CHƯƠNG II
BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ MỘT SỐ PHÂN BỐ XÁC SUẤT

Môn học: Xác suất Thống kê

Giảng viên: TS. Nguyễn Kiều Linh

Hà Nội, năm 2020

Nội dung

BÀI 1. BIẾN NGẪU NHIÊN

1. Định nghĩa Biến ngẫu nhiên
2. Phân loại biên ngẫu nhiên
3. Quy luật phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên

BÀI 2. CÁC THAM SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

1. Kỳ vọng
2. Phương sai và độ lệch chuẩn
3. Mode và trung vị

BÀI 3. MỘT SỐ PHÂN BỐ XÁC SUẤT

1. Phân bố nhị thức
2. Phân bố Poisson
3. Phân bố đều
4. Phân bố Chuẩn
5. Phân bố Mũ
6. Phân bố khi bình phương
7. Phân bố Student

Nội dung

1.1 Ví dụ mở đầu

Ví dụ 1

Gọi X là số chấm xuất hiện khi gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất. Khi đó X nhận một trong các giá trị 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1.1 Ví dụ mở đầu

Ví dụ 2

Bắn một viên đạn vào bia có bán kính 15 cm và giả sử viên đạn trúng bia. Gọi Y là khoảng cách từ tâm tới điểm trúng đạn thì khi đó Y có thể nhận các giá thị thuộc $[0, 15)$.

1.1 Ví dụ mở đầu

Nhận xét

Các đại lượng X, Y trong các ví dụ 1 và 2 nhận giá trị có thể của mình một cách ngẫu nhiên, tương ứng mới một xác suất nào đó. Chúng được gọi là biến ngẫu nhiên hay đại lượng ngẫu nhiên

1.2 Định nghĩa biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên là một hàm số có giá trị thực xác định trên không gian các sự kiện ngẫu nhiên.

1.2 Định nghĩa biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên là một hàm số có giá trị thực xác định trên không gian các sự kiện ngẫu nhiên.

Ký hiệu

(i) Ta thường ký hiệu biến ngẫu nhiên bởi các chữ in hoa: $X, Y, Z, \ldots$, hoặc $X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$. Các giá trị của chúng ký hiệu bởi các chữ thường $x, y, z, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$.

(ii) Để đơn giản ta ký hiệu $(X = x)$ thay cho biến cố "Biến ngẫu nhiên X nhận giá trị bằng x", $(X < x)$ thay cho biến cố "biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nhỏ hơn x,"" $\ldots$.

2. Phân loại biên ngẫu nhiên

Người ta thường chia các biến ngẫu nhiên thành hai loại: Biến ngẫu nhiên rời rạc và biến ngẫu nhiên liên tục.

Biến ngẫu nhiên rời rạc

Biến ngẫu nhiên được gọi là **rời rạc** nếu các giá trị có thể có của nó tạo thành một tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được phần tử.

2. Phân loại biên ngẫu nhiên

Người ta thường chia các biến ngẫu nhiên thành hai loại: Biến ngẫu nhiên rời rạc và biến ngẫu nhiên liên tục.

Biến ngẫu nhiên rời rạc

Biến ngẫu nhiên được gọi là **rời rạc** nếu các giá trị có thể có của nó tạo thành một tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được phần tử.

Biến ngẫu nhiên liên tục

Biến ngẫu nhiên được gọi là **liên tục** nếu các giá trị có thể có của nó lấp đầy một khoảng giá trị nào đó.

3. Quy luật phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên nhận mỗi giá trị của nó tương ứng với một sự kiện ngẫu nhiên nào đó và do vậy tương ứng với mỗi xác suất của sự kiện đó.

Quy luật phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên

Bất kỳ một hình thức nào cho phép biểu diễn mối quan hệ giữa các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên và các xác xuất tương ứng để biến ngẫu nhiên nhận các giá trị đó đều được gọi là **quy luật phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên**.

3. Quy luật phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên nhận mỗi giá trị của nó tương ứng với một sự kiện ngẫu nhiên nào đó và do vậy tương ứng với mỗi xác suất của sự kiện đó.

Quy luật phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên

Bất kỳ một hình thức nào cho phép biểu diễn mối quan hệ giữa các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên và các xác xuất tương ứng để biến ngẫu nhiên nhận các giá trị đó đều được gọi là **quy luật phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên**.

Một số phương pháp mô tả quy luật phân bố xác suất

(i) Bảng phân bố xác suất (áp dụng cho biến ngẫu nhiên rời rạc).

(ii) Hàm phân bố xác suất (áp dụng cho cả biến ngẫu nhiên rời rạc và biến ngẫu nhiên liên tục).

(iii) Hàm mật độ xác suất (áp dụng cho biến ngẫu nhiên liên tục).

3.1 Bảng phân bố xác suất

Định nghĩa

Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với các xác suất tương ứng là $p_i = P(X = x_i), i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó **bảng phân bố xác suất** của biến ngẫu nhiên X có dạng:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Bảng: Bảng phân bố xác suất của X.

trong đó, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ là tập các giá trị của X đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Nếu X có vô hạn đếm được phần tử thì trong bảng trên n tiến dần đến ∞.

3.1 Bảng phân bố xác suất

Các bước lập bảng phân bố xác suất

(i) Xác định biến ngẫu nhiên X.

(ii) Tìm các giá trị $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$ mà X có thể nhận.

(iii) Tìm các xác suất $p_i = P(X = x_i), i = 1, 2, \ldots, n$.

(iv) Lập Bảng 1.

3.1 Bảng phân bố xác suất

Ví dụ 3

Trong hộp có 10 sản phẩm, trong đó có 6 chính phẩm. Lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm. Gọi X là số chính phẩm trong 2 sản phẩm lấy ra. Lập bảng phân bố xác suất của X.

Ví dụ 3

Trong hộp có 10 sản phẩm, trong đó có 6 chính phẩm. Lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm. Gọi X là số chính phẩm trong 2 sản phẩm lấy ra. Lập bảng phân bố xác suất của X.

Lời giải

Ta thấy X nhận các giá trị 0, 1, 2.

$$P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15};\ P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15};P(X=2)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{5}{15}.$$

Bảng phân bố xác suất của X là:

X	0	1	2
p	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{15}$

3.2 Hàm phân bố xác suất

Định nghĩa

Hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là $F_X(x)$ được xác định bởi

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hàm phân bố xác suất phản ánh mức độ tập trung xác suất ở bên trái điểm x.

