Lý thuyết thông tin

Phần 2:

Lý thuyết thông tin thống kê

dinhptit@gmail.com

Đo lường thông tin thống kê

2.1. Đo lường thông tin

•**Xét thí dụ 1:** Một tập n thẻ được gắn nhãn từ 1-n. Rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính khả năng rút được thẻ có nhãn “1”.

n	Xác suất	Độ bất định
1	1	0
2	1/2	≠0
…	...	…
∞	0	∞

→Với nguồn tin: có sự tỉ lệ nghịch giữa **độ bất định** và **xác suất xuất hiện** một symbol.

- Để đánh giá tin: (1) Độ bất định (uncertainty), (2) Hàm ý của tin.
- Đối với hệ thống truyền tin, chỉ có độ bất định của tin là có ảnh hưởng.
    - Độ bất định của tin quyết định tới tần suất chiếm dụng hệ thống. Độ bất định của tin càng cao thì sự xuất hiện của nó càng hiếm. Vì vậy, hệ thống truyền tin muốn hiệu quả cần xử lý với các tin khác nhau nếu độ bất định của chúng khác nhau.
    - Việc giảm độ bất định của một tin giữa trước khi nhận tin (độ bất định tiên nghiệm) và sau khi nhận tin (độ bất định hậu nghiệm) chính là lượng tin nhận được.

Nguyên tắc đo lường thông tin

- Độ lớn của tin là độ bất định của tin
- Phép đo phải đảm bảo tính tuyến tính

Cụ thể: Xét nguồn tin A = {a_1, a_2,…, a_s} với $p(a_i)$, i= 1, ., S; $\sum p(a_i)= 1$.

- **Độ bất định của một dấu của nguồn (lượng tin riêng):**

$$I(a_i) = \log\frac{1}{p(a_i)} = -\log p(a_i)$$

•Đơn vị đo

- Nếu là cơ số e, thì $I(a_i)= - \ln[p(a_i)]$ [đơn vị tự nhiên, natural, nat]
- Nếu là cơ số 2, thì $I(a_i)= - \log_2[p(a_i)]$ [đơn vị nhị phân, bit]
- Nếu là cơ số 10, thì $I(a_i)= - \lg[p(a_i)]$ [đơn vị thập phân, hartley]

•Chú ý: 1 nat = 1,443 bit. 1 hart = 3,322 bit

Example

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0.99 & 0.01 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \begin{aligned} I(a_1) &= -\log(0.99) \approx 0 \\ I(a_2) &= -\log(0.01) = 6.5bit \end{aligned}$$

Question

Phép thử tung đồng xu và phép thử tung viên xúc xắc, sự kiện của phép thử nào chứa nhiều thông tin hơn?

Question

Một thành phố nọ có 1% dân số là sinh viên. Trong số sinh viên có 50% là nam thanh niên. Số nam thanh niên trong thành phố là 64% dân số. Giả sử ta gặp một nam thanh niên. Hãy tính lượng thông tin chứa trong tin khi biết rằng đó là một nam sinh viên.

Note

Nếu DMS A = {a_1, a_2,…, a_m} là đẳng xác suất

$$\rightarrow p(a_i) = 1/m$$

Lượng tin riêng của mỗi symbol: $I(a_i) = -\log p(a_i) = \log m$

Khi đó lượng tin của dãy gồm n symbol là: $n \log m$

- Question

  Xét một DMS, A= {a_1, a_2, a_3 , a_4 } đẳng xác suất xuất. Thời hạn một symbol là t_x.

  Xác định lượng tin mà nguồn phát ra trong khoảng thời gian 5t_x ?

2.2. Entropy của nguồn rời rạc không nhớ (DMS)

Xét nguồn tin A = {a_1, a_2,…, a_s} với p(a_i), i= 1, ., S;   ∑ p(a_i)= 1.

- **Độ bất định trung bình trong mỗi dấu của nguồn:** là trung bình thống kê (kỳ vọng, expected value) của lượng tin riêng của mỗi dấu

$$I(A) = \sum_{i=1}^{S} p(a_i) I(a_i) = -\sum_{i=1}^{S} p(a_i) \log p(a_i) \equiv H(A)$$

H(A): Entropy của A   (bit/symbol)

- **Note:** $H(A) \equiv H_1(A)$ Entropy tiên nghiệm; Entropy ko điều kiện).

- Tính chất của entropy của nguồn rời rạc A
  - Tính chất 1: $$H_1(A) \geq 0$$

    Dấu "=" chỉ xảy ra khi tồn tại một symbol có xs bằng 1.
  - Tính chất 2: Một nguồn A rời rạc gồm s dấu thì:

$$H_1(A) \leq \log s \equiv H_0(A)$$

Dấu "=" chỉ xảy ra khi các symbol của nguồn đồng xác suất.
Tức entropy đạt max, ký hiệu $H_0(A)$.

Bài tập: Xét nguồn U có 8 symbols

a. Tính lượng tin riêng của mỗi dấu và lượng tin trung bình thống kê của nguồn nếu phân bố của nguồn cho như bảng.

	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
$p(u_i)$	1/4	1/4	1/8	1/8	1/16	1/16	1/16	1/16

b. Lặp lại câu a nếu các dấu là đẳng xác suất 1/8.

❑ Khảo sát entropy của nguồn nhị phân

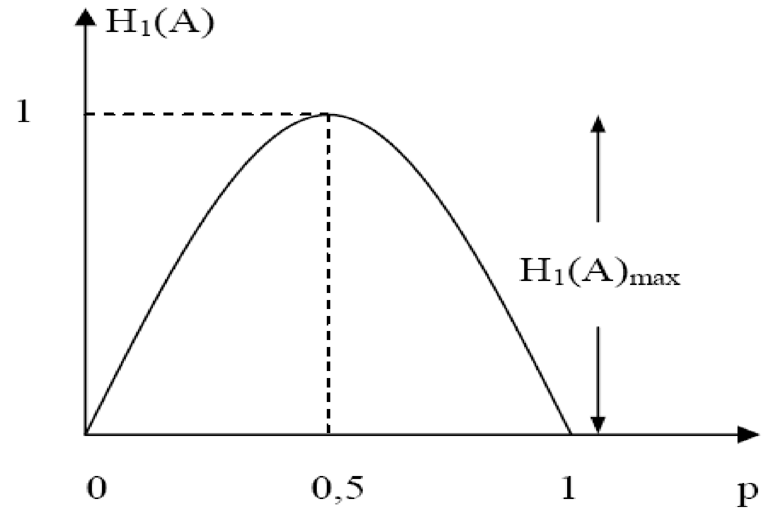
- Nguồn rời rạc nhị phân là nguồn chỉ có hai dấu:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

- Bây giờ hãy khảo sát entropy của nguồn nhị phân này

$$H_1(A) = -\sum_{i=1}^{2} p(a_i)\log p(a_i) = -p\log p - (1-p)\log(1-p) = f(p)$$

- $H_1(A)$ đạt max tại p=1/2. Theo hệ đơn vị bit thì giá trị max này bằng 1.



Bài tập

Một thiết bị điện tử gồm 16 khối có giá trị như nhau về độ tin cậy và được mắc nối tiếp. Giả sử có một khối hỏng. Hãy sử dụng một thiết bị đo tín hiệu ra để xác định khối hỏng. Tính số lần đo trung bình tối thiểu cần thực hiện bằng thiết bị đo này để có thể xác định được khối hỏng. Nêu thuật toán đo? Giả sử khối hỏng là khối thứ 12 hãy chỉ ra các lần đo cần thiết và kết quả đo tương ứng, các phán đoán đưa ra sau mỗi lần đo?

