

## CHƯƠNG 2: TÍCH PHẦN BỘI

### §1. TÍCH PHẦN PHỤ THUỘC THAM SỐ

#### 1. Tích phân xác định phụ thuộc tham số

##### Định nghĩa:

Cho hàm số  $f(x, y)$  xác định trên  $[a, b] \times [c, d]$ .

$f(x, y)$  khả tích theo  $x$  trên  $[a, b]$  với mọi  $y \in [c, d]$ .

Tích phân  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  gọi là tích phân phụ thuộc tham số  $y$ .

## §1. TÍCH PHẦN PHỤ THUỘC THAM SỐ

**Định lí:** Nếu hàm số  $f(x, y)$  liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$  thì  $I(y)$  là hàm số của  $y$  liên tục trên  $[c, d]$ .

**Định lí:** Nếu hàm số  $f(x, y)$  liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$

thì 
$$\int_c^d I(y) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

nghĩa là: 
$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

**Định lí:** Nếu

\*  $f(x, y)$  liên tục theo biến  $x$  trên  $[a, b]$  với mọi  $y \in [c, d]$

\*  $f'_y(x, y)$  liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$

thì 
$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

hay 
$$\left( \int_a^b f(x, y) dx \right)' = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

# §1. TÍCH PHẦN PHỤ THUỘC THAM SỐ

**Ví dụ:**

Tính  $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (0 < a < b)$

**Giải:**

Có  $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$

Hàm số  $f(x, y) = x^y$  liên tục trên  $[0, 1] \times [a, b]$

$$I = \int_0^1 \left( \int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_0^1 x^y dx \right) dy$$

$$= \ln \left\| y + 1 \right\|_a^b = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

**Ví dụ:**

Tính  $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y^2)^2} \quad (y \neq 0)$

**Giải:**

Xét hàm số  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

$f(x, y)$  liên tục theo  $x$  trên  $[0, 1]$  với mọi  $y \neq 0$ .

$f'_y = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2}$  liên tục trên  $[0, 1] \times [c, d]$   
 $\forall [c, d] \text{ mà } 0 \notin [c, d].$

## §1. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

$$\text{Có } I(y) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{y} \arctan \frac{x}{y} \Big|_0^1 = \frac{1}{y} \arctan \frac{1}{y}.$$

$$I'(y) = -\frac{1}{y^2} \arctan \frac{1}{y} - \frac{1}{y(1+y^2)}$$

Mặt khác:

$$I'(y) = \int_0^1 f'_y dx = \int_0^1 \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} dx = -2y \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{2y^3} \arctan \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2(1+y^2)}.$$

**Định lí:**

Xét tích phân phụ thuộc tham số  $I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$

trong đó  $f(x, y)$  xác định trên  $[a, b] \times [c, d]$

$$a \leq a(y) \leq b$$

$$a \leq b(y) \leq b \quad \forall y \in [c, d]$$

Khi đó: Nếu  $f(x, y)$  liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$  và các hàm  $a(y), b(y)$  liên tục trên  $[c, d]$  thì  $I(y)$  liên tục trên  $[c, d]$ .



## 2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

**Định nghĩa:**

Tích phân suy rộng  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  được gọi là hội tụ đều đối với  $y \in [c, d]$  nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 : \forall b > B \Rightarrow \left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \forall y \in [c, d]$$

( Số  $B$  chỉ phụ thuộc  $\varepsilon$ , không phụ thuộc  $y$  )

**Nhận xét:**

Nếu  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  hội tụ đều đối với  $y \in [c, d]$  thì

$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  hội tụ với  $\forall y \in [c, d]$ .

**Định lí:**

Nếu với  $\forall (x, y) \in [a, +\infty) \times [c, d]$ ,

$$|f(x, y)| \leq g(x) \quad \text{và} \quad \int_a^{+\infty} g(x) dx \quad \text{hội tụ}$$

thì  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  hội tụ đều đối với  $y \in [c, d]$ .

**Định lí:** Nếu

\*  $f(x, y)$  liên tục trên  $[a, +\infty) \times [c, d]$

\*  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  hội tụ đều đối với  $y \in [c, d]$

thì  $I(y)$  là hàm số liên tục trên  $[c, d]$

và

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

# §1. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

**Định lí:** Nếu

\*  $f(x, y)$  liên tục theo  $x$  trên  $[a, +\infty)$  với  $\forall y \in [c, d]$

\*  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  hội tụ đều đối với  $y \in [c, d]$

\*  $f'_y(x, y)$  liên tục trên  $[a, +\infty) \times [c, d]$

\*  $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$  hội tụ đều đối với  $y \in [c, d]$

thì 
$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx.$$

## Chú ý:

Các định lí trên được phát biểu tương tự cho trường hợp hàm dưới dấu tích phân có cực điểm.

# §1. TÍCH PHẦN PHỤ THUỘC THAM SỐ

**Ví dụ:** Tính  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (0 < a < b)$

**Giải:**

Nhận xét:  $\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$

Xét hàm số  $f(x, y) = e^{-xy}$

$f(x, y)$  liên tục trên  $[0, +\infty) \times [a, b]$

# §1. TÍCH PHẦN PHỤ THUỘC THAM SỐ

$$\frac{1}{e^{xy}} \leq \frac{1}{e^{ax}} \quad \text{với} \quad \forall (x, y) \in [0, +\infty) \times [a, b]$$

$$\text{và} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{ax}} = -\frac{1}{a} e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{a} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{ax}} - 1 \right) = \frac{1}{a} \quad \text{hội tụ}$$

$$\text{nên} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{xy}} \quad \text{hội tụ đều đối với} \quad y \in [a, b].$$



Ta có:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx &= \int_0^{+\infty} \left( \int_a^b e^{-xy} dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx \right) dy \\ &= \int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln y \Big|_a^b = \ln \frac{b}{a}.\end{aligned}$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

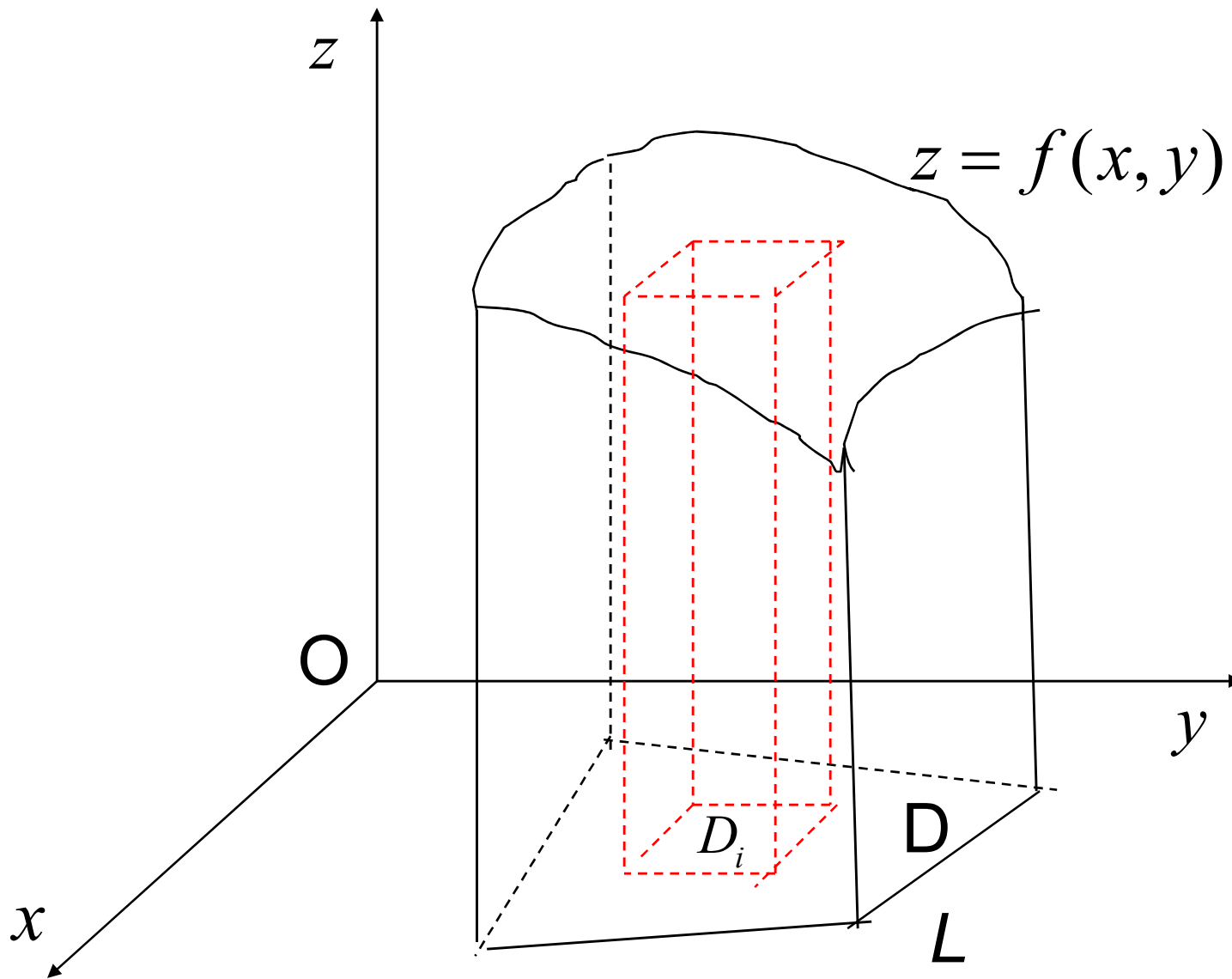
# 1. Khái niệm tích phân hai lớp

## a) Bài toán tính thể tích vật thể hình trụ

Cho  $f(x, y)$  là hàm số liên tục, không âm, xác định trên miền  $D$  đóng, bị chặn, có biên là đường kín  $L$ .

Tính thể tích vật thể hình trụ có đáy dưới là miền  $D$ ,  
mặt trên có PT  $z = f(x, y)$ , các đường sinh tựa trên  $L$   
và song song với oz.

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP



## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Chia  $D$  thành  $n$  miền  $D_1, D_2, \dots, D_n$  tùy ý.

Gọi  $s(D_i)$  là diện tích miền  $D_i$

$V_i$  là vật thể hình trụ giới hạn bởi  $D_i$  và mặt  $z = f(x, y)$

Đặt  $d_i = \max \{d(M, N) / M, N \in D_i\}$

$d_i$  được gọi là đường kính của miền  $D_i$

Trên mỗi miền  $D_i$  chọn một điểm  $M_i(x_i, y_i)$  tùy ý

## §2. TÍCH PHẦN HAI LỚP

Khi các miền  $D_i$  rất nhỏ, có thể coi mỗi hình trụ  $V_i$

có thể tích là:  $f(x_i, y_i).s(D_i)$

Như vậy, thể tích vật thể cần tìm là:

$$V = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i).s(D_i)$$

### b) Định nghĩa tích phân hai lớp

Cho  $f(x, y)$  là hàm số xác định trên miền đóng, bị chặn  $D$ .

Chia  $D$  thành  $n$  miền  $D_1, D_2, \dots, D_n$  tùy ý.

Gọi  $s(D_i)$  là diện tích miền  $D_i$

Đặt  $d_i = \max \{d(M, N) / M, N \in D_i\}$

Trên mỗi miền  $D_i$  chọn một điểm  $M_i(x_i, y_i)$  tùy ý

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Nếu giới hạn  $\lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot s(D_i)$  tồn tại hữu hạn,

không phụ thuộc phép chia  $D$ , phép chọn các điểm

$(x_i, y_i) \in D_i$  thì giới hạn này được gọi là **tích phân**

**hai lớp của hàm  $f(x, y)$  trên miền  $D$ .**

**Kí hiệu:  $\iint_D f(x, y) dS$  hay  $\iint_D f(x, y) dx dy$ .**

Khi đó ta nói  $f$  khả tích trên  $D$ .



Nếu  $f(x, y)$  liên tục trên miền đóng, bị chặn  $D$  thì  $f$  khả tích trên  $D$ .



