Lý Thuyết thông tin

Phần Toán học bổ trợ

Xác suất (Probability)

ptit.edu.vn

dinhptit@gmail.com

2.1. Quy tắc đếm

•**Qui tắc cộng:** Giả sử đối tượng X có *m* cách chọn khác nhau, đối tượng Y có *n* cách chọn khác nhau và không có cách chọn đối tượng X nào trùng với mỗi cách chọn đối tượng Y. Khi đó có **m + n** cách chọn một trong hai đối tương ấy.

•**Qui tắc nhân:** Giả sử có hai hành động được thực hiện liên tiếp . Hành động thứ nhất có *m* kết quả. Ứng với mỗi kết quả của hành động thứ nhất, hành động thứ hai có *n* kết quả. Khi đó có **m.n** kết quả của hai hành động liên tiếp đó.

2.2. Tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị

Cho A là tập hợp gồm *n* phần tử ($n \geq 1$).

•Mỗi cách sắp đặt tất cả n phần tử của A theo một thứ tự nào đó được gọi là một *hoán vị của n phần tử* . Số các hóan vị của n phần tử là:

$$P_n = n!$$

•Mỗi tập con gồm *k* phần tử của tập hợp A ($1 \leq k \leq n$) được gọi là một *tổ hợp chập k của n phần tử* . Số các tổ hợp chập *k* của *n* phần tử được kí hiệu là: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

•Qui ước tổ hợp chập 0 của *n* phần tử là tập rỗng.

2.2. Tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị (cont)

Cho A là tập hợp gồm *n* phần tử ($n \geq 1$).

•**Chỉnh hợp** (không lặp) chập k *($1 \leq k \leq n$) của n phần tử đó là một bộ sắp thứ tự k phần tử của A, các phần tử đôi một khác nhau*. Số các chỉnh hợp chập *k* của *n* phần tử được kí hiệu là:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Chỉnh hợp lặp chập k *($1 \leq k \leq n$)* của n phần tử là một bộ sắp thứ tự k phần tử của A, các phần tử có thể lấy lặp lại. Số các chỉnh hợp lặp chập *k* của *n* phần tử được kí hiệu là:

$$F(n,k) = n^k$$

2.3. Phép thử ngẫu nhiên

•Một phép thử (experiment, thực hiện một thực nghiệm) mà kết quả của nó không thể đoán trước được, gọi là *phép thử ngẫu nhiên*. Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử gọi là *không gian mẫu (sample space) của phép thử đó*, Ω.

•VD1. Gieo một con xúc xắc , gọi 1, 2, …, 6 là số chấm xuất hiện thì không gian mẫu gồm 6 biến cố sơ cấp:

$$\Omega = \{1,2,\ldots,6\}.$$

•VD2. Gieo hai đồng xu (hoặc một đồng xu hai lần), thì không gian mẫu gồm 4 biến cố sơ cấp:

$$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}.$$

2.4. Biến cố (Event)

•Trong một phép thử ngẫu nhiên, mỗi tập con của không gian mẫu được gọi là một *biến cố*.

•Nếu kết quả của phép thử là một phần tử của biến cố A , thì ta nói trong phép thử đó, biến cố A xảy ra.

•VD3. Gieo một con xúc xắc . Nếu gọi A là biến cố số chấm của xúc xắc là số lẻ, thì A = {1, 3, 5}. Nếu phép thử cho 3, ta nói biến cố A đã xảy ra.

2.4. Biến cố (cont)

•Mỗi tập hợp con gồm đúng một phần tử của không gian mẫu gọi là một *biến cố sơ cấp (elementary event)*.

•Biến cố chắc chắn , biến cố không thể: Bản thân tập Ω được gọi là biến cố *chắc chắn*. Tập rỗng là biến cố *không thể*.

Trong không gian Ω của một phép thử:

•Biến cố $A \cup B$ (còn kí hiệu là A+B) gọi là *biến cố hợp union* của A và B.

• Biến cố $A \cap B$(còn kí hiệu là AB) gọi là *biến cố giao Intersection* của A và B .

