
là tập đóng (gọi là quả cầu đóng tâm M_0, bán kính r)

* Tập E gọi là bị chặn nếu tồn tại một quả cầu đóng nào đó chứa nó.

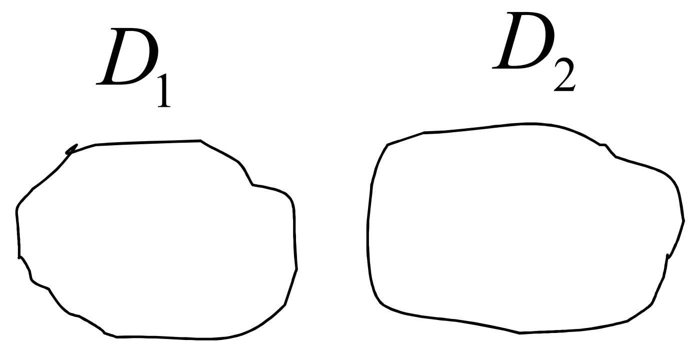
§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

* Tập $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập liên thông nếu có thể nối hai điểm bất kì thuộc D bằng một đường liên tục nằm hoàn toàn trong D.

D



D là tập liên thông



$$D = D_1 \cup D_2$$

D không là tập liên thông

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

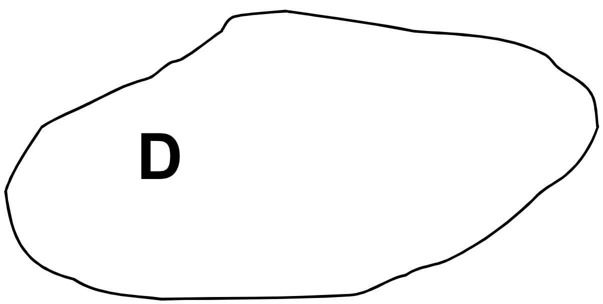
* Tập

$$D = \{(1,0),(2,0),(3,0)\}$$

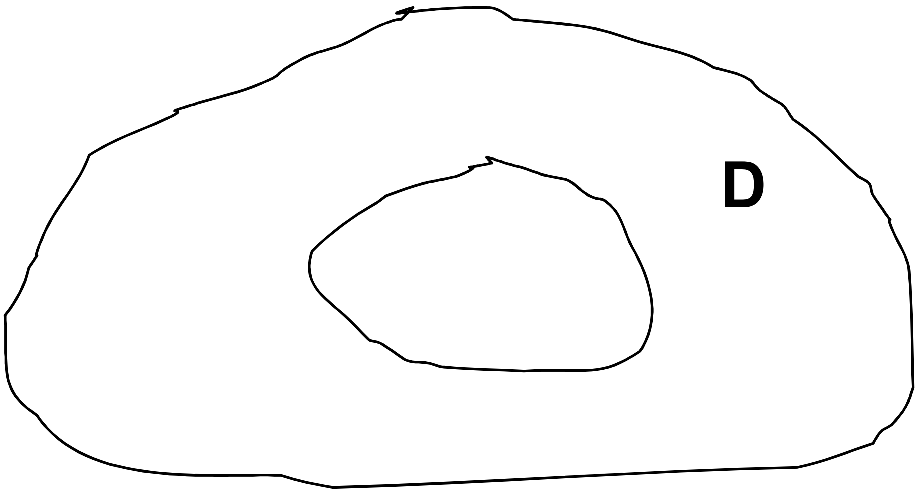
không là tập liên thông.

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

- Tập liên thông được giới hạn bởi một mặt kín gọi là miền đơn liên.
- Tập liên thông được giới hạn bởi nhiều mặt kín rời nhau từng đôi một gọi là miền đa liên.



D là miền đơn liên



D là miền đa liên

2. Định nghĩa hàm nhiều biến, miền xác định và đồ thị của hàm nhiều biến

* Cho $D \subset \mathbb{R}^n$, ánh xạ

$$D \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}$$

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

gọi là một hàm số của n biến số xác định trên *D*.

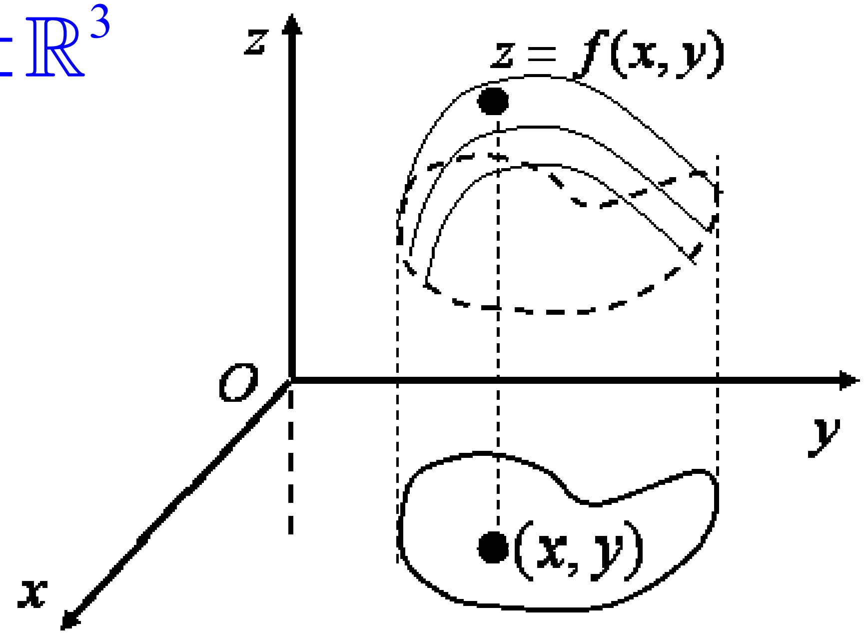
D được gọi là miền xác định của hàm số f

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ gọi là các biến số.

* Nếu hàm số được cho bởi một biểu thức thì miền xác định của hàm số là tập hợp các điểm làm cho biểu thức có nghĩa.

* Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ với $(x, y) \in D$

Tập hợp $\{M(x, y, z) : (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$ được gọi là đồ thị của hàm số f. Đó thường là một mặt trong $\mathbb{R}^3$. Mặt này có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng xOy là miền D.