### d) Tính chất của tích phân hai lớp

Giả sử các tích phân sau tồn tại, ta có:

$$1^0) \iint_D dx dy = s(D) \quad (\text{Diện tích miền } D)$$

$$2^0) \iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] dx dy =$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

$$3^0) \iint_D \lambda f(x, y) dx dy = \lambda \iint_D f(x, y) dx dy \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

4<sup>0</sup>) Nếu  $D$  được chia thành 2 miền  $D_1, D_2$  không đâm  
lên nhau thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

5<sup>0</sup>) Nếu  $f(x, y) \leq g(x, y)$  với  $\forall (x, y) \in D$

$$\text{thì } \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$$

6<sup>0</sup>) Nếu  $m \leq f(x, y) \leq M$  với  $\forall (x, y) \in D$

thì  $mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS$

### 2. Cách tính tích phân hai lớp

\* Tính  $\iint_D f(x, y) dx dy$  ( $f$  liên tục trên  $D$ )

**a) Nếu  $D$  là miền hình chữ nhật**

$$D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

**thì**  $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \stackrel{k/h}{=} \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$

$$= \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy \stackrel{k/h}{=} \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

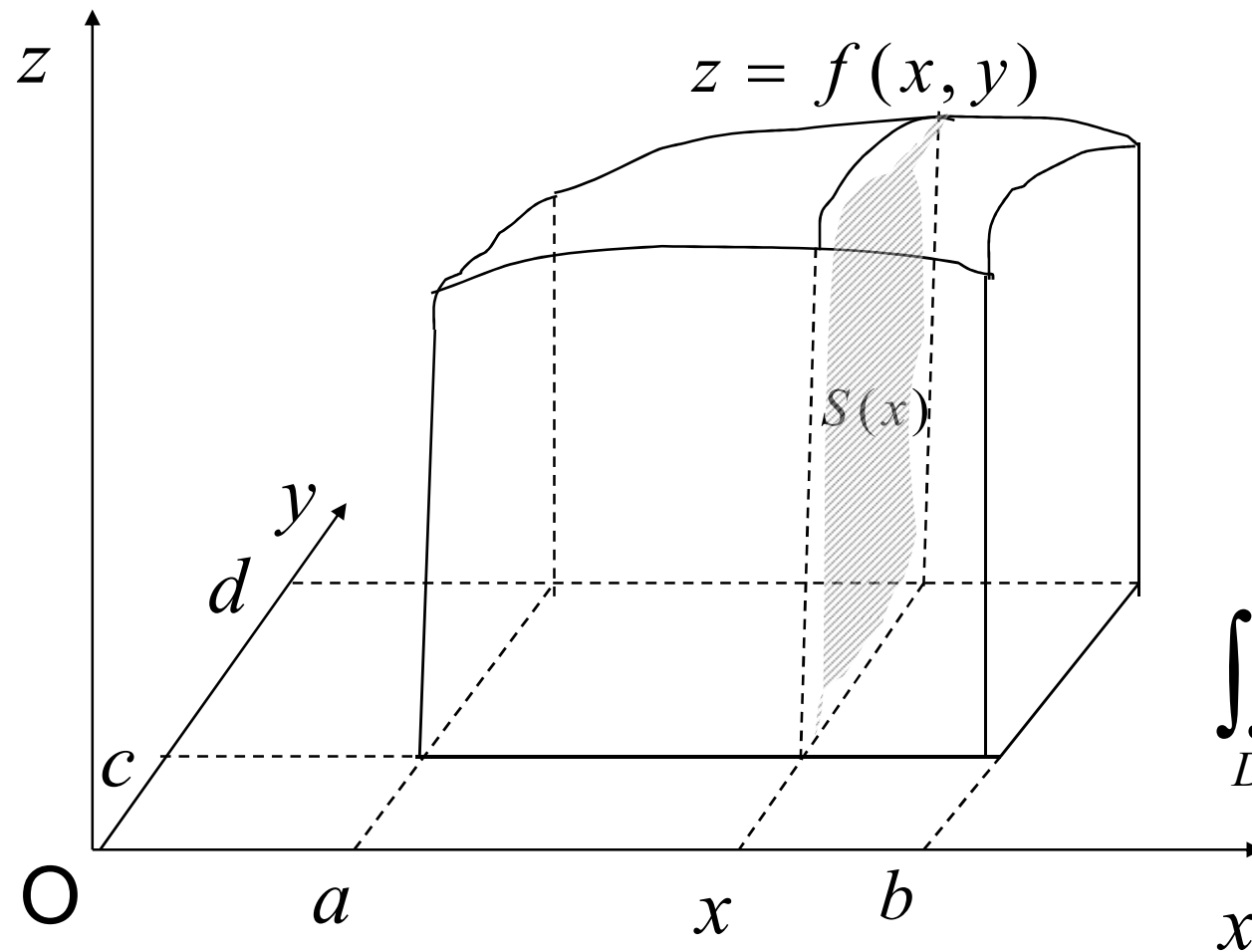
### Chứng minh:

Giả sử  $f(x, y)$  không âm trên  $D$ .

$$\iint_D f(x, y) dx dy = V$$

$V$  là thể tích hình trụ đứng có đáy là miền  $D$ ,  
mặt trên có PT  $z = f(x, y)$ .

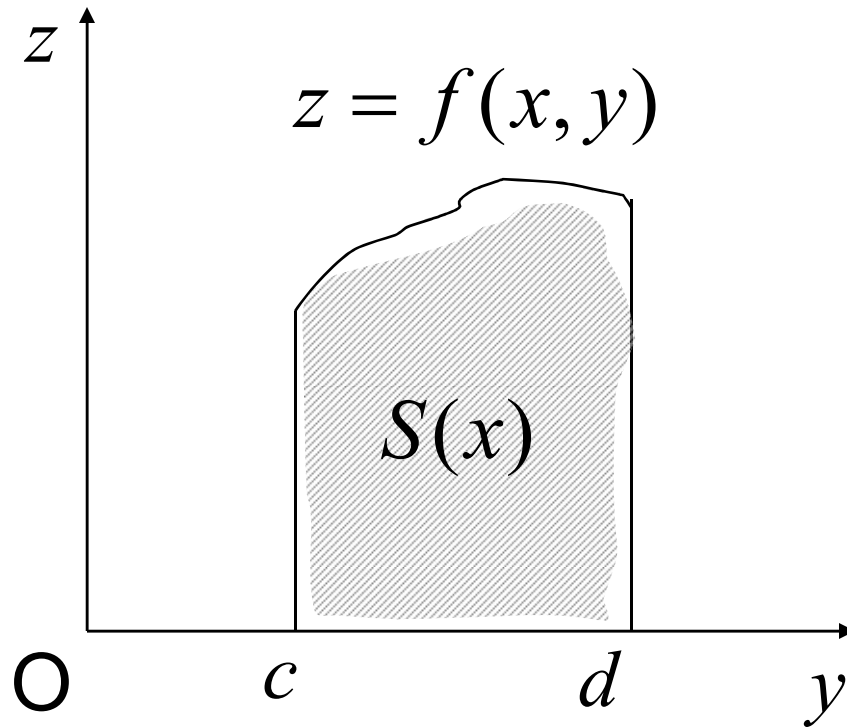
## §2. TÍCH PHẦN HAI LỚP



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b S(x) dx$$

$S(x)$  là diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại  $x$ .

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP



Với mỗi  $x$  cố định, ta có:

$$S(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Vậy

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy\end{aligned}$$

Công thức vẫn đúng khi  $f$  âm trên  $D$ .



## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

**\* Nhận xét:**

Khi  $f(x, y) = f_1(x).f_2(y)$  thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

**Ví dụ:** Tính  $I = \iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$

$$D = \{(x, y) / 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

**Giải:**

$$I = \int_1^2 dx \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dy = \int_1^2 \left( \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left( -\frac{1}{x+y} \Big|_0^1 \right) dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^2 = \ln \frac{4}{3}.$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

**Ví dụ:** Tính  $I = \iint_D xy \, dx \, dy$

$D$  xác định bởi:  $1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ .

**Giải:**

$$\begin{aligned} I &= \left( \int_1^2 x \, dx \right) \cdot \left( \int_0^1 y \, dy \right) = \left( \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 \right) \cdot \left( \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

***b) Nếu miền  $D$  xác định bởi:***

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$$

trong đó  $y_1(x), y_2(x)$  là các hàm số liên tục trên  $[a, b]$

**thì** 
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\stackrel{k/h}{=} \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

**\* Tương tự, nếu miền  $D$  xác định bởi:**

$$\begin{cases} c \leq y \leq d \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \end{cases}$$

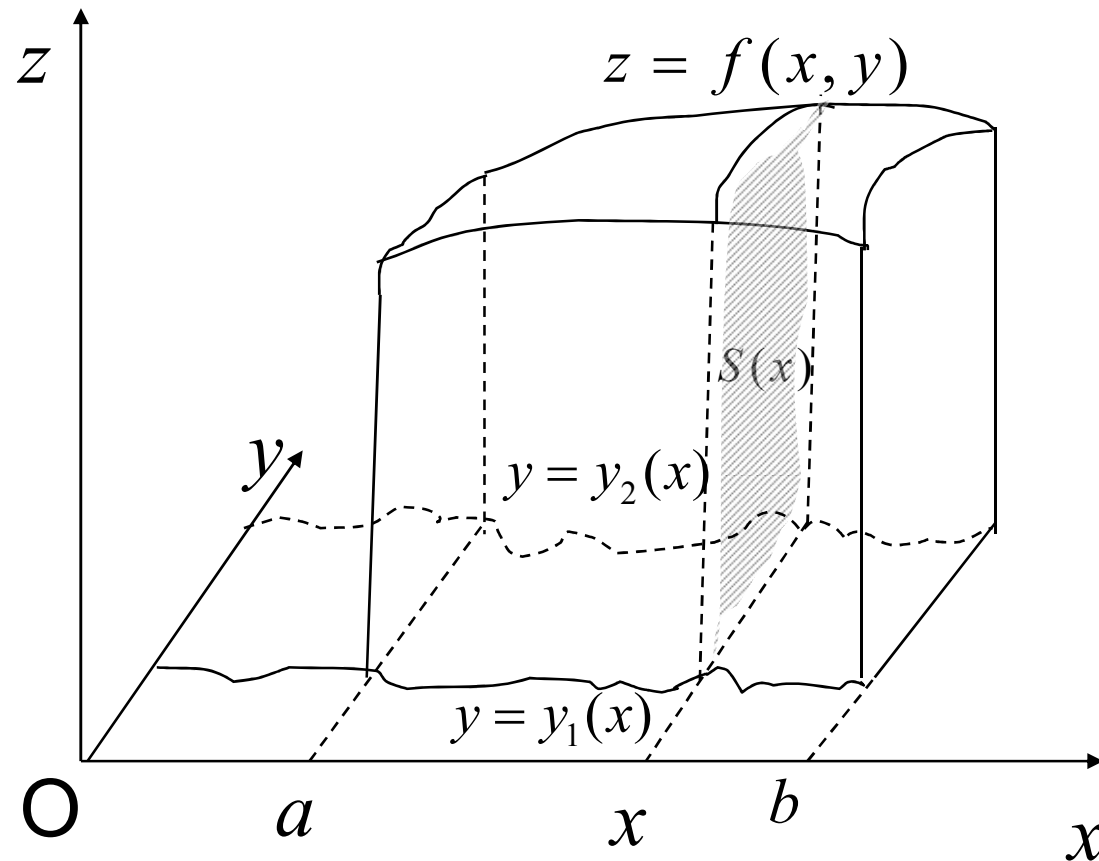
trong đó  $x_1(y), x_2(y)$  là các hàm số liên tục trên  $[c, d]$

**thì** 
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\stackrel{k/h}{=} \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

## §2. TÍCH PHẦN HAI LỚP

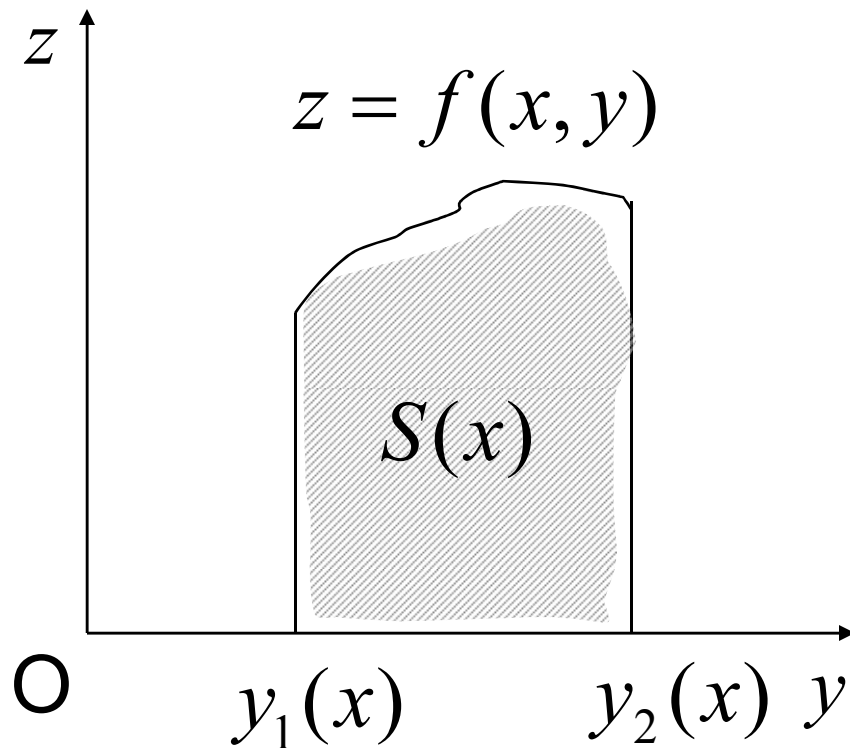
**Chứng minh:** (Tương tự khi  $D$  là miền hình chữ nhật)



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b S(x) dx$$

$S(x)$  là diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại  $x$ .

