ptit.edu.vn

Lý thuyết thông tin

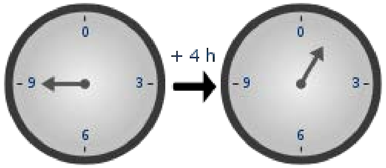
Phần 3: Cơ sở lý thuyết mã hóa

Bài 8 (Bài đọc bổ trợ)

Các cấu trúc đại số

Nguyễn Quốc Dinh

dinhptit@gmail.com



Modular arithmetic

- modular arithmetic is a system of arithmetic for integers
- For a positive integer *n*, two integers *a* and *b* are said to be *congruent modulo n*, and written as

$$a \equiv b \pmod{n},$$

if their difference *a* − *b* is an integer multiple of *n* (or *a* − *b* = *kn*).

- Let a and n > 0 be integers. The set of all integers which have the same remainder as **a** when divided by **n** is called the *congruence class* of **a** modulo **n**, and is denoted by $[a]_n$, where

$[a]_n = \{ x \text{ in } \mathbf{Z} \mid x \equiv a \pmod{n} \}$. → $x = a + k.n$; $0 \le /a/ \le n-1$

- The set of *congruence classes* modulo **n** is $Z_n = \{[0],[1],\ldots, [n-1]\}$
- Let n be a positive integer, and let a,b be any integers. Then the addition and multiplication of congruence classes given below are well-defined :

$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$; $[a]_n[b]_n = [ab]_n$.

Modular arithmetic (cont)

Example: The modulo-5 addition and multiplication given by Tables:

Table 1 . Modulo-5 addition

⊞	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Table 2 . Modulo-5 multiplication

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

- *Chú ý: Bảng cộng và nhân modulo 5 cũng có thể áp dụng cho phép trừ và phép chia:*

$$2 - 4 = 2 + (-4) = 2 + 1 = 3.$$

(-4) là phần tử đối của 4 trong phép cộng mod 5

$$3 \div 2 = 3 \,.\, (2^{-1}) = 3 \,.\, 3 = 4.$$

(2^{-1}) là phần tử ngược của 2 trong phép nhân mod 5

dinhptit@gmail.com

Nhóm

Nhóm (Groups): $\langle G, * \rangle$

Nhóm G là một tập hợp các phần tử với một phép tính trong 2 ngôi thỏa mãn đồng thời các tính chất sau:

- $a, b \in G \Rightarrow a * b = c \in G$ (tính đóng kín)
- $(a * b) * c = a * (b * c)$ (luật kết hợp)
- Tồn tại phần tử đơn vị e: $a * e = e * a = a$
- Tồn tại phần tử ngược a^{-1}: $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Chú ý:

Nhóm cộng: phần tử trung hòa kí hiệu 0, phần tử ngược của a ký hiệu –a

Nhóm nhân: phần tử trung hòa kí hiệu 1, phần tử ngược của a ký hiệu a^{-1}

$$\Rightarrow \text{Nhom cong}: \quad a + (-a) = e = 0$$

$$\Rightarrow \text{Nhóm nhân}: \quad a.(a^{-1}) = e = 1$$

Nhóm giao hoán

Nếu $a * b = b * a$ thì nhóm được gọi là nhóm giao hoán.

Nhóm(cont)

Ví du 1:

- Tập các số nguyên Z với phép toán cộng (+) tạo nên một nhóm giao hoán với phần tử đơn vị là 0.
- Nhóm <R,+> có phần tử trung hòa là 0.
- Nhóm <R loại trừ 0, •> có phần tử trung hòa là 1.
- Z_n là nhóm cộng theo modulo n, nhưng không phải nhóm nhân

Khái niệm Z_n^* $$Z_n^* = \{a \in Z_n \mid (a, n) = 1\}$$ (a,b), gcd(a,b): USCLN

- Chú ý: Nếu n là số nguyên tố thì: 1≤a≤n-1

$$exam: \; Z_{11}^* = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

Cấp của nhóm $|G|$ (hoặc deg G)

- Còn gọi là lực lượng của nhóm, là số các phần tử trong nhóm.
- Nếu $|G|$ là hữu hạn thì ta có nhóm hữu hạn cấp $|G|$.

Thí dụ: Xét nhóm nhân của z_{11}: $Z_{11}^* = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

Đây là nhóm cấp 10 vì $|Z_n^*| = 10$.

Nhóm con

- Nếu $H \in G$ và $\langle H, * \rangle$ tạo nên một nhóm thì H là nhóm con của G.
- Cấp của H là ước của cấp của G.

