BÀI GIẢNG XÁC SUẤT THỐNG KÊ

TS. Trần Việt Anh - Bộ môn Toán - Khoa Cơ bản 1

Bài 1: Biến ngẫu nhiên

Bài 1: Biến ngẫu nhiên

1) Định nghĩa

Bài 1: Biến ngẫu nhiên

1) Định nghĩa

• Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần và gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp.

Bài 1: Biến ngẫu nhiên

1) Định nghĩa

• Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần và gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp.

Khi đó

$$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}.$$

Bài 1: Biến ngẫu nhiên

1) Định nghĩa

• Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần và gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp.

Khi đó

$$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}.$$

Ta thấy X có thể nhận 3 giá trị là $0; 1; 2$ và ứng với mỗi kết quả $\omega \in \Omega$ thì cho ta duy nhất một giá trị $X(\omega)$ của X.

Bài 1: Biến ngẫu nhiên

1) Định nghĩa

• Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần và gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp.

Khi đó

$$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}.$$

Ta thấy X có thể nhận 3 giá trị là $0; 1; 2$ và ứng với mỗi kết quả $\omega \in \Omega$ thì cho ta duy nhất một giá trị $X(\omega)$ của X. Do đó $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số. Ta gọi X là một biến ngẫu nhiên.

- Xét phép thử ngẫu nhiên có không gian mẫu Ω.

• Xét phép thử ngẫu nhiên có không gian mẫu Ω. Biến ngẫu nhiên có thể hiểu là đại lượng biến đổi mà giá trị của nó phụ thuộc vào các kết quả của phép thử ngẫu nhiên.

• Xét phép thử ngẫu nhiên có không gian mẫu Ω. Biến ngẫu nhiên có thể hiểu là đại lượng biến đổi mà giá trị của nó phụ thuộc vào các kết quả của phép thử ngẫu nhiên. Nói cách khác, biến ngẫu nhiên X là hàm số $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

• Xét phép thử ngẫu nhiên có không gian mẫu Ω. Biến ngẫu nhiên có thể hiểu là đại lượng biến đổi mà giá trị của nó phụ thuộc vào các kết quả của phép thử ngẫu nhiên. Nói cách khác, biến ngẫu nhiên X là hàm số $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

• Nếu $S \subset \mathbb{R}$, ta ký hiệu

$$(X \in S) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\}.$$

• Xét phép thử ngẫu nhiên có không gian mẫu Ω. Biến ngẫu nhiên có thể hiểu là đại lượng biến đổi mà giá trị của nó phụ thuộc vào các kết quả của phép thử ngẫu nhiên. Nói cách khác, biến ngẫu nhiên X là hàm số $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

• Nếu $S \subset \mathbb{R}$, ta ký hiệu

$$(X \in S) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\}.$$

Ví dụ

$$(X = 1) = \{SN, NS\},$$
$$(0 < X \leq 2) = \{SN, NS, SS\}.$$

2) Phân loại biến ngẫu nhiên

2) Phân loại biến ngẫu nhiên

• Người ta phân các biến ngẫu nhiên thành hai loại: Biến ngẫu nhiên liên tục và biến ngẫu nhiên rời rạc.

2) Phân loại biến ngẫu nhiên

• Người ta phân các biến ngẫu nhiên thành hai loại: Biến ngẫu nhiên liên tục và biến ngẫu nhiên rời rạc.

• Ta dùng các chữ cái hoa như $X, Y, Z, \ldots$ để ký hiệu biến ngẫu nhiên.

2) Phân loại biến ngẫu nhiên

• Người ta phân các biến ngẫu nhiên thành hai loại: Biến ngẫu nhiên liên tục và biến ngẫu nhiên rời rạc.

• Ta dùng các chữ cái hoa như $X, Y, Z, \ldots$ để ký hiệu biến ngẫu nhiên.

3) Hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên

2) Phân loại biến ngẫu nhiên

• Người ta phân các biến ngẫu nhiên thành hai loại: Biến ngẫu nhiên liên tục và biến ngẫu nhiên rời rạc.
• Ta dùng các chữ cái hoa như $X, Y, Z, \ldots$ để ký hiệu biến ngẫu nhiên.

3) Hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên

Cho biến ngẫu nhiên X, hàm số $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi
$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X.

Bài 2: Biến ngẫu nhiên liên tục

Bài 2: Biến ngẫu nhiên liên tục

1) Định nghĩa

Bài 2: Biến ngẫu nhiên liên tục

1) Định nghĩa

• Biến ngẫu nhiên X được gọi là liên tục nếu hàm phân bố xác suất $F(x)$ của X có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 2: Biến ngẫu nhiên liên tục

1) Định nghĩa

• Biến ngẫu nhiên X được gọi là liên tục nếu hàm phân bố xác suất $F(x)$ của X có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

• Hàm $f(x) = F'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X.

2) Một số tính chất

2) Một số tính chất

- $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

2) Một số tính chất

- $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
- Với mọi $t \in \mathbb{R}$

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$

- Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < X < b) &= \mathbb{P}(a \leq X \leq b) \\ &= \mathbb{P}(a < X \leq b) \\ &= \mathbb{P}(a \leq X < b) \\ &= \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

- Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a < X < b) &= \mathbb{P}(a \leq X \leq b) \\
&= \mathbb{P}(a < X \leq b) \\
&= \mathbb{P}(a \leq X < b) \\
&= \int_a^b f(x)dx \\
&= F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

- Với mọi $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx,$$

- Với mọi $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < a) &= \mathbb{P}(X \le a)\\ &= \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx,\\ \mathbb{P}(X > a) &= \mathbb{P}(X \ge a)\\ &= \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx.\end{aligned}$$

• Kỳ vọng của X (còn được gọi là giá trị trung bình của X), được ký hiệu là $\mathbb{E}(X)$ và được xác định bởi

$$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

• Kỳ vọng của X (còn được gọi là giá trị trung bình của X), được ký hiệu là $\mathbb{E}(X)$ và được xác định bởi

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

• Kỳ vọng của X^2

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

- Phương sai của X

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

• Phương sai của X

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

• Ta chứng minh được phương sai của biến ngẫu nhiên X luôn không âm, khi đó độ lệch tiêu chuẩn của X là $\sigma(X)$ được xác định bởi

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)}.$$

Ví dụ 1

Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} Cx - x^2 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

a) Xác định hằng số C.

b) Tìm hàm phân bố xác suất $F(x)$.

c) Tính kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$.

Lời giải

Lời giải

a) Ta có

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$$

Lời giải

a) Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} (Cx - x^2)dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx$$

Lời giải

a) Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} (Cx - x^2)dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx$$

$$= 0 + \left(\frac{Cx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + 0$$

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} (Cx - x^2)dx + \int\limits_{1}^{+\infty} 0dx \\ &= 0 + \left(\frac{Cx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + 0 = \frac{C}{2} - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Theo tính chất của hàm mật độ xác suất $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Do đó

$\dfrac{C}{2} - \dfrac{1}{3} = 1$ hay $C = \dfrac{8}{3}$.

b) Nếu $t < 0$ thì

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

b) Nếu $t < 0$ thì

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{t} 0dx
\end{aligned}
$$

b) Nếu $t < 0$ thì

$$\begin{aligned} F(t) &= \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{t} 0dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nếu $0 \leq t \leq 1$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Nếu $0 \leq t \leq 1$

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{t} f(x)dx
\end{aligned}
$$

Nếu $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{t} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{t} (Cx - x^2)dx \end{aligned}$$

$$= 0 + \left(\frac{Cx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^t$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \left(\frac{Cx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^t \\
&= \frac{Ct^2}{2} - \frac{t^3}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \left(\frac{Cx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^t \\
&= \frac{Ct^2}{2} - \frac{t^3}{3} \\
&= \frac{4t^2}{3} - \frac{t^3}{3}.
\end{aligned}
$$

Nếu $t > 1$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Nếu $t > 1$

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{t} f(x)dx
\end{aligned}$$

Nếu $t > 1$

$$\begin{aligned} F(t) &= \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{t} f(x)dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} (Cx - x^2)dx + \int\limits_{1}^{t} 0dx \end{aligned}$$

$$= 0 + \left(\frac{Cx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + 0$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \left(\frac{Cx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 + 0 \\
&= \frac{C}{2} - \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \left(\frac{Cx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + 0 \\
&= \frac{C}{2} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \left(\frac{Cx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + 0 \\
&= \frac{C}{2} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Vậy

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0, \\ \dfrac{4t^2}{3} - \dfrac{t^3}{3} & \text{nếu } 0 \le t \le 1, \\ 1 & \text{nếu } t > 1. \end{cases}$$

c) Kỳ vọng của X

$$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

c) Kỳ vọng của X

$$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int\limits_{0}^{1} xf(x)dx + \int\limits_{1}^{+\infty} xf(x)dx$$

c) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int\limits_{0}^{1} xf(x)dx + \int\limits_{1}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} x.0dx + \int\limits_{0}^{1} x(Cx - x^2)dx + \int\limits_{1}^{+\infty} x.0dx\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} (Cx^2 - x^3)dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} (Cx^2 - x^3)dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx$$

$$= 0 + \left(\frac{Cx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 + 0$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} (Cx^2 - x^3)dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx$$

$$= 0 + \left(\frac{Cx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 + 0$$

$$= \frac{C}{3} - \frac{1}{4}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} (Cx^2 - x^3)dx + \int\limits_{1}^{+\infty} 0dx \\
&= 0 + \left(\frac{Cx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 + 0 \\
&= \frac{C}{3} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{8}{9} - \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} (Cx^2 - x^3)dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx \\
&= 0 + \left(\frac{Cx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 + 0 \\
&= \frac{C}{3} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{8}{9} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{23}{36}.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 2

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{nếu } x \text{ còn lại.} \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tìm hàm phân bố xác suất $F(x)$.

c) Tính $\mathbb{P}(X > 1)$.

Đáp số

a) $k = \dfrac{1}{9}$.

b) Hàm phân bố xác suất

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0, \\ \dfrac{t^3}{27} & \text{nếu } 0 \le t \le 3, \\ 1 & \text{nếu } t > 3. \end{cases}$$

c) $\mathbb{P}(X > 1) = \dfrac{26}{27}$.

Ví dụ 3

Cho biến ngẫu nhiên X liên tục có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{nếu } 0 \le x \le 1, \\ k & \text{nếu } 1 \le x \le 4, \\ 0 & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

a) Tìm k.
b) Tìm hàm phân bố xác suất $F(x)$ của X.
c) Tính xác suất $\mathbb{P}(0,5 < X < 2)$ và kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$.

Lời giải

Lời giải

a)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{4} f(x)dx + \int\limits_{4}^{+\infty} f(x)dx$$

Lời giải

a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} kxdx + \int_{1}^{4} kdx + \int_{4}^{+\infty} 0dx$$

$$= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\bigg|_0^1 + (kx)\bigg|_1^4 + 0$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + (kx)\Bigg|_1^4 + 0 \\
&= \frac{k}{2} + (4k - k)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Big|_0^1 + (kx)\Big|_1^4 + 0 \\
&= \frac{k}{2} + (4k - k) \\
&= \frac{7k}{2}.
\end{aligned}$$

Theo tính chất của hàm mật độ xác suất thì $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Do đó $\dfrac{7k}{2} = 1$ hay $k = \dfrac{2}{7}$.

b) Nếu $t < 0$ thì

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

b) Nếu $t < 0$ thì

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{t} 0dx$$

b) Nếu $t < 0$ thì

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{t} 0dx$$

$$= 0.$$

Nếu $0 \leq t \leq 1$

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Nếu $0 \leq t \leq 1$

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{t} f(x)dx
\end{aligned}
$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{t} kxdx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{t} kxdx$$

$$= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Big|_0^t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{t} kxdx \\
&= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{t} \\
&= \frac{kt^2}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{t} kxdx \\
&= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Big|_0^t \\
&= \frac{kt^2}{2} \\
&= \frac{t^2}{7}.
\end{aligned}
$$

Nếu $1 \leq t \leq 4$

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Nếu $1 \leq t \leq 4$

$$\begin{aligned} F(t) &= \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{t} f(x)dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} kxdx + \int_{1}^{t} kdx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} kxdx + \int_{1}^{t} kdx \\
&= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\bigg|_{0}^{1} + (kx)\bigg|_{1}^{t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} kxdx + \int_{1}^{t} kdx \\
&= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Big|_0^1 + (kx)\Big|_1^t \\
&= \frac{k}{2} + k(t-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} kxdx + \int_{1}^{t} kdx \\
&= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Big|_0^1 + (kx)\Big|_1^t \\
&= \frac{k}{2} + k(t-1) \\
&= \frac{1}{7} + \frac{2}{7}(t-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} kxdx + \int_{1}^{t} kdx \\
&= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\bigg|_0^1 + (kx)\bigg|_1^t \\
&= \frac{k}{2} + k(t-1) \\
&= \frac{1}{7} + \frac{2}{7}(t-1) \\
&= \frac{2t-1}{7}.
\end{aligned}
$$