3.2 Hàm phân bố xác suất

Tính chất

Nếu biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất ở Bảng 1 thì hàm phân bố được cho bởi:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \; x < x_1 \\ p_1 & \text{nếu } x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{nếu } x_2 \le x < x_3 \\ \dots & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 & \text{nếu } x \ge x_n. \end{cases}$$

3.2 Hàm phân bố xác suất

Ví dụ 4

Tìm hàm phân bố xác suất của biến ngẫu X cho trong Ví dụ 3.

X	0	1	2
p	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{15}$

3.2 Hàm phân bố xác suất

Lời giải

Hàm phân bố xác suất của biến ngẫu X là

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \ x < 0 \\ \dfrac{2}{15} & \text{nếu } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{10}{15} & \text{nếu } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{nếu } x \ge 2. \end{cases}$$

3.2 Hàm phân bố xác suất

Tính chất

(i) $0 \leq F_X(x) \leq 1$.

(ii) $F_X(x)$ là hàm không giảm, liên tục bên trái, nghĩa là với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ thì $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ và với mọi $a \in \mathbb{R}$ thì $F_X(a) = \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$.

(iii) Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì $P(X = a) = 0$ và $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

(iv) $F_X(-\infty) = 0; F_X(+\infty) = 1$.

3.3 Hàm mật độ xác suất

Định nghĩa

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân bố xác suất $F_X(x), x \in \mathbb{R}$. Nếu tồn tại hàm $f_X(x)$ sao cho

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

thì $f_X(x)$ được gọi là **hàm mật độ xác suất** của biến ngẫu nhiên X.

Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X tại mỗi điểm x cho biết mức độ tập trung xác suất tại điểm đó.

3.3 Hàm mật độ xác suất

Tính chất

(i) $f_X(x) = F'_X(x), \ x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f_X(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f_X(x)dx$

(iv) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

3.3 Hàm mật độ xác suất

Ví dụ 5

Cho biến ngẫu nhiên X liên tục có hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{nếu } 0 \le x \le 1 \\ k & \text{nếu } 1 < x \le 4 \\ 0 & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(i) Tìm k.

(ii) Tìm hàm phân bố xác suất $F_X(x)$.

(iii) Tính xác suất $P(0,5 < X < 2)$.

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

(i) Theo tính chất của hàm mật dộ xác suất thì $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$

Lời giải

(i) Theo tính chất của hàm mật dộ xác suất thì $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$

Mặt khác ta có

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$$

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

(i) Theo tính chất của hàm mật dộ xác suất thì $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$

Mặt khác ta có

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f_X(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f_X(x)dx + \int\limits_{1}^{4} f_X(x)dx + \int\limits_{4}^{+\infty} f_X(x)dx$$

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

(i) Theo tính chất của hàm mật dộ xác suất thì $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int\limits_{-\infty}^{0} f_X(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f_X(x)dx + \int\limits_{1}^{4} f_X(x)dx + \int\limits_{4}^{+\infty} f_X(x)dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} kxdx + \int\limits_{1}^{4} kdx + \int\limits_{4}^{+\infty} 0dx
\end{aligned}$$

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

(i) Theo tính chất của hàm mật dộ xác suất thì $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$

Mặt khác ta có

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f_X(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f_X(x)dx + \int\limits_{1}^{4} f_X(x)dx + \int\limits_{4}^{+\infty} f_X(x)dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} kxdx + \int\limits_{1}^{4} kdx + \int\limits_{4}^{+\infty} 0dx = \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + (kx)|_1^4$$

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

(i) Theo tính chất của hàm mật dộ xác suất thì $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$

Mặt khác ta có

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f_X(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f_X(x)dx + \int\limits_{1}^{4} f_X(x)dx + \int\limits_{4}^{+\infty} f_X(x)dx$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} kxdx + \int\limits_{1}^{4} kdx + \int\limits_{4}^{+\infty} 0dx = \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + (kx)|_1^4 = \frac{7k}{2}.$$

Do đó $\frac{7k}{2} = 1$ hay $k = \frac{2}{7}$.

Lời giải

(ii) Nếu $x < 0$ thì

$$F_X(x)$$

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

(ii) Nếu $x < 0$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Lời giải

(ii) Nếu $x < 0$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt$$

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

(ii) Nếu $x < 0$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Nếu $0 \leq x < 1$ thì

$$F_X(x)$$

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

(ii) Nếu $x < 0$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Nếu $0 \leq x < 1$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Lời giải

(ii) Nếu $x < 0$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Nếu $0 \leq x < 1$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} ktdt$$

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

(ii) Nếu $x < 0$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Nếu $0 \leq x < 1$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} ktdt = \left(\frac{kt^2}{2}\right)\Bigg|_0^x$$

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

(ii) Nếu $x < 0$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Nếu $0 \leq x < 1$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} ktdt = \left(\frac{kt^2}{2}\right)\Bigg|_0^x = \frac{kx^2}{2}$$

Lời giải

(ii) Nếu $x < 0$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Nếu $0 \leq x < 1$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} ktdt = \left(\frac{kt^2}{2}\right)\Bigg|_0^x = \frac{kx^2}{2} = \frac{x^2}{7}.$$

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

Nếu $1 < x \leq 4$ thì

$$F_X(x)$$

Lời giải

Nếu $1 < x \leq 4$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Lời giải

Nếu $1 < x \leq 4$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} ktdt + \int_{1}^{x} kdt$$

Lời giải

Nếu $1 < x \leq 4$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} ktdt + \int_{1}^{x} kdt = \left(\frac{kt^2}{2}\right)\Big|_0^1 + (kt)|_1^x$$

Lời giải

Nếu $1 < x \leq 4$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} ktdt + \int_{1}^{x} kdt = \left(\frac{kt^2}{2}\right)\Big|_0^1 + (kt)|_1^x$$
$$= \frac{k}{2} + k(x-1)$$

Lời giải

Nếu $1 < x \leq 4$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} ktdt + \int_{1}^{x} kdt = \left(\frac{kt^2}{2}\right)\Big|_0^1 + (kt)|_1^x$$
$$= \frac{k}{2} + k(x-1) = \frac{2x-1}{7}.$$