Bài tập:

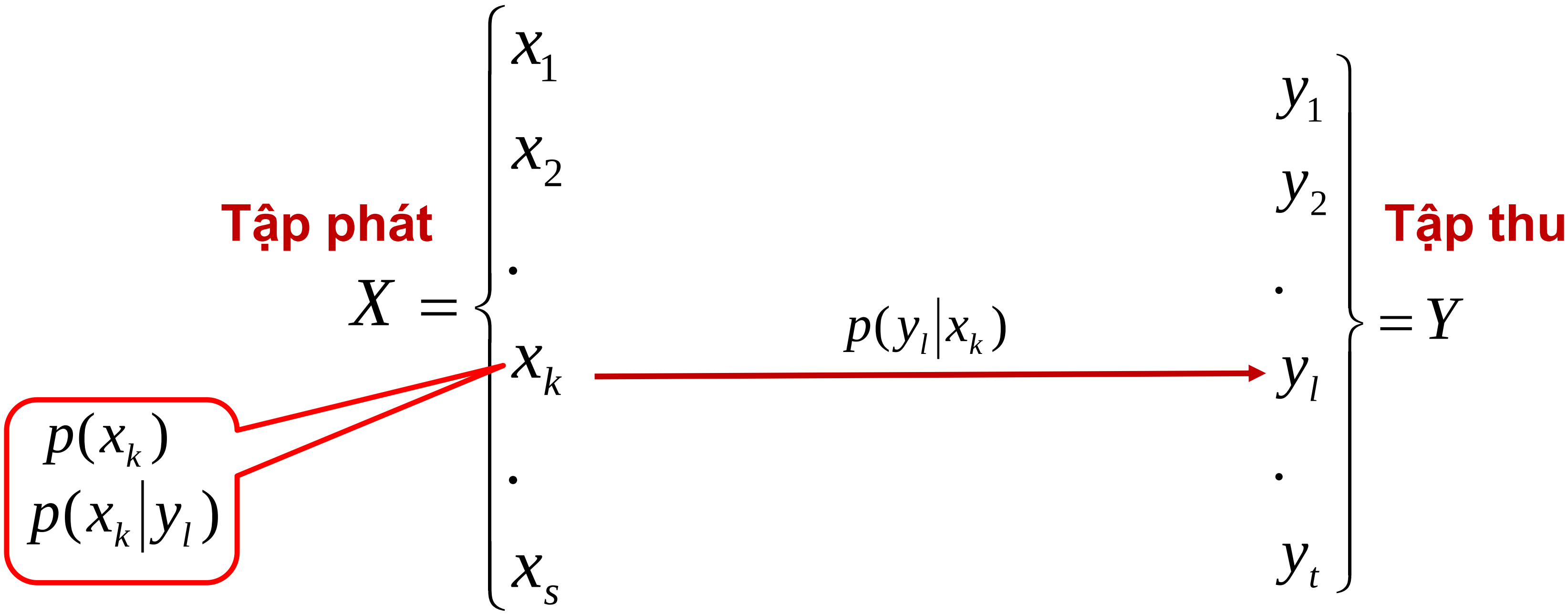
Cho DMS X={x1,x2,x3}

x1	x2	x3
p1	p2	p3

a. Tính H(X) max.
b. Khi nào thì H(X) min?
c. Nếu p3 =a, const, tìm điều kiện để H(x) max. So sánh với H_0?

2.3. Thông tin tương hỗ (Mutual information)

•**Xét mô hình kênh truyền tin (ánh xạ Tập phát X thành tập thu Y)**

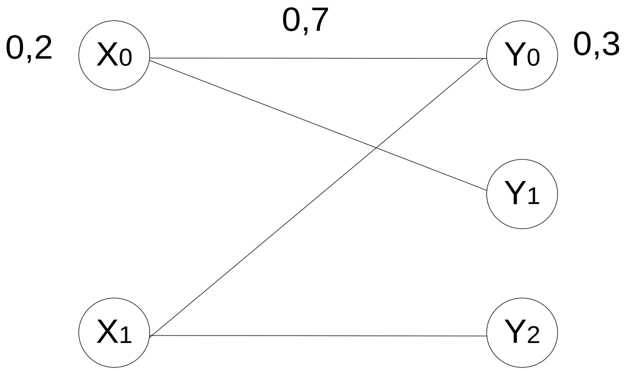


- Do có thể bị nhiễu phá hủy, nên phép ánh xạ X→Y có thể không phải 1:1.
- Khi một dấu x_k được phát đi, bên thu có thể nhận được dấu y_l với xác suất chuyển $p(y_l|x_k)$ phụ thuộc tính chất tạp nhiễu kênh.

Note: Nếu xs tiên nghiệm của x_k $p(x_k)$

thì xs hậu nghiệm của x_k khi thu được y_l $p(x_k|y_l)$

- **Câu hỏi:** **Xét mô hình kênh truyền tin**



Điền các xác suất còn thiếu.

❑ Định nghĩa thông tin tương hỗ

- **Lượng tin tương hỗ** giữa x_k và y_l (***Lượng tin chéo***):

$$I(x_k;y_l)=\log\frac{p(x_k|y_l)}{p(x_k)}$$

- **Tính chất:**

  - $I(x_k;y_l)=I(x_k)-I(x_k|y_l)$

    Lượng tin nhận được= Độ bất định tiên nghiệm – độ bất định hậu nghiệm

  - $-\infty \le I(x_k;y_l) \le I(x_k), I(y_l)$

  - $I(x_k;y_l)=I(y_l;x_k)=\log\frac{p(y_l|x_k)}{p(y_l)}$

❑ Các trường hợp đặc biệt

❑ **X và Y độc lập (kênh vô dụng, kênh đứt):**

•Khi đó việc thu được y_l không mang thông tin gì về các x_k (tức chúng là các biến cố độc lập). Dẫn đến độ bất định hậu nghiệm ko giảm:

$$p(x_k | y_l) = p(x_k) \quad \forall k$$

→Lượng tin truyền qua kênh: $I(x_k;y_l)=0$

❑ Truyền tin không nhiễu (kênh lý tưởng):

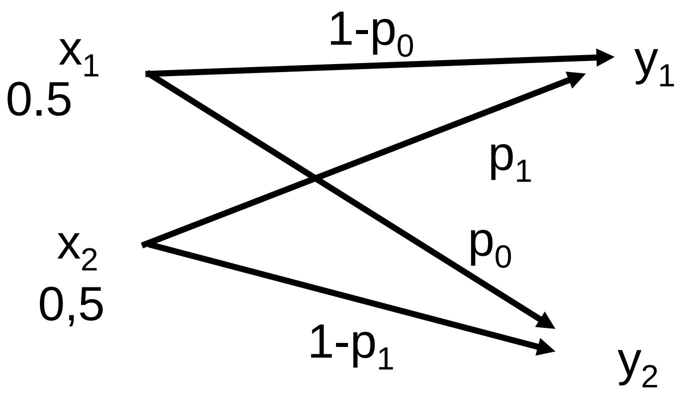
Nếu y_l là phiên bản thu đúng của x_k thì phát x_k chắc chắn nhận được y_l (ánh xạ 1:1): $p(x_k | y_l) = 1$

→ **$I(x_k / y_l)=0$:** lượng thông tin tổn hao trong kênh bằng 0.

- Lượng tin truyền qua kênh max bằng đúng bằng lượng tin riêng tiên nghiệm của x_k (đây gọi là self-information):

$$I(x_k; y_l) = I(x_k; x_k) = I(x_k)$$

Bài tập: Kênh nhị phân DMC, thể hiện ở các xác suất chuyển:



-Tính: $I(x_1;y_1), I(x_2;y_1)$.

-Và biện luận cho các trường hợp cực đoan của kênh.