Nếu $t > 4$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Nếu $t > 4$

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{t} f(x)dx \end{aligned}$$

Nếu $t > 4$

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{t} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} kxdx + \int_{1}^{4} kdx + \int_{4}^{t} 0dx
\end{aligned}$$

$$= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + (kx)\Bigg|_1^4 + 0$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Big|_0^1 + (kx)\Big|_1^4 + 0 \\
&= \frac{k}{2} + (4k - k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + (kx)\Bigg|_1^4 + 0 \\
&= \frac{k}{2} + (4k - k) \\
&= \frac{7k}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\bigg|_0^1 + (kx)\bigg|_1^4 + 0 \\
&= \frac{k}{2} + (4k - k) \\
&= \frac{7k}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Vậy

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0, \\ \dfrac{t^2}{7} & \text{nếu } 0 \leq t \leq 1, \\ \dfrac{2t-1}{7} & \text{nếu } 1 \leq t \leq 4, \\ 1 & \text{nếu } t > 4. \end{cases}$$

Cách 1

Cách 1

c) Ta có

$$\mathbb{P}(0,5 < X < 2) = F(2) - F(0,5)$$

Cách 1

c) Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0,5 < X < 2) &= F(2) - F(0,5)\\ &= \frac{2 \cdot 2 - 1}{7} - \frac{(0,5)^2}{7}\end{aligned}$$

Cách 1

c) Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0,5 < X < 2) &= F(2) - F(0,5)\\ &= \frac{2\cdot 2 - 1}{7} - \frac{(0,5)^2}{7}\\ &= \frac{11}{28}.\end{aligned}$$

Cách 2

Cách 2

c) Ta có

$$\mathbb{P}(0,5 < X < 2) = \int_{0,5}^{2} f(x)dx$$

Cách 2

c) Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0,5 < X < 2) &= \int_{0,5}^{2} f(x)dx \\ &= \int_{0,5}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx\end{aligned}$$

Cách 2

c) Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0,5 < X < 2) &= \int_{0,5}^{2} f(x)dx \\ &= \int_{0,5}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx \\ &= \int_{0,5}^{1} kxdx + \int_{1}^{2} kdx\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg|_{0,5}^{1} + (kx)\Bigg|_{1}^{2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Big|_{0,5}^{1} + (kx)\Big|_{1}^{2} \\
&= \frac{k}{2} - \frac{k}{8} + (2k - k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg|_{0{,}5}^{1} + (kx)\Big|_{1}^{2} \\
&= \frac{k}{2} - \frac{k}{8} + (2k - k) \\
&= \frac{11k}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg|_{0,5}^{1} + (kx)\Bigg|_{1}^{2} \\
&= \frac{k}{2} - \frac{k}{8} + (2k - k) \\
&= \frac{11k}{8} \\
&= \frac{11}{8} \times \frac{2}{7}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg|_{0,5}^{1} + (kx)\Bigg|_{1}^{2} \\
&= \frac{k}{2} - \frac{k}{8} + (2k - k) \\
&= \frac{11k}{8} \\
&= \frac{11}{8} \times \frac{2}{7} \\
&= \frac{11}{28}.
\end{aligned}
$$

Ta có

$$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Ta có

$$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int\limits_{0}^{1} xf(x)dx + \int\limits_{1}^{4} xf(x)dx + \int\limits_{4}^{+\infty} xf(x)dx$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int\limits_{0}^{1} xf(x)dx + \int\limits_{1}^{4} xf(x)dx + \int\limits_{4}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x.0dx + \int_{0}^{1} x.kxdx + \int_{1}^{4} x.kdx + \int_{4}^{+\infty} x.0dx\end{aligned}$$

$$= 0 + \left(\frac{kx^3}{3}\right)\bigg|_0^1 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\bigg|_1^4 + 0$$

$$= 0 + \left(\frac{kx^3}{3}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Big|_1^4 + 0$$

$$= \frac{k}{3} + (8k - \frac{k}{2})$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \left(\frac{kx^3}{3}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Big|_1^4 + 0 \\
&= \frac{k}{3} + (8k - \frac{k}{2}) \\
&= \frac{47k}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \left(\frac{kx^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg|_1^4 + 0 \\
&= \frac{k}{3} + (8k - \frac{k}{2}) \\
&= \frac{47k}{6} \\
&= \frac{47}{6} \times \frac{2}{7}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \left(\frac{kx^3}{3}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Big|_1^4 + 0 \\
&= \frac{k}{3} + (8k - \frac{k}{2}) \\
&= \frac{47k}{6} \\
&= \frac{47}{6} \times \frac{2}{7} \\
&= \frac{47}{21}.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 4

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} k(1+x)^{-3} & \text{nếu } x \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tính kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$.

Lời giải

Lời giải

a) Ta có

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{+\infty} k(1+x)^{-3}dx
\end{aligned}$$

Lời giải

a) Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} k(1+x)^{-3}dx$$
$$= k\int_{0}^{+\infty} (1+x)^{-3}dx.$$

Ta có
$$\int\limits_0^{+\infty} (1+x)^{-3}dx = \lim_{a \longrightarrow +\infty} \int\limits_0^{a} (1+x)^{-3}dx$$

Ta có

$$\int_0^{+\infty} (1+x)^{-3}dx = \lim_{a\longrightarrow+\infty} \int_0^a (1+x)^{-3}dx$$

$$= \lim_{a\longrightarrow+\infty} \left[\frac{1}{-2(1+x)^2}\Big|_0^a\right]$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} (1+x)^{-3}dx &= \lim_{a \longrightarrow +\infty} \int_0^{a} (1+x)^{-3}dx \\
&= \lim_{a \longrightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-2(1+x)^2} \Big|_0^a \right] \\
&= \lim_{a \longrightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-2(1+a)^2} + \frac{1}{2} \right]
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty}(1+x)^{-3}dx &= \lim_{a\longrightarrow+\infty}\int\limits_0^{a}(1+x)^{-3}dx\\ &= \lim_{a\longrightarrow+\infty}\left[\frac{1}{-2(1+x)^2}\Bigg|_0^a\right]\\ &= \lim_{a\longrightarrow+\infty}\left[\frac{1}{-2(1+a)^2}+\frac{1}{2}\right]\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Do đó $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \dfrac{k}{2}$.

Do đó $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{k}{2}$.

Theo tính chất của hàm mật độ xác suất $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Do đó $\dfrac{k}{2} = 1$ hay $k = 2$.

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} xf(x)dx\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} xf(x)dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} x.0dx + \int\limits_{0}^{+\infty} x.2(1+x)^{-3}dx
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$$

$$= 0 + 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$$

$$= 0 + 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx.$$

Với mọi $a > 0$, ta có

$$\int\limits_0^a \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int\limits_0^a \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}\right]dx$$

Với mọi $a > 0$, ta có

$$\int_0^a \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int_0^a \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}\right]dx$$

$$= \left[-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2}\right]\Bigg|_0^a$$

Với mọi $a > 0$, ta có

$$\int\limits_0^a \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int\limits_0^a \Big[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}\Big]dx$$
$$= \Big[-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2}\Big]\Big|_0^a$$
$$= -\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2(1+a)^2} + 1 - \frac{1}{2}$$

Với mọi $a > 0$, ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^a \frac{x}{(1+x)^3}dx &= \int\limits_0^a \Big[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}\Big]dx \\
&= \Big[-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2}\Big]\Big|_0^a \\
&= -\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2(1+a)^2} + 1 - \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2(1+a)^2} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx = \lim_{a \longrightarrow +\infty} \int\limits_0^{a} \frac{x}{(1+x)^3} dx$$

Do đó

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx = \lim_{a \longrightarrow +\infty} \int\limits_0^{a} \frac{x}{(1+x)^3}dx$$

$$= \lim_{a \longrightarrow +\infty} \Big[-\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2(1+a)^2} + \frac{1}{2} \Big]$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx &= \lim_{a\longrightarrow+\infty} \int\limits_0^{a} \frac{x}{(1+x)^3}dx \\
&= \lim_{a\longrightarrow+\infty} \Big[-\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2(1+a)^2} + \frac{1}{2} \Big] \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx &= \lim_{a\longrightarrow+\infty} \int\limits_0^{a} \frac{x}{(1+x)^3}dx\\ &= \lim_{a\longrightarrow+\infty} \Big[-\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2(1+a)^2} + \frac{1}{2}\Big]\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $\mathbb{E}(X) = 1$.

Ví dụ 5

Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} k\cos x & \text{nếu } -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

a) Xác định hằng số k.

b) Tìm hàm phân bố xác suất $F(x)$.

c) Tính kỳ vọng của X.

d) Tính xác suất $\mathbb{P}\left(0 < X \leq \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Bài 3: Biến ngẫu nhiên rời rạc

Bài 3: Biến ngẫu nhiên rời rạc

1) Định nghĩa

Bài 3: Biến ngẫu nhiên rời rạc

1) Định nghĩa

• Biến ngẫu nhiên X được gọi là rời rạc nếu X chỉ nhận một số hữu hạn giá trị hoặc nhận vô hạn đếm được giá trị.

Bài 3: Biến ngẫu nhiên rời rạc

1) Định nghĩa

• Biến ngẫu nhiên X được gọi là rời rạc nếu X chỉ nhận một số hữu hạn giá trị hoặc nhận vô hạn đếm được giá trị.

• Hàm $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm khối lượng xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X.

Bài 3: Biến ngẫu nhiên rời rạc

1) Định nghĩa

• Biến ngẫu nhiên X được gọi là rời rạc nếu X chỉ nhận một số hữu hạn giá trị hoặc nhận vô hạn đếm được giá trị.

• Hàm $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm khối lượng xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X.

• Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì $\mathrm{Mod}(X)$ là giá trị của X mà tại đó xác suất tương ứng lớn nhất.

2) Bảng phân bố xác suất

2) Bảng phân bố xác suất

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận n giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2) Bảng phân bố xác suất

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận n giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Đặt

$$p_k = \mathbb{P}(X = x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

2) Bảng phân bố xác suất

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận n giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Đặt

$$p_k = \mathbb{P}(X = x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

2) Bảng phân bố xác suất

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận n giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Đặt

$$p_k = \mathbb{P}(X = x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Chú ý $0 \leq p_k \leq 1, k = 1, 2, \ldots, n$ và $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Khi X nhận vô hạn đếm được giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Khi X nhận vô hạn đếm được giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
Đặt

$$p_k = \mathbb{P}(X = x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Khi X nhận vô hạn đếm được giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
Đặt

$$p_k = \mathbb{P}(X = x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Khi X nhận vô hạn đếm được giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
Đặt

$$p_k = \mathbb{P}(X = x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Chú ý $0 \leq p_k \leq 1, k = 1, 2, \ldots$ và $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Ví dụ 1

Một lô hàng có 14 sản phẩm trong đó 5 sản phẩm loại I và 9 sản phẩm loại II. Chọn ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ lô hàng, gọi X là số sản phẩm loại I chọn được. Lập bảng phân bố xác suất của X, tìm $\mathrm{Mod}(X)$ và hàm khối lượng xác suất của X.

Lời giải

Lời giải

Ta thấy X nhận 3 giá trị là $0; 1; 2$.

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{C_9^2}{C_{14}^2}=\frac{36}{91},$$

Lời giải

Ta thấy X nhận 3 giá trị là $0; 1; 2$.

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{C_9^2}{C_{14}^2}=\frac{36}{91},$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{C_5^1\cdot C_9^1}{C_{14}^2}=\frac{45}{91},$$

Lời giải

Ta thấy X nhận 3 giá trị là $0; 1; 2$.

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{C_9^2}{C_{14}^2}=\frac{36}{91},$$
$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{C_5^1\cdot C_9^1}{C_{14}^2}=\frac{45}{91},$$
$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{C_5^2}{C_{14}^2}=\frac{10}{91}.$$

Bảng phân bố xác suất của X

X	0	1	2
$\mathbb{P}$	$\frac{36}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{10}{91}$

Bảng phân bố xác suất của X

X	0	1	2
$\mathbb{P}$	$\frac{36}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{10}{91}$

Ta có $\text{Mod}(X) = 1$ vì xác suất $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{45}{91}$ là lớn nhất.

Bảng phân bố xác suất của X

X	0	1	2
$\mathbb{P}$	$\frac{36}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{10}{91}$

Ta có $\mathrm{Mod}(X) = 1$ vì xác suất $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{45}{91}$ là lớn nhất.

Hàm khối lượng xác suất của X

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

Bảng phân bố xác suất của X

X	0	1	2
$\mathbb{P}$	$\frac{36}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{10}{91}$

Ta có $\mathrm{Mod}(X) = 1$ vì xác suất $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{45}{91}$ là lớn nhất.

