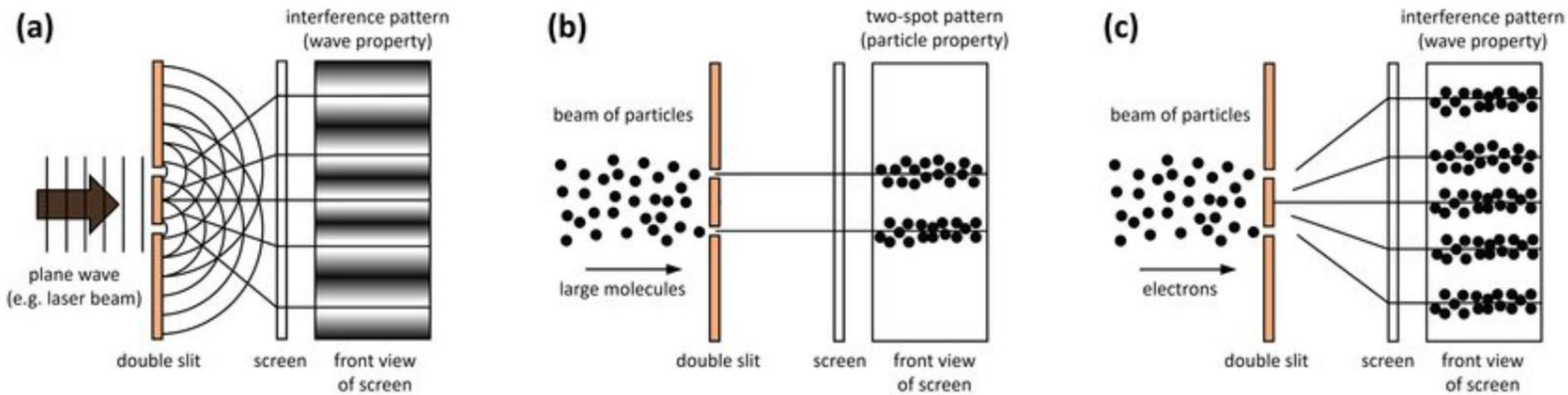
CHƯƠNG 8
CƠ HỌC LƯỢNG TỬ



1: Double-slit experiment with (a) photons, (b) very large particles, (c) electrons. Photons and electrons passing the double-slit form interference patterns on the screen, showing the wave nature of particles. Particles on (b) are too large/massive to exhibit their wave nature.

8. 1. LƯỠNG TÍNH SÓNG HẠT CỦA VI HẠT

1. Lưỡng tính sóng hạt của ánh sáng

- Lưỡng tính sóng hạt của ánh sáng được Einstein nêu trong thuyết phôtôn: ánh sáng được cấu tạo bởi các hạt phôtôn, mỗi hạt mang năng lượng $E = h\upsilon$ và động lượng $p = \frac{h}{\lambda}$

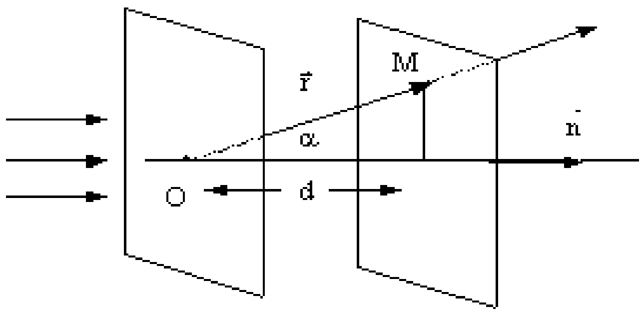
- Ta thấy các đại lượng đặc trưng cho tính chất hạt (E,p) và các đại lượng (λ, υ)đặc trưng cho tính chất sóng liên hệ trực tiếp với nhau.

Chúng ta sẽ thiết lập hàm sóng cho hạt phôtôn.

2. Hàm sóng

- Dao động sáng tại O : $x = A\cos 2\pi f t$

Khi đó dao động sáng tại mọi điểm trên mặt sóng đi qua điểm M cách mặt sóng đi qua O một đoạn d:



$x(t-\frac{d}{c}) = A\cos[2\pi f(t-\frac{d}{c})]$

$= A\cos[2\pi(ft-\frac{fd}{c})] = A\cos[2\pi(ft-\frac{d}{\lambda})]$

$\lambda = cT = \frac{c}{f}$

$d = r\cos\alpha = \vec{\boldsymbol{r}}.\vec{\boldsymbol{n}}$

$\rightarrow x(t-\frac{d}{c}) = A\cos[2\pi(ft-\frac{\boldsymbol{r}.\boldsymbol{n}}{\lambda})]$

- Sử dụng kí hiệu ψ cho hàm sóng và biểu diễn nó dưới dạng hàm phức ta có

$$\Psi = \Psi_0 \exp[-2\pi i(ft - \frac{\boldsymbol{r}.\boldsymbol{n}}{\lambda})]$$

$$E = hf \rightarrow f = \frac{E}{h}$$

$$p = mv = \frac{h}{\lambda} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\rightarrow \psi = \psi_o \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(Et - \vec{p}\vec{r}\right)\right]$$

