Toán rời rạc 2

Discrete mathematics 2

Bài 1: Các khái niệm cơ bản

Graph Terminology

Link(s) download slide bài giảng

0. Giới thiệu (https://bit.ly/3byPOri)

   Introduction

1. Các khái niệm cơ bản (https://bit.ly/2UgGPFN)

   Graph Terminology

... (tiếp tục cập nhật)

Nội dung Bài 1

1. Định nghĩa đồ thị.
2. Thuật ngữ cơ bản trên đồ thị vô hướng.
3. Thuật ngữ cơ bản trên đồ thị có hướng.
4. Một số dạng đồ thị đặc biệt.

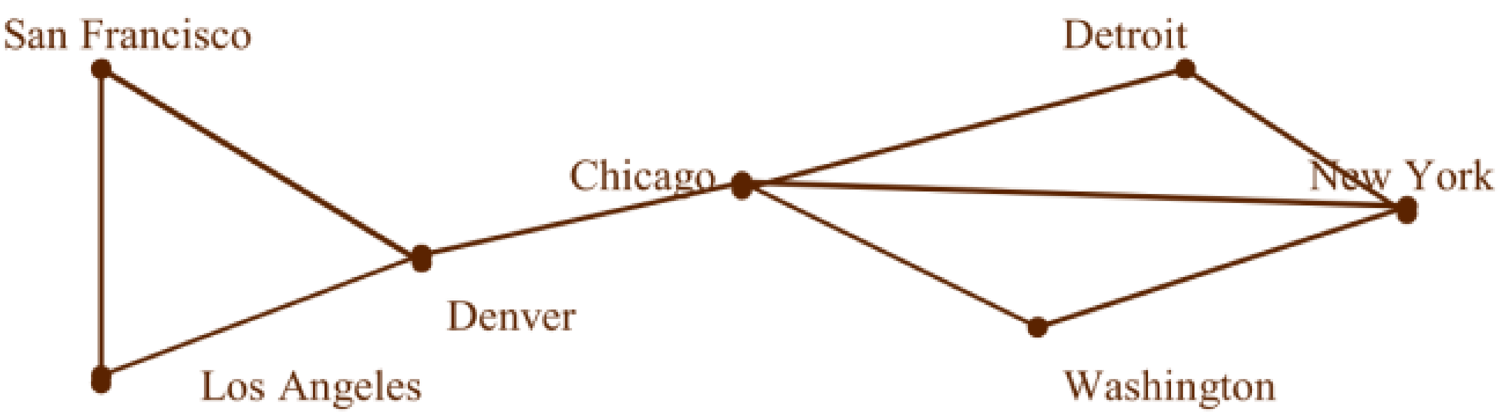
Đơn đồ thị vô hướng

- Định nghĩa 1:

Đơn đồ thị vô hướng $G = < V, E >$ trong đó:

V *(Vertex)* là tập các đỉnh - các đối tượng hay objects,

E *(Edge)* là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh.



(Phương ND, 2013)

Đa đồ thị vô hướng

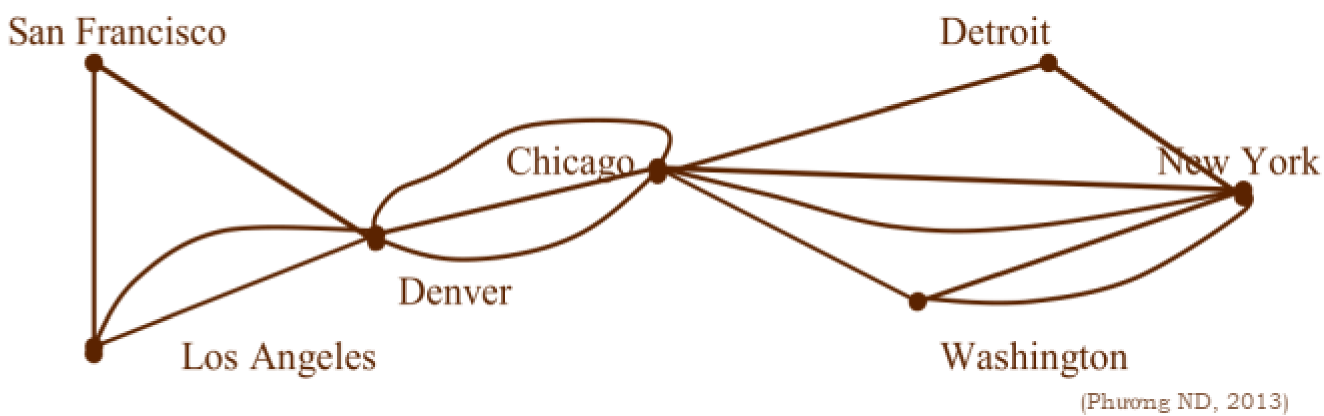
- Định nghĩa 2:

Đa đồ thị vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ trong đó:

V là tập các đỉnh,

E là họ các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là tập các cạnh.

$e_1 \in E$, $e_2 \in E$ được gọi là cạnh bội nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh.