Hàm khối lượng xác suất của X

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin \{0; 1; 2\} \\ \frac{36}{91} & \text{nếu } x = 0 \\ \frac{45}{91} & \text{nếu } x = 1 \\ \frac{10}{91} & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$$

3) Hàm phân bố xác suất

3) Hàm phân bố xác suất

Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

trong đó

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$

3) Hàm phân bố xác suất

Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

trong đó

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$

Hàm phân bố xác suất của X là $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ được xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < x_1 \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_k & \text{khi } x_k \leq x < x_{k+1},\ k = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 & \text{khi } x \geq x_n \end{cases}$$

Hay viết tường minh

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < x_1 \\ p_1 & \text{khi } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{khi } x_2 \leq x < x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & \text{khi } x_3 \leq x < x_4 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} & \text{khi } x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & \text{khi } x \geq x_n \end{cases}$$

Nếu X có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

trong đó

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$$

Nếu X có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

trong đó

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$$

Hàm phân bố xác suất của X là $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ được xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < x_1 \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_k & \text{khi } x_k \leq x < x_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Hay viết tường minh

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < x_1 \\ p_1 & \text{khi } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{khi } x_2 \leq x < x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & \text{khi } x_3 \leq x < x_4 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} & \text{khi } x_{n-1} \leq x < x_n \\ \dots & \dots \end{cases}$$

4) Kỳ vọng, phương sai, độ lệch tiêu chuẩn

4) Kỳ vọng, phương sai, độ lệch tiêu chuẩn

- Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

4) Kỳ vọng, phương sai, độ lệch tiêu chuẩn

- Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Kỳ vọng của X (còn được gọi là giá trị trung bình của X)

$$\mathbb{E}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n.$$

4) Kỳ vọng, phương sai, độ lệch tiêu chuẩn

- Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Kỳ vọng của X (còn được gọi là giá trị trung bình của X)

$$\mathbb{E}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n.$$

Kỳ vọng của X^2

$$\mathbb{E}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \cdots + x_n^2p_n.$$

Phương sai của X

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Phương sai của X

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Ta chứng minh được phương sai của X luôn không âm, khi đó độ lệch tiêu chuẩn của X là $\sigma(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)}.$$

Nếu X có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Khi đó

$$\mathbb{E}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_kp_k,$$

Nếu X có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Khi đó

$$\mathbb{E}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_kp_k,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \cdots + x_n^2p_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2p_k,$$

Nếu X có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Khi đó

$$\mathbb{E}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_kp_k,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \cdots + x_n^2p_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2p_k,$$

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2,$$

Nếu X có bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Khi đó

$$\mathbb{E}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_kp_k,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \cdots + x_n^2p_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2p_k,$$

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)}.$$

Ví dụ 2

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất

X	-2	1	2	3
$\mathbb{P}$	$0,1$	$0,3$	k	$0,4$

a) Tìm k, $\mathrm{Mod}(X)$, hàm phân bố xác suất $F(x)$ và hàm khối lượng xác suất của X.

b) Tính kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$ và phương sai $\mathbb{D}(X)$.

c) Tính $\mathbb{P}(1 \le X \le 2,5)$, $\mathbb{P}(X \ge 1)$, $\mathbb{P}(X \le 2,5 | X \ge 1)$.

d) Lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = X^2 - 3X + 1$ và tính $\mathbb{E}(Y)$.

Lời giải

Lời giải

a) Ta có $0 \leq k \leq 1$ và

$$0,1 + 0,3 + k + 0,4 = 1$$

Lời giải

a) Ta có $0 \leq k \leq 1$ và

$$\begin{aligned} & 0,1 + 0,3 + k + 0,4 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & k + 0,8 = 1 \end{aligned}$$

Lời giải

a) Ta có $0 \leq k \leq 1$ và

$$\begin{aligned} & 0,1+0,3+k+0,4=1 \\ \Leftrightarrow\ & k+0,8=1 \\ \Leftrightarrow\ & k=0,2. \end{aligned}$$

Lời giải

a) Ta có $0 \leq k \leq 1$ và

$$\begin{aligned} & 0,1 + 0,3 + k + 0,4 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & k + 0,8 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & k = 0,2. \end{aligned}$$

Vậy $k = 0,2$.

Lời giải

a) Ta có $0 \leq k \leq 1$ và

$$\begin{aligned} & 0,1 + 0,3 + k + 0,4 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & k + 0,8 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & k = 0,2. \end{aligned}$$

Vậy $k = 0,2$.

Ta có $\mathrm{Mod}(X) = 3$ vì xác suất $\mathbb{P}(X = 3) = 0,4$ là lớn nhất.

Hàm phân bố xác suất của X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < -2 \\ 0,1 & \text{khi } -2 \leq x < 1 \\ 0,1 + 0,3 = 0,4 & \text{khi } 1 \leq x < 2 \\ 0,1 + 0,3 + 0,2 = 0,6 & \text{khi } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$$

Hàm khối lượng xác suất của X

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

Hàm khối lượng xác suất của X

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin \{-2; 1; 2; 3\} \\ 0,1 & \text{nếu } x = -2 \\ 0,3 & \text{nếu } x = 1 \\ 0,2 & \text{nếu } x = 2 \\ 0,4 & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$$

b) Kỳ vọng của X

$$\mathbb{E}(X) = (-2) \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,4$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2)\cdot 0,1 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,4\\ &= 1,7.\end{aligned}$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2)\cdot 0,1 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,4\\ &= 1,7.\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = (-2)^2\cdot 0,1 + 1^2\cdot 0,3 + 2^2\cdot 0,2 + 3^2\cdot 0,4$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2)\cdot 0,1 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,4\\ &= 1,7.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= (-2)^2\cdot 0,1 + 1^2\cdot 0,3 + 2^2\cdot 0,2 + 3^2\cdot 0,4\\ &= 5,1.\end{aligned}$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2)\cdot 0,1 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,4\\ &= 1,7.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= (-2)^2\cdot 0,1 + 1^2\cdot 0,3 + 2^2\cdot 0,2 + 3^2\cdot 0,4\\ &= 5,1.\end{aligned}$$

Phương sai của X

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2)\cdot 0,1 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,4\\ &= 1,7.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= (-2)^2\cdot 0,1 + 1^2\cdot 0,3 + 2^2\cdot 0,2 + 3^2\cdot 0,4\\ &= 5,1.\end{aligned}$$

Phương sai của X

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\\ &= 5,1 - 1,7^2\end{aligned}$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-2)\cdot 0,1 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,4\\ &= 1,7.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= (-2)^2\cdot 0,1 + 1^2\cdot 0,3 + 2^2\cdot 0,2 + 3^2\cdot 0,4\\ &= 5,1.\end{aligned}$$

Phương sai của X

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\\ &= 5,1 - 1,7^2\\ &= 2,21.\end{aligned}$$

c) Ta có

$$(1 \leq X \leq 2,5) = (X = 1) \cup (X = 2).$$

c) Ta có

$$(1 \leq X \leq 2,5) = (X = 1) \cup (X = 2).$$

Vì hai biến cố $(X = 1)$ và $(X = 2)$ xung khắc nên

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2,5) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$$

c) Ta có

$$(1 \leq X \leq 2,5) = (X = 1) \cup (X = 2).$$

Vì hai biến cố $(X = 1)$ và $(X = 2)$ xung khắc nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2,5) &= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)\\ &= 0,3 + 0,2\end{aligned}$$

c) Ta có

$$(1 \leq X \leq 2,5) = (X = 1) \cup (X = 2).$$

Vì hai biến cố $(X = 1)$ và $(X = 2)$ xung khắc nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2,5) &= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) \\ &= 0,3 + 0,2 \\ &= 0,5.\end{aligned}$$

Ta có

$$(X \geq 1) = (X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3).$$

Ta có
$$(X \geq 1) = (X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3).$$
Vì ba biến cố $(X = 1)$, $(X = 2)$, $(X = 3)$ xung khắc từng đôi nên

Ta có
$$(X \geq 1) = (X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3).$$
Vì ba biến cố $(X = 1)$, $(X = 2)$, $(X = 3)$ xung khắc từng đôi nên
$$\mathbb{P}(X \geq 1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)$$

Ta có
$$(X \geq 1) = (X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3).$$
Vì ba biến cố $(X = 1)$, $(X = 2)$, $(X = 3)$ xung khắc từng đôi nên
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 1) &= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)\\ &= 0,3 + 0,2 + 0,4\end{aligned}$$

Ta có
$$(X \geq 1) = (X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3).$$
Vì ba biến cố $(X = 1)$, $(X = 2)$, $(X = 3)$ xung khắc từng đôi nên
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 1) &= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)\\ &= 0,3 + 0,2 + 0,4\\ &= 0,9.\end{aligned}$$

Vậy

$$\mathbb{P}(X \leq 2,5|X \geq 1) = \frac{\mathbb{P}((X \leq 2,5)(X \geq 1))}{\mathbb{P}(X \geq 1)}$$

Vậy

$$\mathbb{P}(X \leq 2,5 | X \geq 1) = \frac{\mathbb{P}((X \leq 2,5)(X \geq 1))}{\mathbb{P}(X \geq 1)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2,5)}{\mathbb{P}(X \geq 1)}$$

Vậy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \le 2,5 | X \ge 1) &= \frac{\mathbb{P}((X \le 2,5)(X \ge 1))}{\mathbb{P}(X \ge 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(1 \le X \le 2,5)}{\mathbb{P}(X \ge 1)} \\ &= \frac{0,5}{0,9}\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 2,5 | X \geq 1) &= \frac{\mathbb{P}((X \leq 2,5)(X \geq 1))}{\mathbb{P}(X \geq 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2,5)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} \\ &= \frac{0,5}{0,9} \\ &= \frac{5}{9}.\end{aligned}$$

d) Ta có

X	-2	1	2	3
$Y = X^2 - 3X + 1$	11	-1	-1	1

.

d) Ta có

X	-2	1	2	3
$Y = X^2 - 3X + 1$	11	-1	-1	1

.

Do đó Y nhận 3 giá trị là $-1; 1; 11$.

d) Ta có

X	-2	1	2	3
$Y=X^2-3X+1$	11	-1	-1	1

.

Do đó Y nhận 3 giá trị là $-1; 1; 11$.

Ta có

$$(Y=-1)=(X=1)\cup(X=2).$$

d) Ta có

X	-2	1	2	3
$Y = X^2 - 3X + 1$	11	-1	-1	1

.

Do đó Y nhận 3 giá trị là $-1; 1; 11$.

Ta có

$$(Y = -1) = (X = 1) \cup (X = 2).$$

Vì hai biến cố $(X = 1)$ và $(X = 2)$ là xung khắc nên

$$\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$$

d) Ta có

X	-2	1	2	3
$Y = X^2 - 3X + 1$	11	-1	-1	1

.

Do đó Y nhận 3 giá trị là $-1; 1; 11$.

Ta có

$$(Y = -1) = (X = 1) \cup (X = 2).$$

Vì hai biến cố $(X = 1)$ và $(X = 2)$ là xung khắc nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = -1) &= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)\\ &= 0,3 + k\end{aligned}$$

d) Ta có

X	-2	1	2	3
$Y=X^2-3X+1$	11	-1	-1	1

.

Do đó Y nhận 3 giá trị là $-1; 1; 11$.

Ta có

$$(Y=-1)=(X=1)\cup(X=2).$$

Vì hai biến cố $(X=1)$ và $(X=2)$ là xung khắc nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=-1)&=\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)\\&=0,3+k\\&=0,5.\end{aligned}$$

Ta có

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 3)$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 3) \\ &= 0,4,\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 3)\\ &= 0,4,\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Y = 11) = \mathbb{P}(X = -2)$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 3) \\ &= 0,4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 11) &= \mathbb{P}(X = -2) \\ &= 0,1.\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 3)\\ &= 0,4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 11) &= \mathbb{P}(X = -2)\\ &= 0,1.\end{aligned}$$

Bảng phân bố xác suất của Y

Y	-1	1	11
$\mathbb{P}$	$0,5$	$0,4$	$0,1$

.

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 3)\\ &= 0,4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 11) &= \mathbb{P}(X = -2)\\ &= 0,1.\end{aligned}$$

Bảng phân bố xác suất của Y

Y	-1	1	11
$\mathbb{P}$	$0,5$	$0,4$	$0,1$

.

Kỳ vọng của Y

$$\mathbb{E}(Y) = (-1) \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,4 + 11 \cdot 0,1$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=1) &= \mathbb{P}(X=3)\\ &= 0,4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=11) &= \mathbb{P}(X=-2)\\ &= 0,1.\end{aligned}$$

Bảng phân bố xác suất của Y

Y	-1	1	11
$\mathbb{P}$	$0,5$	$0,4$	$0,1$

.

Kỳ vọng của Y

$$\mathbb{E}(Y) = (-1)\cdot 0,5 + 1\cdot 0,4 + 11\cdot 0,1 = 1.$$

Ví dụ 3

Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc có hàm khối lượng xác suất cho bởi công thức

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin \{0; 1; 2; \ldots\} \\ \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{nếu } x = 0; 1; 2; \ldots \end{cases}$$

trong đó $\lambda > 0$. Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân bố Poisson với tham số λ.

a) Kiểm tra lại rằng $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$.

b) Tính kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$ và phương sai $\mathbb{D}(X)$.