Lời giải

Nếu $x > 4$ thì

$$F_X(x)$$

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

Nếu $x > 4$ thì

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

Nếu $x > 4$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} ktdt + \int_{1}^{4} kdt + \int_{4}^{x} 0dt$$

Lời giải

Nếu $x > 4$ thì

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} ktdt + \int\limits_{1}^{4} kdt + \int\limits_{4}^{x} 0dt$$

$$= \left(\frac{kt^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + (kt)|_1^4$$

Lời giải

Nếu $x > 4$ thì

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} ktdt + \int_{1}^{4} kdt + \int_{4}^{x} 0dt$$

$$= \left(\frac{kt^2}{2}\right)\Big|_0^1 + (kt)|_1^4$$

$$= \frac{7k}{2} = 1.$$

3.3 Hàm mật độ xác suất

Lời giải

Do đó hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X là

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{7} & \text{nếu } \quad 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{2x-1}{7} & \text{nếu } 1 < x \le 4 \\ 1 & \text{nếu } x > 4. \end{cases}$$

Nội dung

BÀI 1. BIẾN NGẪU NHIÊN

1. Định nghĩa Biến ngẫu nhiên
2. Phân loại biên ngẫu nhiên
3. Quy luật phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên

BÀI 2. CÁC THAM SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

1. Kỳ vọng
2. Phương sai và độ lệch chuẩn
3. Mode và trung vị

BÀI 3. MỘT SỐ PHÂN BỐ XÁC SUẤT

1. Phân bố nhị thức
2. Phân bố Poisson
3. Phân bố đều
4. Phân bố Chuẩn
5. Phân bố Mũ
6. Phân bố khi bình phương
7. Phân bố Student

1.1 Định nghĩa kỳ vọng

Định nghĩa

Với mọi biến ngẫu nhiên X, ta định nghĩa **kỳ vọng** của X, được ký hiệu EX (hoặc $E(X), E[X]$), theo hai trường hợp như sau.

• Trường hợp X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

thì

$$EX = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i. \tag{2}$$

• Trường hợp X là biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ thì

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \tag{3}$$

1.1 Định nghĩa kỳ vọng

Ví dụ 1

Biến ngẫu nhiên liên tục X có bảng phân bố

X	-5	2	3	4
P	0.4	0.3	0.1	0.2

Tính kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X.

1.1 Định nghĩa kỳ vọng

Ví dụ 1

Biến ngẫu nhiên liên tục X có bảng phân bố

X	-5	2	3	4
P	0.4	0.3	0.1	0.2

Tính kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X.

Lời giải

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X là:

$$EX = -5 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.2 = -0.3$$

1.1 Định nghĩa kỳ vọng

Ví dụ 2

Tuổi thọ của một loại côn trùng là một biến ngẫu nhiên (đơn vị là tháng) với hàm mật độ xác suất như sau:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2(4-x) & \text{nếu } \ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{nếu trái lại.} \end{cases} \tag{4}$$

Tìm tuổi thọ trung bình của loài côn trùng trên.

1.1 Định nghĩa kỳ vọng

Lời giải

- Trước tiên ta tìm k. Áp dụng tính chất hàm mật độ xác suất ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

Do đó,

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$$

1.1 Định nghĩa kỳ vọng

Lời giải

- Trước tiên ta tìm k. Áp dụng tính chất hàm mật độ xác suất ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

Do đó,

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{4} kx^2(4-x)dx + \int_{4}^{+\infty} 0dx$$

1.1 Định nghĩa kỳ vọng

Lời giải

- Trước tiên ta tìm k. Áp dụng tính chất hàm mật độ xác suất ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

Do đó,

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{4} kx^2(4-x)dx + \int_{4}^{+\infty} 0dx$$

$$= k\int_{0}^{4} x^2(4-x)dx$$

1.1 Định nghĩa kỳ vọng

Lời giải

- Trước tiên ta tìm k. Áp dụng tính chất hàm mật độ xác suất ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

Do đó,

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{4} kx^2(4-x)dx + \int_{4}^{+\infty} 0dx$$

$$= k\int_{0}^{4} x^2(4-x)dx = \frac{64}{3}k.$$

1.1 Định nghĩa kỳ vọng

Lời giải

Suy ra, $k = \dfrac{3}{64}$.

Tuổi thọ trung bình của loài côn trùng trên là:

$$EX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx =$$

1.1 Định nghĩa kỳ vọng

Lời giải

Suy ra, $k = \dfrac{3}{64}$.

Tuổi thọ trung bình của loài côn trùng trên là:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{4} kx^3(4-x)dx + \int_{4}^{+\infty} 0dx$$

1.1 Định nghĩa kỳ vọng

Lời giải

Suy ra, $k = \dfrac{3}{64}$.

Tuổi thọ trung bình của loài côn trùng trên là:

$$EX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{4} kx^3(4-x)dx + \int\limits_{4}^{+\infty} 0dx$$

$$= \frac{3}{64}\left(x^4 - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^4$$

1.1 Định nghĩa kỳ vọng

Lời giải

Suy ra, $k = \dfrac{3}{64}$.

Tuổi thọ trung bình của loài côn trùng trên là:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{0} 0 dx + \int_{0}^{4} k x^3 (4 - x) dx + \int_{4}^{+\infty} 0 dx$$

$$= \frac{3}{64}\left(x^4 - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{12}{5}.$$

Vậy tuổi thọ trung bình của loài côn trùng trên là $\dfrac{12}{5}$ tháng.

1.2 Các tính chất của kỳ vọng

Các tính chất của kỳ vọng

- *Tính chất 1:* $E(c) = c$, c là hằng số.
- *Tính chất 2:* $E(cX) = CE(X)$, c là hằng số.
- *Tính chất 3:* $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- *Hệ quả* $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$.

Tổng quát: Kỳ vọng toán của tổng n biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, ..., X_n$ bằng tổng các kỳ vọng toán thành phần.

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

- *Tính chất 4:* Nếu X, Y độc lập thì $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Tổng quát: Kỳ vọng toán của tích n biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, ..., X_n$ độc lập lẫn nhau bằng tích các kỳ vọng thành phần.

$$E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i).$$

1.2 Các tính chất của kỳ vọng

Ví dụ 3

Chọn ngẫu nhiên 3 bi từ một túi có 6 bi đen, 4 bi trắng. Xét hai bài toán sau:
a) Nếu chọn được 1 bi trắng sẽ được thưởng 200 usd. Gọi Y là số tiền nhận được. Tính kỳ vọng của Y .
b) Nếu chọn được 1 bi trắng sẽ được thưởng 200usd và chọn được 1 bi đen sẽ được thưởng 300usd. Gọi Z là số tiền nhận được. Tính kỳ vọng của Z.