Giả đồ thị vô hướng

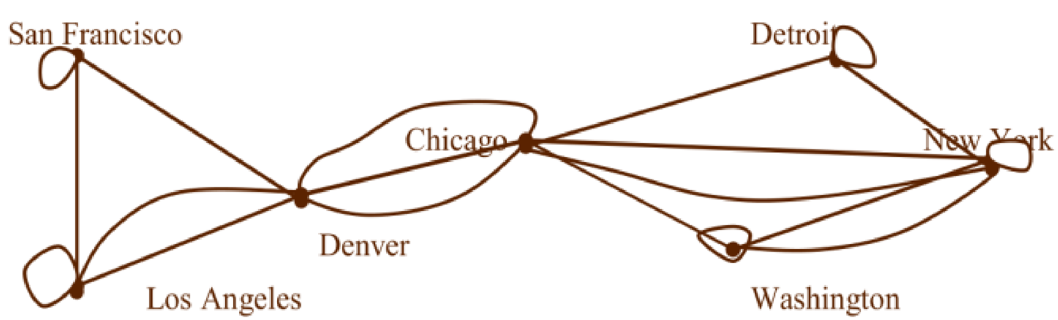
- Định nghĩa 3:

Giả đồ thị vô hướng $G = < V, E >$ trong đó:

V là tập đỉnh,

E là họ các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử, không nhất thiết phải khác nhau, trong V và được gọi là các cạnh.

Cạnh e được gọi là khuyên nếu có dạng $e = (u, u)$, trong đó u là đỉnh nào đó thuộc V.



(Phương ND, 2013)

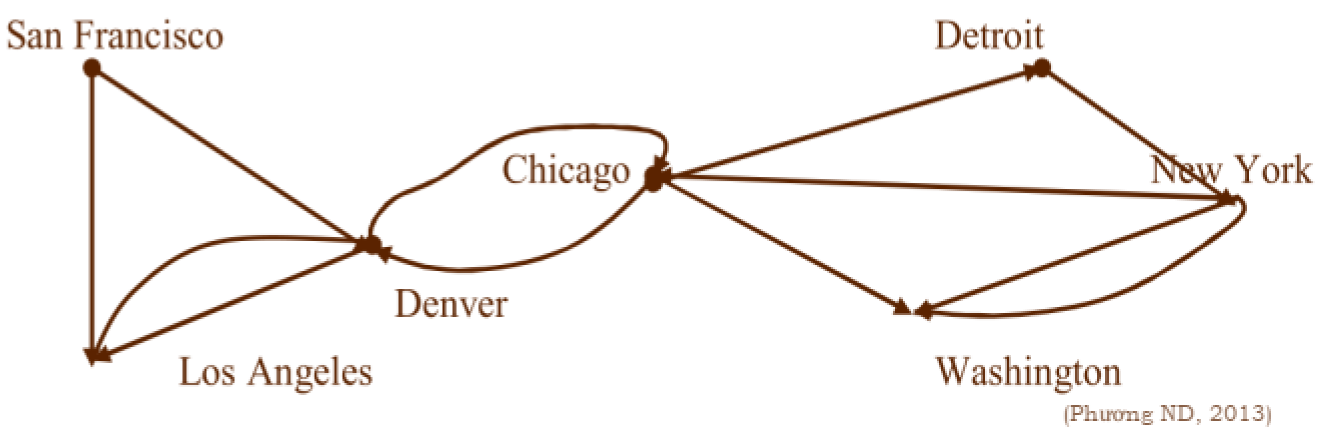
Đơn đồ thị có hướng

- Định nghĩa 4:

Đơn đồ thị có hướng $G = < V, E >$ trong đó:

V là tập các đỉnh,

E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử của V gọi là các cung.



Đa đồ thị có hướng

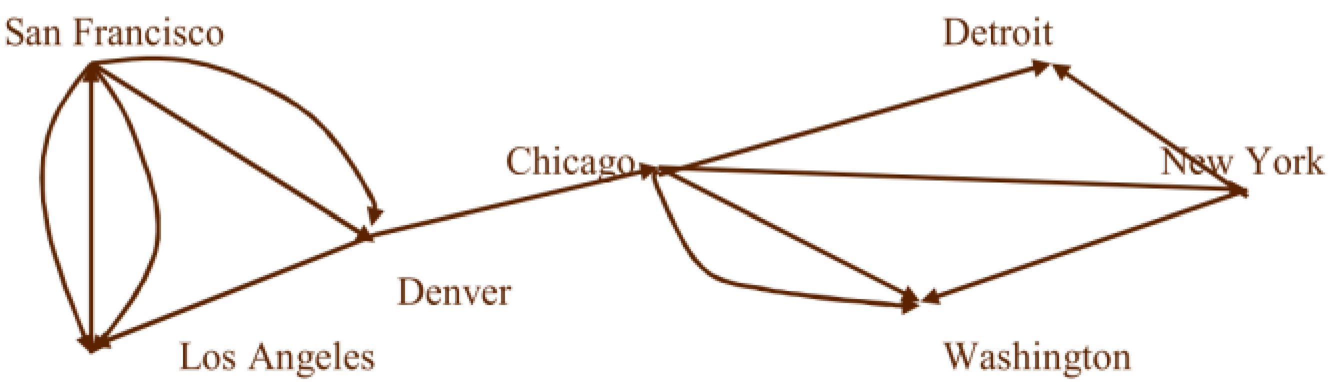
- **Định nghĩa 5:**

  Đa đồ thị có hướng $G = < V, E >$ trong đó:

  V là tập đỉnh,

  E là họ các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V được gọi là các cung.

  Hai cung e_1, e_2 tương ứng với cùng một cặp đỉnh được gọi là cung lặp.