Lời giải

Lời giải

a) Theo kết quả ở Giải tích 1 thì hàm số e^x có thể khai triển được thành chuỗi Maclaurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Lời giải

a) Theo kết quả ở Giải tích 1 thì hàm số e^x có thể khai triển được thành chuỗi Maclaurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Do đó

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}.e^{\lambda} = 1.$$

b) Từ hàm khối lượng xác suất của X, ta suy ra X nhận các giá trị $0, 1, 2, \ldots$ và

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Do đó

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

Do đó

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!}\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!}\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}
\end{aligned}$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda . e^{\lambda}
\end{aligned}
$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda.e^{\lambda} = \lambda.\end{aligned}$$

Tương tự

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k)$$

Tương tự

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Tương tự

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!}$$

Tương tự

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!}\end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!}\end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{(n-1)!} + e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{(n-1)!} + e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{m+2}}{m!} + e^{-\lambda}\lambda . e^{\lambda}\end{aligned}$$

Tương tự

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{(n-1)!} + e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{m+2}}{m!} + e^{-\lambda}\lambda . e^{\lambda} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} + \lambda
\end{aligned}
$$

Tương tự

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{(n-1)!} + e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{m+2}}{m!} + e^{-\lambda}\lambda.e^{\lambda} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} + \lambda = e^{-\lambda}\lambda^2.e^{\lambda} + \lambda
\end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{(n-1)!} + e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{m+2}}{m!} + e^{-\lambda}\lambda . e^{\lambda} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} + \lambda = e^{-\lambda}\lambda^2 . e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}$$

Phương sai của X

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Ví dụ 4

Một lô hàng có 14 sản phẩm trong đó 5 sản phẩm loại I và 9 sản phẩm loại II. Chọn ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ lô hàng. Chọn mỗi sản phẩm loại I được thưởng 50 USD và mỗi sản phẩm loại II được thưởng 10 USD, tính số tiền thưởng trung bình nhận được.

Lời giải

Lời giải

Gọi X là số sản phẩm loại I chọn được trong 2 sản phẩm chọn ra,

Lời giải

Gọi X là số sản phẩm loại I chọn được trong 2 sản phẩm chọn ra, ta thấy X nhận 3 giá trị là $0; 1; 2$.

Lời giải

Gọi X là số sản phẩm loại I chọn được trong 2 sản phẩm chọn ra, ta thấy X nhận 3 giá trị là $0; 1; 2$.

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{C_9^2}{C_{14}^2} = \frac{36}{91},$$

Lời giải

Gọi X là số sản phẩm loại I chọn được trong 2 sản phẩm chọn ra, ta thấy X nhận 3 giá trị là $0; 1; 2$.

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{C_9^2}{C_{14}^2}=\frac{36}{91},$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{C_5^1\cdot C_9^1}{C_{14}^2}=\frac{45}{91},$$

Lời giải

Gọi X là số sản phẩm loại I chọn được trong 2 sản phẩm chọn ra, ta thấy X nhận 3 giá trị là $0; 1; 2$.

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{C_9^2}{C_{14}^2}=\frac{36}{91},$$
$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{C_5^1\cdot C_9^1}{C_{14}^2}=\frac{45}{91},$$
$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{C_5^2}{C_{14}^2}=\frac{10}{91}.$$

Gọi Y là số tiền thưởng nhận được, ta có

$$\begin{aligned} Y &= 50X + 10(2 - X) \\ &= 20 + 40X. \end{aligned}$$

Gọi Y là số tiền thưởng nhận được, ta có

$$\begin{aligned} Y &= 50X + 10(2 - X) \\ &= 20 + 40X. \end{aligned}$$

Ta có

X	0	1	2
$Y = 20 + 40X$	20	60	100

Gọi Y là số tiền thưởng nhận được, ta có

$$\begin{aligned} Y &= 50X + 10(2 - X) \\ &= 20 + 40X. \end{aligned}$$

Ta có

X	0	1	2
$Y = 20 + 40X$	20	60	100

Do đó Y nhận 3 giá trị là $20; 60; 100$.

Ta có

$$\mathbb{P}(Y = 20) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{36}{91},$$

Ta có

$$\mathbb{P}(Y = 20) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{36}{91},$$
$$\mathbb{P}(Y = 60) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{45}{91},$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 20) = \mathbb{P}(X = 0) &= \frac{36}{91}, \\
\mathbb{P}(Y = 60) = \mathbb{P}(X = 1) &= \frac{45}{91}, \\
\mathbb{P}(Y = 100) = \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{10}{91}.
\end{aligned}$$

Bảng phân bố xác suất của Y

Y	20	60	100
$\mathbb{P}$	$\frac{36}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{10}{91}$

Bảng phân bố xác suất của Y

Y	20	60	100
$\mathbb{P}$	$\dfrac{36}{91}$	$\dfrac{45}{91}$	$\dfrac{10}{91}$

Số tiền thưởng trung bình nhận được

$$\mathbb{E}(Y) = 20 \cdot \frac{36}{91} + 60 \cdot \frac{45}{91} + 100 \cdot \frac{10}{91}$$

Bảng phân bố xác suất của Y

Y	20	60	100
$\mathbb{P}$	$\frac{36}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{10}{91}$

Số tiền thưởng trung bình nhận được

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 20 \cdot \frac{36}{91} + 60 \cdot \frac{45}{91} + 100 \cdot \frac{10}{91} \\ &= \frac{4420}{91} \\ &\approx 48,57(\text{USD}).\end{aligned}$$

5) Tính độc lập của các biến ngẫu nhiên

5) Tính độc lập của các biến ngẫu nhiên

- Hai biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y được gọi là độc lập nếu

$$\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b),$$

trong đó a, b là hai giá trị bất kỳ của X, Y,

5) Tính độc lập của các biến ngẫu nhiên

- Hai biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y được gọi là độc lập nếu

$$\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b),$$

trong đó a, b là hai giá trị bất kỳ của X, Y, $(X = a, Y = b)$ là tích của hai biến cố $(X = a)$, $(Y = b)$.

5) Tính độc lập của các biến ngẫu nhiên

- Hai biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y được gọi là độc lập nếu

$$\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b),$$

trong đó a, b là hai giá trị bất kỳ của X, Y, $(X = a, Y = b)$ là tích của hai biến cố $(X = a)$, $(Y = b)$.

- Ba biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y, Z được gọi là độc lập nếu

$$\mathbb{P}(X = a, Y = b, Z = c) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b)\mathbb{P}(Z = c),$$

5) Tính độc lập của các biến ngẫu nhiên

- Hai biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y được gọi là độc lập nếu

$$\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b),$$

trong đó a, b là hai giá trị bất kỳ của X, Y, $(X = a, Y = b)$ là tích của hai biến cố $(X = a)$, $(Y = b)$.

- Ba biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y, Z được gọi là độc lập nếu

$$\mathbb{P}(X = a, Y = b, Z = c) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b)\mathbb{P}(Z = c),$$

trong đó a, b, c là ba giá trị bất kỳ của X, Y, Z,

5) Tính độc lập của các biến ngẫu nhiên

- Hai biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y được gọi là độc lập nếu

$$\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b),$$

trong đó a, b là hai giá trị bất kỳ của X, Y, $(X = a, Y = b)$ là tích của hai biến cố $(X = a)$, $(Y = b)$.

- Ba biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y, Z được gọi là độc lập nếu

$$\mathbb{P}(X = a, Y = b, Z = c) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b)\mathbb{P}(Z = c),$$

trong đó a, b, c là ba giá trị bất kỳ của X, Y, Z, $(X = a, Y = b, Z = c)$ là tích của ba biến cố $(X = a)$, $(Y = b)$, $(Z = c)$.

6) Một số tính chất của kỳ vọng và phương sai

6) Một số tính chất của kỳ vọng và phương sai

- Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên thì

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \cdots + \mathbb{E}(X_n).$$

6) Một số tính chất của kỳ vọng và phương sai

- Nếu $X_1, X_2, \dots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên thì

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \cdots + \mathbb{E}(X_n).$$

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là hằng số.

6) Một số tính chất của kỳ vọng và phương sai

- Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên thì

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \cdots + \mathbb{E}(X_n).$$

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là hằng số.
- $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là hằng số.

6) Một số tính chất của kỳ vọng và phương sai

- Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên thì

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \cdots + \mathbb{E}(X_n).$$

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là hằng số.
- $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là hằng số.
- $\mathbb{D}(aX + b) = a^2\mathbb{D}(X)$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là hằng số.

- Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì
$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

• Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

• Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì

$$\mathbb{D}(aX + bY) = a^2\mathbb{D}(X) + b^2\mathbb{D}(Y),$$

trong đó $a, b \in \mathbb{R}$ là hằng số.

• Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

• Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì

$$\mathbb{D}(aX + bY) = a^2\mathbb{D}(X) + b^2\mathbb{D}(Y),$$

trong đó $a, b \in \mathbb{R}$ là hằng số.

• Nếu X, Y, Z là ba biến ngẫu nhiên độc lập thì

$$\mathbb{D}(X + Y + Z) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y) + \mathbb{D}(Z).$$

Ví dụ 5

Cho 2 biến ngẫu nhiên X, Y độc lập có bảng phân bố xác suất

X	-1	0	1	2
$\mathbb{P}$	$0,2$	$0,3$	$0,3$	$0,2$

,

Y	-1	0	1
$\mathbb{P}$	$0,3$	$0,4$	$0,3$

a) Lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên $X + Y$.

b) Tính $\mathbb{E}(X - 2Y)$.

Lời giải

Lời giải

a) Ta thấy $X + Y$ có thể nhận các giá trị là -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Lời giải

a) Ta thấy $X+Y$ có thể nhận các giá trị là -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Dễ thấy

$$(X+Y=-2)=(X=-1,Y=-1).$$

Lời giải

a) Ta thấy $X+Y$ có thể nhận các giá trị là -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Dễ thấy

$$(X+Y=-2)=(X=-1,Y=-1).$$

Vì hai biến ngẫu nhiên X,Y là độc lập nên

$$\mathbb{P}(X+Y=-2)=\mathbb{P}(X=-1,Y=-1)$$

Lời giải

a) Ta thấy $X+Y$ có thể nhận các giá trị là -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Dễ thấy

$$(X+Y=-2)=(X=-1, Y=-1).$$

Vì hai biến ngẫu nhiên X, Y là độc lập nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=-2)&=\mathbb{P}(X=-1, Y=-1)\\&=\mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=-1)\end{aligned}$$

Lời giải

a) Ta thấy $X+Y$ có thể nhận các giá trị là -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Dễ thấy

$$(X+Y=-2)=(X=-1,Y=-1).$$

Vì hai biến ngẫu nhiên X,Y là độc lập nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=-2)&=\mathbb{P}(X=-1,Y=-1)\\&=\mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=-1)\\&=0,2\cdot 0,3\end{aligned}$$

Lời giải

a) Ta thấy $X + Y$ có thể nhận các giá trị là -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Dễ thấy

$$(X + Y = -2) = (X = -1, Y = -1).$$

Vì hai biến ngẫu nhiên X, Y là độc lập nên

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X + Y = -2) &= \mathbb{P}(X = -1, Y = -1) \\
&= \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Y = -1) \\
&= 0,2 \cdot 0,3 \\
&= 0,06.
\end{aligned}$$

Ta có
$$(X+Y=-1)=(X=-1,Y=0)\cup(X=0,Y=-1).$$

Ta có

$$(X+Y=-1)=(X=-1,Y=0)\cup(X=0,Y=-1).$$

Vì hai biến cố $(X=-1,Y=0)$, $(X=0,Y=-1)$ xung khắc và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\mathbb{P}(X+Y=-1)=\mathbb{P}(X=-1,Y=0)+\mathbb{P}(X=0,Y=-1)$$

Ta có

$$(X+Y=-1)=(X=-1,Y=0)\cup(X=0,Y=-1).$$

Vì hai biến cố $(X=-1,Y=0)$, $(X=0,Y=-1)$ xung khắc và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=-1)&=\mathbb{P}(X=-1,Y=0)+\mathbb{P}(X=0,Y=-1)\\&=\mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=-1)\end{aligned}$$

Ta có

$$(X+Y=-1)=(X=-1,Y=0)\cup(X=0,Y=-1).$$

Vì hai biến cố $(X=-1,Y=0)$, $(X=0,Y=-1)$ xung khắc và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=-1)&=\mathbb{P}(X=-1,Y=0)+\mathbb{P}(X=0,Y=-1)\\&=\mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=-1)\\&=0,2\cdot 0,4+0,3\cdot 0,3\end{aligned}$$

Ta có

$$(X+Y=-1)=(X=-1,Y=0)\cup(X=0,Y=-1).$$

Vì hai biến cố $(X=-1,Y=0)$, $(X=0,Y=-1)$ xung khắc và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=-1)&=\mathbb{P}(X=-1,Y=0)+\mathbb{P}(X=0,Y=-1)\\&=\mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=-1)\\&=0,2\cdot 0,4+0,3\cdot 0,3\\&=0,17.\end{aligned}$$

Ta có

$$(X+Y=0)=(X=-1,Y=1)\cup(X=0,Y=0)\cup(X=1,Y=-1).$$

Ta có

$$(X+Y=0)=(X=-1,Y=1)\cup(X=0,Y=0)\cup(X=1,Y=-1).$$

Vì ba biến cố $(X=-1,Y=1)$, $(X=0,Y=0)$, $(X=1,Y=-1)$ xung khắc từng đôi và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

Ta có

$$(X+Y=0)=(X=-1,Y=1)\cup(X=0,Y=0)\cup(X=1,Y=-1).$$

Vì ba biến cố $(X=-1,Y=1)$, $(X=0,Y=0)$, $(X=1,Y=-1)$ xung khắc từng đôi và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\mathbb{P}(X+Y=0)$$