1.2 Các tính chất của kỳ vọng

Ví dụ 3

Chọn ngẫu nhiên 3 bi từ một túi có 6 bi đen, 4 bi trắng. Xét hai bài toán sau:
a) Nếu chọn được 1 bi trắng sẽ được thưởng 200 usd. Gọi Y là số tiền nhận được. Tính kỳ vọng của Y .
b) Nếu chọn được 1 bi trắng sẽ được thưởng 200usd và chọn được 1 bi đen sẽ được thưởng 300usd. Gọi Z là số tiền nhận được. Tính kỳ vọng của Z.

Lời giải

a) Gọi X là số bi trắng trong 3 bi vừa chọn.

1.2 Các tính chất của kỳ vọng

Ví dụ 3

Chọn ngẫu nhiên 3 bi từ một túi có 6 bi đen, 4 bi trắng. Xét hai bài toán sau:
a) Nếu chọn được 1 bi trắng sẽ được thưởng 200 usd. Gọi Y là số tiền nhận được. Tính kỳ vọng của Y .
b) Nếu chọn được 1 bi trắng sẽ được thưởng 200usd và chọn được 1 bi đen sẽ được thưởng 300usd. Gọi Z là số tiền nhận được. Tính kỳ vọng của Z.

Lời giải

a) Gọi X là số bi trắng trong 3 bi vừa chọn. Ta có bảng phân bố xác suất của X

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

1.2 Các tính chất của kỳ vọng

Lời giải (tiếp)

Ta cũng có $EX = \sum_{i=0}^{3} x_i p_i = 0 \times \frac{5}{30} + 1 \times \frac{15}{30} + 2 \times \frac{9}{30} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}$.

Áp dụng tính chất 3:

$$EY = E(200X) = 200EX = 200 \times \frac{6}{5} = 240.$$

b) Theo giả thiết ta có $Z = 200X + 300(3 - X) = 900 - 100X$. Do đó, áp dụng tính chất 3 và tính chất 2 ta có

$$EZ = E(900 - 100X) = 900 - 100EX = 900 - 100 \times \frac{6}{5} = 780.$$

2.1 Phương sai và độ lệch chuẩn

Phương sai và độ lệch chuẩn

(i) **Phương sai** của X, ký hiệu là DX, được định nghĩa là kỳ vọng của bình phương độ lệch giữa X và giá trị kỳ vọng của nó tức là

$$DX = E(X - EX)^2.$$

(ii) Người ta chứng minh được rằng

$$DX = EX^2 - (EX)^2.$$

2.1. Phương sai và độ lệch chuẩn

Phương sai và độ lệch chuẩn

(iii) Cụ thể, - Nếu X là biến NN rời rạc thì

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2.$$

- Nếu X là biến NN liên tục thì

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\right)^2.$$

(iv) **Độ lệch tiêu chuẩn** của X, được ký hiệu là δ_X, được xác định bởi công thức

$$\delta_X = \sqrt{DX}.$$

2.1. Phương sai, độ lệch chuẩn

Ví dụ 4

Tính phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X chơ bởi bảng phân bố

X	-5	2	3	4
P	0.4	0.3	0.1	0.2

2.1. Phương sai, độ lệch chuẩn

Ví dụ 4

Tính phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X chơ bởi bảng phân bố

X	-5	2	3	4
P	0.4	0.3	0.1	0.2

Lời giải

Kỳ vọng của X:

2.1. Phương sai, độ lệch chuẩn

Ví dụ 4

Tính phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X cho bởi bảng phân bố

X	-5	2	3	4
P	0.4	0.3	0.1	0.2

Lời giải

Kỳ vọng của X: $EX = -5 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.2 = -0.3$

2.1. Phương sai, độ lệch chuẩn

Ví dụ 4

Tính phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X chơ bởi bảng phân bố

X	-5	2	3	4
P	0.4	0.3	0.1	0.2

Lời giải

Kỳ vọng của X: $EX = -5 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.2 = -0.3$
Kỳ vọng của X^2:

2.1. Phương sai, độ lệch chuẩn

Ví dụ 4

Tính phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X cho bởi bảng phân bố

X	-5	2	3	4
P	0.4	0.3	0.1	0.2

Lời giải

Kỳ vọng của X: $EX = -5 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.2 = -0.3$

Kỳ vọng của X^2: $EX^2 = (-5)^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.1 + 4^2 \times 0.2 = 15.3$

2.1. Phương sai, độ lệch chuẩn

Ví dụ 4

Tính phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X cho bởi bảng phân bố

X	-5	2	3	4
P	0.4	0.3	0.1	0.2

Lời giải

Kỳ vọng của X: $EX = -5 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.2 = -0.3$

Kỳ vọng của X^2: $EX^2 = (-5)^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.1 + 4^2 \times 0.2 = 15.3$

Do đó, phương sai của X là:

2.1. Phương sai, độ lệch chuẩn

Ví dụ 4

Tính phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X cho bởi bảng phân bố

X	-5	2	3	4
P	0.4	0.3	0.1	0.2

Lời giải

Kỳ vọng của X: $EX = -5 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.2 = -0.3$
Kỳ vọng của X^2: $EX^2 = (-5)^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.1 + 4^2 \times 0.2 = 15.3$
Do đó, phương sai của X là:

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 15.3 - (-0.3)^2 = 15.21.$$

2.1. Phương sai, độ lệch chuẩn

Ví dụ 4

Tính phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X cho bởi bảng phân bố

X	-5	2	3	4
P	0.4	0.3	0.1	0.2

Lời giải

Kỳ vọng của X: $EX = -5 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.2 = -0.3$
Kỳ vọng của X^2: $EX^2 = (-5)^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.1 + 4^2 \times 0.2 = 15.3$
Do đó, phương sai của X là:

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 15.3 - (-0.3)^2 = 15.21.$$

Suy ra, độ lệch chuẩn $\sigma_X = \sqrt{D(X)} \approx 3.9.$

2.1. Phương sai, độ lệch chuẩn

Ý nghĩa của phương sai, và độ lệch chuẩn

1. Phương sai và độ lệch chuẩn phản ánh mức độ phân tán của các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình biến ngẫu nhiên đó.
2. Đơn vị đo của phương sai bằng bình phương đơn vị đo của biến ngẫu nhiên. Do vậy để đánh giá dễ hơn mức độ phân tán dễ dàng hơn thì người ta dùng độ lệch tiêu chuẩn.