(Phương ND, 2013)

Quy ước

- Ta chủ yếu làm việc với đơn đồ thị vô hướng và đơn đồ thị có hướng.
- Khi viết đồ thị vô hướng ta hiểu là đơn đồ thị vô hướng.
- Khi viết đồ thị có hướng ta hiểu là đơn đồ thị có hướng.

Nội dung Bài 1

1. Định nghĩa đồ thị.
2. Thuật ngữ cơ bản trên đồ thị vô hướng.
3. Thuật ngữ cơ bản trên đồ thị có hướng.
4. Một số dạng đồ thị đặc biệt.

Bậc của đỉnh - *deg*

- Định nghĩa 1:

  Hai đỉnh u và v của đồ thị vô hướng $G = < V, E >$ được gọi là kề nhau nếu (u, v) là cạnh thuộc đồ thị G.

  Nếu $e = (u, v)$ là cạnh của đồ thị G thì ta nói cạnh này liên thuộc với hai đỉnh u và v, hoặc ta nói cạnh e nối đỉnh u với đỉnh v, đồng thời các đỉnh u và v sẽ được gọi là đỉnh đầu của cạnh (u, v).

- Định nghĩa 2:

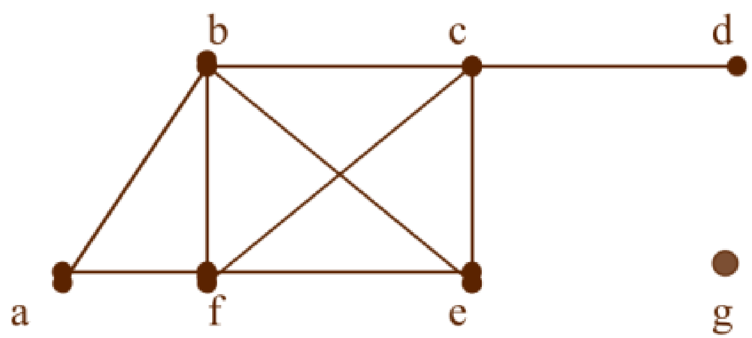
  Ta gọi bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc với nó và ký hiệu là deg(v).

Bậc của đỉnh - *deg*

Ví dụ:

deg(g) = 0, deg(d) = 1, deg(a) = 2, deg(e) = 3

deg(b) = deg(c) = deg(f) = 4;



(Phương ND, 2013)

- Đỉnh có bậc 0 được gọi là đỉnh cô lập (ví dụ g).
- Đỉnh bậc 1 được gọi là đỉnh treo (ví dụ d).

Định lý về tổng bậc các đỉnh

- Định lý 1:

Giả sử $G = <V, E>$ là đồ thị vô hướng với m cạnh, khi đó:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$$

Chứng minh:

Với mỗi cạnh $e = (u, v)$, số bậc được tính một lần trong $\deg(u)$ và một lần trong $\deg(v)$. Như vậy tổng số bậc của tất cả các đỉnh sẽ bằng 2 lần số cạnh.

Hệ quả:

Trong đồ thị vô hướng $G = <V, E>$, số các đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.

Đường đi, chu trình

- **Định nghĩa 1:**
  - Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trên đồ thị vô hướng $G = < V, E >$ là dãy $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, trong đó: n là số nguyên dương, $x_0 = u$, $x_n = v$, $(x_i, x_{i+1}) \in E$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.
    - Đường đi như trên còn có thể biểu diễn thành dãy các cạnh $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$.
    - Đỉnh u là đỉnh đầu, đỉnh v là đỉnh cuối của đường đi.
  - Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối hay $u = v$ được gọi là chu trình.
  - Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu như không có cạnh nào lặp lại.

Đường đi, chu trình

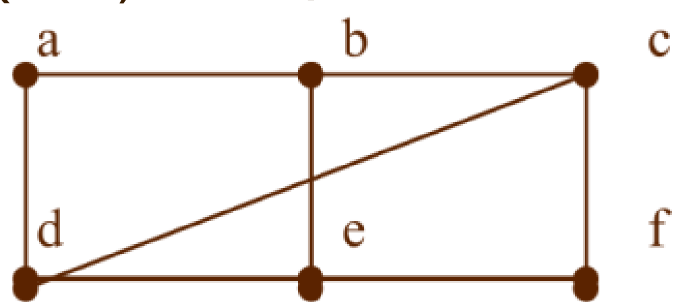
Ví dụ:

a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4.

d, e, c, b không là đường đi vì (e, c) không phải là cạnh của đồ thị.

b, c, f, e, b là chu trình độ dài 4.

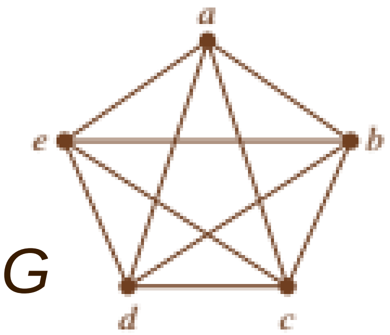
Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài 5 không phải là đường đi đơn vì cạnh (a, b) có mặt 2 lần.