3. Giả thuyết de Broglie (Đơbrơi)

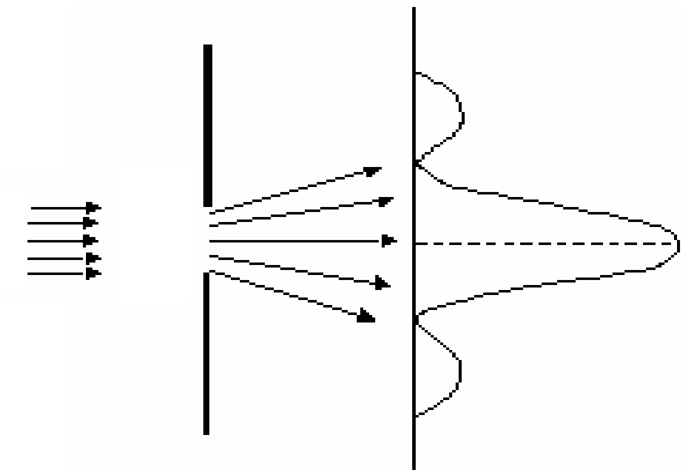
- ***Một vi hạt tự do có năng lượng, động lượng xác định tương ứng với một sóng phẳng đơn sắc.***
- *Năng lượng của vi hạt liên hệ với tần số dao động của sóng tương ứng thông qua hệ thức:* $E = h\upsilon$ hay $E=\hbar\omega$.

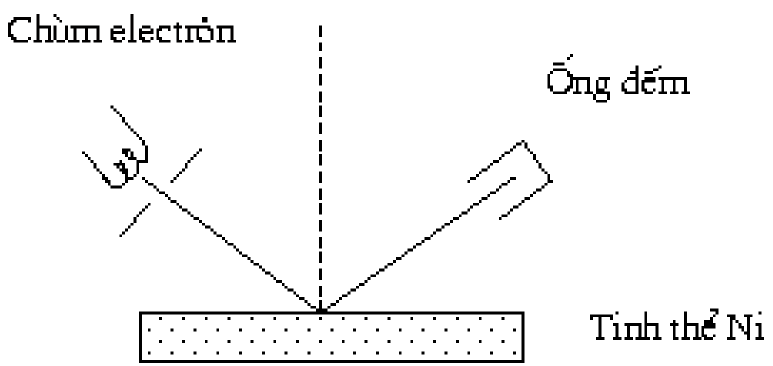
Động lượng của vi hạt liên hệ với bước sóng của sóng tương ứng theo hệ thức: $p = \frac{h}{\lambda}$ *hay* $\vec{p} = \hbar\vec{k}$

$\vec{k}$ là vectơ sóng, có phương, chiều là phương, chiều truyền sóng, có độ lớn $k=\frac{2\pi}{\lambda}$

- Sóng de Broglie là sóng vật chất, sóng của các vi hạt.

Thực nghiệm xác nhận tính chất sóng của các hạt vi mô





a/ Nhiễu xạ của electrôn qua một khe hẹp

b/ Nhiễu xạ của electrôn trên tinh thể

Giới hạn của giả thiết de Broglie

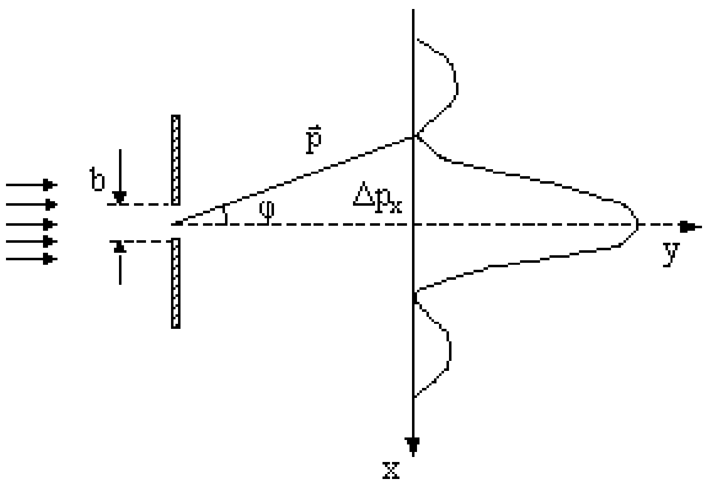
Bước sóng de Broglie tỉ lệ nghịch với khối lượng của hạt:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

do đó **đối với *những hạt thông thường mà khối lượng rất lớn***, thậm chí là vô cùng lớn so với khối lượng của electrôn chẳng hạn **thì bước sóng de Broglie tương ứng có giá trị vô cùng bé và không còn ý nghĩa để mô tả tính chất sóng nữa.**

8. 2. HỆ THỨC BẤT ĐỊNH HEISENBERG

- Sau khi qua khe hạt sẽ bị nhiễu xạ theo nhiều phương khác nhau, tuỳ theo góc nhiễu xạ, mật độ hạt nhiễu xạ trên màn sẽ cực đại hoặc cực tiểu.
- Xét tọa độ của hạt theo phương x, nằm trong mặt phẳng khe và song song với bề rộng khe.



