

Bài 1: Kiểm định giả thuyết về giá trị trung bình

Bài 1: Kiểm định giả thuyết về giá trị trung bình

Giả sử biến ngẫu nhiên X có phân bố chuẩn nhưng ta chưa biết kỳ vọng $\mathbb{E}(X) = \mu$ của X , ta đưa ra giả thuyết thống kê $H_0 : \mu = \mu_0$.

Bài 1: Kiểm định giả thuyết về giá trị trung bình

Giả sử biến ngẫu nhiên X có phân bố chuẩn nhưng ta chưa biết kỳ vọng $\mathbb{E}(X) = \mu$ của X , ta đưa ra giả thuyết thống kê $H_0 : \mu = \mu_0$.

Trường hợp 1: Biết phương sai $\mathbb{D}(X) = \sigma^2$ hay biết độ lệch tiêu chuẩn $\sigma(X) = \sigma$

Với mức ý nghĩa α cho trước, ta có

Bài toán 1: $H_0 : \mu = \mu_0; H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Miền bác bỏ

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [u_{\frac{\alpha}{2}}; +\infty).$$

Bài toán 2: $H_0 : \mu = \mu_0; H_1 : \mu > \mu_0$.

Miền bác bỏ

$$W_\alpha = [u_\alpha; +\infty).$$

Bài toán 3: $H_0 : \mu = \mu_0; H_1 : \mu < \mu_0$.

Miền bác bỏ

$$W_\alpha = (-\infty; -u_\alpha].$$

Giá trị quan sát

$$u_{\text{qs}} = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}.$$

- Nếu $u_{\text{qs}} \in W_\alpha$ thì ta bác bỏ H_0 , thừa nhận H_1 .
- Nếu $u_{\text{qs}} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở bác bỏ giả thuyết H_0 , tức là chưa có cơ sở để thừa nhận giả thuyết H_1 .

Ví dụ 1

Trọng lượng sản phẩm do nhà máy sản xuất ra là một biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn với độ lệch chuẩn 2 kg, trọng lượng trung bình theo quy định là 50 kg. Nghi ngờ máy hoạt động không bình thường làm thay đổi trọng lượng trung bình của sản phẩm, người ta cân thử 100 sản phẩm và thu được kết quả sau:

Trọng lượng sản phẩm	49	50	51	52	53
Số sản phẩm tương ứng	10	60	20	5	5

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$, hãy kết luận về điều nghi ngờ nói trên.

Lời giải

Lời giải

Ta lập bảng

x_i	r_i	$r_i x_i$
49	10	490
50	60	3000
51	20	1020
52	5	260
53	5	265
Σ	100	5035

Do đó $\bar{x} = \frac{5035}{100} = 50,35$.

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 50$; $H_1 : \mu \neq 50$.

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 50$; $H_1 : \mu \neq 50$.

Ta có $\frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025$. Tra bảng ta được $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 50$; $H_1 : \mu \neq 50$.

Ta có $\frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025$. Tra bảng ta được $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Miền bác bỏ

$$W_{\alpha} = (-\infty; -u_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [u_{\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$$

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 50$; $H_1 : \mu \neq 50$.

Ta có $\frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025$. Tra bảng ta được $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Miền bác bỏ

$$\begin{aligned} W_{\alpha} &= (-\infty; -u_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [u_{\frac{\alpha}{2}}; +\infty) \\ &= (-\infty; -1,96] \cup [1,96; +\infty). \end{aligned}$$

Giá trị quan sát

$$u_{\text{qs}} = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$$

Giá trị quan sát

$$\begin{aligned}u_{\text{qs}} &= \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \\&= \frac{(50,35 - 50)\sqrt{100}}{2}\end{aligned}$$

Giá trị quan sát

$$\begin{aligned}u_{\text{qs}} &= \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \\&= \frac{(50,35 - 50)\sqrt{100}}{2} \\&= 1,75.\end{aligned}$$

Giá trị quan sát

$$\begin{aligned}u_{\text{qs}} &= \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \\&= \frac{(50,35 - 50)\sqrt{100}}{2} \\&= 1,75.\end{aligned}$$

Ta thấy $u_{\text{qs}} \notin W_\alpha$, vậy chưa có cơ sở bác bỏ giả thuyết H_0 ,

Giá trị quan sát

$$\begin{aligned}u_{\text{qs}} &= \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \\&= \frac{(50,35 - 50)\sqrt{100}}{2} \\&= 1,75.\end{aligned}$$

Ta thấy $u_{\text{qs}} \notin W_\alpha$, vậy chưa có cơ sở bác bỏ giả thuyết H_0 , tức là chưa có cơ sở thừa nhận giả thuyết $H_1 : \mu \neq 50$.