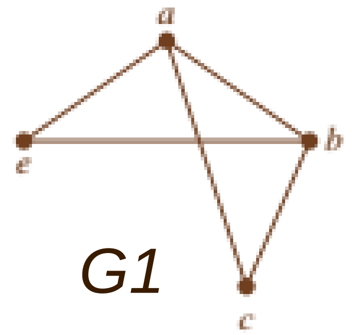
(Phương ND, 2013)

Đồ thị con

- Đồ thị con:
  - Ta gọi đồ thị con của đồ thị $G = \langle V, E \rangle$ là đồ thị $H = \langle W, F \rangle$, trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$.
  - Như vậy, cho trước tập các đỉnh V của 1 đồ thị G, chúng ta có thể xây dựng 1 đồ thị con H của G với:
    - các đỉnh của H đều thuộc V và
    - các cạnh của H đều thuộc E.



G



G1

G1 là đồ thị con của đồ thị G

Liên thông

- Định nghĩa 2:

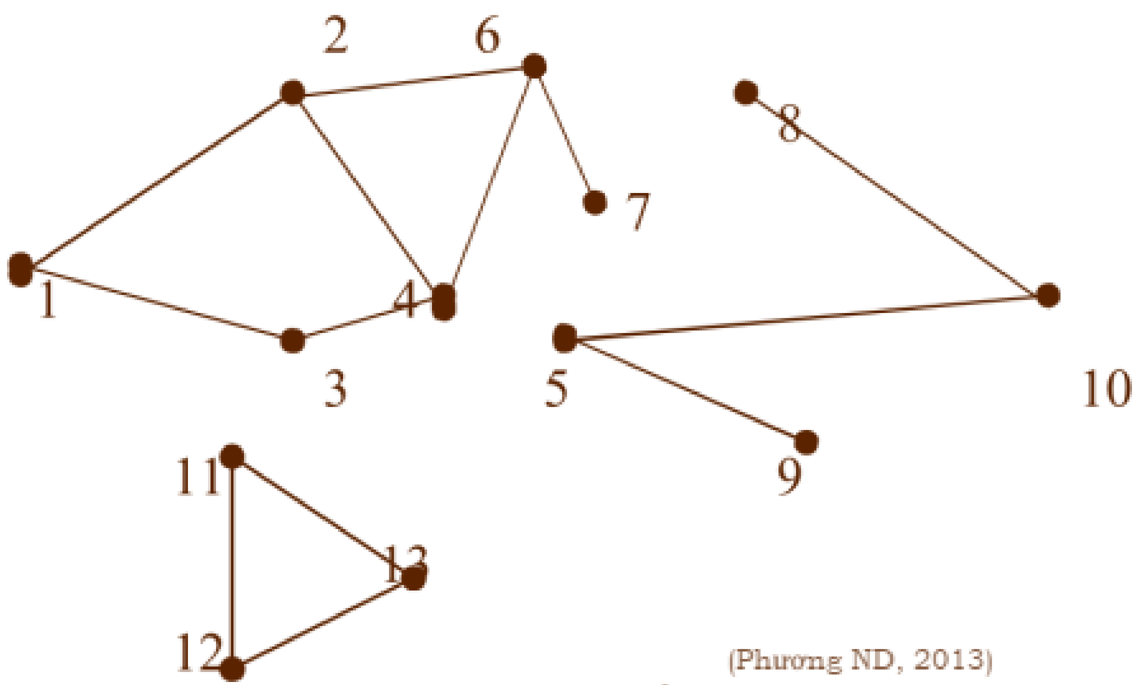
Đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó

  - Trong trường hợp đồ thị $G = < V, E >$ không liên thông, ta có thể phân rã G thành một số đồ thị con liên thông mà chúng đôi một không có đỉnh chung.
  - Mỗi đồ thị con như vậy được gọi là một thành phần liên thông của đồ thị G.
  - Như vậy, đồ thị liên thông khi và chỉ khi số thành phần liên thông của nó là 1.
  - Trong đồ thị vô hướng, nếu tồn tại đỉnh $u \in V$ sao cho u có đường đi đến tất cả các đỉnh còn lại của đồ thị thì đồ thị là liên thông.

Liên thông

Ví dụ:

Đồ thị vô hướng G gồm 3 thành phần liên thông:



G

Cầu, trụ

- Định nghĩa 3:

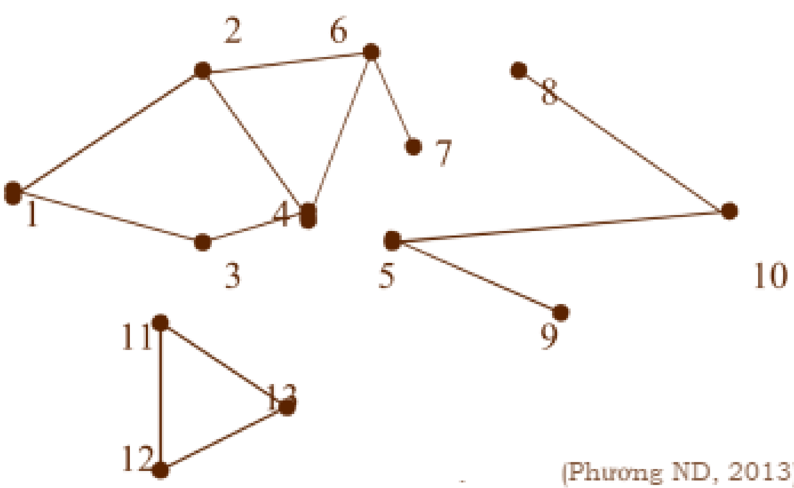
Cạnh $e \in E$ được gọi là cầu nếu loại bỏ e làm tăng thành phần liên thông của đồ thị.