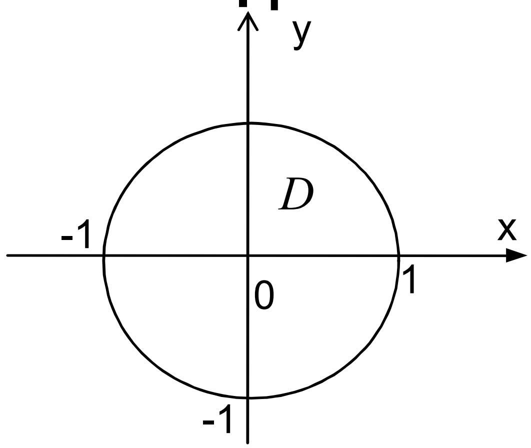
Ví dụ: Tìm miền xác định của hàm số sau:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Giải:

Miền xác định là tập các điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho

$$x^2 + y^2 \le 1$$



Ngoài ra, nếu mặt S xác định bởi PT $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ thì hình chiếu của S lên mặt phẳng xoy là miền D xác định bởi: $x^2 + y^2 \le 1.$

Ví dụ: Tìm miền xác định của các hàm số sau và mô tả hình học các miền đó.

$$a)\ z = \ln(x + y).$$

$$b)\ u = \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

3. Giới hạn của hàm số nhiều biến

* Định nghĩa?

* Tính chất?

(Tương tự ở giới hạn hàm một biến)

Ví dụ:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^3 - 2xy) = 1^3 - 2.1.2 = -3.$$

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{1}{x^2+2y^3} = 0$$

4. Sự liên tục của hàm số nhiều biến số

* Định nghĩa?

* Tính chất?

(Tương tự ở hàm một biến, chẳng hạn: Hàm số sơ cấp xác định tại điểm nào thì liên tục tại điểm đó…)

Ví dụ:

* Hàm số $f(x,y)=\cos\left(x^2-e^{-2x}+xy\right)$

liên tục trên $\mathbb{R}^2$

* Hàm số $f(x,y)=\dfrac{x+2}{x^2+2y^4}$

liên tục trên $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

1. Đạo hàm riêng
2. Đạo hàm riêng của hàm số hợp
3. Vi phân toàn phần
4. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao
5. Đạo hàm của hàm số ẩn
6. Đạo hàm theo hướng, Gradiên

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

1. Đạo hàm riêng

Cho hàm số $u = f(x, y)$ xác định trên miền *D* và $M_0(x_0, y_0) \in D$. Cố định $y = y_0$, nếu hàm số một biến $x \overset{\varphi}{\mapsto} f(x, y_0)$ có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là **đạo hàm riêng của f theo biến x tại (x_0, y_0). Kí hiệu là:** $f'_x(x_0, y_0)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

hoặc $u'_x(x_0, y_0)$ hay $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

* Tương tự, **đạo hàm riêng của f theo biến y tại (x_0, y_0) kí hiệu là:** $f'_y(x_0, y_0)$

hay $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ hoặc $u'_y(x_0, y_0)$ hay $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

- ***Nhận xét:***

Khi tính đạo hàm riêng của hàm số theo biến số nào, ta coi hàm số chỉ phụ thuộc biến số ấy, các biến còn lại là hằng số, rồi tính như với đạo hàm của hàm một biến.

Ví dụ:

a) Cho $u = x^3 y$, tính $u'_x(1,2)$, $u'_y(1,1)$

b) Cho $u = x^{2y} (x > 0)$, tính $u'_x(x,y)$, $u'_y(x,y)$.

Giải:

a) $u'_x(x,y) = 3x^2 y \Rightarrow u'_x(1,2) = 6$

$$u'_y(x,y) = x^3 \Rightarrow u'_y(1,1) = 1$$

b) $u'_x = 2yx^{2y-1}$, $u'_y = 2x^{2y} \ln x$.

Ví dụ:

Cho $u = x^2 z\arctan\frac{y}{z}$, tính $u'_x(x,y,z),\ u'_y(x,y,z),\ u'_z(x,y,z)$

Giải:

$$u'_x(x,y,z) = 2xz\arctan\frac{y}{z}$$

$$u'_y(x,y,z) = x^2 z\frac{1}{1+\frac{y^2}{z^2}}\frac{1}{z} = \frac{x^2z^2}{y^2+z^2}$$

$$u'_z(x,y,z) = x^2\arctan\frac{y}{z} + x^2 z\frac{1}{1+\frac{y^2}{z^2}}\frac{-y}{z^2}$$

$$= x^2\left(\arctan\frac{y}{z} - \frac{yz}{y^2+z^2}\right).$$

2. Đạo hàm riêng của hàm số hợp

* Định lí:

Xét hàm số hợp $z = z(x, y)$ với $x = x(s,t),\ y = y(s,t)$

Giả sử z'_x, z'_y liên tục. Khi đó:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

* Trường hợp tổng quát, khi $z = f(u_1, u_2, ..., u_m)$ và mỗi biến $u_k \ (k = \overline{1, m})$ là hàm số của các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ thì

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial u_1}.\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial u_2}.\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial z}{\partial u_m}.\frac{\partial u_m}{\partial x_i}$$

($\frac{\partial z}{\partial u_k}$ liên tục với mọi $k = 1, ..., m$)

* *Đặc biệt, khi* $z = f(x, y), y = y(x)$ thì $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx}$

Khi $z = f(x, y), x = x(t), y = y(t)$ thì $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$

Ví dụ: Cho $u = e^{2x} \ln y, \quad x = st, \quad y = t^2 - s^2$

Tính các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial u}{\partial s}, \dfrac{\partial u}{\partial t}.$

Giải:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial s} = 2e^{2x} \ln y . t + e^{2x} . \frac{1}{y} . (-2s) =$$

$$= 2e^{2st} \left[t \ln(t^2 - s^2) - \frac{s}{t^2 - s^2} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial t} = 2e^{2x} \ln y . s + e^{2x} . \frac{1}{y} . 2t =$$

$$= 2e^{2st} \left[s \ln(t^2 - s^2) + \frac{t}{t^2 - s^2} \right]$$

VD: Cho $z = yf(x^2 - y^2)$ với $f(t)$ là hàm số có ĐH liên tục.

Tính $A = \frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y - \frac{1}{y^2} z.$

Giải:

Đặt $t = x^2 - y^2 \Rightarrow z = yf(t)$

$$z'_x = yf'(t).t'_x = yf'(t).2x$$

$$z'_y = f(t) + yf'(t).t'_y = f(t) - yf'(t).2y$$

Từ đó, $A = \frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y - \frac{1}{y^2} z =$

$$2yf'(t) + \frac{1}{y} f(t) - 2yf'(t) - \frac{1}{y} f(t) = 0.$$

3. Vi phân toàn phần

A. Định nghĩa hàm số khả vi

1. Cho hàm số $u = f(x, y)$ xác định trong miền *D* và điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$

Xét $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

Nếu $\Delta f(x_0, y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y$

trong đó *A, B* là những số chỉ phụ thuộc (x_0, y_0)

còn α, β dần đến 0 khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$

thì ta nói hàm số $f(x, y)$ khả vi tại M_0.