Giá trị quan sát

$$\begin{aligned}u_{\text{qs}} &= \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \\&= \frac{(50,35 - 50)\sqrt{100}}{2} \\&= 1,75.\end{aligned}$$

Ta thấy $u_{\text{qs}} \notin W_\alpha$, vậy chưa có cơ sở bác bỏ giả thuyết H_0 , tức là chưa có cơ sở thừa nhận giả thuyết $H_1 : \mu \neq 50$. Vậy điều nghi ngờ là sai.

Trường hợp 2: $n \geq 30$, phương sai chưa biết

Trong trường hợp này thì miền bác bỏ W_α và quy tắc kiểm định y hệt như trường hợp 1, chỉ khác ở chỗ giá trị quan sát được tính theo công thức

$$u_{\text{qs}} = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}.$$

Ví dụ 2

Lượng nước sạch một gia đình 4 người ở Hà Nội sử dụng trong 6 tháng năm ngoái là $17m^3$. Theo dõi lượng nước sạch sử dụng trong 6 tháng năm nay của 60 gia đình 4 người thu được số liệu sau:

Lượng nước sạch (m^3)	15 – 16	16 – 17	17 – 18	18 – 19	19 – 20
Số gia đình tương ứng	7	15	21	12	5

Có ý kiến cho rằng lượng nước tiêu thụ năm nay tăng lên, hãy kiểm định ý kiến đó với mức ý nghĩa 2,5%. Giả sử lượng nước sạch tiêu thụ của các hộ gia đình là một biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn.

Lời giải

Lời giải

Thực hiện phép đổi biến $u_i = \frac{x_i^0 - 17,5}{1}$ với $x_0 = 17,5$ và $h = 1$.

Ta có bảng tính sau:

$x_i - x_{i+1}$	x_i^0	r_i	u_i	$r_i u_i$	$r_i u_i^2$
15 – 16	15,5	7	−2	−14	28
16 – 17	16,5	15	−1	−15	15
17 – 18	17,5	21	0	0	0
18 – 19	18,5	12	1	12	12
19 – 20	19,5	5	2	10	20
Σ		$n = 60$		−7	75

Ta có

$$\bar{u} = \frac{-7}{60} = -0,12,$$

Ta có

$$\bar{u} = \frac{-7}{60} = -0,12,$$

$$\bar{x} = x_0 + h\bar{u} = 17,5 + 1 \cdot (-0,12) = 17,38,$$

Ta có

$$\bar{u} = \frac{-7}{60} = -0,12,$$

$$\bar{x} = x_0 + h\bar{u} = 17,5 + 1 \cdot (-0,12) = 17,38,$$

$$s_u^2 = \frac{1}{59} \left(75 - \frac{(-7)^2}{60} \right) = \frac{4451}{3540},$$

Ta có

$$\bar{u} = \frac{-7}{60} = -0,12,$$

$$\bar{x} = x_0 + h\bar{u} = 17,5 + 1 \cdot (-0,12) = 17,38,$$

$$s_u^2 = \frac{1}{59} \left(75 - \frac{(-7)^2}{60} \right) = \frac{4451}{3540},$$

$$s^2 = h^2 s_u^2 = 1^2 \cdot \frac{4451}{3540} = \frac{4451}{3540},$$

Ta có

$$\bar{u} = \frac{-7}{60} = -0,12,$$

$$\bar{x} = x_0 + h\bar{u} = 17,5 + 1 \cdot (-0,12) = 17,38,$$

$$s_u^2 = \frac{1}{59} \left(75 - \frac{(-7)^2}{60} \right) = \frac{4451}{3540},$$

$$s^2 = h^2 s_u^2 = 1^2 \cdot \frac{4451}{3540} = \frac{4451}{3540},$$

$$s = \sqrt{\frac{4451}{3540}} \approx 1,12.$$

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 17$; $H_1 : \mu > 17$.

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 17$; $H_1 : \mu > 17$.

Ta có $\alpha = 0,025$, do đó $u_\alpha = 1,96$.

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 17$; $H_1 : \mu > 17$.

Ta có $\alpha = 0,025$, do đó $u_\alpha = 1,96$.

Miền bác bỏ

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 17$; $H_1 : \mu > 17$.

Ta có $\alpha = 0,025$, do đó $u_\alpha = 1,96$.

Miền bác bỏ

$$W_\alpha = [u_\alpha; +\infty)$$

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 17$; $H_1 : \mu > 17$.

Ta có $\alpha = 0,025$, do đó $u_\alpha = 1,96$.

Miền bác bỏ

$$\begin{aligned} W_\alpha &= [u_\alpha; +\infty) \\ &= [1,96; +\infty). \end{aligned}$$

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 17$; $H_1 : \mu > 17$.

Ta có $\alpha = 0,025$, do đó $u_\alpha = 1,96$.