Nhóm(cont)

Nhóm xyclic

Xét nhóm hữu hạn $\langle G, \bullet \rangle$. Nếu tồn tại phần tử $\alpha \in G$ sao cho với mỗi $b \in G$

đều có thể biểu diễn được dưới dạng $b = \alpha^i$ (i: nguyên)

Như vậy G có thể mô tả như sau:

$$G = \{\alpha^i, \forall i\}$$

thì G được gọi là nhóm xyclic sinh bởi α. α được gọi là *phần tử sinh* (hay phần tử nguyên thủy) của nhóm.

Ví dụ:

Xét nhóm nhân của z_{11}: $Z_{11}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Đây là nhóm Cyclic với $\alpha = 2$.

Ta có: $2^0 = 1$ $\quad$ $2^5 = 10$

$2^1 = 2$ $\quad$ $2^6 = 9$

$2^2 = 4$ $\quad$ $2^7 = 7$

$2^3 = 8$ $\quad$ $2^8 = 3$

$2^4 = 5$ $\quad$ $2^9 = 6$

Ta có thể viết $Z_{11}^* = \{2^i \bmod 11\}$.

Vành

Vành (Rounds): $\langle R,+,\bullet\rangle$

Vành R là một tập hợp các phần tử với hai phép toán trong hai ngôi (Phép cộng, phép nhân) thỏa mãn các tính chất sau:

- $\langle \mathrm{R},+\rangle$ là một nhóm cộng giao hoán $\Rightarrow$ phải có 0, mọi phần tử a có phần tử ngược -a
- $\langle R^{*},\bullet\rangle$ không yêu cầu tạo thành nhóm nhân $\Rightarrow$ Điều này có nghĩa là không nhất thiết phải có phần tử 1, và không nhất thiết mọi phần tử a đều có phần tử ngược a^{-1}.

  Trong đó: $R^{*}=R\setminus\{0\}$
- Tính chất phân phối: $(a+b)c=ac+bc$

Vành R được gọi là vành giao hoán nếu ta có $ab=ba$

dinhptit@gmail.com

Vành(cont)

Thí dụ vành:

•Tập Z với phép cộng và nhân thông thường là một vành giao hoán

•Tập Z_n với phép cộng và nhân modulo n là một vành giao hoán

Ideal:

Ideal I là một tập con trong vành R có các tính chất sau:

- $a, b \in I : \ a + b \in I$, $\langle I, + \rangle$ là một nhóm con đối với nhóm cộng của R.
- $c \in R \ : \ c.a \in I$

dinhptit@gmail.com

Trường

Trường (Fields) $\langle F,+,\bullet\rangle$

Trường F là một tập hợp các phần tử với hai phép toán trong hai ngôi thỏa mãn:

- $\langle \mathrm{F},+\rangle$ là một nhóm cộng giao hoán $\Rightarrow$ có phần tử 0
- $\langle F^*,\bullet\rangle$ là một nhóm đối với phép nhân $\Rightarrow$ có phần tử 1.

Trong đó: $\mathrm{F}^* = \mathrm{F}\setminus\{0\}$

Thí dụ:

•Tập R với phép cộng và nhân thông thường là một trường

•Tập C với phép cộng và nhân số phức là một trường

•Tập Z_n với phép cộng và nhân modulo n chỉ là một trường nếu n là số nguyên tố

- Tập Z với phép cộng và nhân thông thường là một vành giao hoán, nhưng ko phải là một trường.

Nhận xét: Trường chặt chẽ hơn vành.

Trường(cont)

finite fields:

- A finite field with q elements is called GF(q). “Galois field” Evariste Galois (1811–1832).

  q is called order of finite field, and must be a power of a prime p.

- If p is a prime number, the set of integers, {0, 1, . . ., p − 1}, forms a prime field GF(p) with p elements under modulo-p addition and multiplication, where 0 and 1 are the zero and unit elements of the field, respectively.

Example:

Consider the special case for which $p = 2$. For this case, forms a field of two elements {0, 1}, called a *binary field*, denoted by GF(2) under modulo-2 addition and multiplication as given by tables:

$$F = GF(2) = \{0,1 \mid +,*\}$$

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

*****	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

- Chú ý: Trường GF(2), trong cả phép cộng và nhân, phần tử ngược của 1 là chính nó.