Nhiễu xạ electrôn qua khe hẹp

- Tọa độ x của hạt trong khe sẽ có giá trị trong khoảng từ 0 đến b. vị trí của hạt trong khe được xác định với độ bất định $\Delta x \approx b$

- Hình chiếu của $\vec{p}$ thay đổi và có giá trị trong khoảng $[0, p\sin\varphi]$
- Xét trường hợp hạt rơi vào cực đại giữa, độ bất định về hình chiếu động lượng lên phương x: $\Delta p \approx p\sin\varphi_1$
- Do là góc ứng với cực tiểu thứ nhất $\sin\varphi_1 = \frac{\lambda}{b}$

Theo giả thuyết de Broglie $p = \frac{h}{\lambda}$ $\rightarrow$ $\Delta x \Delta p_x \approx b.\,p\sin\varphi_1 \approx p\lambda \approx h$

Tương tự cho phương y và z.

$$\Delta x.\Delta p_x \approx h$$

$$\Delta y.\Delta p_y \approx h$$

$$\Delta z.\Delta p_z \approx h$$

Vi hạt chỉ có thể ở một trạng thái với một xác suất nào đó - *tuân theo qui luật thống kê*.

- Bằng lý thuyết Cơ học lượng tử Heisenberg tìm ra hệ thức bất định giữa vị trí và động lượng (1927):

$$\Delta x.\Delta p_x \geq \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

- Ngoài hệ thức bất định về vị trí và động lượng, trong cơ học lượng tử người ta còn tìm được hệ thức bất định giữa năng lượng và thời gian:

$$\Delta E.\Delta t \approx h$$

$$\Delta E.\Delta t \geq \hbar$$

Bài tập ví dụ

Bài tập 1

Động năng của electrôn trong nguyên tử hiđrô có giá trị vào cỡ 10eV. Dùng hệ thức bất định hãy đánh giá kích thước nhỏ nhất của nguyên tử.

- hệ thức bất định giữa vị trí và động lượng $\Delta x.\Delta p_x \geq \hbar = \frac{h}{2\pi}$

Giả sử kích thước của nguyên tử bằng a

vậy vị trí của electrôn theo phương x xác định bởi:

$$0 \leq x \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow \Delta x \approx \frac{a}{2}$$

- Từ hệ thức bất định: $\rightarrow \frac{a}{2}\Delta p_x \approx h \rightarrow \ a \approx \frac{2\hbar}{\Delta p_x}$

Mặt khác

$$\Delta p_x \leq p$$

$$p = \sqrt{2m_e E_đ}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của kích thước nguyên tử:

$$a_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2m_e E_đ}} = 1,24.10^{-10}\, m$$

Bài tập 2:

Electrôn chuyển động tương đối tính với vận tốc 2.10^8m/s. Tìm:

1. Bước sóng de Broglie của electrôn.
2. Động lượng của electrôn.

1/ Áp dụng cơ học tương đối tính:

$$\lambda = \frac{h}{mv}; m = \frac{m_{0e}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \lambda = \frac{h\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m_{0e} v} = 2,72.10^{-12} \text{ m}$$

2/

$$p = \frac{h}{\lambda} = 2,44.10^{-22} \text{ kg m / s}$$

Bài tập 3

Tìm bước sóng de Broglie của

1. Electron có vận tốc 10^8 cm/s
2. Một quả cầu có khối lượng m=2g và vận tốc 1 cm/s
3. Electron có động năng 150 eV

Gợi ý:

1 và 2: vì v<<c → áp dụng CHCĐ

$$\lambda = \frac{h}{m_e v}$$

3: $W_đ \ll W_0$=0,51 MeV→ áp dụng CHCĐ

$W_đ = \frac{m_e v^2}{2}$=eU $\quad p_e^2 = 2m_e W_đ \quad \lambda = \frac{h}{p_e}$ thay số ra λ

Bài tập 4:

Hạt electron có vận tốc ban đầu bằng không, được gia tốc bởi một hiệu điện thế U = 510 kV. Tìm bước sóng de Broglie của hạt sau khi được gia tốc?

Gợi ý:

Công của lực điện trường bằng A=eU=$E_đ$ (Jun)

→ động năng mà electron thu được từ năng lượng điện trường eU=0,51 MeV =E_{0e}

→ Cần áp dụng cơ học tương đối:

$E_đ = mc^2 - m_0c^2 = eU \rightarrow m = \frac{eU}{c^2} + m_0$ (nên thay số luôn!)

thay vào m= $\frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v^2}{c^2})}} \rightarrow v \rightarrow \lambda = \frac{h}{mv}$

8. 3. HÀM SÓNG

- Theo giả thuyết de Broglie chuyển động của hạt tự do được mô tả bởi hàm sóng tương tự như sóng ánh sáng phẳng đơn sắc

$$\psi = \psi_o \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(Et - \vec{p}\vec{r}\right)\right] = \psi_o \exp\left[-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right]$$

Trong đó:

$$E = \hbar\omega; \vec{p} = \hbar\vec{k} \qquad \psi_o^2 = |\psi|^2 = \psi\psi^*$$

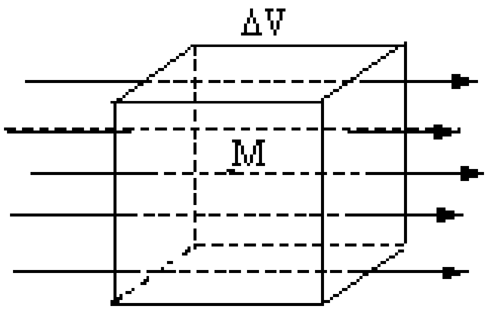
Ψ^* là liên hợp phức của Ψ

- Nếu hạt vi mô chuyển động trong trường thế, thì hàm sóng của nó là một hàm phức tạp của toạ độ và thời gian t:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(x, y, z, t)$$

Ý nghĩa thống kê của hàm sóng

Xét chùm hạt phôtôn truyền trong không gian. Xung quanh điểm M lấy thể tích ΔV bất kì



- **Theo quan điểm sóng:** Cường độ sáng tại M

$$I \sim \Psi_0^2$$

- **Theo quan điểm hạt:**

Cường độ sáng tại M tỉ lệ với năng lượng các hạt trong đơn vị thể tích bao quanh M, nghĩa là tỉ lệ với số hạt trong đơn vị thể tích đó.