2.1. Phương sai, độ lệch chuẩn

Ý nghĩa của phương sai, và độ lệch chuẩn

1. Phương sai và độ lệch chuẩn phản ánh mức độ phân tán của các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình biến ngẫu nhiên đó.
2. Đơn vị đo của phương sai bằng bình phương đơn vị đo của biến ngẫu nhiên. Do vậy để đánh giá dễ hơn mức độ phân tán dễ dàng hơn thì người ta dùng độ lệch tiêu chuẩn.

Ví dụ 5

Theo thống kê việc một người Mỹ 25 tuổi sẽ sống thêm trên một năm có xác suất là 0,992, còn xác suất để người đó chết trong vòng một năm tới là 0,008. Một chương trình bảo hiểm đề nghị người đó bảo hiểm sinh mạng cho 1 năm với số tiền chi trả 1000 đô la, còn tiền đóng là 10 đô la. Hỏi lợi nhuận của công ty bảo hiểm nhận được là bao nhiêu?

2.1. Phương sai, độ lệch chuẩn

Lời giải

Rõ ràng lợi nhuận là biến ngẫu nhiên X với 2 giá trị là 10 đô la (nếu người bảo hiểm không chết) và -990 đô la (nếu người đó chết). Bảng phân bố xác suất tương ứng.

X	-990	10
P	0.008	0.992

Do đó kỳ vọng $EX = -990 \times 0.008 + 10 \times 0.992 = 2$. Ta thấy lợi nhuận trung bình là một số dương vì vậy công ty bảo hiểm có thể làm ăn có lãi. Tuy nhiên,

$$EX^2 = (-990)^2 \times 0.008 + 10^2 \times 0.992 = 7940.$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 7940 - 4 = 7936 \;\Rightarrow\; \sigma_X \approx 89.08$$

Điều này có nghĩa mặc dù kinh doanh bảo hiểm có lãi nhưng rủi ro khá lớn.

2.2. Các tính chất của phương sai

Các tính chất của phương sai

1. $D(c) = 0$, với c là hằng số.
2. $D(cX) = c^2 D(X)$, với c là hằng số.
3. Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ độc lập và có các phương sai hữu hạn thì

$$D(c_1X_1 \pm c_2X_2 \pm \ldots \pm c_nX_n) = c_1^2 DX_1 + c_2^2 DX_2 + \ldots + c_n^2 DX_n.$$

Nói riêng: Nếu X, Y độc lập và DX, DY hữu hạn thì $D(X \pm Y) = DX + DY$.

2.2. Các tính chất của phương sai

Các tính chất của phương sai

1. $D(c) = 0$, với c là hằng số.
2. $D(cX) = c^2 D(X)$, với c là hằng số.
3. Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ độc lập và có các phương sai hữu hạn thì

$$D(c_1X_1 \pm c_2X_2 \pm \ldots \pm c_nX_n) = c_1^2 DX_1 + c_2^2 DX_2 + \ldots + c_n^2 DX_n.$$

Nói riêng: Nếu X, Y độc lập và DX, DY hữu hạn thì $D(X \pm Y) = DX + DY$.

Ứng dụng thực tế của phương sai và độ lệch chuẩn

1. Trong kỹ thuật, phương sai và độ lệch chuẩn đặc trưng cho mức độ phân tán của các chi tiết gia công hay sai số của thiết bị.

2.2. Các tính chất của phương sai

Các tính chất của phương sai

1. $D(c) = 0$, với c là hằng số.
2. $D(cX) = c^2D(X)$, với c là hằng số.
3. Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ độc lập và có các phương sai hữu hạn thì

$$D(c_1X_1 \pm c_2X_2 \pm \ldots \pm c_nX_n) = c_1^2DX_1 + c_2^2DX_2 + \ldots + c_n^2DX_n.$$

Nói riêng: Nếu X, Y độc lập và DX, DY hữu hạn thì $D(X \pm Y) = DX + DY$.

Ứng dụng thực tế của phương sai và độ lệch chuẩn

1. Trong kỹ thuật, phương sai và độ lệch chuẩn đặc trưng cho mức độ phân tán của các chi tiết gia công hay sai số của thiết bị.
2. Trong quản lý và kinh doanh, nó đặc trưng cho mức độ rủi ro của các quyết định.

2.2. Các tính chất của phương sai

Ví dụ 6

Cho hai biến ngẫu nhiên X, Y là lãi suất của 2 loại cổ phiếu A, B tương ứng được cho bởi bảng phân bố sau:

X	-1%	0%	2%
$P_X\{x = x_i\}$	0.3	0.45	0.25
Y	-2%	0%	4%
$P_Y\{y = y_i\}$	0.2	0.5	0.3

Giả thiết mức độ rủi ro của mỗi loại cổ phiếu được xác định bằng độ lệch chuẩn của lãi suất. Nếu một người thứ nhất đầu tư 40% tiền để mua cổ phiếu A và 60% tiền mua cổ phiếu B, người thứ 2 đầu tư 80% tiền để mua cổ phiếu A và 20% tiền mua cổ phiếu B thì lãi suất trung bình mỗi người là bao nhiêu và so sánh mức độ rủi do của hai người đó? Nên chọn theo cách đầu tư nào?

Lời giải

Gọi biến ngẫu nhiêu Z_1 và Z_2 là lãi suất của hai người đầu tư đó thì
$Z_1 = 0.4X + 0.6Y$ và $Z_2 = 0.8X + 0.2Y$.
Ta tính EX, DX và EY, DY.

$$EX = 0.2, EX^2 = 1.3, DX = 1.26, EY = 1.83, EY^2 = 0.7411, DY = 0.7411.$$

$$EZ_1 = E(0.4X + 0.6Y) = 0.4EX + 0.6EY = 0.4 \times 0.2 + 0.6 \times 1.83 = 1.178$$

$$DZ_1 = D(0.4X + 0.6Y) = 0.16DX + 0.36DY = 0.16 \times 1.26 + 0.36 \times 0.7411 = 0.4684.$$

$$\sigma_{Z_1} \approx 0.684$$

2.2. Các tính chất của phương sai

Lời giải (tiếp)

và

$$EZ_2 = E(0.8X + 0.2Y) = 0.8EX + 0.2EY = 0.8 \times 0.2 + 0.2 \times 1.83 = 0.526$$

$$DZ_2 = D(0.8X + 0.2Y) = 0.8DX + 0.2DY = 0.64 \times 1.26 + 0.04 \times 0.7411 = 0.95462.$$

$$\sigma_{Z_2} \approx 0.977$$

Như vậy, cách đầu tư người thứ nhất có lãi suất trung bình cao hơn và mức độ rủi ro cũng thấp hơn so với cách đầu tư thứ hai. Như vậy nên chọn đầu tư theo cách của người thứ nhất sẽ cho lãi suất cao hơn và an toàn hơn.