2. Hàm số $u = f(x, y)$ được gọi là khả vi trong miền *D* nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc *D*.

B. Điều kiện cần để hàm số khả vi

Định lý: Nếu $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì liên tục tại đó.

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

Định lý: Nếu $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì f có các ĐHR

tại (x_0,y_0) và $A=f'_x(x_0,y_0), B=f'_y(x_0,y_0)$

Chứng minh:

Từ biểu thức

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A.\Delta x+B.\Delta y+\alpha.\Delta x+\beta.\Delta y$$

lấy $\Delta y=0$ ta có: $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=A.\Delta x+\alpha.\Delta x$

$$\Rightarrow f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A.\Delta x+\alpha.\Delta x}{\Delta x}=A.$$

Tương tự, $f'_y(x_0,y_0)=B.$

Nhận xét: $f(x,y)$ có thể có các ĐHR tại (x_0, y_0) nhưng không khả vi tại (x_0, y_0).

C. Điều kiện đủ để hàm số khả vi

Định lý:

Nếu hàm số $u = f(x,y)$ có các ĐHR $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ thì $f(x,y)$ khả vi tại M_0.

Chú ý: *Tính chất khả vi của tổng, tích, thương hai hàm nhiều biến cũng giống như ở hàm một biến.*

D. Vi phân toàn phần

ĐN: Giả sử hàm số f khả vi tại (x_0, y_0), biểu thức vi phân toàn phần của f tại (x_0, y_0) kí hiệu là $df(x_0, y_0)$

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

* *Vi phân toàn phần của* f *tại* (x_0, y_0) *còn viết dưới dạng:*

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

Ví dụ:

Cho $f(x,y) = x\cos xy$, tính $df\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ với $\Delta x = 0,01; \Delta y = 0,02$

Giải:

$$df\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = f'_x\left(1,\frac{\pi}{2}\right)\Delta x + f'_y\left(1,\frac{\pi}{2}\right)\Delta y$$

$$f'_x(x,y) = \cos xy - xy\sin xy \quad \Rightarrow f'_x\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f'_y(x,y) = -x^2\sin xy \quad \Rightarrow f'_y\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\Rightarrow df\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.\Delta x - \Delta y$$

Ứng với $\Delta x = 0,01; \Delta y = 0,02$ thì

$$df\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.0,01 - 0,02$$

Ví dụ: Cho $f(x,y) = (x-y)e^{xy^2}$, tính $df(x,y)$.

Giải:

$$df(x,y) = f'_x dx + f'_y dy$$

$$f'_x(x,y) = e^{xy^2} + (x-y)y^2 e^{xy^2}$$

$$f'_y(x,y) = -e^{xy^2} + 2xy(x-y)e^{xy^2}$$

Vậy

$$df(x,y) = \left(e^{xy^2} + (x-y)y^2 e^{xy^2}\right)dx + \left(-e^{xy^2} + 2xy(x-y)e^{xy^2}\right)dy.$$

Ví dụ: Cho $f(x,y,z) = xyz^2$, tính $df(x,y,z)$.

Giải:

$$df(x,y,z) = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz$$

$$f'_x(x,y,z) = yz^2$$

$$f'_y(x,y,z) = xz^2$$

$$f'_z(x,y,z) = 2xyz$$

Vậy $df(x,y,z) = yz^2dx + xz^2dy + 2xyzdz.$

E. Áp dụng vi phân để tính gần đúng

Giả sử hàm số $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0), ta có:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0).\Delta x + f'_y(x_0,y_0).\Delta y$$

Ví dụ: Tính gần đúng $\arctan\dfrac{1,05}{0,97}$.

Giải:

Xét hàm số $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\frac{1}{y}=\frac{y}{y^2+x^2},\ f'_y(x,y)=\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}.\frac{-x}{y^2}=-\frac{x}{y^2+x^2}$$

Áp dụng công thức **(*)** với $x_0=y_0=1,\ \Delta x=0,05,\ \Delta y=-0,03$

ta có: $\arctan\dfrac{1,05}{0,97}\approx f(1,1)+f'_x(1,1).0,05+f'_y(1,1).(-0,03)$

$$=\arctan\frac{1}{1}+\frac{1}{2}.0,05+\frac{1}{2}.0,03=\frac{\pi}{4}+0,04\approx 0,785+0,04=0,825$$

Ví dụ: Tính gần đúng số $A = \sqrt{e^{-0,03} + 2,01^3}$

Giải:

Xét hàm số $f(x,y) = \sqrt{e^x + y^3}$

$$f'_x(x,y) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + y^3}} \qquad f'_y(x,y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{e^x + y^3}}$$

Áp dụng CT $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y$

với $x_0 = 0;\ \ y_0 = 2;\ \ \Delta x = -0,03;\ \ \Delta y = 0,01$

ta có: $A \approx f(0,2) + f'_x(0,2).(-0,03) + f'_y(0,2).(0,01)$

$$= 3 + \frac{1}{6}.(-0,03) + 2.\,0,01 = \ 3,015.$$

F. Tính bất biến của biểu thức vi phân

- Xét hàm số hợp $z = f(x, y),\ x = x(s,t),\ y = y(s,t)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Như vậy, dạng của công thức vi phân cấp 1 không đổi dù x, y là các biến độc lập hay là hàm của các biến *s*, *t*.

•Nhận xét:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,\ \ d(uv) = udv + vdu,\ \ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

4. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

A. Đạo hàm riêng cấp cao

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một (nếu tồn tại) sẽ được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai của f.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}=f''_{x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}=f''_{y^2}$$

Tương tự, các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai (nếu có) gọi là các đạo hàm riêng cấp ba, ...

Ví dụ: Cho hàm số $f(x,y)=x^3y-x^2y^2$.

Tính các đạo hàm riêng cấp một, cấp hai của f.

Giải:

* Các đạo hàm riêng cấp một:

$$f'_x = 3x^2y-2xy^2 \qquad f'_y = x^3-2x^2y$$

* Các đạo hàm riêng cấp hai:

$$f''_{x^2} = 6xy-2y^2 \qquad f''_{xy} = 3x^2-4xy$$

$$f''_{yx} = 3x^2-4xy \qquad f''_{y^2} = -2x^2$$

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

Định lý (Định lí Schwarz):

Nếu hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} trong một lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng này liên tục tại M_0 thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_0.