2.4. Trường biến cố đồng thời
(Trường kết hợp-Joint entropy)

- Trường biến cố đồng thời (A,B) có thể biểu diễn dưới hai dạng:
  - Dạng bảng

	a_1	**a_2**	**....**	**....**	**.....**	**a_s**	**∑XS biên=1**
b_1	$p(a_1,b_1)$	$p(a_2,b_1)$				$p(a_s,b_1)$	
b_2	$p(a_1,b_2)$	$p(a_2,b_2)$				$p(a_s,b_{12})$	
...							
b_t	$p(a_1,b_t)$	$p(a_2,b_t)$				$p(a_s,b_t)$	
∑Xs biên=1							∑∑$p(a_i,b_j)$ =1

  - Dạng trường

$$(A,B)=\begin{pmatrix} a_1,b_1 & a_1,b_2 & ..... & a_i,b_j & .... & a_s,b_t \\ p(a_1,b_1) & p(a_1,b_2) & .... & p(a_i,b_j) & & p(a_s,b_t) \end{pmatrix}$$

❑ Entropie của trường biến cố đồng thời (A,B):

$$H(A,B) \overset{\Delta}{=} E[\log \frac{1}{p(a_i,b_j)}] = -\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} p(a_i,b_j).\log p(a_i,b_j)$$

- **Tính chất:** $H(A,B) \le H(A) + H(B)$

•Trường hợp riêng: Nếu A độc lập với B, thì:

$$p(a_i,b_j) = p(a_i)\,p(b_j) \longrightarrow H(A,B) = H(A) + H(B)$$

•Mở rộng: Nếu n trường độc lập thống kê với nhau thì:

$$H(X_1, X_2, ..., X_n) = \sum_{k=1}^{n} H(X_k)$$

Bài tập: **Cho bảng xs đồng thời của trường (X,Y):**

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	1/8	1/16	1/32	1/32
y_2	1/16	1/8	1/32	1/32
y_3	1/16	1/16	1/16	1/16
y_4	1/4	0	0	0

Mô tả các trường tin (X,Y), X, Y, và tính entropy của từng trường.

2.5. Entropy có điều kiện (conditional entropy)

- Entropie của A khi đã rõ một dấu b_j của B là lượng tin trung bình hậu nghiệm của A khi đã rõ một dấu b_j

$$H(A|b_j) \stackrel{\Delta}{=} E[I(a_i|b_j)]_{a_i \in A} = \sum_{i=1}^{s} p(a_i|b_j) I(a_i|b_j) = -\sum_{i=1}^{s} p(a_i|b_j) \log p(a_i|b_j)$$

(Partial conditional entropy)

- Tương tự:

$$H(B|a_i) = -\sum_{j=1}^{t} p(b_j|a_i) \log p(b_j|a_i)$$

❑ Entropy có điều kiện toàn phần

- **Entropie của trường sự kiện A khi đã rõ trường sự kiện B** được xác định bởi kỳ vọng của các H(A/ b_j) .

$$H(A|B) \overset{\Delta}{=} E[H(A|b_j)]_{b_j \in B} = \sum_{j=1}^{t} p(b_j) H(A|b_j)$$

$$= -\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} p(a_i, b_j) \log p(a_i|b_j) = -\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} p(b_j) p(a_i|b_j) \log p(a_i|b_j)$$

- Ý nghĩa:
  - H(A/B) là lượng thông tin tổn hao trung bình của mỗi dấu ở đầu phát khi đầu thu đã thu được một dấu bất kỳ (Hay lượng tin chưa biết về A khi nhận được B) do nhiễu phá hủy.

❑ Entropy có điều kiện toàn phần (cont)

- Tương tự:

$$H(B|A) \stackrel{\Delta}{=} E[H(B|a_i)]_{a_i \in A} = \sum_{i=1}^{s} p(a_i) H(B|a_i)$$

$$= -\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} p(b_j, a_i) \log p(b_j|a_i) = -\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} p(a_i) p(b_j|a_i) \log p(b_j|a_i)$$

Ý nghĩa: H(B/A) là lượng thông tin riêng trung bình chứa trong mỗi dấu ở đầu thu khi đầu phát đã phát đi một dấu bất kỳ (Lượng tin chưa biết về B khi A đã phát đi).

- Chú ý: H(A/B) ≠ H(B/A)

❑ Mối quan hệ của các Entropy

- Tính chất 1: Chain rule (luật xâu chuỗi)

$$H(B,A) = H(A,B) = H(A) + H(B/A) = H(B) + H(A/B)$$

- Tính chất 2:

$$0 \le H(A|B) \le H(A)$$

$$0 \le H(B|A) \le H(B)$$

  - H(A/B)=0, H(B/A)=0: khi A và B là đồng nhất (kênh hoàn hảo, không nhiễu).
  - H(A/B) = H(A), H(B/A) = H(B): khi A và B là độc lập (kênh bị đứt).

- Tính chất 3: Cho DMS X={x_k}, k=1,N. Một hàm toán học f(X) mô tả mối quan hệ xác định của f và X. Khi đó:

$$H(f(X)|X) = 0$$

$$H(X|f(X)) \ge 0; \qquad H(X) \ge H(f(X))$$

•Dấu "=" xảy ra chỉ khi f(X) là quan hệ ánh xạ 1-1 (thí dụ trường hợp noiseless channel)

❑ Kênh bị đứt-Useless channel (bị nhiễu tuyệt đối)

Bị nhiễu tuyệt đối nên trong mọi tin $b_j \in B$ không chứa dấu hiệu hiểu biết nào về các tin đã phát đi. Như vậy, A và B là độc lập nhau:

$$H(A/b_j) = -\sum_{i=1}^{s} p(a_i)\log p(a_i) = H(A)$$

$$H(B/a_i) = -\sum_{j=1}^{t} p(b_j)\log p(b_j) = H(B)$$

$$\Rightarrow$$

$$H(A/B) = -\sum_{j=1}^{t} p(b_j)\sum_{i=1}^{s} p(a_i)\log p(a_i) = H(A)$$

$$H(B/A) = -\sum_{i=1}^{s} p(a_i)\sum_{j=1}^{t} p(b_j)\log p(b_j) = H(B)$$

❑ Kênh hoàn hảo –Noiseless channel (không có nhiễu)

Trong trường hợp này, mỗi tin thu được hoàn toàn trùng với tin phát đi, và B trùng với A.

$$H(A) = H(B)$$

$$H(A/b_k) = 0$$

$$H(A/B) = 0$$

$$H(B/a_k) = 0$$

$$H(B/A) = 0$$

2.6. Lượng thông tin tương hỗ trung bình

- Lượng tin tương hỗ trung bình về tập phát A do tập thu B mang lại.

$$I(A;B) \overset{\Delta}{=} E\left[I(a_i;b_j)\right] = \sum_{a_i \in A}\sum_{b_j \in B} p(a_i,b_j)\log\frac{p(a_i|b_j)}{p(a_i)}$$

- **Ý nghĩa:**
  - I(A;B): Đo lượng tin thu được về một biến ngẫu nhiên A thông qua giá trị của một biến ngẫu nhiên B.
  - Nó là lượng thông tin trung bình được truyền qua kênh có nhiễu (lượng tin không bị nhiễu phá hủy)