## §2. TÍCH PHẦN HAI LỚP



Với mỗi  $x$  cố định, ta có:

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

Vậy

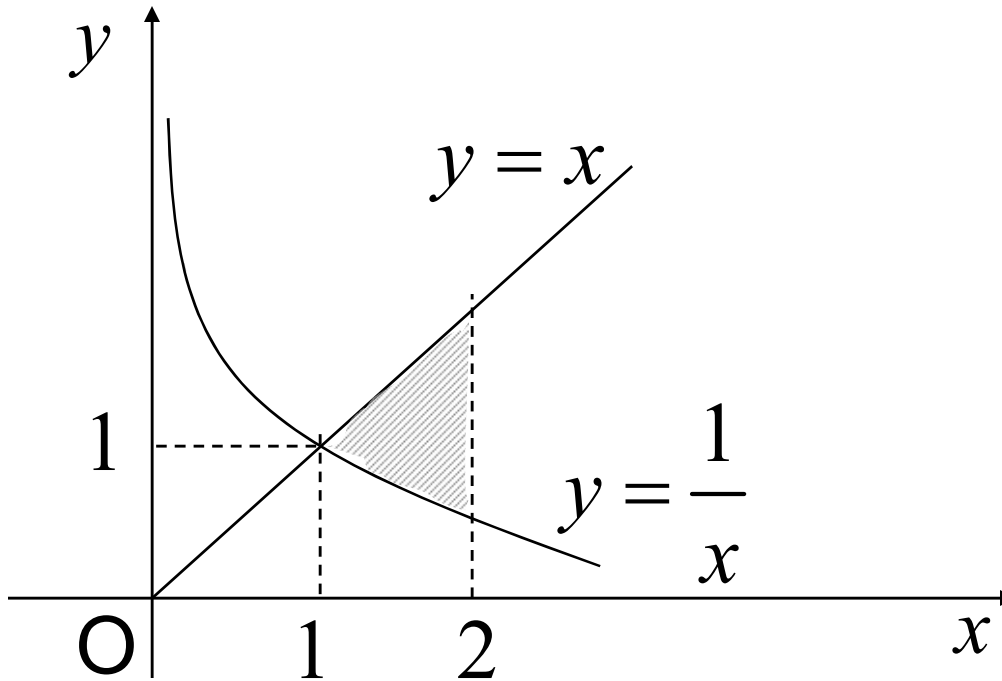
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

## §2. TÍCH PHẦN HAI LỚP

**Ví dụ:** Tính tích phân sau:  $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$

$D$  giới hạn bởi các đường  $y = x$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 2$ .

**Giải:**





## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Miền  $D$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x} \leq y \leq x \end{cases}$$

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 \left( \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left( -\frac{x^2}{y} \Big|_{\frac{1}{x}}^x \right) dx =$$

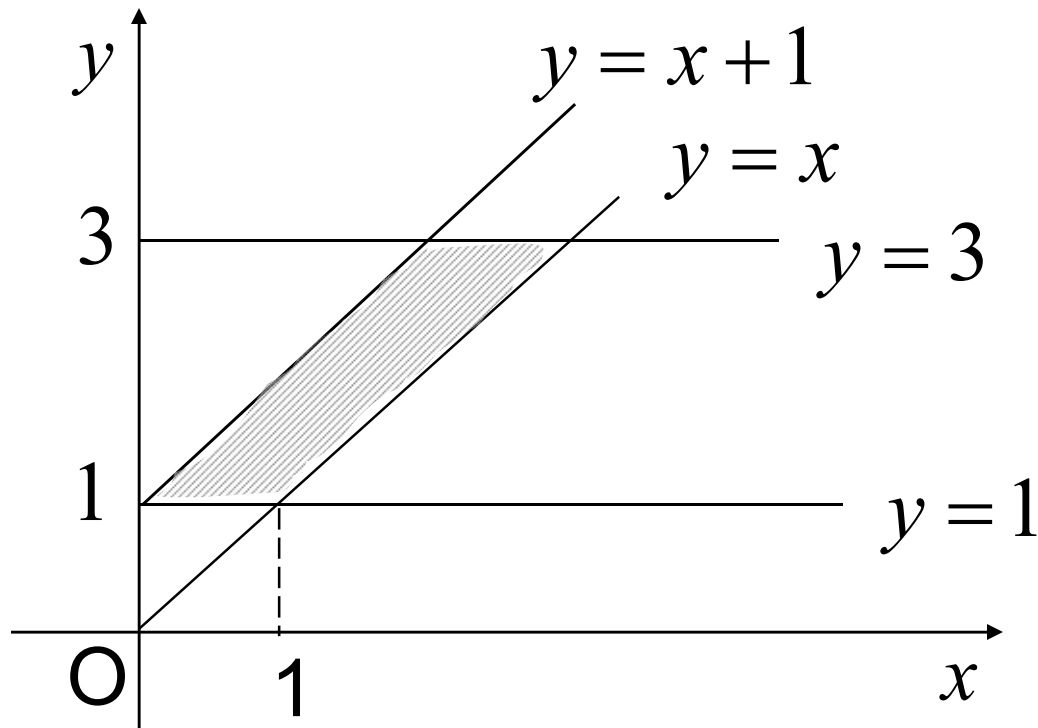
$$= \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

**Ví dụ:** Tính  $I = \iint_D xy \, dx \, dy$

$D$  là miền giới hạn bởi các đường

$$y = x, \quad y = x + 1, \quad y = 1, \quad y = 3.$$

**Giải:**



Miền  $D$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} 1 \leq y \leq 3 \\ y-1 \leq x \leq y \end{cases}$$

$$I = \int_1^3 dy \int_{y-1}^y xy \, dx = \int_1^3 \left( \int_{y-1}^y xy \, dx \right) dy = \int_1^3 \left( \frac{x^2}{2} y \Big|_{y-1}^y \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 [y^3 - y(y-1)^2] dy = \frac{1}{2} \int_1^3 [2y^2 - y] dy$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} y^3 - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^3 = \frac{20}{3}.$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

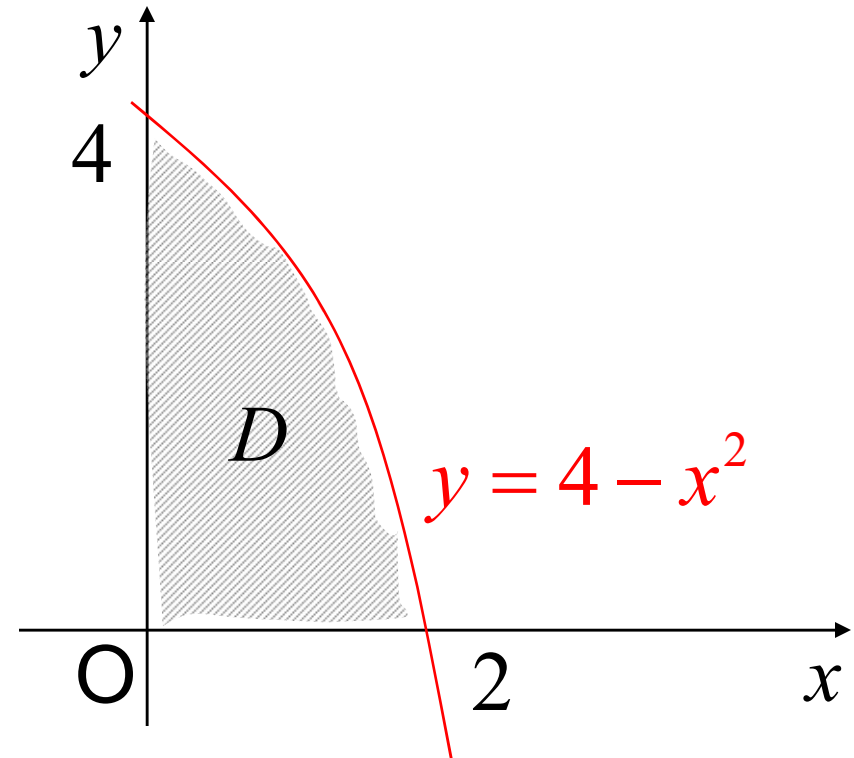
**Ví dụ:**

Tính tích phân sau:  $I = \int_0^2 dx \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy$

**Giải:**

$$I = \iint_D \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy$$

$D$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 - x^2 \end{cases}$$



## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Hay  $D$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{4-y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x e^{2y}}{4-y} dx = \int_0^4 \left( \frac{x^2}{2} \frac{e^{2y}}{4-y} \Big|_0^{\sqrt{4-y}} \right) dy$$

$$= \int_0^4 \frac{4-y}{2} \cdot \frac{e^{2y}}{4-y} dy = \frac{1}{2} \int_0^4 e^{2y} dy = \frac{1}{4} e^{2y} \Big|_0^4 = \frac{1}{4} (e^8 - 1).$$

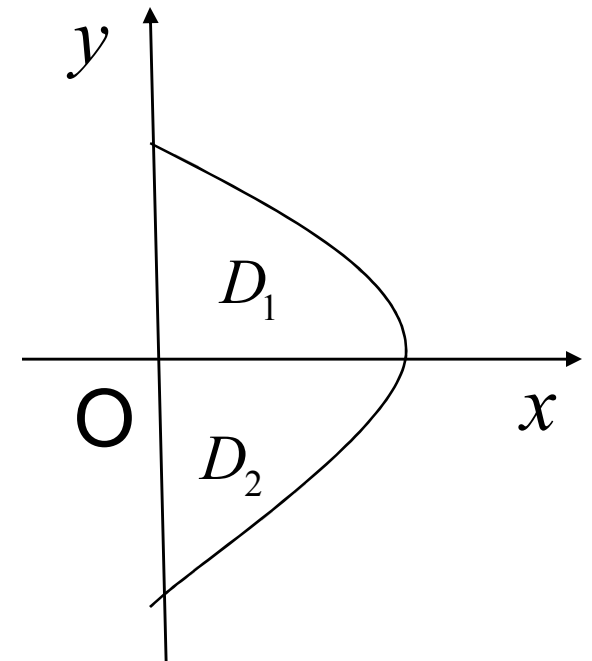
## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

**\* Nhận xét:** Giả sử miền  $D$  có tính đối xứng qua trục  $Ox$ .

**+ Nếu biểu thức dưới dấu tích phân chẵn đối với  $y$**   
(nghĩa là  $f(x, y) = f(x, -y)$  với mọi  $(x, y) \in D$ )

$$\begin{aligned} \text{thì } \iint_D f(x, y) dx dy &= 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy \\ &= 2 \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

( $D_1, D_2$  lần lượt là nửa trên, nửa dưới của  $D$ )



## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

**+ Nếu biểu thức dưới dấu tích phân lẻ đối với  $y$**

(nghĩa là  $f(x, y) = -f(x, -y)$  với mọi  $(x, y) \in D$  )

**thì**  $\iint_D f(x, y) dx dy = 0.$

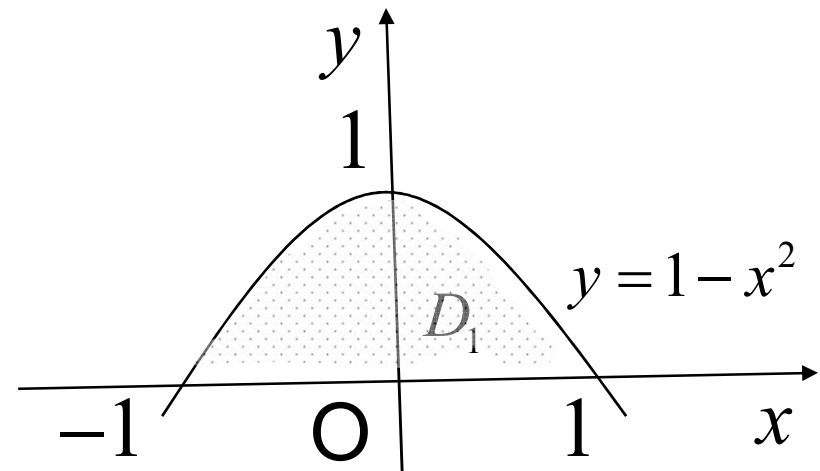
## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

\* Nhận xét trên được phát biểu tương tự trong trường hợp miền  $D$  có tính đối xứng qua trục  $Oy$ .