Định lý cũng đúng cho hàm n biến bất kì. Chẳng hạn, xét hàm $f(x,y,z)$ *ta có:*

$f'''_{xyz} = f'''_{xzy} = f'''_{yxz} = \ldots$ *nếu các đạo hàm riêng này liên tục.*

B. Vi phân cấp cao

$$d^2 f = d(df) = d(f'_x dx + f'_y dy)$$

$$d^3 f = d(d^2 f)$$

....

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

* Công thức vi phân cấp 2:

$$d^2 f = d(df) = \left(f'_x dx + f'_y dy\right)'_x dx + \left(f'_x dx + f'_y dy\right)'_y dy$$

$$= f''_{x^2} dx^2 + f''_{yx} dy dx + f''_{xy} dx dy + f''_{y^2} dy^2.$$

Giả sử các đạo hàm riêng hỗn hợp liên tục, theo định lý Schwarz, ta có:

$$d^2 f = f''_{x^2} dx^2 + 2 f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2.$$

* *Kí hiệu tượng trưng*

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f$$

$$\Rightarrow d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f$$

Ví dụ: Cho $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + \arctan\dfrac{x}{y}$

a) Tính $A = z''_{x^2} + z''_{y^2}$

b) Tính $d^2z(1,1).$

Giải:

$$z'_x = \frac{x+y}{x^2+y^2}, \qquad z'_y = \frac{y-x}{x^2+y^2}$$

$$z''_{x^2} = \frac{-x^2 - 2xy + y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad z''_{y^2} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\Rightarrow A = 0$$

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

b) $$d^2z = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow d^2z = \frac{-x^2 - 2xy + y^2}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + 2\frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$$

$$+\frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x^2+y^2)^2}dy^2$$

$$d^2z(1,1) = -\frac{1}{2}dx^2 - dxdy + \frac{1}{2}dy^2$$

Chú ý: ***Cũng như với hàm một biến, vi phân cấp cao của hàm nhiều biến không có tính bất biến.***

C. Công thức Taylor

Định lí: Giả sử hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $n+1$ liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và điểm $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ cũng thuộc lân cận đó. Khi đó:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0) + \ldots$$

$$+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$$

trong đó $0<\theta<1,\ \Delta x = dx, \Delta y = dy$

* *Khi* $(x_0,y_0)=(0,0)$ *ta có công thức Maclaurin*.

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

- **Hệ quả:** Giả sử hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và điểm $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ cũng thuộc lân cận đó. Khi đó:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+o(\Delta x^2+\Delta y^2).$$

5. Đạo hàm của hàm số ẩn

A. Khái niệm hàm số ẩn

Xét hệ thức: $F(x,y)=0$

$F(x,y)$ là hàm số xác định trên $D\subset\mathbb{R}^2$.

Nếu có hàm số $y=y(x)$ xác định trên khoảng $X\subset\mathbb{R}$ sao cho $\left(x,y(x)\right)\in D$ và $F\left(x,y(x)\right)=0$ với mọi $x\in X$ thì hàm số $y=y(x)$ gọi là một hàm số ẩn xác định từ hệ thức $F(x,y)=0.$

Ví dụ: Hệ thức $x^2+y^2-1=0$ xác định hai hàm số ẩn là $y=\sqrt{1-x^2}$ và $y=-\sqrt{1-x^2}$ trên khoảng $\left[-1,1\right]$.

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

Tương tự, hệ thức $F(x,y,z)=0$ có thể xác định một hay nhiều hàm số ẩn $z=z(x,y)$.

B. Điều kiện tồn tại hàm ẩn, đạo hàm của hàm ẩn

Định lý: Xét hệ thức $F(x, y) = 0$

Giả sử $*F(x_0, y_0) = 0,$

$*F'_x, F'_y$ liên tục trong lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$

$*F'_y(M_0) \neq 0$

Khi đó hệ thức $F(x, y) = 0$ xác định một hàm số ẩn $y = y(x)$

trong một lân cận nào đó của x_0. Có $y = y_0$ khi $x = x_0$,

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$ trong lân cận trên.

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

Định lý: Xét hệ thức $F(x,y,z)=0$

Giả sử

$*F(x_0,y_0,z_0)=0,$

$*F'_x, F'_y, F'_z$ liên tục trong lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$*F'_z(M_0)\neq 0$

Khi đó hệ thức $F(x,y,z)=0$ xác định một hàm số ẩn $z=z(x,y)$

trong một lân cận nào đó của (x_0,y_0),

hàm số đó có giá trị z_0 khi $x=x_0,\ y=y_0,$

hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong lân cận nói trên.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Ví dụ: Tính y', y'' biết $x - y + \arctan y = 0.$

Giải:

* **Tính** y'

Cách 1: Đặt $F(x,y) = x - y + \arctan y$

$$F'_x = 1,\quad F'_y = -1 + \frac{1}{1+y^2} = \frac{-y^2}{1+y^2},\qquad y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{1+y^2}{y^2}$$

Cách 2: Coi $y = y(x)$, lấy đạo hàm hai vế theo x,

$$1 - y' + \frac{y'}{1+y^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{1+y^2}{y^2}$$

* **Tính** y''

$$y'' = \frac{y^2.2yy' - (1+y^2)2yy'}{y^4} = -\frac{2y'}{y^3} = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

VD: Cho $xyz = x + y + z.$ Coi z là hàm số ẩn, tính $z'_x,\ z'_y,\ dz.$

Giải:

Cách 1

Đặt $F(x,y,z) = xyz - x - y - z.$

Có $F'_x = yz - 1,$ $F'_y = xz - 1,$ $F'_z = xy - 1.$

$$\Rightarrow z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{1 - yz}{xy - 1}, \qquad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{1 - xz}{xy - 1},$$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{1 - yz}{xy - 1} dx + \frac{1 - xz}{xy - 1} dy.$$

VD: Cho $xyz = x + y + z.$ Coi z là hàm số ẩn, tính $z'_x,\ z'_y,\ dz.$

Giải: **(Cách 2)**

Lấy vi phân toàn phần hai vế của PT hàm ẩn, ta có:

$$d(xyz) = d(x + y + z)$$

$$yzdx + xzdy + xydz = dx + dy + dz$$

$$(xy - 1)dz = (1 - yz)dx + (1 - xz)dy$$

$$dz = \frac{1 - yz}{xy - 1}dx + \frac{1 - xz}{xy - 1}dy$$

$$\Rightarrow z'_x = \frac{1 - yz}{xy - 1}, \quad z'_y = \frac{1 - xz}{xy - 1}.$$

VD: Cho $u(x,y),\ v(x,y)$ là các hàm ẩn xác định từ hệ PT

$$\begin{cases} e^{\frac{u}{x}}\sin\dfrac{v}{x}+u=y \\ e^{\frac{u}{x}}\cos v - v + y = x \end{cases}$$