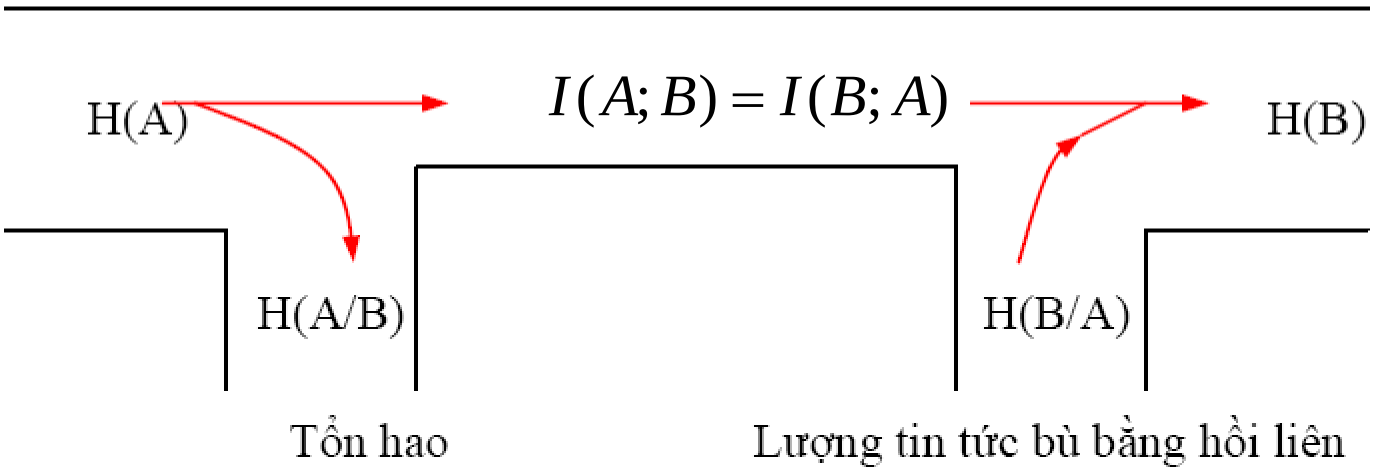
❑ Tính chất của I(A;B)

- Tính chất 1: $I(A;B) \geq 0$ I(A;B) = 0 khi A độc lập với B, kênh bị đứt.
- Tính chất 2: $I(A;A) = H(A)$
- Tính chất 3: $I(A;B) = I(B;A)$
- Tính chất 4: $I(A;B) \leq H(A) \rightarrow$ I(A;B) = H(A)=H(B) khi kênh không nhiễu.
- Tính chất 5:

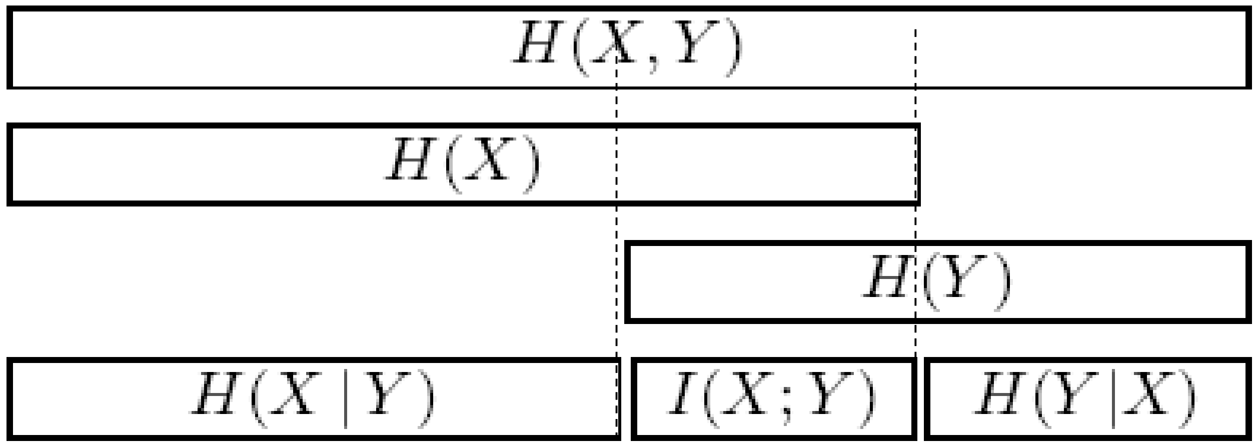
$$I(A;B) = H(A) - H(A|B) = H(B) - H(B|A) = H(A) + H(B) - H(A,B)$$

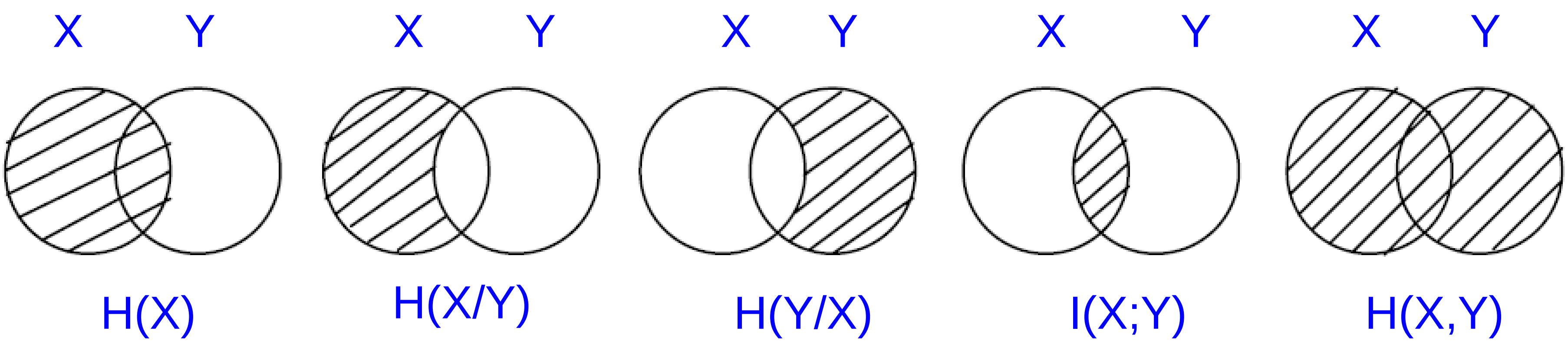
$$\Rightarrow H(A,B) = H(B) + H(A|B) = H(A) + H(B|A)$$

❑Mô hình kênh



❑ Lược đồ Venn





$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

Bài tập Cho các nguồn X và Y với $p(x_i,y_j)$ như bảng:

	x_1	x_2	x_3
y_1	1/3	2/9	1/9
y_2	1/12	0	1/4

- Tính H(X), H(Y), H(X,Y)
- Tính H(X/Y), H(Y/X) và I(X;Y)

Bài tập: Một nguồn nhị phân độc lập với phân bố xác suất nguồn là 0,25 và 0,75 được truyền trên kênh nhị phân đối xứng với xác suất chuyển sai p = 0,01. Tính các đại lượng H(X), H(X,Y), H(X/Y) , H(Y/X) và I(X;Y).

Các tham số đặc trưng cho Nguồn và kênh rời rạc

dinhptit@gmail.com

2.7. Tham số của nguồn rời rạc

•**Tốc độ baud của nguồn rời rạc (tốc độ truyền tín hiệu):** số symbol nguồn phát ra trong một đơn vị thời gian. (Một symbol có thể là biểu diễn của mức biên độ, tần số hoặc pha… của tín hiệu).

$$\upsilon_n \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{T_n} \qquad \text{[Baud]}$$

T_n : Thời hạn trung bình của mỗi dấu của nguồn phát.

•**Tốc độ bit /Khả năng phát của nguồn rời rạc (tốc độ truyền thông tin):** Là lượng tin trung bình do nguồn phát ra trong một đơn vị thời gian.