3. Mode và trung vị

Mode và trung vị

1. Mode của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là $\text{mod}(X)$, là giá trị của biến ngẫu nhiên X có khả năng xuất hiện lớn nhất trong một lân cận nào đó của nó. Đối với biến ngẫu nhiên rời rạc X thì $\text{mod}(X)$ là giá trị của X ứng với xác suất lớn nhất. Như vậy một biến ngẫu nhiên có thể có một mode hoặc nhiều mode.
2. Trung vị của biến ngẫu nhiên X là giá trị của X chia phân phối xác suất thành hai phần có các xác suất bằng nhau. Khí hiệu là $\text{med}(X)$.

3. Mode và trung vị

Nhận xét

1. Ta có thể tìm trung vị bằng cách giải phương trình: $F_X(x) = 0,5$.
2. Trung vị đặc trưng cho vị trí tốt nhất, nhiều khi tốt hơn cả kỳ vọng, nhất là những trường hợp số liệu nhiều sai sót hoặc sai xót thái quá.

Nội dung

Nội dung Bài 3

Các quy luật phân bố sẽ học trong Bài 3

Biến ngẫu nhiên rời rạc

1. Phân bố nhị thức
2. Phân bố Poisson

Biến ngẫu nhiên liên tục

1. Phân bố đều
2. Phân bố chuẩn
3. Phân bố mũ
4. Phân bố khi bình phương
5. phân bố student

1. Phân bố nhị thức

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên X nhận giá trị trong tập $\{0; 1; 2; \dots; n\}$ với xác suất được tính theo công thức Bernoulli:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \text{ với } k = 0, 1, 2, \dots, n;\ \ 0 \le p \le 1$$

được gọi là tuân theo **phân phối nhị thức** với các tham số n và p, ký hiệu $X \sim B(n, p)$.

Các tham số đặc trưng

Với $X \sim B(n, p)$ ta có $EX = np$ và $DX = np(1-p) = npq$ với $q = 1 - p$.

Nhận xét

Thực hiện n phép thử độc lập cùng điều kiện, trong mỗi phép thử xác suất xảy ra biến cố A không đổi và bằng p. Gọi X là số phép thử xảy ra A. Khi đó $X \sim B(n, p)$.

1. Phân bố nhị thức

Ví dụ 1

Gieo một con xúc xắc 3 lần. Gọi X là số lần ra mặt 6 chấm trong 3 lần gieo. Lập bảng phân bố xác suất của X.

1. Phân bố nhị thức

Ví dụ 1

Gieo một con xúc xắc 3 lần. Gọi X là số lần ra mặt 6 chấm trong 3 lần gieo. Lập bảng phân bố xác suất của X.

Lời giải

X có thể nhận các giá trị 0, 1, 2, 3. Xác suất xuất hiện mặt 6 chấm mỗi lần gieo là $\frac{1}{6}$.

1. Phân bố nhị thức

Ví dụ 1

Gieo một con xúc xắc 3 lần. Gọi X là số lần ra mặt 6 chấm trong 3 lần gieo. Lập bảng phân bố xác suất của X.

Lời giải

X có thể nhận các giá trị 0, 1, 2, 3. Xác suất xuất hiện mặt 6 chấm mỗi lần gieo là $\frac{1}{6}$. Ta có $X \sim B(3, \frac{1}{6})$ với

$$n = 3, p = \frac{1}{6}, P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ với } k = 0, 1, 2, 3.$$

1. Phân bố nhị thức

Ví dụ 1

Gieo một con xúc xắc 3 lần. Gọi X là số lần ra mặt 6 chấm trong 3 lần gieo. Lập bảng phân bố xác suất của X.

Lời giải

X có thể nhận các giá trị 0, 1, 2, 3. Xác suất xuất hiện mặt 6 chấm mỗi lần gieo là $\frac{1}{6}$. Ta có $X \sim B(3, \frac{1}{6})$ với

$$n = 3, p = \frac{1}{6}, P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \text{ với } k = 0, 1, 2, 3.$$

Do vậy bảng phân bố xác suất của X là

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

2. Phân bố Poisson

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên X nhận giá trị trong tập $\{0; 1; 2; \ldots; n\}$ với xác suất được tính theo công thức:

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \text{ với } k = 0, 1, 2, \ldots, n;$$

được gọi là tuân theo **phân bố Poisson** với tham số λ, ký hiệu $X \sim P(\lambda)$.

Các tham số đặc trưng

Với $X \sim P(\lambda)$ ta có $EX = DX = \lambda$.

2. Phân bố Poisson

Nhận xét

1. Xét một biến cố A xuất hiện ở những thời điểm ngẫu nhiên. Giả sử số lần xuất hiện A trong một khoảng thời gian không ảnh hưởng tới số lần xuất hiện A trong khoảng thời gian tiếp theo. Hơn nữa cường độ xuất hiện A là số c không thay đổi. Gọi X là số lần xuất hiện A trong khoảng thời gian (t_1, t_2). Ta có $X \sim P(\lambda)$ với $\lambda = c(t_2 - t_1) = c.\Delta t$, trong đó c là hằng số và được gọi là cường độ xuất hiện A.
2. Phân bố Poisson có nhiều ứng dụng cho các quá trình có liên quan đến số quan sát đối với một đơn vị thời gian hay không gian. Ví dụ số cuộc điện thoại nhận được ở một trạm điện thoại trong một phút, số khách hàng đến nhà băng đối với mỗi chu kỳ 30 phút, ...