Không gian vectơ (vector spaces)

Không gian vectơ trên trường F

Giả sử F là một trường với các phần tử coi là các vô hướng. Một không gian vectơ V trên trường F là một tập hợp V mà trên đó phép tính cộng vectơ và phép tính nhân vectơ với số vô hướng được định nghĩa sao cho các tính chất cơ bản sau đây được thỏa mãn:

i. V là một nhóm giao hoán với phép (+)

ii. Với a thuộc F, v thuộc V, thì a.v thuộc V .

iii. a.(u+v) = a.u+a.v; (a+b)v = a.v+b.v

iv. (a.b).v = a.(b.v)

v. Với 1 là phần tử đơn vị của F: 1.v = v

u, v thuộc V gọi là các vec tơ. Vec tơ 0 là phần tử đơn vị của V

a, b thuộc F gọi là các vô hướng

u + v : vector addition

a.v: Scalar multiplication

Không gian vectơ (cont)

Nói cách khác, Không gian vectơ trên trường F có các tính chất sau

- Nếu **u**, **v** $\in$ V, thì **u** + **v** $\in$ V.
- Nếu a $\in$ F, **v** $\in$ V, thì a **v** $\in$ V.
- Với mọi **u**, **v**, **w** $\in$ V, ta có **u** + (**v** + **w**) = (**u** + **v**) + **w**.
- Với mọi **v**, **w** $\in$ V, ta có **v** + **w** = **w** + **v**.
- Có một phần tử **0** $\in$ V, gọi là vectơ không, sao cho **v** + **0** = **v** với mọi **v** $\in$ V.
- Với mọi **v** $\in$ V, có một phần tử **w** $\in$ V, gọi là phần ngược của **v**, sao cho **v** + **w** = **0**.
- Với mọi a $\in$ F và **v**, **w** $\in$ V, ta có a (**v** + **w**) = a **v** + a **w**.
- Với mọi a, b $\in$ F và **v** $\in$ V, ta có (a + b) **v** = a **v** + b **v**.
- Với mọi a, b $\in$ F và **v** $\in$ V, ta có a (b **v**) = (ab) **v**.
- Với mọi **v** $\in$ V, ta có 1 **v** = **v**, 1 là phần tử đơn vị của phép nhân trong F.

Không gian vectơ (cont)

Không gian tuyến tính V_n trên GF(2)

Xét tập V_n gồm các phần tử có khuôn dạng là một bộ tọa độ n thành phần (n-tuple):

$$v = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \quad \text{with} \quad v_i \in F$$

- Người ta định nghĩa phép cộng các phần tử của V_n:

$$u = \left(u_0,\ \ldots,\ u_{\mathrm{n}-1}\right) \qquad\qquad v = \left(v_0,\ \ldots,\ v_{\mathrm{n}-1}\right)$$

$$u + v = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \ldots, u_{n-1} + v_{n-1}) \quad \text{with} \quad u_i + v_i \in F \ \text{ in mod - 2 addition}$$

- Người ta định nghĩa phép nhân n-tuple với vô hướng $a \in F$:

$$a.v = (av_0, av_1, \ldots, av_{n-1}) \quad \text{with} \quad av_i \ \text{in mod - 2 multiplication}$$

Nhận xét: Bằng việc chứng minh các tính chất cho thấy V_n là một không gian vectơ dưới phép cộng và phép nhân với vô hướng như định nghĩa trên. Các n-tuples được gọi là các vectơ n chiều trong không gian V_n.

Không gian vectơ (cont)

- **Exam:**
- Let n = 5. The vector space V_5 of all the 5-tuples over GF(2) consists of the following 2^5 binary 5-tuples:

  (00000), (00001), ... (11111).
- The vector sum of (01010) and (10110) is

  $(01110) + (10110) = (0 + 1,1 + 0,1 + 1, 1 + 1, 0+0) = (11000) \in V_5$.
- Using the rule of scalar multiplication, we obtain

  $0.(01110)=(0.0,0.1,0.1,0.1,0.0)=(00000) \in V_5$.

  $1.(01110)=(1.0,1.1,1.1,1.1,1.0)=(01110) \in V_5$.

Không gian vectơ (cont)

- *Linear combination* của các vectơ $\mathbf{v}_0,...,\mathbf{v}_{k-1} \in V_n$ là : $a_0\mathbf{v}_0 + \ ... \ + a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}$ với các hệ số $a_0,...,a_{k-1} \in F$.

- Các vectơ $v_0,...,v_{k-1} \in V_n$ trên trường F được gọi là độc lập tuyến tính nếu tổ hợp: $a_0\mathbf{v}_0 + \ ... \ + a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}$ chỉ bằng 0 khi và chỉ khi

$$a_0 = a_1 = ... = a_{k-1} = 0$$

Hệ quả:

For $0 \le k \le n$, a set of k linearly independent vectors in V_n spans a *k-dimensional* subspace of V_n (Nghĩa là, Với k≤n, và hệ G gồm k vectơ độc lập tuyến tính $\mathbf{g}_0,...,\mathbf{g}_{k-1} \in V_n$. Thì tập C gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính của G là một k-dimensional subspace of V_n).