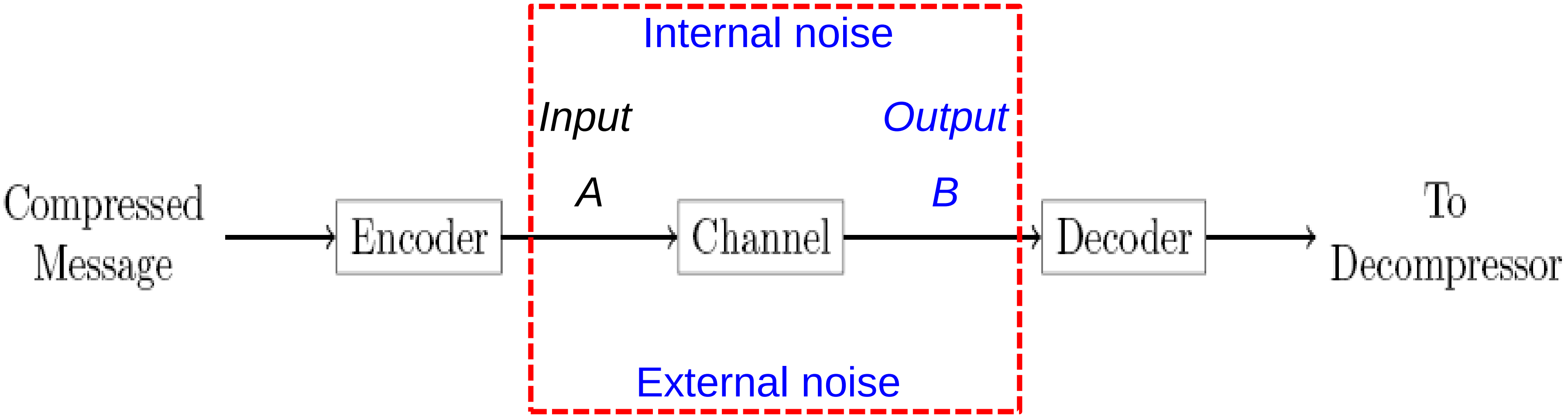
$$R_n \stackrel{\Delta}{=} \upsilon_n H(A) = \frac{H(A)}{T_n} \qquad \text{[bps]}$$

R_n đạt max khi H(A) max =H_0(A) = logS

- Độ thừa (*redundancy*) của nguồn rời rạc: $D = 1 - \mu$

$$\mu = \frac{H(A)}{H_0(A)} \qquad \text{he so nen tin}$$

2.8 Kênh rời rạc & các tham số đặc trưng



- Kênh rời rạc (Discrete channels):
  - Là một mô hình kênh lối vào A và lối ra B (is a noisy version of A).
  - A, B là các biến ngẫu nhiên rời rạc.
  - Tập các symbols (alphabets) của A, B có kích thước hữu hạn, và không nhất thiết cùng size.

- Các tham số đặc trưng của kênh rời rạc
  - Tập các xác suất chuyển: $p(b_j / a_i)$
  - Khả năng thông qua của kênh **C**' (hoặc dung lượng kênh **C**).
- Biểu diễn kênh rời rạc
  - Giản đồ kênh
  - Hoặc ma trận chuyển:

$$P = [p(b_j|a_i)] = \begin{bmatrix} p(b_1|a_1) & . & . & . & p(b_t|a_1) \\ . & . & . & . & . \\ p(b_1|a_s) & . & . & . & p(b_t|a_s) \end{bmatrix}$$

❑ Phân loại kênh rời rạc

- Nếu một kênh có $p(b_J/a_i) \notin t$ ($\forall i, j$): gọi là kênh đồng nhất (hay bất biến); Ngược lại kênh không đồng nhất;
- Nếu một kênh có $p(b_J/a_i) \notin$ vào dấu đã phát trước nó: gọi là kênh không nhớ (Discrete memoryless channels); ngược lại kênh có nhớ (Discrete channels with memory)

❑ Tốc độ bit của kênh

•**Định nghĩa:** Tốc độ bit của kênh là lượng thông tin trung bình truyền qua kênh trong một đơn vị thời gian:

$$R_k = v_k I(A;B) \quad \text{[bps]}$$

υ_K : Tốc độ baud của kênh (dấu/s). Biểu thị số dấu được truyền qua kênh trong một đơn vị thời gian.

$$\upsilon_K = \frac{1}{T_K}$$

T_K : thời gian trung bình để truyền một dấu qua kênh

Nếu kênh giãn tin: $T_K > T_n$

Nếu kênh nén tin: $T_K < T_n$

Thông thường: $T_K = T_n$

❑ Khả năng thông qua của kênh rời rạc

- **Khả năng thông qua của kênh rời rạc:** là giá trị cực đại của R_k (ứng với một phân bố tối ưu của các xác suất tiên nghiệm $p(a_i)$, $\forall a_i \in A$).

$$C' = \max_{A} R_k = \upsilon_k \max_{A} I(A;B) = \upsilon_k C \qquad [\text{bit/s}]$$

Với: $$C = \max_{A} I(A;B) \qquad [\text{bit/symbol}]$$

C: **Dung lượng kênh : Channel capacity** (khả năng thông qua của kênh với mỗi dấu).

→C' đánh giá năng lực tải tin tối đa của một kênh.

- **Tính chất:**

$$0 \le C \le \log S$$

C = 0 khi A và B đoc lap (kênh đut, Useless channel)

- **Độ thừa của kênh :** $D_k = 1 - \eta_k$

$$\eta_k = \frac{R_k}{C'} \quad \text{Hiêu suat su dung kênh}$$

  - → Hiệu suất sử dụng kênh phụ thuộc tính chất thống kê của nguồn.
  - Thông thường độ thừa của kênh được lợi dụng để xây dựng mã chống nhiễu kênh.

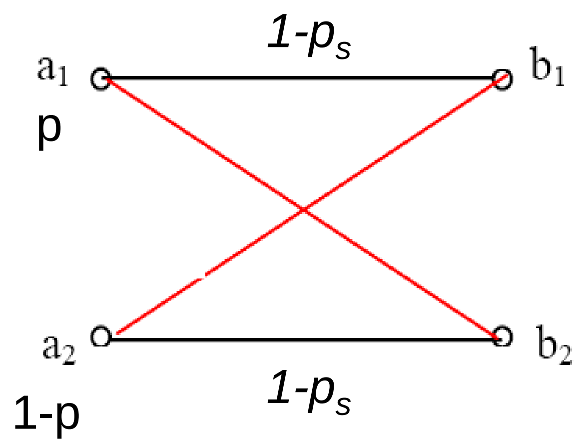
- **Định lý mã hóa thứ hai của Shannon đối với kênh rời rạc :**

  •Nếu khả năng phát R_n của nguồn bé hơn khả năng thông qua của kênh: (R_n < C') thì tồn tại một phép mã hoá và giải mã sao cho việc truyền tin có xác suất lỗi bé tuỳ ý khi độ dài từ mã đủ lớn. Nếu R_n > C' thì không tồn tại phép mã hoá và giải mã như vậy.

  Nhận xét: *Định lý chỉ ra sự tồn tại, không chỉ ra cách thiết lập mã cụ thể nào.*

• Thí dụ: Kênh BSC, không nhớ, đồng nhất:

Tính C’ của kênh?



Kí hiệu phân bố nguồn phát: p, 1-p

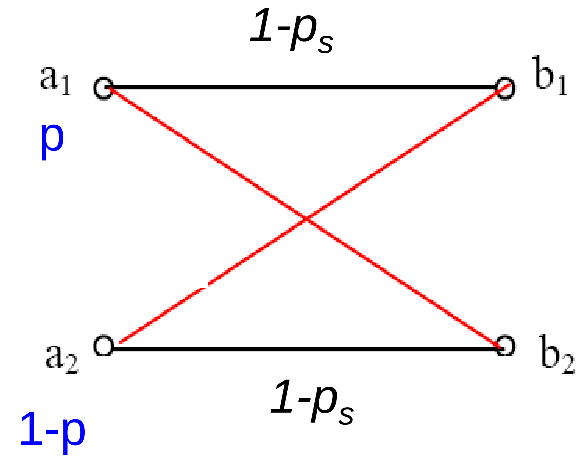
$$C' = \max_A R_k = \upsilon_k \max_A I(A;B) = \upsilon_k \max_p [H(B) - H(B/A)]$$

$$\mathrm{H(B/A)} = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(a_i)p(b_j/a_i)\log p(b_j/a_i)$$
$$= -\left[p_s \log p_s + (1-p_s)\log(1-p_s)\right]$$

H(B/A) không phụ thuộc vào xác suất tiên nghiệm của các dấu thuộc A.