Đỉnh $u \in V$ được gọi là đỉnh trụ nếu loại bỏ u cùng với các cạnh nối với u làm tăng thành phần liên thông của đồ thị.

Ví dụ:

Các cạnh (5, 9), (5, 10), … là cầu;

Các đỉnh 5, 6, … là trụ



(Phương ND, 2013)

Nội dung Bài 1

1. Định nghĩa đồ thị.
2. Thuật ngữ cơ bản trên đồ thị vô hướng.
3. Thuật ngữ cơ bản trên đồ thị có hướng.
4. Một số dạng đồ thị đặc biệt.

Bán bậc của đỉnh

- **Định nghĩa 1:**

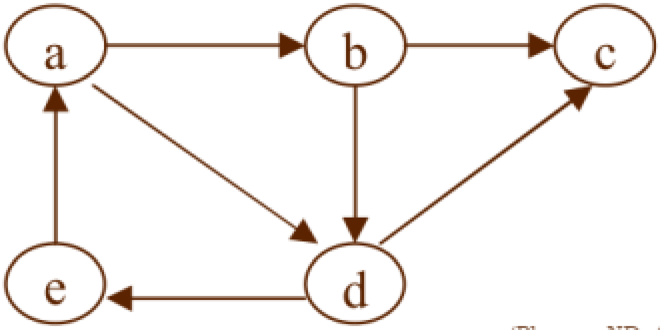
  Nếu $e = (u, v)$ là cung của đồ thị có hướng G thì ta nói:
  - Hai đỉnh u và v là kề nhau;
  - Cung (u, v) nối đỉnh u với đỉnh v, hoặc nói cung này đi ra khỏi đỉnh u và đi vào đỉnh v.
  - Đỉnh u được gọi là đỉnh đầu, đỉnh v được gọi là đỉnh cuối của cung (u, v).
- **Định nghĩa 2:**
  - Ta gọi bán bậc ra của đỉnh v trên đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi ra khỏi v và ký hiệu là $deg^{+}(v)$.
  - Ta gọi bán bậc vào của đỉnh v trên đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi vào v và ký hiệu là $deg^{-}(v)$.

Bán bậc của đỉnh

Ví dụ:

$deg^{+}(a) = 2$; $deg^{+}(b) = 2$; $deg^{+}(c) = 0$,
$deg^{+}(d) = 2$; $deg^{+}(e) = 1$.

$deg^{-}(a) = 1$; $deg^{-}(b) = 1$; $deg^{-}(c) = 2$;
$deg^{-}(d) = 2$, $deg^{-}(e) = 1$.



(Phương ND, 2013)

Định lý về tổng bán bậc các đỉnh

- Định lý 1:

  Giả sử $G = < V, E >$ là đồ thị có hướng, khi đó:

  $\sum_{v \in V} deg^+(v) = \sum_{v \in V} deg^-(v) = |E|$ *(Số phần tử của tập cạnh E)*

Chứng minh:

  Do mỗi cung (u, v) được tính một lần trong bán bậc vào của đỉnh v và một lần trong bán bậc ra của đỉnh u.

Chú ý:

- Nhiều tính chất của đồ thị có hướng không phụ thuộc vào hướng trên các cung của nó. Vì vậy, trong nhiều trường hợp, ta bỏ qua các hướng trên cung của đồ thị.
- Đồ thị vô hướng nhận được bằng cách bỏ qua hướng trên các cung được gọi là đồ thị vô hướng ứng với đồ thị có hướng đã cho.

Đường đi, chu trình

- Định nghĩa 1:

  Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trên đồ thị có hướng $G = <V, E>$ là dãy $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$, trong đó: n là số nguyên dương; $x_0 = u$, $x_n = v$, $(x_i, x_{i+1}) \in E$, $i = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

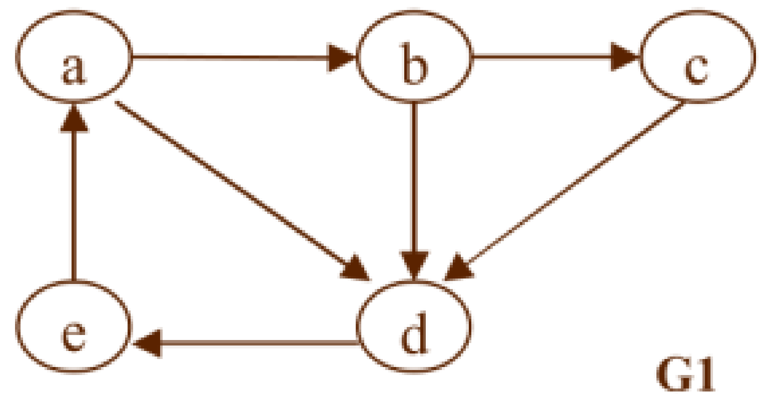
  - Đường đi như trên còn có thể biểu diễn thành dãy các cung (x_0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n).
  - Đỉnh u là đỉnh đầu, đỉnh v là đỉnh cuối của đường đi.
  - Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối hay $u = v$ được gọi là chu trình.
  - Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu như không có cạnh nào lặp lại.

Liên thông mạnh, liên thông yếu

- **Định nghĩa 2:**

  Đồ thị có hướng $G = < V, E >$ được gọi là liên thông mạnh nếu giữa hai đỉnh bất kỳ $u \in V$, $v \in V$ đều có đường đi từ u đến v.