Ta có

$$(X+Y=0)=(X=-1,Y=1)\cup(X=0,Y=0)\cup(X=1,Y=-1).$$

Vì ba biến cố $(X=-1,Y=1)$, $(X=0,Y=0)$, $(X=1,Y=-1)$ xung khắc từng đôi và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\mathbb{P}(X+Y=0)$$

$$=\mathbb{P}(X=-1,Y=1)+\mathbb{P}(X=0,Y=0)+\mathbb{P}(X=1,Y=-1)$$

Ta có

$(X+Y=0)=(X=-1,Y=1)\cup(X=0,Y=0)\cup(X=1,Y=-1).$

Vì ba biến cố $(X=-1,Y=1)$, $(X=0,Y=0)$, $(X=1,Y=-1)$ xung khắc từng đôi và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X+Y=0)\\
&=\mathbb{P}(X=-1,Y=1)+\mathbb{P}(X=0,Y=0)+\mathbb{P}(X=1,Y=-1)\\
&=\mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=-1)
\end{aligned}$$

Ta có

$$(X+Y=0)=(X=-1,Y=1)\cup(X=0,Y=0)\cup(X=1,Y=-1).$$

Vì ba biến cố $(X=-1,Y=1)$, $(X=0,Y=0)$, $(X=1,Y=-1)$ xung khắc từng đôi và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X+Y=0)\\
&=\mathbb{P}(X=-1,Y=1)+\mathbb{P}(X=0,Y=0)+\mathbb{P}(X=1,Y=-1)\\
&=\mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=-1)\\
&=0,2\cdot 0,3+0,3\cdot 0,4+0,3\cdot 0,3
\end{aligned}$$

Ta có

$(X+Y=0)=(X=-1,Y=1)\cup(X=0,Y=0)\cup(X=1,Y=-1).$

Vì ba biến cố $(X=-1,Y=1)$, $(X=0,Y=0)$, $(X=1,Y=-1)$ xung khắc từng đôi và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X+Y=0)\\
&=\mathbb{P}(X=-1,Y=1)+\mathbb{P}(X=0,Y=0)+\mathbb{P}(X=1,Y=-1)\\
&=\mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=-1)\\
&=0,2\cdot 0,3+0,3\cdot 0,4+0,3\cdot 0,3\\
&=0,27.
\end{aligned}$$

Ta có

$$(X+Y=1)=(X=0,Y=1)\cup(X=1,Y=0)\cup(X=2,Y=-1).$$

Vì ba biến cố $(X=0,Y=1)$, $(X=1,Y=0)$, $(X=2,Y=-1)$ xung khắc từng đôi và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

Ta có

$$(X+Y=1)=(X=0,Y=1)\cup(X=1,Y=0)\cup(X=2,Y=-1).$$

Vì ba biến cố $(X=0,Y=1)$, $(X=1,Y=0)$, $(X=2,Y=-1)$ xung khắc từng đôi và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\mathbb{P}(X+Y=1)$$

Ta có

$$(X+Y=1)=(X=0,Y=1)\cup(X=1,Y=0)\cup(X=2,Y=-1).$$

Vì ba biến cố $(X=0,Y=1)$, $(X=1,Y=0)$, $(X=2,Y=-1)$ xung khắc từng đôi và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X+Y=1)\\ &=\mathbb{P}(X=0,Y=1)+\mathbb{P}(X=1,Y=0)+\mathbb{P}(X=2,Y=-1)\end{aligned}$$

Ta có

$$(X+Y=1)=(X=0,Y=1)\cup(X=1,Y=0)\cup(X=2,Y=-1).$$

Vì ba biến cố $(X=0,Y=1)$, $(X=1,Y=0)$, $(X=2,Y=-1)$ xung khắc từng đôi và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X+Y=1)\\
&=\mathbb{P}(X=0,Y=1)+\mathbb{P}(X=1,Y=0)+\mathbb{P}(X=2,Y=-1)\\
&=\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=-1)
\end{aligned}$$

Ta có

$$(X+Y=1)=(X=0,Y=1)\cup(X=1,Y=0)\cup(X=2,Y=-1).$$

Vì ba biến cố $(X=0,Y=1)$, $(X=1,Y=0)$, $(X=2,Y=-1)$ xung khắc từng đôi và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X+Y=1)\\
&=\mathbb{P}(X=0,Y=1)+\mathbb{P}(X=1,Y=0)+\mathbb{P}(X=2,Y=-1)\\
&=\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=-1)\\
&=0,3\cdot 0,3+0,3\cdot 0,4+0,2\cdot 0,3
\end{aligned}$$

Ta có

$$(X+Y=1)=(X=0,Y=1)\cup(X=1,Y=0)\cup(X=2,Y=-1).$$

Vì ba biến cố $(X=0,Y=1)$, $(X=1,Y=0)$, $(X=2,Y=-1)$ xung khắc từng đôi và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X+Y=1)\\
&=\mathbb{P}(X=0,Y=1)+\mathbb{P}(X=1,Y=0)+\mathbb{P}(X=2,Y=-1)\\
&=\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=-1)\\
&=0,3\cdot 0,3+0,3\cdot 0,4+0,2\cdot 0,3\\
&=0,27.
\end{aligned}$$

Ta có

$$(X + Y = 2) = (X = 1, Y = 1) \cup (X = 2, Y = 0).$$

Ta có

$$(X+Y=2)=(X=1,Y=1)\cup(X=2,Y=0).$$

Vì hai biến cố $(X=1,Y=1)$, $(X=2,Y=0)$ xung khắc và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\mathbb{P}(X+Y=2)=\mathbb{P}(X=1,Y=1)+\mathbb{P}(X=2,Y=0)$$

Ta có

$$(X+Y=2)=(X=1,Y=1)\cup(X=2,Y=0).$$

Vì hai biến cố $(X=1,Y=1)$, $(X=2,Y=0)$ xung khắc và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=2)&=\mathbb{P}(X=1,Y=1)+\mathbb{P}(X=2,Y=0)\\&=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=0)\end{aligned}$$

Ta có

$$(X+Y=2)=(X=1,Y=1)\cup(X=2,Y=0).$$

Vì hai biến cố $(X=1,Y=1)$, $(X=2,Y=0)$ xung khắc và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=2)&=\mathbb{P}(X=1,Y=1)+\mathbb{P}(X=2,Y=0)\\&=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=0)\\&=0,3\cdot 0,3+0,2\cdot 0,4\end{aligned}$$

Ta có
$$(X+Y=2)=(X=1,Y=1)\cup(X=2,Y=0).$$
Vì hai biến cố $(X=1,Y=1)$, $(X=2,Y=0)$ xung khắc và hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=2)&=\mathbb{P}(X=1,Y=1)+\mathbb{P}(X=2,Y=0)\\&=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=0)\\&=0,3\cdot0,3+0,2\cdot0,4\\&=0,17.\end{aligned}$$

Ta có
$$(X+Y=3)=(X=2,Y=1).$$

Ta có

$$(X + Y = 3) = (X = 2, Y = 1).$$

Vì hai biến ngẫu nhiên X, Y độc lập nên

Ta có
$$(X+Y=3)=(X=2,Y=1).$$
Vì hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên
$$\mathbb{P}(X+Y=3)=\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=1)$$

Ta có
$$(X + Y = 3) = (X = 2, Y = 1).$$
Vì hai biến ngẫu nhiên X, Y độc lập nên
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X + Y = 3) &= \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 1)\\ &= 0,2 \cdot 0,3\end{aligned}$$

Ta có
$$(X+Y=3)=(X=2,Y=1).$$
Vì hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=3)&=\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=1)\\&=0,2\cdot 0,3\\&=0,06.\end{aligned}$$

Ta có

$$(X+Y=3)=(X=2,Y=1).$$

Vì hai biến ngẫu nhiên X,Y độc lập nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=3)&=\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=1)\\&=0,2\cdot 0,3\\&=0,06.\end{aligned}$$

Bảng phân bố xác suất của $X+Y$

$X+Y$	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	$0,06$	$0,17$	$0,27$	$0,27$	$0,17$	$0,06$

b) Kỳ vọng của X

$$\mathbb{E}(X) = (-1) \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-1)\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2\\ &= 0,5.\end{aligned}$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-1)\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2\\ &= 0,5.\end{aligned}$$

Kỳ vọng của Y

$$\mathbb{E}(Y) = (-1)\cdot 0,3 + 0\cdot 0,4 + 1\cdot 0,3$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-1)\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2 \\ &= 0,5.\end{aligned}$$

Kỳ vọng của Y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= (-1)\cdot 0,3 + 0\cdot 0,4 + 1\cdot 0,3 \\ &= 0.\end{aligned}$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-1)\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2\\ &= 0,5.\end{aligned}$$

Kỳ vọng của Y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= (-1)\cdot 0,3 + 0\cdot 0,4 + 1\cdot 0,3\\ &= 0.\end{aligned}$$

Vậy

$$\mathbb{E}(X-2Y) = \mathbb{E}(X) - 2\mathbb{E}(Y)$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-1)\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2\\ &= 0,5.\end{aligned}$$

Kỳ vọng của Y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= (-1)\cdot 0,3 + 0\cdot 0,4 + 1\cdot 0,3\\ &= 0.\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X-2Y) &= \mathbb{E}(X) - 2\mathbb{E}(Y)\\ &= 0,5 - 2\cdot 0\end{aligned}$$

b) Kỳ vọng của X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-1)\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2\\ &= 0,5.\end{aligned}$$

Kỳ vọng của Y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= (-1)\cdot 0,3 + 0\cdot 0,4 + 1\cdot 0,3\\ &= 0.\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X-2Y) &= \mathbb{E}(X) - 2\mathbb{E}(Y)\\ &= 0,5 - 2\cdot 0\\ &= 0,5.\end{aligned}$$

Ví dụ 6

Có 5 sản phẩm trong đó có 1 sản phẩm loại I và 4 sản phẩm loại II. Người ta lấy ra lần lượt không hoàn lại 2 sản phẩm. Gọi X là số sản phẩm loại II lấy được.

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tính kỳ vọng và phương sai của $10X - 2$.

Lời giải

Lời giải

a) Ta thấy X nhận 2 giá trị $1; 2$.

Lời giải

a) Ta thấy X nhận 2 giá trị $1; 2$.

$(X = 2)$ là biến cố "Lấy được 2 sản phẩm loại II".

Lời giải

a) Ta thấy X nhận 2 giá trị $1; 2$.

$(X = 2)$ là biến cố "Lấy được 2 sản phẩm loại II".Gọi A_1 là biến cố: "Lấy được sản phẩm loại II ở lần 1", A_2 là biến cố: "Lấy được sản phẩm loại II ở lần 2".

Lời giải

a) Ta thấy X nhận 2 giá trị $1; 2$.

$(X = 2)$ là biến cố "Lấy được 2 sản phẩm loại II".Gọi A_1 là biến cố: "Lấy được sản phẩm loại II ở lần 1", A_2 là biến cố: "Lấy được sản phẩm loại II ở lần 2".

Khi đó

$$(X = 2) = A_1 A_2.$$

Theo công thức nhân xác suất

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(A_1 A_2)$$

Theo công thức nhân xác suất

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(A_1 A_2)\\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\end{aligned}$$

Theo công thức nhân xác suất

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(A_1 A_2) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Theo công thức nhân xác suất

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2) &= \mathbb{P}(A_1A_2)\\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\\ &= \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\\ &= 0,6.\end{aligned}$$

Vì X chỉ nhận hai giá trị 1 và 2 nên biến cố $(X = 1)$ là biến cố đối của biến cố $(X = 2)$, do đó

Vì X chỉ nhận hai giá trị 1 và 2 nên biến cố $(X = 1)$ là biến cố đối của biến cố $(X = 2)$, do đó

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 2)$$

Vì X chỉ nhận hai giá trị 1 và 2 nên biến cố $(X = 1)$ là biến cố đối của biến cố $(X = 2)$, do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 2)\\ &= 1 - 0,6\end{aligned}$$

Vì X chỉ nhận hai giá trị 1 và 2 nên biến cố $(X = 1)$ là biến cố đối của biến cố $(X = 2)$, do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 2)\\ &= 1 - 0,6\\ &= 0,4.\end{aligned}$$

Vì X chỉ nhận hai giá trị 1 và 2 nên biến cố $(X = 1)$ là biến cố đối của biến cố $(X = 2)$, do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 2)\\ &= 1 - 0,6\\ &= 0,4.\end{aligned}$$

Bảng phân bố xác suất của X

X	1	2
$\mathbb{P}$	0,4	0,6

.