Biết $u(1,0)=0,\ v(1,0)=0.$

Hãy tính $du(1,0),\ dv(1,0).$

Giải:

Lần lượt lấy vi phân toàn phần hai vế từ các PT của hệ, ta có:

$$\begin{cases}\left(e^{\frac{u}{x}}.\frac{1}{x}.\sin\frac{v}{x}+1\right)du+e^{\frac{u}{x}}.\cos\frac{v}{x}.\frac{1}{x}dv+\left[e^{\frac{u}{x}}.\frac{-u}{x^2}.\sin\frac{v}{x}+e^{\frac{u}{x}}.\cos\frac{v}{x}.\frac{-v}{x^2}\right]dx=dy\\ e^{\frac{u}{x}}.\frac{1}{x}.\cos v\,du+\left[e^{\frac{u}{x}}.(-\sin v)-1\right]dv+e^{\frac{u}{x}}.\frac{-u}{x^2}.\cos v\,dx+dy=dx\end{cases}$$

Thay $x=1, y=0, u=0, v=0$ vào hệ trên, ta có:

$$\begin{cases}du(1,0)+dv(1,0)=dy\\ du(1,0)-dv(1,0)+dy=dx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du(1,0)+dv(1,0)=dy\\ du(1,0)-dv(1,0)=dx-dy\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}du(1,0)=\frac{1}{2}dx\\ dv(1,0)=-\frac{1}{2}dx+dy\end{cases}$$

6. Đạo hàm theo hướng, Građiên

a) Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^3$.

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in D.$

Cho véctơ $\vec{l}$.

Gọi $\vec{l_1}$ là véctơ đơn vị của $\vec{l}$.

Qua M_0 dựng đường thẳng d định hướng bởi $\vec{l}$.

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

Xét các điểm $M \in d$,

Gọi ρ là độ dài đại số của $\overrightarrow{M_0M}$ $\left(\overrightarrow{M_0M} = \rho \vec{l_1} \right)$

Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{f(M) - f(M_0)}{\rho}$ thì giới hạn này

gọi là đạo hàm của hàm số $f(x, y, z)$ theo hướng $\vec{l}$

tại M_0.

Kí hiệu $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$.

b) Nhận xét:

* Nếu $\vec{l} = \vec{i}$ $\left(\vec{i} = (1,0,0) \right.$ là véctơ đơn vị của trục $\left. \mathrm{Ox} \right)$

thì $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\left(M_0\right) = f'_x(M_0).$

<u>**CM:**</u> Thật vậy, $\overrightarrow{M_0 M} = \rho \vec{l}_1 = (\rho, 0, 0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\left(M_0\right) = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_0 + \rho, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho} = f'_x(M_0)$$

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

Tương tự,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}\left(M_0\right) = f'_y(M_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{k}}\left(M_0\right) = f'_z(M_0).$$

trong đó, $\vec{j}(0,1,0)$ là véctơ đơn vị của trục Oy.

$\vec{k}(0,0,1)$ là véctơ đơn vị của trục Oz.

c) Cách tính

Định lí: Nếu hàm số $f(x,y,z)$ khả vi tại $M_0(x_0,y_0,z_0)$

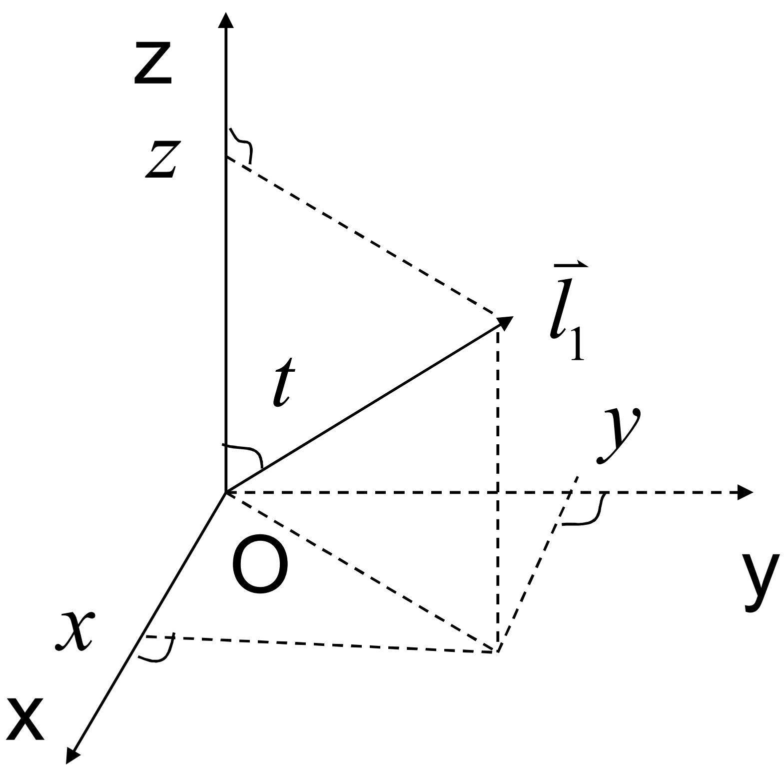
thì f có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{l}$ tại M_0 và

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma$$

trong đó $\vec{l_1}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ là véc tơ đơn vị của $\vec{l}$.

*** Nhận xét:** $\vec{l_1}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là véc tơ đơn vị

thì $\alpha = \left(\overrightarrow{l_1}, \text{ox}\right)$, $\beta = \left(\overrightarrow{l_1}, \text{oy}\right)$, $\gamma = \left(\overrightarrow{l_1}, \text{oz}\right)$.



Thật vậy, Giả sử $\left(\overrightarrow{l_1}, \text{oz}\right) = t$

$$\vec{l_1} = (x, y, z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$z = \left|\vec{l_1}\right|.\cos t = 1.\cos t = \cos\gamma$$

$$\Rightarrow t = \gamma.$$

…

d) Građiên

<u>* Định nghĩa:</u>

Građiên của f tại M_0 là véctơ

$$\left(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0) \right)$$

Kí hiệu là $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$.

*** Nhận xét:**

Nếu f khả vi tại M_0 thì

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\left(M_0\right) = \overrightarrow{grad}\, f(M_0).\vec{l_1}$$

trong đó $\vec{l_1}$ là véctơ đơn vị của $\vec{l}$.