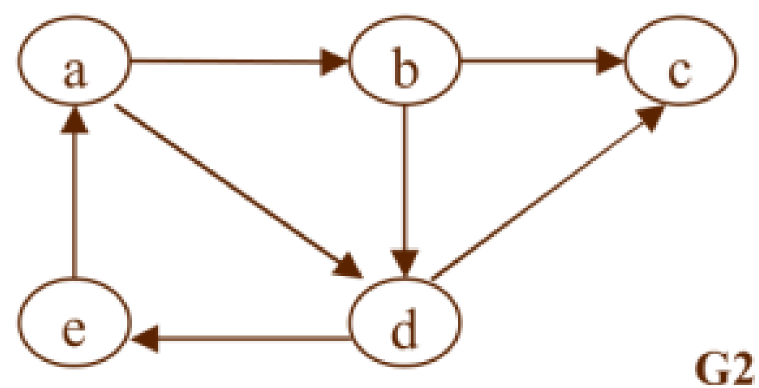
G1: liên thông mạnh



- **Định nghĩa 3:**

  Đồ thị có hướng $G = < V, E >$ được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng ứng với nó là liên thông.

G2: liên thông yếu



Định chiều được

- Định nghĩa 4:

Đồ thị vô hướng $G = < V, E >$ được gọi là định chiều được nếu ta có thể biến đổi các cạnh trong G thành các cung tương ứng để nhận được một đồ thị có hướng liên thông mạnh.

- Định lý 1:

Đồ thị vô hướng $G = < V, E >$ định chiều được khi và chỉ khi các cạnh của nó không phải là cầu.

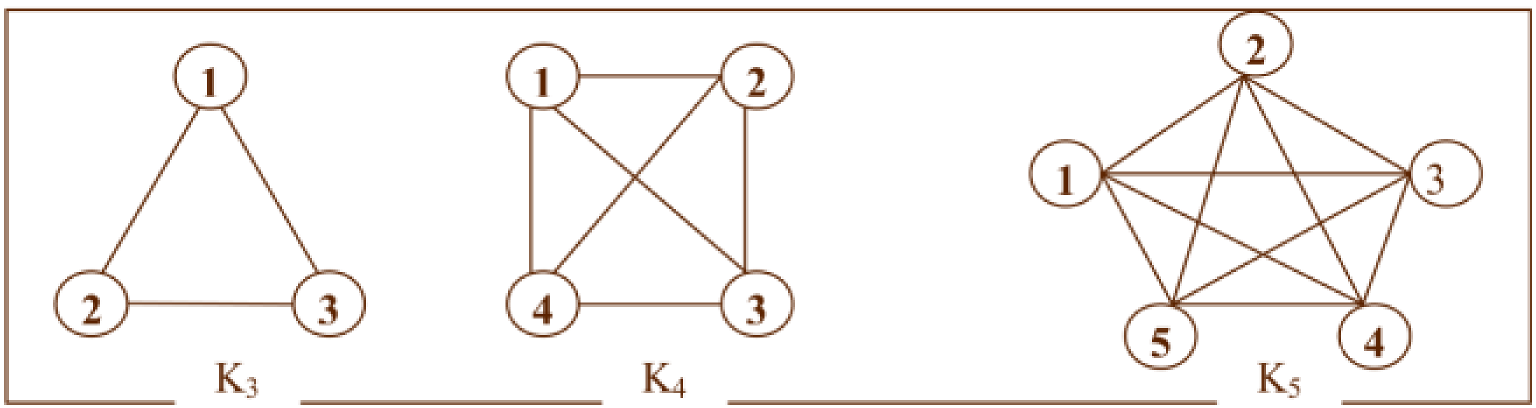
Nội dung Bài 1

1. Định nghĩa đồ thị.
2. Thuật ngữ cơ bản trên đồ thị vô hướng.
3. Thuật ngữ cơ bản trên đồ thị có hướng.
4. Một số dạng đồ thị đặc biệt.

Đồ thị đầy đủ

Đồ thị đầy đủ n đỉnh:

- Ký hiệu là K_n;
- Là đơn đồ thị vô hướng mà giữa hai đỉnh bất kỳ của nó đều có cạnh nối.
- Số cạnh của đồ thị đầy đủ: $n(n\text{-}1)/2$.