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,\\ \mathbb{E}(X^2) &= 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,6\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$
$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,6 = 2,8.$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$
$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,6 = 2,8.$$

Do đó

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,6 = 2,8.$$

Do đó

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2,8 - (1,6)^2$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,6 = 2,8.$$

Do đó

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2,8 - (1,6)^2 = 0,24.$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,6 = 2,8.$$

Do đó

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2,8 - (1,6)^2 = 0,24.$$

Theo tính chất của kỳ vọng và phương sai, ta có

$$\mathbb{E}(10X - 2) = 10\mathbb{E}(X) - 2$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,6 = 2,8.$$

Do đó

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2,8 - (1,6)^2 = 0,24.$$

Theo tính chất của kỳ vọng và phương sai, ta có

$$\mathbb{E}(10X - 2) = 10\mathbb{E}(X) - 2 = 10 \cdot 1,6 - 2$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$
$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,6 = 2,8.$$

Do đó

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2,8 - (1,6)^2 = 0,24.$$

Theo tính chất của kỳ vọng và phương sai, ta có

$$\mathbb{E}(10X - 2) = 10\mathbb{E}(X) - 2 = 10 \cdot 1,6 - 2 = 14,$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$
$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,6 = 2,8.$$

Do đó

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2,8 - (1,6)^2 = 0,24.$$

Theo tính chất của kỳ vọng và phương sai, ta có

$$\mathbb{E}(10X - 2) = 10\mathbb{E}(X) - 2 = 10 \cdot 1,6 - 2 = 14,$$
$$\mathbb{D}(10X - 2) = 10^2\mathbb{D}(X)$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,6 = 2,8.$$

Do đó

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2,8 - (1,6)^2 = 0,24.$$

Theo tính chất của kỳ vọng và phương sai, ta có

$$\mathbb{E}(10X - 2) = 10\mathbb{E}(X) - 2 = 10 \cdot 1,6 - 2 = 14,$$

$$\mathbb{D}(10X - 2) = 10^2\mathbb{D}(X) = 100 \cdot 0,24$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$
$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,6 = 2,8.$$

Do đó

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2,8 - (1,6)^2 = 0,24.$$

Theo tính chất của kỳ vọng và phương sai, ta có

$$\mathbb{E}(10X - 2) = 10\mathbb{E}(X) - 2 = 10 \cdot 1,6 - 2 = 14,$$
$$\mathbb{D}(10X - 2) = 10^2\mathbb{D}(X) = 100 \cdot 0,24 = 24.$$

Ví dụ 7

Cho X_1, X_2, X_3 là ba biến ngẫu nhiên độc lập có bảng phân bố xác suất như sau

X_1	0	2
$\mathbb{P}$	0,65	0,35

,

X_2	1	2
$\mathbb{P}$	0,4	0,6

,

X_3	1	2
$\mathbb{P}$	0,7	0,3

.

a) Tính xác suất $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 5)$.

b) Tính $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3)$.

Lời giải

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}(X_1 + X_2 + X_3 = 5) = (X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2)\\ \cup (X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1).\end{aligned}$$

Vì các biến ngẫu nhiên X_1, X_2, X_3 độc lập nên

$$\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 2)$$

Lời giải

Ta có

$$(X_1 + X_2 + X_3 = 5) = (X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2) \\ \cup (X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1).$$

Vì các biến ngẫu nhiên X_1, X_2, X_3 độc lập nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2) &= \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 2) \\ &= 0,35 \cdot 0,4 \cdot 0,3\end{aligned}$$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}(X_1 + X_2 + X_3 = 5) = (X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2)\\ \cup (X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1).\end{aligned}$$

Vì các biến ngẫu nhiên X_1, X_2, X_3 độc lập nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2) &= \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 2)\\ &= 0,35 \cdot 0,4 \cdot 0,3\\ &= 0,042,\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 2)\mathbb{P}(X_3 = 1)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 2)\mathbb{P}(X_3 = 1) \\ &= 0,35 \cdot 0,6 \cdot 0,7\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 2)\mathbb{P}(X_3 = 1) \\
&= 0,35 \cdot 0,6 \cdot 0,7 \\
&= 0,147.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=2,X_2=2,X_3=1)&=\mathbb{P}(X_1=2)\mathbb{P}(X_2=2)\mathbb{P}(X_3=1)\\&=0,35\cdot 0,6\cdot 0,7\\&=0,147.\end{aligned}$$

Vì hai biến cố $(X_1=2,X_2=1,X_3=2)$, $(X_1=2,X_2=2,X_3=1)$ là xung khắc nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1+X_2+X_3=5)=\mathbb{P}(X_1&=2,X_2=1,X_3=2)\\&+\mathbb{P}(X_1=2,X_2=2,X_3=1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 2)\mathbb{P}(X_3 = 1)\\ &= 0,35 \cdot 0,6 \cdot 0,7\\ &= 0,147.\end{aligned}$$

Vì hai biến cố $(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2)$, $(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1)$ là xung khắc nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 5) &= \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2)\\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1)\\ &= 0,042 + 0,147\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=2,X_2=2,X_3=1)&=\mathbb{P}(X_1=2)\mathbb{P}(X_2=2)\mathbb{P}(X_3=1)\\&=0,35\cdot 0,6\cdot 0,7\\&=0,147.\end{aligned}$$

Vì hai biến cố $(X_1=2,X_2=1,X_3=2)$, $(X_1=2,X_2=2,X_3=1)$ là xung khắc nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1+X_2+X_3=5)&=\mathbb{P}(X_1=2,X_2=1,X_3=2)\\&\qquad+\mathbb{P}(X_1=2,X_2=2,X_3=1)\\&=0,042+0,147\\&=0,189.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X_1) = 0 \cdot 0,65 + 2 \cdot 0,35 = 0,7,$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X_1) = 0 \cdot 0,65 + 2 \cdot 0,35 = 0,7,$$
$$\mathbb{E}(X_2) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X_1) = 0 \cdot 0,65 + 2 \cdot 0,35 = 0,7,$$
$$\mathbb{E}(X_2) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$
$$\mathbb{E}(X_3) = 1 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,3 = 1,3.$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X_1) = 0 \cdot 0,65 + 2 \cdot 0,35 = 0,7,$$
$$\mathbb{E}(X_2) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$
$$\mathbb{E}(X_3) = 1 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,3 = 1,3.$$

Do đó

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3)$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X_1) = 0 \cdot 0,65 + 2 \cdot 0,35 = 0,7,$$
$$\mathbb{E}(X_2) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$
$$\mathbb{E}(X_3) = 1 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,3 = 1,3.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3) &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3)\\ &= 0,7 + 1,6 + 1,3\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\mathbb{E}(X_1) = 0 \cdot 0,65 + 2 \cdot 0,35 = 0,7,$$
$$\mathbb{E}(X_2) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6,$$
$$\mathbb{E}(X_3) = 1 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,3 = 1,3.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3) &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) \\ &= 0,7 + 1,6 + 1,3 \\ &= 3,6. \end{aligned}$$

Ví dụ 8

Một túi chứa 4 quả cầu trắng và 3 quả cầu đen. Hai người A và B lần lượt rút một quả cầu trong túi (rút xong không trả lại). Trò chơi kết thúc khi có người rút được quả cầu đen, người đó xem như thua cuộc và trả cho người kia số tiền bằng số quả cầu rút ra nhân với 5 USD. Giả sử A là người rút trước và X là số tiền mà A thu được. Lập bảng phân bố xác suất của X.

Lời giải

Lời giải

Gọi A_k là biến cố: "Rút được quả cầu trắng ở lần rút thứ k", $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Khi đó $\overline{A_k}$ là biến cố: "Rút được quả cầu đen ở lần rút thứ k".

Lời giải

Gọi A_k là biến cố: "Rút được quả cầu trắng ở lần rút thứ k", $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Khi đó $\overline{A_k}$ là biến cố: "Rút được quả cầu đen ở lần rút thứ k".

Ta có

$$(X = -5) = \overline{A_1}.$$

Lời giải

Gọi A_k là biến cố: "Rút được quả cầu trắng ở lần rút thứ k", $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Khi đó $\overline{A_k}$ là biến cố: "Rút được quả cầu đen ở lần rút thứ k".

Ta có

$$(X = -5) = \overline{A_1}.$$

Do đó

$$\mathbb{P}(X = -5) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) = \frac{3}{7}.$$

Ta có

$$(X = 10) = A_1\overline{A_2}.$$

Ta có
$$(X = 10) = A_1\overline{A_2}.$$
Theo công thức nhân xác suất
$$\mathbb{P}(X = 10) = \mathbb{P}(A_1\overline{A_2})$$

Ta có
$$(X = 10) = A_1\overline{A_2}.$$
Theo công thức nhân xác suất
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 10) &= \mathbb{P}(A_1\overline{A_2})\\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(\overline{A_2}|A_1)\end{aligned}$$

Ta có

$$(X = 10) = A_1\overline{A_2}.$$

Theo công thức nhân xác suất

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 10) &= \mathbb{P}(A_1\overline{A_2}) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(\overline{A_2}|A_1) \\ &= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}\end{aligned}$$

Ta có

$$(X = 10) = A_1\overline{A_2}.$$

Theo công thức nhân xác suất

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 10) &= \mathbb{P}(A_1\overline{A_2}) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(\overline{A_2}|A_1) \\
&= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \\
&= \frac{2}{7}.
\end{aligned}$$

Ta có
$$(X=-15)=A_1A_2\overline{A_3}.$$

Ta có
$$(X = -15) = A_1 A_2 \overline{A_3}.$$
Do đó theo công thức nhân xác suất
$$\mathbb{P}(X = -15) = \mathbb{P}(A_1 A_2 \overline{A_3})$$

Ta có
$$(X=-15)=A_1A_2\overline{A_3}.$$
Do đó theo công thức nhân xác suất
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=-15)&=\mathbb{P}(A_1A_2\overline{A_3})\\&=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(\overline{A_3}|A_1A_2)\end{aligned}$$

Ta có

$$(X = -15) = A_1 A_2 \overline{A_3}.$$

Do đó theo công thức nhân xác suất

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = -15) &= \mathbb{P}(A_1 A_2 \overline{A_3}) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(\overline{A_3}|A_1 A_2) \\
&= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Ta có

$$(X = -15) = A_1 A_2 \overline{A_3}.$$

Do đó theo công thức nhân xác suất

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = -15) &= \mathbb{P}(A_1 A_2 \overline{A_3}) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(\overline{A_3}|A_1 A_2) \\ &= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{6}{35}.\end{aligned}$$

Ta có

$$(X = 20) = A_1A_2A_3\overline{A_4}.$$

Ta có

$$(X = 20) = A_1A_2A_3\overline{A_4}.$$

Theo công thức nhân xác suất

$$\mathbb{P}(X = 20) = \mathbb{P}(A_1A_2A_3\overline{A_4})$$

Ta có

$$(X = 20) = A_1A_2A_3\overline{A_4}.$$

Theo công thức nhân xác suất

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 20) &= \mathbb{P}(A_1A_2A_3\overline{A_4})\\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\mathbb{P}(\overline{A_4}|A_1A_2A_3)\end{aligned}$$

Ta có

$$(X = 20) = A_1 A_2 A_3 \overline{A_4}.$$

Theo công thức nhân xác suất

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 20) &= \mathbb{P}(A_1 A_2 A_3 \overline{A_4}) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\mathbb{P}(\overline{A_4}|A_1A_2A_3) \\
&= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Ta có

$$(X = 20) = A_1A_2A_3\overline{A_4}.$$

Theo công thức nhân xác suất

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 20) &= \mathbb{P}(A_1A_2A_3\overline{A_4}) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\mathbb{P}(\overline{A_4}|A_1A_2A_3) \\
&= \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{35}.
\end{aligned}$$

Ta có

$$(X = -25) = A_1A_2A_3A_4\overline{A_5}.$$

Ta có
$$(X = -25) = A_1A_2A_3A_4\overline{A_5}.$$
Do đó theo công thức nhân xác suất
$$\mathbb{P}(X = -25)$$

Ta có
$$(X = -25) = A_1A_2A_3A_4\overline{A_5}.$$
Do đó theo công thức nhân xác suất
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X = -25)\\=&\mathbb{P}(A_1A_2A_3A_4\overline{A_5})\end{aligned}$$

Ta có

$$(X = -25) = A_1A_2A_3A_4\overline{A_5}.$$

Do đó theo công thức nhân xác suất

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X = -25)\\
=&\mathbb{P}(A_1A_2A_3A_4\overline{A_5})\\
=&\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\mathbb{P}(A_4|A_1A_2A_3)\mathbb{P}(\overline{A_5}|A_1A_2A_3A_4)
\end{aligned}$$

Ta có

$$(X = -25) = A_1A_2A_3A_4\overline{A_5}.$$

Do đó theo công thức nhân xác suất

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X = -25)\\
=&\mathbb{P}(A_1A_2A_3A_4\overline{A_5})\\
=&\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\mathbb{P}(A_4|A_1A_2A_3)\mathbb{P}(\overline{A_5}|A_1A_2A_3A_4)\\
=&\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}
\end{aligned}$$

Ta có
$$(X=-25)=A_1A_2A_3A_4\overline{A_5}.$$
Do đó theo công thức nhân xác suất
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X=-25)\\
=&\mathbb{P}(A_1A_2A_3A_4\overline{A_5})\\
=&\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\mathbb{P}(A_4|A_1A_2A_3)\mathbb{P}(\overline{A_5}|A_1A_2A_3A_4)\\
=&\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\\
=&\frac{1}{35}.
\end{aligned}$$

Bảng phân bố xác suất của X

X	-5	10	-15	20	-25
$\mathbb{P}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{6}{35}$	$\dfrac{3}{35}$	$\dfrac{1}{35}$

.