Ví dụ: Cho $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz,$

$M_0(1,2,-1),\ \vec{l}(1,-2,2).$

Tính $\overrightarrow{grad} f(M_0)$ và $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0).$

Giải:

$$f'_x = 3x^2 + 3yz \Rightarrow f'_x(M_0) = 3 + 3.2.(-1) = -3.$$

$$f'_y = 3y^2 + 3xz \Rightarrow f'_y(M_0) = 3.4 + 3.1.(-1) = 9.$$

$$f'_z = 3z^2 + 3xy \Rightarrow f'_z(M_0) = 3.1 + 3.1.2 = 9.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{grad} f(M_0) = (-3,9,9).$$

Véctơ đơn vị của véctơ $\vec{l}(1,-2,2)$ là: $\vec{l}_1\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)$

$$\left(\vec{l}_1 = \frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|}, \qquad \left|\vec{l}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3 \right)$$

Vậy $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{grad}\, f(M_0).\vec{l}_1 =$

$$= -3.\frac{1}{3} + 9.\left(\frac{-2}{3}\right) + 9.\frac{2}{3} = -1.$$

§3. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

1. Cực trị tự do

2. Cực trị có điều kiện

3. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

§3. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

1. Cực trị tự do

ĐN: Cho hàm số $f(M) = f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$. Điểm $M_0(x_0, y_0)$ là điểm trong của D.

f được gọi là đạt cực trị tại M_0 nếu:

có lân cận của M_0 để với mọi M trong lân cận đó $f(M) - f(M_0)$ có dấu không đổi.

Đó là cực đại nếu $f(M) - f(M_0) \leq 0$

Đó là cực tiểu nếu $f(M) - f(M_0) \geq 0$

Điểm cực đại hoặc điểm cực tiểu gọi là điểm cực trị.

<u>Định lý:</u> (Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị)

Nếu hàm số $f(x,y)$ đạt cực trị tại $M_0(x_0,y_0)$ và có các ĐHR f'_x, f'_y tại M_0 thì $f'_x(M_0)=0$ và $f'_y(M_0)=0.$

Định nghĩa:

* *Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng của* f bằng 0 gọi *là điểm dừng của hàm số* f.

* *Điểm dừng hoặc điểm mà tại đó các ĐHR của* f *không tồn tại gọi là điểm tới hạn của* f.

Nhận xét:

Điểm cực trị của hàm số (nếu có) phải là điểm tới hạn.

§3. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Định lý: (Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị)

Giả sử hàm số $f(x, y)$ có các ĐHR đến cấp 2 liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$

và $f'_x(M_0) = 0, f'_y(M_0) = 0$

Đặt $A = f''_{x^2}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{y^2}(x_0, y_0),$

Khi đó:

Nếu $B^2 - AC < 0$ thì f đạt cực trị tại (x_0, y_0)

Đó là cực đại nếu $A < 0$

Đó là cực tiểu nếu $A > 0.$

Nếu $B^2 - AC > 0$ thì f không đạt cực trị tại (x_0, y_0)

Chứng minh:

Xét $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ trong lân cận nào đó của M_0.

Theo công thức Taylor

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = df(M_0) + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + o(\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

Vì $f'_x(M_0) = 0,\ f'_y(M_0) = 0$ nên $df(M_0) = 0.$

Khi $\Delta x, \Delta y$ có giá trị tuyệt đối rất nhỏ thì Δf cùng dấu

với $d^2 f(M_0).$

Có $d^2f(M_0) = f''_{x^2}(M_0)dx^2 + 2f''_{xy}(M_0)dxdy + f''_{y^2}(M_0)dy^2$

$$= A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 \quad (*)$$

* Trường hợp $B^2 - AC < 0 \Rightarrow A \neq 0.$

* Nếu $\Delta y = 0,$ từ $(*) \Rightarrow d^2f(M_0)$ cùng dấu với A.

* Nếu $\Delta y \neq 0,$ từ $(*) \Rightarrow$

$$d^2f(M_0) = \left[A\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + 2B\frac{\Delta x}{\Delta y} + C\right]\Delta y^2 \quad (**)$$

$d^2 f(M_0)$ cùng dấu với A

Tóm lại, $d^2 f(M_0)$ luôn cùng dấu với A nếu $B^2 - AC < 0$

Khi $A > 0 \Rightarrow \Delta f > 0 \Rightarrow f$ đạt cực tiểu tại M_0.

Khi $A < 0 \Rightarrow \Delta f < 0 \Rightarrow f$ đạt cực đại tại M_0.

* Trường hợp $B^2 - AC > 0$

Trong mọi lân cận của M_0, đều tồn tại các điểm

$M\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right)$ mà $\Delta y \neq 0$.

Từ $(**)$ $\Rightarrow d^2 f\left(M_0\right)$ có dấu thay đổi (khi $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ thay đổi)

$\Rightarrow \Delta f$ có dấu thay đổi

$\Rightarrow f$ không đạt cực trị tại điểm $M_0\left(x_0, y_0\right)$.

§3. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y) = x^3 + 2y^3 - 3x - 6y$$

Giải:

Có $f'_x = 3x^2 - 3,\quad f'_y = 6y^2 - 6$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Hàm số có bốn điểm tới hạn là:

$$M_1(1,1),\ M_2(1,-1),\ M_3(-1,1),\ M_4(-1,-1)$$

Có $A = f''_{x^2} = 6x,\quad B = f''_{xy} = 0,\quad C = f''_{y^2} = 12y$

* Xét điểm $M_1(1,1),\quad A = 6, B = 0, C = 12$

$\Rightarrow B^2 - AC < 0$ và $A > 0$

$\Rightarrow$ f đạt cực tiểu tại $M_1, f(M_1) = -6.$

* Xét điểm $M_2(1,-1),\quad A = 6, B = 0, C = -12$

$\Rightarrow B^2 - AC > 0$

$\Rightarrow$ f không đạt cực trị tại M_2

* Xét điểm $M_3(-1,1)$,

$$A=-6, B=0, C=12 \Rightarrow B^2-AC>0$$

$\Rightarrow f$ không đạt cực trị tại M_3.

* Xét điểm $M_4(-1,-1)$,

$A=-6, B=0, C=-12 \Rightarrow B^2-AC<0$ và $A<0$

$\Rightarrow f$ đạt cực đại tại M_4, $f(M_4)=6$.

Vậy hàm số đạt giá trị cực tiểu là -6 tại điểm $M_1(1,1)$,

đạt giá trị cực đại là 6 tại điểm $M_4(-1,-1)$.