2. Phân bố Poisson

Ví dụ 2

Ở tổng đài chăm sóc khách hàng của một công ty, các cuộc điện thoại gọi đến xuất hiện ngẫu nhiên, độc lập với nhau với tốc độ trung bình 2 cuộc gọi trong một phút. Tìm xác xuất để

1. Có đúng 5 cuộc gọi điện thoại trong vòng 2 phút.
2. Không có cuộc điện thoại nào trong khoảng thời gian 30 giây.
3. Có ít nhất một cuộc điện thoại trong khoảng thời gian 10 giây.

2. Phân bố Poisson

Lời giải

1. Gọi X là số cuộc điện thoại xuất hiện trong vòng 2 phút, khi đó $X \sim P(\lambda_1)$. Trong đó, λ_1 là số cuộc điện thoại trong vòng 2 phút, do đó $\lambda_1 = 4$. Ta có

$$P(X=5) = e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^5}{5!} = e^{-4}\frac{4^5}{5!} = 0,156.$$

2. Gọi Y là số cuộc điện thoại xuất hiện trong vòng 30 giây, khi đó $Y \sim P(\lambda_2)$. Trong đó, λ_2 là số cuộc điện thoại trong vòng 30 giây, do đó $\lambda_2 = 1$.

$$P(X=0) = e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^0}{0!} = e^{-1} = 0,3679.$$

2. Phân bố Poisson

Lời giải

3. Gọi Z là số cuộc điện thoại xuất hiện trong vòng 10 giây, khi đó $Z \sim P(\lambda_3)$. Trong đó, λ_3 là số cuộc điện thoại trong vòng 10 giây, do đó $\lambda_3 = 1/3$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda_3}\frac{\lambda_3^0}{0!} = 1 - e^{-1/3} = 0,2835.$$

2. Phân bố Poisson

Chú ý

Khi n lớn và p nhỏ $(n > 50; p < 0,1)$ thì $X \sim B(n,p)$ có thể chuyển thành $X \sim P(\lambda)$ với $\lambda = np$.

2. Phân bố Poisson

Chú ý

Khi n lớn và p nhỏ $(n > 50; p < 0,1)$ thì $X \sim B(n,p)$ có thể chuyển thành $X \sim P(\lambda)$ với $\lambda = np$.

Ví dụ 3

Trong một lô thuốc, tỷ lệ thuốc hỏng là $p = 0,003$. Kiểm nghiệm 1000 ống. Tính xác suất để gặp 3 ống hỏng.

2. Phân bố Poisson

Chú ý

Khi n lớn và p nhỏ $(n > 50; p < 0,1)$ thì $X \sim B(n,p)$ có thể chuyển thành $X \sim P(\lambda)$ với $\lambda = np$.

Ví dụ 3

Trong một lô thuốc, tỷ lệ thuốc hỏng là $p = 0,003$. Kiểm nghiệm 1000 ống. Tính xác suất để gặp 3 ống hỏng.

Lời giải

Gọi X là số ống thuốc hỏng trong 1000 ống. Ta có $X \sim B(n,p)$ với $n = 1000, p = 0,003$. Do n lớn và p bé nên ta xấp xỉ $X \sim P(\lambda)$ với $\lambda = np = 3$. Khi đó

$$P(X = 3) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!} = e^{-3}\frac{3^3}{3!} = 0,224.$$

3. Phân bố đều

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo **phân bố đều** trên $[a, b]$, ký hiệu $X \sim U([a, b])$, nếu X có hàm mật độ:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{nếu} \quad x \in [a, b] \\ 0 & \text{nếu trái lại.} \end{cases} \tag{5}$$

Các tham số đặc trưng

Với $X \sim U([a, b])$ ta có $EX = \dfrac{a+b}{2}$ và $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

3. Phân bố đều

Ví dụ 4

Lịch chạy của xe bus tại một trạm xe bus như sau: Chiếc xe bus đầu tiên trong ngày sẽ khởi hành từ trạm này lúc 7 giờ, cứ sau 15 phút sẽ có một xe khác đến trạm. Giả sử một hành khách đến trạm ngẫu nhiên trong khoảng thời gian từ 7 giờ đến 7 giờ 30. Tìm xác suất để hành khách này chờ:

1. Ít hơn 5 phút
2. Ít nhất 12 phút.

3. Phân bố đều

Lời giải

Gọi X là số phút sau 7h hành khách đến trạm, ta có $X \sim U([0, 30])$.
1. Hành khách chờ ít hơn 5 phút nếu đến trạm giữa 7h10 và 7h15 hoặc 7h25 đến 7h30. Do đó xác suất cần tìm là

$$P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30) = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{1}{3}.$$

2. Hành khách chờ ít nhất 12 phút nếu đến trạm giữa 7h và 7h03 hoặc giữa 7h15 và 7h18. Xác suất cần tìm là

$$P(0 < X < 3) + P(15 < X < 18) = \frac{3}{30} + \frac{3}{30} = \frac{1}{5}.$$

4. Phân bố chuẩn

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo **phân bố chuẩn** với hai tham số μ và δ^2, ký hiệu $X \sim N(\mu, \delta^2)$, nếu X có hàm mật độ:

$$f_X(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}}. \tag{6}$$

Các tham số đặc trưng

Với $X \sim N(\mu, \delta^2)$ ta có $EX = \mu$ và $DX = \delta^2$.

4. Phân bố chuẩn

Phân bố chuẩn tắc

Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo **phân bố chuẩn tắc** nếu X là phân bố chuẩn với hai tham số $\mu = 0$ và $\delta = 1$, ký hiệu $X \sim N(0, 1)$. Khi đó hàm mật độ của X là

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}. \tag{7}$$

Để tính xác suất ta dùng hàm Laplace $\phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)dt$.

4. Phân bố chuẩn

Các tính chất phân bố chuẩn

1. $\phi(x)$ là hàm lẻ, tăng ngặt.
2. $\phi(+\infty) = 0,5$.
3. $P(a < X < b) = \phi(b) - \phi(a)$
4. Giá trị của hàm Laplace được tính sẵn thành bảng số liệu.

4. Phân bố chuẩn

Các tính chất của phân bố chuẩn tổng quát

Nếu $X \sim N(\mu; \delta^2)$ ta có $Z = \dfrac{X - \mu}{\delta} \sim N(0; 1)$. Từ đó ta có các công thức sau

1. $P(X < a) = 0,5 + \phi\left(\dfrac{a - \mu}{\delta}\right)$.
2. $P(X > a) = 0,5 - \phi\left(\dfrac{a - \mu}{\delta}\right)$.
3. $P(a \leq X < b) = \phi\left(\dfrac{b - \mu}{\delta}\right) - \phi\left(\dfrac{a - \mu}{\delta}\right)$
4. $P(|X - \mu| < \epsilon) = 2\phi\left(\dfrac{\epsilon}{\delta}\right)$.