Do đó $|\Psi|^2$ là *mật độ xác suất tìm hạt*

Và xác suất tìm thấy hạt trong toàn không gian là $\int_V |\psi|^2 dV = 1$

Đây chính là *điều kiện chuẩn hoá của hàm sóng*.

- **Ý nghĩa thống kê của hàm sóng:**

1. Để mô tả trạng thái của vi hạt người ta dùng hàm sóng
2. Biểu diễn mật độ xác suất tìm thấy hạt ở trạng thái đó.
3. Không mô tả một sóng thực trong không gian. Hàm sóng mang tính chất thống kê, nó liên quan đến xác suất tìm hạt.

- **Điều kiện của hàm sóng**

1. Hàm sóng phải **hữu hạn** (suy ra từ điều kiện chuẩn hoá, hàm sóng phải hữu hạn thì tích phân mới hữu hạn)
2. Hàm sóng phải **đơn trị**, vì theo lí thuyết xác suất: mỗi trạng thái chỉ có một giá trị xác suất tìm hạt.
3. Hàm sóng phải **liên tục** vì xác suất $|\Psi|^2$ không thể thay đổi nhảy vọt.

8. 4. PHƯƠNG TRÌNH SCHRODINGER

- Hàm sóng de Broglie: $$\psi(\vec{r},t)=\psi_o\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(Et-\vec{p}\vec{r}\right)\right]=\psi(\vec{r})\exp\left[-\frac{i}{\hbar}Et\right]$$

trong đó là phần phụ thuộc vào tọa độ của hàm sóng

$$\psi(\vec{r})=\psi_o\exp\left[\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}\right]$$

trong hệ tọa độ Đề các: $$\psi(\vec{r})=\psi_o\exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_x x+p_y y+p_z z)\right]$$

Lấy đạo hàm theo x: $$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\left(\frac{i}{\hbar}p_x\right)\psi(\vec{r})$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{i^2}{\hbar^2}p_x^2\psi(\vec{r})=-\frac{p_x^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r})$$

- Theo định nghĩa của toán tử Laplace Δ

$$\Delta\psi(\vec{r}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(\vec{r})$$

Nên ta có:

$$\Delta\psi(\vec{r}) = -\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r}) = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r})$$

$E_đ$ là động năng của hạt: $E_đ = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p^2 = 2mE_đ$

Ta thu được **phương trình Schrodinger cho vi hạt chuyển động tự do**:

$$\Delta\psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}E_đ\psi(\vec{r}) = 0$$

- Phương trình Schrodinger cho vi hạt chuyển động trong một trường lực **có thế năng U không phụ thuộc thời gian** – tức là vi hạt không tự do:

Năng lượng của vi hạt $E = E_đ + U$.

Phương trình Schrodinger cho trạng thái dừng:

$$\Delta\psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - U(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = 0$$

- Ta giới hạn chỉ xét hệ là kín hay đặt trong trường ngoài không biến thiên theo thời gian. Năng lượng của hệ khi đó không đổi và trạng thái của hệ được gọi là **trạng thái dừng.**

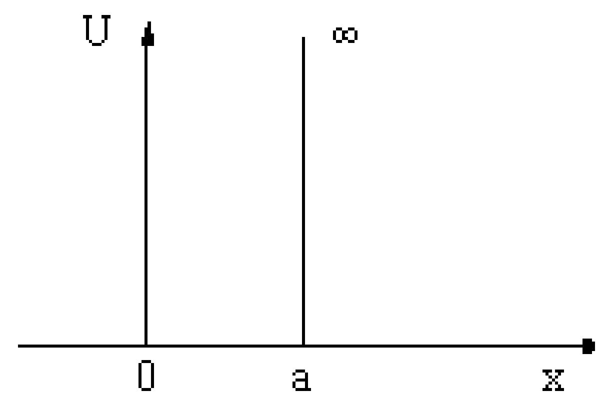
8. 5. ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH SCHRODINGER

1. Vật thể vi mô (vi hạt) chuyển động trong giếng thế năng

Xét trường hợp hạt nằm trong giếng thế năng có thành cao vô hạn và chuyển động theo một phương x bên trong giếng thế.

Thế năng U được xác định theo điều kiện:

$$U = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad 0 < x < a \\ \infty & \text{khi} \quad x \le 0 \;,\; x \ge a \end{cases}$$



Như vậy bên trong giếng thế hạt chuyển động tự do và không thể vượt ra ngoài giếng.