**Ví dụ:** Tính  $I = \iint_D \left( \frac{x}{\cos y + 2} - y \right) x^2 dx dy$

$D$  là miền giới hạn bởi các đường:  $y = 0, y = -x^2 + 1$ .

**Giải:**





## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

$$I = \iint_D \frac{x^3}{\cos y + 2} dx dy - \iint_D yx^2 dx dy$$

Do miền  $D$  có tính đối xứng qua trục  $Oy$  và biểu thức

$$\frac{x^3}{\cos y + 2} \quad \text{lẻ đối với } x \text{ nên } \iint_D \frac{x^3}{\cos y + 2} dx dy = 0.$$

Tương tự, biểu thức  $yx^2$  chẵn đối với  $x$  nên

$$\iint_D yx^2 dx dy = 2 \iint_{D_1} yx^2 dx dy.$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

$$D_1 \text{ xác định bởi: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} yx^2 dy = -2 \int_0^1 \left( \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^{1-x^2} \right) dx \\ &= - \int_0^1 x^2 (1-x^2)^2 dx = - \int_0^1 (x^6 - 2x^4 + x^2) dx \\ &= - \left( \frac{x^7}{7} - 2 \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = - \frac{1}{7} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = - \frac{8}{105}. \end{aligned}$$

### 3. Công thức đổi biến số trong tích phân hai lớp

#### a) Công thức đổi biến số

Xét  $\iint_D f(x, y) dx dy$  ( $f$  liên tục trên  $D$ )

Thực hiện phép đổi biến  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  sao cho:

- \*  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  là các hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên miền  $D' \subset mp(Ouv)$
- \* Tương ứng  $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$  là một song ánh từ  $D'$  lên  $D$ .

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

\* Định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{tại } \forall (u, v) \in D'$$

*Khi đó:*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

**Chú thích:** Công thức trên vẫn đúng khi  $J = 0$  tại một số điểm  $(u, v) \in D'$ .

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

**Ví dụ:** Tính  $I = \iint_D xy \, dx \, dy$

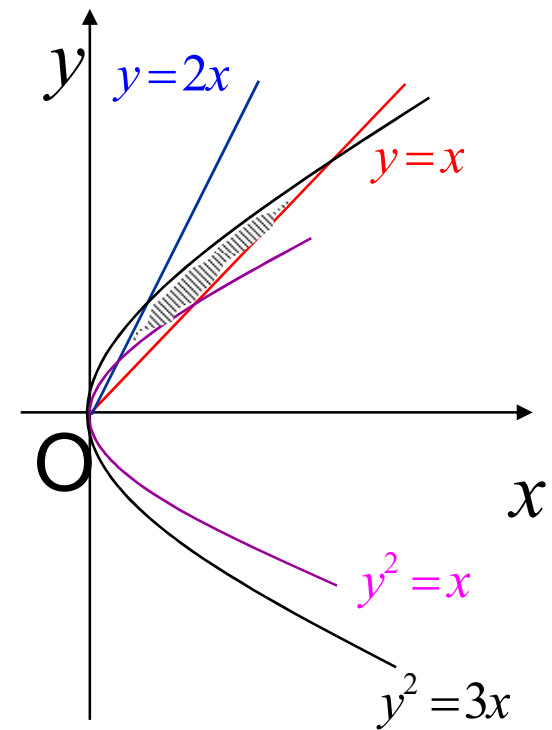
$D$  giới hạn bởi các đường  $y^2 = x$ ,  $y^2 = 3x$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$ .

**Giải:**

Đặt  $\frac{y^2}{x} = u$ ,  $\frac{y}{x} = v$

Có  $x = \frac{u}{v^2}$ ,  $y = \frac{u}{v}$

Miền  $D$  tương ứng với miền  $D'$  giới hạn bởi các đường  $u = 1, u = 3, v = 1, v = 2$



## §2. TÍCH PHẦN HAI LỚP

hay  $D'$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} 1 \leq u \leq 3 \\ 1 \leq v \leq 2 \end{cases}$$

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v^2} & \frac{-2u}{v^3} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{v^4} > 0 \quad \text{tại } \forall (u, v) \in D'.$$

$$I = \int_1^3 du \int_1^2 \frac{u}{v^2} \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{u}{v^4} dv = \left( \int_1^3 u^3 du \right) \cdot \left( \int_1^2 \frac{1}{v^7} dv \right) =$$

$$\left( \frac{u^4}{4} \Big|_1^3 \right) \cdot \left( \frac{-1}{6v^6} \Big|_1^2 \right) = \frac{105}{32}.$$

**Ví dụ:** Tính  $I = \iint_D x^3 dx dy$

D là miền giới hạn bởi các đường:

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{2}{x}, \quad y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2}.$$

**Giải:**

Đặt  $u = xy, \quad v = \frac{y}{x^2}$

$$\text{Có } \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{3y}{x^2}$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

$$\Rightarrow \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{x^2}{3y} = \frac{1}{3v},$$

Có  $x^3 = \frac{u}{v}$

Miền  $D$  tương ứng với: 
$$\begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ \frac{1}{2} \leq v \leq 1 \end{cases}$$

$$I = \int_1^2 du \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{3v} dv = \frac{1}{3} \left( \int_1^2 u du \right) \cdot \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{v^2} dv \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$



## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

**Ví dụ:** Tính  $I = \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$

$D$  là miền giới hạn bởi các đường  $x = 0, y = 0, x + y = 1$ .

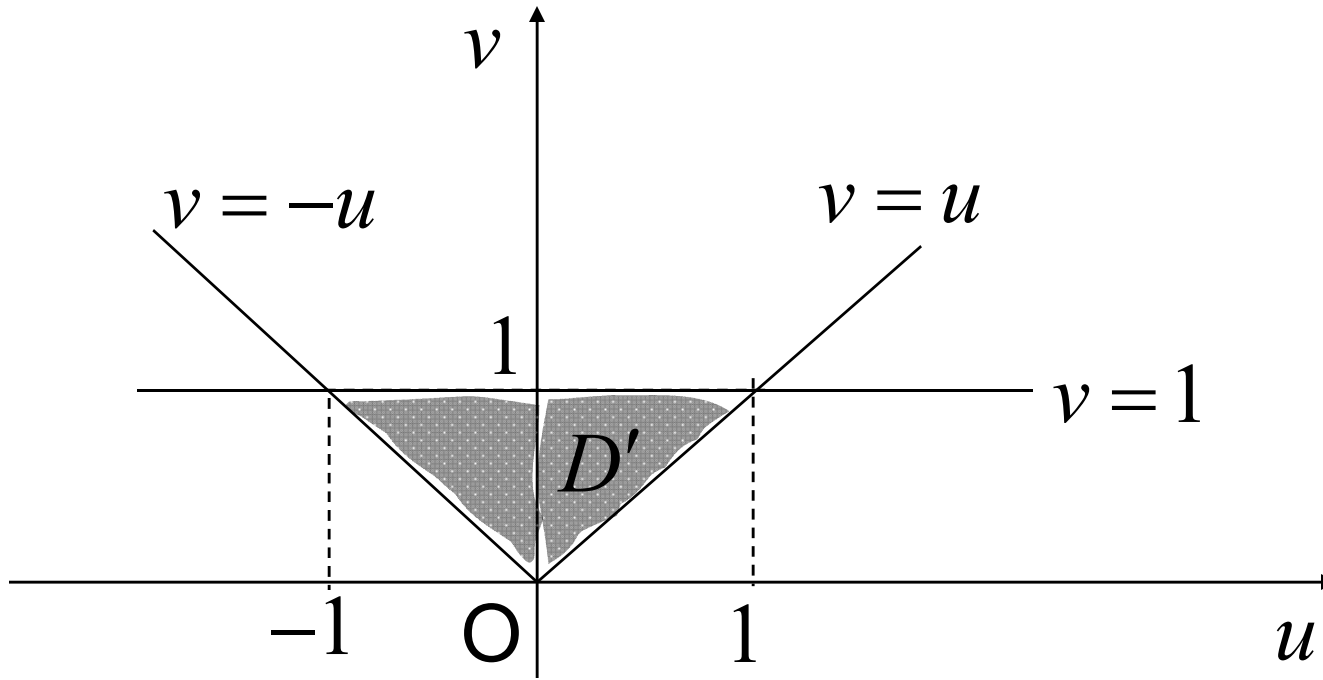
**Giải:**

Đặt  $x - y = u, x + y = v$ .

$$\Rightarrow x = \frac{u + v}{2}, y = \frac{v - u}{2}$$

Miền  $D'$  giới hạn bởi các đường  $u + v = 0, v - u = 0, v = 1$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP



$D'$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} 0 \leq v \leq 1 \\ -v \leq u \leq v \end{cases}$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

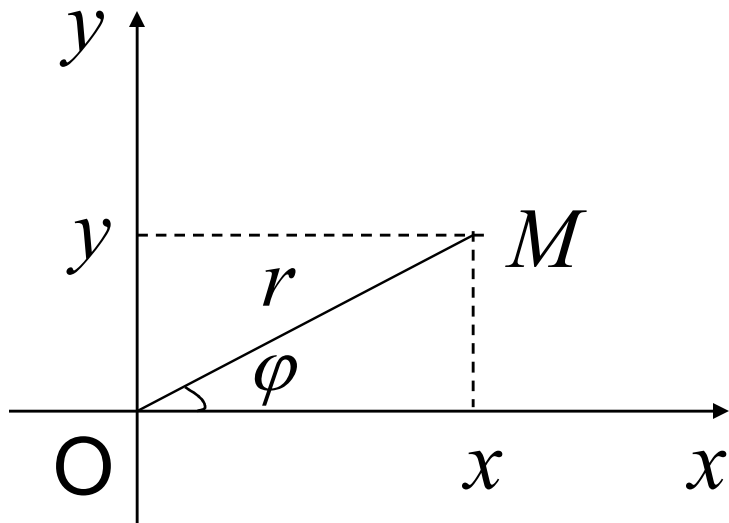
$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

$$I = \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( v e^{\frac{u}{v}} \Big|_{-v}^v \right) dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( v e - \frac{v}{e} \right) dv = \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right) \frac{v^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \left( e - \frac{1}{e} \right).$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

### b) Tính tích phân hai lớp trong hệ tọa độ cực



\* Tọa độ cực của điểm  $M$  là  $(r, \varphi)$  trong đó:

$$\varphi = (Ox, \overrightarrow{OM}), \quad r = |\overrightarrow{OM}|$$

Trong cả hệ tọa độ cực:  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad r \geq 0.$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

\* Giả sử  $M$  có tọa độ  $(x, y)$  trong hệ trục Oxy

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$J = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \geq 0.$$

\* Công thức tính tích phân trong tọa độ cực là:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

*Nhận xét:*

Thường đổi biến sang tọa độ cực khi miền lấy tích phân là hình tròn hoặc một phần hình tròn.