4. Phân bố chuẩn

Ví dụ 5

Giả sử độ dài một chi tiết máy tuân theo phân bố chuẩn với giá trị trung bình là 20cm và độ lệch chuẩn là 0,5cm. Tính xác suất khi chọn ngẫu nhiên ra một chi tiết thì độ dài của nó:

1. Lớn hơn 20cm
2. Bé hơn 19,5cm
3. nằm trong khoảng 19cm đến 21cm.

4. Phân bố chuẩn

Lời giải

Gọi X(cm) là độ dài chi tiết máy đã chọn. $X \sim N(\mu, \delta^2), \mu = 20, \delta = 0,5$.

1. $P(X > 20) = 0,5 - \phi\left(\dfrac{20-\mu}{\delta}\right) = 0,5 - \phi(0) = 0,5$.
2. $P(X < 19,5) = 0,5 + \phi\left(\dfrac{19,5-\mu}{\delta}\right) = 0,5 + \phi(-1) = 0,5 - \phi(1) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587$.
3. $P(19 < X < 21) = \phi\left(\dfrac{21-\mu}{\delta}\right) - \phi\left(\dfrac{19-\mu}{\delta}\right) = \phi(2) - \phi(-2) = 2\phi(2) = 2.0,4772 = 0,9544$.

4. Phân bố chuẩn

Giá trị tới hạn chuẩn mức α

1. Giá trị tới hạn chuẩn mức α, ký hiệu là u_α, được định nghĩa bởi $P(X > u_\alpha) = \alpha$, trong đó $X \sim N(0,1)$.
2. Ta có
$$P(X > u_\alpha) = 1 - P(X \leq u_\alpha) = 1 - \phi\left(\frac{u_\alpha - 0}{1}\right) = 1 - \phi(u_\alpha).$$
Do đó $\phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$.

4. Phân bố chuẩn

Giá trị tới hạn chuẩn mức α

1. Giá trị tới hạn chuẩn mức α, ký hiệu là u_α, được định nghĩa bởi $P(X > u_\alpha) = \alpha$, trong đó $X \sim N(0, 1)$.
2. Ta có
$$P(X > u_\alpha) = 1 - P(X \leq u_\alpha) = 1 - \phi\left(\frac{u_\alpha - 0}{1}\right) = 1 - \phi(u_\alpha).$$
Do đó $\phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Ví dụ

1. Tìm giới hạn chuẩn mức $\alpha = 0,025$.

4. Phân bố chuẩn

Giá trị tới hạn chuẩn mức α

1. Giá trị tới hạn chuẩn mức α, ký hiệu là u_α, được định nghĩa bởi $P(X > u_\alpha) = \alpha$, trong đó $X \sim N(0,1)$.
2. Ta có
$$P(X > u_\alpha) = 1 - P(X \leq u_\alpha) = 1 - \phi\left(\frac{u_\alpha - 0}{1}\right) = 1 - \phi(u_\alpha).$$
Do đó $\phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Ví dụ

1. Tìm giới hạn chuẩn mức $\alpha = 0,025$.
2. Ta có 1 - 0,025 = 0,975. Tra bảng phụ lục II ta thấy $\phi(1,96) = 0,975$. Do đó $u_\alpha = 1,96$.

5. Phân bố mũ

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo **phân bố mũ** với tham số $\lambda > 0$, ký hiệu $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, nếu X có hàm mật độ:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{nếu} \quad x > 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Các tham số đặc trưng

Với $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ ta có $EX = \dfrac{1}{\lambda}$ và $DX = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

5. Phân bố mũ

Nhận xét

Với một giả thiết nào đó, khoảng thời gian giữa hai lần xuất hiện một biến cố A nào đó sẽ có phân bố mũ. Ví dụ khoảng thời gian giữa hai ca cấp cứu ở một bệnh viện, khoảng thời gian giữa hai lần hỏng hóc một thiết bị, khoảng thừoi gian giữa hai trận thiên tai, . . .

5. Phân bố mũ

Ví dụ 6

Giả sử thuổi thọ (đv: năm) của một mạch điện tử máy tính là một biến ngẫu nhiên có phân bố mũ với kỳ vọng là 6.25. Thời gian bảo hành của mạch điện tử này là 5 năm. Hỏi có bao nhiêu phần trăm mạch điện tử bán ra phải thay thế trong thời gian bảo hành.

5. Phân bố mũ

Ví dụ 6

Giả sử thuổi thọ (đv: năm) của một mạch điện tử máy tính là một biến ngẫu nhiên có phân bố mũ với kỳ vọng là 6.25. Thời gian bảo hành của mạch điện tử này là 5 năm. Hỏi có bao nhiêu phần trăm mạch điện tử bán ra phải thay thế trong thời gian bảo hành.

Lời giải

Gọi X là tuổi thọ của mạch điện. X tuân theo phân bố mũ với tham số $\lambda = \frac{1}{EX} = \frac{1}{6,25}$.

Xác xuất cần tính là

$$P(X \leq 5) = 1 - e^{-5\lambda} = 1 - e^{-0,8} = 0,5506.$$

Vậy có khoảng $55,06\%$ mạch điện tử bán ra phải thay thế trong thời gian bảo hành.

6. Phân bố bình phương

Định nghĩa

Giả sử $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố chuẩn tắc. Biến ngẫu nhiên $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ được gọi là tuân theo **phân bố khi bình phương** với n bậc tự do, ký hiệu $Y \sim \chi^2(n)$.

Các tham số đặc trưng

Với $Y \sim \chi^2(n)$ta có $EY = n$ và $DX = 2n$.

7. Phân bố Student

Định nghĩa

Giả sử $X \sim N(0;1)$ và $Y \sim \chi^2(n)$ là hai biến ngẫu nhiên độc lập. Khi đó

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \tag{9}$$

được gọi là tuân theo **phân bố Student** với n bậc tự do, ký hiệu $T \sim T(n)$.

Các tham số đặc trưng

Với $T \sim T(n)$ ta có $ET = 0$ và $DT = \dfrac{n}{n-2}$.