Khi hạt hạt trong giếng thế (U = 0) một chiều (chiều x) ta có phương trình Schrodinger:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

Đặt $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$$

Nghiệm của pt có dạng: $\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$

Theo đầu bài thì hạt chỉ ở trong giếng thế, do đó xác suất tìm hạt tại vùng ngoài giếng thế bằng không và hàm sóng trong các vùng đó cũng bằng 0

- **Từ điều kiện liên tục của hàm sóng**

$$\psi(0) = A\sin(0) + B = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\psi(a) = A\sin(ka) = 0 \rightarrow \sin ka = 0 = \sin n\pi \Leftrightarrow k = \frac{n\pi}{a}$$

$$n = 1, 2...$$

$$\Rightarrow \psi_n(x) = A\sin\frac{n\pi}{a}x$$

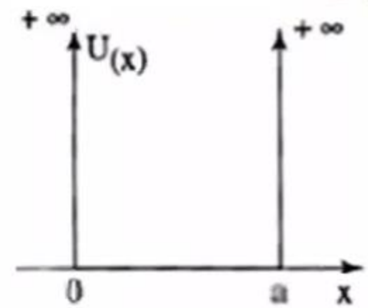
Như vậy năng lượng của hạt trong giếng thế:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}; \qquad k = \frac{n\pi}{a}$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$$

Hằng số A được xác định từ điều kiện chuẩn hóa:
Vì hạt không thể ra khỏi giếng nên xác suất tìm thấy hạt trong giếng là chắc chắn:

Từ điều kiện chuẩn hóa ⇨ $\int_0^a |\psi(x)|^2 dx = 1$



$$U = \begin{cases} 0 & khi\ \ 0<x<a \\ \infty & khi\ \ x\le 0\ ,\ \ x\ge a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^a A^2 \sin^2 \frac{n\pi}{a} x dx = \frac{A^2}{2}\int_0^a \left(1-\cos\frac{2n\pi}{a}x\right)dx = \frac{A^2 a}{2} = 1$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad \Rightarrow \boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x} \quad n=1,2,3,\ldots$$

- Năng lượng của hạt trong giếng thế: $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2}$

- Mật độ xác suất tìm thấy hạt trong giếng thế: $\boxed{|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi}{a}x}$

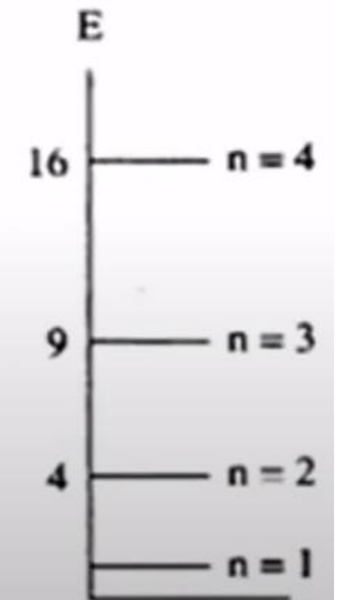
Nhận xét:

- Mỗi trạng thái có một hàm sóng: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x \qquad n=1,2,3,\ldots$

- Năng lượng của hạt biến thiên gián đoạn: $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$

- Khoảng cách giữa hai mức năng lượng kế tiếp nhau:

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}(2n+1)$$



Kết luận về chuyển động của vi hạt trong giếng thế năng:

1. Mỗi trạng thái của hạt ứng với một hàm sóng $\psi_n(x)$

2. Năng lượng của hạt trong giếng phụ thuộc vào số nguyên n, nghĩa là *biến thiên gián đoạn*. Ta nói rằng *năng lượng đã bị lượng tử hóa*.

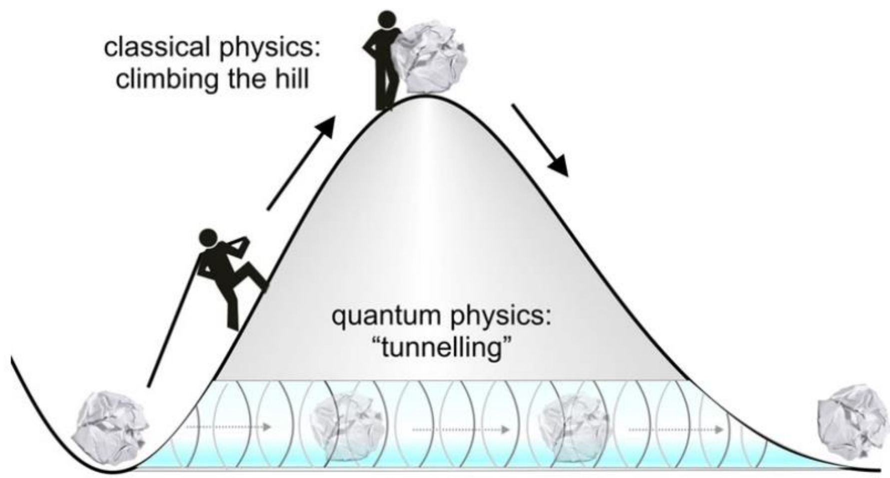
3. Mật độ xác suất tìm hạt trong giếng:

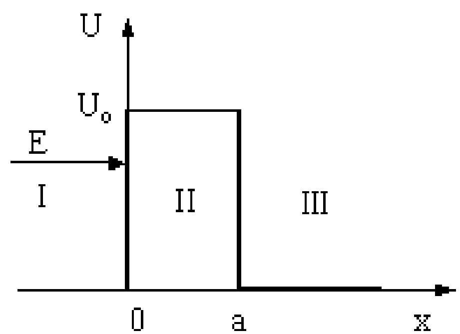
$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi}{a}x$$

2. Hiệu ứng đường ngầm

Xét hạt mang năng lượng E, chuyển động theo phương x từ trái sang phải đập vào hàng rào thế năng.