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

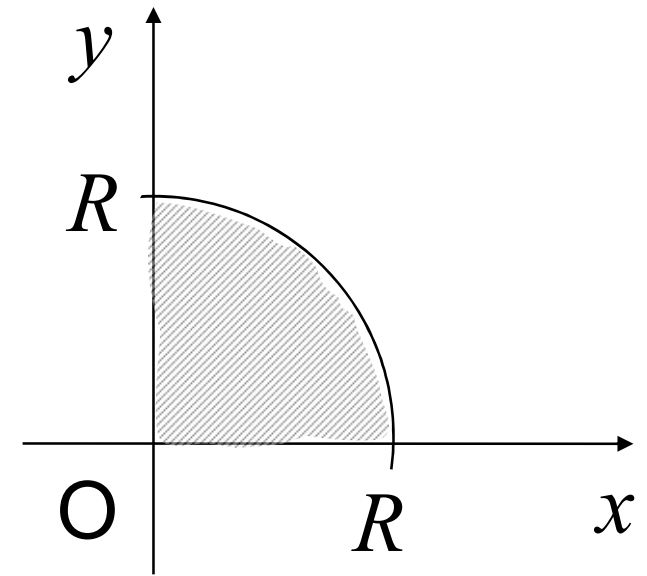
**Ví dụ:** Tính  $I = \iint_D x dx dy$

$D$  là một phần tư hình tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$ , nằm trong góc phần tư thứ nhất.

**Giải:**

Đặt 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Miền  $D$  tương ứng với: 
$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq R \end{cases}$$



## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r \cos \varphi \cdot r dr = \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \right) \cdot \left( \int_0^R r^2 dr \right) =$$
$$= \left( \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{R^3}{3}.$$



## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

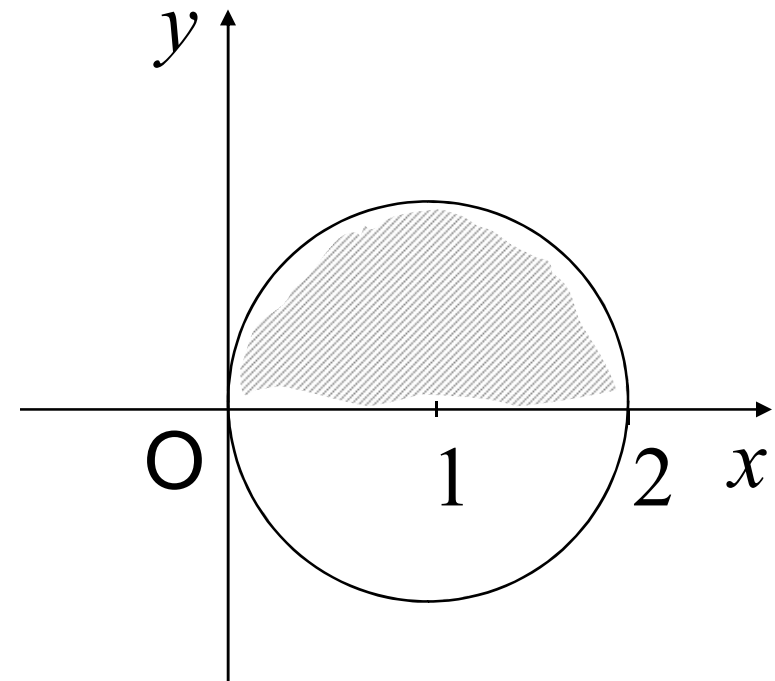
**Ví dụ:** Tính  $I = \iint_D y dx dy$

$D$  là miền xác định bởi:

$$x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0.$$

**Giải:**

$$* x^2 + y^2 \leq 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$



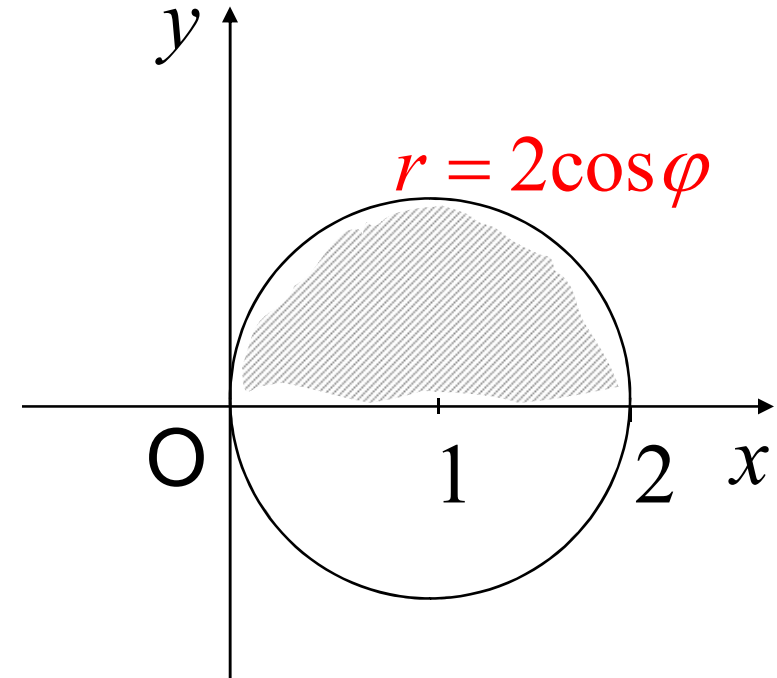
## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Đổi biến sang tọa độ cực

Đặt 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Miền  $D$  tương ứng với:

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2\cos \varphi \end{cases}$$



$$\begin{aligned} *x^2 + y^2 = 2x &\Leftrightarrow r^2 = 2r\cos \varphi \\ &\Leftrightarrow r = 2\cos \varphi \end{aligned}$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r \sin\varphi \cdot r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{r^3}{3} \sin\varphi \Big|_0^{2\cos\varphi} \right) d\varphi \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin\varphi d\varphi \\ &= \frac{8}{3} \frac{\cos^4\varphi}{4} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

**Ví dụ:** Tính  $I = \iint_D y dx dy$

$D$  là miền xác định bởi:  $x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0$ .

**Giải:**

Cách 2: \*  $x^2 + y^2 \leq 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 1 + r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 r \sin \varphi \cdot r dr = \left( \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) \cdot \left( \int_0^1 r^2 dr \right) = \\ &= \left( \cos \varphi \Big|_\pi^0 \right) \cdot \left( \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

**Ví dụ:** Tính  $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

$D$  là miền xác định bởi:

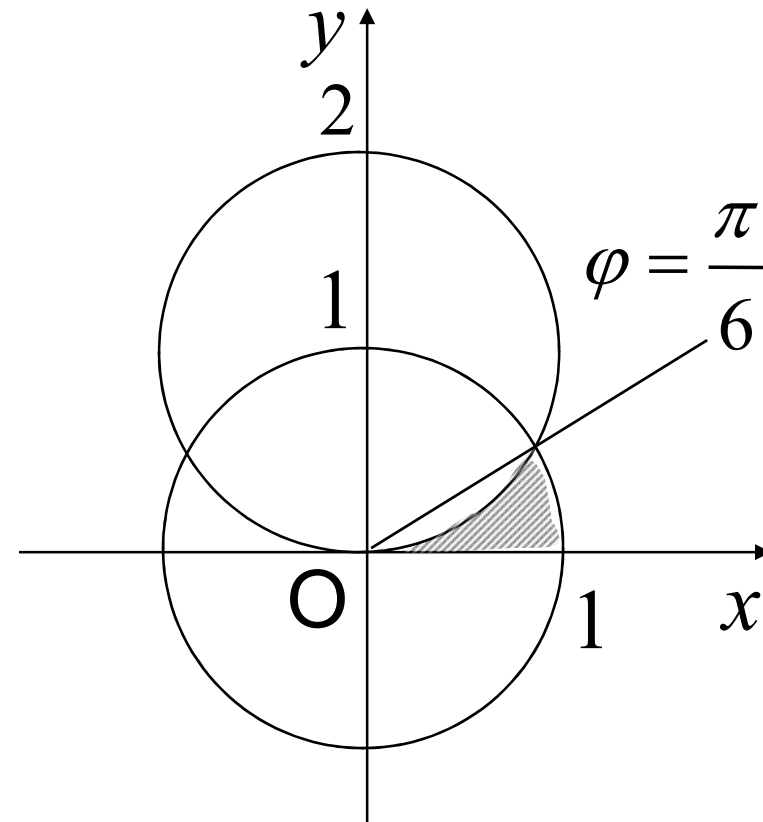
$$x^2 + y^2 - 2y \geq 0, x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x \geq 0, y \geq 0.$$

**Giải:**

$$* x^2 + y^2 - 2y \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 \geq 1$$

$$* x^2 + y^2 - 2y = x^2 + y^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$



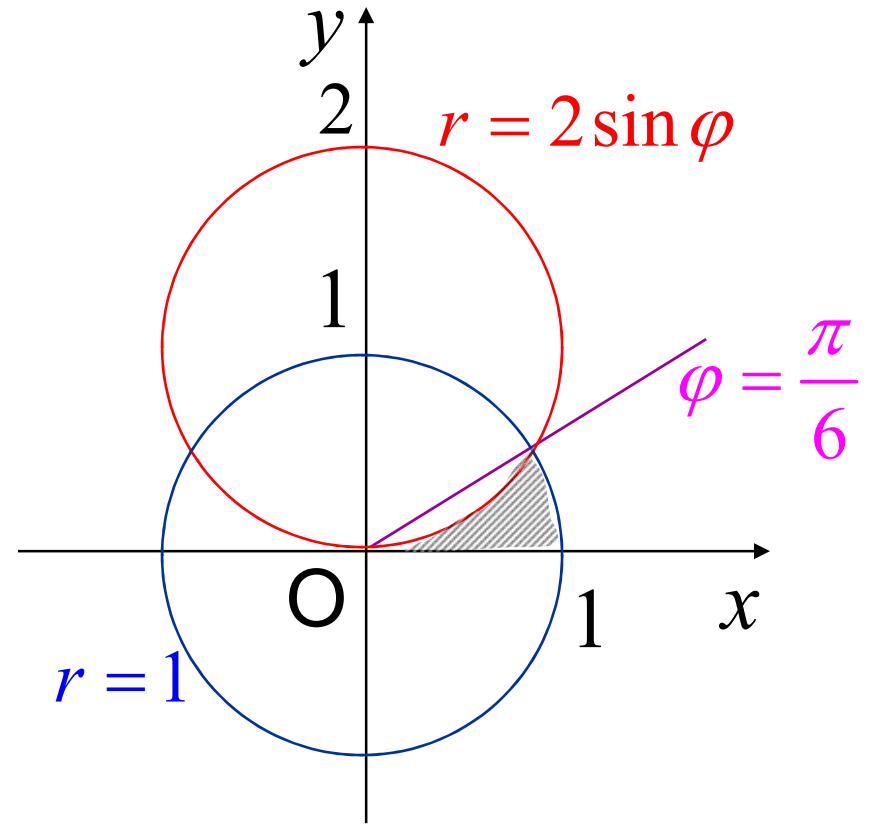
## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Đổi biến sang tọa độ cực

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Miền  $D$  tương ứng với:

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} \\ 2 \sin \varphi \leq r \leq 1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} * x^2 + y^2 - 2y = 0 &\Leftrightarrow r^2 = 2r \sin \varphi \\ &\Leftrightarrow r = 2 \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * x^2 + y^2 - 1 = 0 &\Leftrightarrow r^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow r = 1. \end{aligned}$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^1 r^2 dr = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{r^3}{3} \Big|_{2\sin\varphi}^1 \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \sin^3 \varphi \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{8}{3} \left( \cos \varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{18} + \frac{8}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{24} - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{18} + \sqrt{3} - \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

### 4. Ứng dụng của tích phân hai lớp

#### 1<sup>0</sup>) **Tính thể tích vật thể hình trụ**

Cho vật thể hình trụ có đáy là miền  $D \subset mp(Oxy)$ , mặt trên có phương trình  $z = f(x, y)$  ( $f(x, y) \geq 0$ , liên tục trên  $D$ ), đường sinh tựa trên biên của  $D$ , song song với  $Oz$ .