Do đó: $C' = \dfrac{1}{T_K}\max_A \mathrm{H(B)} - \dfrac{1}{T_K}\mathrm{H(B/A)}$

- Để xét H(B), Trước hết tính phân bố của B.



Khi p=0.5 thì p(b1)=p(b2)

→ H(B) sẽ đạt max (=log t =1)

$$\text{Vậy: } C' = \frac{1}{T_K}\left[1 + p_s \log p_s + (1-p_s)\log(1-p_s)\right]$$

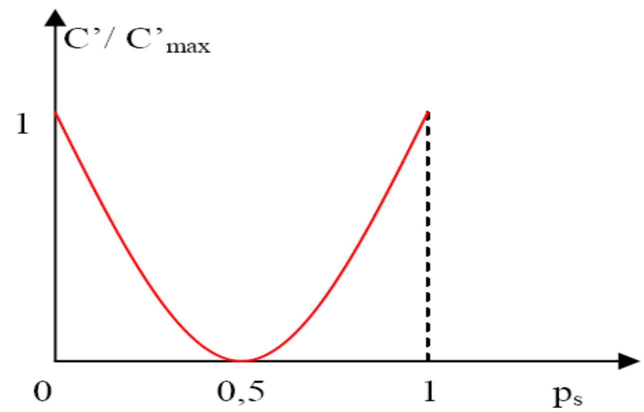
Chú ý rằng:

Khi p_s=0.5 → C'=0 : Kênh vô dụng, kênh đứt.

Khi p_s=0 (hoặc 1) →C'=max=1/T_K: Kênh ko có nhiễu.

Đồ thị quan hệ:

$$\frac{C'}{C'_{max}} = 1 + p_s \log p_s + (1-p_s)\log(1-p_s)$$



❑ Một số loại kênh rời rạc đặc biệt

- **Kênh đối xứng (Symmetric channel):**
  - Một kênh là đối xứng nếu các hàng của ma trận chuyển p(y|x) là hoán vị của nhau và các cột cũng là hoán vị của nhau (Các hàng chứa cùng một tập giá trị; Các cột cũng chứa cùng một tập giá trị)
  - Trong trường hợp chỉ các hàng là hoán vị của nhau còn các cột có tổng bằng nhau thì kênh gọi là đối xứng yếu.
  - Dung lượng kênh đối xứng (kể cả đối xứng yếu):

$$C = \log t - H(r)$$

- Lossless channel (Kênh không tổn hao):
  - Đầu ra xác định duy nhất một đầu vào.
  - The lossless channel is described by a channel matrix. It is described with only one non-zero element in each column.
  - During transmission, no source information is lost.
  - $H(X|Y)=0$
  - $C = \max H(X) = \log S$

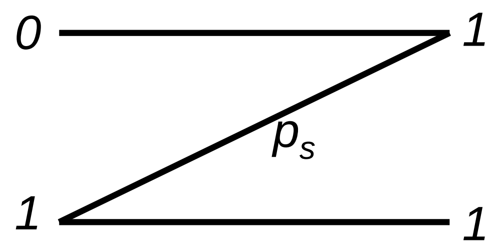
- Deterministic channel (Kênh đơn định):
  - Đầu vào xác định duy nhất một đầu ra.
  - $H(Y|X)=0$
  - $C = \max H(Y) = \log t$

- **Noiseless channel: Kênh không nhiễu (Kênh hoàn hảo)**
  - Lossless channel + Deterministic channel
  - $X \equiv Y$
  - $H(X|Y)=0$
  - $H(Y|X)=0$
  - C =max H(X)=max H(Y) =logs =logt

- **Useless channel: Kênh vô dụng (kênh đứt)**
  - X, Y độc lập nhau, nên kiến thức về đầu này không làm giảm độ bất định của đầu kia:
  - $H(X|Y)=H(X)$
  - $H(Y|X)=H(Y)$
  - $I(X;Y)=0$, $C=0$
  - Do $p(y_j|x_i)=p(y_j)\quad \forall i,j \Rightarrow$ các hàng của P giống hệt nhau.

Bài tập :

Biện luận C của kênh theo p_s?



Nguồn & kênh liên tục không nhớ

dinhptit@gmail.com

2.9 Nguồn liên tục

- **Nguồn liên tục:**

  Lực lượng của nguồn là vô hạn

- **Mô hình nguồn liên tục S:**

  •Nguồn liên tục S là môt biến ngẫu nhiên, phát ra những tin s có thể nhận các giá trị liên tục trong khoảng $s_{min} \div s_{max}$ với hàm mật độ phân bố xác suất *probability density function* $W_1(s)$.

❑ Entropy của nguồn liên tục

- Vì các symbol của S là vô hạn nên:

$$H(S) = \infty$$

- **Đ/nghĩa Entropie vi phân** (*differential entropy*) của nguồn S:

$$h(S) \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(s) \log \frac{1}{W_1(s)} ds$$

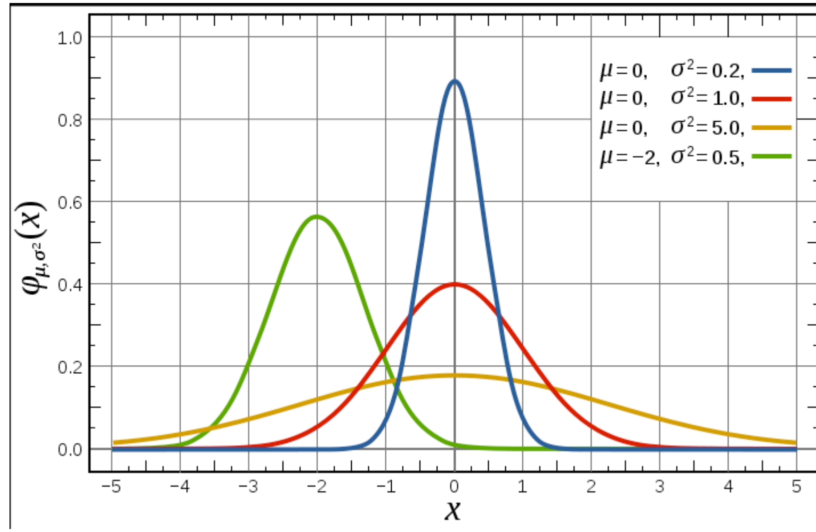
•**Chú ý:**

- ✓ h(S) có thể nhận các giá trị dương, âm (hữu hạn).
- ✓ h(S) còn gọi là entropy tương đối

❑ Entropy của nguồn ngẫu nhiên X có phân bố chuẩn

$$X \approx N(\mu, \sigma^2)$$

Xét nguồn ngẫu nhiên X={x(t)}, có phân bố chuẩn (Gaussian distribution), tức có hàm mật độ phân bố xác suất:



$$W_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$\mu = E(X)$ kỳ vọng của X.