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4$

Giải:

Có $z'_x = 4x^3,$ $z'_y = 4y^3$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Hàm số có một điểm tới hạn là $M_0(0,0)$

$$A = z''_{x^2} = 12x^2, \quad B = z''_{xy} = 0, \quad C = z''_{y^2} = 12y^2$$

Tại M_0, $A = 0,\ B = 0,\ C = 0 \Rightarrow B^2 - AC = 0$

Có: $z(0,0) = 0,\ z(x,y) = x^4 + y^4 > 0,\ \forall (x,y) \neq (0,0)$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $(0,0)$ và $z_{CT} = z(0,0) = 0.$

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^3 + y^2$

Giải

$$f'_x = 3x^2, \quad f'_y = 2y$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Hàm số có một điểm tới hạn là $M_0(0,0)$

Có $f''_{x^2} = 6x, \; f''_{xy} = 0, \; f''_{y^2} = 2$

Tại M_0, $A = 0, \; B = 0, \; C = 2 \Rightarrow B^2 - AC = 0$

* Trong mọi lân cận cận của M_0 đều chứa các điểm $M(x,0)$.

$\Delta f = f(M) - f(M_0) = x^3$ có dấu thay đổi

$(\Delta f > 0 \;\; khi \;\; x > 0, \;\; \Delta f < 0 \;\; khi \;\; x < 0)$

Vậy f không đạt cực trị tại điểm $M_0(0,0)$.

Hàm số không có cực trị.

*** Mở rộng với hàm nhiều biến:**

Chẳng hạn xét hàm 3 biến $f(x,y,z)$.

Giả sử $f(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận của $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

$$f'_x(M_0)=0,\ f'_y(M_0)=0,\ f'_z(M_0)=0.$$

Xét

$$d^2f(M_0)=f''_{x^2}(M_0)dx^2+f''_{y^2}(M_0)dy^2+f''_{z^2}(M_0)dz^2+$$

$$+2f''_{xy}(M_0)dxdy+2f''_{xz}(M_0)dxdz+2f''_{yz}(M_0)dydz$$

(dx, dy, dz không đồng thời bằng 0)

Khi đó:

* Nếu $d^2 f(M_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại M_0.

* Nếu $d^2 f(M_0) < 0$ thì f đạt cực đại tại M_0.

* Nếu $d^2 f(M_0)$ có dấu thay đổi

thì f không đạt cực trị tại M_0.

*** Ví dụ:** Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$$

Giải:

$$f'_x = 2x - y + 1, \quad f'_y = 2y - x, \quad f'_z = 2z - 2.$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$

Hàm số có một điểm tới hạn là $M_0\left(-\frac{2}{3},\frac{-1}{3},1\right)$

Có $f''_{x^2}=2,\ f''_{y^2}=2,\ f''_{z^2}=2,\ f''_{xy}=-1,\ f''_{xz}=f''_{yz}=0.$

$$\Rightarrow d^2f\left(M_0\right)=2dx^2+2dy^2+2dz^2-2dxdy=$$

$$=(dx-dy)^2+dx^2+dy^2+2dz^2\ >0$$

$\Rightarrow f$ đạt cực tiểu tại M_0.

$$f\left(M_0\right)=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+1-\frac{2}{9}-\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}.$$

2. Cực trị có điều kiện

a) Định nghĩa:

Cực trị của hàm số $f(x,y)$ trong đó các biến x,y phải thỏa mãn điều kiện $g(x,y)=0$ gọi là cực trị có điều kiện.

b) <u>Định lí</u> (Điều kiện cần)

Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị của hàm số $f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y)=0$ và

i) Các hàm số f, g có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong một lân cận của $M_0(x_0, y_0)$

ii) g'_x, g'_y không đồng thời bằng 0 tại $M_0(x_0, y_0)$

Khi đó, tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Định nghĩa:

* Các điểm $M_0(x_0, y_0)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

gọi là các điểm dừng của hàm số f.

* Các điểm dừng hoặc các điểm không thỏa mãn các điều kiện *i*, *ii* của định lí trên gọi là các điểm tới hạn của hàm số f.

*** Nhận xét:**

Điểm cực trị có điều kiện của hàm số f (nếu có) phải là điểm tới hạn.

Ví dụ: (Xem)

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $ax + by + c = 0 \quad (c \neq 0)$.

Giải:

$$f'_x = 2x,\ f'_y = 2y,\ g'_x = a,\ g'_y = b$$

g'_x, g'_y không đồng thời bằng 0.

Giải hệ $\begin{cases} f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda a = 0 \\ 2y + \lambda b = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$

Hàm số có một điểm tới hạn là $M_0\left(\dfrac{-ac}{a^2+b^2},\dfrac{-bc}{a^2+b^2}\right)$.

Bài toán chính là tìm cực trị của bình phương khoảng cách từ điểm $O(0,0)$ đến các điểm $M(x,y)$ thuộc đường thẳng $ax+by+c=0.$

Ở đây chỉ có giá trị cực tiểu, không có giá trị cực đại.

Điểm cực tiểu phải là điểm tới hạn.

Vậy f đạt giá trị cực tiểu tại M_0, $f(M_0)=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$.

c) Phương pháp nhân tử Lagrange

Xét hàm số $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

(gọi là hàm Lagrange)

Giải hệ

$$\begin{cases} f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$$

Tìm được $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ \lambda = \lambda_0 \end{cases}$

Điểm $M_0(x_0, y_0)$ là điểm dừng của hàm số f.

Xét $$d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) = L''_{x^2}(x_0, y_0, \lambda_0)dx^2 + 2L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0)dxdy + L''_{y^2}(x_0, y_0, \lambda_0)dy^2$$

trong đó $$\begin{cases} dx^2 + dy^2 \neq 0 \\ dg(x_0, y_0) = g'_x(x_0, y_0)dx + g'_y(x_0, y_0)dy = 0 \end{cases}$$

Khi đó:

* Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0) > 0$ thì $M_0(x_0,y_0)$ là điểm cực tiểu của hàm số f với điều kiện $g(x,y) = 0.$

* Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0) < 0$ thì $M_0(x_0,y_0)$ là điểm cực đại của hàm số f với điều kiện $g(x,y) = 0.$

* Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)$ đổi dấu thì $M_0(x_0,y_0)$ không là điểm cực trị của hàm số f với điều kiện $g(x,y) = 0.$

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = xy$ với điều kiện $x + y = 1.$

Giải: Xét hàm Lagrange $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

$$= xy + \lambda(x + y - 1)$$

Giải hệ $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Hàm số f có một điểm tới hạn là $M_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

ứng với $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$

$$L''_{x^2} = 0, \quad L''_{xy} = 1, \quad L''_{y^2} = 0$$

$$d^2L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = 2dxdy$$

Với điều kiện $\begin{cases} dx^2 + dy^2 \neq 0 \\ dg\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} dx^2 + dy^2 \neq 0 \\ dx + dy = 0 \end{cases}$

Ta có: $d^2L(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = -2dx^2 < 0$

Vậy f đạt giá trị cực đại tại M_0, $f(M_0) = \frac{1}{4}$.