Theo quan điểm của cơ học lượng tử ta sẽ thấy hạt vẫn có khả năng xuyên qua hàng rào thế năng. Hiện tượng xuyên qua hàng rào thế năng như vậy được gọi là *hiệu ứng đường ngầm*.





$$U = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ U_o & 0 < x < a \\ 0 & x \ge a \end{cases}$$

Hàng rào thế hình chữ nhật

Phương trình Schrodiger đối với các miền như sau:

- **Miền I:** $\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 = 0$ $\quad k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

Nghiệm miền này có dạng: $\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$

- Miền II: $\frac{d^2\psi_2}{dx^2} - k_2^2\psi_2 = 0$ $\quad k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{-k_2 x} + B_2 e^{k_2 x}$$

- **Miền III:** $\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + k_1^2\psi_3 = 0$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ik_1(x-a)} + B_3 e^{-ik_1(x-a)}$$

$$B_3 = 0$$

- **Hệ số truyền qua hàng rào D** được định nghĩa là tỷ số giữa số hạt xuyên qua được hàng rào và số hạt đi tới hàng rào. Và số hạt lại tỷ lệ với bình phương của biên độ sóng. Biên độ sóng tới hàng rào là A_1 và biên độ sóng xuyên qua hàng rào là A_3, do đó ta có:

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \qquad R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$$

- **Hệ số phản xạ R** được định nghĩa là tỷ số giữa số hạt phản xạ và số hạt đi tới hàng rào.

(B_1 là biên độ sóng phản xạ trên mặt hàng rào)

- Do điều kiện bảo toàn số hạt, ta phải có:

$$|A_3|^2 + |B_1|^2 = |A_1|^2 \Rightarrow D + R = 1$$

Cách tìm hệ số D và R

Phải tính được các biên độ sóng:

dựa vào điều kiện liên tục của hàm sóng và đạo hàm của nó tại các vị trí biên (x = 0 và x = a):

$$\psi_1(0) = \psi_2(0)$$

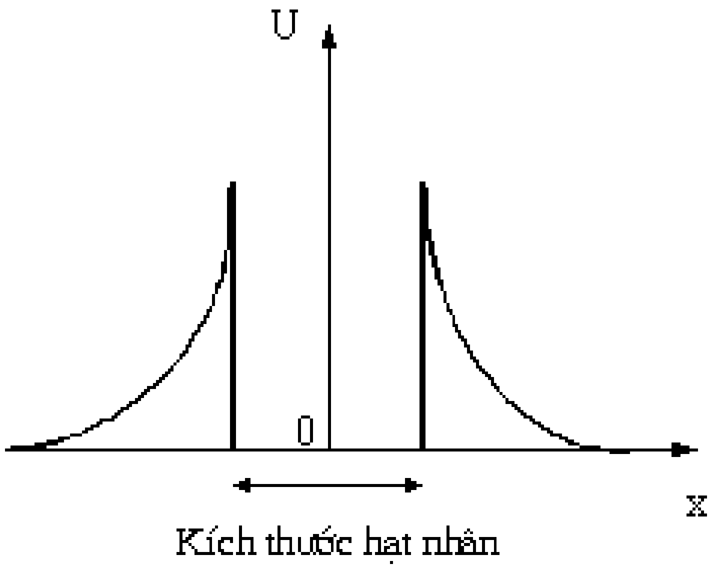
$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$$

$$\psi_2(a) = \psi_3(a)$$

$$\psi_2'(a) = \psi_3'(a)$$

Hiện tượng phân rã α

Hạt nhân nguyên tử gồm có các hạt prôtôn (p) và nơtrôn (n). Trong hạt nhân các hạt p và n tương tác với nhau bằng lực hạt nhân, cho nên có thể xem như chúng nằm trong giếng thế năng. Hạt α gồm hai hạt p và hai hạt n, mặc dù năng lượng của hạt α nhỏ hơn độ cao rào thế nhưng do hiệu ứng đường ngầm, hạt p và n của hạt α vẫn có thể bay ra khỏi hạt nhân, hiện tượng này gọi là hiện tượng phân rã α



3. Dao động tử điều hòa lượng tử

- Một vi hạt thực hiện dao động nhỏ điều hòa xung quanh vị trí cân bằng là một ví dụ về dao động tử điều hòa lượng tử.
- Cơ học lượng tử đã tìm được biểu thức năng lượng của dao động tử điều hòa (năng lượng của dao động tử đã bị lượng tử hóa):

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

với n = 0,1,2...

Năng lượng “không”: $$n = 0 \Leftrightarrow E_o = \frac{\hbar\omega}{2}$$

c. Dao tử điều hòa lượng tử (một chiều)

Xét vi hạt dao động trong trường thế năng : $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

Pt Schrödinger: $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi = 0$

Năng lượng của dao tử điều hòa: $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ **với** $n=0,1,2...$

Năng lượng của dao tử đã bị lượng tử hóa.