Miền bác bỏ

$$\begin{aligned} W_\alpha &= [u_\alpha; +\infty) \\ &= [1,96; +\infty). \end{aligned}$$

Giá trị quan sát

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 17$; $H_1 : \mu > 17$.

Ta có $\alpha = 0,025$, do đó $u_\alpha = 1,96$.

Miền bác bỏ

$$\begin{aligned} W_\alpha &= [u_\alpha; +\infty) \\ &= [1,96; +\infty). \end{aligned}$$

Giá trị quan sát

$$u_{\text{qs}} = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(17,38 - 17)\sqrt{60}}{1,12} \approx 2,63.$$

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 17$; $H_1 : \mu > 17$.

Ta có $\alpha = 0,025$, do đó $u_\alpha = 1,96$.

Miền bác bỏ

$$\begin{aligned} W_\alpha &= [u_\alpha; +\infty) \\ &= [1,96; +\infty). \end{aligned}$$

Giá trị quan sát

$$u_{\text{qs}} = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(17,38 - 17)\sqrt{60}}{1,12} \approx 2,63.$$

Ta thấy $u_{\text{qs}} \in W_\alpha$, vậy ta bác bỏ H_0 , thừa nhận H_1 . Vậy lượng nước tiêu thụ năm nay tăng lên. Do đó ý kiến là đúng.

Trường hợp 3: $n < 30$, phương sai chưa biết

Bài toán 1: $H_0 : \mu = \mu_0; H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Miền bác bỏ

$$W_\alpha = (-\infty; -t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)] \cup [t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1); +\infty).$$

Bài toán 2: $H_0 : \mu = \mu_0; H_1 : \mu > \mu_0$.

Miền bác bỏ

$$W_\alpha = [t_\alpha(n-1); +\infty).$$

Bài toán 3: $H_0 : \mu = \mu_0; H_1 : \mu < \mu_0$.

Miền bác bỏ

$$W_\alpha = (-\infty; -t_\alpha(n-1)].$$

Giá trị quan sát

$$t_{\text{qs}} = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}.$$

- Nếu $t_{\text{qs}} \in W_\alpha$ thì ta bác bỏ H_0 , thừa nhận H_1 .
- Nếu $t_{\text{qs}} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở bác bỏ giả thuyết H_0 , tức là chưa có cơ sở để thừa nhận giả thuyết H_1 .

Ví dụ 3

Phòng kỹ thuật của một công ty theo dõi mức xăng tiêu hao cho cùng một loại xe chạy từ A đến B và có bảng số liệu sau:

Mức xăng tiêu hao X (lít)	8,5	9	11	12,5
Số chuyến tương ứng	5	8	10	2

Với mức ý nghĩa 5%, có thể kết luận mức xăng tiêu hao trung bình thấp hơn 11 lít không? biết mức xăng tiêu hao X tuân theo phân bố chuẩn.

Lời giải

Lời giải

Ta lập bảng tính như sau:

Lời giải

Ta lập bảng tính như sau:

x_i	r_i	$r_i x_i$	$r_i x_i^2$
8,5	5	42,5	361,25
9	8	72	648
11	10	110	1210
12,5	2	25	312,5
\sum	$n = 25$	249,5	2531,75

Ta có

Ta có

$$\bar{x} = \frac{249,5}{25}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{249,5}{25} \\ &= 9,98,\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{249,5}{25} \\ &= 9,98,\end{aligned}$$

$$s^2 = \frac{1}{24} \left(2531,75 - \frac{249,5^2}{25} \right)$$

Ta có

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{249,5}{25} \\ &= 9,98,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{24} \left(2531,75 - \frac{249,5^2}{25} \right) \\ &= \frac{1043,5}{600}.\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{249,5}{25} \\ &= 9,98,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{24} \left(2531,75 - \frac{249,5^2}{25} \right) \\ &= \frac{1043,5}{600}.\end{aligned}$$

$$s = \sqrt{\frac{1043,5}{600}}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{249,5}{25} \\ &= 9,98,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{24} \left(2531,75 - \frac{249,5^2}{25} \right) \\ &= \frac{1043,5}{600}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{\frac{1043,5}{600}} \\ &\approx 1,32.\end{aligned}$$

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 11$; $H_1 : \mu < 11$.

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 11$; $H_1 : \mu < 11$.

Miền bác bỏ

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 11$; $H_1 : \mu < 11$.

Miền bác bỏ

$$W_\alpha = (-\infty; -t_\alpha(n - 1)]$$

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 11$; $H_1 : \mu < 11$.

Miền bác bỏ

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty; -t_\alpha(n-1)] \\ &= (-\infty; -t_{0,05}(24)] \end{aligned}$$

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu = 11$; $H_1 : \mu < 11$.