•Biến cố $\overline{A} = \Omega \setminus A$ gọi *là biến cố bù (biến cố đối-opposite / complement)* của biến cố A

2.4. Biến cố (cont)

Trong không gian Ω của một phép thử:

•Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc, loại trừ lẫn nhau (mutually exclusive events) nếu biến cố AB là biến cố không thể. Tức A và B không thể cùng xảy ra trong một phép thử. Hay tập A và tập B ko có phần chung. p(A/B)=0; p(B/A)=0; p(AB)=0

•Các biến cố được gọi là *đồng khả năng* nếu chúng có cùng khả năng xuất hiện khi tiến hành phép thử.

•Các biến cố được gọi là *độc lập* (Independent events) nếu việc xảy ra của một biến cố không ảnh hưởng gì đến việc xảy ra của những biến cố còn lại. p(A/B)=p(A); p(B/A)=p(B); P(AB)=p(A)p(B).

2.5. Xác suất

a. Định nghĩa cổ điển về xác suất

K/niệm: P(A), xác suất xảy ra biến cố A, là khả năng xuất hiện các giá trị thuộc tập con A.

- Nếu trong n lần thực hiện phép thử, một biến cố A xảy ra m lần, thì xác suất xảy ra biến cố A:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- Nếu không gian mẫu gồm *n* biến cố sơ cấp đồng khả năng và biến cố A gồm *m* biến cố sơ cấp thì *xác suất của biến cố A* là:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

2.5. Xác suất (cont)

b. Một số nguyên lý xác suất

1. Với mọi biến cố A:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Xác suất của biến cố không thể bằng 0, xác suất của biến cố chắc chắn bằng 1

$$P(\phi) = 0, \; P(\Omega) = 1$$

3. "Nguyên lý xác suất lớn": "Nếu biến cố A có xác suất gần bằng 1 thì trên thực tế có thể cho rằng biến cố đó sẽ xảy ra trong một phép thử".

4. "Nguyên lý xác suất nhỏ": Nếu một biến cố có xác suất rất nhỏ thì thực tế có thể cho rằng trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra.

5. Xác suất của biến cố đối: $$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

2.5. Xác suất (cont)

6. Xác suất của biến cố hợp (nguyên lý cộng xác suất):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

- T.Hợp riêng: Nếu A và B là hai biến cố **xung khắc** thì $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Thí dụ: Trong phép gieo xúc sắc, ta xét các biến cố:

$A=\{2,4\}$

$B=\{1,3,6\}$

Do A và B là các biến cố xung khắc (ko có phần chung) nên:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=2/6+1/2=5/6$$

2.6. Biến cố đồng thời và xác suất biên

Xét hai phép thử:

-Phép thử thứ nhất làm xuất hiện các biến cố A_i , i=1,2,…,n.

-Phép thử thứ hai làm xuất hiện các biến cố B_J , j=1,2,…,m.

•Biến cố mà trong đó A_i và B_J đồng thời xuất hiện, k/h (A_i,B_j), gọi là biến cố kết hợp, hay biến cố đồng thời (joint event)

- $P(A_i,B_j)$: Xác suất xuất hiện biến cố đồng thời (A_i,B_j), (joint probability)

$$0 \le p(A_i, B_j) \le 1$$

2.6. Biến cố đồng thời và xác suất biên (cont)

- Nếu các biến cố B_j là xung khắc thì:

$$p(A_i) = \sum_{j=1}^{m} p(A_i, B_j)$$

(XS biên-marginal probability)

- Nếu các biến cố A_i là xung khắc thì:

$$p(B_j) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i, B_j)$$

- Nếu tất cả các biến cố A_i là xung khắc và các biến cố B_j là xung khắc thì:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(A_i, B_j) = 1$$

2.7. Xác suất có điều kiện (conditional probability)

Xét hai biến cố A và B:

•Xác suất biến cố A sẽ xảy ra với điều kiện biến cố B đã xảy ra:

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

•Tương tự: Xác suất biến cố B sẽ xảy ra với điều kiện biến cố A đã xảy ra:

$$P(B/A) = \frac{P(A,B)}{P(A)}$$

Suy ra: $P(A,B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$ ←Nguyên lý nhân xs