Bài 4: Một số phân bố xác suất

Bài 4: Một số phân bố xác suất

1) Phân bố nhị thức

Bài 4: Một số phân bố xác suất

1) Phân bố nhị thức

• Gọi X là số lần xuất hiện biến cố A trong dãy n phép thử Bernoulli, p là xác suất để biến cố A xảy ra trong mỗi phép thử. Khi đó X được gọi là có phân bố nhị thức với các tham số n, p và ký hiệu $X \sim B(n, p)$.

Ví dụ

• Gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu cân đối đồng chất 10 lần, khi đó $X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ

• Gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu cân đối đồng chất 10 lần, khi đó $X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

• Gọi X là số lần xuất hiện mặt có số chấm ≥ 5 khi tung một con xúc xắc cân đối đồng chất 20 lần, khi đó $X \sim B\left(20, \frac{1}{3}\right)$.

• Giả sử $X \sim B(n, p)$, khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $0, 1, \ldots, n$ và

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots, n.$$

- Giả sử $X \sim B(n, p)$, khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $0, 1, \ldots, n$ và

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

- Nếu $X \sim B(n, p)$ thì

$$\mathbb{E}(X) = np$$

- Giả sử $X \sim B(n, p)$, khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $0, 1, \ldots, n$ và

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots, n.$$

- Nếu $X \sim B(n, p)$ thì

$$\mathbb{E}(X) = np$$
$$\mathbb{D}(X) = np(1-p)$$

- Giả sử $X \sim B(n, p)$, khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $0, 1, \ldots, n$ và

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots, n.$$

- Nếu $X \sim B(n, p)$ thì

$$\mathbb{E}(X) = np$$
$$\mathbb{D}(X) = np(1-p)$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

Ví dụ 1

Gọi X là số lần xuất hiện mặt có số chấm ≤ 4 khi tung một con xúc xắc cân đối đồng chất 18 lần. Tính kỳ vọng, phương sai và độ lệch tiêu chuẩn của X.

Lời giải

Lời giải

Xác suất để xuất hiện mặt có số chấm ≤ 4 khi tung một con xúc xắc là $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. Do đó $X \sim B\left(18, \dfrac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Xác suất để xuất hiện mặt có số chấm ≤ 4 khi tung một con xúc xắc là $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. Do đó $X \sim B\left(18, \dfrac{2}{3}\right)$.

$$\mathbb{E}(X) = 18 \cdot \frac{2}{3} = 12,$$

Lời giải

Xác suất để xuất hiện mặt có số chấm ≤ 4 khi tung một con xúc xắc là $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. Do đó $X \sim B\left(18, \dfrac{2}{3}\right)$.

$$\mathbb{E}(X) = 18 \cdot \frac{2}{3} = 12,$$
$$\mathbb{D}(X) = 18 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 4,$$

Lời giải

Xác suất để xuất hiện mặt có số chấm ≤ 4 khi tung một con xúc xắc là $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. Do đó $X \sim B\left(18, \dfrac{2}{3}\right)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 18 \cdot \frac{2}{3} = 12,\\
\mathbb{D}(X) &= 18 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 4,\\
\sigma(X) &= \sqrt{\mathbb{D}(X)} = \sqrt{4} = 2.
\end{aligned}$$

2) Phân bố chuẩn

2) Phân bố chuẩn

• Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân bố chuẩn với các tham số μ, σ^2 với $\sigma > 0$ và viết $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ nếu X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

2) Phân bố chuẩn

• Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân bố chuẩn với các tham số μ, σ^2 với $\sigma > 0$ và viết $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ nếu X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

• Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân bố chuẩn tắc nếu $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

2) Phân bố chuẩn

• Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân bố chuẩn với các tham số μ, σ^2 với $\sigma > 0$ và viết $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ nếu X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

• Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân bố chuẩn tắc nếu $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

• Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn tắc được ký hiệu riêng là $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

- Hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn tắc

$$\Phi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi(x)dx$$

- Hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn tắc

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

- Hàm $\Phi(t)$ có tính chất

$$\Phi(t) + \Phi(-t) = 1, \ t \in \mathbb{R}.$$

• Hàm $\Phi(t)$ có tính chất

$$\Phi(t) + \Phi(-t) = 1,\ t \in \mathbb{R}.$$

• Người ta lập bảng tính sẵn các giá trị của $\Phi(t)$ với $t \geq 0$ ở bảng phụ lục II.

• Hàm $\Phi(t)$ có tính chất

$$\Phi(t) + \Phi(-t) = 1, \ t \in \mathbb{R}.$$

• Người ta lập bảng tính sẵn các giá trị của $\Phi(t)$ với $t \geq 0$ ở bảng phụ lục II.

Ví dụ $\Phi(1,96) = 0,9750$.

• Hàm $\Phi(t)$ có tính chất

$$\Phi(t) + \Phi(-t) = 1,\ t \in \mathbb{R}.$$

• Người ta lập bảng tính sẵn các giá trị của $\Phi(t)$ với $t \geq 0$ ở bảng phụ lục II.

Ví dụ $\Phi(1,96) = 0,9750$.

• Để tìm $\Phi(t)$ với $t < 0$, ta dùng công thức $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$.

• Hàm $\Phi(t)$ có tính chất

$$\Phi(t) + \Phi(-t) = 1, \ t \in \mathbb{R}.$$

• Người ta lập bảng tính sẵn các giá trị của $\Phi(t)$ với $t \geq 0$ ở bảng phụ lục II.

Ví dụ $\Phi(1,96) = 0,9750$.

• Để tìm $\Phi(t)$ với $t < 0$, ta dùng công thức $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$.

Ví dụ

$$\Phi(-0,23) = 1 - \Phi(0,23) = 1 - 0,5910 = 0,4090.$$

Phụ lục II: Giá trị hàm phân bố xác suất $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0.00	0.01	0.02	**0.03**	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	**0.5910**	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	**0.06**	0.07	0.08	0.09
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	**0.9750**	0.9756	0.9761	0.9767

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Tính chất của phân bố chuẩn

- Giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, khi đó với mọi $a < b$ ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < X < b) &= \mathbb{P}(a \leq X \leq b)\\ &= \mathbb{P}(a < X \leq b)\\ &= \mathbb{P}(a \leq X < b)\\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

- Giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, khi đó

$$\mathbb{P}(X < b) = \mathbb{P}(X \leq b) = \Phi\Big(\frac{b - \mu}{\sigma}\Big),$$

- Giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, khi đó

$$\mathbb{P}(X < b) = \mathbb{P}(X \leq b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$\mathbb{P}(X > a) = \mathbb{P}(X \geq a) = 1 - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

- Giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, khi đó

$$\mathbb{P}(X < b) = \mathbb{P}(X \le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$\mathbb{P}(X > a) = \mathbb{P}(X \ge a) = 1 - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \;\; \mathbb{D}(X) = \sigma^2, \;\; \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = \sigma.$$

Ví dụ 2

Trọng lượng của các bao xi măng là một biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn với giá trị trung bình là 50 kg và độ lệch chuẩn $0,1$ kg. Bao xi măng được cho là đạt chuẩn nếu có trọng lượng từ $49,8$ kg đến $50,2$ kg. Tính xác suất để khi lấy ra ngẫu nhiên 1 bao thì được bao đạt chuẩn.

Lời giải

Lời giải

Gọi X là trọng lượng của các bao xi măng, khi đó $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Lời giải

Gọi X là trọng lượng của các bao xi măng, khi đó $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Theo giả thiết $\mathbb{E}(X) = 50$ và $\sigma(X) = 0,1$.

Lời giải

Gọi X là trọng lượng của các bao xi măng, khi đó $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Theo giả thiết $\mathbb{E}(X) = 50$ và $\sigma(X) = 0,1$. Theo tính chất của phân bố chuẩn $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$.

Lời giải

Gọi X là trọng lượng của các bao xi măng, khi đó $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Theo giả thiết $\mathbb{E}(X) = 50$ và $\sigma(X) = 0,1$. Theo tính chất của phân bố chuẩn $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$. Do đó $\mu = 50$ và $\sigma = 0,1$.

Lời giải

Gọi X là trọng lượng của các bao xi măng, khi đó $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Theo giả thiết $\mathbb{E}(X) = 50$ và $\sigma(X) = 0,1$. Theo tính chất của phân bố chuẩn $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$. Do đó $\mu = 50$ và $\sigma = 0,1$.
Xác suất lấy được bao đạt chuẩn

Lời giải

Gọi X là trọng lượng của các bao xi măng, khi đó $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Theo giả thiết $\mathbb{E}(X) = 50$ và $\sigma(X) = 0,1$. Theo tính chất của phân bố chuẩn $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$. Do đó $\mu = 50$ và $\sigma = 0,1$.
Xác suất lấy được bao đạt chuẩn

$$\mathbb{P}(49,8 \leq X \leq 50,2) = \Phi\left(\frac{50,2 - 50}{0,1}\right) - \Phi\left(\frac{49,8 - 50}{0,1}\right)$$

Lời giải

Gọi X là trọng lượng của các bao xi măng, khi đó $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Theo giả thiết $\mathbb{E}(X) = 50$ và $\sigma(X) = 0,1$. Theo tính chất của phân bố chuẩn $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$. Do đó $\mu = 50$ và $\sigma = 0,1$.
Xác suất lấy được bao đạt chuẩn

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(49,8 \leq X \leq 50,2) &= \Phi\left(\frac{50,2-50}{0,1}\right) - \Phi\left(\frac{49,8-50}{0,1}\right)\\ &= \Phi(2) - \Phi(-2)\end{aligned}$$

Lời giải

Gọi X là trọng lượng của các bao xi măng, khi đó $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Theo giả thiết $\mathbb{E}(X) = 50$ và $\sigma(X) = 0,1$. Theo tính chất của phân bố chuẩn $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$. Do đó $\mu = 50$ và $\sigma = 0,1$.
Xác suất lấy được bao đạt chuẩn

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(49,8 \leq X \leq 50,2) &= \Phi\left(\frac{50,2-50}{0,1}\right) - \Phi\left(\frac{49,8-50}{0,1}\right) \\
&= \Phi(2) - \Phi(-2) \\
&= \Phi(2) - (1 - \Phi(2))
\end{aligned}$$

Lời giải

Gọi X là trọng lượng của các bao xi măng, khi đó $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Theo giả thiết $\mathbb{E}(X) = 50$ và $\sigma(X) = 0,1$. Theo tính chất của phân bố chuẩn $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$. Do đó $\mu = 50$ và $\sigma = 0,1$.

Xác suất lấy được bao đạt chuẩn

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(49,8 \leq X \leq 50,2) &= \Phi\left(\frac{50,2-50}{0,1}\right) - \Phi\left(\frac{49,8-50}{0,1}\right) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2) \\ &= \Phi(2) - (1-\Phi(2)) \\ &= 2\Phi(2) - 1\end{aligned}$$

Lời giải

Gọi X là trọng lượng của các bao xi măng, khi đó $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Theo giả thiết $\mathbb{E}(X) = 50$ và $\sigma(X) = 0,1$. Theo tính chất của phân bố chuẩn $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$. Do đó $\mu = 50$ và $\sigma = 0,1$.
Xác suất lấy được bao đạt chuẩn

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(49,8 \leq X \leq 50,2) &= \Phi\left(\frac{50,2-50}{0,1}\right) - \Phi\left(\frac{49,8-50}{0,1}\right) \\
&= \Phi(2) - \Phi(-2) \\
&= \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) \\
&= 2\Phi(2) - 1 \\
&= 2 \cdot 0,9772 - 1
\end{aligned}$$

Lời giải

Gọi X là trọng lượng của các bao xi măng, khi đó $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Theo giả thiết $\mathbb{E}(X) = 50$ và $\sigma(X) = 0,1$. Theo tính chất của phân bố chuẩn $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$. Do đó $\mu = 50$ và $\sigma = 0,1$.

Xác suất lấy được bao đạt chuẩn

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(49,8 \leq X \leq 50,2) &= \Phi\left(\frac{50,2-50}{0,1}\right) - \Phi\left(\frac{49,8-50}{0,1}\right) \\
&= \Phi(2) - \Phi(-2) \\
&= \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) \\
&= 2\Phi(2) - 1 \\
&= 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544.
\end{aligned}$$

3) Phân bố đều

3) Phân bố đều

• Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân bố đều trên đoạn $[a, b]$ với $a < b$ và viết $X \sim U(a, b)$ nếu X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{nếu } x \in [a, b], \\ 0 & \text{nếu } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

3) Phân bố đều

- Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân bố đều trên đoạn $[a, b]$ với $a < b$ và viết $X \sim U(a, b)$ nếu X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{nếu } x \in [a, b], \\ 0 & \text{nếu } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

- Nếu $X \sim U(a, b)$ thì

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{D}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 3

Cho biến ngẫu nhiên X có phân bố đều trên đoạn $[-1; 1]$. Tính xác suất $\mathbb{P}(|X - \mu| < 3\sigma)$, trong đó μ là kỳ vọng của X và σ là độ lệch tiêu chuẩn của X.