$E(X^2) = \sigma^2$ phương sai của X (Công suất của X)

→Entropie vi phân của X:

$$h(X) = \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2 = \log\sqrt{2\pi e\sigma^2} \quad \text{bit}$$

- **Định lý:**

Let X be a random variable with mean μ and variance σ^2.

$$\rightarrow h(X) \leq \log\sqrt{2\pi e\sigma^2}$$

"=" only when X has a gaussian distribution

Nghĩa là:

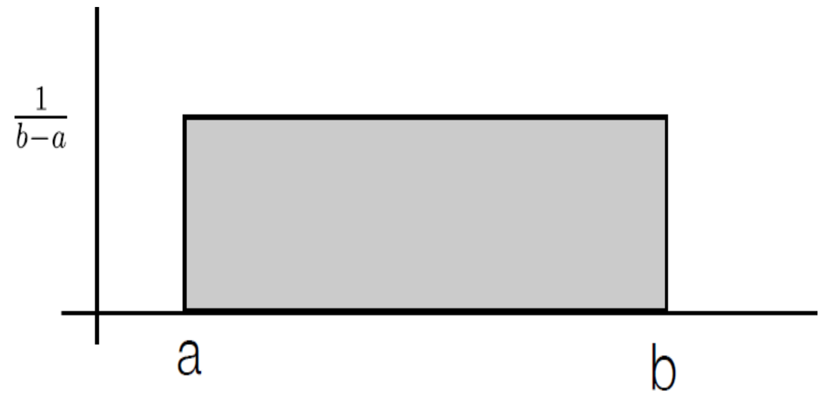
Trong số những đại lượng ngẫu nhiên X có cùng công suất trung bình (σ^2) và trung bình thống kê (μ) , đại lượng có phân bố chuẩn sẽ cho entropie vi phân lớn nhất.

•Ý nghĩa: Trong số nhiễu & tạp âm có cùng phương sai thì tạp phân bố chuẩn có tác hại lớn nhất đối với việc truyền tin (vì entropie đặc trưng cho độ bất định, mà entropie của tạp chuẩn max nên độ bất định của nó lớn nhất). Đó là lý do vì sao trong các bài toán của vô tuyến điện thống kê người ta thường xét tạp chuẩn.

❑ Entropy của nguồn ngẫu nhiên có phân bố đều

- Uniform distribution: $X \sim U(a, b)$

$$W(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{for } x \in (a,b) \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$



$$h(X) = -\int_a^b \frac{1}{b-a} \log \frac{1}{b-a} dx = \log(b-a)$$

– Note that $h(X) < 0$ if $(b-a) < 1$

- **Định lý:**

Xét X trong một khoảng hữu hạn (a,b), với:

$$\int_a^b W_1(x)dx = 1$$

Thì: $h(X) \leq \log(b-a)$

"=" chỉ xảy ra khi X có phân bố đều.

Nghĩa là:

- Trong số các phân bố của X trong một khoảng hữu hạn (a,b), với:

$$\int_a^b W_1(x)dx = 1$$

Đại lượng ngẫu nhiên phân bố đều có entropie lớn nhất.

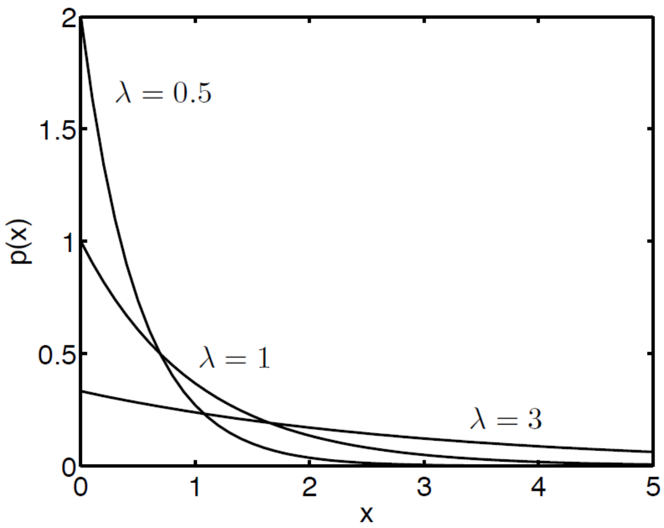
❑ Entropy của nguồn ngẫu nhiên X có phân bố quy luật hàm mũ

- For the exponential distribution:

$$W(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

the differential entropy for this exponential distribution:

$$h(X) = \log\frac{e}{\lambda}$$



- **Định lý:**

Trong số tất cả các đại lượng ngẫu nhiên X liên tục dương có cùng kỳ vọng m:

$$\int_0^\infty W_1(x)dx = 1 \quad \text{và} \quad \int_0^\infty x\,W_1(x)dx = m$$

Đại lượng ngẫu nhiên phân bố luật hàm mũ có entropy lớn nhất.

❑ Entropy vi phân của trường sự kiện liên tục đồng thời

- Entropy vi phân của trường biến cố liên tục đồng thời của S và U.

$$h(S,U) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(s,u)\log[W(s,u)]dsdu$$

Về mặt hình thức, so với nguồn rời rạc, h(S,U) đóng vai trò của H(A,B)

- Tính chất:

$$h(U,S) = h(S,U) = h(S) + h(U|S) = h(U) + h(S|U)$$

$h(U|S) \le h(U);\quad \mathrm{h(S|U)} \le h(S)$ Dấu = khi S , U độc lập.

❑ Entropy vi phân có điều kiện của nguồn liên tục

- Entropie vi phân có điều kiện của nguồn S khi đã biết nguồn U.

$$h(S|U) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(s,u)\log[W(s|u)]dsdu$$

Về mặt hình thức, so với nguồn rời rạc, h(S/U) đóng vai trò của H(A/B).

❑ Lượng tin tương hỗ giữa các nguồn liên tục

- Lượng tin tương hỗ giữa các nguồn liên tục S và U:

$$I(S;U)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(s,u)\log[\frac{W(s,u)}{W(s)W(u)}]dsdu$$

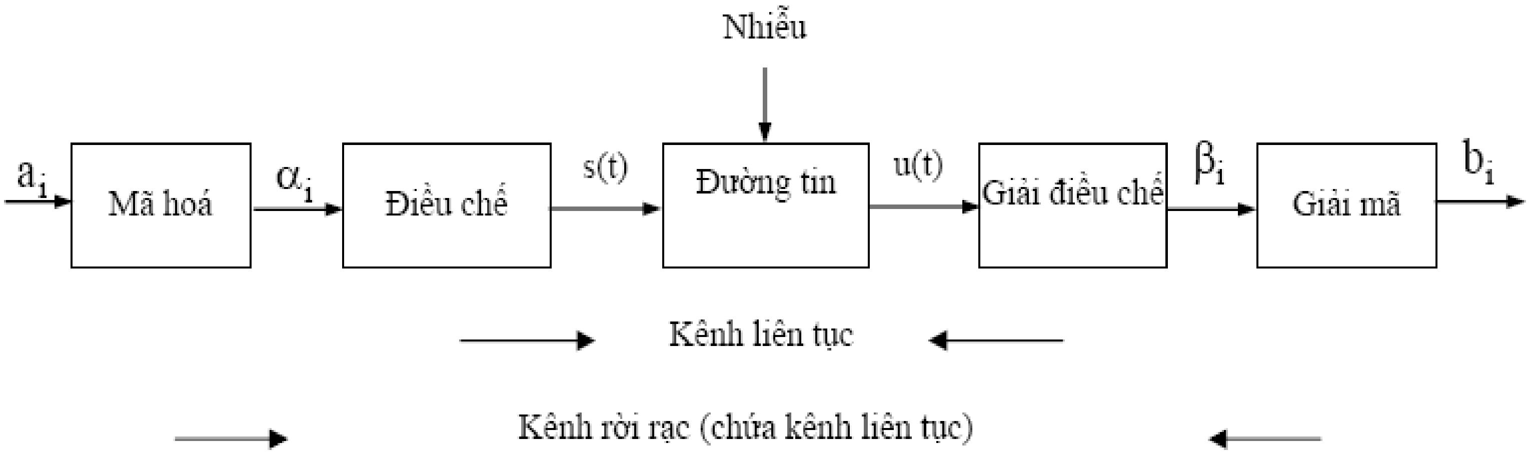
- Một số tính chất

$$I(S;U)=I(U;S)=h(U)-h(U|S)=h(S)-h(S|U)$$

$I(S;U)\geq 0$ Dấu = là khi S độc lập với U

Nếu kênh không nhiễu thì I(S;U)→vô cùng.