Thể tích vật thể là: 
$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$



## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

### 2<sup>0</sup>) **Tính diện tích hình phẳng**

Diện tích hình phẳng xác định trên miền  $D$  là:

$$S = \iint_D dx dy$$

### 3<sup>0</sup>) **Tính diện tích mặt cong**

Cho mặt cong  $S$  có phương trình  $z = f(x, y)$

$f(x, y)$  liên tục, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên  $D$ .

( $D$  là hình chiếu của  $S$  lên mặt phẳng  $xOy$ )

Diện tích mặt  $S$  là:

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy$$

### 4<sup>0</sup>) Ứng dụng trong cơ học

Cho bản phẳng xác định trên miền  $D$ .

Giả sử khối lượng riêng của bản phẳng tại  $(x, y)$  là  $\rho(x, y)$ .

Khi đó:

\* **Khối lượng bản phẳng** là:  $m = \iint_D \rho(x, y) dx dy$

\* **Trọng tâm của bản phẳng** là:  $(x_0, y_0)$

trong đó:  $x_0 = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dx dy$

$$y_0 = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dx dy$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

\* Mô men quán tính của bản phẳng đối với các trục  $O_x$ ,  $O_y$  và gốc tọa độ  $O$  lần lượt là:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy$$

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy$$

### Ví dụ 1:

Tính thể tích của phần hình trụ  $x^2 + y^2 = 2x$  nằm trong mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

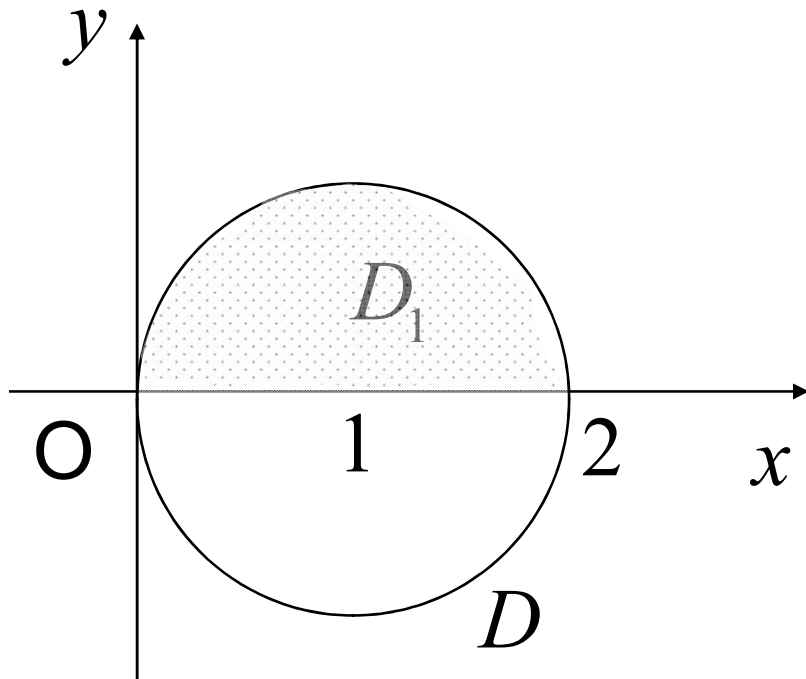
### Giải:

Phần hình trụ có tính đối xứng qua mặt phẳng  $z = 0$ .

Thể tích phần hình trụ là: 
$$V = 2 \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dx dy$$

$D$  là hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 2x$ .

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP



Do miền  $D$  có tính đối xứng  
qua trục  $Ox$  và biểu thức dưới  
dấu tích phân chẵn đối với  $y$

nên 
$$V = 4 \iint_{D_1} \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dx dy$$

$D_1$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Đổi biến sang tọa độ cực

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \sqrt{4 - r^2} \cdot r \, dr \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} (4 - r^2)^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{1}{2} \right) d(4 - r^2) \end{aligned}$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (4 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2 \cos \varphi} \right) d\varphi \\ &= -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 \sin^3 \varphi - 8) d\varphi \\ &= -\frac{32}{3} \left( \frac{2!!}{3!!} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{32}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \quad (\text{đvtt}) \end{aligned}$$



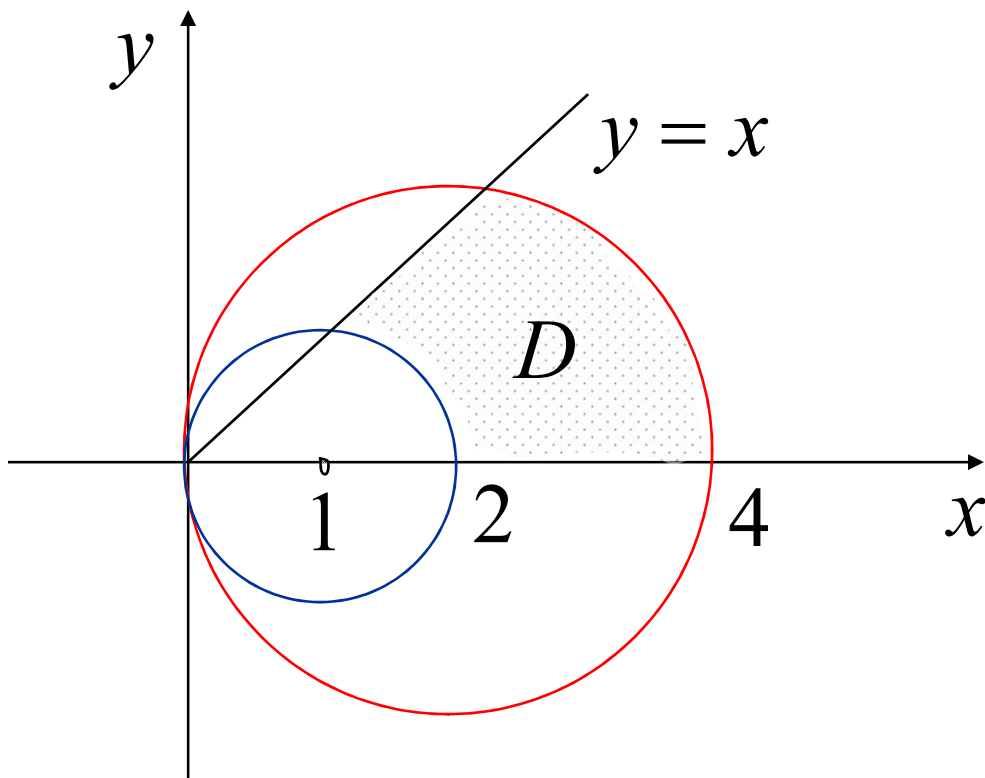
## §2. TÍCH PHẦN HAI LỚP

**Ví dụ:**

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1, \quad (x-2)^2 + y^2 = 4, \quad y = x, \quad y = 0.$$

**Giải:**



## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Diện tích  $S = \iint_D dx dy$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ 2 \cos \varphi \leq r \leq 4 \cos \varphi \end{cases}$$

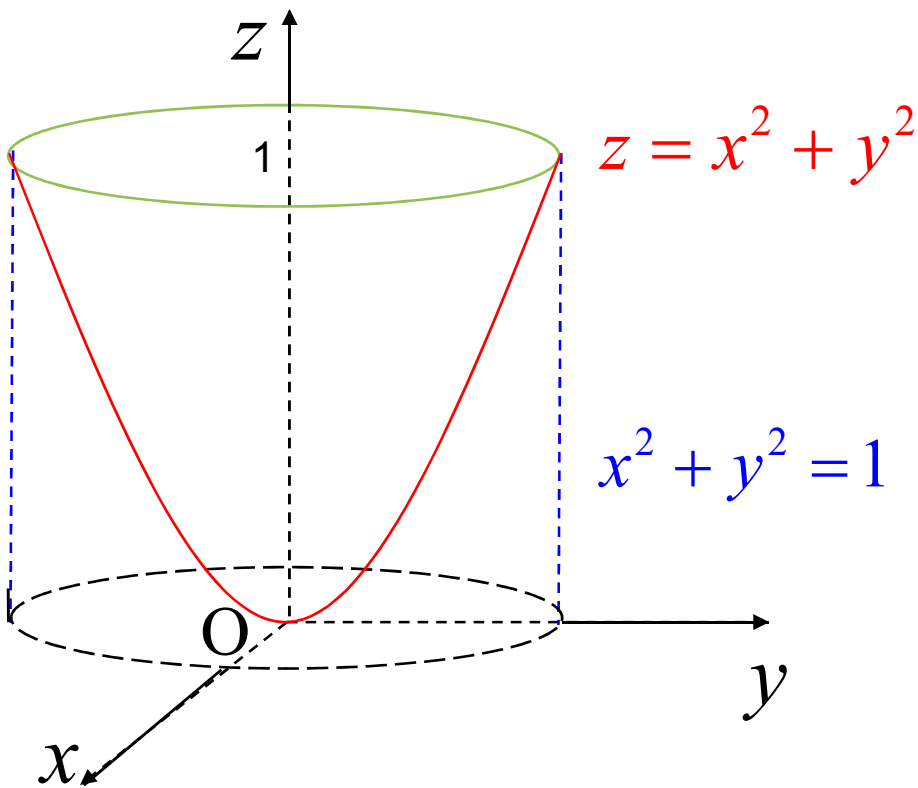
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{r^2}{2} \Big|_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} \right) d\varphi = 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \varphi d\varphi$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 3 \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{đvdt})$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

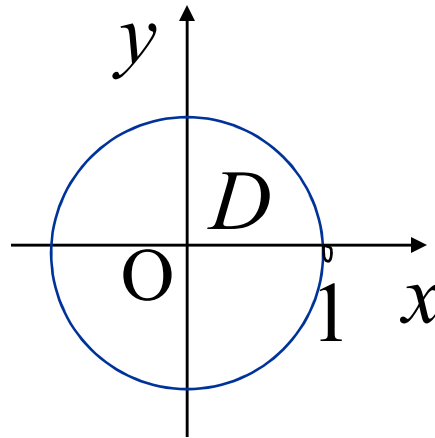
**Ví dụ:** Tính diện tích phần mặt  $z = x^2 + y^2$  nằm trong mặt trụ  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Giải:**



## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Hình chiếu của phần mặt  $z = x^2 + y^2$  lên mặt phẳng  $xOy$  là miền  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ .



Diện tích:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} \, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dxdy$$

Đặt 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2} \cdot r dr = \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \cdot \left( \int_0^1 \sqrt{1+4r^2} \cdot r dr \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_0^1 (1+4r^2)^{\frac{1}{2}} d(1+4r^2) \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1+4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1) \quad (\text{đvdt}) \end{aligned}$$

### §3. TÍCH PHẦN BA LỚP

#### 1. Khái niệm tích phân ba lớp

##### a) Định nghĩa:

Cho hàm số  $f(x, y, z)$  xác định trên miền đóng, bị chặn  $V$ .

Chia  $V$  thành  $n$  miền nhỏ  $V_1, V_2, \dots, V_n$  tùy ý.

Gọi  $\Delta V_i$  là thể tích miền  $V_i$

$d_i$  là đường kính miền  $V_i$

Trên mỗi miền  $V_i$  chọn một điểm  $(x_i, y_i, z_i)$  tùy ý ( $i = \overline{1, n}$ )

### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

Nếu giới hạn  $\lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i$  tồn tại hữu hạn,

không phụ thuộc phép chia  $V$ , phép chọn các điểm

$(x_i, y_i, z_i) \in V_i$  thì giới hạn đó được gọi là tích phân

ba lớp của hàm  $f(x, y, z)$  trên miền  $V$ .

Kí hiệu:  $\iiint_V f(x, y, z) dV$  hoặc  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ .

Khi đó ta nói  $f$  khả tích trên  $V$ .



Nếu  $f(x, y, z)$  liên tục trên miền đóng, bị chặn  $V$  thì  $f$  khả tích trên  $V$ .



### c) Tính chất

Tích phân ba lớp có các tính chất tương tự tích phân hai lớp.