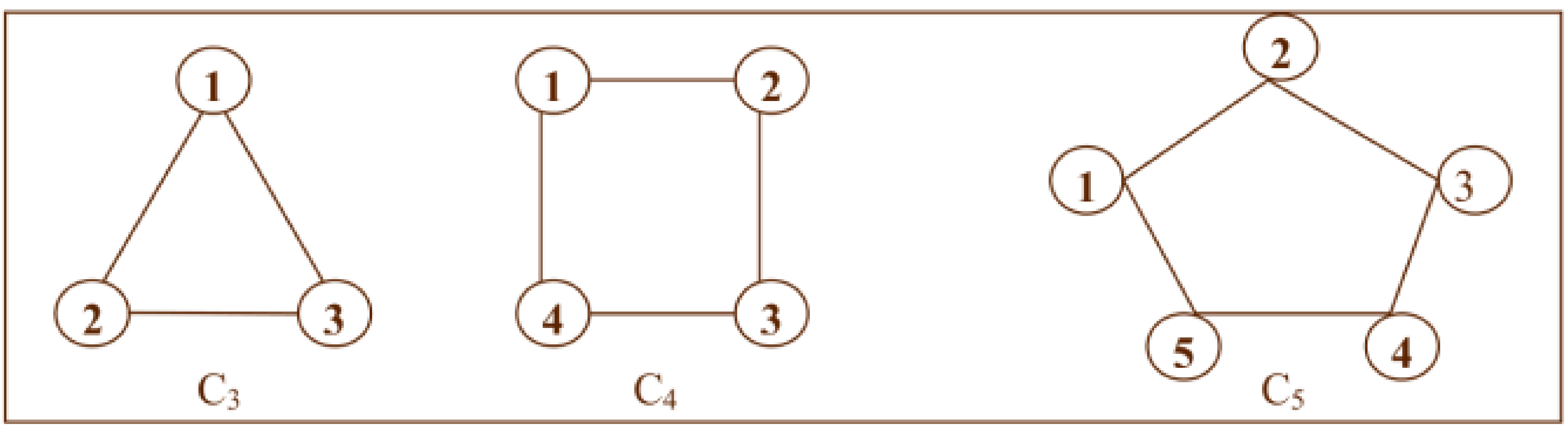


(Phương ND, 2013)

Đồ thị vòng

Đồ thị vòng n đỉnh:

- Ký hiệu là C_n ($n \geq 3$);
- Là đơn đồ thị vô hướng gồm các cạnh (1, 2), (2, 3), …, (n-1, n), (n, 1)

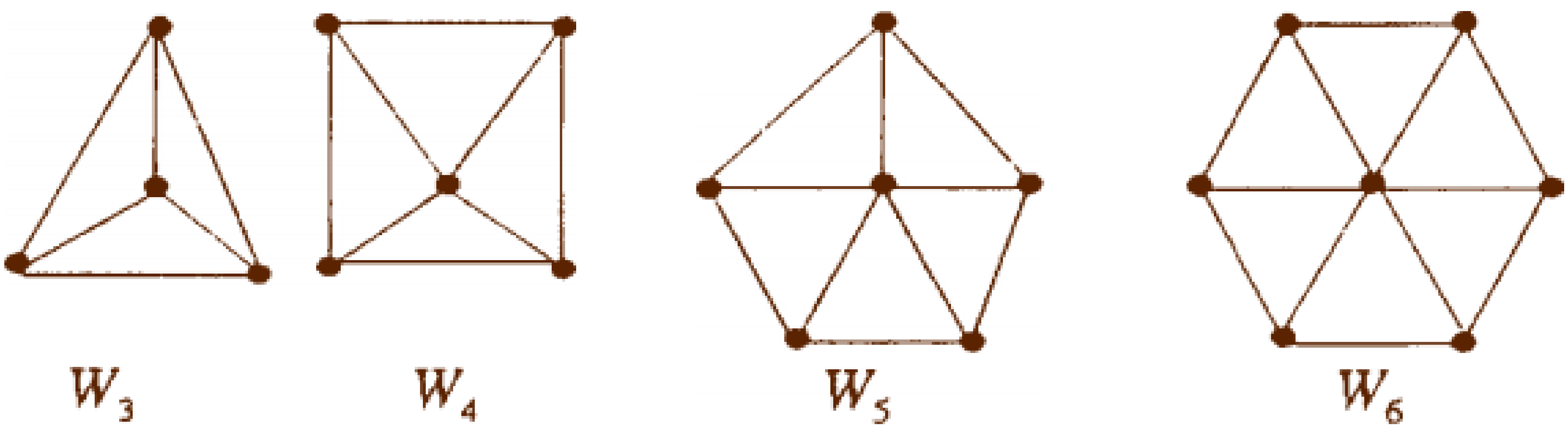


(Phương ND, 2013)

Đồ thị bánh xe

Đồ thị bánh xe n đỉnh:

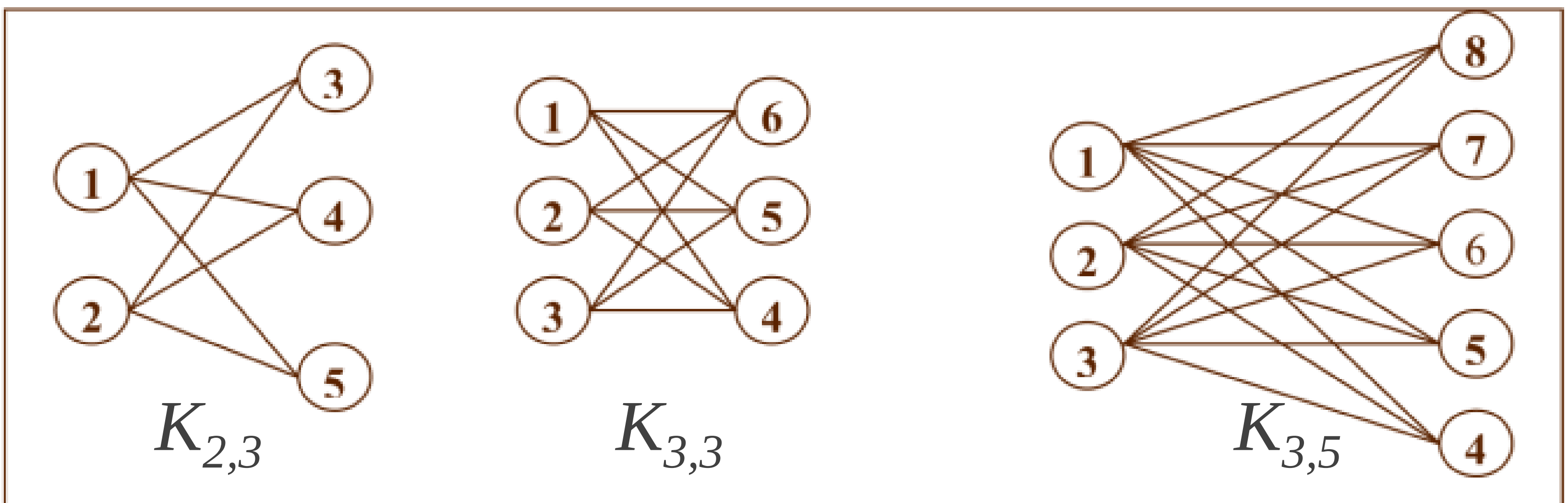
- Ký hiệu là W_n;
- Là đồ thị thu được bằng cách bổ sung một đỉnh nối với tất cả các đỉnh của đồ thị vòng $C_{n\text{-}1}$.