Miền bác bỏ

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty; -t_\alpha(n-1)] \\ &= (-\infty; -t_{0,05}(24)] \\ &= (-\infty; -1,711]. \end{aligned}$$

Giá trị quan sát

$$t_{\text{qs}} = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$$

Giá trị quan sát

$$\begin{aligned} t_{\text{qs}} &= \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \\ &= \frac{(9,98 - 11)\sqrt{25}}{1,32} \end{aligned}$$

Giá trị quan sát

$$\begin{aligned} t_{\text{qs}} &= \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \\ &= \frac{(9,98 - 11)\sqrt{25}}{1,32} \\ &\approx -3,86. \end{aligned}$$

Giá trị quan sát

$$\begin{aligned}t_{\text{qs}} &= \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \\&= \frac{(9,98 - 11)\sqrt{25}}{1,32} \\&\approx -3,86.\end{aligned}$$

Ta thấy $u_{\text{qs}} \in W_\alpha$, vậy ta bác bỏ H_0 , thừa nhận H_1 . Vậy có thể kết luận mức xăng tiêu hao trung bình thấp hơn 11 lít.

Bài 2: Kiểm định giả thuyết về tỷ lệ

Bài 2: Kiểm định giả thuyết về tỷ lệ

Giả sử tổng thể có tỷ lệ phần tử có tính chất A là p chưa biết, ta đưa ra giả thuyết thống kê $H_0 : p = p_0$.

Với mức ý nghĩa α cho trước, ta có:

Bài toán 1: $H_0 : p = p_0; H_1 : p \neq p_0$.

Miền bác bỏ

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [u_{\frac{\alpha}{2}}; +\infty).$$

Bài toán 2: $H_0 : p = p_0; H_1 : p > p_0$.

Miền bác bỏ

$$W_\alpha = [u_\alpha; +\infty).$$

Bài toán 3: $H_0 : p = p_0; H_1 : p < p_0$.

Miền bác bỏ

$$W_\alpha = (-\infty; -u_\alpha].$$

Giá trị quan sát

Giá trị quan sát

$$u_{\text{qs}} = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}},$$

trong đó f là tỷ lệ phần tử mang tính chất A trong mẫu kích thước n được chọn ra từ tổng thể.

- Nếu $u_{\text{qs}} \in W_\alpha$ thì ta bác bỏ H_0 , thừa nhận H_1 .
- Nếu $u_{\text{qs}} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở bác bỏ giả thuyết H_0 , tức là chưa có cơ sở để thừa nhận giả thuyết H_1 .

Ví dụ 1

Tỷ lệ khách hàng trở lại sử dụng dịch vụ của công ty là 60%. Có ý kiến cho rằng tỷ lệ này giảm do chính sách hậu mãi của công ty không tốt. Theo dõi ngẫu nhiên 300 khách hàng thấy có 162 khách hàng trở lại sử dụng dịch vụ của công ty. Hãy kết luận ý kiến trên với mức ý nghĩa $\alpha = 0,025$.

Lời giải

Lời giải

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : p = 0,6$; $H_1 : p < 0,6$.

Lời giải

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : p = 0,6$; $H_1 : p < 0,6$.

Ta có $\alpha = 0,025$, khi đó $u_\alpha = 1,96$.

Lời giải

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : p = 0,6$; $H_1 : p < 0,6$.

Ta có $\alpha = 0,025$, khi đó $u_\alpha = 1,96$.

Miền bác bỏ

$$W_\alpha = (-\infty; -u_\alpha]$$

Lời giải

Ta kiểm định giả thuyết $H_0 : p = 0,6$; $H_1 : p < 0,6$.

Ta có $\alpha = 0,025$, khi đó $u_\alpha = 1,96$.

Miền bác bỏ

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty; -u_\alpha] \\ &= (-\infty; -1,96]. \end{aligned}$$

Ta có

$$f = \frac{162}{300} = 0,54.$$

Ta có

$$f = \frac{162}{300} = 0,54.$$

Giá trị quan sát

Ta có

$$f = \frac{162}{300} = 0,54.$$

Giá trị quan sát

$$u_{\text{qs}} = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} = \frac{(0,54 - 0,6)\sqrt{300}}{\sqrt{0,6 \cdot (1 - 0,6)}} \approx -2,12.$$

Ta có

$$f = \frac{162}{300} = 0,54.$$

Giá trị quan sát

$$u_{\text{qs}} = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} = \frac{(0,54 - 0,6)\sqrt{300}}{\sqrt{0,6 \cdot (1 - 0,6)}} \approx -2,12.$$

Ta thấy $u_{\text{qs}} \in W_\alpha$. Do đó ta bác bỏ $H_0 : p = 0,6$, thừa nhận $H_1 : p < 0,6$. Vậy số khách hàng quay trở lại công ty có giảm. Do đó ý kiến trên là đúng.