*Chẳng hạn:*

$$1^0) \iiint_V dx dy dz = v \quad (v \text{ là thể tích miền } V)$$

$$2^0) \iiint_V [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] dx dy dz = \\ \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \pm \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz$$

...

### 2) Cách tính tích phân ba lớp

#### a) Công thức

Cho  $f(x, y, z)$  là hàm số liên tục trên  $V$ .

Giả sử miền  $V$  xác định bởi:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \end{cases}$$

### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

trong đó  $y_1(x), y_2(x)$  liên tục trên  $[a, b]$

$z_1(x, y), z_2(x, y)$  là các hàm số liên tục trên  $D$

( $D$  là hình chiếu của  $V$  lên mặt phẳng  $xOy$ )

Khi đó:

### §3. TÍCH PHẦN BA LỚP

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

$$\text{hay } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy$$

$$\stackrel{k/h}{=} \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

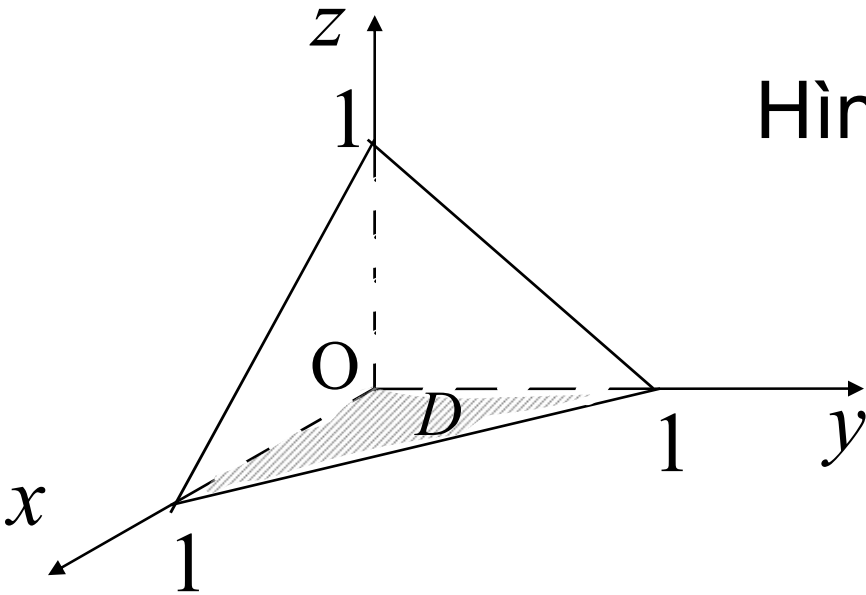
### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

#### b) Ví dụ:

Tính 
$$I = \iiint_V (1 - x - y) dx dy dz$$

$V$  giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng  $x + y + z = 1$ .

**Giải:**



Hình chiếu của  $V$  lên mặt phẳng  $Oxy$   
là miền  $D$ .

### §3. TÍCH PHẦN BA LỚP

$$V \text{ xác định bởi: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1-x-y) dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} (1-x-y) dz \right) dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy = \int_0^1 \frac{(1-x-y)^3}{3} \Big|_{1-x}^0 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-x)^4}{4} \Big|_1^0 = \frac{1}{12}.$$

### 3) Đổi biến trong tích phân ba lớp

#### *a) Công thức đổi biến số*

Xét  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$  ( $f$  liên tục trên  $V$ )

Thực hiện phép đổi biến  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,

$z = z(u, v, w)$  sao cho:

\*  $x(u, v, w)$ ,  $y(u, v, w)$ ,  $z(u, v, w)$  là các hàm số liên tục, có các ĐHR cấp một liên tục trên miền  $V'$  trong KG  $Ouvw$

## §2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

\* Tương ứng  $(u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$

là một song ánh từ  $V'$  lên  $V$ .

\* Định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{tại } \forall (u, v, w) \in V'$$

*Khi đó:*



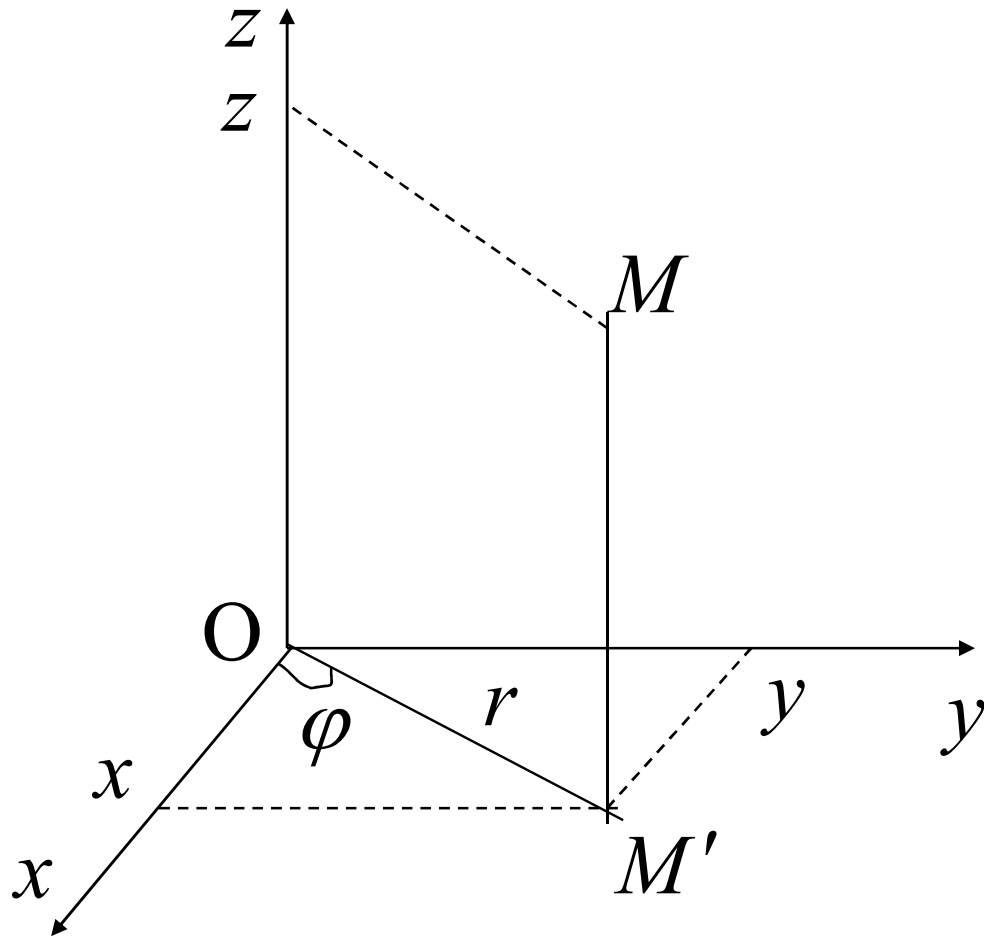
### §3. TÍCH PHẦN BA LỚP

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw.$$

**Chú thích:** Công thức trên vẫn đúng khi  $J = 0$  tại một số điểm  $(u, v, w) \in V'$ .

### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

#### b) Tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ trụ



\* Tọa độ trụ của điểm  $M$

là bộ  $(r, \varphi, z)$  trong đó:

$(r, \varphi)$  là tọa độ cực của  $M'$

( $M'$  là hình chiếu của  $M$   
lên mặt phẳng  $Oxy$ )

$z$  là cao độ của  $M$

### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

\* Trong cả hệ tọa độ trụ:

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

\* Giả sử  $M$  có tọa độ  $(x, y, z)$  trong hệ trục  $Oxyz$

$$\text{Có } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

$$\Rightarrow \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \geq 0.$$

\* Công thức tính tích phân trong tọa độ trụ là:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$



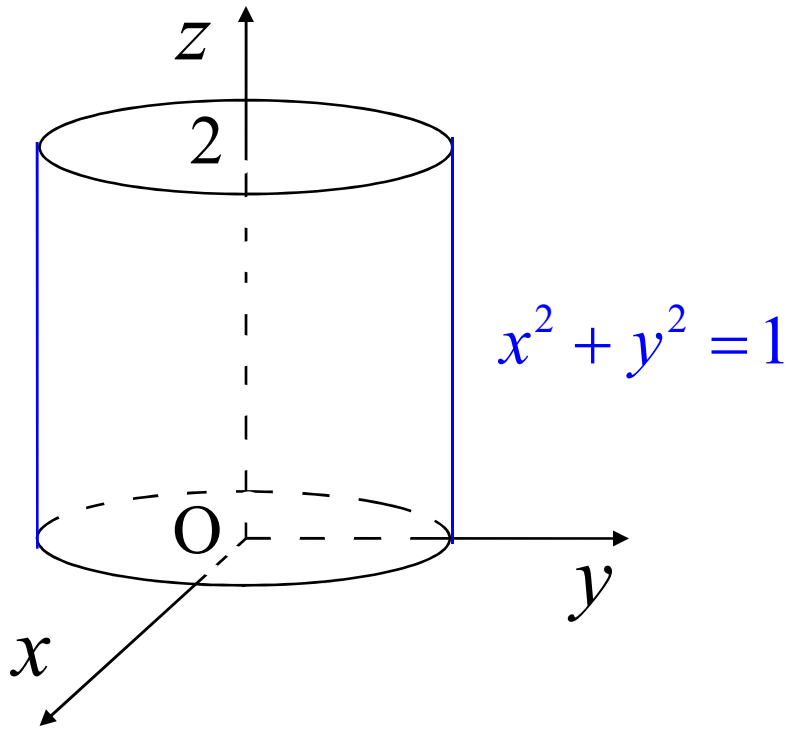
Thường đổi biến sang tọa độ trụ khi  $V$  có hình chiếu lên mặt phẳng  $O_{xy}$  là hình tròn hoặc một phần hình tròn.

### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

**Ví dụ:** Tính  $I = \iiint_V (x^2 + y^2)z \, dx dy dz$

$V$  là miền giới hạn bởi các mặt:  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2$ .

**Giải:**



\* Đặt 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

### §3. TÍCH PHẦN BA LỚP

Miền  $V$  tương ứng với: 
$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^2 r^2 z \cdot r dz = \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left( \int_0^1 r^3 dr \right) \cdot \left( \int_0^2 z dz \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^2 = \pi. \end{aligned}$$

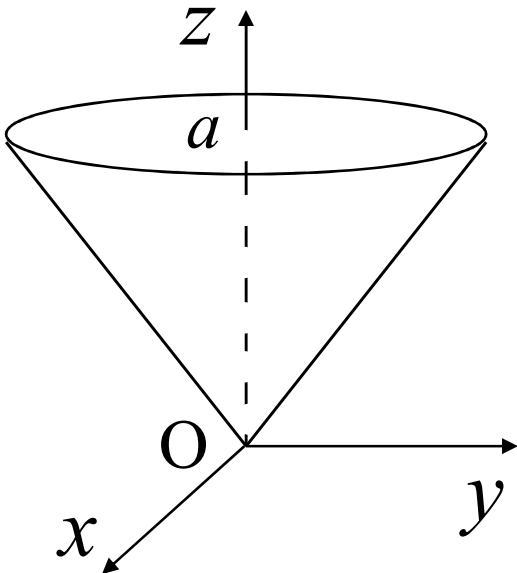
### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