Đồ thị hai phía

Đồ thị $G = < V, E >$ được gọi là đồ thị hai phía nếu:

Tập đỉnh V của nó có thể phân hoạch thành 2 tập X và Y sao cho mỗi cạnh của đồ thị chỉ có dạng (x, y), trong đó $x \in X$ và $y \in Y$.



(Phương ND, 2013)

Đồ thị phẳng

Đồ thị được gọi là đồ thị phẳng nếu:

- Ta có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau ngoài việc cắt nhau ở đỉnh.
- Cách vẽ như vậy được gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị.

Đồ thị K_4 là đồ thị phẳng

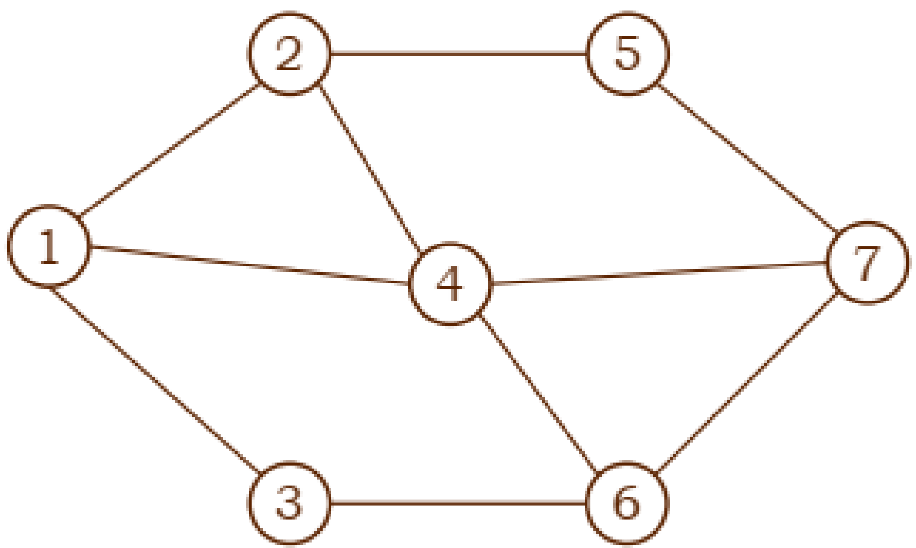
Bài tập

- Làm các bài tập trong slide bài giảng (download theo link đã được cung cấp).

Bài tập

- Bài tập 1

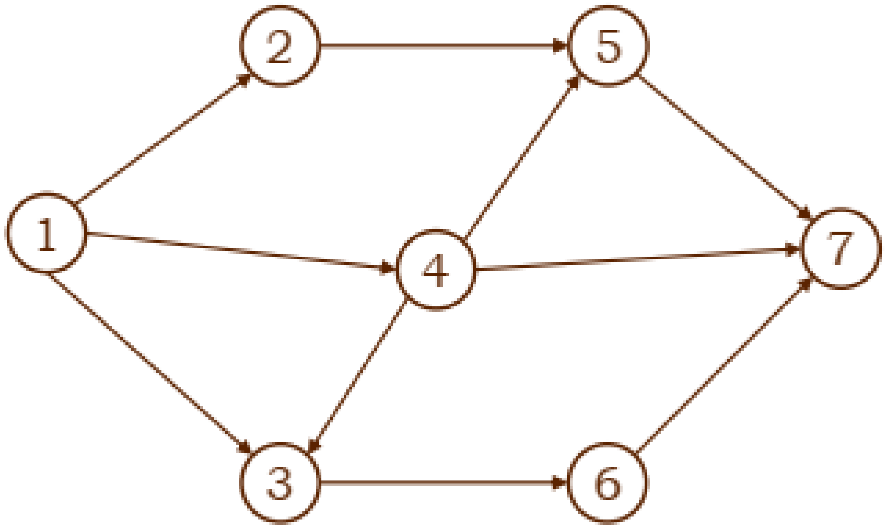
  Xác định bậc của mỗi đỉnh trong đồ thị vô hướng sau:



Bài tập

- Bài tập 2

  Xác định bán bậc vào và bán bậc ra của mỗi đỉnh trong đồ thị có hướng sau:



Kết thúc Bài 1

- Câu hỏi và thảo luận?