Năng lượng thấp nhất của dao tử điều hòa : $E_o = \frac{\hbar\omega}{2}$

được gọi là năng lượng "*không*". E_0 liên quan đến dao động "*không*" của dao tử, nghĩa là khi $T=0K$, dao tử vẫn dao động.

Lý thuyết

1- Giả thuyết de Broglie về lưỡng tính sóng - hạt của vi hạt, viết hàm sóng de Broglie cho vi hạt tự do và nêu ý nghĩa của các đại lượng có trong biểu thức đó.

2- Hệ thức bất định Heisenberg cho vị trí và động lượng, nêu ý nghĩa của hệ thức.

3- Hệ thức bất định cho năng lượng và nêu ý nghĩa của hệ thức.

4- Tại sao trong cơ học lượng tử khái niệm quĩ đạo của vi hạt không còn có ý nghĩa? Khái niệm quĩ đạo của vi hạt được thay thế bằng khái niệm gì ?

5- Thiết lập phương trình Schrodinger cho vi hạt tự do và cho vi hạt chuyển động trong trường thế. Nêu ý nghĩa các đại lượng có trong phương trình.

Bài tập ví dụ

Bài tập 5:

Hạt electron nằm trong giếng thế sâu vô cùng, có bề rộng là a. Tìm hiệu nhỏ nhất giữa hai mức năng lượng kề sát nhau ra đơn vị eV trong hai trường hợp a =20 cm và a = 20 A°. Có nhận xét gì về kết quả thu được?

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2 \rightarrow E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(2n+1)$$

Nhận xét với n=1; a =20 cm → ΔE= $4{,}5.10^{-36}$ Jun

với n=1; a =20 A° → ΔE= $4{,}5.10^{-20}$ Jun

Nhận xét về tính lượng tử.

Bài tập 6

Hạt alpha chuyển động trong một từ trường đều theo một quĩ đạo tròn có bán kính r=0,83 cm. Cảm ứng từ B=0.025T. Tìm bước sóng de-Broglie của hạt đó. Biết điện tích của hạt là q=2e

Vecto: F=q**vB**

→ Vecto v luôn vuông góc với vecto B → lực Loren giữ vai trò là lực hướng tâm

→ $F_L = qvB = \frac{mv^2}{r}$

→v=$\frac{rqB}{m}$ → $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{rqB} = \frac{h}{2erB} = 10^{-11}$ m

Bài tập 7

Dùng hệ thức Heisenberg hãy đánh giá động năng nhỏ nhất của electron chuyển động trong miền có kích thước l cỡ 0,1 nm

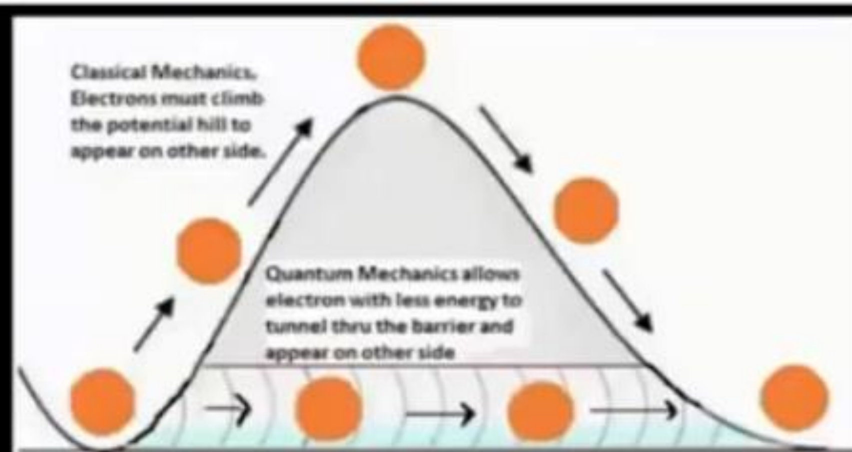
$$\Delta x.\Delta p_x \approx h$$

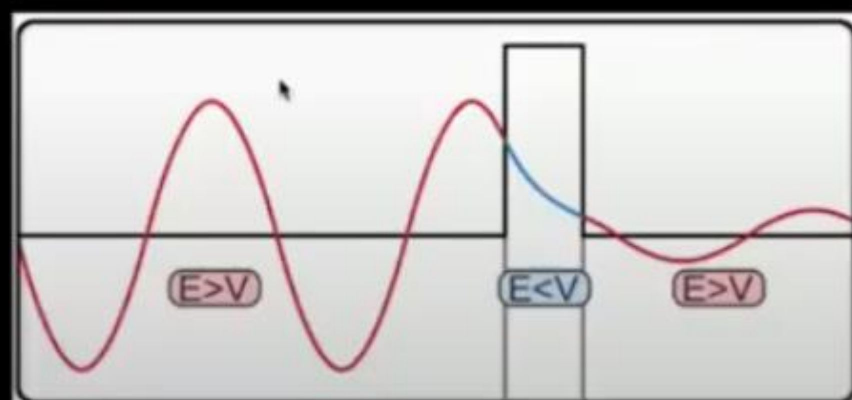
→ $E_đ$ min khi p min:

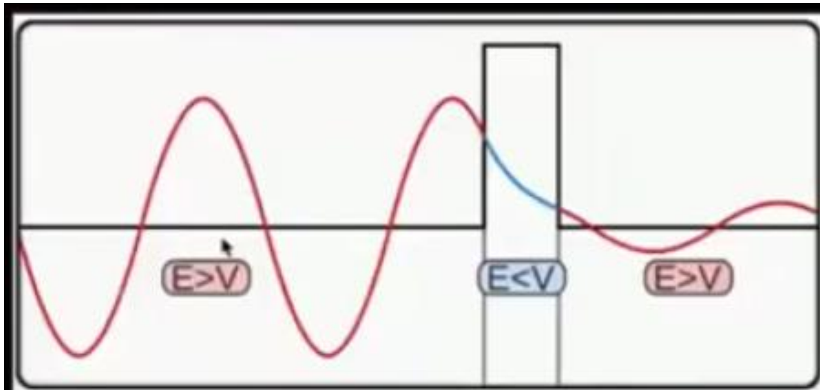
$$p_{min} = \Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \frac{2\hbar}{l} = \frac{2\hbar}{l}$$

$$E_d = \frac{p_{min}^2}{2m} = \frac{2h^2}{ml^2} = 15eV$$

- A particle with energy, ***E***, is confined to a 1D box which has a barrier of finite height and finite potential energy, ***V***.
- If the barrier is thin, the particles have some probability of penetrating through the barrier without sufficient energy and appear on the other side of the box.
  - The barrier can be a physical barrier or an "empty space" through which the particle must propagate.
- For a particle to effectively tunnel through a barrier, three criteria must be met:
  - The height of the barrier must be finite and the thickness of the barrier should be thin.
  - The potential energy of the barrier exceeds the kinetic energy of the particle (E<V).
  - The particle must have wave properties, as only the wavefunction can penetrate through the barrier.







- When particles reach this finite barrier, their wave function changes from that of a sinusoid to one of **exponential decay**.
- Tunneling **decreases the wave amplitude** due the reflection of the incident wave when it comes into the contact with the barrier but does not affect the wave equation.
- From the Heisenberg uncertainty principle, there are no solutions with a probability of exactly zero (or one).
  - If we knew the exact position, then the speed would be infinity.
  - Thus, the probability of the particle existing on the other side of the barrier is non-zero.

- When penetrating through the barrier, the generally sinusoidal wavefunction momentarily transforms into the exponentially decaying wave function shown below.

$$\psi = Ne^{-\beta x}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2m(V-E)}{h^2}}$$

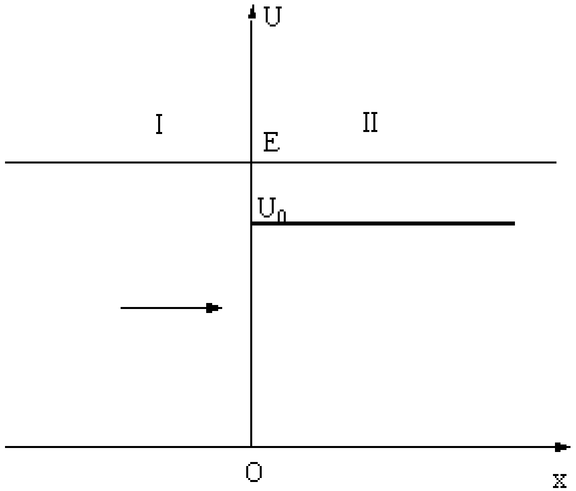
- The probability of tunnelling occurring for any quantum particle is given by the expression below.

$$P = \exp\left(\frac{-4a\pi}{h}\sqrt{2m(V-E)}\right)$$

Ví dụ 3 (delete):

Dòng hạt có năng lượng E xác định chuyển động theo phương x từ trái sang phải đến gặp một hàng rào thế năng xác định bởi:

$$U = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ U_0 \ (U_0 < E) & x > 0 \end{cases}$$



Xác định hệ số phản xạ và hệ số truyền qua hàng rào thế đối với electrôn đó.

Giải phương trình Schrodinger ở hai miền I và II. Trong miền I hàm sóng thoả mãn:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2}E\psi_1 = 0$$

Đặt:

$$\frac{2m_e}{\hbar^2}E = k^2$$

nghiệm của phương trình: $\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

(Số hạng Ae^{ikx} mô tả sóng truyền từ trái sang phải (sóng tới), số hạng Be^{-ikx} mô tả sóng truyền từ phải sang trái)

Tương tự: miền II

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_2 = 0; \quad \frac{2m_e}{\hbar^2}(E - U_0) = k_1^2$$

$$\psi_2 = Ce^{ik_1x} + De^{-ik_1x}$$

miền II chỉ có sóng truyền từ trái sang phải, không có sóng phản xạ từ vô cùng về nên D = 0.

- Tìm A,B,C từ điều kiện liên tục của hàm sóng và của đạo hàm cấp 1 của chúng:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx}$$

- Ta được:

$$A + B = C, \quad k(A - B) = k_1 C \rightarrow \frac{A+B}{A-B} = \frac{k}{k_1}, \quad \frac{B}{A} = \frac{k - k_1}{k + k_1}$$

- Hệ số phản xạ:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k - k_1}{k + k_1}\right)^2 = \left(\frac{1 - \frac{k_1}{k}}{1 + \frac{k_1}{k}}\right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}}\right)^2$$

- Hệ số truyền qua:

$$D = 1 - R = 1 - \left(\frac{k - k_1}{k + k_1}\right)^2 = \frac{4kk_1}{(k + k_1)^2}$$