**Ví dụ:** Tính  $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$

$V$  là miền hình nón tròn xoay giới hạn bởi các mặt

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad z = a \quad (a > 0)$$

**Giải:**



Đặt 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$



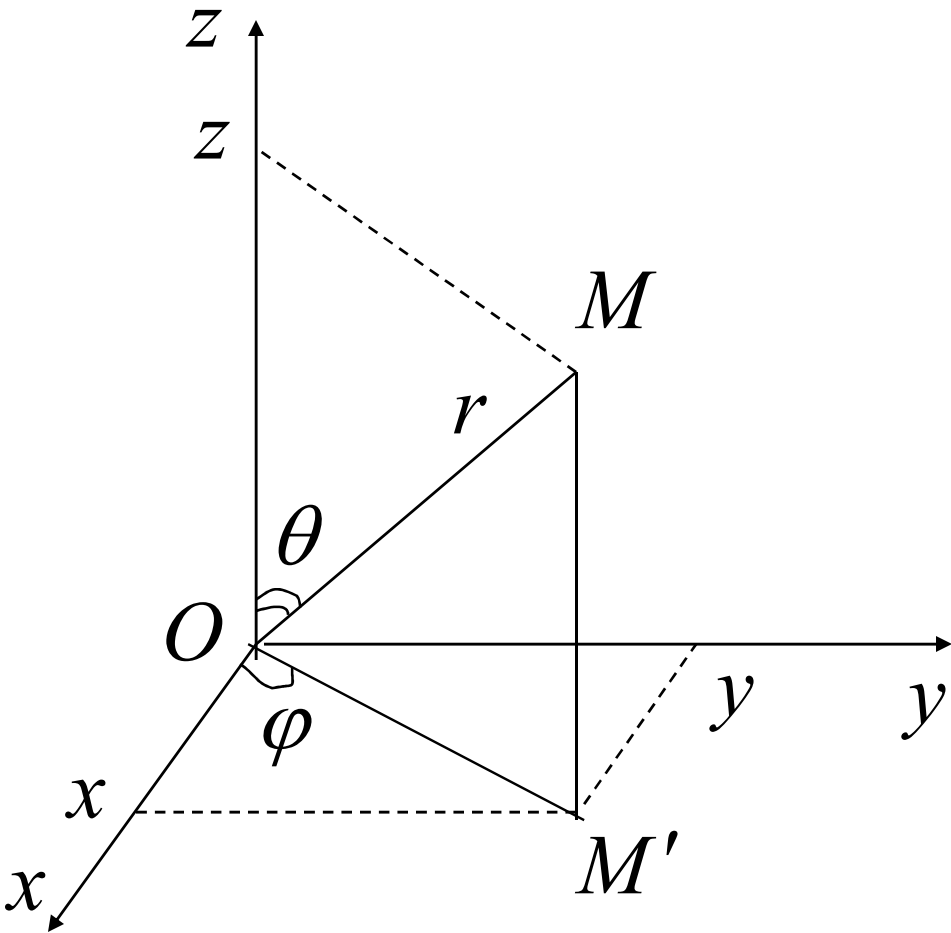
### §3. TÍCH PHẦN BA LỚP

Miền  $V$  tương ứng với: 
$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a \\ r \leq z \leq a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \int_r^a (r^2 + z^2) r dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left[ \left( r^3 z + r \frac{z^3}{3} \right) \Big|_r^a \right] dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left( r^3 a + r \frac{a^3}{3} - \frac{4}{3} r^4 \right) dr = \\ &= 2\pi \left( a \frac{r^4}{4} + \frac{a^3 r^2}{6} - \frac{4}{15} r^5 \right) \Big|_0^a = \frac{3\pi a^5}{10}. \end{aligned}$$

### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

#### c) Tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ cầu



\* Tọa độ cầu của điểm  $M$  là bộ  $(r, \theta, \varphi)$  trong đó:

$$r = |\overrightarrow{OM}|$$

$$\theta = \left( Oz, \overrightarrow{OM} \right)$$

$$\varphi = \left( Ox, \overrightarrow{OM'} \right)$$

(  $M'$  là hình chiếu của  $M$  lên mặt phẳng  $Oxy$  )

### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

\* Trong cả hệ tọa độ cầu:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad r \geq 0$$

\* Giả sử  $M$  có tọa độ  $(x, y, z)$  trong hệ trục  $Oxyz$

$$\text{Có} \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cdot \cos \varphi & r \cos \theta \cdot \cos \varphi & -r \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ \sin \theta \cdot \sin \varphi & r \cos \theta \cdot \sin \varphi & r \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= r^2 \sin \theta \geq 0.$$

*Công thức tính tích phân trong tọa độ cầu là:*

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz =$$
$$\iiint_{V'} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

## §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

*Nhận xét:*

Thường đổi biến sang tọa độ cầu khi  $V$  là hình cầu hoặc một phần hình cầu.

### §3. TÍCH PHẦN BA LỚP

**Ví dụ:** Tính  $I = \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz.$

$V$  là miền giới hạn bởi hai mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

**Giải:**

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 1 &\leq r \leq 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_1^2 \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin \theta dr \\ &= 2\pi \cdot \left( \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right) \cdot \left( \int_1^2 r dr \right) \\ &= 2\pi \cdot \left( \cos \theta \Big|_{\pi}^0 \right) \cdot \left( \frac{r^2}{2} \Big|_1^2 \right) = 6\pi. \end{aligned}$$



## 1<sup>0</sup>) Tính thể tích vật thể

$$\iiint_V dx dy dz.$$



### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

#### 2<sup>0</sup>) Tính khối lượng và trọng tâm của vật thể

Cho vật thể xác định trên miền  $V$ .

Giả sử vật thể có khối lượng riêng tại  $(x, y, z)$  là  $\rho(x, y, z)$ .

Khi đó: \* Khối lượng vật thể là:  $m = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$

\* Trọng tâm của vật thể là:  $M_0(x_0, y_0, z_0)$

trong đó:  $x_0 = \frac{1}{m} \iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz$

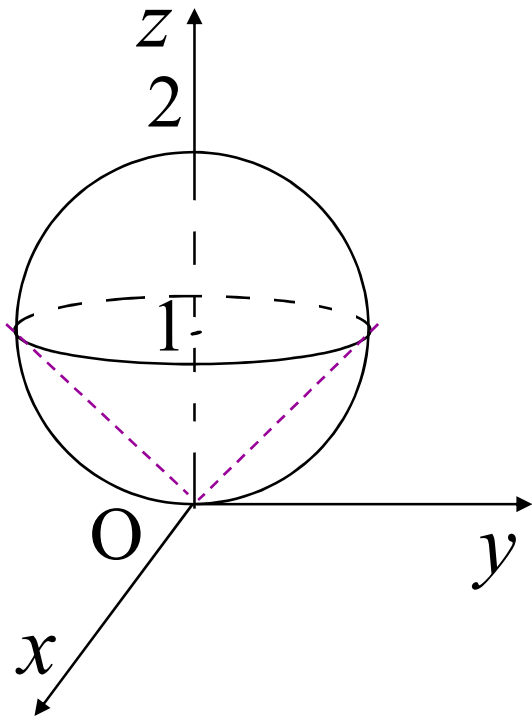
$y_0 = \frac{1}{m} \iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad z_0 = \frac{1}{m} \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz.$

### §3. TÍCH PHẦN BA LỚP

**Ví dụ:**

Tính thể tích vật thể chứa điểm  $(0,0,2)$  và giới hạn bởi các mặt  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$ .

**Giải:**



$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

Thể tích vật thể là:  $v = \iiint_V dx dy dz$

Hình chiếu của vật thể lên mặt phẳng  $Oxy$  là miền  
 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ .

Đổi biến sang tọa độ trụ:

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 &\leq r \leq 1 \\ r &\leq z \leq 1 + \sqrt{1 - r^2} \end{aligned}$$

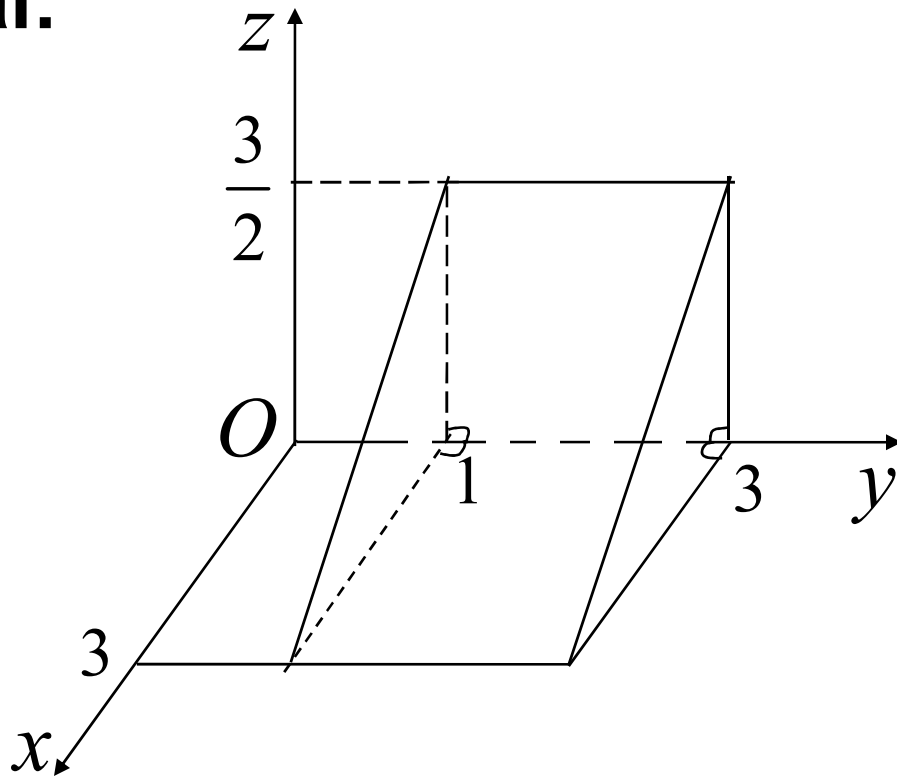
### §3. TÍCH PHẦN BA LỚP

$$\begin{aligned}v &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^{1+\sqrt{1-r^2}} r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1 + \sqrt{1-r^2} - r\right) r dr \\&= 2\pi \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{1}{3} \left(1 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3} \right] \Big|_0^1 \\&= 2\pi \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \pi \quad (\text{đvtt})\end{aligned}$$

### §3. TÍCH PHẦN BA LỚP

**Ví dụ:** Tính khối lượng và trọng tâm của hình lăng trụ  $V$  giới hạn bởi các mặt  $x = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = 3$ ,  $x + 2z = 3$ , biết khối lượng riêng  $\rho(x, y, z) = 1$ .

**Giải:**



Miền  $V$  xác định bởi:

$$0 \leq x \leq 3$$

$$1 \leq y \leq 3$$

$$0 \leq z \leq \frac{3-x}{2}$$

### §3. TÍCH PHẦN BA LỚP

\* *Khối lượng:*

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_0^3 dx \int_1^3 dy \int_0^{\frac{3-x}{2}} dz = 2 \int_0^3 \frac{3-x}{2} dx \\ &= \frac{(3-x)^2}{2} \Big|_3^0 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

\* Trọng tâm:  $M_0(x_0, y_0, z_0)$

*trong đó*

### §3. TÍCH PHẦN BA LỚP

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{1}{m} \iiint_V x dx dy dz = \frac{2}{9} \int_0^3 dx \int_1^3 dy \int_0^{\frac{3-x}{2}} x dz \\&= \frac{2}{9} \cdot 2 \int_0^3 x \cdot \frac{3-x}{2} dx = \frac{2}{9} \int_0^3 (3x - x^2) dx \\&= \frac{2}{9} \left( \frac{3}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 1.\end{aligned}$$

### §3. TÍCH PHẦN BA LỚP

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{m} \iiint_V y dx dy dz = \frac{2}{9} \int_0^3 dx \int_1^3 dy \int_0^{\frac{3-x}{2}} y dz \\ &= \frac{2}{9} \left( \int_1^3 y dy \right) \cdot \left( \int_0^3 \frac{3-x}{2} dx \right) \\ &= \frac{2}{9} \left( \frac{y^2}{2} \Big|_1^3 \right) \cdot \left( \frac{(3-x)^2}{4} \Big|_3^0 \right) = \frac{2}{9} \cdot 4 \cdot \frac{9}{4} = 2. \end{aligned}$$



### §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{m} \iiint_V z dx dy dz = \frac{2}{9} \int_0^3 dx \int_1^3 dy \int_0^{\frac{3-x}{2}} z dz \\ &= \frac{2}{9} \cdot 2 \cdot \int_0^3 \left( \int_0^{\frac{3-x}{2}} z dz \right) dx = \frac{4}{9} \int_0^3 \left( \frac{z^2}{2} \Big|_0^{\frac{3-x}{2}} \right) dx \\ &= \frac{4}{9} \int_0^3 \frac{(3-x)^2}{8} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{(3-x)^3}{24} \Big|_3^0 = \frac{4}{9} \cdot \frac{27}{24} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

## §3. TÍCH PHÂN BA LỚP

Bài tập về nhà: 2.7  $\longrightarrow$  2.17

và các bài khác