Lời giải

Lời giải

Vì X có phân bố đều trên đoạn $[-1;1]$ nên

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \dfrac{-1+1}{2} = 0 \\ \sigma(X) = \dfrac{1-(-1)}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Lời giải

Vì X có phân bố đều trên đoạn $[-1;1]$ nên

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \dfrac{-1+1}{2} = 0 \\ \sigma(X) = \dfrac{1-(-1)}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Do đó $\mu = 0$, $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có

$$\mathbb{P}(|X-\mu| < 3\sigma) = \mathbb{P}\left(|X-0| < 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X-\mu|<3\sigma) &= \mathbb{P}\left(|X-0|<3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\ &= \mathbb{P}(-\sqrt{3}<X<\sqrt{3})\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X-\mu|<3\sigma) &= \mathbb{P}\left(|X-0|<3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\ &= \mathbb{P}(-\sqrt{3}<X<\sqrt{3})\\ &= \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)dx\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X-\mu|<3\sigma) &= \mathbb{P}\left(|X-0|<3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\ &= \mathbb{P}(-\sqrt{3}<X<\sqrt{3})\\ &= \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)dx\end{aligned}$$

Hàm mật độ xác suất của X

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{nếu } x\in[-1;1],\\ 0 & \text{nếu } x\notin[-1;1].\end{cases}$$

Do đó

$$\mathbb{P}(|X-\mu| < 3\sigma) = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)dx$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X-\mu|<3\sigma) &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)dx \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{\sqrt{3}} f(x)dx\end{aligned}$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X-\mu|<3\sigma) &= \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)dx \\
&= \int\limits_{-\sqrt{3}}^{-1} f(x)dx + \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} f(x)dx \\
&= \int\limits_{-\sqrt{3}}^{-1} 0dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2}dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} 0dx
\end{aligned}
$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X-\mu|<3\sigma) &= \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)dx \\ &= \int\limits_{-\sqrt{3}}^{-1} f(x)dx + \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} f(x)dx \\ &= \int\limits_{-\sqrt{3}}^{-1} 0dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2}dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} 0dx = 0+1+0 = 1.\end{aligned}$$

4) Phân bố mũ

4) Phân bố mũ

- Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân bố mũ với tham số $\lambda > 0$ nếu X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{nếu } x \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

4) Phân bố mũ

• Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân bố mũ với tham số $\lambda > 0$ nếu X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{nếu } x \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

• Nếu X có phân bố mũ với tham số $\lambda > 0$ thì

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Ví dụ 4

Thời gian phục vụ khách hàng tại một điểm dịch vụ là biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{-5x} & \text{nếu } x \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

với X được tính bằng phút/khách hàng.

a) Tìm xác suất để thời gian phục vụ một khách hàng nào đó nằm trong khoảng từ $0,4$ đến 1 phút.

b) Tìm thời gian trung bình để phục vụ một khách hàng.

Lời giải

Lời giải

a) Ta có

$$\mathbb{P}(0,4 \leq X \leq 1) = \int\limits_{0{,}4}^{1} f(x)dx$$

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0,4 \le X \le 1) &= \int\limits_{0,4}^{1} f(x)dx \\ &= \int\limits_{0,4}^{1} 5e^{-5x}dx\end{aligned}$$

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0,4 \leq X \leq 1) &= \int_{0,4}^{1} f(x)dx \\ &= \int_{0,4}^{1} 5e^{-5x}dx \\ &= \left(-e^{-5x}\right)\Big|_{0,4}^{1}\end{aligned}$$

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0,4 \le X \le 1) &= \int\limits_{0,4}^{1} f(x)dx \\ &= \int\limits_{0,4}^{1} 5e^{-5x}dx \\ &= \left(-e^{-5x}\right)\Big|_{0,4}^{1} \\ &= -e^{-5} + e^{-2}\end{aligned}$$

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(0,4 \leq X \leq 1) &= \int\limits_{0,4}^{1} f(x)dx \\
&= \int\limits_{0,4}^{1} 5e^{-5x}dx \\
&= \left(-e^{-5x}\right)\Big|_{0,4}^{1} \\
&= -e^{-5} + e^{-2} \approx 0,129.
\end{aligned}$$

b) Từ hàm mật độ của X, ta suy ra biến ngẫu nhiên X có phân bố mũ với tham số $\lambda = 5$.

b) Từ hàm mật độ của X, ta suy ra biến ngẫu nhiên X có phân bố mũ với tham số $\lambda = 5$. Vì X là thời gian phục vụ khách hàng nên thời gian trung bình phục vụ một khách hàng là $\mathbb{E}(X)$.

b) Từ hàm mật độ của X, ta suy ra biến ngẫu nhiên X có phân bố mũ với tham số $\lambda = 5$. Vì X là thời gian phục vụ khách hàng nên thời gian trung bình phục vụ một khách hàng là $\mathbb{E}(X)$.
Theo tính chất của phân bố mũ

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

5) Phân bố Poisson

5) Phân bố Poisson

• Biến ngẫu nhiên rời rạc X được gọi là có phân bố Poisson với tham số $\lambda > 0$ và viết $X \sim P(\lambda)$ nếu X nhận các giá trị $0, 1, 2, \ldots$ và

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

5) Phân bố Poisson

• Biến ngẫu nhiên rời rạc X được gọi là có phân bố Poisson với tham số $\lambda > 0$ và viết $X \sim P(\lambda)$ nếu X nhận các giá trị $0, 1, 2, \ldots$ và

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

• Số cuộc điện thoại tới tổng đài trong một khoảng thời gian xác định tuân theo phân bố Poisson.

5) Phân bố Poisson

• Biến ngẫu nhiên rời rạc X được gọi là có phân bố Poisson với tham số $\lambda > 0$ và viết $X \sim P(\lambda)$ nếu X nhận các giá trị $0, 1, 2, \ldots$ và

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

• Số cuộc điện thoại tới tổng đài trong một khoảng thời gian xác định tuân theo phân bố Poisson.

• Nếu $X \sim P(\lambda)$ thì $\mathbb{E}(X) = \lambda$ và $\mathbb{D}(X) = \lambda$.

Ví dụ 5

Một tổng đài nhận được trung bình 180 cuộc gọi trong 1 giờ. Tìm xác suất để tổng đài đó nhận được 2 cuộc gọi trong 1 phút.

Lời giải

Lời giải

Gọi X là số cuộc gọi đến tổng đài trong thời gian 1 phút, khi đó X có phân bố Poisson với tham số λ.

Lời giải

Gọi X là số cuộc gọi đến tổng đài trong thời gian 1 phút, khi đó X có phân bố Poisson với tham số λ. Vì trong 1 giờ tổng đài nhận được trung bình 180 cuộc gọi nên trong 1 phút tổng đài nhận được trung bình $180 \times \dfrac{1}{60} = 3$ cuộc gọi.

Lời giải

Gọi X là số cuộc gọi đến tổng đài trong thời gian 1 phút, khi đó X có phân bố Poisson với tham số λ. Vì trong 1 giờ tổng đài nhận được trung bình 180 cuộc gọi nên trong 1 phút tổng đài nhận được trung bình $180 \times \dfrac{1}{60} = 3$ cuộc gọi. Vì X là số cuộc gọi đến tổng đài trong thời gian 1 phút nên $\mathbb{E}(X)$ là số cuộc gọi trung bình đến tổng đài trong thời gian 1 phút.

Lời giải

Gọi X là số cuộc gọi đến tổng đài trong thời gian 1 phút, khi đó X có phân bố Poisson với tham số λ. Vì trong 1 giờ tổng đài nhận được trung bình 180 cuộc gọi nên trong 1 phút tổng đài nhận được trung bình $180 \times \dfrac{1}{60} = 3$ cuộc gọi. Vì X là số cuộc gọi đến tổng đài trong thời gian 1 phút nên $\mathbb{E}(X)$ là số cuộc gọi trung bình đến tổng đài trong thời gian 1 phút. Do đó $\mathbb{E}(X) = 3$.

Lời giải

Gọi X là số cuộc gọi đến tổng đài trong thời gian 1 phút, khi đó X có phân bố Poisson với tham số λ. Vì trong 1 giờ tổng đài nhận được trung bình 180 cuộc gọi nên trong 1 phút tổng đài nhận được trung bình $180 \times \dfrac{1}{60} = 3$ cuộc gọi. Vì X là số cuộc gọi đến tổng đài trong thời gian 1 phút nên $\mathbb{E}(X)$ là số cuộc gọi trung bình đến tổng đài trong thời gian 1 phút. Do đó $\mathbb{E}(X) = 3$.
Vì X có phân bố Poisson nên $\mathbb{E}(X) = \lambda$. Do đó $\lambda = 3$.

Lời giải

Gọi X là số cuộc gọi đến tổng đài trong thời gian 1 phút, khi đó X có phân bố Poisson với tham số λ. Vì trong 1 giờ tổng đài nhận được trung bình 180 cuộc gọi nên trong 1 phút tổng đài nhận được trung bình $180 \times \dfrac{1}{60} = 3$ cuộc gọi. Vì X là số cuộc gọi đến tổng đài trong thời gian 1 phút nên $\mathbb{E}(X)$ là số cuộc gọi trung bình đến tổng đài trong thời gian 1 phút. Do đó $\mathbb{E}(X) = 3$.

Vì X có phân bố Poisson nên $\mathbb{E}(X) = \lambda$. Do đó $\lambda = 3$.

Xác suất để tổng đài được 2 cuộc gọi trong 1 phút

Lời giải

Gọi X là số cuộc gọi đến tổng đài trong thời gian 1 phút, khi đó X có phân bố Poisson với tham số λ. Vì trong 1 giờ tổng đài nhận được trung bình 180 cuộc gọi nên trong 1 phút tổng đài nhận được trung bình $180 \times \dfrac{1}{60} = 3$ cuộc gọi. Vì X là số cuộc gọi đến tổng đài trong thời gian 1 phút nên $\mathbb{E}(X)$ là số cuộc gọi trung bình đến tổng đài trong thời gian 1 phút. Do đó $\mathbb{E}(X) = 3$.

Vì X có phân bố Poisson nên $\mathbb{E}(X) = \lambda$. Do đó $\lambda = 3$.

Xác suất để tổng đài được 2 cuộc gọi trong 1 phút

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{e^{-3}3^2}{2!} \approx 0,225.$$

6) Phân bố Student

6) Phân bố Student

• Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân bố Student với n bậc tự do và viết $X \sim T(n)$ nếu X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \ x \in \mathbb{R},$$

6) Phân bố Student

• Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân bố Student với n bậc tự do và viết $X \sim T(n)$ nếu X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \ x \in \mathbb{R},$$

trong đó $\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ là hàm gamma, $a \in \mathbb{R}$.

• Giá trị tới hạn Student với n bậc tự do mức α, ký hiệu là $t_\alpha(n)$ được định nghĩa như sau $\mathbb{P}(X > t_\alpha(n)) = \alpha$, trong đó X có phân bố Student với n bậc tự do.

• Giá trị tới hạn Student với n bậc tự do mức α, ký hiệu là $t_\alpha(n)$ được định nghĩa như sau $\mathbb{P}(X > t_\alpha(n)) = \alpha$, trong đó X có phân bố Student với n bậc tự do.

• Giá trị tới hạn $t_\alpha(n)$ được tính sẵn thành bảng ở trong bảng phụ lục III.

• Giá trị tới hạn Student với n bậc tự do mức α, ký hiệu là $t_\alpha(n)$ được định nghĩa như sau $\mathbb{P}(X > t_\alpha(n)) = \alpha$, trong đó X có phân bố Student với n bậc tự do.

• Giá trị tới hạn $t_\alpha(n)$ được tính sẵn thành bảng ở trong bảng phụ lục III.

• Ví dụ: $t_{0,025}(15) = 2,131$, $t_{0,01}(24) = 2,492$.

Phụ lục III: Giá trị tới hạn $t_\alpha(n)$ của phân bố Student

df	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.0005$
1	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587

df	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.0005$
11	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850

df	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.0005$
21	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646

df	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.0005$
31	0.853	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375	3.633
32	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
33	0.853	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356	3.611
34	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
35	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591
36	0.852	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
37	0.851	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326	3.574
38	0.851	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
39	0.851	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313	3.558
40	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551

df	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.0005$
41	0.850	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301	3.544
42	0.850	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296	3.538
43	0.850	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291	3.532
44	0.850	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286	3.526
45	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281	3.520
46	0.850	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277	3.515
47	0.849	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273	3.510
48	0.849	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269	3.505
49	0.849	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	3.265	3.500
50	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496

df	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.0005$
51	0.849	1.298	1.675	2.008	2.402	2.676	3.258	3.492
52	0.849	1.298	1.675	2.007	2.400	2.674	3.255	3.488
53	0.848	1.298	1.674	2.006	2.399	2.672	3.251	3.484
54	0.848	1.297	1.674	2.005	2.397	2.670	3.248	3.480
55	0.848	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245	3.476
56	0.848	1.297	1.673	2.003	2.395	2.667	3.242	3.473
57	0.848	1.297	1.672	2.002	2.394	2.665	3.239	3.470
58	0.848	1.296	1.672	2.002	2.392	2.663	3.237	3.466
59	0.848	1.296	1.671	2.001	2.391	2.662	3.234	3.463
60	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291