2.10 Kênh liên tục



- **Các đặc trưng của kênh liên tục:**
  - •Trường dấu lối vào (sau bộ điều chế): S= {s(t), w_1(s)}
  - •Trường dấu lối ra (trước bộ giải điều chế): U= {u(t), w_1(u)}
  - •Hàm mật độ phân bố để xuất hiện U_j(t) khi đã phát s_i(t): $W\left(U_j(t)/s_i(t)\right)$
  - •Khả năng thông qua của kênh.

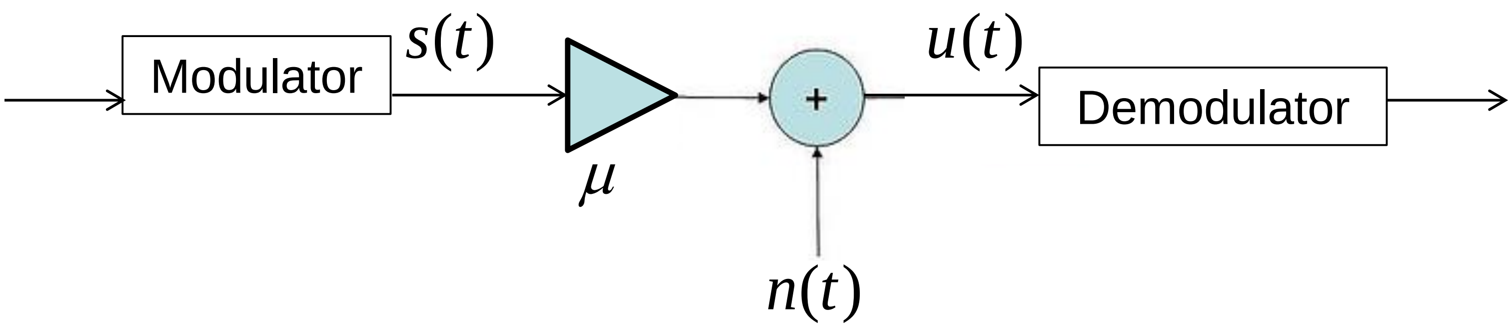
- **Tính chất kênh liên tục trong kênh rời rạc:**
  - •Khả năng thông qua của kênh liên tục không nhỏ hơn khả năng thông qua của kênh rời rạc chứa nó:

$$C'_{lt} \geq C'_{rr\ \text{chua kênh liên tuc}}$$

❑ Kênh AWGN không nhớ

- **Mô hình Kênh AWGN không đổi:**
  - Là một kênh liên tục có tập tin lối vào và tập tin lối ra không nhớ, liên hệ với nhau theo công thức:

$$u(t) = \mu.s(t) + n(t)$$ **μ** = const, (∉ t).



AWGN Channel

n(t) *AWGN- Additive white Gaussian Noise: nhiễu cộng, mật độ phổ công suất không đổi rộng vô hạn (tạp âm trắng), biên độ ngẫu nhiên có phân bố chuẩn.*

- N độc lập với S nên:

$$P_u = \mu^2 P_s + P_n$$

❑ Kênh AWGN không nhớ (tt)

- SNR là tỷ số tín trên tạp nhiễu ở đầu ra của kênh liên tục (đầu vào bộ giải điều chế).

$$SNR = \frac{\mu^2 \sigma_s^2}{\sigma_n^2} = \frac{\mu^2 P_s}{P_n} \equiv \frac{P_{\mu s}}{P_n}$$

- Lượng tin tương hỗ qua kênh AWGN:

$$I(S;U) = h(U) - h(U|S) \le \frac{1}{2}\log 2\pi e P_u - \frac{1}{2}\log 2\pi e P_n$$

$$\Leftrightarrow I(S;U) \le \frac{1}{2}\log(1 + SNR)$$

➢ I(S;U) đạt max khi S có phân bố chuẩn.

❑ Khả năng thông qua của kênh AWGN

Là giá trị cực đại của lượng tin truyền qua kênh AWGN trong một đơn vị thời gian, lấy theo mọi khả năng có thể có của phân bố xác suất nguồn phát, trong đó có tính đến giới hạn công suất phát và công suất tạp nhiễu.

$$C' = \upsilon_k . \max I(U;S)$$

υ_k Tốc độ truyền tin của kênh

- Dung lượng kênh AWGN:

$$C = \max I(U;S)$$

❑ Khả năng thông qua của kênh AWGN (tt)

- Nếu tín hiệu là hàm liên tục theo thời gian liên tục, khả năng thông qua của kênh AWGN với băng tần hữu hạn F và giới hạn công suất trung bình tín hiệu hữu ich nhận được $P_{\mu s}$, có nhiễu với mật độ phổ công suất hai phía $N_0/2$ được xác định bởi:

$$C' = F\log\left(1+\frac{\mu^2 P_s}{N_0 F}\right) = \mathrm{F.log}(1+\mathrm{SNR}) \quad \mathrm{bps}$$

(công thức Shannon)

•**F**: BW của kênh

•**P_n:** là công suất trung bình của nhiễu trong giải F.

•**$P_n = N_0.F$:** với trường hợp nhiễu tạp âm trắng.

•N_0 Mật độ phổ công suất của nhiễu cộng.

❑ Khả năng thông qua của kênh AWGN (tt)

- **Nếu F → ∞ , tức là khi giải thông của kênh là vô hạn:**

$$C'_{\infty} = \lim_{F \to \infty} C' = (\log_2 e)\left(\frac{\mu^2 P_s}{N_0}\right) = 1{,}443.\frac{\mathrm{P}_{\mu s}}{\mathrm{N}_0} \quad \text{bps}$$

- **Định lý mã hoá thứ hai của Shannon đối với kênh liên tục**

Các nguồn tin rời rạc có thể mã hoá và truyền theo kênh liên tục với xác suất sai bé tuỳ ý khi giải mã các tín hiệu nhận được nếu khả năng phát R_n của nguồn nhỏ hơn khả năng thông qua của kênh.

Ngược lại, không thể thực hiện được mã hoá và giải mã với xác suất sai bé tuỳ ý được.

Bài tập

- Tính độ rộng giải thông BW tối thiểu của 1 kênh vô tuyến truyền hình truyền hình ảnh đen trắng với 5.10^5 điểm ảnh (pixel)/ảnh ; 25 ảnh/s và có 8 mức sáng đồng xác suất. Biết tỉ số tín/tạp nhiễu của kênh là SNR=15.

  Giả thiết kênh truyền hình là kênh AWGN

- Tín hiệu thoại có băng tần B=3,4kHz.

  a. Tính khả năng thông qua của kênh với điều kiện SNR=30dB

  b. Tính SNR tối thiểu cần thiết để kênh có thể truyền tín hiệu thoại số có tốc độ 4800bps.

Tài liệu tham khảo

- David J. C. Mackay, **Information Theory, Inference,and Learning Algorithms**, Cambridge University Press, 2003
- McEliece R.J., **The theory of Information and coding**, Cambridge University Press, 1985
- Jiri Adamek, **Foundations of Coding**, John Wiley & Sons Inc., 1991.
- John Proakis & Masoud Salehi, **Digital Communication,** 2007