- Hệ G là một cơ sở (basic) của *C; G spans C;* G không chứa vector 0.
- Vì các vectơ của C có dạng c= $a_0g_0+...+a_{k-1}g_{k-1}$, *a_i thuộc GF(2), do đó tương ứng sẽ có 2^k vectơ phân biệt trong C.*

- Một Không gian có tối thiểu một cơ sở, chúng đều có số vectơ bằng nhau.

Không gian vectơ (cont)

- **Return exam:**
- Let n = 5. The vector space V_5 of all the 5-tuples over GF(2) consists of the following 32 binary 5-tuples: (00000), (00001),....... .... , (11111).
- The five vectors (10000), (01000), (00100), (00010), and (00001) are linearly independent (dạng chính tắc) and they form a basis of V_5. This basic spans the V_5 over GF(2).
- The basic of 3 linearly independent vectors {(10001), (00111), (11100)} spans a three-dimensional subspace with the following eight vectors:

  (00000), (01010), (11100), (10001), (10110), (01101), (11011), (00111).

  Ta có thể tìm thấy một cơ sở khác của không gian con này gồm ba vector độc lập tuyến tính {(11100), (01010), (10001)}.

Không gian vectơ (cont)

G-matrix over GF(2)

- Mỗi cơ sở G của không gian con k chiều $C \in V_n$ có thể ánh xạ thành ma trận sinh, trong đó mỗi hàng là một n-tuple over GF(2). G có hai cách biểu diễn: k hàng hoặc mảng k x n:

$$G = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \dots \\ g_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,n-1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{k-1,0} & g_{k-1,1} & \cdots & g_{k-1,n-1} \end{pmatrix}$$

- Không gian con k chiều C (gồm 2^k vector sinh bởi G) gọi là *row space* của G.

- Bằng sự thực hiện các phép toán hàng sơ cấp (đổi chỗ hai hàng bất kỳ, cộng một hàng vào một hàng khác) ta sẽ được một ma trận G'. Cả G và G' cùng sinh ra cùng một không gian hàng C.

- Xét một bộ các vô hướng $a=(a_0a_1...a_{k-1})$. Phép nhân ma trận a.G sẽ cho 1 vector n chiều $v \in C$:

$$v = (v_0 v_1 \dots v_{n-1}) = a.G = (a_0 a_1 \dots a_{k-1}) \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \dots \\ g_{k-1} \end{pmatrix} = a_0 g_0 + a_1 g_1 + \dots + a_{k-1} g_{k-1}$$

Không gian vectơ (cont)

- Inner Products
- Let **u** = (u_0, u_1, . . ., u_{n-1}) and **v** = (v_0, v_1, . . ., v_{n-1}) be two *n*-tuples over GF(*2*). We define the *inner product* of **u** and **v** as the following sum:

$$u.v = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_{n-1} v_{n-1}$$

where the multiplications and additions in the sum are carried out with multiplication and addition of GF(*2*). So the inner product of two *n*-tuples over GF(*2*) is an element of GF(*2*), i.e., a scalar.

- If **u**·**v** = 0, we say that **u** and **v** are *orthogonal (trực giao)* to each other.

- **Example:** Consider the two 5-tuples, (10111) and (11010). The inner product of these two binary 5-tuples is

(10111) · (11010) = 1.1 + 0.1 + 1.0 + 1.1 +1.0= 1 + 0 + 0 + 1+0 = 0.

Since their inner product is 0, they are orthogonal to each other.

dinhptit@gmail.com

Không gian vectơ (cont)

Dual Spaces

- For $0 \le k < n$, let C be a k-dimensional subspace of the vector space V_n.

  Let C_d be the set of n-tuples in V_n such that, for any **u** $\in C$ and **v** $\in C_d$,

  inner product: $u.v = 0$

  - C_d contains at least the vector 0 and hence is non-empty
  - C_d is a subspace of the vector space V_n.
  - C_d is called the *dual* (or *null*) space of C and vice versa.

- **Theorem:** For $0 \le k \le n$, let C be a k-dimensional subspace of the vector space V_n. The dimension of its dual space C_d is $n - k$. i.e., $\dim(C_d) = n\text{-}k$.

- **Note:** Nếu C có ma trận sinh G, và C_d có ma trận sinh H

$$G = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \cdots \\ g_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,n-1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{k-1,0} & g_{k-1,1} & \cdots & g_{k-1,n-1} \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \cdots \\ h_{n-k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{0,0} & h_{0,1} & \cdots & h_{0,n-1} \\ h_{1,0} & h_{1,1} & \cdots & h_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n-k-1,0} & h_{n-k-1,1} & \cdots & h_{n-k-1,n-1} \end{pmatrix}$$

  thì bất kỳ hàng g_i nào và bất kỳ hàng h_j nào cũng trực giao với nhau, tức là tích vô hướng $g_i.h_j = 0$.