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $f(x,y,z) = x + y + z$

với điều kiện $xyz = 1 \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$

Giải:

Xét hàm Lagrange $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$

$$= x + y + z + \lambda(xyz - 1)$$

Giải hệ $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda yz = 0 \\ 1 + \lambda xz = 0 \\ 1 + \lambda xy = 0 \\ xyz - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

Hàm số f có một điểm tới hạn là $M_0(1,1,1)$ ứng với $\lambda = -1$.

Có $L''_{x^2} = 0,\ L''_{y^2} = 0,\ L''_{z^2} = 0,\ L''_{xy} = \lambda z,\ L''_{xz} = \lambda y,\ L''_{yz} = \lambda x,$

$$d^2L(1,1,1,-1) = L''_{x^2}(1,1,1,-1)dx^2 + L''_{y^2}(1,1,1,-1)dy^2 +$$

$$+L''_{z^2}(1,1,1,-1)dz^2 + 2L''_{xy}(1,1,1,-1)dxdy +$$

$$+2L''_{xz}(1,1,1,-1)dxdz + 2L''_{yz}(1,1,1,-1)dydz$$

$$= -2dxdy - 2dxdz - 2dydz$$

Với điều kiện $\begin{cases} dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 \\ dg(1,1,1) = 0 \end{cases}$

hay $\begin{cases} dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 \\ dx + dy + dz = 0 \end{cases}$

Có $d^2L(1,1,1,-1) = -2dxdy - 2(dx+dy)dz$

$$= -2dxdy + 2(dx+dy)^2$$

$$= (dx+dy)^2 + dx^2 + dy^2 > 0$$

Vậy hàm số f đạt giá trị cực tiểu tại điểm $M_0(1,1,1)$.

$$f(M_0) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

3. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên miền đóng, bị chặn

Giả sử hàm số $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn *D*.

Để tìm GTLN, GTNN của f trên *D, ta*

**** Tìm giá trị của f tại các điểm tới hạn (trong D)***

(các điểm có các đạo hàm riêng đồng thời = 0 hoặc không xác định)

**** Tìm GTLN, GTNN của f trên biên của D***

**** So sánh các giá trị trên.***

Ví dụ: Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$$f(x,y) = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$$

trên miền D xác định bởi $x^2 + y^2 \le 1.$

Giải:

* $f'_x = 16x - 2(2x^2 + y^2 + 1)\,4x = 8x(1 - 2x^2 - y^2)$

$f'_y = 6y - 2(2x^2 + y^2 + 1)\,2y = 2y(1 - 4x^2 - 2y^2)$

* Giải hệ $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ ta tìm được 5 điểm tới hạn là:

$$M_1(0,0), M_2(0,\frac{1}{\sqrt{2}}), M_3(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}), M_4(\frac{1}{\sqrt{2}},0), M_5(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$$

Cả 5 điểm tới hạn trên đều là điểm trong của miền D.

$$f(M_1) = 0,\ f(M_2) = f(M_3) = \frac{1}{4},\ f(M_4) = f(M_5) = 1$$

* Trên biên của D,

$$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow f(x,y) = -x^4 + x^2 \qquad (-1 \le x \le 1)$$

Đặt $g(x) = -x^4 + x^2$

Có $g'(x) = 2x - 4x^3$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g(0)=0,\quad g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4},\quad g(1)=g(-1)=0.$$

Trên biên , f đạt GTLN là $\frac{1}{4},$ GTNN là 0.

* So sánh các giá trị $0,\frac{1}{4},1,$ ta thấy:

f đạt GTLN là 1 tại các điểm $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),M_5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

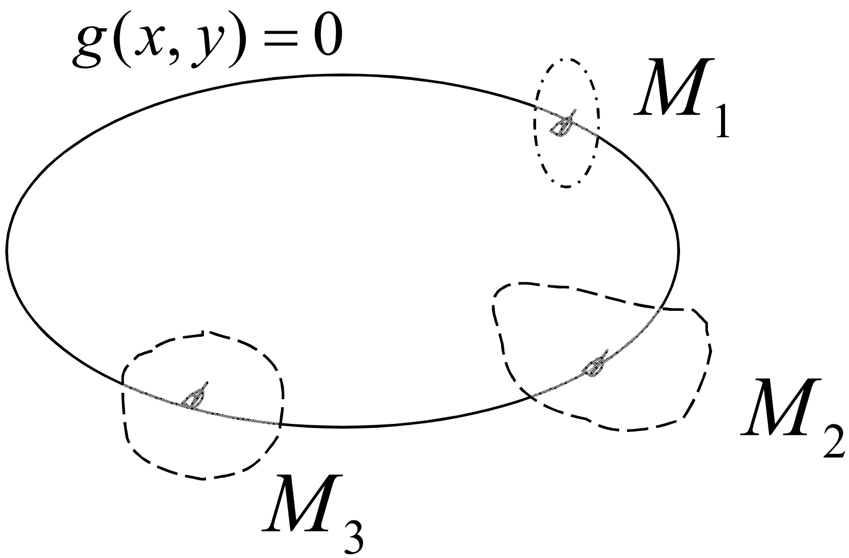
f đạt GTNN là 0 tại các điểm $(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$

§3. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Xét hai bài toán sau:

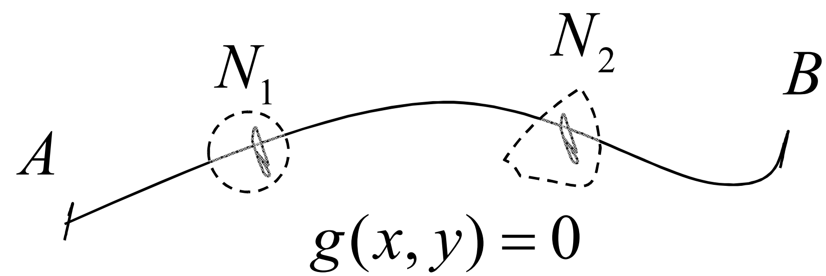
1. Tìm cực trị của hàm số $f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y)=0$

2. Tìm GTLN,NN của hàm số $f(x,y)$ trên đường $g(x,y)=0$



Giả sử tất cả các điểm tới hạn ở bài toán 1 là M_1, M_2, M_3.

So sánh $f(M_1), f(M_2), f(M_3)$,tìm được GTLN,NN ….. (bài toán 2)



Giả sử tất cả các điểm tới hạn ở bài toán 1 là N_1, N_2.

So sánh $f(N_1), f(N_2), f(A), f(B)$

tìm được GTLN,NN …..

(bài toán 2)

Bài tập về nhà:

1.5 $\longrightarrow$ 1.15

1.18, 1.19

1.27 a

và các bài khác.