2.7. Xác suất có điều kiện (cont)

•**Chú ý 1:** Trường hợp một phép thử đơn lẻ. Khi đó các biến cố A và B được định nghĩa trên cùng một không gian mẫu, nên:

$$(A,B) \equiv (A \cap B)$$

Khi đó có thể viết lại:

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

•**Chú ý 2**: Nếu A, B là độc lập:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

$$\Longrightarrow \quad P(A,B) = P(A).P(B)$$

2.7. Xác suất có điều kiện (cont)

•**Định lý Bayes**: Nếu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là nhóm các biến cố đầy đủ: (thỏa mãn tính xung khắc và:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

Khi đó, với mọi biến cố B liên quan, ta có công thức tính xác suất đầy đủ:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} p(A_j, B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j).P(B|A_j)$$

Và khi đó ta có định lý Bayes:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i, B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i).P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j).P(B|A_j)}$$

Ý nghĩa: Trong hệ truyền tin số, A_i là các tin có thể được phát. B là tin nhận được. $P(A_i/B)$ là xác suất nguồn tin phát tin A_i khi phía thu đã nhận được B.

$P(A_i)$ là xác suất tiên nghiệm, $P(A_i/B)$ là xác suất hậu nghiệm.

2.8. Biến ngẫu nhiên rời rạc

•Đại lượng X được gọi là *biến ngẫu nhiên rời rạc* nếu nó nhận giá trị là số thực thuộc một tập hữu hạn nào đó và giá trị ấy là ngẫu nhiên không dự đoán trước được.

•Thí dụ: Gieo đồng xu 5 lần liên tiếp. Kí hiệu X là số lần xuất hiện mặt ngửa thì X là biến ngẫu nhiên rời rạc , giá trị của X là một số thuộc tập {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

2.9. Phân bố xác suất (Probabillity distributions)

- Một phân bố được gọi là **phân bố rời rạc** nếu nó được định ra trên một tập rời rạc, đếm được; ví dụ tập các số nguyên.
- Một phân bố được gọi là **phân bố liên tục** nếu nó được định ra trên một tập vô hạn, không đếm được.
- Phân bố hỗn hợp, bao gồm cả 2 loại trên.
- Các phân bố rời rạc quan trọng bao gồm phân bố đồng nhất, phân bố Poisson, phân bố nhị thức (Binomial distribution), phân bố nhị thức âm và phân bố Maxwell-Boltzmann.
- Các phân bố liên tục quan trọng bao gồm phân bố chuẩn (hay còn gọi là phân bố Gauss), phân bố gamma, phân bố-t của Student (Student's t-distribution), và phân bố hàm mũ (exponential distribution).

2.9. Phân bố xác suất (cont)

Bảng Phân bố xác suất

Cho X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị x_1 , x_2 , ..., x_n . Gỉa sử $P(X = x_k) = p_k$. Bảng sau đây được gọi là *bảng phân bố xác suất* của biến ngẫu nhiên rời rạc X.

X	x_1	x_2	x_3	....	x_n
P	p_1	p_2	p_3	....	p_n

Chú ý : $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$.

2.9. Phân bố xác suất (cont)

•*Kì vọng (expected value) của* biến ngẫu nhiên rời rạc X, kí hiệu là E(X), là trung bình thống kê của X, tính theo công thức:

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

•*Phương sai (variance) của* X, kí hiệu là V(X), Var(X), E(X²)
là trung bình của bình phương độ lệch, tính theo các công thức:

$$\operatorname{var}(X) = \mathrm{E}((X-\mu)^2).$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i, \; trong\; do\; \mu = E(X).$$

•*Độ lệch chuẩn (deviation)* của X: kí hiệu là *σ(X)*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Tài liệu tham khảo

1. PGS.TS Lê Bá Long, PTIT: **Xác suất thống kê**

2. Richard von Mises**: Probability, Statistics, and Truth,** Dover publications, 1981.

3. https://machinelearningcoban.com/2017/07/09/prob/